

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**Modelamiento estocástico y propiedades estadísticas del
precio del petróleo**

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR

ALVARO MIGUEL NAUPAY GUSUKUMA

ASESOR

Dr. JOSÉ JAVIER CERDA HERNANDEZ

LIMA - PERÚ

2023

*A mis padres Ana y Adalberto, por todo
a mi esposa Melina por su comprensión y paciencia.*

Agradecimientos

Agradezco a CONCYTEC- PROCIENCIA (Contrato 427-2019) por el financiamiento para el presente trabajo de tesis

Resumen

El presente trabajo utiliza el análisis estocástico para estudiar, modelar y predecir el precio del petróleo, basado en datos históricos. Para obtener las predicciones, basados en evidencia empírica y propiedades estadísticas del precio del petróleo, se propone un modelo estocástico de predicción y se genera diversos escenarios futuros para el precio del crudo. El modelo utilizado para estudiar el precio del crudo es un proceso Ornstein-Uhlenbeck y para analizar la serie de tiempo, discretizamos el proceso a tiempo continuo y usamos el modelo AR(1).

Abstract

The present work uses stochastic analysis to study, model, and predict the price of oil, based on historical data. To obtain predictions, relying on empirical evidence and statistical properties of oil prices, a stochastic prediction model is proposed, and various future scenarios for crude oil prices are generated. The model used to study crude oil prices is an Ornstein-Uhlenbeck process, and to analyze the time series, we discretize the process into continuous time and use the AR(1) model.

Índice general

Índice de figuras	vii
Índice de cuadros	viii
Introducción	1
Planteamiento del problema	1
Antecedentes	2
Hipótesis	3
Objetivos	3
Organización del trabajo	4
I. Fundamento Teórico	5
1.1. Introducción y breve revisión de literatura	5
1.2. Retorno del precio del petróleo	7
1.3. Propiedades empíricas de los retornos del precio del petróleo	10
1.4. Conceptos Básicos de Probabilidad	11
1.5. Lemas de Borel-Cantelli	21
II. Procesos estocásticos y cálculo de Itô	23
2.1. Proceso estocástico	23
2.2. Movimiento Browniano	26
2.2.1. Definición y principales propiedades	27
2.2.2. Variación cuadrática del movimiento Browniano	30
2.3. La integral estocástica	32
2.4. La Fórmula de Itô	42
2.5. Discretización de Euler-Maruyama de una ecuación diferencial estocástica	47
III. Modelo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck para el precio del petróleo	50
3.1. Modelo Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck para el precio del petróleo	51
3.1.1. Propiedad de la reversión a la media para el precio del petróleo	53
3.2. Estimación de los parámetros	54
3.3. Aplicación empírica a los precios del petróleo	58
3.4. Código	62
Conclusiones y recomendaciones	67
Referencias	69

Índice de figuras

1.	Precio del petróleo WTI entre enero de 2011 y octubre del 2021, donde observamos dos periodos con la propiedad de reversión a la media. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	2
1.1.	Histograma de los retornos del precio del petróleo en el periodo En2000 - Oct2021. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	8
1.2.	Histograma de la cola derecha de los retornos del precio del crudo entre el periodo En2000-Oct2021, (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	9
1.3.	Serie de tiempo de los retornos del petróleo WTI para el periodo 2000-2021. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	10
1.4.	Serie de tiempo del precio del petróleo WTI para el periodo 2000-2021. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	11
2.1.	Representación gráfica de la trayectoria de un proceso estocástico. En cada instante de tiempo la variable X_t tiene una distribución que cambia con el tiempo. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	24
2.2.	Simulación numérica de una trayectoria de un movimiento Browniano estándar. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	28
3.1.	Propiedad de reversión a la media para el valor del petróleo. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	53
3.2.	Comparación entre la solución analítica y la aproximación dada por el método de Euler-Maruyama. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	60
3.3.	Trayectorias simuladas usando el método de Euler-Maruyama. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	60
3.4.	Comparación entre la solución analítica, la aproximación numérica y la serie de precios reales. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	61
3.5.	Trayectoria promedio de 100 trayectorias simuladas para los precios del barril de crudo. (<i>Fuente: Elaboración propia.</i>)	62

Índice de cuadros

3.1. Estimación de los parámetros del modelo.	59
---	----

Introducción

Planteamiento del problema

El petróleo es uno de los bienes más importantes en todas las economías mundiales con una demanda promedio de 91 millones de barriles diarios al 2021, y con una proyección de 101.6 millones de barriles diarios para el 2023. En la actualidad países industrializados y productores de energía procuran tener reservas o comprar contratos de provisionamiento a un precio fijo (derivados financieros de petróleo) para satisfacer sus necesidades energéticas. El incremento del precio del barril de crudo influye directamente en la economía de un país generando inestabilidad reduciendo su capacidad productiva, puesto que toda la industria actual utiliza derivados del petróleo para sus procesos productivos y cadenas de suministros. Por consiguiente, estudiar la dinámica de los precios del petróleo, junto con algunos derivados financieros es una de las áreas que más se desarrolla en las últimas décadas, usando herramientas matemáticas y estadísticas. Estas herramientas, junto con el monitoreo de diversas variables control ayudan a entender mejor el comportamiento del crudo para administrar mejor el riesgo que puede generar sus fluctuaciones.

De modo general, la evidencia empírica muestra que los fuertes aumentos en el valor del petróleo tienen efectos importantes tanto en la actividad económica como en la política macroeconómica de un país. En particular, los recientes máximos registrados en el mercado mundial del petróleo están generando preocupación por posibles ralentizaciones en el desempeño económico de todos los países, en particular para el Perú. Por lo tanto, no es sorprendente que diversos investigadores hayan modelado el precio del petróleo y estudiado los diversos canales a través de los cuales los shocks de un aumento en el valor del petróleo

influyen en las variables económicas. Existen diversas explicaciones teóricas para la relación inversa entre las variaciones en el valor del petróleo y el nivel de actividad económica de un país, ver por ejemplo (Cognigni y Manera, 2008).

Antecedentes

La necesidad de entender las fluctuaciones de los precios del petróleo llevó a diversos investigadores a estudiar las propiedades estadísticas y proponer diversos modelos teóricos para describir el precio del crudo. El presente trabajo no tiene como objetivo entender los factores que producen los cambios del precio del petróleo, ni como estos shocks se distribuyen en diversos canales en la economía del país.

Para el presente trabajo se va a realizar un modelamiento del precio del crudo basados en la propiedad de reversión local a la media que tiene el precio del petróleo siguiendo las ideas introducidas en el paper (Schwartz, 1997). Esta es una propiedad empírica que se observa típicamente en el corto plazo en los activos financieros, pero en el caso del precio del petróleo este comportamiento dura por periodos mucho más largos. En la Figura observamos la propiedad de reversión a la media para el precio del petróleo, para dos periodos: enero de 2011 a junio de 2014 y julio de 2015 a octubre de 2021.

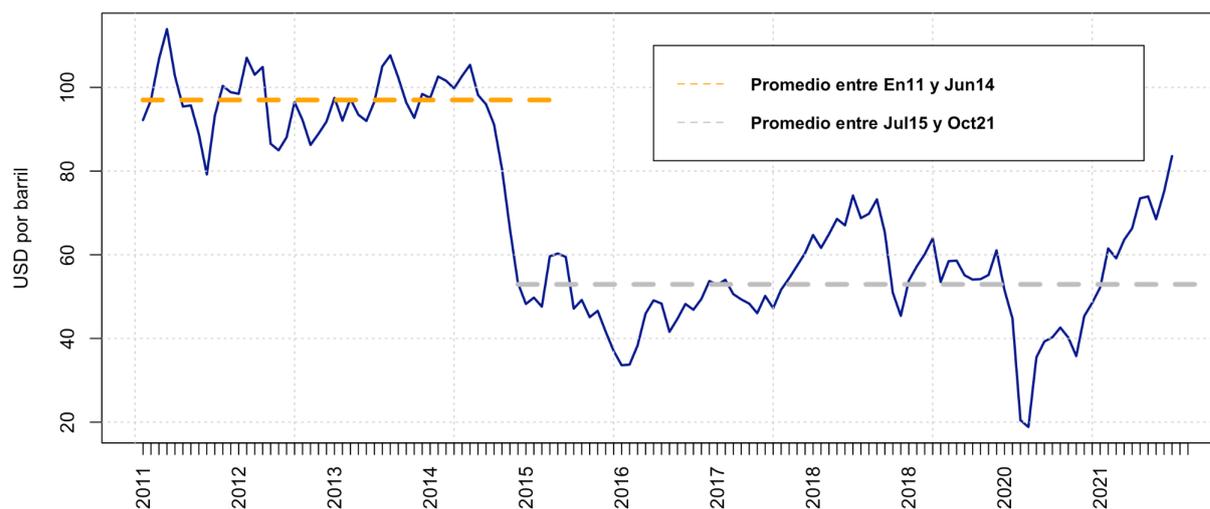


Figura 1: Precio del petróleo WTI entre enero de 2011 y octubre del 2021, donde observamos dos periodos con la propiedad de reversión a la media. (Fuente: *Elaboración propia.*)

El WTI son la siglas de West Texas Intermediate, es una corriente de crudo producido en

Texas y el sur de Oklahoma y es utilizado como punto de referencia en la fijación de precios del petróleo.

Problema general

En base a los antecedentes y la justificación anterior planteamos el siguiente problema:

- La necesidad de entender y modelar las variaciones del valor del petróleo usando herramientas de cálculo estocástico.

Hipótesis

La hipótesis general es que el proceso estocástico de Ornstein-Uhlenbeck permite modelar adecuadamente las fluctuaciones del precio del petróleo, en particular su propiedad de reversión a la media.

Las hipótesis específicas son:

1. La discretización del proceso de Ornstein-Uhlenbeck mediante el método de Euler-Maruyama conduce a un modelo AR(1).
2. Las trayectorias simuladas exhiben la propiedad de reversión a la media, consistente con el comportamiento empírico del precio del petróleo.

Objetivos

Objetivo general

- Modelar las variaciones del valor del petróleo usando el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y modelos de series de tiempo.

Objetivos específicos

- Construir la integral de Itô para difusiones de Itô.

- Estudiar y aplicar el método de Euler-Maruyama para simular trayectorias del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.
- Estimar los parámetros del proceso de Ornstein-Uhlenbeck para el precio del petróleo.

Organización del trabajo

A continuación damos una descripción del trabajo:

En la introducción, se presenta el planteamiento del problema, antecedentes, hipótesis y objetivos del trabajo. En el capítulo 1 se presenta el marco teórico. Incluye una revisión de literatura, conceptos sobre el retorno del precio del petróleo, propiedades empíricas de los retornos, y conceptos básicos de probabilidad y lemas de Borel-Cantelli. Capítulo 2, trata sobre procesos estocásticos y cálculo de Itô. Cubre temas como procesos estocásticos, movimiento browniano, integral estocástica, fórmula de Itô y discretización de Euler-Maruyama. Capítulo 3, presenta el modelo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck para el precio del petróleo. Incluye la definición del modelo, estimación de parámetros y una aplicación empírica a precios reales del petróleo. Finalmente en Conclusiones y recomendaciones se resume los principales hallazgos y contribuciones del trabajo, así como recomendaciones para investigaciones futuras.

Capítulo I

Fundamento Teórico

1.1. Introducción y breve revisión de literatura

El petróleo es uno de los bienes más importantes en todas las economías mundiales con una demanda promedio de 91 millones de barriles diarios al 2021, y con una proyección de 101.6 millones de barriles diarios para el 2023. No existe país que no tenga al petróleo como una componente importante (superando el 50 % en muchos casos) de su matriz energética¹. En la actualidad países industrializados y productores de energía procuran tener reservas o comprar contratos de provisionamiento a un precio fijo (derivados financieros de petróleo) para satisfacer sus necesidades energéticas (Cognigni y Manera, 2008). El incremento o bajada del valor del barril de crudo influyen directamente en la economía de un país, puesto que toda la industria actual utiliza derivados del petróleo para sus procesos productivos y cadenas de suministros (Zhao, 2019). Por consiguiente, estudiar la dinámica de los precios del petróleo, junto con algunos derivados financieros es una de las áreas que más se desarrolla en las últimas décadas, usando herramientas matemáticas y estadísticas. Estas herramientas, junto con el monitoreo de diversas variables control ayudan a entender mejor el comportamiento del crudo para administrar mejor el riesgo que puede generar sus fluctuaciones (Schwartz, 1997).

Lo que se planteará en el presente trabajo es un modelo estocástico, modelado por un

¹Producción de electricidad a partir del petróleo, Banco Mundial 2022, <https://datos.bancomundial.org/indicador/EG.ELC.PETR.ZS>

proceso Ornstein-Uhlenbeck, para estudiar el comportamiento del precio del crudo y que permita describir y ajustar los datos observados en la serie de tiempo. El modelo utilizado para la simulación, que proviene de la discretización del proceso Ornstein-Uhlenbeck, es una serie de tiempo denominada modelo autorregresivo de orden 1 ó AR(1).

La teoría general de procesos estocásticos intenta entender y modelar que factores ocasionan las fluctuaciones estadísticas de los valores de los activos financieros en los diversos mercados, en particular el precio del crudo y los derivados que surgen de este. Para abordar este problema diversos autores hicieron uso de diversas técnicas matemáticas y estadísticas, las cuales incluyen, teoría de probabilidad, series de tiempo, procesos estocásticos y métodos multivariados. Ver por ejemplo (Murat y Gazanfer, 2012), (Swishchuk y A., 2016) y (Jevenal y Ivan, 2015). Hoy en día se pueden encontrar varios modelos estocásticos para analizar el precio del crudo y diversas técnicas estadísticas para reducir el riesgo de comprar derivados que tienen como subyacente al crudo. En el presente trabajo sólo usaremos algunas técnicas y modelos, usados por ejemplo en (Schwartz, 1997).

Otro abordaje común para estudiar el precio del crudo es a través de los retornos de la serie de tiempo generada por esta. En esa dirección la teoría también está bastante desarrollada. Los primeros modelos para estudiar los retornos, conocidos como métodos de asset pricing, fueron propuestos por Markowitz (1952), Treynor (1962), Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), del cual se derivó el primer famoso modelo de valoración de activos financieros, el **CAPM** (Capital Asset Pricing Model por sus siglas en inglés). Este modelo está basado en los trabajos pioneros realizados por Markowitz, y tiene como objetivo principal calcular la rentabilidad de un activo financiero en función del riesgo que se está asumiendo (se reduce a un problema de optimización). Ver (Lee, Cheng, y Chong, 2016) para una revisión moderna del modelo de Markowitz. El modelo CAPM tiene diversas fallas, siendo la principal suponer que los agentes económicos toman sus decisiones en un único periodo y que la demanda por cualquier activo con riesgo i sólo depende de su comportamiento así como de la correlación que tenga con otros activos. Este problema fue corregido por R. Merton (1973) quien propone el modelo CAPM en tiempo continuo con el fin de resolver el problema de la temporalidad en las decisiones de los agentes económicos. El lector

interesado en conocer con más detalle los diversos métodos de asset pricing puede consultar libros como, (Munk, 2013) y (Cochrane, 2009).

1.2. Retorno del precio del petróleo

Las definiciones que presentaremos en esta sección no son exclusivas para el precio del petróleo. De modo general los conceptos introducidos aquí vienen del análisis de series financieras, donde el petróleo está incluida. Para más detalle se puede revisar (Tsay, 2005).

