

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

“FLUCTUACIONES DEL CAMINO ALEATORIO  
BETA Y MODELOS ALEATORIOS EN LA CLASE  
KPZ”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR  
EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:  
GIANCARLOS ALBERTO OVIEDO VALVERDE

ASESOR:  
Dr. GONZALO PANIZO GARCÍA

CO-ASESOR:  
Dr. ALEJANDRO FRANCISCO RAMÍREZ CHUAQUI

Lima - Perú  
2023

*Dedico este trabajo  
a mis padres, Juan Carlos y Aquilina,  
por su invalorable apoyo y comprensión.*

# Resumen

Los objetivos de esta tesis son principalmente dos. El primer objetivo es dar una visión general de la clase de universalidad KPZ y algunos modelos que se encuentran dentro de esta clase. El segundo y principal objetivo es probar una conjetura de Barraquand y Corwin en [BC17] donde se plantea que las fluctuaciones de la energía libre del polímero beta y, análogamente, las fluctuaciones del logaritmo de la posición del camino aleatorio beta, son del orden  $t^{1/3}$  y convergen débilmente a la distribución de Tracy-Widom la cual surge del estudio de las fluctuaciones del mayor autovalor de cierta matriz aleatoria gaussiana. Barraquand y Corwin prueban dicha conjetura solo para el caso particular en el que los parametros  $\alpha$  y  $\beta$  que definen las probabilidades de transición en el camino aleatorio beta, son ambos iguales a 1. En la presente tesis abordamos el caso general en donde estos parametros pueden tomar cualquier valor positivo y también el caso en el que ambos parametros varían con el tiempo. En ambos casos conseguimos probar que las fluctuaciones siguen siendo del orden  $t^{1/3}$  y la convergencia a la distribución de Tracy-Widom.

En la introducción mencionamos brevemente algunos resultados previos sobre algunos modelos dentro la clase de universalidad KPZ y mencionamos algunas referencias importantes para quienes deseen profundizar en dichos resultados.

En el capítulo 1 iniciamos introduciendo brevemente una herramienta que será usada de manera intensiva a lo largo de toda la tesis, el determinante de Fredholm. Aquí damos una idea que motiva su definición formal y enunciamos un teorema de convergencia. En el resto de este capítulo presentamos algunos modelos solubles en la clase KPZ: dos modelos de matrices aleatorias y el polímero log-gamma. Nos enfocamos principalmente en el estudio de las fluctuaciones del mayor autovalor en las matrices aleatorias y de las fluctuaciones de la energía libre en el caso del modelo polímero.

En el capítulo 2 definimos el camino aleatorio beta y el polímero beta y enunciamos el teorema de fluctuaciones para el caso  $\alpha = \beta = 1$ . Presentamos parte de la prueba de este teorema comenzando con la fórmula que expresa

la transformada de Laplace del logaritmo de la función  $P(t, x)$  que describe la posición del camino aleatorio como un determinante de Fredholm. Presentamos la prueba de esta fórmula que involucra el método conocido como Bethe ansatz que además es usado para obtener fórmulas análogas en otros modelos dentro de la clase KPZ. La parte final de la prueba se deja para el capítulo 3.

En el capítulo 3 enunciamos el teorema de fluctuaciones del logaritmo de la función  $P(t, x)$  en el camino aleatorio beta con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrarios y con parámetros  $\alpha_t$  y  $\beta_t$  que dependen del tiempo bajo cierto régimen de convergencia. Presentamos la prueba completa que involucra varios pasos.

Finalmente, presentamos en el apéndice varios cálculos que involucran a las funciones poligamma que son necesarios para probar los resultados presentados en el capítulo 3.

# Índice general

|  |            |
|--|------------|
| <b>Resumen</b>   | <b>III</b> |
| <b>Introducción</b>  | <b>1</b>   |
| <b>1. Preliminares</b>   | <b>2</b>   |
| 1.1. El determinante de Fredholm . . . . .                           | 2          |
| 1.2. Distribución de Tracy - Widom en matrices aleatorias . . . . .  | 4          |
| 1.3. Percolación de última pasada . . . . .                          | 6          |
| 1.4. Polímero Log - gamma . . . . .                                  | 7          |
| <b>2. Camino aleatorio en ambiente Beta distribuido</b>              | <b>9</b>   |
| 2.1. Camino aleatorio beta y polímero beta . . . . .                 | 9          |
| 2.2. Transformada de Laplace de $Z$ como un determinante de Fredholm | 13         |
| 2.3. Fluctuaciones en el camino aleatorio beta . . . . .             | 20         |
| <b>3. Generalización de resultados para el beta RW</b>               | <b>24</b>  |
| 3.1. Teoremas generalizados para el camino aleatorio beta . . . . .  | 24         |
| 3.2. Prueba de los teoremas 3.1.1 y 3.1.2 . . . . .                  | 26         |
| 3.2.1. Comportamiento de la función $h$ a lo largo de los con-       |            |
| tornos de integración . . . . .                                      | 29         |
| 3.2.2. Cotas para el integrando . . . . .                            | 34         |
| 3.2.3. Prueba de la proposición (3.1) . . . . .                      | 36         |
| 3.2.4. Prueba del lema (3.2.3) . . . . .                             | 43         |
| 3.2.5. Prueba del lema (3.2.1) . . . . .                             | 45         |
| 3.2.6. Prueba del lema (3.2.2) . . . . .                             | 54         |
| <b>A. Estimaciones preliminares sobre las funciones poligamma</b>    | <b>57</b>  |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Solo consideramos caminos que avanzan hacia arriba o hacia la derecha. . . . .   | 6  |
| 2.1. Camino aleatorio beta. Cuando el camino se encuentra en un punto $(t, x)$ avanza con probabilidad $B_{t,x}$ . . . . .  | 10 |
| 2.2. Polímero aleatorio beta. . . . .   | 12 |
| 2.3. Equivalencia entre el polímero beta y el camino aleatorio beta. . . . .  | 13 |
| 3.1. Contorno $V_\theta^\epsilon$ compuesto por la unión de los contornos $C_\theta^{\epsilon,+}$ y $W_\theta^L$ , y en líneas discontinuas el contorno $C_\theta^\epsilon$ . . . . . | 27 |
| 3.2. Los contornos $V_\theta^\epsilon$ y $D_\theta^t$ evitan la singularidad en $\theta$ . . . . .  | 31 |

# Introducción

Los estudios sobre la clase de universalidad KPZ surgen en 1986 con el trabajo de Mehran Kardar, Giorgio Parisi y Vi-Cheng Zhang en [KPZ86] donde los autores estudian el comportamiento de una superficie en crecimiento cuya dinámica está gobernada por la ecuación diferencial estocástica

$$\partial_t h(t, x) = \nu \partial_x^2 h(t, x) + \frac{\lambda}{2} [\partial_x h(t, x)]^2 + W(t, x)$$

conocida como ecuación KPZ y donde  $h(t, x)$  es la altura de la superficie en el punto  $x$  al tiempo  $t$  y  $W(t, x)$  es un ruido blanco gaussiano.

Los modelos en la clase de universalidad KPZ se caracterizan por tener fluctuaciones con un comportamiento inusual, independiente del modelo pero que depende de algunas condiciones iniciales. Se conjetura que estas fluctuaciones son de orden  $N^{1/3}$  y que convergen a cierta distribución conocida como distribución de Tracy – Widom, sin embargo, esto ha sido probado de manera rigurosa solo para unos pocos modelos aleatorios.

Uno de los primeros modelos en los que se obtuvieron pruebas rigurosas son las matrices aleatorias GUE (Gaussian unitary ensemble) en [TW94] el año 1994 y las matrices aleatorias GOE (Gaussian orthogonal ensemble) en [TW96] el año 1996. En ambos casos el mayor autovalor de una matriz de orden  $N$  fluctúa al rededor de  $2N$  con fluctuaciones de orden  $N^{1/3}$  y que convergen a un tipo de distribución de Tracy-Widom.

En el año 2000 y 2005 respectivamente, Kurt Johansson en [Joh00] y Sasamoto en [Sas05] obtuvieron resultados para el total asymmetric exclusion process (TASEP) probando que este modelo está en la clase de universalidad KPZ. Cabe mencionar que el TASEP es, en cierto sentido, equivalente al modelo de percolación de última pasada, y este último es un caso límite de los modelos de polímeros aleatorios por lo se conjeturó que los polímeros aleatorios también se encuentran dentro de la clase de universalidad KPZ.

El primer modelo de polímero aleatorio donde se obtuvieron pruebas rigurosas fue el polímero log-gamma. El año 2012 Borodin, Corwin y Remenik probaron en [BCR13] que las fluctuaciones de la energía libre del polímero log-gamma son del orden de  $N^{1/3}$  y converge débilmente a la distribución de Tracy-Widom bajo la condición de que el parámetro  $\theta$  de la distribución log-gamma que define el ambiente aleatorio sea suficientemente pequeño. Posteriormente, el año 2018, Krishnan y Quastel, probaron en [KQ18] que dicho resultado se sigue cumpliendo para cualquier  $\theta$  positivo y además cuando este parámetro varía con  $N$  bajo cierto régimen de convergencia.

En [BC17] Barraquand y Corwin introdujeron el polímero beta y el camino aleatorio beta probando que el logaritmo de la función  $P(t, x)$  que define la posición del camino aleatorio tiene fluctuaciones de orden  $t^{1/3}$  y converge a la distribución de Tracy-Widom. Sin embargo los resultados de Barraquand y Corwin son probados en el caso particular en el que los parámetros de la distribución beta que define el desorden o ambiente aleatorio son ambos iguales a 1. En la presente tesis abordamos algunas generalizaciones de este modelo que incluyen el caso en el que los parámetros de esta distribución beta son arbitrarios y el caso en el que varían con el tiempo.

# Capítulo 1

## Preliminares

El objetivo de este capítulo preliminar es introducir algunos modelos aleatorios en los que se cumple que las fluctuaciones de cierta cantidad son del orden de  $N^{1/3}$  y convergen débilmente a una distribución de Tracy-Widom. Esta es una característica que comparten los modelos dentro de la clase de universalidad KPZ y será el resultado que probaremos en los siguientes capítulos para el modelo del camino aleatorio beta.

Para llegar a este tipo de resultados se hace un uso intensivo del determinante de Fredholm por lo que en la primera sección de este capítulo introducimos de manera breve este concepto.

### 1.1. El determinante de Fredholm

El determinante de Fredholm es una de las herramientas básicas en el estudio de modelos solubles ya que varias de las cantidades que aparecen en estos modelos se pueden expresar como determinantes de Fredholm. Antes de dar la definición formal en forma de serie infinita, mostramos una heurística basada en [Lax02] para obtener esta definición partiendo de la siguiente ecuación integral.

$$u(x) + \int_0^1 K(x, y)u(y)dy = f(x)$$

donde  $f$  es una función continua en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $u$  es una función continua desconocida y  $K$  es un kernel continuo en sus dos variables. Discretizando el intervalo  $[0, 1]$  tomando  $n$  puntos  $j/n$  para  $j = 1, \dots, n$  obtenemos el siguiente sistema de  $n$  ecuaciones lineales

$$u_i + h \sum_{j=1}^n K_{i,j}u_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $f_i := f(ih)$ ,  $h := 1/n$  y  $K_{i,j} := K(ih, jh)$ .

Si denotamos por  $D(h)$  al determinante de la matriz actuando sobre el vector  $u$ :

$$D(h) := \det(I + hK)$$

tenemos que  $D(h)$  es un polinomio en  $h$ :

$$D(h) = \sum_{m=0}^n a_m h^m$$

cuyos coeficientes están dados por

$$a_m = \frac{1}{m!} \left( \frac{d}{dh} \right)^m D(h)|_{h=0}$$

Para calcular la derivada de un determinante usamos la regla:

$$\frac{d}{dh} \det(C_1, \dots, C_n) = \sum_{l=1}^n \det \left( C_1, \dots, \frac{d}{dh} C_l, \dots, C_n \right)$$

con la que es posible obtener una expresión para  $D(h)$  que involucra los determinantes de las submatrices de  $K$

$$D(h) = 1 + h \sum_i K_{i,i} + \frac{h^2}{2!} \sum_{i,j} \det \begin{pmatrix} K_{i,i} & K_{i,j} \\ K_{j,i} & K_{j,j} \end{pmatrix} + \dots$$

El límite formal de la suma anterior cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $h = 1/n$  es la serie infinita

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \dots \int \det [K(x_i, x_j)] dx_1 \dots dx_k$$

Donde las integrales son sobre el intervalo  $[0, 1]$ . La siguiente definición generaliza este concepto.

**Definición 1.1.** Consideremos el espacio de Hilbert  $L^2(X, \mu)$  donde  $\mu$  es una medida sobre el espacio medible  $X$ . Sea  $K$  un operador integral actuando sobre  $f \in L^2(X, \mu)$  según  $[K(f)](x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y)$ . La función  $K(x, y)$  que asumiremos continua en ambas variables es el kernel del operador  $K$ . El determinante de Fredholm con kernel  $K$  se define como la siguiente serie:

$$\det(I + K)_{L^2(X, \mu)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_X \dots \int_X \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^k d\mu(x_1) \dots d\mu(x_k)$$

Si  $K$  es un operador clase traza la serie anterior es convergente. Un criterio útil para determinar si un operador cumple dicha condición es el siguiente:

**Lema 1.1.1.** *Un operador  $K$  actuando sobre  $L^2(\Gamma)$  donde  $\Gamma$  es un contorno suave en  $\mathbb{C}$  con kernel  $K(x, y)$  es de clase traza si  $K(x, y) : \Gamma^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y la derivada de  $K(x, y)$  respecto a la segunda variable es también continua.*

## 1.2. Distribución de Tracy - Widom en matrices aleatorias

La distribución de Tracy - Widom surge naturalmente en el estudio de los autovalores de matrices aleatorias gaussianas. Además también aparece en los modelos que describiremos más adelante, en particular, en el camino aleatorio beta y en el polímero beta.

Una matriz GUE (gaussian unitary ensemble) de orden  $N$  es una matriz hermitiana  $A$  tal que  $A_{i,j} = \mathcal{N}(0, N/\sqrt{2}) + i\mathcal{N}(0, N/\sqrt{2})$  para  $i > j$  y  $A_{i,i} = \mathcal{N}(0, N)$  donde cada una de las variables aleatorias son independientes. Si  $\lambda(N)$  es el mayor autovalor de una matriz GUE de orden  $N$ , se prueba en [TW94] que se cumple lo siguiente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{\lambda(N) - 2N}{N^{1/3}} < s \right) = F_{\text{GUE}}(s)$$

Donde la distribución límite  $F_{\text{GUE}}$  se conoce como la distribución de Tracy - Widom GUE. El resultado anterior nos dice que para  $N$  grande, el mayor autovalor de una matriz GUE fluctúa aleatoriamente al rededor de  $2N$  donde estas fluctuaciones son del orden  $N^{1/3}$  y, en el límite, tienen una distribución de Tracy - Widom. De manera un poco más informal podemos escribir el límite anterior de la siguiente manera:

$$\lambda(N) \sim 2N + N^{1/3}\xi_2$$

cuando  $N \rightarrow \infty$  y donde  $\xi_2$  tiene distribución de Tracy - Widom GUE.

La función de distribución de Tracy - Widom GUE se puede expresar en términos de un determinante de Fredholm:

$$F_{\text{GUE}}(s) = \det (I - K_{\text{Ai}})_{L^2[s, \infty)}$$

donde  $K_{\text{Ai}}$  es el kernel de Airy

$$\begin{aligned} K_{\text{Ai}}(x, y) &= \int_0^\infty \text{Ai}(x + \lambda)\text{Ai}(y + \lambda)d\lambda \\ &= \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x)\text{Ai}(y)}{x - y} \end{aligned}$$

Aquí  $\text{Ai}(\cdot)$  es la función de Airy

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)} dt.$$

Otra forma equivalente de definir la función de distribución de Tracy - Widom GUE es en términos de la solución de la ecuación de Painlevé II

$$q''(s) = 2q^3(s) + sq(s)$$

con la condición  $q(s) \sim \text{Ai}(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Si  $q$  es la solución de la ecuación anterior entonces la función de distribución de una variable aleatoria Tracy-Widom GUE está dada por

$$F_{\text{GUE}}(s) = \exp \left[ - \int_0^{\infty} (x - s)^2 q^2(x) dx \right]$$

De manera similar se define una matriz GOE (gaussian orthogonal ensemble) de orden  $N$  como una matriz simétrica  $A$  (de valores reales) tal que  $A_{i,j} = \mathcal{N}(0, N)$  para  $i > j$  y  $A_{i,i} = \mathcal{N}(0, \sqrt{2}N)$  y además estas variables son independientes. Análogamente al caso anterior, tenemos [TW96]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{\lambda(N) - 2N}{N^{1/3}} < s \right) = F_{\text{GOE}}(s)$$

Es decir, nuevamente se cumple que el valor del mayor autovalor fluctúa al rededor de  $2N$  con desviaciones de orden  $N^{1/3}$  y convergiendo a la distribución de Tracy - Widom GOE.

$$\lambda(N) \sim 2N + N^{1/3} \xi_1$$

cuando  $N \rightarrow \infty$  y donde  $\xi_1$  es una variable aleatoria con distribución Tracy - Widom GOE.

En este caso esta distribución se puede expresar en términos del siguiente determinante de Fredholm [FS05]:

$$F_{\text{GOE}}(s) = \det (I - B_s)_{L^2[0, \infty)}$$

donde  $B_s(x, y) = \text{Ai}(x + y + s)$ . La fórmula original derivada por Tracy y Widom expresa la distribución  $F_{\text{GOE}}$  en función de la solución de la ecuación de Painlevé II:

$$F_{\text{GOE}}(s) = \sqrt{F_{\text{GUE}}(s)} \exp \left[ - \frac{1}{2} \int_s^{\infty} q(x) dx \right].$$

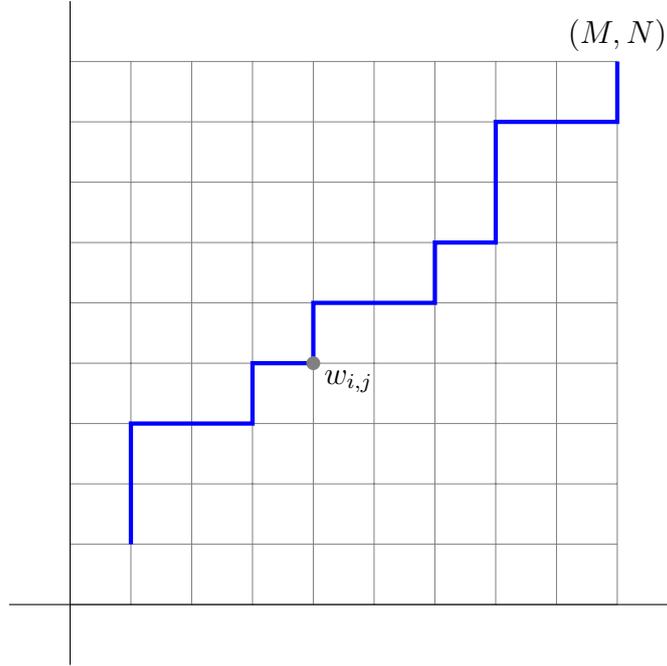


Figura 1.1: Solo consideramos caminos que avanzan hacia arriba o hacia la derecha.

### 1.3. Percolación de última pasada

Para definir este modelo comenzamos con una familia de variables aleatorias  $w(i, j)$ , con  $(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2$  independientes y geoméricamente distribuidas

$$\mathbb{P}[w(i, j) = k] = (1 - q)q^k \quad k \in \mathbb{N}$$

donde  $0 < q < 1$ .

Vamos a denotar por  $\Pi_{M,N}$  al conjunto de todos los caminos  $\pi$  sobre  $\mathbb{Z}_+^2$  que se mueven hacia arriba o hacia la derecha partiendo del punto  $(1, 1)$  y llegando al punto  $(M, N)$  como en la Figura 1.1.

Habiendo definido los pesos aleatorios en cada vértice, ahora podemos definir la siguiente variable aleatoria que representa el mayor peso que puede alcanzar un camino admisible:

$$G(M, N) = \max_{\pi \in \Pi_{M,N}} \sum_{(i,j) \in \pi} w(i, j).$$

Kurt Johansson prueba en [Joh00] que se cumple el siguiente resultado

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}[G(N, N)] = w(q)$$

donde  $w(q) := \frac{2\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}$ .

Este resultado nos dice que  $G(N, N)$ , en promedio y para  $N$  grande, crece linealmente a velocidad  $w(q)$  mientras que el siguiente resultado nos dice que las fluctuaciones de  $G(N, N)$  al rededor de su media  $Nw(q)$  son del orden de  $N^{1/3}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{G(N, N) - Nw(q)}{\sigma(q)N^{1/3}} \leq s \right] = F_{\text{GUE}}(s)$$

donde  $\sigma(q) = \frac{q^{1/6}}{1-q}(1 + \sqrt{q})^{4/3}$ .

## 1.4. Polímero Log - gamma

El polímero log-gamma fue introducido por Seppäläinen en [Sep12]. Antes de entrar a definir este modelo polímero recalamos que una variable aleatoria  $X$  tiene distribución inversa gamma con parametro  $\theta > 0$  si toma valores sobre los reales positivos y su función de densidad está dada por

$$\mathbb{P}(X \in dx) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} x^{-\theta-1} e^{-1/x} dx$$

lo que será denotado por  $X \sim \Gamma^{-1}(\theta)$ .

Para definir el polímero log-gamma consideremos nuevamente la familia de caminos denotada por  $\Pi_{N,N}$  como en el modelo de percolación de última pasada, pero en esta ocasión en cada vértice  $(i, j)$  asignamos un peso aleatorio  $w(i, j)$  de manera independiente y con distribución inversa gamma. Definimos el peso de un camino  $\pi \in \Pi_{N,N}$  como el producto de los pesos de los vértices que recorre el camino  $\pi$

$$\prod_{(i,j) \in \pi} w_{i,j}$$

Entonces la función de partición del polímero log-gamma con parametro  $\theta$  está dada por la suma de todos pesos de los caminos en  $\Pi_{N,N}$

$$Z(N, N) = \sum_{\pi \in \Pi_{N,N}} \prod_{(i,j) \in \pi} w(i, j)$$

Seppäläinen prueba en [Sep12] (véase también [OY01]) el siguiente resultado importante sobre el polímero log-gamma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Z(N, N)}{N} = f_\theta$$

donde  $f_\theta := -2\Psi(\theta/2)$  y  $\Psi(x) = [\log \Gamma]'(x)$  es la función digamma.

Este resultado nos dice que el logaritmo de la función de partición del polímero log-gamma crece linealmente para  $N$  grande a una velocidad  $f_\theta$ . Posteriormente Borodin *et al.* prueban en [BCR13] que, para  $\theta$  suficientemente pequeño, las fluctuaciones del logaritmo de la función de partición al rededor de su media asintótica son del orden  $N^{1/3}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\log Z(N, N) - Nf_\theta}{\sigma(\theta)N^{1/3}} \leq r \right] = F_{\text{GUE}}(r) \quad (1.4.1)$$

donde  $\sigma(\theta) := [-\Psi''(\theta/2)]^{1/3}$ .

La restricción de tomar  $\theta$  suficiente pequeño era una restricción técnica que fue generalizada posteriormente por Krishnan y Quastel en [KQ18] quienes probaron el mismo resultado para todo  $\theta$  positivo.

La prueba de estos resultados se basa en que la transformada de Laplace de la función de partición  $Z(N, N)$  se puede expresar como un determinante de Fredholm para cierto kernel  $K_u$  y sobre cierto contorno  $C_\delta$  de la siguiente manera

$$\mathbb{E} [e^{-uZ(N, N)}] = \det (I + K_u)_{L^2(C_\delta)} \quad (1.4.2)$$

Además resulta que si tomamos  $u$  como  $u = u(r) = \exp(-Nf_\theta - rN^{1/3})$  entonces el lado izquierdo de (1.4.2) en el límite es igual al lado izquierdo de (1.4.1).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} [e^{-uZ(N, N)}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\log Z(N, N) - Nf_\theta}{\sigma(\theta)N^{1/3}} \leq r \right] \quad (1.4.3)$$

Teniendo estas dos últimas ecuaciones el resto de la prueba se reduce a un análisis asintótico del determinante de Fredholm en (1.4.2) para demostrar que converge a la función de distribución de Tracy - Widom GUE.

Otra generalización importante en este modelo que también se prueba en [KQ18] incluye hacer variar al parametro  $\theta$  con  $N$ . En este caso es conveniente hacer el cambio de variable  $\theta = \beta^{-2}$  y con la hipótesis de que  $\beta_N \rightarrow \beta \in [0, \infty)$  y  $\sigma(\beta_N)N^{1/3} \rightarrow \infty$  se obtiene que las fluctuaciones continúan en el régimen de orden  $N^{1/3}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\log Z(N, N) - Nf_N}{\sigma(N)N^{1/3}} \leq r \right] = F_{\text{GUE}}(r). \quad (1.4.4)$$

Notemos que como ahora el parametro  $\theta$  (o  $\beta$ ) varía, entonces los valores de  $f$  y  $\sigma$  dependen de  $N$  además de la secuencia  $\{\beta_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ .

# Capítulo 2

## Camino aleatorio en ambiente Beta distribuido

En este capítulo exponemos los resultados más importantes del trabajo de Barraquand y Corwin en [BC17] con cierto detalle ya que serán necesarios para entender los resultados y generalizaciones del capítulo siguiente. Comenzamos definiendo con precisión el camino aleatorio beta y el polímero beta.

### 2.1. Camino aleatorio beta y polímero beta

Recalamos que la distribución de una variable aleatoria con distribución beta de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  está dada por

$$\mathbb{P}(B \leq r) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^r x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

**Definición 2.1** (Camino aleatorio beta). *Sea  $(B_{x,t})_{x \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  una colección de variables aleatorias independientes con distribución beta de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Llamamos a esta colección, el ambiente del camino aleatorio. Definido el ambiente aleatorio, pasamos ahora a definir el camino aleatorio beta como un camino aleatorio  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  en  $\mathbb{Z}$ , comenzando siempre desde 0 y tal que*

- $X_{t+1} = X_t + 1$  con probabilidad  $B_{X_t, t}$
- $X_{t+1} = X_t - 1$  con probabilidad  $1 - B_{X_t, t}$

Además denotamos por  $P$  y por  $E$  a la medida y la esperanza asociadas al camino aleatorio beta.

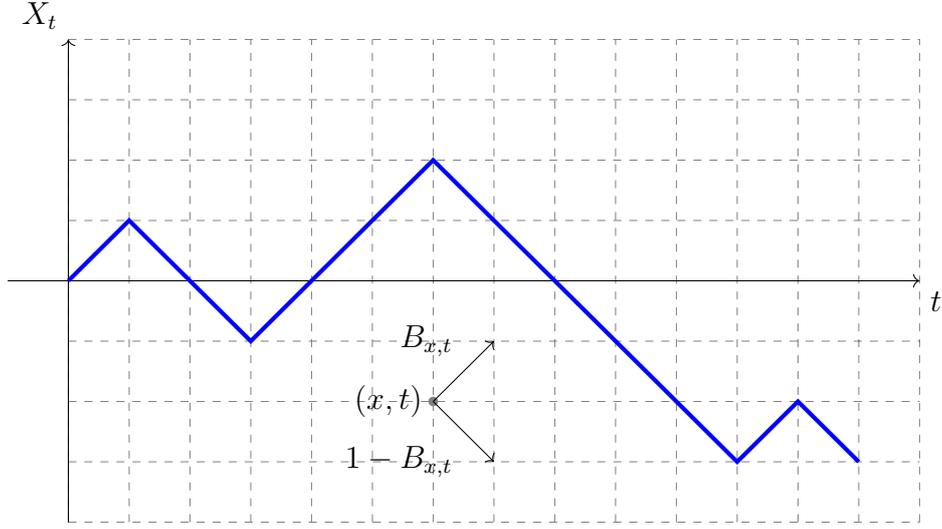


Figura 2.1: Camino aleatorio beta. Cuando el camino se encuentra en un punto  $(t, x)$  avanza con probabilidad  $B_{t,x}$ .

Una cantidad importante en este modelo y análoga al concepto de función de partición en el caso de polímeros aleatorios es la función aleatoria  $P(t, x) = P(X_t \geq x)$ . El objetivo principal de esta tesis es demostrar que las fluctuaciones de esta cantidad  $P$  son del orden de  $t^{1/3}$  y convergen a una distribución de Tracy - Widom GUE para un amplio rango de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la distribución beta que define el ambiente aleatorio.

A continuación definimos el modelo polímero beta que, como veremos más adelante, está muy relacionado y es en cierta forma equivalente al camino aleatorio beta.

**Definición 2.2.** *El polímero beta de punto a punto es una medida  $Q_{t,n}$  sobre el espacio de caminos  $\pi$  entre  $(0, 1)$  y  $(t, n)$ . Los saltos permitidos para estos caminos desde un punto  $(s, k)$  son:*

- *horizontalmente hacia  $(s + 1, k)$ ,*
- *diagonalmente hacia  $(s + 1, k + 1)$*

Sea  $B_{i,j}$  una familia de variables aleatorias independientes con distribución beta de parámetros  $\mu$  y  $\nu - \mu$  donde  $0 < \mu < \nu$ , la medida  $Q_{t,n}$  es definida según:

$$Q_{t,n}(\pi) = \frac{\prod_{e \in \pi} w_e}{Z(t, n)} \quad (2.1.1)$$

donde el producto es tomado sobre los ejes del camino  $\pi$  y los pesos  $w_e$  se definen según

$$w_e = \begin{cases} B_{i,j} & \text{si } e = (i-1, j) \rightarrow (i, j) \\ 1 & \text{si } e = (i-1, i) \rightarrow (i, i+1) \\ 1 - B_{i,j} & \text{si } e = (i-1, j-1) \rightarrow (i, j) \text{ con } i \geq j \end{cases}$$

La función de partición está dada por la suma de los pesos de todos los caminos admisibles uniendo el punto  $(0, 1)$  con  $(t, n)$ :

$$Z(t, n) = \sum_{\pi: (0,1) \rightarrow (t,n)} \prod w_e.$$

La función de partición cumple la siguiente recurrencia que se prueba fácilmente usando la regla de probabilidad total

$$\begin{cases} Z(t, n) = Z(t-1, n)B_{t,n} + Z(t-1, n-1)(1 - B_{t,n}) & \text{para } t \geq n > 1 \\ Z(t, t+1) = Z(t-1, t) & \text{para } t > 0 \\ Z(t, 1) = Z(t-1, 1)B_{t,1} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

con la condición inicial  $Z(0, 1) = 1$ .

Una forma equivalente para definir la función de partición del polímero beta es mediante el modelo línea - punto el cual es una variante del modelo anterior (punto - punto). En este modelo se consideran todos los caminos que comienzan en un punto  $(0, m)$  para algún  $m$  tal que  $0 < m \leq n$  y terminando en  $(t, n)$ . Al igual que el caso punto - punto, los caminos de este modelo pueden avanzar horizontalmente hacia la derecha o diagonalmente hacia el vértice superior derecho y el peso de cada camino está dado por el producto de los pesos de cada eje los cuales vienen dados, en este modelo, por

$$\tilde{w}_e = \begin{cases} B_{i,j} & \text{si } e = (i-1, j) \rightarrow (i, j) \\ 1 - B_{i,j} & \text{si } e = (i-1, j-1) \rightarrow (i, j) \end{cases}$$

Definiendo de esta forma los pesos en los ejes y considerando los caminos antes mencionados, usando nuevamente el teorema de probabilidad total se tiene que la función de partición  $\tilde{Z}(t, n)$  del modelo polímero beta de línea a punto cumple también con una recurrencia:

$$\tilde{Z}(t, n) = \tilde{Z}(t-1, n)B_{t,n} + \tilde{Z}(t-1, n-1)(1 - B_{t,n})$$

para todo  $t, n > 0$  y fijando la condición inicial  $\tilde{Z}(0, n) = 1$ . Con los pesos así definidos podemos ver por inducción que la función de partición  $\tilde{Z}(t, n)$

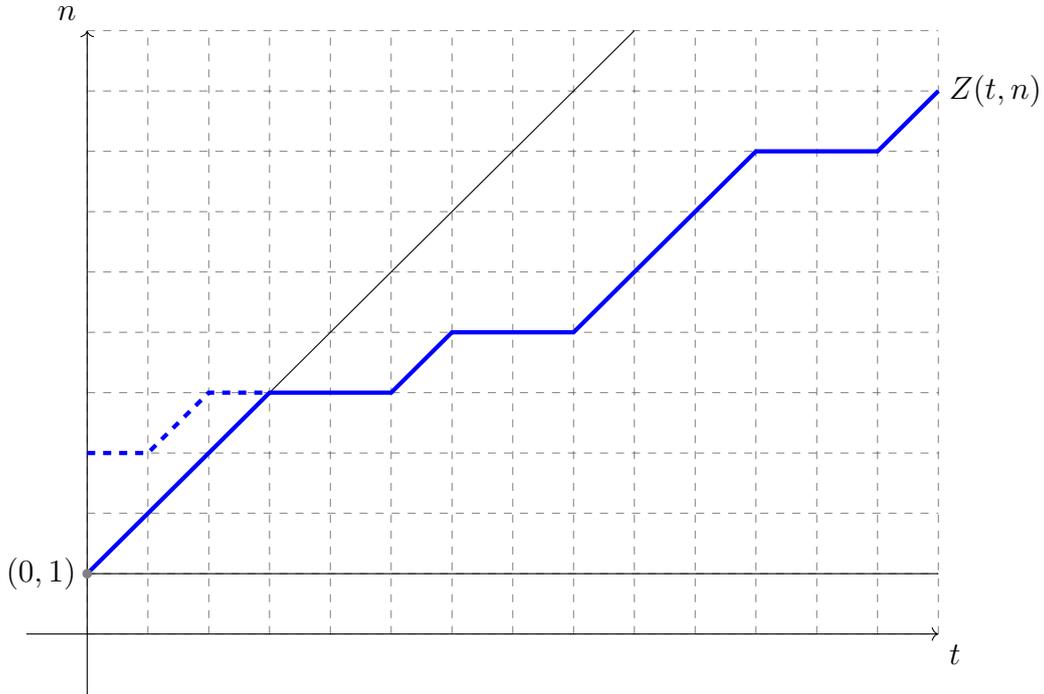


Figura 2.2: Polímero aleatorio beta.

del modelo línea - punto es igual a 1 para  $n > t$  mientras que para el caso  $n \leq t + 1$  la función de partición del modelo punto - punto coincide con la función de partición del modelo línea - punto, es decir,  $Z(t, n) = \tilde{Z}(t, n)$ . El camino aleatorio beta y el polímero beta están relacionados mediante el siguiente resultado demostrado por Barraquand y Corwin en [BC17]:

**Proposición 2.1.** *Considerando el camino aleatorio beta con parametros  $\alpha$  y  $\beta$  positivos y el polímero beta con parametros  $\mu = \alpha$  y  $\nu = \alpha + \beta$ . Para cualquier par de enteros no negativos  $t$  y  $n$  tal que  $n \leq t + 1$ , se cumple la siguiente igualdad en distribución*

$$Z(t, n) = P(t, t - 2n + 2) \quad (2.1.2)$$

*Demostración.* Primero notemos que debido a que  $\mu = \alpha$  y  $\nu = \alpha + \beta$  la colección de variables aleatorias beta que define el polímero beta tiene la misma ley que la colección de variables aleatorias beta que define el camino aleatorio beta.

Ya que la función de partición del camino polímero beta punto - punto es igual a la función de partición del polímero beta línea - punto, podemos trabajar con este último modelo.

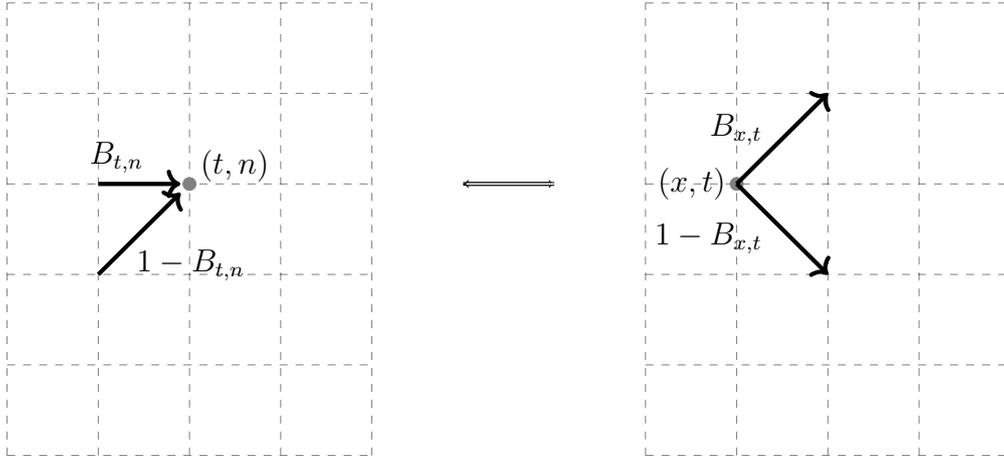


Figura 2.3: Equivalencia entre el polímero beta y el camino aleatorio beta.

Fijemos  $t$  y  $n$  con la misma paridad y notemos que la variable aleatoria  $P(t, t - 2n + 2)$  es la probabilidad de que al tiempo  $t$  el camino aleatorio beta se ubique en la posición  $t - 2n + 2$  o en una posición superior. Dicho evento es equivalente a que el camino aleatorio beta al tiempo  $t$  haya realizado a lo más  $n - 1$  pasos hacia atrás.

Podemos identificar cada camino polímero que llega al punto  $(t, n)$  con un camino aleatorio mirando el camino polímero en reversa e identificando cada eje vertical en el polímero con un paso hacia adelante en el camino aleatorio beta. Bajo dicha equivalencia de caminos, el evento de que al tiempo  $t$  el camino aleatorio beta haya realizado a lo más  $n - 1$  pasos hacia atrás es equivalente a que el camino polímero (visto en reversa) inicie en  $(t, n)$  y llegue a algún punto  $(0, m)$  con  $1 \leq m \leq n$ .  $\square$

## 2.2. Transformada de Laplace de $Z$ como un determinante de Fredholm

Uno de los resultados más importantes en el trabajo de Barraquand y Corwin es expresar la transformada de Laplace de la función de partición del polímero beta como un determinante de Fredholm. Barraquand y Corwin prueban el siguiente teorema de dos formas independientes en [BC17]. La primera prueba usa un resultado análogo para un modelo discreto de sistemas de partículas conocido como  $q$ -Hann TASEP y prueban que, en cierto sentido, este sistema de partículas converge al polímero beta. En esta sección se analizará la segunda prueba de Barraquand y Corwin la cual usa el

método conocido como Bethe ansatz para hallar una fórmula integral para los momentos de la función de partición del polímero beta.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$ . Fijando  $n$  y  $t$  enteros no negativos tal que  $n \leq t + 1$  y  $\nu > \mu > 0$ . Entonces se cumple*

$$\mathbb{E} [e^{uZ(t,n)}] = \det (I + K_u^{BP})_{\mathbb{L}^2(C_0)}$$

donde el contorno  $C_0$  es un círculo pequeño positivamente orientado que contiene el origen pero no contiene  $-\nu$  ni  $-1$  y el operador  $K_u^{BP} : \mathbb{L}^2(C_0) \rightarrow \mathbb{L}^2(C_0)$  está definido por el kernel

$$K_u^{BP}(v, v') = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} (-u)^s \frac{g^{BP}(v)}{g^{BP}(v+s)} \frac{ds}{s+v-v'}$$

y donde la función  $g^{BP}$  viene dada por

$$g^{BP}(v) = \left[ \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(\nu+v)} \right]^n \left[ \frac{\Gamma(\nu+v)}{\Gamma(\mu+v)} \right]^t \Gamma(\nu+v)$$

Antes de pasar a la prueba del teorema presentamos un lema que será de utilidad.

**Lema 2.2.1.** *Sean  $X, Y$  dos elementos generadores de un álgebra asociativa tal que*

$$YX = \frac{1}{1+\nu} XX + \frac{\nu-1}{1+\nu} XY + \frac{1}{1+\nu} YY$$

Entonces se tiene la siguiente identidad binomial no conmutativa

$$[pX + (1-p)Y]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(\nu-\mu)_j (\mu)_{n-j}}{(\nu)_n} X^j Y^{n-j}$$

donde  $p = 1 - \frac{\mu}{\nu}$  y  $(a)_k$  son los símbolos de Pochhammer definimos por  $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$  y  $(a)_0 = 1$ .

El primer paso para la prueba del teorema (2.2.1) es conseguir una expresión integral para los momentos de la función de partición del polímero beta para lo que necesitamos la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.** *Sean  $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$ , se cumple que*

$$\mathbb{E} [Z(t, n_1) \cdots Z(t, n_k)] = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int \cdots \int \prod_{1 \leq A < B \leq k} \frac{z_A - z_B}{z_A - z_B - 1} \prod \left( \frac{\nu + z_j}{z_j} \right)^{n_j} \left( \frac{\mu + z_j}{\nu + z_j} \right)^t \frac{dz_j}{\nu + z_j} \quad (2.2.1)$$

donde el contorno para  $z_k$  es una circunferencia pequeña al rededor del origen mientras que para cada  $j = 1, \dots, k-1$  el contorno para  $z_j$  contiene el contorno para  $z_{j+1}$  y ninguno de estos contornos contiene el punto  $-\nu$ .

*Demostración.* Denotamos como  $u(t, \vec{n})$  el lado izquierdo de la igualdad (2.2.1) y por  $\mathbb{W}^k$  el conjunto  $\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^k : n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k\}$ .

Usando la relación de recurrencia para la función de partición del polímero beta se obtiene la siguiente recurrencia para  $u(t, n)$ :

$$u(t+1, \vec{n}) = \sum_{j_1=0}^{c_1} \dots \sum_{j_l=0}^{c_l} \left[ \prod_{i=1}^l \binom{c_i}{j_i} \frac{(\nu - \mu)_{j_i} (\mu)_{c_i - j_i}}{(\nu)_{c_i}} \prod_{r=0}^{j_i-1} \tau^{(c_1 + \dots + c_i - r)} \right] u(t, \vec{n}) \quad (2.2.2)$$

donde  $\tau^{(i)}$  es un operador que actúa sobre una función  $f : \mathbb{W}^k \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera:

$$\tau^{(i)} f(\vec{n}) = f(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k).$$

La ecuación de recurrencia (2.2.2) se conoce como *true evolution equation* la cual se puede expresar en términos de dos ecuaciones más sencillas las cuales se definen en base a los siguientes operadores

$$\mathcal{L}_c^{cluster} = \sum_{j=0}^c \binom{c}{j} \frac{(\nu - \mu)_j (\mu)_{c-j}}{(\nu)_c} \prod_{r=0}^j \tau^{(c-r)}$$

Note que este operador aparece al lado derecho de la *true evolución equation*. Definimos también el siguiente operador

$$\mathcal{L}_c^{free} = \prod_{i=1}^c \nabla_i$$

donde  $\nabla_i = p\tau^{(i)} + (1-p)$ . Además note que para  $c = 1$  tenemos  $\mathcal{L}_c^{cluster} = \mathcal{L}_c^{free}$ .