Sea S_t el precio del petróleo en el tiempo t . Definimos el *retorno simple* de un periodo para el precio del petróleo en el tiempo t como el ratio

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \quad (1.1)$$

De igual forma podemos definir el retorno para k periodos entre $t - k$ y t como

$$R_t[k] = \frac{S_t - S_{t-k}}{S_{t-k}} \quad (1.2)$$

Note que el retorno lo que mide es el cambio porcentual del precio del crudo respecto del periodo anterior. Otra forma de medir el cambio porcentual es en un contexto de interés compuesto en tiempo continuo. Para esto tomamos logaritmo natural del precio del crudo, es decir, $\log(S_t)$ y calculamos la primera diferencia del logaritmo natural del precio,

$$r_t = p_t - p_{t-1} = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad (1.3)$$

donde $p_t = \ln S_t$. El cambio r_t es denominado *log retorno*. Note que el retorno simple y el log retorno están relacionados por $r_t = \ln(1 + R_t)$. Si el periodo de tiempo es pequeño, entonces $r_t \approx R_t$, para todo t .

Un supuesto común hecho en finanzas es que los retornos simples de los activos $\{R_{it} : t = 1, \dots, T\}$ son independientes e idénticamente distribuidos con distribución normal de media y varianza constante, $R_{it} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Este supuesto permite hacer inferencia sobre

los retornos, sin embargo existe diversos papers empíricos donde se demuestra que la hipótesis de normalidad de los retornos no es adecuada (para más detalle ver (Akgiray, Booth, y Loistl, 1989), (Fama, 1965), (Koedijk, Schafgans, y De Vries, 1990), (Longin, 1996), (Plerou, Gopikrishnan, Amaral, Meyer, y Stanley, 1999), (Plerou, Gopikrishnan, Amaral, Gabaix, y Stanley, 2000), y las referencias dentro). Entonces, en esta dirección, no podemos asumir que los retornos o las fluctuaciones del precio del crudo tienen distribución normal.

En la Figura 1.2 mostramos los retornos de los valores del petróleo en el periodo En2000-Oct2021. En dicha figura observamos que la distribución normal no es adecuada para dicha serie, puesto que la distribución empírica es más leptocúrtica.

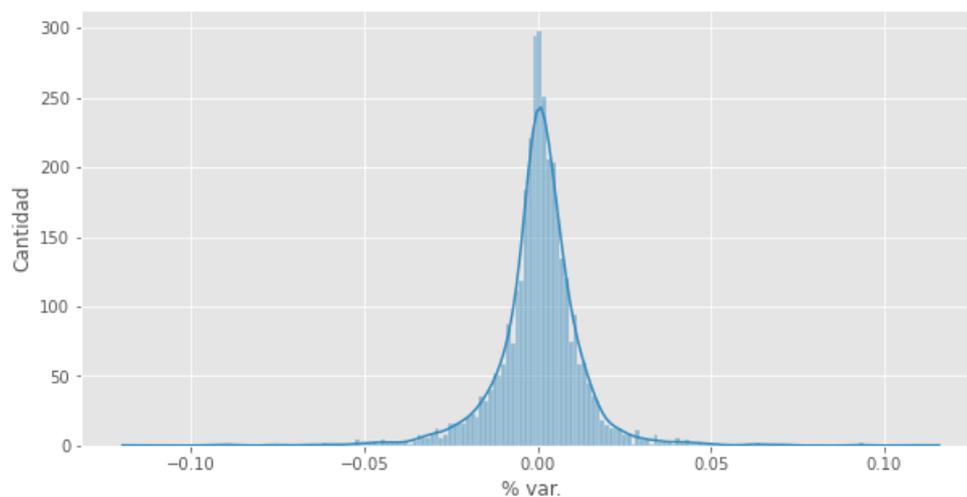


Figura 1.1: Histograma de los retornos del precio del petróleo en el periodo En2000 - Oct2021. (Fuente: *Elaboración propia.*)

Además, en la Figura 1.2 mostramos que fluctuaciones grandes en el precio del crudo es mucho más probable y común, implicando que las colas de la distribución empírica de los retornos tengan colas más anchas que la distribución normal.

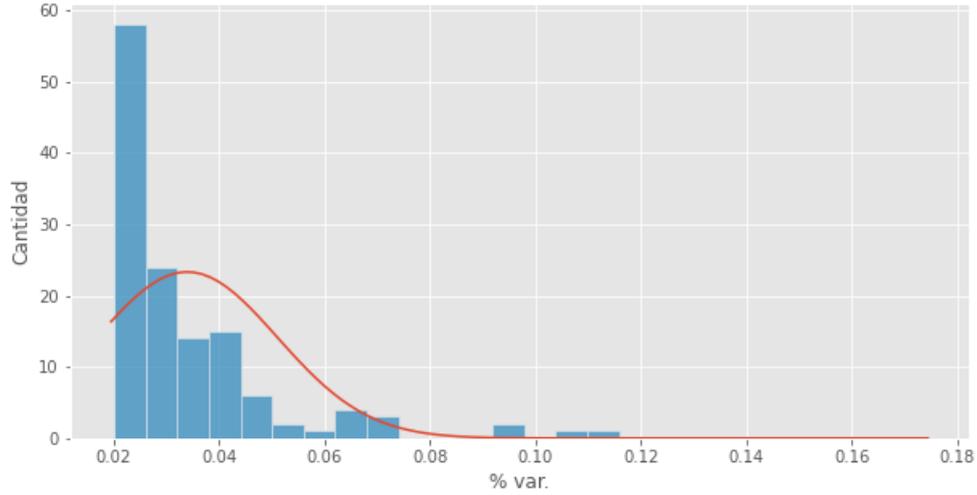


Figura 1.2: Histograma de la cola derecha de los retornos del precio del crudo entre el periodo En2000-Oct2021, (Fuente: *Elaboración propia.*)

Otro supuesto común usado en la literatura, es suponer que los log retornos r_t del precio del crudo (en general de cualquier activo) son independientes e idénticamente distribuidos con distribución normal de media μ y varianza σ^2 . Entonces, los retornos simples son i.i.d. con distribución lognormal con media y varianza

$$\exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right) - 1 = \mathbb{E}(R_t), \quad \exp(\sigma^2 + 2\mu)[\exp(\sigma^2) - 1] = Var(R_t) \quad (1.4)$$

De forma alternativa, si m_1 y m_2 es primer y segundo momento de los retornos simples, que tienen distribución lognormal, entonces el log-retorno tiene media y varianza dada por

$$\ln \left[\frac{1 + m_1}{\sqrt{\frac{m_2}{(1 + m_1)^2} + 1}} \right] = \mathbb{E}(r_t), \quad \ln \left[\frac{m_2}{(m_1 + 1)^2} + 1 \right] = Var(r_t)$$

Otras distribuciones que se usan para modelar retornos de activos financieros son las distribuciones estables, las mixturas de normales y la distribución de Cauchy. El lector interesado puede revisar (Tsay, 2005) para más detalles.

1.3. Propiedades empíricas de los retornos del precio del petróleo

Los datos utilizados en esta sección se obtienen de la página web <https://www.investing.com>, donde es posible obtener información de diversas series financieras en diversos periodos de tiempo, incluyendo el precio del petróleo. Para este trabajo estamos usando el precio del petróleo WTI con una periodicidad mensual desde enero de 2000 hasta el octubre de 2021. En la figura 1.3 podemos observar el gráfico de la variación porcentual de los precios del petróleo partir de Enero de 2000 hasta Octubre del 2021.

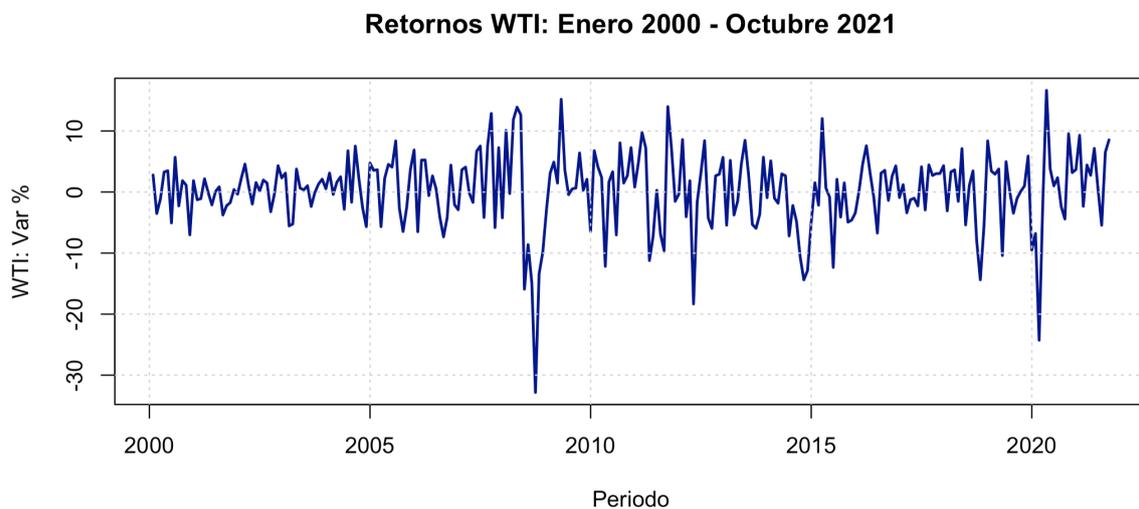


Figura 1.3: Serie de tiempo de los retornos del petróleo WTI para el periodo 2000-2021. (Fuente: *Elaboración propia.*)

La figura 1.3 muestra la gráfica del precio del petróleo WTI para el periodo 2000-2021. En dicha gráfica podemos observar las fluctuaciones de los precios del crudo a lo largo del tiempo, y como estos se han incrementado respecto al periodo inicial de nuestro análisis. De modo general, las fluctuaciones del precio del crudo son provocadas por diversos factores que son difíciles de anticipar, desde el incremento en la demanda, reducción de la oferta por los países productores hasta factores geopolíticos.

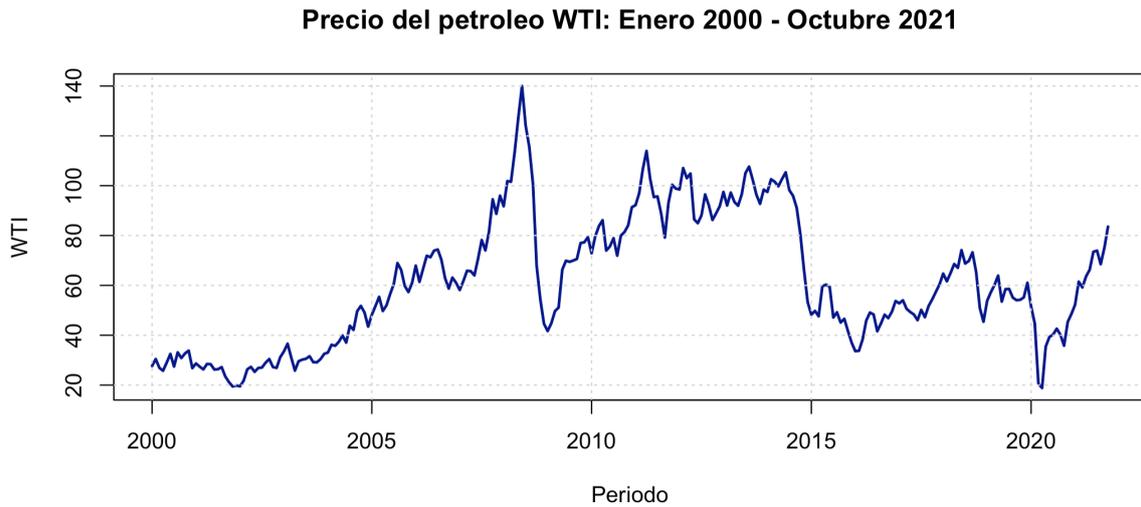


Figura 1.4: Serie de tiempo del precio del petróleo WTI para el periodo 2000-2021. (Fuente: *Elaboración propia.*)

1.4. Conceptos Básicos de Probabilidad

Como el precio del crudo se representa a través de una variable aleatoria, la teoría de probabilidad es el área de la matemática que utilizaremos para estudiar y modelar el precio del petróleo. En el presente capítulo abordamos de forma autocontenida las principales definiciones y propiedades de las variables aleatorias, así como los principales conceptos de teoría de probabilidad. Para más detalle de los conceptos desarrollados en este capítulo el lector puede revisar (Athreya y Lahiri, 2006), (Billingsley, 1999), (Ross, 2004), (Ross, 2005), (Resnick, 1999), (Cerdeña-Hernández y Sikov, 2021).

Sea Ω un conjunto no vacío, cuyos elementos representan los resultados de algún experimento aleatorio, llamaremos a este conjunto *espacio muestral*. Sea una familia $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$ de subconjuntos del espacio muestral Ω , diremos que \mathcal{F} es un σ -álgebra si satisface las siguientes tres condiciones:

1. El conjunto vacío se encuentra en el σ -álgebra \mathcal{F} , i.e., $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. \mathcal{F} es cerrado por complementos. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
3. \mathcal{F} es cerrado por unión enumerable. Si $A_k \in \mathcal{F}$, para $k = 1, 2, \dots$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Los elementos de \mathcal{F} se llamarán eventos, \mathcal{F} se puede interpretar como la información total de un experimento aleatorio subyacente al fenómeno aleatorio en estudio.

Debemos observar que la intersección arbitraria de sigmas álgebras es un sigma álgebra.

La función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es denominada *medida de probabilidad* si las siguientes condiciones se cumplen:

1. $\forall A \in \mathcal{F}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
3. Si $A_k \in \mathcal{F}$ para $k = 1, 2, \dots,$ y $A_i \cap A_j = \emptyset,$ para $i \neq j,$ entonces

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es denominada *espacio de probabilidad*. De las condición (3) de medida de probabilidad, haciendo $A_1 = \Omega$ y $A_i = \emptyset$ para todo $i = 2, 3, \dots,$ podemos concluir que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

Diremos que dos eventos $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes cuando se cumpla que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \tag{1.5}$$

Decimos que una sucesión de eventos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ son independientes si para todo subconjunto finito $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ sub σ -álgebras de \mathcal{F} , estos serán independientes cuando para cualquier selección $A_i \in \mathcal{F}_i,$ con $i = 1, \dots, n$ se cumple que

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Dado una colección \mathcal{C} de subconjuntos de $\Omega,$ definimos el σ -álgebra generado por $\mathcal{C},$

denotado por $\sigma(\mathcal{C})$, como el menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} , i.e., $\sigma(\mathcal{C})$ debe de satisfacer las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
2. Si \mathcal{B}' es otra σ -álgebra tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}'$ entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}'$

De la condición (2) podemos concluir que $\sigma(\mathcal{C})$ no solo es el menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} , si no además esta es única.

Denotamos el conjunto de los subconjuntos de Borel de \mathbb{R} por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ este se define como

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{subconjuntos abiertos de } \mathbb{R})$$

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función, esta será una *variable aleatoria* siempre que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Denotamos la *distribución acumulada* de la variable aleatoria X por F_X y se define como

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

Es fácil verificar que F_X es continua por la derecha y no decreciente sobre \mathbb{R} con

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0.$$

Otra propiedad interesante de la distribución acumulada es que el conjunto de puntos de discontinuidad es a lo más infinito enumerable.

Toda variable aleatoria X induce una medida de probabilidad sobre \mathbb{R} , dada por $\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$, donde $B \subset \mathbb{R}$ es un Boreleano. Esta medida de probabilidad es denominada la *distribución* de X . Esta igualdad $F_X(x) = \mu_X(\langle -\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, nos muestra la relación que existe entre la distribución acumulada y la distribución de X .