Para una función  $f : \mathbb{Z}^c \rightarrow \mathbb{C}$  identificamos el monomio  $X_1 X_2 \dots X_c$  donde  $X_i \in \{X, Y\}$  con  $f(\vec{n})$  donde para todo  $1 \leq i \leq c$  se tiene  $n_{c-i} = n-1$  si  $X_i = X$  y  $n_{c-i} = n$  si  $X_i = Y$ . Usando esta identificación la fórmula binomial del lema (2.2.1) nos dice que los operadores  $\mathcal{L}_c^{cluster}$  y  $\mathcal{L}_c^{free}$  actúan idénticamente sobre las funciones  $f$  que satisfacen la siguiente condición para toda  $1 \leq i < c$ :

$$\left[ \frac{1}{1+\nu} \tau^{(i)} \tau^{(i+1)} + \frac{\nu-1}{1+\nu} \tau^{(i+1)} + \frac{1}{1+\nu} - \tau^{(i)} \right] f(n, \dots, n) = 0$$

Note que el operador que define la *true evolution equation* actúa independientemente sobre cada cluster como el operador  $\mathcal{L}_c^{cluster}$ . Se sigue que si una función  $u : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{C}$  satisface la siguiente condición de frontera:

$$\left[ \frac{1}{1+\nu} \tau^{(i)} \tau^{(i+1)} + \frac{\nu-1}{1+\nu} \tau^{(i+1)} + \frac{1}{1+\nu} - \tau^{(i)} \right] u(t, \vec{n}) = 0$$

para todo  $\vec{n}$  tal que  $n_i = n_{i+1}$  para algún  $1 \leq i < k$  y si además se satisface la *free evolution equation*

$$u(t+1, \vec{n}) = \left[ \prod_{i=1}^k \nabla_i \right] u(t, \vec{n})$$

para toda  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^k$ , entonces la restricción de  $u(t, \vec{n})$  a  $\mathbb{W}^k$  satisface la *true evolution equation*.

Ahora nos queda verificar que la expresión del lado derecho de (2.2.1) satisface la *free evolution equation*, las condiciones de frontera y la condición inicial de  $u(0, \vec{n})$  para  $\vec{n} \in \mathbb{W}^k$ .

Por la definición de la función  $u$  tenemos que  $u(0, \vec{n}) = \prod_{i=1}^k \mathbb{1}_{n_i \geq 1} = \mathbb{1}_{n_k \geq 1}$  donde la segunda igualdad se debe a que los  $n_i$  están ordenados. Por otro lado, en la expresión del lado derecho en (2.2.1) cuando  $t = 0$  y  $n_k \leq 0$  note que no hay polos en el origen y por lo tanto la integral es igual a cero. Cuando  $n_k > 0$  entonces todos los  $n_i$  también son positivos y no hay polos en  $-\nu$  (para  $t = 0$ ). Luego, el residuo en el infinito para cada variable  $z_k, z_{k-1}, \dots$  es igual a uno y por lo tanto la condición inicial es satisfecha.

Para probar que se satisface la condición de frontera, asumimos que  $n_i = n_{i+1}$  para algún  $i$ . Note que al aplicar el operador

$$\frac{1}{1+\nu} \tau^{(i)} \tau^{(i+1)} + \frac{\nu-1}{1+\nu} \tau^{(i+1)} + \frac{1}{1+\nu} - \tau^{(i)}$$

al integrando, se obtiene que el integrando queda multiplicado por el factor

$$\frac{1}{1+\nu} \frac{z_i}{\nu+z_i} \frac{z_{i+1}}{\nu+z_{i+1}} + \frac{\nu-1}{\nu+1} \frac{z_{i+1}}{\nu+z_{i+1}} + \frac{1}{1+\nu} - \frac{z_i}{\nu+z_i} = \frac{-\nu^2(z_i - z_{i+1} - 1)}{(1+\nu)(\nu+z_i)(\nu+z_{i+1})}$$

cancelando de este modo el polo en  $z_i = z_{i+1} + 1$  de modo que se puede usar el mismo contorno para ambas variables y, ya que el integrando es ahora antisimétrico para las variables  $z_i$  y  $z_{i+1}$ , la integral es cero.

Finalmente, para mostrar que se satisface la *free evolution equation* es suficiente notar que aplicar el operador  $p\tau^{(i)} + (1-p)$  a la integral del lado

derecho de la ecuación (2.2.1) es equivalente a multiplicar el integrando por el factor  $\prod_{j=1}^k \frac{\mu+z_j}{\nu+z_j}$  lo cual se infiere a partir de la igualdad:

$$[p\tau^{(i)} + (1-p)] = \left(\frac{\nu+z_i}{z_i}\right)^{n_i} \frac{\mu+z_i}{\nu+z_i}.$$

□

Un segundo paso para la prueba del teorema (2.2.1) consiste en expresar los momentos de la función de partición como una suma de integrales múltiples sobre un mismo contorno. Presentamos dicho resultado en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.** *Para toda  $n, t \geq 0$  se cumple la siguiente igualdad:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z(t, n)^k] &= k! \sum_{\lambda \vdash k} \frac{1}{m_1! m_2! \cdots} \frac{1}{(2\pi i)^{l(\lambda)}} \int \cdots \int \det \left( \frac{1}{v_i - v_j - \lambda_i} \right)_{i,j=1}^{l(\lambda)} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{l(\lambda)} f(v_j) f(v_j + 1) \cdots f(v_j + \lambda_j - 1) dv_1 \cdots dv_{l(\lambda)} \end{aligned}$$

donde

$$f(v) = \frac{g^{BP}(v)}{g^{BP}(v+1)} = \left(\frac{\nu+v}{v}\right)^n \left(\frac{\mu+v}{\nu+v}\right)^t \frac{1}{v+\nu}$$

Cada contorno de integración es una circunferencia pequeña al rededor del origen y excluyendo el punto  $-\nu$ . Cada partición  $\lambda \vdash k$  (es decir,  $\sum_i \lambda_i = k$ ) se puede denotar por  $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots$  lo cual significa que el número  $i$  se repite  $m_i$  veces en la partición  $\lambda$  y  $l(\lambda)$  es la cantidad de componentes no nulos en la partición  $\lambda$ .

*Demostración.* Una aplicación directa de la proposición (2.2.1) cuando  $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$  nos da el siguiente resultado

$$\mathbb{E} [Z(t, n)^k] = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int \cdots \int \prod_{A < B} \frac{z_A - z_B}{z_A - z_B - 1} \prod_{j=1}^k f(z_j) dz_j.$$

Para completar la prueba recurrimos a la proposición 3.2.1 de [BC14] en su caso límite cuando  $q \rightarrow 1$  de donde directamente se obtiene el resultado. □

Teniendo estas dos proposiciones a la mano podemos completar la prueba del teorema (2.2.1).

*Demostración de la Proposición (2.2.1).* Primero establecemos la notación  $\mu_k = \mathbb{Z} [(t, n)^k]$ . El caso límite cuando  $q \rightarrow 1$  de la proposición 3.2.8 en [BC14] muestra que

$$\sum_{k \geq 0} \mu_k \frac{u^k}{k!} = \det(I + K)_{\mathbb{L}^2(\mathbb{Z}_{>0} \times C_0)}$$

donde  $\det(I + K)$  es el determinante de Fredholm del operador  $K$  definido por el kernel

$$K(n_1, v_1; n_2, v_2) = \frac{u^{n_1} f(v_1) f(v_1 + 1) \cdots f(v_1 + n_1 - 1)}{v_1 + n_1 - v_2}$$

y  $C_0$  es una circunferencia positivamente orientada al rededor del origen y que excluye el punto  $-\nu$ .

Ya que  $|Z(t, n)| \leq 1$  podemos usar el teorema de convergencia dominada para intercambiar la suma y la esperanza en la expresión anterior, de modo que tenemos la siguiente igualdad:

$$\sum_{k \geq 0} \mu_k \frac{u^k}{k!} = \mathbb{E} [e^{uZ(t, n)}]$$

Por lo tanto, la prueba concluye si demostramos el siguiente lema.  $\square$

**Lema 2.2.2.** *Para cualquier  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $|u| < 1$  se cumple lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u^n \frac{g^{BP}(v)}{g^{BP}(v+n)} \frac{1}{v+n-v'} &= \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(1+s)(-u)^s \frac{g^{BP}(v)}{g^{BP}(v+s)} \frac{ds}{v+s-v'} & \end{aligned}$$

*Demostración.* Para probar este lema usamos el hecho de que el residuo de la función  $\Gamma(-s)\Gamma(1+s)$  en el punto  $s = k$  es  $(-1)^{k+1}$ , por lo tanto usando el teorema de residuos tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u^n \frac{g^{BP}(v)}{g^{BP}(v+n)} \frac{1}{v+n-v'} &= \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \Gamma(-s)\Gamma(1+s)(-u)^s \frac{g^{BP}(v)}{g^{BP}(v+s)} \frac{ds}{v+s-v'} & \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}$  es un contorno negativamente orientado encerrando todos los enteros positivos, por ejemplo el contorno uniendo los puntos desde  $\infty - i$  hacia  $1/2 - i$ , luego hacia  $1/2 + i$  y luego hacia  $\infty + i$ .

En [Erd+53] se prueba que la función gamma tiene la propiedad de que para cualquier  $\delta > 0$  se cumple:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} e^{-z} z^{z-1/2} (1 + \mathcal{O}(1/z))$$

cuando  $|z| \rightarrow \infty$  y  $|\arg(z)| < \pi - \delta$ .

Recordando además que

$$g^{BP}(v+s) = \left[ \frac{\Gamma(v+s)}{\Gamma(\nu+v+s)} \right]^n \left[ \frac{\Gamma(\nu+v+s)}{\Gamma(\mu+v+s)} \right]^t \Gamma(\nu+v+s)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$g^{BP}(v+s) = \sqrt{2\pi} e^{-\nu-v-s} (\nu+v+s)^{\nu+v+s-1/2} \frac{(\nu+v+s)^{(\nu-\mu)t}}{(\nu+v+s)^{\nu n}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \right]$$

Esto implica que cuando  $s$  tiende a  $\infty e^{i\phi}$  con  $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , entonces  $1/g^{BP}(v+s)$  decae exponencialmente en  $|s|$  y además la expresión

$$(-u)^s \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \frac{1}{v+s-v'}$$

está acotada cuando  $\phi \neq 0$ . Por lo tanto, podemos deformar el contorno de integración  $\mathcal{H}$  a la línea recta  $\Re(z) = 1/2$  y de este modo tenemos el resultado buscado.  $\square$

Dada la equivalencia entre el polímero beta y el camino aleatorio beta en el sentido de la proposición (2.1), este último teorema nos proporciona el siguiente resultado análogo para el camino aleatorio beta que permite expresar la función  $P(t, x)$  como un determinante de Fredholm.

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$ . Sea  $t$  un entero no negativo y  $x \in \{-t, \dots, t\}$  con la misma paridad y además  $\alpha$  y  $\beta$  positivos. Entonces se cumple*

$$\mathbb{E} [e^{uP(t,x)}] = \det (I + K_u^{RW})_{\mathbb{L}^2(C_0)}$$

donde el contorno  $C_0$  es una circunferencia pequeña positivamente orientada que contiene el origen pero no contiene a  $-\alpha - \beta$  ni  $-1$  y el operador  $K_u^{RW} : \mathbb{L}^2(C_0) \rightarrow \mathbb{L}^2(C_0)$  está definido por el kernel

$$K_u^{RW}(v, v') = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} (-u)^s \frac{g^{RW}(v)}{g^{RW}(v+s)} \frac{ds}{s+v-v'}$$

y donde la función  $g^{RW}$  viene dada por

$$g^{RW}(v) = \left[ \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(\alpha + v)} \right]^{(t-x)/2} \left[ \frac{\Gamma(\alpha + \beta + v)}{\Gamma(\alpha + v)} \right]^{(t+x)/2} \Gamma(v) \quad (2.2.3)$$

### 2.3. Fluctuaciones en el camino aleatorio beta

Al igual que en los modelos vistos en el capítulo anterior, este tipo de resultados que relacionan la transformada de Laplace de la cantidad a estudiar en el modelo con un determinante de Fredholm resulta clave para estudiar las fluctuaciones de la cantidad de interés que en el caso del polímero beta es la función de partición y en el caso del camino aleatorio beta es la función aleatoria  $P(t, x)$ .

Antes de ver el teorema referente a las fluctuaciones de  $P(t, x)$  y su distribución límite, enunciamos el siguiente resultado de [RSY13]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P(t, xt) = -I(x) \quad \mathbb{P} \text{ c.s.}$$

Este resultado fue obtenido por Rassoul-Agha et al. quienes expresan la función  $I(x)$  como la transformada de Legendre de otra función. Posteriormente Barraquand y Corwin obtienen el mismo resultado expresando la función  $I(x)$  de forma más explícita mediante las siguientes ecuaciones

$$x(\theta) = \frac{\Psi_1(\theta + \alpha + \beta) + \Psi_1(\theta) - 2\Psi_1(\theta + \alpha)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} \quad (2.3.1)$$

y

$$I(x(\theta)) = \frac{\Psi_1(\theta + \alpha + \beta) - \Psi_1(\theta + \alpha)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} [\Psi(\theta + \alpha + \beta) - \Psi(\theta)] + \Psi(\theta + \alpha + \beta) - \Psi(\theta + \alpha) \quad (2.3.2)$$

donde, como antes,  $\Psi$  es la función digamma y  $\Psi_1$  es la función trigamma ( $\Psi_1(z) = \Psi'(z)$ ).

Barraquand y Corwin prueban en [BC17] que las fluctuaciones del logaritmo de  $P(t, xt)$  al rededor de su media asintótica  $-I(x)t$  son del orden de  $t^{1/3}$  y convergen a la distribución de Tracy - Widom GUE cuando  $x$  está dada por la ecuación (2.3.1). Sin embargo dicha prueba solo abarca el caso

particular donde los parametros  $\alpha$  y  $\beta$  son ambos iguales a 1 y dejan como conjetura que el mismo resultado se cumple para cualquier par de parametros  $\alpha$  y  $\beta$  positivos.

Notemos que en caso particular  $\alpha = \beta = 1$  el ambiente beta es equivalente a un ambiente definido por una variable aleatoria uniforme en  $(0, 1)$  y las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) se simplifican:

$$x(\theta) = \frac{1 + 2\theta}{\theta^2 + (\theta + 1)^2} \quad (2.3.3)$$

y

$$I(x(\theta)) = \frac{1}{\theta^2 + (\theta + 1)^2} \quad (2.3.4)$$

de modo que para este caso particular la función de tasa  $I$  se puede expresar explícitamente según  $I(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ .

El siguiente teorema es el resultado más importante de Barraquand y Corwin y en el siguiente capítulo extenderemos su validez para conjunto más amplio de parametros.

**Teorema 2.3.1.** *Sean  $0 < \theta < \frac{1}{2}$  y los parametros  $\alpha$  y  $\beta$  ambos iguales a 1, entonces se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\log P(t, x(\theta)t) + I(x(\theta))t}{t^{1/3}\sigma(x(\theta))} \leq y \right] = F_{GUE}(y) \quad (2.3.5)$$

donde  $\sigma(\theta)$  está definida por:

$$2\sigma^3(\theta) = \Psi_2(\theta + \alpha) - \Psi_2(\alpha + \beta + \theta) + \frac{\Psi_1(\alpha + \theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} [\Psi_2(\alpha + \beta + \theta) - \Psi_2(\theta)]. \quad (2.3.6)$$

En el siguiente capítulo damos más detalles sobre la prueba de una versión más general de este último teorema en el que levantamos la restricción de que  $\alpha$  y  $\beta$  sean ambos iguales a uno. Antes de pasar al siguiente capítulo, terminamos esta sección con un lema estándar que será necesario para la prueba del teorema (2.3.1) y cuya prueba se puede encontrar [BC14].

**Lema 2.3.1.** *Considerar una secuencia de funciones  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  que toman valores reales y llegan al intervalo  $[0, 1]$  tal que para cada  $n$ , la función  $f_n(x)$  es estrictamente decreciente en  $x$  con límite igual a 1 cuando  $x \rightarrow -\infty$  y con límite igual a 0 cuando  $x \rightarrow \infty$ . Además para cada  $\delta > 0$ , en  $\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$  cada  $f_n$  converge uniformemente a  $1_{\{x \leq 0\}}$ . Para cualquier  $r$  real definimos*

$f_n^r(x) = f_n(x - r)$  y consideramos una secuencia de variables aleatorias  $X_n$  tal que para cada  $r$

$$\mathbb{E}[f_n^r(X_n)] \rightarrow p(r) \quad (2.3.7)$$

y si además  $p$  es una función de distribución de probabilidad continua, entonces  $X_n \rightarrow p$  en distribución.

*Demostración.* Sean  $s < t < u$ , por las hipótesis para  $f_n$  se sigue que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 > 0$  tal que para todo  $n > n_0$

$$\mathbb{E}[f_n^s(X_n)] - \epsilon \leq \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \mathbb{E}[f_n^u(X_n)] + \epsilon \quad (2.3.8)$$

Estas desigualdades se siguen de la convergencia uniforme fuera de cualquier intervalo que contenga el origen. Además por la convergencia  $\mathbb{E}[f_n^s(X_n)] \rightarrow p(s)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se sigue que existe un  $n_1 > n_0$  tal que para toda  $n > n_1$

$$p(s) - 2\epsilon \leq \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq p(u) + 2\epsilon$$

Esto implica que

$$p(s) - 2\epsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq p(u) + 2\epsilon$$

ya que lo anterior se cumple para cualquier  $\epsilon > 0$  tenemos

$$p(s) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq p(u)$$

Lo anterior se cumple para  $s < t < u$  por lo que podemos tomar límites de  $s$  y  $u$  tendiendo hacia  $t$  para obtener

$$\lim_{s \rightarrow t^-} p(s) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \lim_{u \rightarrow t^+} p(u)$$

Ya que  $p$  es continua se sigue que las cotas de la derecha e izquierda en la ecuación anterior son iguales y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t) = p(t)$$

□

Usando el lema anterior con

$$f_t(x) = e^{-e^{\sigma(\theta)t^{1/3}}x}$$

$$X_t = \frac{\log P(t, x(\theta)t) + I(x(\theta))t}{t^{1/3}\sigma(\theta)}$$

se tiene el siguiente resultado válido para cualquier  $\alpha$  y  $\beta$  positivos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [e^{uP(t, x(\theta)t)}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\log P(t, x(\theta)t) + I(x(\theta))t}{t^{1/3}\sigma(\theta)} \leq y \right] \quad (2.3.9)$$

donde  $u = -\exp\{tI(x(\theta)) - t^{1/3}\sigma(\theta)y\}$  y siempre y cuando el límite de la izquierda converja a una función de distribución lo cual está asegurado por el teorema (2.2.2) y el hecho de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I + K_{u(t)}^{\text{RW}})_{\mathbb{L}^2(C_0)} = \det (I - K_{\text{Ai}})_{\mathbb{L}^2(y, \infty)} = F_{\text{GUE}}(y) \quad (2.3.10)$$

Finalmente, note que por las ecuaciones (2.3.9) y (2.3.10) junto con el teorema (2.2.2) tenemos como resultado el teorema (2.3.1).

Queda entonces por probar la igualdad anterior (2.3.10) que nos da el límite del determinante de Fredholm del kernel  $K_{u(t)}^{\text{RW}}$  como una función de densidad. La prueba que presentamos para dicho resultado es válida sin la restricción  $\alpha = \beta = 1$  y se detallará en el siguiente capítulo después de enunciar las versiones más generales de los teoremas vistos en este capítulo.

# Capítulo 3

## Generalización de resultados para el beta RW

En este capítulo enunciamos los resultados que generalizan teoremas principales del capítulo anterior y presentamos las pruebas que aplican tanto para este caso más general como para los casos particulares expuestos en el capítulo anterior. Los resultados y las pruebas presentadas en este capítulo fueron publicadas en [OPR22].

A lo largo del presente capítulo conservamos las notaciones establecidas en el capítulo anterior para el camino aleatorio beta y el polímero beta, en particular recordemos que  $P(t, x) = P(X_t \geq x)$  describe la posición del camino aleatorio.

### 3.1. Teoremas generalizados para el camino aleatorio beta

Uno de los principales resultados de este trabajo es la siguiente extensión del teorema (2.3.1) sobre las fluctuaciones de  $P$  en el camino aleatorio beta. En la versión que presentamos a continuación ampliamos el rango de valores admisibles para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ :

**Teorema 3.1.1.** *Para cualquier  $\alpha$  y  $\beta$  positivos y  $\theta \in (0, \min\{0.5, 0.69\alpha\})$  tenemos que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left[ \frac{\log P_{\omega}(t, x(\theta)t) + I(x(\theta))t}{t^{1/3}\sigma(\theta)} \leq y \right] = F_{GUE}(y) \quad (3.1.1)$$

En particular, si  $\alpha \geq 0.73$  entonces el resultado anterior se cumple para toda  $\beta > 0$  y  $\theta \in (0, 0.5)$ . Cabe mencionar que el caso  $\alpha = \beta = 1$  y  $\theta \in (0, 0.5)$  fue probado por Barraquand y Corwin (lo exponemos en el capítulo anterior) y el caso  $\alpha = 1$  y  $\beta > 0$  fue probado recientemente por Kortkikh en [Kor22]. Para levantar estas limitaciones sobre los parametros se requiere de cuidadosas estimaciones que involucran a las funciones poligamma que detallamos en el anexo.

Nuestro segundo resultado importante muestra que las fluctuaciones continúan siendo del orden de  $t^{1/3}$  y convergen a la distribución de Tracy-Widom cuando los parametros  $\alpha$  y  $\beta$  tienden a infinito. Notemos que cuando  $\theta$  permanece constante y  $\alpha$  y  $\beta$  tienden al infinito, de la definición de  $x(\theta)$  en la ecuación (2.3.1), se tiene que  $x(\theta) \rightarrow 1$ .

Para enunciar este segundo resultado, introducimos la siguiente función que determinará la tasa a la cual  $\alpha$  y  $\beta$  pueden converger al infinito:

$$\mathbf{g}(x, y) := \frac{y}{x(x+y)} \quad \text{for } x > 0, y > 0. \quad (3.1.2)$$

En el teorema anterior los parametros  $\alpha$  y  $\beta$  permanecían constantes mientras que en el siguiente teorema, que es nuestro segundo resultado importante, estos parametros varían con el tiempo cumpliendo las siguientes condiciones

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t = \infty \quad (3.1.3)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\mathbf{g}(\alpha_t, \beta_t) = \infty \quad (3.1.4)$$

Note que como ahora  $\alpha$  y  $\beta$  varían con el tiempo, entonces las cantidades  $x(\theta)$  y  $\sigma(\theta)$  también dependen del tiempo ya que según las ecuaciones 2.3.1 y 2.3.6 estas dependen de  $\alpha$  y  $\beta$ .

**Teorema 3.1.2.** *Consideremos una familia de caminos aleatorios beta de parametros  $(\alpha_t, \beta_t)$  que cumplen las condiciones 3.1.3 y 3.1.4. Entonces para toda  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$  se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha_t, \beta_t} \left[ \frac{\log P_\omega(t, x(\theta)t) + I(x(\theta))t}{t^{1/3}\sigma(\theta)} \leq y \right] = F_{GUE}(y) \quad (3.1.5)$$

Recalcamos que en el caso particular en el que  $\alpha_t = c_1 t^r$  y  $\beta_t = c_2 t^s$  para ciertas constantes  $c_1$  y  $c_2$  positivas cumpliendo además

$$r + \max(r - s, 0) < 1 \quad (3.1.6)$$

entonces las hipótesis 3.1.3 y 3.1.4 son satisfechas.

En las siguientes secciones abordamos la prueba de estos teoremas.

## 3.2. Prueba de los teoremas 3.1.1 y 3.1.2

Comenzamos mencionando que siendo válido el teorema 2.2.2 que relaciona la transformada de Laplace de la función  $P$  del camino aleatorio beta con un determinante de Fredholm de kernel  $K_u^{\text{RW}}$  definido en la ecuación 2.2.3. También continúa siendo válido el lema (2.3) y por lo tanto nuevamente la prueba se reduce a un análisis asintótico del determinante de Fredholm de kernel  $K_u^{\text{RW}}$  sobre el contorno  $C_0$  para probar que converge a la función de densidad de la distribución de Tracy-Widom tal como en la ecuación (2.3.10)

Notemos que, tomando  $u = u(y)$  como en la ecuación 2.3.9, es posible reescribir este kernel de la siguiente manera

$$K_u^{\text{RW}}(v, v') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi(z-v))} e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(z)} \frac{dz}{z-v'} \quad (3.2.1)$$

con  $h(z)$  definido según

$$h(z) := I(x(\theta))z + \frac{1-x(\theta)}{2} \log \left[ \frac{\Gamma(\alpha+z)}{\Gamma(z)} \right] + \frac{1+x(\theta)}{2} \log \left[ \frac{\Gamma(\alpha+z)}{\Gamma(\alpha+\beta+z)} \right] \quad (3.2.2)$$

Se puede verificar fácilmente que  $\theta$  es un punto crítico de la función  $h$  de modo que  $h'(\theta) = h''(\theta) = 0$  por lo que es conveniente deformar el contorno de integración del determinante de Fredholm de  $C_0$  al contorno  $C_\theta$  definido por

$$C_\theta := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \theta\} \quad (3.2.3)$$

También necesitamos modificar el contorno de integración del kernel  $K_u^{\text{RW}}$  de modo que intersecte el punto crítico  $\theta$

$$D_\theta = \{\theta + iy : y \in \mathbb{R}\} \quad (3.2.4)$$

Al hacer estos cambios de contornos el determinante de Fredholm no se altera ya que las deformaciones correspondientes no tocan ningún polo del integrando siempre y cuando  $\theta < \min\{\alpha + \beta, \frac{1}{2}\}$  y además en estos nuevos contornos la función  $h$  tiene un comportamiento particularmente adecuado que se detalla en la siguiente subsección y que será útil para realizar el análisis asintótico del determinante de Fredholm.

Introducimos también las siguientes notaciones para la parte de los contornos cercanas al punto crítico  $\theta$

$$C_\theta^\epsilon := C_\theta \cap B(\theta, \epsilon)$$

y

$$D_\theta^\epsilon := D_\theta \cap B(\theta, \epsilon)$$

donde  $B(\theta, \epsilon)$  es la bola centrada en  $\theta$  de radio  $\epsilon$ .

Como ya hemos mencionado, la prueba de los teoremas 3.1.1 y 3.1.2 se reducen al análisis asintótico del determinante de Fredholm que aparece en el teorema (2.2.2) y para este fin es conveniente modificar el contorno  $C_\theta^\epsilon$  a un contorno en forma de cuña cerca al punto crítico  $\theta$

$$W_\theta^L := \{\theta + |y|e^{i(\pi-\phi)\text{sgn}(y)} : y \in [-L, L]\}$$

donde los valores de  $L$  y  $\phi$  son escogidos de modo que los puntos extremos de los contornos  $C_\theta^\epsilon$  y  $W_\theta^L$  coincidan. Notemos que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño podemos reemplazar el contorno  $C_\theta^\epsilon$  por  $W_\theta^L$  y definimos también el contorno que resulta de reemplazar este pequeño pedazo de cuña en la circunferencia (ver figura (3.1)). Para esto primero denotamos por  $C_\theta^{\epsilon,+} := C_\theta \setminus B(\theta, \epsilon)$  a la parte de la circunferencia de radio  $\theta$  que está alejada una distancia mayor a  $\epsilon$  del punto crítico  $\theta$ . Teniendo esto en cuenta definimos:

$$V_\theta^\epsilon := W_\theta^L \cup C_\theta^{\epsilon,+}$$

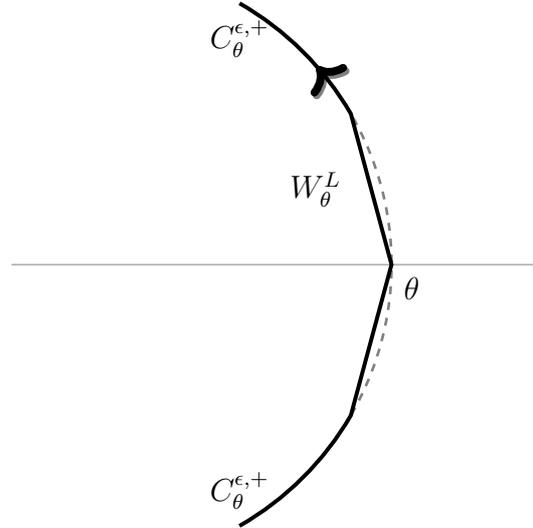


Figura 3.1: Contorno  $V_\theta^\epsilon$  compuesto por la unión de los contornos  $C_\theta^{\epsilon,+}$  y  $W_\theta^L$ , y en líneas discontinuas el contorno  $C_\theta^\epsilon$ .

Finalmente, definimos también la cuña compuesta por dos rayos partiendo del punto  $\theta$ :

$$W_\theta^\infty := \{\theta + |y|e^{i(\pi-\sigma)\text{sgn}(y)} : y \in \mathbb{R}\}$$

Para enunciar la siguiente proposición introducimos la definición del kernel

$K_y$  para todo  $y \in \mathbb{R}$

$$K_y(w, w') := \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty e^{-i\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} \frac{1}{(z-w')(w-z)} \frac{e^{z^3/3-yz}}{e^{w^3/3-yw}} dz \quad (3.2.5)$$

donde el contorno de integración es sobre un contorno en forma de cuña infinita formada por dos rayos en las direcciones  $-\pi/3$  y  $\pi/3$ .

**Proposición 3.1.** *Considerar la siguiente igualdad*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_u^{RW})_{L^2(C_\theta)} = \det (I + K_y)_{L^2(W_\theta^\infty)} \quad (3.2.6)$$

(i) *Para todo  $\alpha$  y  $\beta$  positivos y  $\theta \in (0, \min\{\frac{1}{2}, 0.69\alpha\})$  la igualdad anterior es satisfecha.*

(ii) *Asumir que  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  y  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  satisfacen las condiciones (3.1.3) y (3.1.4). Entonces para todo  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$  la igualdad anterior es satisfecha.*

La prueba de esta proposición está dividida en dos partes. En la primera parte reducimos los contornos de integración para quedarnos solo con los contornos cercanos a  $\theta$  mostrando que el valor límite continúa siendo el mismo, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_u^{RW})_{L^2(C_\theta)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_{y,\epsilon}^{RW})_{L^2(C_\theta^\epsilon)} \quad (3.2.7)$$

donde

$$K_{y,\epsilon}^{RW}(v, v') = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_\theta^\epsilon} \frac{\pi}{\sin(\pi(z-v))} e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(z)} \frac{dz}{z-v'} \quad (3.2.8)$$

Mientras que la segunda parte de la prueba aborda la siguiente igualdad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_{y,\epsilon}^{RW})_{L^2(C_\theta^\epsilon)} = \det (I + K_y)_{L^2(C)} \quad (3.2.9)$$

Los detalles de la prueba serán dados en las siguientes secciones. A partir de la proposición (3.1), los teoremas (3.1.1) y (3.1.2) se siguen directamente teniendo en cuenta la identidad

$$\det (I + K_y)_{L^2(C)} = \det (I - K_{Ai})_{L^2(y,\infty)} \quad (3.2.10)$$

válida para toda  $y \in \mathbb{R}$  y cuya prueba se puede encontrar, por ejemplo, en [BCF14]. Queda entonces por probar la proposición (3.1). Primero probaremos algunas estimaciones necesarias para la prueba del teorema (3.1.1) y las versiones cuantitativas de estas estimaciones que serán necesarias para la prueba del teorema (3.1.2).

### 3.2.1. Comportamiento de la función $h$ a lo largo de los contornos de integración

En esta subsección enunciamos tres lemas que describen las propiedades de la función  $h$  a lo largo de los contornos  $C_\theta$  y  $D_\theta$ . El primero es una versión cuantitativa del lema 5.5 de Barraquand y Corwin el cual tiene la restricción  $\alpha = \beta = 1$ . En este trabajo se levanta dicha restricción con el costo de tener que escoger el parametro  $\theta$  suficientemente pequeño.

**Lema 3.2.1.** *Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta \in (0, \min\{0.5, 0.69\alpha\})$  y con  $\phi \in [0, 2\pi]$  se cumple que*

$$\Re [i\theta e^{i\phi} h'(\theta e^{i\phi})] > 0 \quad (3.2.11)$$

*Además, existe un  $\alpha_0 > 0$  tal que para  $\alpha \geq \alpha_0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  y  $\theta \in (0, 0.5)$  se cumple lo siguiente*

$$\Re [i\theta e^{i\phi} h'(\theta e^{i\phi})] \geq C_3 \theta^2 \mathfrak{g}(\alpha + 1, \beta) (1 - \cos \phi) \sin \phi$$

*para alguna constante  $C_3 > 0$  dependiendo solo de  $\alpha$  y además creciente en  $\alpha$ .*

Algunos cálculos numéricos realizados sugieren que la desigualdad (3.2.11) es falsa para algunos valores de  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta > 0$ , inclusive cuando  $\theta \in (0, 0.5)$ . Sin embargo, se conjetura que los teoremas (3.1.1) y (3.1.2) siguen siendo válidos para  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta > 0$ .

El segundo lema que presentamos en esta subsección es una versión cuantitativa del lema 5.4 de Barraquand y Corwin.

**Lema 3.2.2.** *Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta > 0$  tenemos que*

$$(i) \Im[h'(\theta + iy)] > 0 \text{ para } y > 0 \text{ y } \Im[h'(\theta + iy)] < 0 \text{ para } y < 0.$$

$$(ii) \Im[h'(\theta + iy)] = yH(\theta, y, \alpha, \beta) \text{ donde}$$

$$H(\theta, y, \alpha, \beta) \geq 8 \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} \int_\theta^{\theta + \alpha} \sum_{n \geq 0} \frac{y^2(x - \theta)}{[(x + n)^2 + y^2]^3} dx \quad (3.2.12)$$

Finalmente, el tercer lema de esta subsección es el siguiente requerimiento técnico

**Lema 3.2.3.** *Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta \in (0, \min\{0.5, \alpha\})$  tenemos lo siguiente*

$$\frac{\sigma^3(\theta)}{2\theta} + \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} > 0$$

Nuevamente, cálculos numéricos nos indican que el lema anterior no se cumple para algunos valores  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta \in (0, 0.5)$  pero se conjetura que el teorema (3.1.1) sea verdadero en este régimen más amplio de parámetros.

Las pruebas de estos tres lemas importantes (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.3) serán desarrolladas en una sección posterior. Por ahora continuaremos con algunas consecuencias importantes.

Del lema (3.2.1) obtenemos el siguiente corolario que extiende el lema 5.5 de Barraquand y Corwin para  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  arbitrarios.

En lo que sigue, diremos que el contorno  $C_\theta$  tiene la propiedad de descenso más rápido para la función  $-\Re(h)$  si  $\Re[h(\theta e^{i\phi})]$  es estrictamente creciente para  $\phi \in (0, \pi)$  y estrictamente decreciente para  $\phi \in (-\pi, 0)$ .

**Corolario 3.2.1.** *Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta \in (0, \min\{0.5, 0.69\alpha\})$  el contorno  $C_\theta$  tiene la propiedad de descenso más rápido para la función  $-\Re(h)$ .*

Por otro lado, de la parte (i) del lema (3.2.2), obtenemos el siguiente corolario

**Corolario 3.2.2.** *Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta > 0$  el contorno  $D_\theta$  tiene la propiedad de descenso más rápido para la función  $\Re(h)$  en el sentido que  $\Re[h(\theta + iy)]$  es estrictamente decreciente para  $y$  positivo y estrictamente decreciente para  $y$  negativo.*

Los resultados anteriores describen importantes propiedades del comportamiento de la función  $h$  sobre los contornos de integración  $C_\theta$  y  $D_\theta$ , sin embargo, con la finalidad de evitar la singularidad de  $h$  en el punto  $\theta$  debemos modificar estos contornos ligeramente y obtener resultados sobre el comportamiento de  $h$  en estos nuevos contornos. Con esta finalidad, para cada  $r > 0$ , definimos

$$\begin{aligned} D_\theta^{r,+} &:= D_\theta - B(\theta, r) \\ V_\theta^{r,+} &:= V_\theta^\epsilon - B(\theta, r) \end{aligned}$$

También definimos la semicircunferencia

$$S_\theta^t := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \theta| = \frac{1}{\sigma(\theta)t^{1/3}}, \Re(z - \theta) \geq 0 \right\}$$

y el contorno

$$D_\theta^t := D_\theta^{\sigma^{-1}t^{-1/3},+} \cup S_\theta^t$$

Ver la figura para una representación de estos contornos junto con el contorno  $V_\theta^\epsilon$ .

La presencia del factor  $\sigma^{-1}$  en la definición de  $D_\theta^t$  será irrelevante en la prueba del teorema (3.1.1), ya que solo representa el producto por una constante independiente de  $t$ . Sin embargo, este factor será un tema delicado en la prueba del teorema (3.1.2) donde  $\sigma(\theta) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En lo que sigue adoptaremos la notación  $\sigma_t = \sigma_t(\theta)$  para mostrar la dependencia del tiempo ya que  $\sigma$  depende intrínsecamente de los parámetros  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ .

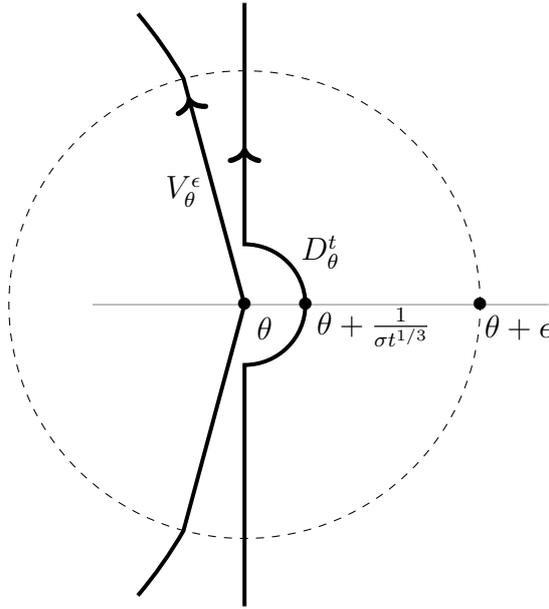


Figura 3.2: Los contornos  $V_\theta^\epsilon$  y  $D_\theta^t$  evitan la singularidad en  $\theta$ .

**Lema 3.2.4.** Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta > 0$  y  $t \geq t_0$ , donde  $\sigma_{t_0} t_0^{1/3} \theta \geq 2$ , tenemos que para toda  $z \in D_\theta^t$

$$\Re[h(z) - h(\theta)] \leq 128g(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3 t}$$

*Demostración.* Para  $z \in D_\theta - B(\theta, \sigma^{-1} t^{-1/3})$ , el lema se sigue directamente del corolario (3.2.2). Para  $z \in D_\theta^t \cap B(\theta, \sigma^{-1} t^{-1/3})$  tenemos que, para  $t \geq t_0$

donde  $t_0$  es tal que  $\sigma t_0^{1/3} \theta \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
|h(z) - h(\theta)| &\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{\sigma^k t^{k/3}} |h^{(k)}(\theta)| \\
&\leq 64 \mathbf{g}(\alpha, \beta) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sigma^k t^{k/3} \theta^{k+2}} \\
&= 64 \mathbf{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5} \frac{1}{\sigma^3 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^k t^{k/3} \theta^k} \\
&\leq 128 \mathbf{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3 t}
\end{aligned}$$

donde hemos usado la expansión de Taylor en la primera desigualdad y la parte (iii) del corolario (A.0.1) para la segunda desigualdad.  $\square$

**Corolario 3.2.3.** *Para  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta \in (0, \min\{0.5, 0.69\alpha\})$  se satisface lo siguiente*

(i) *Existe una constante  $C_4 > 0$  tal que para toda  $z \in D_\theta^{\epsilon,+}$  y  $v \in C_\theta$  tenemos que*

$$\Re[h(z) - h(v)] \leq -C_4 \mathbf{h}(\alpha, \beta, \theta) \epsilon^4$$

*donde  $\mathbf{h}(\alpha, \beta, \theta) > 0$  y para  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$  tenemos que*

$$\mathbf{h}(\alpha, \beta, \theta) \geq C_5(\theta) \mathbf{g}(\alpha, \beta) \tag{3.2.13}$$

*para alguna  $C_5(\theta) > 0$  que no depende de  $\alpha$  ni de  $\beta$*

(ii) *Existe una constante  $C_6 > 0$  tal que para toda  $z \in D_\theta^t$  y  $v \in C_\theta^{\epsilon,+} = V_\theta^{\epsilon,+}$  tenemos que*

$$\Re[h(z) - h(v)] \leq -C_6 \epsilon^4 \mathbf{g}(\alpha + 1, \beta) + 128 \mathbf{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3 t}$$

*Demostración.* Prueba de la parte (i). Por el corolario (3.2.1) tenemos que  $\Re[h(\theta) - h(v)] \leq 0$  lo cual implica que  $\Re[h(z) - h(v)] \leq \Re[h(z) - h(\theta)]$ . Por otro lado, por el corolario (3.2.2), tenemos que  $\Re[h(z)]$  es decreciente en  $y$  para  $z = \theta + iy$  cuando  $y \geq \epsilon$  y es creciente en  $y$  para  $z = \theta + iy$  cuando  $y \leq -\epsilon$ , de modo que  $\Re[h(z) - h(\theta)] \leq \Re[h(\theta + i\epsilon) - h(\theta)]$  para  $z \in D_\theta^{\epsilon,+}$ . De

lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
\Re[h(z) - h(v)] &= \Re[h(z) - h(\theta)] + \Re[h(\theta) - h(v)] \\
&\leq \Re[h(\theta + i\epsilon) - h(\theta)] \\
&= \int_0^\epsilon \frac{d\Re[h(\theta + iy)]}{dy} dy \\
&= - \int_0^\epsilon \Im[h'(\theta + iy)] dy \\
&\leq - \frac{H(\theta, \epsilon, \alpha, \beta)}{4} \epsilon^4
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos recurrido a la parte (ii) del lema (3.2.2). Ahora,

$$H(\theta, y, \alpha, \beta) \geq 8y^2 \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} \int_\theta^{\theta + \alpha} \sum_{n \geq 0} \frac{(x - \theta) dx}{[(x + n)^2 + 1]^3}.$$

Definiendo

$$\mathfrak{h}(\alpha, \beta, \theta) := \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} \int_\theta^{\theta + \alpha} \sum_{n \geq 0} \frac{(x - \theta) dx}{[(x + n)^2 + 1]^3}$$

finalizamos la prueba.