La *variable aleatoria* X se dirá *discreta* siempre que exista un conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ tal que $\mathbb{P}(X \in A) = 1$. La función $p_X(x_k) = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ es denominada la

distribución de probabilidades de la variable aleatoria X . Note que $\sum_{k=1}^{\infty} p_X(x_k) = 1$.

Si F_X es una función continua, diremos que X es una *variable aleatoria continua*. En este caso observe que $\mathbb{P}(X = x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si existe una función integrable f_X no negativa sobre \mathbb{R} tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (1.7)$$

Diremos que X es una *variable aleatoria absolutamente continua*. La función f_X es denominada la *función de densidad de probabilidad*. Observemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

Dada una variable aleatoria X , definimos la *esperanza matemática* como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(w) d\mathbb{P}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mu_X(x) \quad (1.8)$$

Para el caso en que X sea una variable aleatoria discreta con soporte x_1, x_2, \dots la *esperanza matemática* se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con densidad f_X , es fácil verificar que la *esperanza matemática* es dada por

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

De manera general, si g es una función Borel medible sobre \mathbb{R} , tenemos que

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) d\mu_X(x) \quad (1.9)$$

Dada una variable aleatoria X definimos el k -ésimo momento de X como $\mathbb{E}(X^k)$. La varianza de X es dada por $Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$.

Sea $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ un conjunto de variables aleatorias reales, estas serán independientes siempre que para $\{B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : 1 \leq i \leq n\}$, se cumple que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i)$$

Diremos que una familia infinita de variables aleatorias es independiente, siempre que toda subfamilia finita sea independiente.

La función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $X = (X_1, \dots, X_n)$ es denominado un *vector aleatorio* si cada coordenada X_i es una variable aleatoria, todas definidas sobre un mismo espacio de probabilidad. Además, definimos la función de distribución acumulada de un vector aleatorio como sigue:

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x_i\}\right) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (1.10)$$

El vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ se dirá que es absolutamente continua siempre que exista una función f_X sobre \mathbb{R}^n tal que para cualquier $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (1.11)$$

La función f_X es denominada la *función de densidad conjunta* del vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Al igual que en variables aleatorias, todo vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) induce una medida de probabilidad sobre la \mathbb{R}^n , dada por $\mu^n(A) = \mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n) \in A]$, para todo Boreleano $A \subset \mathbb{R}^n$. Esta medida de probabilidad es denominada la *distribución* de (X_1, \dots, X_n) . Ahora estableceremos algunos criterios de independencia para variables aleatorias.

El siguiente resultado puede ser encontrado en (Billingsley, 1999)

Proposición 1 Sean $\{B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : 1 \leq i \leq n\}$. Si las variables aleatorias $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ son independientes, entonces

$$\mu^n(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(B_i)$$

donde μ_i es la distribución de X_i .

El siguiente criterio de independencia es muy útil al momento de construir la función de verosimilitud de los modelos estadísticos.

El siguiente resultado puede visto en (Athreya y Lahiri, 2006)

Proposición 2 (Criterio de independencia) *Se cumple:*

(i) *Si las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes, entonces tenemos que*

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mu^n((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

para todo vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(ii) *Si existen funciones reales F_1, \dots, F_n tales que $\lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x) = 1$, para $i = 1, \dots, n$, y la distribución acumulada conjunta del vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ se puede escribir como el producto de las marginales, es decir,*

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Entonces, las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes y además tenemos que $F_i = F_{X_i}$, para $i = 1, \dots, n$.

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes. Notemos que si las variables X_i , $i = 1, \dots, n$ son absolutamente continuas, entonces el vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) también es absolutamente continuo, con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad (1.12)$$

Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es dada por f_{X_1, \dots, X_n} . Para una función g Borel medible sobre \mathbb{R}^n definimos

$$\mathbb{E}(g(X_1, \dots, X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (1.13)$$

Para dos variables aleatorias X, Y con esperanza finita, i.e., $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y) < \infty$, definimos la *covarianza* entre X e Y de la siguiente forma

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y))f_{X,Y}(x, y)dx dy \quad (1.14)$$

Además, notemos que si las variables X e Y son independientes, entonces la esperanza del producto de las variables X e Y es igual al producto de esperanzas, es decir, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. De lo anterior también tenemos que $Cov(X, Y) = 0$, si X e Y son independientes.

Sean variables aleatorias independientes X e Y con distribuciones acumuladas F_X y F_Y , respectivamente. La función de distribución acumulada de $X + Y$ es dada por

$$F_{X+Y} = (F_X * F_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - y)dF_Y(y)dx, \quad z \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

donde $F_X * F_Y$ es llamado la *convolución* de F_X y F_Y . Sean las variables aleatorias independientes X_1 y X_2 con distribución común F , entonces la distribución de $X_1 + X_2$ es denotada por $F^{*(2)} = F * F$. De manera similar, dadas las variables aleatorias X_1, \dots, X_n con distribución común F , entonces la distribución acumulada de $X_1 + \dots + X_n$ es dada por $F^{*(n)} = F * F^{*(n-1)}$.

Sean $X_n, n \geq 1$ y X variables aleatorias. Decimos que la sucesión $\{X_n\}$ *converge a X con probabilidad uno*, denotado por c.p.1., si existe $A \subset \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(A) = 0$ y $X_n(w) \rightarrow X(w)$ para $w \notin A$, es decir, $\mathbb{P}[w : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) = X(w)] = 1$. Decimos que $\{X_n\}$ *converge a X en probabilidad*, si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \epsilon] = 0$$

También denotamos la convergencia en probabilidad por $X_n \xrightarrow{p} X$. Denotemos por $F_n, n \geq 1$ y F las funciones de distribución acumulada de X_n y X , respectivamente. Decimos que $\{X_n\}$ *converge a X en distribución o en ley*, si $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ para todos los puntos de continuidad de F . Convergencia en distribución es equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x)$$

para toda función continua y acotada f . La convergencia en distribución es denotada por $X_n \xrightarrow{d} X$ ó $F_n \Rightarrow F$. Con estas nociones de convergencia tenemos un primer teorema importante y básico de convergencia.

El siguiente teorema es llamado, *ley débil de los grandes números*, su demostración puede ser vista en (Billingsley, 1999).

Teorema 1 *Dada una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias que están idénticamente distribuidas e independientes dos a dos tal que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Entonces*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p} \mathbb{E}(X_1) \quad (1.16)$$

Teorema 2 (Ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov) *Dada una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$.*

Entonces

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}(X_1), \quad \text{c.p.l.} \quad (1.17)$$

La demostración de la Ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov puede ser encontrada en (Shiryaev, 1996).

El siguiente corolario se puede ver en (Billingsley, 1999)

Corolario 1 *Dada una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_n\}$ con distribución de Bernoulli(p), i.e., $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)$.*

Sea

$$\hat{p}_n = \frac{|\{i : 1 \leq i \leq n, X_i = 1\}|}{n}, \quad n \geq 1 \quad (1.18)$$

donde $|A|$ denota el cardinal del conjunto A . Entonces $\hat{p}_n \rightarrow p$, c.p.l.

El segundo teorema asintótico más importante de la teoría de probabilidad, y que tiene diversas aplicaciones en estadística, es el siguiente.

Teorema 3 (Teorema del Límite Central) *Dada una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_n\}$ tal que $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ y $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$. Deno-*

tenemos por $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Entonces, tenemos que

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1) \quad (1.19)$$

donde $N(0, 1)$ es una variable con distribución normal con media 0 y varianza 1.

Para una demostración de este teorema ver (Billingsley, 1999)

Una generalización del TLC para variables i.i.d. es conocido como el TLC de Lindeberg-Feller. Sea una sucesión de variables aleatorias independientes X_1, X_2, \dots (no necesariamente idénticamente distribuidas) con $\mathbb{E}(X_k) = 0$ y $Var(X_k) = \sigma_k^2$ y distribución acumulada F_k . Definamos

$$s_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Decimos que la sucesión $\{X_k\}$ satisface la *condición de Lindeberg* si para todo $t > 0$ tenemos

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > ts_n} x^2 dF_k(x) \quad (1.20)$$

Con la notación anterior podemos enunciar la siguiente versión del Teorema del Límite Central dada por Lindeberg y Feller, para una demostración de este ver (Billingsley, 1999).

Teorema 4 (TLC de Lindeberg-Feller) *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $\mathbb{E}(X_k) = 0$ y $Var(X_k) = \sigma_k^2$ y distribución acumulada F_k que satisface la condición (1.20), entonces*

$$\frac{S_n}{s_n} \Rightarrow N(0, 1) \quad (1.21)$$

donde $N(0, 1)$ es una variable con distribución normal con media 0 y varianza 1.

Dada una variable aleatoria X , y \mathcal{G} una sub σ -álgebra del σ -álgebra \mathcal{F} . Se define una función μ , σ -aditiva sobre \mathcal{G} como sigue

$$\forall B \in \mathcal{G}, \mu(B) = \mathbb{E}[X : B] = \int_B X(w) d\mathbb{P}(w),$$

esta es una medida absolutamente continua respecto a la medida $\nu = \mathbb{P} |_{\mathcal{G}}$. Como consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym se sabe que existe una única variable aleatoria Y

que es \mathcal{G} -medible, tal que

$$\mu(B) = \int_B Y(w) d\nu(w).$$

La variable aleatoria Y es denominada *esperanza condicional*, y se representará por $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$. Luego tenemos

$$\forall B \in \mathcal{G}, \int_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbb{P}(w) = \int_B X(w) d\mathbb{P}(w)$$

Definición 1 Dada una variable aleatoria X con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub σ -álgebra, entonces existe una variable aleatoria $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$, esta será llamada *esperanza condicional de X con respecto a \mathcal{G}* , tal que cumple lo siguiente:

1. La variables aleatorias $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ es \mathcal{G} -medible.

2.
$$\int_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbb{P}(w) = \int_B X(w) d\mathbb{P}(w), \forall B \in \mathcal{G}.$$

El Teorema de Radon Nikodym, (ver (Athreya y Lahiri, 2006) para más detalles), garantiza la existencia de la antes definida esperanza condicional. El siguiente teorema da las principales propiedades que tiene la esperanza condicional. Para ver una demostración de los Teorema 5, 6 y 7 ver (Athreya y Lahiri, 2006)

Teorema 5 Dada las variables aleatorias $Y, X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mathbb{E}[|Y|], \mathbb{E}[|X|] < \infty$, y constantes $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple

a) *Linealidad.*
$$\mathbb{E}[\beta Y + \alpha X | \mathcal{G}] = \beta \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] + \alpha \mathbb{E}[X | \mathcal{G}].$$

b) Si la v.a. X es \mathcal{G} -medible, entonces $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = X$.

c)
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X].$$

d) Si X es una v.a. independiente del σ -álgebra \mathcal{G} , se cumple $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

e) Si Y es una v.a. que es \mathcal{G} -medible, se cumple
$$\mathbb{E}[YX | \mathcal{G}] = Y \mathbb{E}[X | \mathcal{G}].$$

Teorema 6 Dada las sub σ -álgebras \mathcal{H} y \mathcal{G} de \mathcal{F} , con $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Se cumple que

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}].$$

Teorema 7 (Desigualdad de Jensen para la esperanza condicional) Dada una función convexa $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ de modo que $\mathbb{E}[|\phi(X)|] < \infty$, entonces tenemos que

$$\phi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X) \mid \mathcal{G}].$$

1.5. Lemas de Borel-Cantelli

Definición 2 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n \geq 1}$ de \mathcal{F} . Definimos los siguientes conjuntos límites

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \overline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} A_n \right) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \underline{\lim} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n \geq k} A_n \right) \end{aligned}$$

Note que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Si los dos límites anteriores son iguales, escribimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Decir que A_n tiene límite A , denotado por $A_n \rightarrow A$, significa que los límites $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ y $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ existen y son iguales a A .

El siguiente resultado muestra otra forma de interpretar los límites $\overline{\lim} A_n$ y $\underline{\lim} A_n$.

Proposición 3 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n \geq 1}$ de \mathcal{F} . Entonces $\overline{\lim} A_n, \underline{\lim} A_n \in \mathcal{F}$ y

$$\begin{aligned} \overline{\lim} A_n &= \{w \in \Omega : w \in A_n \text{ para infinitos índices } n\} \\ \underline{\lim} A_n &= \{w \in \Omega : w \in A_n \text{ para todo } n \text{ menos un número finito } n's\} \end{aligned}$$

Demostración: ver (Resnick, 1999).

Teorema 8 (Lemas de Borel-Cantelli) Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una sucesión de eventos $\{A_n\}_{n \geq 1}$ de \mathcal{F} . Se cumple que

1. Si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, entonces tenemos que $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$.
2. Si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ y la sucesión de eventos $\{A_n\}_{n \geq 1}$ son independientes, entonces se tiene que $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

Demostración: (1) $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} A_n \right) \subset \bigcup_{n \geq k} A_n$ para todo k . Por lo tanto

$$\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

(2) Es suficiente demostrar que $\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) \right) = 0$, ó $\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) = 0$ para todo n . Como los $\{A_n\}$ son independientes, y desde que $\ln(1-x) \leq -x$ para $0 \leq x < 1$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \mathbb{P} (A_k^c) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P} (A_k)) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=n}^N \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k)} = 0. \end{aligned}$$

Esto demuestra el lema. □

Capítulo II

Procesos estocásticos y cálculo de Itô

2.1. Proceso estocástico

En la actualidad, la teoría de procesos estocásticos e integral estocástica es desarrollada de manera estándar, siguiendo los mismos pasos para su construcción. En este capítulo sólo desarrollamos dicha teoría de forma resumida y autocontenida a un nivel de pregrado o un primer curso de posgrado, siguiendo la estructura presentada por (Karatzas y Shreve, 1991) con ciertos matices del (Ikeda y Watanabe, 1981).

Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in I\}$ indexadas por un conjunto de parámetros I (continuo o discreto), que representa la evolución temporal de la variable de interés. Cada variable aleatoria X_t que pertenece al proceso estocástico tiene su propia función de distribución de probabilidades y, entre ellas, pueden tener alguna estructura de correlación o no. La aleatoriedad del fenómeno de interés es capturada en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sobre el cual están definidas las variables aleatorias del proceso, llamado *espacio muestral*. Usando las definiciones introducidas anteriormente, un *Proceso Estocástico* puede ser representado matemáticamente o de forma compacta como una secuencia de variables aleatorias $X = \{X_t : t \in [0, \infty)\}$ definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e indexadas por un subintervalo que representa el tiempo (por ejemplo $[0, \infty)$). Las variables del proceso estocástico toman valores en un segundo espacio medible (S, \mathcal{L}) , denominado *espacio de estados*.

De forma general, en casi todas las aplicaciones reales, el espacio de estados de un proceso estocástico es un espacio Euclideo d -dimensional con el σ -álgebra de los Boreleanos, es decir, $S = \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ denota la menor σ -álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos de \mathbb{R}^d .

El subíndice $t \in [0, \infty)$ asociado al proceso estocástico $\{X_t\}$ captura la dependencia intertemporal de la variable de interés, y como esta cambia a lo largo del tiempo. Además, para cada $w \in \Omega$, la función $t \mapsto X_t(w)$, para $t \geq 0$ es la *trayectoria* muestral u observada del proceso $X = \{X_t\}$ asociado a la realización w . Si casi todas las trayectorias de un proceso estocástico $\{X_t\}$ son continuas, entonces decimos que el proceso es continuo.

Por lo anterior discutido, podemos decir que un proceso estocástico es un modelo matemático de un fenómeno aleatorio dinámico, donde el índice temporal t del proceso nos permite tener la noción, en cada instante de tiempo, de pasado, presente y futuro. Esta noción intertemporal es muy importante porque cuando se modela un fenómeno aleatorio a través de un proceso estocástico es importante estudiar el comportamiento de la variable a mediano y largo plazo. Además, la noción de tiempo en el proceso estocástico permite introducir un objeto matemático que se interpreta como la información sobre la variable de interés, acumulada hasta el tiempo t . Esta noción es formalizada en la siguiente definición.