Prueba de la parte (ii). por el corolario (3.2.1) y el hecho de que  $v \in C_\theta^{\epsilon, +}$ , tenemos que  $\Re[h(\theta) - h(v)] \leq \Re[h(\theta) - h(\theta e^{i\phi_*})]$ , donde  $\phi_*$  es tal que  $|\theta e^{i\phi_*} - \theta| = \epsilon$ . Luego, por el lema (3.2.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Re[h(z) - h(v)] &= \Re[h(z) - h(\theta)] + \Re[h(\theta) - h(v)] \\
&\leq 128\mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3 t} + \Re[h(\theta) - h(\theta e^{i\phi_*})] \\
&= 128\mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3 t} - \int_0^{\phi_*} \frac{d}{d\phi} \Re[h(\theta e^{i\phi})] d\phi \\
&= 128\mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3 t} - \int_0^{\phi_*} \Re[i\theta e^{i\phi} h'(\theta e^{i\phi})] d\phi \\
&\leq 128\mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3 t} - \epsilon^4 c_1 \mathfrak{g}(\alpha + 1, \beta)
\end{aligned}$$

para alguna constante  $c_1$ , donde en la última desigualdad hemos usado el lema (3.2.1).  $\square$

### 3.2.2. Cotas para el integrando

En esta subsección aplicamos las estimaciones de la subsección anterior para hallar algunas cotas del integrando que aparece en el determinante de Fredholm.

**Lema 3.2.5.** *Para cualquier  $\alpha$  y  $\beta$  positivas, con  $\theta \in (0, \min\{\frac{1}{2}, 0.69\alpha\})$  y  $\epsilon \in (0, \frac{\theta}{2})$ , tenemos las siguientes cotas importantes:*

(i) *Para toda  $v \in C_\theta$ ,  $z \in D_\theta^{\epsilon,+}$  y  $t \geq 0$  tenemos*

$$\left| e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \right| \leq e^{-tC_4\epsilon^4\mathfrak{h}(\alpha,\beta,\theta)+t^{1/3}\sigma(\theta)|y|\epsilon} \quad (3.2.14)$$

(ii) *Para toda  $v \in C_\theta^{\epsilon,+} = V_\theta^{\epsilon,+}$ ,  $z \in D_\theta^t$  y  $t \geq 0$  tenemos*

$$\left| e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \right| \leq e^{-tC_6\epsilon^4\mathfrak{g}(\alpha+1,\beta)+128\mathfrak{g}(\alpha,\beta)\frac{1}{\theta^5\sigma^3}+2t^{1/3}\sigma(\theta)|y|} \quad (3.2.15)$$

(iii) *Existe una constante  $C_7(\theta, \epsilon, \alpha, \beta) > 0$  independiente de  $\alpha$  y  $\beta$  cuando  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$ , tal que para toda  $v \in W_{\theta,\epsilon}^L$ ,  $z \in D_\theta^t$  o  $v \in C_\theta^\epsilon$ ,  $z \in D_\theta^t$  y  $t \geq 1$ , tenemos*

$$\left| e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \right| \leq \frac{1}{C_7(\theta, \epsilon, \alpha, \beta)} e^{-C_7(\theta,\epsilon,\alpha,\beta)t\sigma^3(\theta)|v-\theta|^3} \quad (3.2.16)$$

*Demostración.* Prueba de la parte (i) y parte (ii). La parte (i) se sigue del corolario (3.2.3) en su primer ítem junto con la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left| e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \right| &= e^{t\Re[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y\Re(z-v)} \\ &\leq e^{-tC_4\epsilon^4\mathfrak{h}(\alpha,\beta,\theta)+t^{1/3}\sigma(\theta)|y|} \end{aligned}$$

De manera similar, la parte (ii) se sigue del corolario (3.2.3) en su segundo ítem.

Prueba de la parte (iii). En este caso usamos la desigualdad  $\Re(z-v) \leq \Re(v-\theta) + \Re(\theta-v) \leq \sigma^{-1}t^{-1/3} + |v-\theta|$  y el lema (3.2.4) para concluir que la expresión

$$\begin{aligned} \Re \{ t[h(z) - h(v)] - t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v) \} &= \\ &\Re \{ t[h(z) - h(\theta)] \} + \Re \{ t[h(\theta) - h(v)] - t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v) \} \end{aligned}$$

está acotada superiormente por

$$\Re \{ t[h(\theta) - h(v)] \} + 128\mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5\sigma^3} + t^{1/3}\sigma(\theta)|y||v-\theta| + |y| \quad (3.2.17)$$

donde para acotar el primer término de la expresión anterior usaremos una aproximación por serie de Taylor de  $h(v)$  al rededor de  $\theta$ . Recalcamos que  $v \in W_{\theta, \epsilon}^L$  o  $v \in C_\theta^\epsilon$  y definamos  $\bar{v}$  por

$$v = \theta + \frac{\bar{v}}{\sigma(\theta)t^{1/3}}$$

y  $\bar{h}(\bar{v}) = h(v)$ . Entonces

$$t\bar{h}(\bar{v}) = th(\theta) + \frac{\bar{v}^3}{3!} \frac{1}{\sigma^3} h^{(3)}(\theta) + \frac{\bar{v}^4}{4!} \frac{1}{\sigma^4 t^{1/3}} h^{(4)}(\theta) + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\bar{v}^k}{k!} \frac{1}{\sigma^k t^{(k-3)/3}} h^{(k)}(\theta)$$

Así tenemos

$$\left| t\bar{h}(\bar{v}) - th(\theta) - \frac{\bar{v}^3}{3!} \frac{1}{\sigma^3} h^{(3)}(\theta) - \frac{\bar{v}^4}{4!} \frac{1}{\sigma^4 t^{1/3}} h^{(4)}(\theta) \right| \leq \frac{|\bar{v}^3|}{\sigma^3} \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\epsilon^{k-3}}{k!} h^{(k)}(\theta) \quad (3.2.18)$$

Ahora a partir de la parte (iii) del corolario (A.0.1), tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{v}^3}{\sigma^3} \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\epsilon^{k-3}}{k!} h^{(k)}(\theta) \right| &\leq 64 \frac{\mathfrak{g}(\alpha, \beta)}{\sigma^3} |\bar{v}^3| \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\epsilon^{k-3}}{\theta^{k+2}} \\ &\leq 128 \frac{\mathfrak{g}(\alpha, \beta)}{\sigma^3} \epsilon^2 \frac{1}{\theta^7} |\bar{v}^3| \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que  $\epsilon < \frac{\theta}{2}$ . Se sigue que

$$\left| t\Re[\bar{h}(\bar{v}) - h(\theta)] - \frac{\Re(\bar{v}^3)}{3} - \frac{\Re(\bar{v}^4)}{4!} \frac{1}{\sigma^4 t^{1/3}} h^{(4)}(\theta) \right| \leq 128 \frac{\mathfrak{g}(\alpha, \beta)}{\sigma^3} \epsilon^2 \frac{1}{\theta^7} |\bar{v}^3| \quad (3.2.19)$$

Por otro lado, ya que  $v \in W_{\theta, \epsilon}^L$  o  $v \in C_\theta^\epsilon$ , se tiene que el argumento de  $\bar{v}$  es  $\pm [\frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2\theta} + o(\epsilon)]$ . Luego, a partir de que  $h^{(4)}(\theta) < 0$  (ver parte (v) del corolario A.0.1) y  $(\sigma t^{1/3})^{-1} |\bar{v}| < \epsilon$  tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{\Re(\bar{v}^3)}{3} - \frac{\Re(\bar{v}^4)}{4!} \frac{1}{\sigma^4 t^{1/3}} h^{(4)}(\theta) &= \sin\left(\frac{3\epsilon}{2\theta} + o(\epsilon)\right) \frac{|\bar{v}^3|}{3} - \cos\left(\frac{2\epsilon}{\theta} + o(\epsilon)\right) \frac{h^{(4)}(\theta) |\bar{v}|^4}{\sigma^4 t^{1/3} 4!} \\ &\leq -\epsilon |\bar{v}^3| \frac{1}{\sigma^3} \left[ \frac{\sigma^3}{2\theta} + \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} + o_1(\epsilon) \frac{\sigma^3}{\epsilon} + o_2(\epsilon) h^{(4)}(\theta) \right] \\ &= -\epsilon |\bar{v}|^3 \frac{1}{\sigma^3} \left[ \frac{\sigma^3}{2\theta} + \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} \right] + o_1(\epsilon) |\bar{v}|^3 + o_2(\epsilon) |\bar{v}|^3 \frac{h^{(4)}(\theta)}{\sigma^3} \\ &\leq -\epsilon |\bar{v}|^3 c_2(\theta, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

donden, en la última desigualdad, hemos asumido que  $\epsilon$  es suficientemente pequeña. Además, por las partes (iii) y (iv) del corolario (A.0.1) y por el lema (3.2.3), tenemos que  $c_2(\theta, \alpha, \beta)$  es una constante positiva independiente de  $\alpha$  y  $\beta$  cuando  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$ . Luego, de las ecuaciones (3.2.19) y (3.2.20) y usando nuevamente la parte (iv) del corolario (A.0.1), tenemos que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño

$$-t\Re[\bar{h}(\bar{v}) - h(\theta)] \leq -c_3(\theta, \alpha, \beta)\epsilon|\bar{v}|^3$$

donde  $c_3(\theta, \alpha, \beta)$  no depende de  $\alpha$  y  $\beta$  para  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$ . Luego

$$-t\Re[h(v) - h(\theta)] \leq -c_3(\theta, \alpha, \beta)\epsilon\sigma^3(\theta)t|v - \theta|^3$$

y a partir de la cota en la expresión (3.2.17) y el lema (3.2.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \left| e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \right| &\leq \left| e^{t[h(z)-h(\theta)]+t[h(\theta)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \right| \\ &\leq e^{128\mathfrak{g}(\alpha,\beta)\frac{1}{\theta^5\sigma^3}} e^{t\Re[h(\theta)-h(v)]+t^{1/3}\sigma(\theta)|y(z-v)|} \\ &\leq e^{-c_3(\theta,\alpha,\beta)\epsilon t\sigma^3(\theta)|v-\theta|^3+128\mathfrak{g}(\alpha,\beta)\frac{1}{\theta^5\sigma^3}+c_4t^{1/3}\sigma(\theta)|y||v-\theta|} \end{aligned}$$

lo cual prueba la parte (iii).  $\square$

### 3.2.3. Prueba de la proposición (3.1)

La prueba se basa en las propiedades de descenso más rápido a lo largo de ciertos contornos apropiados que ya hemos definido. A lo largo de algunos pasos iremos deformando el contorno  $C_\theta$  a  $V_\theta^\epsilon$  y el contorno  $D_\theta^\epsilon$  con la finalidad de evitar singularidades en el kernel  $K_u^{\text{RW}}(v, v')$  cuando  $v = v' = \theta$ . Se prueba que la integral del determinante de Fredholm sobre el contorno fuera de la bola  $B(\theta, \epsilon)$  tiene contribución nula en el límite.

**Paso 0.** Como se mencionó líneas arriba, primero deformamos el contorno de integración que aparece en la definición del kernel  $K_u^{\text{RW}}(v, v')$  de  $D_{1/2}$  a  $D_\theta^t$ , de modo que

$$K_u^{\text{RW}}(v, v') = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_\theta^t} \frac{\pi}{\sin(\pi(z-v))} e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(z)} \frac{dz}{z-v'} \quad (3.2.21)$$

**Paso 1.** En este paso mostraremos que cuando  $v, v' \in C_\theta$  tenemos que

$$\left| K_u^{\text{RW}}(v, v') - K_{y,\epsilon}^{\text{RW}}(v, v') \right| \leq \frac{1}{c_5} e^{-a_1 t} \quad (3.2.22)$$

para alguna constante  $c_5 = c_5(\theta, \epsilon, y) > 0$  independiente de  $\alpha$  y  $\beta$  y  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(\theta, \epsilon, \alpha, \beta, y) > 0$ , tal que

$$\mathbf{a}_1(\theta, \epsilon, \alpha, \beta, y) \geq c_5 \mathbf{g}(\alpha, \beta) \quad \text{para } \alpha \geq 1 \text{ y } \beta \geq 1$$

donde el kernel  $K_{y,\epsilon}$  fue definido en la ecuación (3.2.8). Para probar este paso note que

$$K_u^{\text{RW}}(v, v') - K_{y,\epsilon}^{\text{RW}}(v, v') = \int_{D_\theta^{\epsilon,+}} \frac{\pi}{\sin(\pi(z-v))} e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(z)} \frac{dz}{z-v'} \quad (3.2.23)$$

ya que  $v \in C_\theta$  y  $z \in D_\theta^{\epsilon,+}$ , por la parte (i) del lema (3.2.5) podemos acotar la exponencial en el integrando

$$\left| e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \right| \leq e^{-tC_4\epsilon^4\mathfrak{h}(\alpha,\beta,\theta)+t^{1/3}\sigma|y|\epsilon} \quad (3.2.24)$$

Ahora, para acotar la función gamma recalamos que  $|\Gamma(x+iy)| e^{\frac{\pi}{2}|y|} |y|^{1/2-x} \rightarrow \sqrt{2\pi}$  cuando  $y \rightarrow \pm\infty$  para  $x$  e  $y$  reales (ver por ejemplo [Bat53]). Esto implica que

$$|\Gamma(z)| \geq \frac{1}{c_6} e^{-\frac{\pi}{2}|\Im(z)|} \quad (3.2.25)$$

para  $z \in D_\theta$  para algún  $c_6(\epsilon) > 0$ . Además tenemos que

$$|\sin(\pi(z))| \geq c_7 e^{\pi|\Im(z)|} \quad (3.2.26)$$

para algún  $c_7 > 0$ . Por lo tanto, por la ecuación 3.2.24 tenemos que para  $v, v' \in C_\theta$  y  $z \in D_\theta^{\epsilon,+}$  se cumple que

$$\left| \frac{\pi}{\sin(\pi(z-v))} e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(z)} \frac{1}{z-v'} \right| \leq c_8 |\Gamma(v)| e^{-\frac{\pi}{2}|\Im(z)|} e^{-tC_4\epsilon^4\mathfrak{h}(\alpha,\beta,\theta)+t^{1/3}\sigma(\theta)|y|\epsilon} \quad (3.2.27)$$

para algún  $c_8 = c_8(\theta, \epsilon) > 0$ . Note que, ya que  $v \in C_\theta$ , se tiene  $|\Gamma(v)| \leq c_9(\theta)$ . Luego, a partir de la desigualdad (3.2.27) y usando el hecho de que

$$\mathfrak{h}(\alpha, \beta, \theta) \geq C_5(\theta) \mathbf{g}(\alpha, \beta) \quad \text{para } \alpha \geq 1 \text{ y } \beta \geq 1 \quad (3.2.28)$$

(ver parte (i) del corolario 3.2.3 y parte (i) del lema 3.2.5) junto con la parte (iii) del corolario A.0.1 y el lema 3.2.3 para obtener una cota superior para  $\sigma$ , obtenemos la desigualdad (3.2.22).

**Paso 2.** En este paso probaremos que para  $v \in C_\theta^{\epsilon,+}$  y  $v' \in C_\theta$  se cumple que

$$|K_{y,\epsilon}^{RW}(v, v')| \leq |K_u^{RW}(v, v')| \leq \frac{1}{c_{10}} e^{-\mathbf{a}2t} \quad (3.2.29)$$

para cierto par de constantes  $\mathbf{a}(\theta, \alpha, \beta, y)$  y  $c_{10} = c_{10}(\theta, \epsilon, y)$  positivas tales que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\theta, \alpha, \beta, y) \geq c_{10}\mathbf{g}(\alpha, \beta) \quad \text{para } \alpha \geq 1 \text{ y } \beta \geq 1. \quad (3.2.30)$$

Usando nuevamente las estimaciones (3.2.25) y (3.2.26) y la parte (ii) del lema (3.2.5) obtenemos que (aquí  $z \in D_\theta^t$ )

$$\left| \frac{\pi}{\sin[\pi(z-v)]} e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(z)} \frac{1}{z-v'} \right| \leq c_{11} |\Gamma(v)| e^{-\frac{\pi}{2}|\Im(z)|} e^{-tC_\epsilon \epsilon^4 \mathbf{g}(\alpha+1, \beta) + 128\mathbf{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^5 \sigma^3} + 2t^{1/3}\sigma(\theta)|y|}$$

para alguna constante  $c_{11} = c_{11}(\theta, \epsilon) > 0$ . Integrando sobre  $z$  y usando la parte (iii) del corolario (A.0.1) para acotar  $\sigma$  obtenemos (3.2.29).

**Paso 3.** En este paso probaremos que cuando  $v \in C_\theta^\epsilon$  y  $v' \in C_\theta$  tenemos que

$$|K_{y,\epsilon}^{RW}(v, v')| \leq |K_u^{RW}(v, v')| \leq \frac{1}{c_{12}} \sigma t^{1/3} e^{-c_{12}t\sigma^3|v-\theta|^3} \quad (3.2.31)$$

para alguna constante  $c_{12} = c_{12}(\theta, \epsilon, \alpha, \beta) \geq 0$  tal que

$$c_{12}(\theta, \epsilon, \alpha, \beta) \geq c_{13} \quad \text{for } \alpha \geq 1 \text{ y } \beta \geq 1$$

para alguna constante positiva  $c_{13}$  independiente de  $\alpha$  y  $\beta$ . En efecto, por la parte (iii) del lema (3.2.5) junto con las expresiones (3.2.25) y (3.2.26), usando la desigualdad

$$\left| \frac{z-v}{\sin[\pi(z-v)]} \right| \leq c_{14} \quad (3.2.32)$$

y el hecho de que  $|z-v'| \geq c_{15} (\sigma t^{1/3})^{-1}$ , obtenemos lo siguiente

$$\left| \frac{\pi}{\sin[\pi(z-v)]} e^{t[h(z)-h(v)]-t^{1/3}\sigma(\theta)y(z-v)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(z)} \frac{1}{z-v'} \right| \leq c_{16} \sigma t^{1/3} |\Gamma(v)| e^{-\frac{\pi}{2}|\Im(z)|} \frac{1}{C_7} t \sigma^3(\theta) |v-\theta|^3$$

para alguna constante positiva  $c_{16}$  y donde  $C_7(\theta, \epsilon, \alpha, \beta) > 0$  no depende de  $\alpha$  ni de  $\beta$  cuando  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$ , lo cual prueba (3.2.31).

**Paso 4.** En este paso probaremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_u^{\text{RW}})_{L^2(C_\theta)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_u^{\text{RW}})_{L^2(C_\theta^\epsilon)} \quad (3.2.33)$$

siempre que el límite de la derecha exista. Considere la expansión del determinante de Fredholm

$$\det (I - K_u^{\text{RW}})_{L^2(C_\theta)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{(C_\theta)^n} \det [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n dw_1 \cdots dw_n$$

Ahora note que la integral de la serie anterior sobre el contorno  $(C_\theta)^n$  se puede descomponer como suma de dos integrales sobre los contornos  $(C_\theta^\epsilon)^n$  y  $(C_\theta)^n \setminus (C_\theta^\epsilon)^n$

$$\begin{aligned} \int_{(C_\theta^\epsilon)^n} \det [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n dw_1 \cdots dw_n \\ + \int_{(C_\theta)^n \setminus (C_\theta^\epsilon)^n} \det [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n dw_1 \cdots dw_n \end{aligned}$$

Vamos a probar que el límite cuando  $t$  tiende al infinito del segundo sumando en la expresión de arriba se anula.

Combinando las expresiones (3.2.29) y (3.2.31) con la desigualdad de Hadamard y usando la parte (iii) del corolario (A.0.1) tenemos que

$$\left| \det [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n \right| \leq n^{n/2} (c_{17}\sigma^3 t)^{n/3} e^{-c_{18}\sigma^3 t} \quad (3.2.34)$$

para ciertas constantes  $c_{17} = c_{17}(\theta, \epsilon, \alpha, \beta) > 0$  y  $c_{18} = c_{18}(\theta, \epsilon, \alpha, \beta) > 0$  con la propiedad de que ambas constantes son independientes de  $\alpha$  y  $\beta$  cuando  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$ . También notemos que el lado derecho de la desigualdad (3.2.34) define una serie convergente ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{n!} (c_{17}\sigma^3 t)^{n/3} e^{-c_{18}\sigma^3 t} \leq e^{-c_{18}\sigma^3 t + 2c_{17}^2(\sigma^3 t)^{2/3}} \quad (3.2.35)$$

Ahora, en el caso en el que  $\alpha$  y  $\beta$  son fijos es obvio que el lado de la desigualdad anterior converge a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Por otro lado, bajo la hipótesis de que  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  y  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  satisfacen (3.1.3) y (3.1.4) tenemos que el límite de  $\sigma^3 t$  cuando  $t$  tiende a infinito es infinito, de modo que en este caso también tenemos que el lado derecho de la desigualdad (3.2.35) tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Se sigue entonces que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{(C_\theta)^n \setminus (C_\theta^\epsilon)^n} \det [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n dw_1 \cdots dw_n = 0$$

lo cual prueba el paso 4.