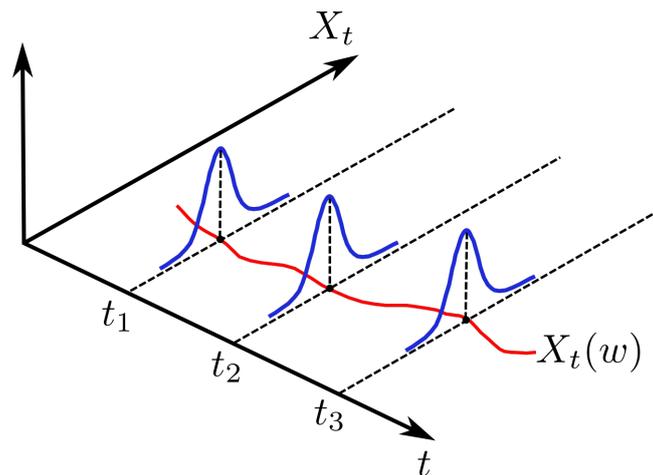


Figura 2.1: Representación gráfica de la trayectoria de un proceso estocástico. En cada instante de tiempo la variable X_t tiene una distribución que cambia con el tiempo. (Fuente: *Elaboración propia.*)

Definición 3 Una filtración de \mathcal{F} es una familia no decreciente de sub σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$

$0\}$ de \mathcal{F} , i.e., si $s \leq t$ entonces $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Si le añadimos una filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ a un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, este sera denominado espacio filtrado.

Dado $s < t$, la condición impuesta en la definición de filtración que la familia sea no decreciente, i.e, si $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, es consecuencia que empíricamente la información respecto a una variable de interés acumulada hasta tiempo t es mayor a la información acumulada hasta tiempo s , con $t > s$. Definimos ahora la información total generada por el proceso $\{X_t\}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \right)$$

Dada una filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ del σ -álgebra \mathcal{F} . Definimos los siguientes σ -álgebras

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma \left(\bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s \right) \quad , \quad \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$$

De la definición anterior, decimos que la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ es continua por la derecha (resp. continua por la izquierda) si, y sólo si para todo $t \geq 0$ se tiene que $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ (resp. $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$).

Finalmente, diremos que $\{X_t\}$ es un proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si, y sólo si X_t es \mathcal{F}_t -medible $\forall t \geq 0$. Una interpretación de esta definición es que la información que genera el proceso estocástico hasta el tiempo t está contenida en el σ -álgebra \mathcal{F}_t .

Definición 4 Una función $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ que es \mathcal{F} -medible es denominada tiempo aleatorio.

Definición 5 Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible con $\{\mathcal{F}_t\}$ como filtración. Un tiempo aleatorio τ es denominado tiempo de parada para la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, cuando el evento $\{\tau \leq t\}$ está en la σ -álgebra \mathcal{F}_t , para cada $t \geq 0$.

Notemos que la definición de tiempo de parada depende fuertemente de la filtración que se defina sobre el espacio de probabilidad. Si cambiamos de filtración puede ocurrir que el tiempo de parada, definido o usado inicialmente con la filtración inicial, deje de ser

un tiempo de parada con la nueva filtración. Por ejemplo, si tomamos un σ -álgebra que es invariante en el tiempo, esto es, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ para todo $t \geq 0$, entonces es fácil verificar que todo tiempo aleatorio es un tiempo de parada para la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.

Para un tiempo de parada τ de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, definimos el σ -álgebra asociado al tiempo de parada τ , denotado por \mathcal{F}_τ , de la siguiente forma

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in [0, \infty), A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t\}$$

De forma similar, definimos el σ -álgebra en el tiempo de parada τ por la derecha $\mathcal{F}_{\tau+}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in [0, \infty), A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_{t+}\}$$

Para un proceso estocástico $\{X_t\}$ y un tiempo de parada τ , definimos el proceso parado en el tiempo de parada τ , denotado por X_τ , de la siguiente forma

$$X_\tau(w) = X_{\tau(w)}(w), \quad \forall w \in \Omega$$

Finalmente, es fácil verificar que la variable X_τ es \mathcal{F}_τ -medible.

2.2. Movimiento Browniano

En esta sección definimos uno de los procesos estocásticos más importante. Una de las primeras aplicaciones del movimiento Browniano fue propuesta por Bachelier, en 1900. En su trabajo él propuso que la fluctuación del precio de un activo dS_t es proporcional a la fluctuación de un movimiento Browniano, es decir, $dS_t = \sigma dB_t$, donde σ es una constante. Como resultado, si el valor del activo hoy es $S_0 = x$, entonces el valor del activo en el tiempo t será $S_t = x + \sigma B_t$. Posteriormente el modelo fue criticado por diversos matemáticos y practitioners de la época, puesto que ese proceso no captura las propiedades empíricas sobre el comportamiento real de los activos financieros, en particular el precio del petróleo.

2.2.1. Definición y principales propiedades

En la literatura existen diferentes versiones de la definición de movimiento Browniano (todas ellas equivalentes). Para el objetivo de este trabajo es suficiente la siguiente definición, tomada de (Brzezniak y Zastawniak, 1999)

Definición 6 *Un movimiento Browniano o también llamado proceso de Wiener, es un proceso estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ con espacio de estados dado por \mathbb{R} definido para $t \in [0, \infty)$ tal que:*

i) $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$

ii) $\{B_t\}$ contiene incrementos independientes, esto es, para cada conjunto finito $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ los incrementos

$$B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

son independientes.

iii) Para cada $0 \leq s < t < \infty$ se tiene que $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$, es decir, $B_t - B_s$ tiene distribución normal de media 0 y con varianza $t - s$,

$$\mathbb{P}[B_t - B_s \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2(t-s)}\right) du$$

iv) $\mathbb{P}[\omega : t \mapsto B_t(\omega) \text{ es continua}] = 1$

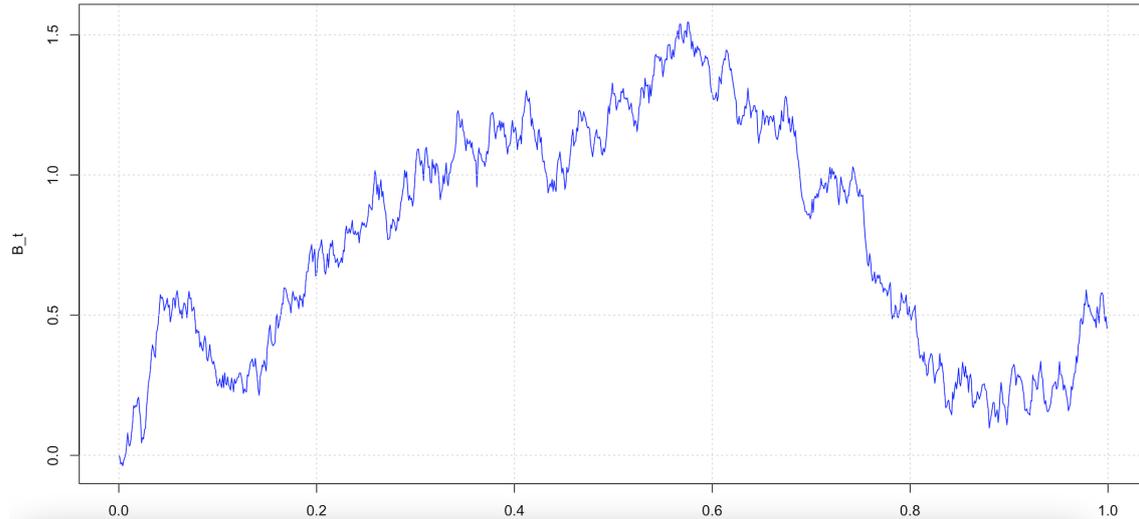


Figura 2.2: Simulación numérica de una trayectoria de un movimiento Browniano estándar. (Fuente: Elaboración propia.)

Una propiedad interesante del movimiento Browniano es que siempre es posible calcular las distribuciones finitas dimensionales del proceso en términos de su *kernel de transición* o *densidad de transición*. Esta propiedad nos permite calcular la probabilidad que una trayectoria pase exactamente por un subconjunto del espacio de estados. Esta propiedad es descrita en la siguiente proposición.

En lo sucesivo escribiremos $\{B_t\}$ en vez de $B = \{B_t : t \geq 0\}$, salvo se mencione lo contrario

Proposición 4 Sea $\{B_t\}$ un movimiento Browniano, una sucesión finita $0 < t_1 < \dots < t_n$ y subconjuntos A_1, \dots, A_n de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}[B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n] = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

donde para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ se tiene que

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)$$

Esta función se denomina la densidad o kernel de transición.

Demostración: Ver (Resnick, 1999).

Una propiedad importante del movimiento Browniano es la propiedad martingala. Para entender dicha propiedad, primero definimos el concepto de martingala.

Definición 7 *Se llamará una martingala (respectivamente supermartingala y submartingala) al proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ si cumple que:*

1. $\forall t \in [0, \infty)$, X_t es integrable.
2. $\forall t \in [0, \infty)$, X_t es $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado.
3. $\forall t, s \in [0, \infty)$ con $s < t$, se tiene que $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ (resp. $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$, $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$). Donde $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ es la esperanza condicional de X_t dado el σ -álgebra \mathcal{F}_s .

Regresando al movimiento Browniano, tenemos las siguientes propiedades importantes para este proceso estocástico. Estas propiedades nos dicen como se comporta un Browniano respecto a su filtración natural.

Teorema 9 *Sea $\{B_t\}$ un movimiento Browniano y sea $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t)$ la filtración generada por $\{B_t\}$. Se cumple las siguientes propiedades:*

1. **Propiedad Martingala del movimiento Browniano:** *Respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ el proceso $\{B_t\}$ es una martingala.*
2. *Respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ el proceso $\{B_t^2 - t\}$ es una martingala.*
3. **Propiedad de Markov:** *Para cualquier $T > 0$, el proceso $\{B_{t+T} - B_T\}$ es un movimiento Browniano.*
4. **Propiedad fuerte de Markov :** *Para un tiempo de parada estrictamente positivo $\tau > 0$ respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, el proceso $\{B_{t+\tau} - B_\tau\}$ es un movimiento Browniano.*
5. *Las trayectorias de un movimiento Browniano son no diferenciables en ningún punto.*

Teorema 10 (Caracterización martingala de Levy) *Dado un proceso estocástico $\{B_t\}$, y su filtración natural, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$. Diremos que $\{B_t\}$ es un movimiento Browniano siempre que se cumpla:*

1. $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$.
2. $\mathbb{P}(w : t \mapsto B_t(w) \text{ es continua}) = 1$.
3. *Respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, $\{B_t\}$ es una martingala.*
4. *Respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, $\{B_t^2 - t\}$ es una martingala.*

La demostración de los Teoremas 9 y 10 pueden ser encontrados, por ejemplo, en (Ross, 2004), (Karatzas y Shreve, 1991), (Ikeda y Watanabe, 1981). El objetivo de esta sección en el presente trabajo no es repetir las demostraciones de los resultados de un movimiento Browniano, que generalmente son vistas en un curso introductorio de procesos estocásticos, si no es recordar dichas propiedades y usarlas en la aplicación que veremos en el Capítulo 5. Por otra parte, una de las caracterizaciones más importantes que se hizo de este proceso es la caracterización de Levy para el movimiento Browniano.

2.2.2. Variación cuadrática del movimiento Browniano

Continuando con el estudio del movimiento Browniano, pasamos a definir la variación cuadrática de una martingala, y como caso particular estudiaremos la variación cuadrática del movimiento Browniano, que es un insumo importante al momento de construir y definir la integral estocástica, y obtener finalmente la principal regla del cálculo estocástico, el *Lema de Itô*.

Definición 8 *Sea una martingala continua a la derecha $M = \{M_t, \mathcal{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$. M será cuadrado integrable cuando $\forall t \geq 0, \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$.*

Como caso particular, note que un movimiento Browniano $\{B_t\}$ es cuadrado integrable, i.e., $\mathbb{E}[B_t^2] < \infty$ para todo $t \geq 0$. Esto es consecuencia de la propiedad martingala dada en el Teorema 9.

Definición 9 Dada una martingala cuadrado integrable M , definimos la **variación cuadrática** del proceso M , como el único proceso $\langle M \rangle_t$ adaptado (único con probabilidad 1. Ver (Karatzas y Shreve, 1991) para una definición más formal), que satisface lo siguiente:

i) $\langle M \rangle_0 = 0$

ii) El proceso $t \mapsto \langle M \rangle_t$ es continuo y no decreciente en c.t.p.

iii) El proceso estocástico $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una martingala

El siguiente teorema calcula la variación cuadrática de un movimiento Browniano.

Teorema 11 Sea el intervalo $[0, T]$, y consideremos una partición $0 = t_0 < t_1^n < \dots < t_n^n = T$ del intervalo $[0, T]$, donde $t_i^n = \frac{iT}{n}$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 = T \quad (\text{convergencia en } L^2)$$

es decir, $\langle B \rangle_t = t$, para todo $t \geq 0$.

Demostración: Desde que los incrementos $\Delta_i^n B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ son independientes y

$$\mathbb{E}(\Delta_i^n B) = 0, \quad \mathbb{E}((\Delta_i^n B)^2) = \frac{T}{n}, \quad \mathbb{E}((\Delta_i^n B)^4) = \frac{3T^2}{n^2}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left[\sum_{i=1}^n (\Delta_i^n B)^2 - T \right]^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\left[\sum_{i=1}^n \left((\Delta_i^n B)^2 - \frac{T}{n} \right) \right]^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left((\Delta_i^n B)^2 - \frac{T}{n} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\mathbb{E}(\Delta_i^n B)^4 - \frac{2T}{n} \mathbb{E}(\Delta_i^n B)^2 + \frac{T^2}{n^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{3T^2}{n^2} - \frac{2T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2} \right] = \frac{2T^2}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. \square

El teorema anterior justifica el nombre variación cuadrática. Para ver una versión más general de este resultado, se puede ver en (Karatzas y Shreve, 1991). Si elegimos el intervalo $[t, t + h]$, donde $h \approx 0$, entonces

$$(B_{t+h} - B_t)^2 \approx h \tag{2.1}$$

Para efectos prácticos, y poder hacer analogía con el cálculo clásico, los autores e investigadores de esta área acostumbran denotar la ecuación (2.1) por $(dB_t)^2 = dt$. Esta notación hace más intuitivo el cálculo estocástico que introduciremos en la siguiente sección.

Sea $\{B_t^1\}$ y $\{B_t^2\}$ dos movimientos Brownianos independientes. El teorema anterior sugiere definir la siguiente regla de cálculo práctica

\times	dt	dB_t^1	dB_t^2
dt	0	0	0
dB_t^1	0	dt	0
dB_t^2	0	0	dt

Esta regla de cálculo será útil para introducir el Lemma de Itô en la siguiente sección.

2.3. La integral estocástica

Al querer modelar el precio de un activo financiero usando propiedades estadísticas y hechos empíricos es usual encontrarse con un proceso límite del tipo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma(S_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

siendo $\{S_t\}$ un proceso estocástico que depende de la información generada por el movimiento Browniano $\{B_t\}$. El límite anterior nos recuerda a las sumas de Riemann que se estudia en el cálculo integral, pero **¿El límite anterior tiene sentido matemático?** Esta respuesta fue resuelta por los trabajos pioneros de Kiyosi Itô (1944), donde él construye formalmente lo que actualmente se conoce como integral estocástica o integral de Itô, y que es un pilar importante en las finanzas cuantitativas modernas.

Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) con una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ del σ -álgebra \mathcal{F} .

Definición 10 Representemos por \mathcal{M}_2 el espacio de todas las martingalas cuadrado integrable continuas por la derecha, es decir,

$$\mathcal{M}_2 = \{X = \{X_t\} : \mathbb{E}[X_t^2] < \infty, \forall t \geq 0, X_0 = 0 \text{ y } X \text{ continua por la derecha}\}$$

y el espacio de todas las martingalas cuadrado integrable continuas,

$$\mathcal{M}_2^c = \{X \in \mathcal{M}_2 : t \rightarrow X_t \text{ es continua}\}$$

Note que todo movimiento Browniano $B = \{B_t : t \geq 0\}$ pertenece a \mathcal{M}_2^c .

Sean $s, t \in \mathbb{R}$, usaremos la siguiente notación $s \wedge t$, para denotar el mínimo entre s y t , es decir $s \wedge t := \min\{s; t\}$.

Definición 11 Para cada $X \in \mathcal{M}_2$, definimos la norma introducida en (Karatzas y Shreve, 1991), dada por

$$[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} ([X]_n \wedge 1)$$

donde $[X]_n = \mathbb{E}[X_n^2]^{1/2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

El siguiente lema muestra que la norma definida anteriormente es adecuada para construir la integral estocástica.

Lema 1 El espacio \mathcal{M}_2 con la métrica $d(X, Y) = [X - Y]$, es un espacio métrico completo. Además, \mathcal{M}_2^c es un subespacio cerrado de \mathcal{M}_2 .

Demostración: La demostración presentada aquí fue tomada de (Karatzas y Shreve, 1991). Siempre y cuando $[X - Y] = 0$, entonces $[X - Y]_n = 0$, luego $X_n = Y_n$ c.t.p. para todo $n = 1, 2, \dots$. Ahora $X_t = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_t] = Y_t \forall n \geq t$. Entonces $X = Y$, esto último por la continuidad por la derecha de los procesos.

Veamos ahora que \mathcal{M}_2 es completo. Dada una sucesión de Cauchy $\{X^n\} \subset \mathcal{M}_2$, $n = 1, 2, \dots$, esto es, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} [X^n - X^m] = 0$. Note que para cada t fijo, $\{X_t^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una su-

cesión de Cauchy sobre el espacio $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Así, denotaremos por X_t su límite. Ahora, demostraremos que este límite es un proceso martingala. Sean $0 \leq s < t < \infty$ y $A \in \mathcal{F}_s$. Por la convergencia en L^2 y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[1_A(X_s^n - X_s)] = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[1_A(X_t^n - X_t)] = 0$. Como cada $X^n \in \mathcal{M}_2$ se tiene $\mathbb{E}[1_A X_t^n] = \mathbb{E}[1_A X_s^n]$, entonces tenemos que $\mathbb{E}[1_A(X_t - X_s)] = \mathbb{E}[1_A(X_t - X_t^n + X_t^n - X_s^n + X_s^n - X_s)] = \mathbb{E}[1_A(X_t^n - X_t)] + \mathbb{E}[1_A(X_s^n - X_s)] \Rightarrow \mathbb{E}[1_A X_t] = \mathbb{E}[1_A X_s]$. Por lo tanto, el proceso $X = \{X_t\} \in \mathcal{M}_2$ es una martingala. Finalmente tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} [X^n - X] = 0$.

Veamos que \mathcal{M}_2^c es un subespacio cerrado de \mathcal{M}_2 . Sea la sucesión $\{X^n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_2^c$ con límite X en \mathcal{M}_2 . Usando la desigualdad de Doob para una martingala (ver (Karatzas y Shreve, 1991) para su demostración), se tiene que

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n - X_t| \geq \epsilon \right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E}[|X_T^n - X_T|] = \frac{1}{\epsilon^2} [X^n - X]_T^2 \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y para todo $\epsilon > 0$. Tomamos $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$, entonces tenemos el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n - X_t| \geq \frac{1}{2^k} \right] = 0, \text{ para todo } k > 0$$

Usando el límite anterior para cada k podemos elegir un n_k tal que

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n_k} - X_t| \geq \frac{1}{2^k} \right] \leq \frac{1}{2^k}.$$

Por el Lema de Borel-Cantelli, Teorema 8, tenemos que $X_t^{n_k}$ converge uniformemente a X_t sobre $[0, T]$, en c.t.p. Por lo tanto, X es un proceso con trayectorias continuas. Esto concluye la prueba. \square

Sea M una martingala cuadrado integrable con filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y variación cuadrática dada por $\langle M \rangle_t$.

Definición 12 Al conjunto de todos los procesos cuadrado integrables adaptados a M se denotará por $\mathcal{L}_2(M)$, esto es,

$$\mathcal{L}_2(M) = \left\{ \Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0} : \Phi_t \text{ es } \mathcal{F}_t\text{-medible}, \|\Phi\|_{2,t}^M = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Phi_s^2 d\langle M \rangle_s \right] < \infty \forall t > 0 \right\}$$

Note que el proceso $\Phi \in \mathcal{L}_2(M)$ depende de la información generada por la martingala M . Esto se hace explícito al imponer que Φ_t sea \mathcal{F}_t -medible.

Para cada elemento de $\Phi \in \mathcal{L}_2(M)$, definimos $\|\Phi\|_2^M$ de la siguiente forma

$$\|\Phi\|_2^M = \sum_{i=1}^{\infty} (\|\Phi\|_{2,n}^M \wedge 1)$$

Observación: Note que $\|\cdot\|_2^M$ no es una norma sobre $\mathcal{L}_2(M)$, puesto que puede existir dos procesos X, X' , que difieren sólo en un conjunto de medida cero, tal que $\|X\|_2^M = \|X'\|_2^M$. Para hacer que $\|\cdot\|_2^M$ sea una norma, lo que se hace es fijar una relación de equivalencia sobre $\mathcal{L}_2(M)$ de la siguiente manera:

$$X \sim Y \iff \|X\|_2^M = \|Y\|_2^M$$

y luego se extiende la norma que induce la relación de equivalencia al conjunto $\frac{\mathcal{L}_2(M)}{\sim}$. Para evitar saturar la notación utilizada, denotaremos al conjunto de las clases de equivalencia de la misma forma.

Definición 13 Sea \mathcal{L}_0 , la subcolección de procesos reales $\Phi = \{\Phi_t\} \in \mathcal{L}_2(M)$ con la siguiente propiedad: $\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ con $t_n \rightarrow \infty$ y una sucesión de variables aleatorias cuadrado integrables $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que f_i es \mathcal{F}_{t_i} -medible, $\sup_i \|f_i\|_{\infty} < \infty$ y

$$\Phi_t = \sum_{i=0}^{\infty} f_i I_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

donde $I_{[t_i, t_{i+1})}$ es la función indicadora.

Observación: \mathcal{L}_0 será denominado como el conjunto de **procesos simples**.

El siguiente lema nos dice que cualquier proceso adaptado cuadrado integrable de $\mathcal{L}_2(M)$ se puede aproximar por una sucesión de procesos simples. Esto será mucha importancia cuando se construye la integral estocástica.

Lema 2 \mathcal{L}_0 es denso en $\mathcal{L}_2(M)$ con respecto a la métrica d , definida por $d(X, Y) = \|X - Y\|_2^M$

Demostración: Los detalles de la demostración de este resultado pueden ser encontrados en (Karatzas y Shreve, 1991). \square

El lema anterior es muy importante porque implícitamente este lema nos dice que la integral estocástica será construida por aproximaciones en \mathcal{L}_0 , idea similar como se hace para construir la integral en teoría de la medida. Primero se definirá la integral para procesos simples, y luego se extenderá para cualquier proceso adaptado a la martingala respecto sobre la cual estamos integrando el proceso usando la densidad de \mathcal{L}_0 .

Sea $\Phi \in \mathcal{L}_0$, $M \in \mathcal{M}_2$ y su correspondiente variación cuadrática $\langle M \rangle$. Luego existe $\{t_i\}_{i=0}^\infty$ tal que $t_i \uparrow \infty$ y

$$\Phi_t = \sum_{i=0}^{\infty} f_i I_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

Definimos la integral estocástica de Φ respecto a la martingala M como

$$I^M(\Phi)_t = \sum_{i=0}^{n-1} f_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + f_n (M_t - M_{t_n})$$

con $t \in [t_n, t_{n+1})$ y $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la integral $I^M(\Phi)_t$ está definida para todo $t \geq 0$, es decir, la integral estocástica también es un proceso estocástico.

Una propiedad interesante de resaltar, y que es muy útil en finanzas cuantitativas, es que la integral estocástica también es una martingala con respecto a la filtración de M , es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [I^M(\Phi)_t \mid \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[f_i(w)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[f_n(M_t - M_{t_n}) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= I^M(\Phi)_s \end{aligned}$$

para $0 \leq s < t < \infty$. La ecuación mostrada anteriormente es la demostración que la integral estocástica $(I^M(\Phi)_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2$, es decir, *la integral estocástica de un proceso simple es una martingala cuadrado integrable*.

Los cálculos mostrados anteriormente lo podemos resumir en la siguiente proposición

que puede ser encontrada en (Karatzas y Shreve, 1991).

Proposición 5 Si $M \in \mathcal{M}_2^c$ entonces $I^M(\Phi) \in \mathcal{M}_2^c$, para todo proceso $\Phi \in \mathcal{L}_0$.

Siguiendo con nuestro análisis, calculemos la esperanza del cuadrado de la integral $\mathbb{E}[I^M(\Phi)_t^2]$.

Si Φ es un proceso simple, sabemos que este se puede escribir como

$$I^M(\Phi)_t = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i})$$

entonces

$$\mathbb{E}[I^M(\Phi)_t^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i(M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}) \right)^2 \right]$$

Primero, notemos que si $M \in \mathcal{M}_2$ y $0 \leq s < t \leq u < v$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_v - M_u)(M_t - M_s)] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[(M_v - M_u)(M_t - M_s) \mid \mathcal{F}_u]\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[(M_v - M_u) \mid \mathcal{F}_u](M_t - M_s)\} = 0 \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s]\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s]\} = \mathbb{E}[\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s]$$

Así, tenemos que

$$\mathbb{E}[I^M(\Phi)_t^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i(M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 (\langle M \rangle_{t \wedge t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t \wedge t_i}) \right].$$

En la expresión anterior vemos que esta no depende de la partición escogida $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ del intervalo $[0, t]$, entonces tenemos que

$$\mathbb{E} [I^M(\Phi)_t^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u \right] \quad \forall t \geq 0 \text{ y } \forall \Phi \in \mathcal{L}_0.$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente relación

$$[I^M(\Phi)] = \|\Phi\|_2^M \quad \forall \Phi \in \mathcal{L}_0$$

La relación anterior muestra que la aplicación $\Phi \in \mathcal{L}_0 \rightarrow I^M(\Phi) \in \mathcal{M}_2$ es una isometría, que será denominada como la **isometría de Itô**. El siguiente resultado nos da un resumen de las principales propiedades de la integral estocástica para procesos simples.

Proposición 6 Dado $\Phi \in \mathcal{L}_0$ y $M \in \mathcal{M}_2$. La integral estocástica de un proceso simple satisface las siguientes propiedades:

1. $I^M(\Phi)_0 = 0$ c.t.p;
2. $\mathbb{E}[I^M(\Phi)_t | \mathcal{F}_s] = I^M(\Phi)_s$;
3. $\mathbb{E}[I^M(\Phi)_t^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u \right]$;
4. $[I^M(\Phi)] = \|\Phi\|_2^M$;
5. $I^M(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha I^M(\Phi) + \beta I^M(\Psi)$.

Demostración: La demostración de estas propiedades de la integral estocástica son muy similar a la realizada para demostrar la isometría de Itô, ver (Karatzas y Shreve, 1991).

Así mismo, podemos obtener la siguiente identidad para la integral estocástica de procesos simples

$$\mathbb{E} \left[(I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s)^2 | \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u | \mathcal{F}_s \right] \quad (2.2)$$

La ecuación anterior muestra que el proceso $\left\{ I^M(\Phi)_t^2 - \int_0^t \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u \right\}_{t \geq 0}$ es una martingala. Entonces, tenemos la variación cuadrática de la integral estocástica

$$\langle I^M(\Phi) \rangle_t = \int_0^t \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u \quad (2.3)$$

Ahora pasamos a construir la integral estocástica de un proceso $\Phi \in \mathcal{L}_2(M)$. Usando el Lema 2, podemos encontrar una sucesión $\{\Phi^n\} \subset \mathcal{L}_0$ tal que $\|\Phi^n - \Phi\|_2^M \rightarrow 0$ cuando

$n \rightarrow \infty$. Por la Proposición 6 tenemos que

$$\begin{aligned} [I^M(\Phi^n) - I^M(\Phi^m)] &= [I^M(\Phi^n - \Phi^m)] \\ &= \|\Phi^n - \Phi^m\|_2^M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$. Entonces, tenemos que la sucesión de integrales $\{I^M(\Phi^n)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy sobre el espacio \mathcal{M}_2 . Por lo tanto, existe un proceso estocástico límite, que denotaremos por $\{I^M(\Phi)_t\}_{t \geq 0}$, tal que $[I^M(\Phi^n) - I^M(\Phi)] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sobre la buena definición de este proceso, sean $\{X^n\}_{n=1}^\infty$ e $\{Y^n\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones tales que $\|X^n - \Phi\|_2^M \rightarrow 0$ y $\|Y^n - \Phi\|_2^M \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces tenemos que

$$[I^M(X^n) - I^M(Y^n)] \leq [I^M(X^n) - I^M(\Phi)] + [I^M(Y^n) - I^M(\Phi)] \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

El procedimiento anterior nos permite definir la integral estocástica.

Definición 14 Sea $\Phi \in \mathcal{L}_2(M)$. La integral de Φ respecto de $M \in \mathcal{M}_2$ es la única martingala cuadrado integrable $I^M(\Phi) = \{I^M(\Phi)_t, \mathcal{F}_t : t \in [0, \infty)\}$ que cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} [I^M(X^n) - I^M(\Phi)] = 0$, para toda sucesión $\{X^n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}_0$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X^n - \Phi\|_2^M = 0$. Denotamos la integral de Φ de la siguiente forma

$$I^M(\Phi)_t = \int_0^t \Phi_s dM_s; \quad 0 \leq t < \infty.$$

Observación: Si $M \in \mathcal{M}_2^c$ entonces para todo $\Phi \in \mathcal{L}_2(M)$ tenemos que $I^M(\Phi) \in \mathcal{M}_2^c$. Esto es consecuencia de que \mathcal{M}_2^c es un subespacio cerrado de \mathcal{M}_2 . Ver Lema 1 y (Karatzas y Shreve, 1991) para los detalles técnicos.

Al igual que la integral estocástica para procesos simples, la integral de cualquier proceso adaptable $\Phi \in \mathcal{L}_2(M)$ tiene las propiedades deseadas en una integral. Estas propiedades son resumidas en la siguiente proposición, ver (Karatzas y Shreve, 1991).