**Paso 5.** En este paso probaremos lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - k_u^{\text{RW}})_{L^2(C_\theta^\epsilon)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - k_{y,\epsilon}^{\text{RW}})_{L^2(C_\theta^\epsilon)} \quad (3.2.36)$$

para lo cual usaremos la siguiente desigualdad para la diferencia entre los determinantes de dos matrices de orden  $n$ ,  $A = (A_1, \dots, A_n)$  y  $B = (B_1, \dots, B_n)$ , donde  $A_i$  es la columna  $i$ -ésima de la matriz  $A$  y análogamente para la matriz  $B$ .

$$|\det(A) - \det(B)| \leq \sum_{j=1}^n |\det(B_1, \dots, B_{j-1}, A_j - B_j, A_{j+1}, \dots, A_n)|. \quad (3.2.37)$$

Ahora, escogemos  $A = [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n$  y  $B = [K_{y,\epsilon}^{\text{RW}}(w_i, w_j)]$ , y aplicamos la desigualdad (3.2.37) junto con las cotas (3.2.22) del paso (i) y (3.2.31) del paso 4 y la desigualdad de Hadamard para concluir que

$$\left| \det [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n - \det [K_{y,\epsilon}^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n \right| \leq n \left( \frac{1}{c_5} e^{-2\alpha_1 t} \right)^{1/2} [nc_{19} (\sigma^3 t)^{2/3}]^{n/2} = c_{20}^{n/2} n^{(n+1)/2} (\sigma^3 t)^{n/2} e^{-\alpha_1 t}$$

para cierto par de constantes positivas  $c_{19} = c_{19}(\theta, \epsilon, y, \alpha, \beta) > 0$  y  $c_{20} = c_{20}(\theta, \epsilon, y, \alpha, \beta) > 0$  las cuales son independientes de  $\alpha$  y  $\beta$  cuando  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$ . Al igual que en el paso 4, esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \int_{(C_\theta^\epsilon)^n} \det [K_u^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n dw_1 \cdots dw_n - \int_{(C_\theta^\epsilon)^n} \det [K_{i,\epsilon}^{\text{RW}}(w_i, w_j)]_{i,j=1}^n dw_1 \cdots dw_n \right| \leq e^{-c_{21}\sigma^3 t + 2c_{22}^2(\sigma^3 t)^{2/3}} \quad (3.2.38)$$

para cierto par de constantes positivas  $c_{21} = c_{21}(\theta, \epsilon, y, \alpha, \beta) > 0$  y  $c_{22} = c_{22}(\theta, \epsilon, y, \alpha, \beta) > 0$  las cuales son independientes de  $\alpha$  y  $\beta$  cuando  $\alpha \geq 1$  y  $\beta \geq 1$  y, como en el paso 3, concluimos que en el caso en el que  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes y en el caso en el que  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  y  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  satisfacen las condiciones (3.1.3) y (3.1.4) el lado derecho de la desigualdad (3.2.38) tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito, lo cual combinado con el paso 4 implica (3.2.36).

**Paso 6.** En este paso mostraremos lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_{y,\epsilon}^{\text{RW}})_{L^2(C_\theta^\epsilon)} = \det (I + k_y)_{L^2(C)}$$

Primero notemos que podemos deformar el contorno  $C_\theta^\epsilon$  a  $W_\theta^L$ , de modo que es suficiente probar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det (I - K_{y,\epsilon}^{\text{RW}})_{L^2(W_\theta^L)} = \det (I + k_y)_{L^2(C)}$$

Para probar esto, primero hacemos un cambio de coordenadas en las variables de integración del determinante de Fredholm y en el kernel  $K_{y,\epsilon}^{\text{RW}}$  introduciendo las nuevas variables  $\bar{z}$ ,  $\bar{v}$  y  $\bar{v}'$  definidas por

$$\begin{aligned} z &= \theta + \frac{\bar{z}}{\sigma(\theta)t^{1/3}} \\ v &= \theta + \frac{\bar{v}}{\sigma(\theta)t^{1/3}} \\ v' &= \theta + \frac{\bar{v}'}{\sigma(\theta)t^{1/3}} \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

Entonces tenemos lo siguiente

$$\det (I - K_{y,\epsilon}^{\text{RW}})_{L^2(W_\theta^L)} = \det (I - \bar{K}_\epsilon^t)_{L^2(W_\theta^\infty)}$$

donde el determinante de la derecha está definido por el siguiente kernel

$$\bar{K}_\epsilon^t(\bar{v}, \bar{v}') := 1_{|\bar{v}|, |\bar{v}'| \leq \epsilon \sigma t^{1/3}} \frac{1}{\sigma(\theta)t^{1/3}} K_{y,\epsilon}^{\text{RW}} \left[ \theta + \frac{\bar{v}}{\sigma(\theta)t^{1/3}}, \theta + \frac{\bar{v}'}{\sigma(\theta)t^{1/3}} \right] \tag{3.2.40}$$

Primero probaremos la convergencia puntual del kernel  $\bar{K}_\epsilon^t$ . Para esto consideremos el contorno  $L_\epsilon := D_0^{1, \epsilon \sigma t^{1/3}, +} \cup S_0^1$  formado por las dos líneas verticales  $D_0^{1, \epsilon \sigma t^{1/3}, +} := \{yi : y \in [1, \epsilon \sigma t^{1/3}]\} \cup \{yi : i \in [-1, -\epsilon \sigma t^{1/3}]\}$  y la semicircunferencia  $S_0^1 := \{z : |z| = 1, \Re(z) \geq 0\}$ . Además denotamos con  $L_\infty$  como el contorno  $L_\epsilon$  con  $\epsilon = \infty$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \bar{K}_\epsilon^t(\bar{v}, \bar{v}') &= \\ &= \frac{1_{|\bar{v}|, |\bar{v}'| \leq \epsilon \sigma t^{1/3}}}{2\pi i} \int_{L_\epsilon} \frac{\sigma^{-1} t^{-1} \pi}{\sin[\sigma^{-1} t^{-1/3} \pi(\bar{z} - \bar{v})]} e^{t[\bar{h}(\bar{z}) - \bar{h}(\bar{v}) - y(\bar{z} - \bar{v})]} \frac{\bar{\Gamma}(\bar{v})}{\bar{\Gamma}(\bar{z})} \frac{1}{\bar{z} - \bar{v}'} d\bar{z} \end{aligned}$$

donde

$$\bar{h}(w) = h(\theta + \sigma^{-1} t^{-1/3} w) \quad \text{y} \quad \bar{\Gamma}(w) = \Gamma(\theta + \sigma^{-1} t^{-1/3} w)$$

Ahora, notemos que los siguientes límites se cumplen en el caso  $\alpha$  y  $\beta$  constantes, y también en el caso en el que ambos parametros depende de

$t$  cumpliendo las condiciones (3.1.3) y (3.1.4) (ya que en este caso se cumple  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma t^3 = \infty$  por la parte (iv) y parte (v) del corolario (A.0.1))

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{-1}(\theta)t^{-1/3}\pi}{\sin [\sigma^{-1}(\theta)t^{-1/3}\pi (\bar{z} - \bar{v})]} &= \frac{1}{\bar{z} - \bar{v}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Gamma}(\bar{v})}{\bar{\Gamma}(\bar{z})} &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t [\bar{h}(\bar{z}) - \bar{h}(\bar{v})] &= \frac{1}{3} (\bar{z}^3 - \bar{v}^3) \end{aligned}$$

De los límites anteriores se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{-1}(\theta)t^{-1/3}\pi}{\sin [\sigma^{-1}(\theta)t^{-1/3}\pi (\bar{z} - \bar{v})]} e^{t[\bar{h}(\bar{z}) - \bar{h}(\bar{v})] - y(\bar{z} - \bar{v})} \frac{\bar{\Gamma}(\bar{v})}{\bar{\Gamma}(\bar{z})} \frac{1}{\bar{z} - \bar{v}'} \\ = \frac{1}{(\bar{z} - \bar{v})(\bar{z} - \bar{v}')} e^{\frac{1}{3}(\bar{z}^3 - \bar{v}^3) - y(\bar{z} - \bar{v})} \end{aligned}$$

Ahora necesitamos justificar que el límite anterior puede ser conmutado con la integral sobre  $\bar{z}$ . Note que  $v \in W_{\theta, \epsilon}^L$  y  $z \in D_{\theta}^t$  implican que  $\bar{v} \in W^{\infty}$  y  $\bar{z} \in L_{\infty}$ , de modo que podemos aplicar la parte (iii) del lema (3.2.5) para acotar la exponencial y concluir que

$$\left| \frac{\sigma^{-1}(\theta)t^{-1/3}\pi}{\sin [\sigma^{-1}(\theta)t^{-1/3}\pi (\bar{z} - \bar{v})]} e^{t[\bar{h}(\bar{z}) - \bar{h}(\bar{v})] - y(\bar{z} - \bar{v})} \frac{\bar{\Gamma}(\bar{v})}{\bar{\Gamma}(\bar{z})} \frac{1}{\bar{z} - \bar{v}'} \right| \leq c_{23} \frac{|\Gamma(\bar{v})|}{|\bar{z} - \bar{v}| |\bar{z}| - \bar{v}'} e^{-C_7 |\bar{v}|^3} \quad (3.2.41)$$

Ya que el lado derecho tiene un decaimiento cuadrático, se concluye por el teorema de convergencia dominada que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_{\epsilon}^t(\bar{v}, \bar{v}') = \int_{L_{\infty}} \frac{1}{(\bar{z} - \bar{v})(\bar{z} - \bar{v}')} e^{\frac{1}{3}(\bar{z}^3 - \bar{v}^3) - y(\bar{z} - \bar{v})} d\bar{z} \quad (3.2.42)$$

Ahora, de la desigualdad (3.2.41), podemos concluir que

$$K_{\epsilon}^t(\bar{v}, \bar{v}') \leq c_{24} e^{-C_7 |\bar{v}|^3}$$

para alguna constante positiva  $c_{24}$ . Luego, por la desigualdad de Hadamard, la desigualdad anterior implica lo siguiente

$$\det [K_{\epsilon}^t(\bar{w}_i, \bar{w}_j)]_{i,j=1}^n \leq n^{n/2} \prod_{i=1}^n c_{24} e^{-\frac{C_7}{2} |\bar{w}_i|^3}$$

De esta última desigualdad junto con la convergencia en (3.2.42) y usando el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(W_\theta^L)^n} \det [K_{y,\epsilon}^{\text{RW}}(w_i, w_j)] dw_1 \cdots dw_n \\ = \int_{(W_\theta^\infty)^n} \det [K_y(\bar{w}_i, \bar{w}_j)] d\bar{w}_1 \cdots d\bar{w}_n \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el teorema de convergencia dominada para intercambiar la suma en la expansión del determinante de Fredholm con el límite, finalizamos la prueba de la parte 6 y con esto terminamos la prueba de los ítems (i) y (ii) de la proposición (3.1).

### 3.2.4. Prueba del lema (3.2.3)

Para probar este lema usaremos la siguiente notación

$$\Xi(x) := \frac{\psi_2(x)}{4\theta} + \frac{\psi_3(x)}{4!} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^4} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\theta x_n^3}.$$

Ahora, notemos que se cumple

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3(\theta)}{2\theta} + \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} &= \frac{h^{(3)}(\theta)}{4\theta} + \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} \\ &= \Xi(\theta + \alpha) - \Xi(\theta) + \frac{\psi_1(\theta) - \psi_1(\theta + \alpha)}{\psi_1(\theta) - \psi_1(\theta + \alpha + \beta)} [\Xi(\theta) - \Xi(\theta + \alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Además esta expresión tiende a cero cuando  $\beta$  tiende a cero. Luego, es suficiente probar que la derivada con respecto a  $\beta$  de la expresión anterior es positiva. En otras palabras, haciendo el cambio de variable  $y = \theta + \alpha + \beta$ , debemos probar que

$$\frac{\psi_1(\theta) - \psi_1(\theta + \alpha)}{[\psi_1(\theta) - \psi_1(y)]^2} \{-\Xi'(y) [\psi_1(\theta) - \psi_1(y)] + \psi_2(y) [\Xi(\theta) - \Xi(y)]\} > 0$$

para  $y > 2\theta$ . Se ve fácilmente que el primer factor es positivo. El segundo factor (entre llaves) lo desarrollamos a continuación

$$-\sum_{m \geq 0} \left( \frac{3}{2\theta} - \frac{1}{y_m} \right) \frac{1}{y_m^4} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{\theta_n^2} - \frac{1}{y_n^2} \right) + \sum_{m \geq 0} \frac{1}{y_m^3} \left[ \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2\theta_n} \right) \frac{1}{\theta_n^3} - \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2y_n} \right) \frac{1}{y_n^3} \right]$$

lo cual es igual a lo siguiente

$$-\sum_{m \geq 0} \frac{3y_m - 2\theta}{2\theta y_m^5} \sum_{n \geq 0} \frac{y_n^2 - \theta_n^2}{\theta_n^2 y_n^2} + \sum_{m \geq 0} \frac{1}{y_m^3} \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{2\theta_n - \theta}{2\theta \theta_n^4} - \sum_{n \geq 0} \frac{2y_n - \theta}{2\theta y_n^4} \right]$$

A continuación probaremos la positividad de esta última expresión. Primero analizaremos los términos correspondientes a cuando los índices  $n$  y  $m$  son iguales

$$-\frac{3y_n - 2\theta}{2\theta y_n^5} \frac{y_n^2 - \theta_n^2}{\theta_n^2 y_n^2} + \frac{1}{y_n^3} \frac{2\theta_n - \theta}{2\theta \theta_n^4} - \frac{1}{y_n^3} \frac{2y_n - \theta}{2\theta y_n^4}$$

Si desarrollamos la expresión anterior obtenemos una cantidad positiva en el denominador y como numerador obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & -(3y_n - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)\theta_n^2 + (2\theta_n - \theta)y_n^4 - (2y_n - \theta)\theta^4 \\ & = -(3a + 3t - 2\theta) [(a + t)^2 - a^2] a^2(2a - \theta)(a + t)^4 - (2a + 2t - \theta)a^4 \end{aligned}$$

donde estamos abreviando  $\theta_n$  como  $a$  y  $\alpha + \beta$  como  $t$  de modo que  $y_n = a + t$  y  $t > \theta$ . Después de expandir los binomios elevados a la cuarta potencia vemos que los términos independientes y lineales con respecto a  $t$  se cancelan

$$\begin{aligned} & -(3a + 3t - 2\theta)(2a + t)ta^2 + (2a - \theta)(4a^3t + 6a^2t^2 + 4at^3 + t^4) - 2ta^4 \\ & = -(9at + 3t^2 - 2t\theta)ta^2 + (2a - \theta)(6a^2t^2 + 4at^3 + t^4) \\ & = t^2 [3a^3 - 4a^2\theta + (5a^2 - 4a\theta)t + (2a - \theta)t^2] \end{aligned}$$

Como  $a \geq \theta$ , es claro que esta última expresión es positiva para  $t > \theta$ . Ahora analizamos los términos correspondientes a índices distintos ( $m \neq n$ )

$$\begin{aligned} & -\frac{3y_m - 2\theta}{2\theta y_m^5} \frac{y_n^2 - \theta_n^2}{\theta_n^2 y_n^2} + \frac{1}{y_n^3} \frac{2\theta_n - \theta}{2\theta \theta_n^4} - \frac{1}{y_m^3} \frac{2y_n - \theta}{2\theta y_n^4} \\ & \quad - \frac{3y_n - 2\theta}{2\theta y_n^5} \frac{y_m^2 - \theta_m^2}{\theta_m^2 y_m^2} + \frac{1}{y_n^3} \frac{2\theta_m - \theta}{2\theta \theta_m^4} - \frac{1}{y_n^3} \frac{2y_m - \theta}{2\theta y_m^4} \end{aligned}$$

La primera mitad puede escribirse como

$$-\frac{(3y_m - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)y_n^2}{2\theta y_m^5 \theta_n^2 y_n^4} + \frac{(2\theta_n - \theta)y_n^4 - (2y_n - \theta)\theta_n^4}{2\theta y_m^3 \theta_n^4 y_n^4}$$

Lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{-(3y_m - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)y_n^2 + (3y_n - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)y_m^2}{2\theta y_m^5 \theta_n^2 y_n^4} \\ & \quad + \frac{-(3y_n - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)\theta_n^2 + (2\theta_n - \theta)y_n^4 - (2y_n - \theta)\theta_n^4}{2\theta y_m^3 \theta_n^4 y_n^4} \end{aligned}$$

Ya fue probado que el último numerador es positivo. Para la segunda mitad de la expresión de arriba se procede de manera similar, de modo que resta probar que la siguiente cantidad

$$\begin{aligned} & \frac{-(3y_m - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)y_n^2 + (3y_n - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)y_m^2}{2\theta y_m^5 \theta_n^2 y_n^4} \\ & + \frac{-(3y_n - 2\theta)(y_m^2 - \theta_m^2)y_m^2 + (3y_m - 2\theta)(y_m^2 - \theta_m^2)y_n^2}{2\theta y_n^5 \theta_m^2 y_m^4} \end{aligned}$$

es positiva para  $y > 2\theta$ . Esto es equivalente a probar la positividad de la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & -(3y_m - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)y_n^3\theta_m^2 + (3y_n - 2\theta)(y_n^2 - \theta_n^2)y_m^2y_n\theta_m^2 \\ & - (3y_n - 2\theta)(y_m^2 - \theta_m^2)y_m^3\theta_n^2 + (3y_m - 2\theta)(y_m^2 - \theta_m^2)y_n^2y_m\theta_n^2 \end{aligned}$$

Factorizando tenemos que lo anterior es igual a

$$[(y_n^2 - \theta_n^2)\theta_m^2y_n - (y_m^2 - \theta_m^2)\theta_ny_m] [(3y_n - 2\theta)y_m^2 - (3y_m - 2\theta)y_n^2]$$

Denotando  $a = \theta_n$  y  $b = \theta_m$  para abreviar tenemos que lo anterior es igual a

$$[(2a + t)tb^2(a + t) - (2b + t)ta^2(b + t)] [3(a + t)(b + t)(b - a) - 2\theta(a + b + 2t)(b - a)]$$

Operando convenientemente notamos que la expresión anterior es igual a

$$[(a + b)t^3 + 3abt^2] [3ab + 3t^2 + (a + b)(3t - 2\theta) - 4\theta t] (b - a)^2$$

la cual es positiva bajo nuestras hipótesis.

### 3.2.5. Prueba del lema (3.2.1)

La mayor dificultad técnica de la prueba del lema (3.2.1) será extraer el cero de la función  $\Re [izh'(z)]$  para  $z = e^{i\phi}$  en  $\phi = 0$  restándole funciones apropiadas. Esto nos permitirá separar los factores  $\sin(\phi)$  y  $1 - \cos(\phi)$  de  $\Re [izh'(z)]$ .

Comenzamos mostrando algunas propiedades importantes de la siguiente función auxiliar definida para  $x > 0$

$$\mathcal{P}(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^2 + 2\theta x_n \cos \phi}{(\theta^2 + 2\theta x_n \cos \phi + x_n^2)(\theta + x_n)^2} \quad (3.2.43)$$

donde nuevamente estamos adoptando la notación  $x_n = n + x$ .