Proposición 7 La integral estocástica $I^M(\Phi)$, para $\Phi \in \mathcal{L}_2(M)$ y $M \in \mathcal{M}_2$, tiene las siguientes propiedades:

i) $I^M(\Phi)_0 = 0$ c.t.p

ii) *Linealidad.* $I^M(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha I^M(\Phi) + \beta I^M(\Psi)$.

iii) *Isometría de Itô.* $\mathbb{E}[I^M(\Phi)_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u\right]$

iv) *Propiedad martingala.* Para $t > s \geq 0$, se cumple

$$\mathbb{E}[I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s \mid \mathcal{F}_s] = 0 \text{ c.t.p.} \quad (2.4)$$

y

$$\mathbb{E}[(I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right] \text{ c.t.p.} \quad (2.5)$$

Las propiedades (2.4) y (2.5) pueden ser generalizadas reemplazando los tiempos determinísticos por tiempos de parada, es decir, sean los tiempos de parada σ y τ para la filtración (\mathcal{F}_t) tal que $\tau \geq \sigma$ c.t.p. Entonces, para $t > 0$

$$\mathbb{E}[I^M(\Phi)_{t \wedge \tau} - I^M(\Phi)_{t \wedge \sigma} \mid \mathcal{F}_\sigma] = 0 \text{ c.t.p.} \quad (2.6)$$

y

$$\mathbb{E}[(I^M(\Phi)_{t \wedge \tau} - I^M(\Phi)_{t \wedge \sigma})^2 \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}\left[\int_{t \wedge \sigma}^{t \wedge \tau} \Phi_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \text{ c.t.p.} \quad (2.7)$$

v) Sean $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}_2(M)$. Entonces, se cumple

$$\mathbb{E}[(I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s)(I^M(\Psi)_t - I^M(\Psi)_s) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t (\Phi\Psi)_u d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right] \quad (2.8)$$

y

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(I^M(\Phi)_{t \wedge \tau} - I^M(\Phi)_{t \wedge \sigma})(I^M(\Psi)_{t \wedge \tau} - I^M(\Psi)_{t \wedge \sigma}) \mid \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{t \wedge \sigma}^{t \wedge \tau} (\Phi\Psi)_u d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \text{ c.t.p.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

vi) Dado un \mathcal{F}_t -tiempo de parada σ . Se cumple

$$I^M(\Phi)_{t \wedge \sigma} = I^M(\Phi')_t, \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\text{donde } \Phi'_t = I_{\{\sigma \geq t\}} \Phi_t$$

Demostración: Todas estas propiedades relacionadas con la integral estocástica son demostradas fácilmente aproximando el proceso a integrar Φ por una sucesión de procesos simples y usando la densidad de \mathcal{L}_0 . Para ilustrar este procedimiento, a continuación presentamos la demostración del ítem (vi).

Sea $\Phi \in \mathcal{L}_0$. Sea $\{s_i^n\}_{i=0}^\infty$ ($n = 1, 2, \dots$) un refinamiento de $\{t_i\}_{i=0}^\infty$ y $\{i2^{-n}\}_{i=0}^\infty$, entonces

$$\Phi_t = \sum_i f_i^n I_{[s_i^n, s_{i+1}^n)}(t) \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Definamos $\sigma^n = s_{i+1}^n$ si $\sigma \in [s_i^n, s_{i+1}^n)$, donde σ^n es un \mathcal{F}_t -tiempo de parada para todo n , y se tiene la convergencia $\sigma^n \downarrow \sigma$. Además, como

$$\Phi'_n(s) = \Phi_s I_{\{\sigma^n \geq s\}}.$$

Entonces, $\Phi'_n \in \mathcal{L}_0$. Notemos también que $I_{\{\sigma^n > s\}} = I_{\{\sigma \geq s_i^n\}}$ si $s \in [s_i^n, s_{i+1}^n)$. Entonces

$$\|\Phi'_n - \Phi'\|_{2,t}^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Phi_s^2 I_{\{\sigma^n > s > \sigma\}} d\langle M \rangle_s \right] \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

de donde concluimos que $I^M(\Phi'_n) \rightarrow I^M(\Phi')$ sobre \mathcal{M}_2 . Pero, como $I^M(\Phi'_n)_t = \int_0^{t \wedge \sigma^n} \Phi_s dM_s$ concluimos que

$$I^M(\Phi')_t = \lim_{n \rightarrow \infty} I^M(\Phi'_n)_t = \int_0^{t \wedge \sigma} \Phi(s, w) dM_s = I^M(\Phi)_{t \wedge \sigma}.$$

Para demostrar el caso general, consideremos la sucesión $\{\Phi_n\} \subset \mathcal{L}_0$ tal que $\Phi_n \rightarrow \Phi$ en \mathcal{L}_2 . Entonces $I^M(\Phi_n) \rightarrow I^M(\Phi)$ en \mathcal{M}_2 . Como se cumple la identidad

$$I^M(\Phi'_n)_t = I^M(\Phi_n)_{t \wedge \sigma} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $I^M(\Phi'_n)_t \rightarrow I^M(\Phi')_t$ y $I^M(\Phi_n)_{t \wedge \sigma} \rightarrow I^M(\Phi)_{t \wedge \sigma}$. Por lo tanto, concluimos que $I^M(\Phi')_t = I^M(\Phi)_{t \wedge \sigma}$. \square

2.4. La Fórmula de Itô

La *fórmula de Itô* es una importante herramienta en el estudio y análisis de los procesos estocásticos. Esta regla del cálculo para integrar procesos estocástico es la que usaremos como herramienta fundamental en el estudio de las propiedades teóricas del proceso que usaremos para modelar el precio del petróleo.

Definición 15 Sea $B = \{B_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano unidimensional definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se llamará proceso de Itô unidimensional, siempre que puede ser escrito de la siguiente forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dB_s \quad a.s.,$$

donde $\{b_t\}$ es un proceso en $L^2(\mathbb{P})$ y a_t es un proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ tal que $\int_0^t |a_s| ds < \infty$ a.s.

Un proceso de Itô también es denotado de la siguiente manera

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t,$$

denominado *ecuación diferencial estocástica*.

Si denotamos por $A_t = \int_0^t a_s ds$ y $M_t = \int_0^t b_s dB_s$, vemos que un proceso de Itô se puede escribir de la forma

$$X_t = X_0 + A_t + M_t \tag{2.11}$$

donde A_t es un proceso \mathcal{F}_t -adaptado de variación acotada con $A_0 = 0$ y $M = \{M_t\}$ es una martingala.

De la Proposición 7, tenemos que para un proceso de Itô $dX_t = a_t dt + b_t dB_t$ la variación cuadrática es igual a

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t b_s^2 ds, \quad \forall t \geq 0$$

Usando la notación introducida en la ecuación (2.11), enunciemos el *Teorema Fundamental del Cálculo Estocástico*, conocido en la literatura como *Lema de Itô*.

Teorema 12 (Lema de Itô) *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $\{X_t\}$ un proceso de Itô, i.e., $dX_t = a_t dt + b_t dB_t$. Entonces $f(X_t)$ es un proceso de Itô tal que*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dA_s + \int_0^t f'(X_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t \left(a_s f'(X_s) + \frac{1}{2} b_s^2 f''(X_s) \right) ds + \int_0^t b_s f'(X_s) dB_s \end{aligned} \quad (2.12)$$

para todo $t \geq 0$. En notación diferencial la fórmula anterior se escribe como

$$df(X_t) = \left(a_t f'(X_t) + \frac{1}{2} b_t^2 f''(X_t) \right) dt + b_t \frac{\partial f}{\partial x}(X_t) dB_t$$

Demostración: La demostración de este teorema sigue las ideas presentadas en (Karatzas y Shreve, 1991). Si tomamos los tiempos de parada

$$\tau_n = \begin{cases} 0, & \text{si } |X(0)| > n \\ \inf\{t : |M_t| \geq n \text{ o } A_t \geq n \text{ o } \langle M \rangle_t \geq n\}; & \text{si } |X(0)| \leq n \end{cases}$$

Es claro que $\tau_n \uparrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Notemos que si demostramos la relación (2.12) para el proceso $X_{t \wedge \tau_n}$ sobre $\{\tau_n > 0\}$, tomando el límite $n \uparrow \infty$ obtenemos la relación (2.12) para el proceso original X . Utilizando el argumento mencionado anteriormente podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la función f es de clase C^2 con soporte compacto y que los procesos $X_0, M_t, A_t, \langle M \rangle_t$ son acotados.

Fijemos un número real positivo $t > 0$, y consideremos la partición $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t\}$ del intervalo $[0, t]$. Aplicando el Teorema de Taylor a la función f , se tiene que

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^n \{f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}})\} \\
&= \sum_{k=1}^n f'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2
\end{aligned}$$

donde $\eta_k(w) = X_{t_{k-1}} + \theta_k(w)(X_{t_k}(w) - X_{t_{k-1}}(w))$ para algún $\theta_k(w) \in [0, 1]$ y $w \in \Omega$.

Entonces tenemos que

$$f(X_t) - f(X_0) = J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + \frac{1}{2} J_3(\Pi)$$

donde

$$J_1(\Pi) = \sum_{k=1}^n f'(X_{t_{k-1}})(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})$$

$$J_2(\Pi) = \sum_{k=1}^n f'(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})$$

$$J_3(\Pi) = \sum_{k=1}^n f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

Si denotamos por $\|\Pi\| = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0$, entonces tenemos que $J_1(\Pi) \rightarrow \int_0^t f'(X_s) dA_s$.

Definamos el proceso $Y_s(w) = f'(X_s(w))$, entonces existe una sucesión de procesos simples que converge a $Y_s(w)$. En este caso podemos construirla explícitamente de la siguiente manera

$$Y_s^\Pi(w) = f'(X_0(w))I_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^n f'(X_{t_{k-1}}(w))I_{(t_{k-1}, t_k]}(s)$$

Entonces, por la Proposición 6 tenemos que $[I^M(Y^\Pi - Y)] = \|Y^\Pi - Y\|_2^M \rightarrow 0$ cuando

$\|\Pi\| \rightarrow 0$, es decir

$$J_2(\Pi) = \int_0^t Y_s^\Pi dM_s \rightarrow \int_0^t Y_s dM_s = \int_0^t f'(X_s) dM_s$$

Finalmente, para ver a que $J_3(\Pi)$ converge lo dividiremos en tres partes,

$$J_3(\Pi) = J_4(\Pi) + J_5(\Pi) + J_6(\Pi)$$

donde

$$J_4(\Pi) = \sum_{k=1}^n f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})^2$$

$$J_5(\Pi) = \sum_{k=1}^n f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})$$

$$J_6(\Pi) = \sum_{k=1}^n f''(\eta_k)(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$$

Puesto que el proceso A es variación total acotada, denotemos por $R < \infty$ la constante que acota la variación total. Entonces tenemos que

$$|J_4(\Pi)| + |J_5(\Pi)| \leq 2R \|f''\|_{\infty} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |A_{t_k} - A_{t_{k-1}}| + \max_{1 \leq k \leq n} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| \right)$$

Como A y M son procesos estocásticos continuos, tenemos que $J_4(\Pi) \rightarrow 0$ y $J_5(\Pi) \rightarrow 0$ siempre que la norma de la partición tiende a cero, i.e., $\|\Pi\| \rightarrow 0$. Como siguiente paso demostraremos que $J_6(\Pi) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$. Para verificar que $J_6(\Pi) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$ usaremos el siguiente lema técnico, cuya demostración puede ser encontrada en (Karatzas y Shreve, 1991) e (Ikeda y Watanabe, 1981).

Lema 3 Sea $C > 0$ una constante tal que $|M_s| \leq C$, $s \in [0, t]$. Sea

$$V_l^2(\Pi) = \sum_{k=1}^l \{M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\}^2, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces $\mathbb{E}[V_n^2(\Pi)] \leq 12C^4$

El Lema 3 nos demuestra que si un proceso estocástico es acotado, entonces su variación cuadrática también será acotada.

Volviendo a la demostración del teorema principal, denotemos por $J_6^*(\Pi)$ la expresión

$$J_6^*(\Pi) = \sum_{k=1}^n f''(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$$

que al compararlo con $J_6(\Pi)$ se tiene

$$|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| \leq V_t^2(\Pi) \max_{1 \leq k \leq n} |f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})|$$

y utilizando la desigualda de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\mathbb{E}|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| \leq \sqrt{6K^4} \sqrt{\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})| \right)^2}$$

en la expresión anterior, K es una constante que acota a M , que es una martingala. Luego $\mathbb{E}|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| \rightarrow 0$ siempre que $\|\Pi\| \rightarrow 0$.

Definiendo la expresión

$$J_7(\Pi) = \sum_{k=1}^n f''(X_{t_{k-1}})(\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}})$$

Obtenemos que $\mathbb{E} \left[|J_7(\Pi) - \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s| \right] \rightarrow 0$ siempre que $\|\Pi\| \rightarrow 0$. Por último si demostramos que $J_6^*(\Pi)$ y $J_7(\Pi)$ tienen el mismo límite, luego se obtendrá que $J_3(\Pi) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$. Entonces

$$\mathbb{E} [|J_6^*(\Pi) - J_7(\Pi)|^2] = \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n f''(X_{t_{k-1}}) \{ (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}}) \} \right]^2 \right\}$$

pero

$$\mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n f''(X_{t_{k-1}}) \{ (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}}) \} \right]^2 \right\} \leq$$

$$\|f''\|_\infty^2 (\mathbb{E}[V_t^2(\Pi)^2])^{1/2} \left(\mathbb{E} \left[\max_{1 \leq k \leq n} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^4 \right] \right)^{1/2} +$$

$$\|f''\|_\infty^2 \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq k \leq n} (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}}) \langle M \rangle_t \right]$$

De la continuidad de M , tenemos que lo anterior tiende a cero siempre que $\|\Pi\| \rightarrow 0$. Esto demuestra que $J_3(\Pi) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$ en $\mathcal{L}_1(\Omega)$. Esto concluye la demostración. \square

Finalmente tenemos la versión del Lemma de Itô para el movimiento Browniano. Ver (Karatzas y Shreve, 1991)

Corolario 2 Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^2 y $\{B_t\}$ un movimiento Browniano. Entonces $f(t, B_t)$ es un proceso de Itô tal que

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s \quad (2.13)$$

para todo $t \geq 0$. En notación diferencial la fórmula anterior se escribe como

$$df(t, B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$$

Un resultado que será usado en el modelamiento del precio del petróleo es el siguiente, (ver (Karatzas y Shreve, 1991))

Corolario 3 Sea $\{B_t\}$ un movimiento Browniano, y sea $\Delta(t)$ una función no aleatoria del tiempo. Definamos

$$I_t = \int_0^t \Delta(s) dB_s.$$

Entonces, para todo $t \geq 0$ la variable I_t tiene distribución Gaussiana con media cero y varianza $\int_0^t \Delta^2(s) ds$

2.5. Discretización de Euler-Maruyama de una ecuación diferencial estocástica

En esta sección hacemos una breve introducción a la discretización ecuaciones diferenciales estocásticas. El objetivo de este trabajo no es desarrollar toda la teoría de aproximación, si no aplicarlar a un caso de estudio. En tal sentido solo desarrollamos y enunciamos las definiciones y los resultados que nos serán de utilidad y estén acorde con los objetivos de la tesis. El lector interesado en profundizar sobre aproximaciones de ecuaciones diferenciales estocásticas puede revisar (Kloeden y Platen, 1992).