**Lema 3.2.6.** Para  $\theta > 0$ , se cumple lo siguiente

- (i) Para todo  $\phi \in (0, \pi)$  tal que  $\cos \phi \geq 0$ , la función  $-\mathcal{P}(x)$  es positiva y decreciente en  $x > 0$ .
- (ii) Para todo  $\phi \in (0, \pi)$  y  $x > 0$  tales que  $\cos \phi \leq -\frac{\theta}{2x}$ ,  $-\mathcal{P}(x)$  es negativa.
- (iii) Para toda  $\phi \in (0, \pi)$  y  $x > 0$  tales que  $\cos \phi \leq -\frac{\theta}{x}$ ,  $-\mathcal{P}(x + y)$  es creciente en  $y > 0$ .
- (iv) Para toda  $\phi \in (0, \pi)$ ,  $x \geq 0$ , y  $y \geq 0$  tenemos que

$$-[\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x + y)] \leq v(\rho, \phi) 1(\cos \phi > -\rho) [\Psi_1(\theta + x) - \Psi_1(\theta + x + y)]$$

donde

$$v(\rho, \phi) = \frac{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + \rho}{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + 1} \leq \frac{\rho^2 + 3\rho}{(\rho + 1)^2}$$

$$y \rho = \frac{\theta}{x}$$

*Demostración.* la positividad de  $-\mathcal{P}(x)$  para  $\cos \phi \geq 0$  es inmediata. También la negatividad de  $-\mathcal{P}(x)$  para  $\cos \phi \leq -\frac{\theta}{2x}$ , lo que prueba la parte (ii). Ahora probaremos que  $-\mathcal{P}(x)$  es decreciente en  $x$  para  $\cos \phi \geq 0$  (parte (i)), la parte (iii) y parte (iv). Para simplificar un poco la notación definimos

$$\begin{aligned} C(u) &:= \theta + 2u \cos \phi \\ A(u) &:= \theta^2 + 2\theta u \cos \phi + u^2 \end{aligned}$$

y

$$B(u) := (\theta + u)^2$$

Luego, notemos que la expresión

$$\frac{C(x_n)}{A(x_n)B(x_n)} - \frac{C((x + y)_n)}{A((x + y)_n)B((x + y)_n)}$$

es igual a

$$\begin{aligned} \frac{\theta + 2x_n \cos \phi}{A(x_n)} \left[ \frac{1}{B(x_n)} - \frac{1}{B((x + y)_n)} \right] - \frac{2y \cos \phi}{A(x_n)} \frac{1}{B((x + y)_n)} \\ + \frac{\theta + 2(x + y)_n \cos \phi}{A((x + y)_n)} \frac{2y(\theta \cos \phi + x_n) + y^2}{A(x_n)B((x + y)_n)} \end{aligned}$$

que a su vez es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{\theta + 2x_n \cos \phi}{A(x_n)} \left[ \frac{1}{B(x_n)} - \frac{1}{B((x+y)_n)} \right] - \frac{2 \cos \phi}{2\theta + 2x_n + y} \frac{B(x_n)}{A(x_n)} \frac{2y\theta + 2x_n y + y^2}{B(x_n)B((x+y)_n)} \\ & + \frac{\theta + 2(x+y)_n \cos \phi}{A((x+y)_n)} \frac{B(x_n)}{A(x_n)} \frac{2(\theta \cos \phi + x_n) + y}{2\theta + 2x_n + y} \frac{2\theta y + 2x_n y + y^2}{B(x_n)B((x+y)_n)} \end{aligned}$$

que finalmente se puede expresar, de manera más compacta, como

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{a}) \left[ \frac{1}{B(x_n)} - \frac{1}{B((x+y)_n)} \right]$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{\theta + 2x_n \cos \phi}{\theta^2 + 2x_n \theta \cos \phi + x_n^2} \\ \mathbf{c} &= -\frac{2 \cos \phi}{2\theta + 2x_n + y} \frac{(\theta + x_n)^2}{\theta^2 + 2\theta x_n \cos \phi + x_n^2} \\ \mathbf{a} &= \frac{\theta + 2(x_n + y) \cos \phi}{\theta^2 + 2\theta(x_n + y) \cos \phi + (x_n + y)^2} \frac{(x_n + \theta)^2}{\theta^2 + 2\theta x_n \cos \phi + x_n^2} \frac{2(\theta \cos \phi + x_n) + y}{2(\theta + x_n) + y} \end{aligned}$$

Note que, entonces,  $\mathbf{a} + \mathbf{c}$  es igual a

$$\frac{[2(x_n + y)(\theta + x_n \cos \phi) - \theta y] (x_n + \theta)^2}{(\theta^2 + 2\theta x_n \cos \phi + x_n^2) [\theta^2 + 2\theta(x_n + y) \cos \phi + (x_n + y)^2] (2\theta + 2x_n + y)} \quad (3.2.44)$$

De esta última expresión podemos verificar fácilmente que  $\mathbf{a} + \mathbf{c} \geq 0$  cuando  $\cos \phi \geq 0$ . Esto junto al hecho de que bajo la condición sobre  $\phi$  tenemos que  $\mathbf{b} \geq 0$ , prueban que  $-\mathcal{P}(x)$  es decreciente cuando  $\cos \phi \geq 0$ , lo cual prueba la parte (i).

Por otro lado, la expresión (3.2.44) también prueba que  $\mathbf{a} + \mathbf{c} \leq 0$  cuando  $\cos \phi \leq \frac{\theta}{x}$ . Además, esta última condición para  $\phi$  también implica que  $\mathbf{b} \leq 0$  y por lo tanto  $-\mathcal{P}(x+y)$  es creciente en  $y$  cuando  $\cos \phi \leq -\frac{\theta}{x}$ , lo cual prueba la parte (iii).

Para probar la parte (iv) notemos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} \leq \frac{2(x_n + y)(\theta + x_n \cos \phi)(x_n + \theta)^2}{(\theta^2 + 2\theta x_n \cos \phi + x_n^2) [\theta^2 + 2\theta(x_n + y) \cos \phi + (x_n + y)^2] (2\theta + 2x_n + y)}$$

Ahora notemos que para todo  $\phi \in (0, \pi)$ , la función

$$f_1(v) = \frac{v}{\theta^2 + 2\theta v \cos \phi + v^2}$$

es decreciente en  $v$  siempre que  $v \geq \theta$ . Por lo tanto, ya que por hipótesis tenemos que  $x \geq \theta$ , se sigue que  $x_n + y \geq \theta$ , de modo que para todo  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{c})\theta &\leq \frac{\theta x_n(\theta + x_n \cos \phi)(x_n + \theta)}{(\theta^2 + 2\theta x_n \cos \phi + x_n^2)^2} 1(\cos \phi > -\theta/x_n) \\ &\leq \frac{\rho_n(\rho_n + \cos \phi)(\rho_n + 1)}{(\rho_n^2 + 2\rho_n \cos \phi + 1)^2} 1(\cos \phi > -\rho_n) \end{aligned}$$

donde  $\rho_n := \frac{\theta}{x_n}$ . Ahora, consideremos la siguiente función

$$f_2(u, a) := \frac{u + a}{u^2 + 2ua + 1}$$

Notemos que para  $u \in (0, 1)$  se cumple

$$\frac{\partial f_2(u, a)}{\partial a} = \frac{1 - u^2}{(u^2 + 2ua + 1)^2} > 0$$

Lo cual prueba que para  $u$  fijo, la función  $f_2(u, a)$  es creciente en  $a$ . Luego, para todo  $n \geq 0$

$$\frac{\rho_n(\rho_n + \cos \phi)(\rho_n + 1)}{(\rho_n^2 + 2\rho_n \cos \phi + 1)^2} \leq \frac{\rho_n}{\rho_n^2 + 2\rho_n \cos \phi + 1}$$

se sigue que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})\theta \leq f_3(\rho_n, \cos \phi) 1(\cos \phi > -\rho_n)$$

donde hemos definido para  $u \in [0, 1]$  y  $a \in (-1, 1)$

$$f_3(u, a) = \frac{u^2 + 2ua + u}{u^2 + 2ua + 1}$$

Ahora notemos que para  $u \in (0, 1)$  y  $a$  arbitrario se cumple

$$\frac{\partial f_3(u, a)}{\partial a} = \frac{2u(1 - u)}{(u^2 + 2ua + 1)^2} > 0$$

También para  $a \in (-u, 1)$  y  $u \in (0, 1)$  se cumple

$$\frac{\partial f_3(u, a)}{\partial u} = \frac{1 + 2u + 2a - u^2}{(u^2 + 2ua + 1)^2} > 0$$

Luego

$$f_3(\rho_n, a) \leq f_3(\rho_0, a)$$

Se sigue también que  $f_3(u, a)$  es creciente en  $a$  para  $u$  fijo y creciente en  $u$  para  $a$  fijo y siempre que  $u, a \in (0, 1)$ . Por lo tanto, ya que  $\rho_n \leq \rho_0$ , se concluye que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})\theta \leq \frac{\rho_0^2 + 2\rho_0 \cos \phi + \rho_0}{\rho_0^2 + 2\rho_0 \cos \phi + 1} 1_{(\cos \phi > -\rho_0)} \leq \frac{\rho_0^2 + 3\rho_0}{(\rho_0 + 1)^2} 1_{(\cos \phi > -\rho_0)}$$

□

Procedemos ahora con la prueba del lema (3.2.1)

Sea  $z = \theta e^{i\phi}$ , notemos que

$$\Re [izh'(z)] = \Theta(\alpha) - \Theta(\alpha + \beta) + \frac{\Psi_1(\alpha + \theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} [\Theta(\alpha + \beta) - \Theta(0)]$$

donde para  $\gamma$  real definimos

$$\Theta(\gamma) := \Re \{iz [\Psi(z + \gamma) - \Psi(\theta + \gamma)]\}$$

Ahora, para  $\gamma > 0$  tenemos que la siguiente expansión es válida para cualquier  $z \notin \{0, -1, -2, \dots\}$

$$\Psi(z + \gamma) - \Psi(\theta + \gamma) = \sum_{n \geq 0} \frac{z - \theta}{(z + \gamma + n)(\theta + \gamma + n)} \quad (3.2.45)$$

y también

$$\Re \left( iz \frac{z - \theta}{\gamma_n + z} \right) = \theta^2 \sin \phi \frac{-\theta - \gamma_n(2 \cos \phi - 1)}{\theta^2 + 2\theta\gamma_n \cos \phi + \gamma_n^2}$$

Esto implica que

$$\Theta(\gamma) = \mathcal{R}(\gamma)\theta^2 \sin \phi$$

donde definimos

$$\mathcal{R}(\gamma) := - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta + \gamma_n(2 \cos \phi - 1)}{(\theta^2 + 2\theta\gamma_n \cos \phi + \gamma_n^2)(\theta + \gamma_n)}$$

Luego, es suficiente probar que para  $\phi \in (0, \pi)$  se cumple

$$\mathcal{R}(\alpha) - \mathcal{R}(\alpha + \beta) + \frac{\Psi_1(\alpha + \theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} [\mathcal{R}(\alpha + \beta) - \mathcal{R}(0)] > 0$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\gamma) + \Psi_1(\theta + \gamma) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(\theta + \gamma_n)^2} - \frac{\theta + \gamma_n(2 \cos \phi - 1)}{(\theta^2 + 2\theta\gamma_n \cos \phi + \gamma_n^2)(\theta + \gamma_n)} \right] \\ &= 2\mathcal{Q}(\gamma)(1 - \cos \phi) \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

donde hemos definido

$$\mathcal{Q}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{(\theta^2 + 2\theta\gamma_n \cos \phi + \gamma_n^2)(\theta + \gamma_n)^2}$$

Por lo tanto es suficiente probar que para  $\phi \in (0, \pi)$  se cumple

$$\mathcal{Q}(\alpha) - \mathcal{Q}(\alpha + \beta) + \frac{\Psi_1(\alpha + \theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} [\mathcal{Q}(\alpha + \beta) - \mathcal{Q}(0)] > 0 \quad (3.2.47)$$

Para esto notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\gamma) - \Psi_1(\theta + \gamma) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\gamma_n^2}{(\theta^2 + 2\theta\gamma_n \cos \phi + \gamma_n^2)(\theta + \gamma_n)^2} - \frac{1}{(\theta + \gamma_n)^2} \right] \\ &= \mathcal{P}(\gamma) \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

donde nuevamente estamos usando la función  $\mathcal{P}$  definida en la ecuación (3.2.43). Por lo anterior tenemos que es suficiente probar que para  $\phi \in (0, \pi)$

$$\mathcal{P}(\alpha) - \mathcal{P}(\alpha + \beta) + \frac{\Psi_1(\alpha + \beta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} [\mathcal{P}(\alpha + \beta) - \mathcal{P}(0)] > 0 \quad (3.2.49)$$

En efecto, teniendo esto, la desigualdad (3.2.11) se sigue del hecho de que las ecuaciones (3.2.5), (3.2.46), (3.2.48) y (3.2.49) implican que

$$\Re[izh'(z)] = 2\theta^2 \sin \phi (1 - \cos \phi) \left\{ \mathcal{P}(\alpha) - \mathcal{P}(\alpha + \beta) + \frac{\Psi_1(\alpha + \beta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} [\mathcal{P}(\alpha + \beta) - \mathcal{P}(0)] \right\}$$

De aquí vemos que para  $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$  ( $\theta = 0$  se interpreta como el límite cuando  $\theta$  tiende a cero por la derecha),  $\alpha \leq 1$  y  $\beta \leq 1$ , se tiene que el factor  $2\theta^2(1 - \cos \phi) \sin \phi$  en la expresión anterior es positivo, mientras que cuando  $\alpha \rightarrow \infty$  y  $\beta \rightarrow \infty$ , el término dominante en este factor es  $-\frac{\mathcal{P}(0)}{\Psi_1(\theta)} [\Psi_1(\alpha + \theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)]$  lo cual nos da, por compacidad, la segunda desigualdad del lema (3.2.1). Ahora introducimos el parámetro  $\rho := \frac{\theta}{\alpha}$ .

Ahora procederemos a probar la desigualdad (3.2.49) la cual será dividida en cuatro casos: el caso 1 cuando  $\cos \phi \leq -\rho$ , el caso 2 cuando  $-\rho \leq \cos \phi \leq -\rho/2$ , el caso 3 cuando  $-\rho/2 \leq \cos \phi \leq 0$  y el caso 4 cuando  $0 \leq \cos \phi \leq 1$ . Para esto, primero notemos que:

$$-\mathcal{P}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^2 + 2\theta n \cos \phi}{(\theta^2 + 2\theta n \cos \phi + n^2)(\theta + n)^2} \quad (3.2.50)$$

En lo que sigue asumiremos que  $\rho \leq 1$  y usaremos la siguiente consecuencia de la parte (iv) del lema (3.2.6) válido para  $\theta < \min\{0.5, \alpha\}$  y  $\beta > 0$

$$-[\mathcal{P}(\alpha) - \mathcal{P}(\alpha + \beta)] \leq \frac{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + \rho}{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + 1} 1(\cos \phi > -\rho) [\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)] \quad (3.2.51)$$

**Caso 1:**  $\cos \phi \leq -\rho$ . Por la parte (ii) del lema (3.2.6) tenemos que  $\mathcal{P}(\alpha + \beta) > 0$  mientras que por la desigualdad (3.2.51) tenemos que  $-\mathcal{P}(\alpha) - \mathcal{P}(\alpha + \beta) \leq 0$ . Por lo tanto es suficiente probar que  $-\mathcal{P}(0) > 0$  cuando  $\theta \in (0, 0.5)$ . Notemos que la serie (3.2.50) alcanza su mínimo en  $\phi = -\pi$ , de modo que

$$\begin{aligned} -\mathcal{P}(0) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^2 - 2\theta n}{(n^2 - \theta^2)^2} \\ &= \frac{1}{\theta^2} + \frac{\theta^2 - 2\theta}{(1 - \theta^2)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\theta n - \theta^2}{(n^2 - \theta^2)^2} \\ &\geq \frac{1}{\theta^2} + \frac{\theta^2 - 2\theta}{(1 - \theta^2)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \frac{1}{4}}{(n^2 - \frac{1}{4})^2} \quad (3.2.52) \\ &\geq \frac{1}{\theta^2} + \frac{\theta^2 - 2\theta}{(1 - \theta^2)^2} - 0.2 \\ &\geq 4 - \frac{4}{3} - \frac{1}{5} > 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que los términos en la serie son decrecientes en  $\theta$  y el valor mínimo es alcanzado en  $\theta = 0.5$ .

**Caso 2** ( $-\rho \leq \cos \phi \leq -\rho/2$ ). Por la hipótesis de que  $\cos \phi \leq -\frac{\rho}{2}$  y la parte (ii) del lema (3.2.6), tenemos que  $-\mathcal{P}(\alpha + \beta) \leq 0$ . Esta vez la serie alcanza su mínimo cuando  $\cos \phi = -\rho$  y como, por hipótesis,  $\rho \leq 0.69$  tenemos que gracias a (3.2.52) es suficiente probar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} \left[ \frac{1}{\theta^2} + \frac{\theta^2 - 2\theta(0.69)}{(\theta^2 - 2\theta(0.69) + 1)(1 + \theta)^2} - 0.2 \right] \\ \geq \rho \geq \frac{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + \rho}{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + 1} \end{aligned}$$

y como  $\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha) \leq \Psi_1(\theta)$  sería suficiente probar que

$$\frac{1}{\theta^2 \Psi_1(\theta)} \left[ 1 - \theta^2 \frac{2\theta(0.69) - \theta^2}{(\theta^2 - 2\theta(0.69) + 1)(1 + \theta)^2} - 0.2\theta^2 \right] \geq \rho$$

Ahora, ya que  $\theta^2 \Psi_1(\theta)$  es creciente en  $\theta$ , vemos que la desigualdad es satisfecha para toda  $\rho \leq 0.69$  tal que

$$\frac{1}{\frac{1}{4} \Psi_1(\frac{1}{2})} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{0.69 - \frac{1}{4}}{(\frac{1}{4} - 0.69 + 1)(1 + \frac{1}{2})^2} - 0.2(\frac{1}{4}) \right] \geq \rho$$

o

$$\rho \leq 0.6994 \dots$$

**Caso 3.** ( $-\rho/2 \leq \cos \phi \leq 0$ ). Consideremos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} -\mathcal{P}(\alpha + \beta) &\leq \frac{\theta^2}{[\theta^2 + (\alpha + \beta)^2](\alpha + \beta + \theta)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^2}{[\theta^2 + (\alpha + \beta)_n^2][(\alpha + \beta)_n + \theta]^2} \\ &\leq \frac{1}{\theta^2} \frac{\rho^4}{(1 + \rho^2)(1 + \rho)^2} + \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} \Psi_1(1) \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} -\mathcal{P}(0) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^2 - \theta n}{(\theta^2 - \theta n + n^2)(\theta + n)^2} \\ &= \frac{1}{\theta^2} - \frac{\theta - \theta^2}{[1 - (\theta - \theta^2)](\theta + 1)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\theta - \theta^2}{[n^2 - (n\theta - \theta^2)](\theta + n)^2} \\ &\geq \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{3} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n - 1}{(4n^2 - 2n + 1)n^2} \\ &\geq \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{3} - 0.65 \end{aligned}$$

Al igual que en el caso (ii), observamos que es suficiente probar que

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\Psi_1(\frac{1}{2})} \left\{ \frac{1}{\theta^2} \left[ 1 - \frac{\rho^4}{(1 + \rho^2)(1 + \rho)^2} \right] - \frac{1}{3} - 0.65 - \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} \Psi_1(1) \right\} \geq \frac{\rho^2 + \rho}{\rho^2 + 1}$$

Ya que el lado izquierdo de esta última desigualdad está acotado por el caso en el que  $\theta = 0.5$ , es suficiente probar

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\Psi_1(\frac{1}{2})} \left\{ 4 \left[ 1 - \frac{\rho^4}{(1 + \rho^2)(1 + \rho)^2} \right] - \frac{1}{3} - 0.65 - \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} \Psi_1(1) \right\} \geq \frac{\rho^2 + \rho}{\rho^2 + 1}$$

lo cual se satisface para todo  $\rho > 0$ .

**Caso 4.** ( $0 \leq \cos \phi \leq 1$ ). Notemos primero que por la parte (i) del corolario (A.0.1) la diferencia  $\Psi_1(\alpha + \theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)$  es positiva y por lo tanto dividiendo la expresión (3.2.49) por esta cantidad notamos que es suficiente probar

$$\frac{\mathcal{P}(\alpha + \beta) - \mathcal{P}(0)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} > \frac{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + \rho}{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + 1} 1_{(\cos \phi > -\rho)} \quad (3.2.54)$$

Para probar eso, primero notemos que

$$-\mathcal{P}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^2 + 2\theta n \cos \phi}{(\theta^2 + 2\theta n \cos \phi + n^2)(\theta + n)^2}$$

Por lo tanto, el valor mínimo de  $-\mathcal{P}(0)$  se alcanza cuando  $\cos \phi = 0$ , de modo que

$$-\mathcal{P}(0) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^2}{(\theta^2 + n^2)(\theta + n)^2} = \frac{1}{\theta^2} - \mathcal{P}(1)$$

donde  $-\mathcal{P}(1)$  en el lado izquierdo es evaluado en  $\phi = \pi/2$ . Por otro lado, tenemos que  $\mathcal{P}(\alpha + \beta)$  es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{\theta^2 + 2\theta(\alpha + \beta) \cos \phi}{[\theta^2 + 2\theta(\alpha + \beta) \cos \phi + (\alpha + \beta)^2](\alpha + \beta + \theta)^2} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^2 + 2\theta(\alpha + \beta)_n \cos \phi}{[\theta^2 + 2\theta(\alpha + \beta)_n \cos \phi + (\alpha + \beta)_n^2]((\alpha + \beta)_n + \theta)^2} \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} -\mathcal{P}(\alpha + \beta) & \leq \frac{\theta^2 + 2\theta\alpha \cos \phi}{(\theta^2 + 2\theta\alpha \cos \phi + \alpha^2)(\alpha + \theta)^2} - \mathcal{P}(\alpha + 1) \\ & \leq \frac{1}{\theta^2} \frac{\rho^2 + 2\rho}{(\rho + 1)^4} - \mathcal{P}(\alpha + 1) \end{aligned} \tag{3.2.55}$$

donde hemos usado la parte (i) del lema (3.2.6). Usando nuevamente este lema podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}(\alpha + \beta) - \mathcal{P}(0)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\alpha + \beta + \theta)} & \geq \frac{1}{\theta^2 \Psi_1(\theta)} \left[ 1 - \frac{\rho^2 + 2\rho}{(\rho + 1)^2} \right] \\ & \geq \frac{1}{\frac{1}{4} \Psi_1(\frac{1}{2})} \left[ 1 - \frac{\rho^2 + 2\rho}{(\rho + 1)^4} \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la parte (iv) del lema (3.2.6), es suficiente mostrar que

$$\frac{1}{\frac{1}{4} \Psi_1(\frac{1}{2})} \left[ 1 - \frac{\rho^2 + 2\rho}{(\rho + 1)^4} \right] \geq \frac{\rho^2 + 3\rho}{(\rho + 1)^4}$$

lo cual se satisface para todo  $\rho > 0$ .

### 3.2.6. Prueba del lema (3.2.2)

Utilizaremos el siguiente lema

**Lema 3.2.7.** Sean  $f$  y  $g$  funciones reales dos veces continuamente diferenciable definidas sobre un intervalo que contiene  $u < v < w$ . Si  $f$  es convexa y estrictamente decreciente y además  $(g''f' - g'f'')(x) \geq \rho(x)$  con  $\rho \geq 0$  medible, entonces

$$g(v) - g(w) - \frac{f(v) - f(w)}{f(u) - f(w)} [g(u) - g(w)] \geq \frac{f(v) - f(w)}{f(u) - f(w)} \int_u^v (u - x) \frac{\rho(x)}{f'(x)} dx$$

*Demostración.* Por la regla de la cadena y el teorema de la función inversa  $G = g \circ f^{-1}$  es continuamente diferenciable sobre un intervalo abierto que contiene  $a < b < c$ , las imágenes de  $w, v$  y  $u$  respectivamente. Además, como  $G' = (g'/f') \circ f^{-1}$ , tenemos que  $G'$  es también continuamente diferenciable en dicho intervalo con

$$G'' = \frac{g''f' - g'f''}{(f')^3} \circ f^{-1}$$

Por hipótesis,  $f'$  es negativa de modo que  $G'' \leq \rho/(f')^3 \leq 0$ , es decir,  $G$  es cóncava. Ahora vamos a integrar desde  $b$  hasta  $y \geq b$  y aplicamos el cambio de variable  $u = f(x)$  para obtener

$$G'(y) - G'(b) \leq \int_b^y \frac{\rho}{(f')^3} \circ f^{-1}(u) du = \int_{f^{-1}(b)}^{f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{f'(x)^2} dx$$

Integrando desde  $b$  hasta  $c$  obtenemos

$$G(c) - G(b) - (c - b)G'(b) \leq \int_b^c \int_{f^{-1}(b)}^{f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{f'(x)^2} dx dy$$

Intercambiando el orden de integración y recordando que  $f$  es decreciente obtenemos

$$\int_{f^{-1}(b)}^{f^{-1}(c)} \int_{f(x)}^c \frac{\rho(x)}{f'(x)^2} dy dx = \int_u^v [f(x) - f(u)] \frac{\rho(x)}{f'(x)^2} dx$$

Ahora, sea  $t \in [a, b]$  tal que  $G'(t) = [G(b) - G(a)]/(b - a)$ . Ya que  $G'$  es decreciente tenemos  $G'(t) \geq G'(b)$ . De forma similar tenemos que  $f(x) -$

$f(u) = f'(\eta)(x - u)$  para algún  $\eta \in [u, x]$  y  $f'(\eta) \leq f'(x)$ . Teniendo ambas desigualdades podemos escribir

$$G(c) - G(b) - \frac{c-b}{b-a} [G(b) - G(a)] \leq \int_u^v (x-u) \frac{\rho(x)}{f'(x)} dx$$

Finalmente, ya que

$$G(b) - G(a) - \frac{b-a}{c-a} [G(c) - G(a)] = [G(b) - G(a)] \frac{c-b}{c-a} - [G(c) - G(b)] \frac{b-a}{c-a}$$

multiplicando la última desigualdad por  $-(b-a)/(c-a)$  obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Para concluir con la prueba del lema (3.2.2) notemos que para  $x > 0$  e  $y$  reales tenemos

$$\Im \Psi(x + iy) = y \Phi(x, y)$$

donde  $\Phi$  es definido para toda  $x, y \in \mathbb{R}$  según

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2 + y^2}.$$

Notemos también que  $\Im h'(\theta + iy) = yH(\theta, y, \alpha, \beta)$  y

$$H(\theta, y, \alpha, \beta) = \Phi(\theta + \alpha, y) - \Phi(\theta + \alpha + \beta, y) - K_1 [\Phi(\theta, y) - \Phi(\theta + \alpha + \beta, y)]$$

Aplicando el lema (3.2.7) solo necesitamos probar que

$$(\Phi'' \Psi_1' - \Phi' \Psi_1'') (x) \geq -8y^2 \Psi_1'(x) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(x_n^2 + y^2)^3}$$

donde las derivadas de  $\Phi$  se toman con respecto a su primera variable y la segunda variable se fija en  $y$ . Calculando las derivadas y reemplazando, en particular

$$\Phi''(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{6}{(x_n^2 + y^2)^2} - \sum_{n \geq 0} \frac{8y^2}{(x_n^2 + y^2)^3},$$

la desigualdad anterior es equivalente a

$$\left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{x_n^4} \right) \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{(x_n^2 + y^2)^2} \right] - \left( \sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{x_n^4} \right) \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(x_n^2 + y^2)^2} \right] \geq 0$$

y esta desigualdad se sigue de que para  $n \neq m$  se cumple

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_m^4} \frac{x_n}{(x_n^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x_n^4} \frac{x_m}{(x_m^2 + y^2)^2} - \frac{x_m}{x_m^4} \frac{1}{(x_n^2 + y^2)^2} - \frac{x_n}{x_n^4} \frac{1}{(x_m^2 + y^2)^2} \\ = (x_m - x_n) \left[ \frac{1}{x_n^4} \frac{1}{(x_m^2 + y^2)^2} - \frac{1}{x_m^4} \frac{1}{(x_n^2 + y^2)^2} \right] \end{aligned}$$

Finalmente, lo anterior es igual a

$$y^2 (x_m + x_n) (x_m - x_n)^2 \frac{2x_m^2 x_n^2 + y^2 (x_m^2 + x_n^2)}{x_n^4 (x_m^2 + y^2)^2 x_m^4 (x_n^2 + y^2)^2} \geq 0.$$

# Anexo A

## Estimaciones preliminares sobre las funciones poligamma

En esta subsección probaremos algunas estimaciones que serán necesarias para verificar las propiedades de descenso más rápido de las integrales a lo largo de contornos complejos que aparecen en los determinantes de Fredholm sus respectivos kernels.

Recalcamos que la función poligamma de orden  $k$ , para  $k \geq 1$  es definida de la siguiente manera

$$\Psi_k(z) := \frac{d^k}{dz^k} \Psi(z) \quad (\text{A.0.1})$$

Comenzamos con algunas estimaciones respecto a estas funciones

**Lema A.0.1.** *Las siguientes desigualdades son satisfechas*

(i) *Para toda  $k \geq 1$  y  $x > 0$*

$$k! \left( \frac{1}{x^{k+1}} + \frac{1}{k} \frac{1}{(x+1)^k} \right) \leq (-1)^{k+1} \Psi_k(x) \leq k! \left( \frac{1}{x^{k+1}} + \frac{1}{k} \frac{1}{x^k} \right) \quad (\text{A.0.2})$$

(ii) *Para toda  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $k > 1$  tenemos que*

$$\begin{aligned} k! \mathbf{g}(x+1, y) \left( \frac{1}{x^k} + \frac{1}{k} \frac{1}{(x+1)^{k-1}} \right) &\leq k! \mathbf{g}(x, y) \frac{1}{x^k} + (k-1)! \frac{1}{(x+1)^{k-1}} \mathbf{g}(x+1, y) \\ &\leq (-1)^{k+1} [\Psi_k(x) - \Psi_k(x+y)] \\ &\leq (k+1)! \mathbf{g}(x, y) \left[ \frac{1}{x^k} + \frac{1}{k+1} \frac{1}{x^{k-1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

*Demostración.* Primero note que para toda  $k \geq 1$ ,

$$\Psi_k(z) = (-1)^{k+1} k! \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(z+j)^{k+1}} \quad (\text{A.0.4})$$

Para probar la parte (i) note que por la ecuación (A.0.4) tenemos

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \Psi_k(x) &= k! \left( \frac{1}{x^{k+1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(x+j)^{k+1}} \right) \\ &\leq k! \left( \frac{1}{x^{k+1}} + \frac{1}{k} \frac{1}{x^k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

De forma similar, tenemos:

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \Psi_k(x) &= k! \left( \frac{1}{x^{k+1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(x+j)^{k+1}} \right) \\ &\geq k! \left( \frac{1}{x^{k+1}} + \frac{1}{k} \frac{1}{(x+1)^k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

Para probar la cota superior de la parte (ii) note que

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} [\Psi_k(x) - \Psi_k(x+y)] &= \int_x^{x+y} (-1)^{k+2} \Psi_{k+1}(u) du \\ &\leq (k+1)! \int_x^{x+y} \left( \frac{1}{u^{k+2}} + \frac{1}{k+1} \frac{1}{u^{k+1}} \right) du \\ &\leq (k+1)! \mathfrak{g}(x, y) \left( \frac{1}{x^k} + \frac{1}{k+1} \frac{1}{x^{k-1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.0.7})$$

Para la cota inferior primero note que

$$\int_x^{x+y} u^{-(k+2)} du = \frac{1}{k+1} \left[ \frac{1}{x^{k+1}} - \frac{1}{(x+y)^{k+1}} \right] \geq \frac{1}{k+1} \frac{1}{x^k} \mathfrak{g}(x, y) \quad (\text{A.0.8})$$

Luego,

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} [\Psi_k(x) - \Psi_k(x+y)] &\geq (k+1)! \int_x^{x+y} \left[ \frac{1}{u^{k+2}} + \frac{1}{k+1} \frac{1}{(1+u)^{k+1}} \right] du \\ &\geq (k+1)! \left[ \frac{1}{k+1} \frac{1}{x^k} \mathfrak{g}(x, y) + \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{(x+1)^{k-1}} \mathfrak{g}(x+1, y) \right] \\ &\geq k! \mathfrak{g}(x+1, y) \left[ \frac{1}{x^k} + \frac{1}{k} \frac{1}{(x+1)^{k-1}} \right] \end{aligned}$$

□

Ahora aplicaremos el lema (A.0.1) para deducir algunas propiedades cruciales que involucran la función  $h$  la cual juega un rol central en el análisis de descenso más rápido que usaremos más adelante. Note que cuando  $k \geq 2$  la siguiente expresión es válida

$$h^{(k)}(\theta) = \Psi_{k-1}(\theta + \alpha) - \Psi_{k-1}(\theta + \alpha + \beta) + \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} [\Psi_{k-1}(\theta + \alpha + \beta) - \Psi_{k-1}(\theta)] \quad (\text{A.0.9})$$

**Corolario A.0.1.** *Las siguientes estimaciones son satisfechas*

(i) Para toda  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$

$$\Psi_1(\alpha) - \Psi_1(\alpha + \beta) \geq \mathbf{g}(\alpha + 1, \beta)$$

(ii) Para toda  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta > 0$  y  $k \geq 1$  tenemos que

$$|\Psi_k(\theta + \alpha) - \Psi_k(\theta + \alpha + \beta)| \geq (k + 1)! \mathbf{g}(\alpha, \beta) \frac{1 + \theta^{-1}}{\theta^{k-1}}$$

(iii) Para toda  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta \in (0, 0.5)$  y  $k \geq 3$  tenemos que

$$|h^{(k)}(\theta)| \leq 64 \mathbf{g}(\alpha, \beta) \frac{k!}{\theta^{k+2}}$$

(iv) Para todo  $\alpha_0 > 0$ , existe un  $\theta_0 > 0$  tal que para todo  $\alpha > \alpha_0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta \in (0, \theta_0)$  se cumple que

$$\frac{\sigma^3(\theta)}{2\theta} + \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} \geq C_1(\theta, \alpha_0) \mathbf{g}(\alpha, \beta)$$

donde  $C_1(\theta, \alpha_0) > 0$  depende solo de  $\theta$  y  $\alpha_0$ . Además  $\theta_0(\alpha_0)$  se puede escoger de modo que  $\lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} \theta_0 = \infty$ .

(v) Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta > 0$  tenemos que

$$\sigma^3(\theta) = \frac{1}{2} h^{(3)}(\theta) > 0 \quad y \quad h^{(4)}(\theta) < 0 \quad (\text{A.0.10})$$

*Demostración.* Prueba de la parte (i). Es inmediato a partir de la cota inferior de la parte (ii) del lema (A.0.1).

Prueba de la parte (ii). A partir de la cota superior de la parte (ii) del lema (A.0.1) note que

$$|\Psi_k(\theta + \alpha) - \Psi_k(\theta + \alpha + \beta)| \leq (k + 1)! \mathbf{g}(\theta + \alpha, \beta) \frac{1 + \theta^{-1}}{\theta^{k-1}}$$

Prueba de la parte (iii). A partir del item (ii) de lema (A.0.1) note que

$$\begin{aligned} g(\theta + 1, \alpha + \beta) \left( \frac{1}{\theta} + 1 \right) &\leq \Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta) \\ &\leq g(\theta, \alpha + \beta) \left( \frac{2}{\theta} + 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.0.11})$$

Combinando esto con la parte (ii), tenemos que para  $\theta \in (0, 0.5)$

$$\begin{aligned} \frac{|\Psi_{k-1}(\theta + \alpha + \beta) - \Psi_{k-1}(\theta)|}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} &\leq (k!) \frac{1}{\theta^{k-1}} \frac{\mathfrak{g}(\theta, \alpha + \beta)}{\mathfrak{g}(\theta + 1, \alpha + \beta)} \\ &\leq (k!) \theta^{-(k-1)} 4\theta^{-2} \\ &= 4(k!) \theta^{-(k+1)} \end{aligned} \quad (\text{A.0.12})$$

por otro lado, usando esta cota y la ecuación (A.0.9), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |h^{(k)}(\theta)| &= |\Psi_{k-1}(\theta + \alpha) - \Psi_{k-1}(\theta + \alpha + \beta)| \\ &\quad + \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} |\Psi_{k-1}(\theta + \alpha + \beta) - \Psi_{k-1}(\theta)| \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |h^{(k)}(\theta)| &= |\Psi_{k-1}(\theta + \alpha) - \Psi_{k-1}(\theta + \alpha + \beta)| \\ &\quad + \frac{\Psi_1(\alpha) - \Psi_1(\alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} |\Psi_{k-1}(\theta + \alpha + \beta) - \Psi_{k-1}(\theta)| \end{aligned} \quad (\text{A.0.14})$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} |h^{(k)}(\theta)| &\leq (k-1)! \mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\theta^{k-1}} + 32 \mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{k!}{\theta^{k+2}} \\ &\leq 64 \mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{k!}{\theta^{k+2}} \end{aligned} \quad (\text{A.0.15})$$

donde en las desigualdades hemos usado la ecuación (A.0.12) y nuevamente la parte (ii). Esto prueba la parte (iii).

Prueba de la parte (iv). A partir de la prueba de la parte (iii) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3(\theta)}{2\theta} + \frac{h^4(\theta)}{4!} &\geq \frac{1}{2\theta} [\Psi_2(\theta + \alpha) - \Psi_2(\theta + \alpha + \beta)] \\ &\quad + \frac{1}{4!} \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} \Psi_3(\theta + \alpha + \beta) - \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} \Xi(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.0.16})$$

Asu vez, de lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^3(\theta)}{2\theta} + \frac{h^4(\theta)}{4!} &\geq \frac{1}{2\theta} [\Psi_2(\alpha) - \Psi_2(\alpha + \beta)] - \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} \Xi(\theta) \\
&\geq \frac{1}{2\theta} [\Psi_2(\alpha) - \Psi_2(\alpha + \beta)] + \frac{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} [-\Xi(\theta)] \\
&\geq -2\mathfrak{g}(\alpha, \beta) \frac{1}{\alpha} + \frac{\mathfrak{g}(2 + \alpha, \beta)(1 + (1 + \alpha)^{-1})}{(1, \alpha + \beta)(1 + \theta^{-1})} [-\Xi(\theta)]
\end{aligned}$$

donde para la última desigualdad hemos usado las partes (i) y (ii) del lema (A.0.1) y hemos usado el hecho de que

$$\Xi(\theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\theta + 4n}{4\theta(\theta + n)^4} < 0$$

Ahora asumamos que  $\alpha_0 > 0$  es fijo y  $\alpha > \alpha_0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta > 0$ . En este caso se tiene que

$$\frac{\mathfrak{g}(2 + \alpha, \beta)}{\mathfrak{g}(\alpha, \beta)} \geq \left( \frac{\alpha_0}{2 + \alpha_0} \right)^2 =: C_2$$

Entonces tenemos que

$$\frac{\sigma^3(\theta)}{2\theta} + \frac{h^4(\theta)}{4!} \geq \mathfrak{g}(\alpha, \beta) \left[ -\frac{2}{\alpha_0} + \frac{2C_2}{1 + \theta} [-\Xi(\theta)] \right]$$

Ya que  $-\theta\Xi(\theta) \rightarrow \infty$  cuando  $\theta \rightarrow 0$ , de la desigualdad anterior es claro que existe un  $\theta_0(\alpha_0) > 0$  (que depende solo de  $\alpha_0$ ) tal que para toda  $\alpha \geq \alpha_0$ ,  $\beta > 0$  y  $\theta \in (0, \theta_0)$ , el lado derecho es positivo. Además podemos verificar fácilmente que  $\theta_0(\alpha_0)$  se puede escoger de modo que  $\lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} \theta_0 = \infty$ .

Prueba de la parte (v). La primera desigualdad de la ecuación (A.0.10) se sigue de la parte (iv) después de que probemos que  $h^{(4)}(\theta) < 0$  de modo que nos dedicaremos a probar esta última desigualdad. Teniendo en cuenta la expresión (A.0.9) para  $h^{(4)}(z)$  vemos que es suficiente mostrar que

$$\frac{\Psi_3(\theta + \alpha) - \Psi_3(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta + \alpha) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)} < \frac{\Psi_3(\theta) - \Psi_3(\theta + \alpha + \beta)}{\Psi_1(\theta) - \Psi_1(\theta + \alpha + \beta)}$$

Esto es equivalente a que  $G := \frac{\Psi_3}{\Psi_1}$  sea estrictamente convexa en  $(0, \infty)$ , esto es

$$G'' = \frac{\Psi_3''\Psi_1' - \Psi_3'\Psi_1''}{(\Psi_1')^3} \circ \Psi_1^{-1} > 0$$

pero como  $\Psi_1 < 0$ , lo anterior es equivalente a

$$(\Psi_3''\Psi_1' - \Psi_3'\Psi_1'')(x) = 48 \left( 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^4} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^3} \right) < 0$$

donde hemos usado la notación  $x_n = x + n$ . Es sencillo verificar que la última desigualdad es verdadera ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^4} > 0$$

lo cual puede verse fácilmente teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{x_m^6} \frac{1}{x_n^3} + \frac{1}{x_n^6} \frac{1}{x_m^3} - \frac{1}{x_m^5} \frac{1}{x_n^4} - \frac{1}{x_n^5} \frac{1}{x_m^4} = \frac{1}{x_n^6 x_m^6} (x_m - x_n)(x_m^2 - x_n^2)$$

□

# Bibliografía

- [Bat53] Harry Bateman. *Higher transcendental functions [volumes i-iii]*. Vol. 1. McGRAW-HILL book company, 1953.
- [BC14] Alexei Borodin e Ivan Corwin. “Macdonald processes”. En: *Probability Theory and Related Fields* 158.1 (2014), págs. 225-400.
- [BC17] Guillaume Barraquand e Ivan Corwin. “Random-walk in beta-distributed random environment”. En: *Probability Theory and Related Fields* 167.3 (2017), págs. 1057-1116.
- [BCF14] Alexei Borodin, Ivan Corwin y Patrik Ferrari. “Free energy fluctuations for directed polymers in random media in 1+ 1 dimension”. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 67.7 (2014), págs. 1129-1214.
- [BCR13] Alexei Borodin, Ivan Corwin y Daniel Remenik. “Log-gamma polymer free energy fluctuations via a Fredholm determinant identity”. En: *Communications in Mathematical Physics* 324.1 (2013), págs. 215-232.
- [Erd+53] Arthur Erdélyi et al. “Bateman manuscript project”. En: *Higher transcendental functions 2* (1953), pág. 133.
- [FS05] Patrik L Ferrari y Herbert Spohn. “A determinantal formula for the GOE Tracy–Widom distribution”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.33 (2005), pág. L557.
- [Joh00] Kurt Johansson. “Shape fluctuations and random matrices”. En: *Communications in mathematical physics* 209.2 (2000), págs. 437-476.
- [Kor22] Sergei Korotkikh. “Hidden diagonal integrability of q-Hahn vertex model and Beta polymer model”. En: *Probability Theory and Related Fields* (2022), págs. 1-78.
- [KPZ86] Mehran Kardar, Giorgio Parisi y Yi-Cheng Zhang. “Dynamic scaling of growing interfaces”. En: *Physical Review Letters* 56.9 (1986), pág. 889.

- [KQ18] Arjun Krishnan y Jeremy Quastel. “Tracy–Widom fluctuations for perturbations of the log-gamma polymer in intermediate disorder”. En: *The Annals of Applied Probability* 28.6 (2018), págs. 3736-3764.
- [Lax02] Peter D Lax. *Functional analysis*. Vol. 55. John Wiley & Sons, 2002.
- [OPR22] Giancarlos Oviedo, Gonzalo Panizo y Alejandro F Ramirez. “Second order cubic corrections of large deviations for perturbed random walks”. En: *Electronic Journal of Probability* 27 (2022), págs. 1-45.
- [OY01] Neil O’Connell y Marc Yor. “Brownian analogues of Burke’s theorem”. En: *Stochastic processes and their applications* 96.2 (2001), págs. 285-304.
- [RSY13] Firas Rassoul-Agha, Timo Seppäläinen y Atilla Yilmaz. “Quenched free energy and large deviations for random walks in random potentials”. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 66.2 (2013), págs. 202-244.
- [Sas05] Tomohiro Sasamoto. “Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.33 (2005), pág. L549.
- [Sep12] Timo Seppäläinen. “Scaling for a one-dimensional directed polymer with boundary conditions”. En: *The Annals of Probability* 40.1 (2012), págs. 19-73.
- [TW94] Craig A Tracy y Harold Widom. “Level-spacing distributions and the Airy kernel”. En: *Communications in Mathematical Physics* 159.1 (1994), págs. 151-174.
- [TW96] Craig A Tracy y Harold Widom. “On orthogonal and symplectic matrix ensembles”. En: *Communications in Mathematical Physics* 177.3 (1996), págs. 727-754.