Una forma simple de aproximar las trayectorias de la solución de una ecuación diferencial estocástico es la conocida *discretización de Euler-Maruyama*. Para introducir el método,

sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

sobre un intervalo de tiempo $t \in [t_0, T]$, y $X_{t_0} = x_0$. Consideremos la partición $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T\}$ en el intervalo $[t_0, T]$. **Una aproximación de Euler-Maruyama es un proceso estocástico $Y = \{Y_t : t \in [t_0, T]\}$ que satisface**

$$Y_{t_{k+1}} = Y_{t_k} + a(t_k, Y_{t_k})\Delta t_{k+1} + b(t_k, Y_{t_k})\Delta B_{t_{k+1}}$$

donde $\Delta t_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ y $\Delta B_{t_{k+1}} = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$, con $Y_0 = X_0$. De aquí en adelante consideraremos una partición equidistante, es decir $\delta = \frac{T - t_0}{n} = t_{k+1} - t_k$ para todo k , entonces $t_k = t_0 + k \cdot \frac{T - t_0}{n}$. De la Definición 6 del movimiento Browniano tenemos que

$$\Delta B_{t_{k+1}} = B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \sim N(0, \delta), \quad \forall k$$

De este modo, la aproximación de Euler-Maruyama se puede escribir de la siguiente forma

$$Y_{t_{k+1}} = Y_{t_k} + a(t_k, Y_{t_k})\delta + b(t_k, Y_{t_k})Z$$

donde $Z \sim N(0, \delta)$. Notemos que esta aproximación nos da una secuencia de puntos $\{Y_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Para construir un proceso estocástico sobre el intervalo $[t_0, T]$ construiremos un proceso estocástico continuo Y_t sobre el intervalo $t \in [t_0, T]$ a través de una interpolación lineal simple de los puntos que nos da la aproximación de Euler-Maruyama. Esto lo hacemos de la siguiente forma

$$Y_t^\delta = Y_{n_t} + \frac{t - t_{n_t}}{t_{n_t+1} - t_{n_t}}(Y_{n_t+1} - Y_{n_t})$$

donde $n_t = \max\{k : t_k \leq t\}$. El siguiente teorema dice que la aproximación de Euler-Maruyama converge a la solución de una difusión de Itô. Ver (Kloeden y Platen, 1992)

Teorema 13 Sea $X = \{X_t : t \in [t_0, T]\}$ una solución de la difusión de Itô $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$ con valor inicial X_{t_0} , y sea $Y^\delta = \{Y_t^\delta : t \in [t_0, T]\}$ una apro-

aproximación de Euler-Maruyama para $\delta > 0$. Entonces tenemos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|Y_t^\delta - X_t|^2] \right) = 0 \quad (2.14)$$

La condición (2.14) nos dice que la aproximación de Euler-Maruyama converge fuertemente a la solución de la SDE.

Capítulo III

Modelo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck para el precio del petróleo

Modelar los precios del petróleo no solamente sirve para entender la dinámica del proceso ni los factores que causan fluctuaciones en el precio, si no que principalmente se usa para poder evaluar y hacer pricing y de ciertos contratos financieros como los futuros y las opciones, así como para hacer hedging.

En esta sección describimos un modelo estocástico para el precio del petróleo que incluye la propiedad de reversión a la media introducida en el Capítulo 1 como hecho estilizado para el precio del crudo. Este proceso estocástico fue introducido por L. Ornstein y G. Uhlenbeck en (Uhlenbeck y Ornstein, 1930). Usamos dicho proceso para estudiar el comportamiento del precio del crudo, y que nos permita describir los datos observados en la serie de tiempo real. Para poder ajustar los datos reales al modelo construimos un modelo discreto partiendo de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. El modelo resultante es conocido como modelo autorregresivo de orden 1 ó AR(1). Es más, muchos autores consideran al modelo AR(1) como una versión discreta de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

3.1. Modelo Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck para el precio del petróleo

El modelo propuesto para el valor del crudo S_t está dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = k[\mu - \ln(S_t)]S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (3.1)$$

donde $\{B_t\}$ es un movimiento Browniano estándar. Para usar el Lema de Itô, Teorema 12, notemos que en este caso $a_t = k[\mu - \ln(S_t)]S_t$ y $b_t = \sigma S_t$. Además, consideremos la función $f(x) = \ln(x)$, donde se tendría

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Haciendo $X_t = \ln(S_t)$, y aplicando el Lema de Itô, Lema 12, tenemos

$$\begin{aligned} dX_t = df(S_t) &= \left(a_t f'(S_t) + \frac{1}{2} b_t^2 f''(S_t) \right) dt + b_t f'(S_t) dB_t \\ &= \left(a_t \frac{1}{S_t} - \frac{1}{2} b_t^2 \frac{1}{S_t^2} \right) dt + b_t \frac{1}{S_t} dB_t \\ &= \left(\frac{k[\mu - \ln(S_t)]S_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S_t^2}{S_t^2} \right) dt + \frac{\sigma S_t}{S_t} dB_t \\ &= \left(k[\mu - X_t] - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \\ &= k \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2k} - X_t \right] dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

De los cálculos anteriores se tiene que el **logaritmo del precio del petróleo es caracterizado por el siguiente proceso Ornstein-Uhlenbeck**

$$dX_t = k[\alpha - X_t]dt + \sigma dB_t, \quad (3.2)$$

donde $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2k}$, y $k > 0$ es la **velocidad de ajuste del proceso que mide el grado de reversión a la media a largo plazo α para el logaritmo del valor del petróleo. En**

el segundo término de (3.2), σ representa la volatilidad del precio del petróleo y B_t las fluctuaciones producidas por factores aleatorios en el mercado que no pueden ser anticipadas.

Para obtener una solución analítica del proceso de Ornstein-Uhlenbeck (3.2), denotemos por Z e Y a los siguientes procesos

$$\begin{aligned} Z_t &= e^{-kt} \\ Y_t &= (x_0 - \alpha) + \alpha e^{kt} + \sigma \int_0^t e^{ks} dB_s \end{aligned}$$

y definamos

$$X_t = Z_t Y_t = \alpha + (x_0 - \alpha)e^{-kt} + \sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks} dB_s. \quad (3.3)$$

Verifiquemos que este proceso es la solución analítica de la ecuación diferencial estocástica (3.2). Para esto, definamos la función de dos variables $f(t, x) = \alpha + (x_0 - \alpha)e^{-kt} + \sigma e^{-kt}x$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$, y el proceso estocástico $V_t = \int_0^t e^{ks} dB_s$. Aplicando la Fórmula de Itô, Teorema 12, tenemos que

$$df(t, V_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, V_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, V_t)dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, V_t)d\langle V \rangle_t, \quad (3.4)$$

De la definición de f tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -k(x_0 - \alpha)e^{-kt} - k\sigma e^{-kt}x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sigma e^{-kt}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

Observemos también que $dV_t = e^{kt}dB_t$. Entonces la variación cuadrática del proceso V_t será igual a $\langle V \rangle_t = e^{2kt}dt$. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.4) tenemos que

$$dX_t = \left[-k(x_0 - \alpha)e^{-kt} - k\sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks} dB_s \right] + \sigma dB_t = k[\alpha - X_t]dt + \sigma dB_t.$$

Demostrando que el proceso X_t satisface la ecuación (3.1).

Finalmente, de la ecuación (3.2) y del Lema 3 tenemos que el proceso X_t tiene distribución

Gaussiana con varianza y media dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_t] &= \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}) \\ \mathbb{E}[X_t] &= e^{-kt}x_0 + \alpha(1 - e^{-kt}). \end{aligned}$$

3.1.1. Propiedad de la reversión a la media para el precio del petróleo

Una propiedad deseada para ciertos activos financieros y la tasa de interés, que tiene el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, es la *reversión a la media*. Esta propiedad se presenta también a diferentes escalas de tiempo tanto el precio del petróleo como otros commodities. Por ejemplo en la Figura 3.1.1 observamos que el precio del petróleo presentó una fuerte reversión a US\$ 80.529 entre enero de 2011 y junio de 2014 y una reversión a la media de US\$ 36.88 entre julio de 2015 y octubre de 2021.

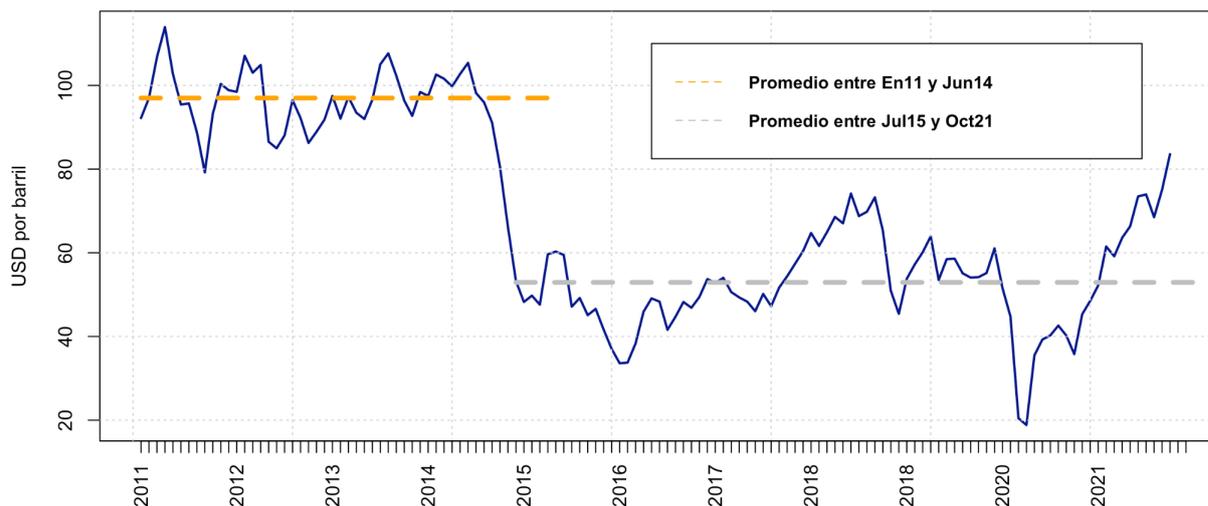


Figura 3.1: Propiedad de reversión a la media para el valor del petróleo. (*Fuente: Elaboración propia.*)

Teóricamente, en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, la propiedad de la reversión a la media puede ser replicada. Esto lo explicamos abajo:

- Cuando $X_t = \alpha$ el término del drift en la ecuación diferencial estocástica que la gobierna es cero. Entonces la fluctuación del proceso será gobernada solamente por la componente del Browniano.
- Cuando $X_t > \alpha$, el drift del proceso es negativo. Entonces, las trayectorias del proceso

serán empujadas hacia la media α .

- Cuando $X_t < \alpha$, el drift del proceso es positivo. Entonces, las trayectorias del proceso serán que empujadas el proceso hacia la media α .
- Si $X_0 = \alpha$, entonces $\mathbb{E}(X_t) = \alpha$ para todo $t \geq 0$.
- Si $X_0 \neq \alpha$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_t) = \alpha$. Esto nos dice que la media de largo plazo del proceso es igual a α .
- Si $X_0 \neq \alpha$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} Var[X_t] = \frac{\sigma^2}{2k}$.

3.2. Estimación de los parámetros

A partir de (3.2), tenemos que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = k[\alpha - X_t]dt + \sigma dB_t,$$

gracias al método de Euler Maruyama, explicado en la sección 4.5, tenemos la siguiente discretización del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

$$X_t = k\alpha \Delta t + (1 - k \Delta t)X_{t-1} + \eta_t, \quad (3.5)$$

donde $\eta_t = \sigma \Delta B_t$ es una familia de variables aleatorias i.i.d. con distribución Gaussiana con media cero y varianza $\sigma_\eta^2 = \sigma^2 \Delta t$. La discretización (3.5) es conocida como discretización de *Euler-Maruyama*, y esta fue introducida en la Sección 2.5. La discretización de Euler-Maruyama sirve para obtener una versión discreta de un proceso estocástico y poder simular trayectorias del proceso, y el Teorema 13 garantiza que dichas aproximaciones convergen a la solución. Para más detalles sobre el método de Euler-Maruyama aplicado a una difusión de Itô el lector puede revisar (Kloeden y Platen, 1992), (Ikeda y Watanabe, 1981), (Øksendal, 2014) y (Bayram, Partal, y Orucova, 2018).

Si N es la cantidad de observaciones en la serie de tiempo, entonces la versión discreta del proceso Ornstein-Uhlenbeck, la ecuación (3.5), **se puede escribir como un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1)**,

$$X_t = c + qX_{t-1} + \eta_t, \quad (3.6)$$

donde $\Delta t = \frac{1}{N}$, $c = \frac{k\alpha}{N}$, $q = 1 - \frac{k}{N}$ **y** $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ **con** $\sigma_\eta^2 = \frac{\sigma^2}{N}$. Escribiendo de forma recursiva el anterior modelo de serie de tiempo, tenemos que:

$$\begin{aligned} X_t &= c + q(c + qX_{t-2} + \eta_{t-1}) + \eta_t \\ &= c + qc + q^2X_{t-2} + q\eta_{t-1} + \eta_t \\ &= c + cq + cq^2 + q^3X_{t-3} + q^2\eta_{t-2} + q\eta_{t-1} + q\eta_t + \eta_t \\ &\vdots \\ &= c \sum_{j=0}^k q^j + q^{k+1}X_{t-k} + \sum_{j=0}^k q^j \eta_{t-j}. \end{aligned}$$

Primero, note que para un N suficientemente grande tenemos que $q = 1 - \frac{k}{N} < 1$. Entonces, esto significa que nuestro modelo AR(1) es estacionario de segundo orden, es decir, la media y la varianza son constantes y las autocovarianzas no dependen del tiempo t . Repitiendo el procedimiento anterior infinitas veces se tiene que la serie de tiempo puede escribirse en su forma de media móvil de orden infinito,

$$X_t = \frac{c}{1-q} + \sum_{k=0}^{\infty} q^k \eta_{t-k}.$$

Tomando esperanza a la expresión anterior tenemos que el promedio de la versión discreta del proceso de Ornstein-Uhlenbeck es igual a

$$\mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1-q} + \sum_{k=0}^{\infty} q^k \mathbb{E}[\eta_{t-k}] = \frac{c}{1-q}, \quad \forall t$$

y que la función de autocovarianza es igual a

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \eta_{t+h-j} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \eta_{t-k} \right) \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{j=0}^{\infty} q^j q^{j+h} = \frac{\sigma^2}{N} q^h \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} = \frac{\sigma^2 q^h}{N(1-q^2)}.\end{aligned}$$

para todo $h \geq 0$. Luego, la función de autocorrelación para el modelo de serie de tiempo AR(1) será igual a

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = q^h, \quad \text{para } h \geq 0.$$

Denotemos por $\mu = \mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1-q}$. Entonces, podemos escribir el proceso discreto de la siguiente manera

$$X_t - \mu = q(X_{t-1} - \mu) + \eta_t.$$

Ahora, utilizaremos el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros μ , q , σ_η^2 del modelo. Dada las observaciones x_1, \dots, x_N , primero necesitamos construir la función de verosimilitud

$$L(\mu, q, \sigma_\eta^2) = f_{\mu, q, \sigma_\eta^2}(x_1, \dots, x_N)$$

para estimar los parámetros. Para un modelo AR(1), los errores son no correlacionados, entonces función de verosimilitud se puede escribir de la siguiente forma (para más detalles ver (Tsay, 2005)):

$$L(\mu, q, \sigma_\eta^2) = f(x_1) f(x_2|x_1) \cdots f(x_N|x_{N-1}).$$

Además, como sabemos que las distribuciones condicionales $x_t|x_{t-1}$ tienen distribución normal, i.e., $x_t|x_{t-1} \sim N(\mu + q(X_{t-1} - \mu), \sigma_\eta^2)$, entonces

$$f(x_t|x_{t-1}) = f_\eta((X_t - \mu) - q(X_{t-1} - \mu)),$$

aquí f_η es una función de densidad de la variable η_t . Para hallar $f(x_1)$, usamos la represen-

tación

$$X_1 = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} q^j \eta_{1-j},$$

Entonces, observamos que x_1 es normalmente distribuida con media μ y varianza $\frac{\sigma_\eta^2}{1 - q^2}$. Finalmente, para el nuestro proceso AR(1) la función de verosimilitud es igual a

$$L(\mu, q, \sigma_\eta^2) = (2\pi\sigma_\eta^2)^{-n/2} (1 - q^2)^{1/2} \exp \left[-\frac{S(\mu, q)}{2\sigma_\eta^2} \right], \quad (3.7)$$

donde

$$S(\mu, q) = (1 - q^2)(x_1 - \mu)^2 + \sum_{t=2}^N [(X_t - \mu) - q(X_{t-1} - \mu)]^2 \quad (3.8)$$

Para estimar los parámetros del modelo es necesario construir estimadores consistentes, y para esto maximizamos la función de verosimilitud $L(\mu, q, \sigma_\eta^2)$. Usando las propiedades de la función exponencial, el problema de optimización que tenemos que resolver para estimar los parámetros μ y q usando la expresión (3.8) es equivalente a minimizar la función $S(\mu, q)$.

Si calculamos la derivada parcial de $\ln(L(\mu, q, \sigma_\eta^2))$ con respecto a σ_η^2 e igualando a cero, el resultado que obtenemos es que para algunos valores de μ y q , en el espacio de parámetros permitido, se tiene que la relación

$$\sigma_\eta^2 = N^{-1} S(\mu, q)$$

maximiza la función de verosimilitud.

En el caso de un modelo AR(1) se tiene la ventaja que condicionando sobre el valor inicial, se tiene un modelo lineal, es decir, podemos librarnos, en la función de máxima verosimilitud,

de los términos que causan no linealidad. Entonces, condicionando sobre x_1 , se tiene

$$\begin{aligned} L(\mu, q, \sigma_\eta^2) &= \prod_{t=2}^N f_\eta((X_t - \mu) - q(X_{t-1} - \mu)) \\ &= (2\pi\sigma_\eta^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left[-\frac{S_c(\mu, q)}{2\sigma_\eta^2}\right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $S_c = \sum_{t=2}^N [(X_t - \mu) - q(X_{t-1} - \mu)]^2$. La condición que maximiza esta función es

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = \frac{1}{N-1} S_c(\hat{\mu}, \hat{q}), \quad (3.10)$$

donde $\hat{\mu}$, \hat{q} son los valores que minimizan $S_c(\mu, q)$. Escribiendo $c = \mu(1 - q)$, la expresión $S_c(\mu, q)$ se minimiza para

$$\hat{c} = \bar{x}_{(2)} - \hat{q} \bar{x}_{(1)}, \quad (3.11)$$

donde

$$\bar{x}_{(1)} = (N-1)^{-1} \sum_{t=1}^{N-1} x_t \quad \text{y} \quad \bar{x}_{(2)} = (N-1)^{-1} \sum_{t=2}^N x_t$$

De los cálculos anteriores se tienen los estimadores de los parámetros

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{x}_{(2)} - \hat{q} \bar{x}_{(1)}}{1 - \hat{q}}, \quad (3.12)$$

$$\hat{q} = \frac{\sum_{t=2}^N (x_t - \bar{x}_{(2)})(x_{t-1} - \bar{x}_{(1)})}{\sum_{t=2}^N (x_{t-1} - \bar{x}_{(1)})^2}. \quad (3.13)$$

3.3. Aplicación empírica a los precios del petróleo

Para la aplicación empírica de este trabajo usaremos los precios del petróleo con periodo mensual entre julio de 2015 y octubre de 2021, donde tenemos $N = 76$ observaciones.

Usaremos el software R para obtener los parámetros, programando las fórmulas obtenidas en la sección anterior. Los resultados son mostrados en la siguiente tabla,

Cuadro 3.1: Estimación de los parámetros del modelo.

Parámetro	q	c	μ	α	k	σ
Estimación	0.979	0.0887	4.3315	4.3315	5.3680	0.5407
s.e.	(0.405)	(0.0321)	(1.253)	(1.248)	(1.124)	(0.077)

Entonces el modelo AR(1) quedaría de la siguiente forma

$$X_t = 0,0887 + 0,9795X_{t-1} + \eta_t,$$

con $Var[\eta_t] = 0,00712$. Para el caso continuo, usando los parámetros estimados y $N = 76$, tenemos que el modelo en tiempo continuo tendría la forma

$$dX_t = 5,3680(4,3315 - X_t)dt + 0,5407dW_t$$

A continuación presentamos las gráficas comparativas entre la trayectoria hallada por el algoritmo de Eule-Maruyama (que es un modelo AR(1) estacionario) y la solución analítica. También, usando el método de Euler-Mauryama, simulamos tres posibles trayectorias del comportamiento del precio del crudo, desde enero del 2015 hasta octubre del 2021. Estos gráficos se obtuvieron usando el software R para la simulación de trayectorias para los precios del petróleo. En la Figura 3.2 mostramos la comparación entre la trayectoria observada y la trayectoria ajustada usando la versión discreta del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, generada por el método de Euler-Maruyama. En la Figuras 3.3 mostramos la simulación de tres trayectorias para el valor del petróleo. Recordemos que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck no pretende replicar ni predecir la trayectoria del valor del petróleo, puesto que la probabilidad de seguir exactamente una trayectoria es igual a cero. Este tipo de modelo tiene como objetivo obtener el comportamiento medio de mediano y largo plazo para el precio, así como una banda de confianza para dicha media que se puede usar como un escenario positivo o negativo. En la Figura 3.4 comparamos la solución analítica, la aproximación numérica y la serie real de los valores del petróleo en el periodo estudiado.

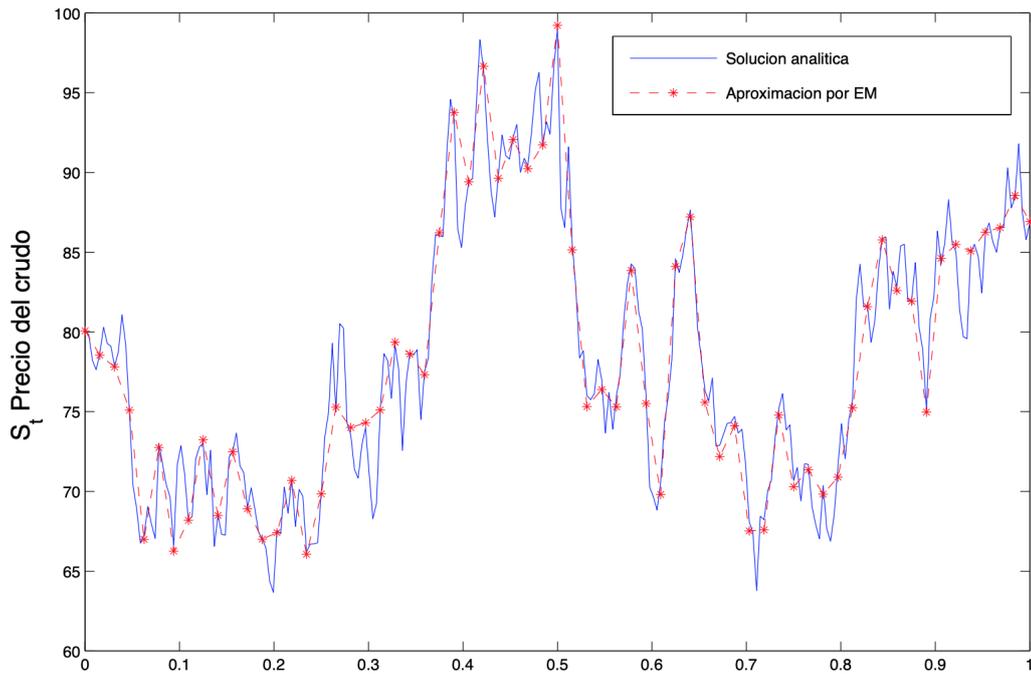


Figura 3.2: Comparación entre la solución analítica y la aproximación dada por el método de Euler-Maruyama. (Fuente: *Elaboración propia.*)

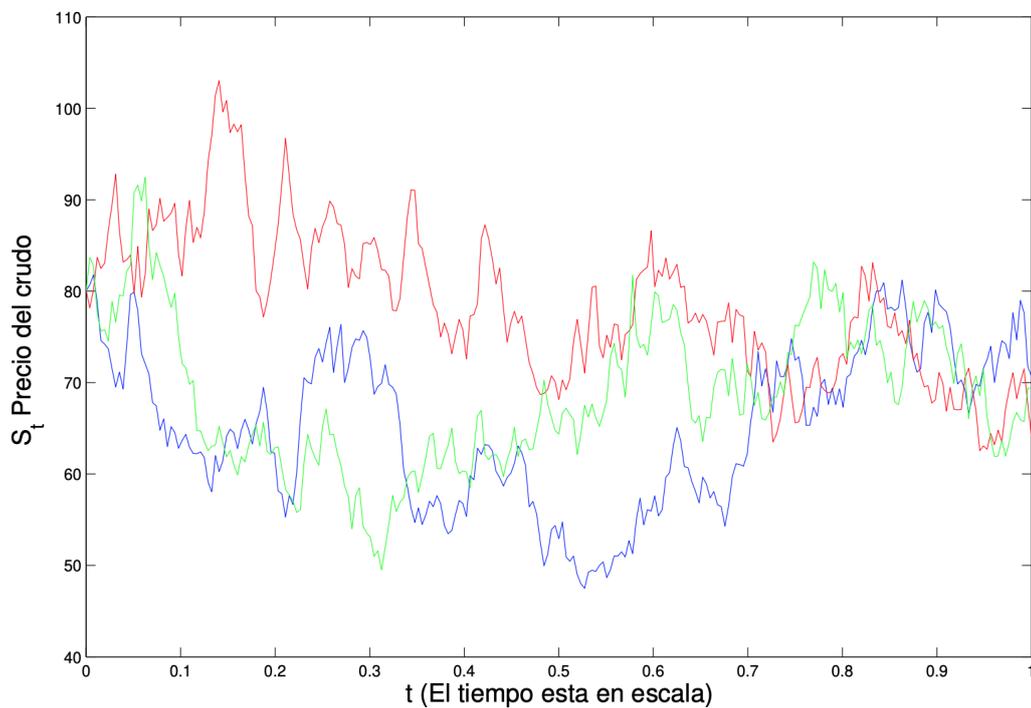


Figura 3.3: Trayectorias simuladas usando el método de Euler-Maruyama. (Fuente: *Elaboración propia.*)

Finalmente, en la Figura 3.5 mostramos la gráfica del promedio de 10000 posibles esce-

narios del precio del petróleo usando los parámetros estimados. Estas 10000 trayectorias fueron simuladas usando el método de Euler-Maruyama. En dicha gráfica observamos que este modelo predice una caída en el precio del barril de crudo a largo plazo y una posible reversión a la media en los últimos meses, pero notemos también que este modelo no predijo los elevados precios que adquirió el barril de crudo posterior a la crisis del Covid.

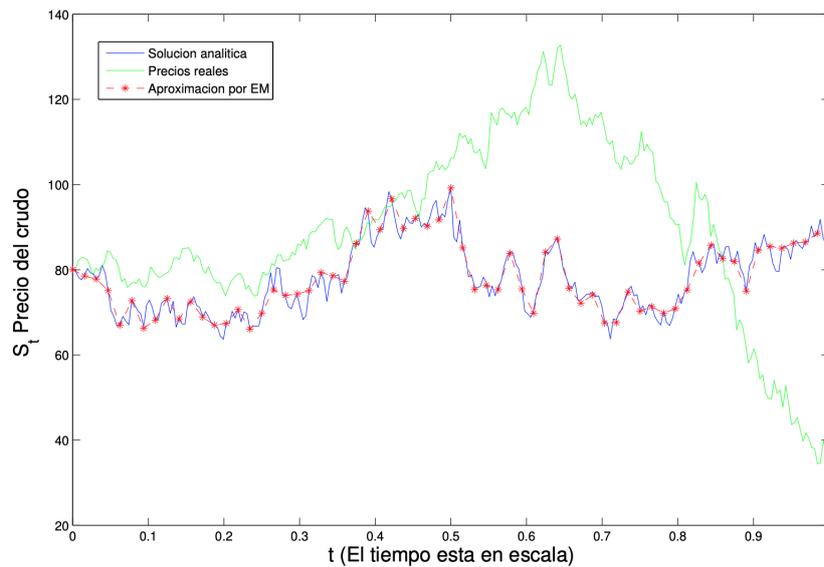


Figura 3.4: Comparación entre la solución analítica, la aproximación numérica y la serie de precios reales. (Fuente: *Elaboración propia.*)

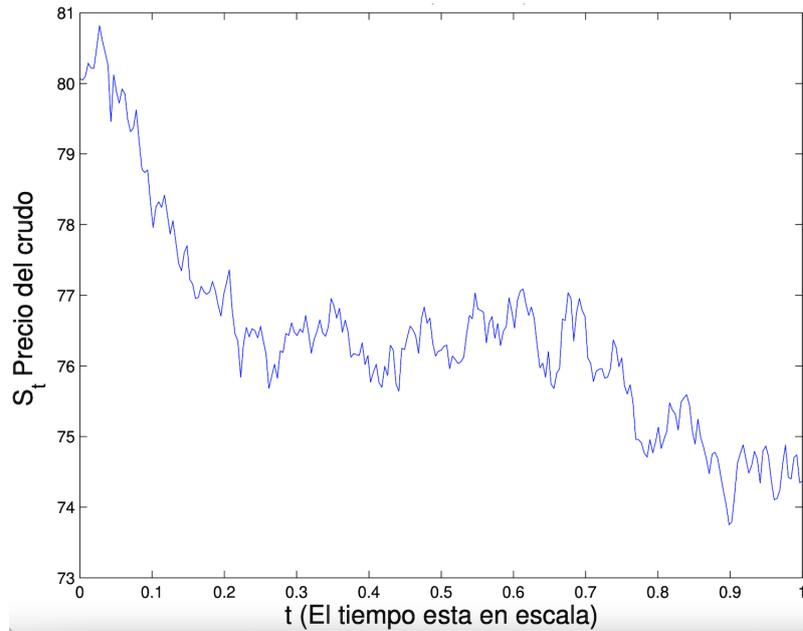


Figura 3.5: Trayectoria promedio de 100 trayectorias simuladas para los precios del barril de crudo. (Fuente: *Elaboración propia.*)

3.4. Código

Archivo `parametros.m`:

Este código en MATLAB calcula los parámetros del modelo propuesto, las fórmulas se encuentran en la página 66 de la tesis.

```
x=input('La serie de tiempo es:');
y = log(x 0 );
N = length(x);
xx(1) = (N - 1) ( - 1) * sum(y(1 : end - 1));
xx(2) = (N - 1) ( - 1) * sum(y(2 : end));
r = 0; p = 0;
for i = 2 : N
r = r + sum((y(i) - y(2)) * (y(i - 1) - y(1)));
p = p + sum((y(i - 1) - y(1)) 2 );
end
q = r/p;
```

```

c = xx(2) - q * xx(1);
mu = (xx(2) - q * xx(1))/(1 - q);
display('Los parametros q , c y mu de mi modelo AR(1) seran:')
disp(q) disp(c) disp(mu)
display('Los parametros a, k y sigma seran: ')
a = c/(1 - q);
k = N * (1 - q);
sc = 0;
for i = 2 : N
sc = sc + sum((y(i) - c - q * y(i - 1)) ^ 2 );
end
sigma=sqrt((N/(N - 1)) * sc);
disp(a) disp(k) disp(sigma)

```

Archivo em.m:

Este código en MATLAB simula posibles trayectorias para el precio del barril de crudo usando el método numérico para resolver EDE conocido como método de Euler-Maruyama.

```

randn('seed',100);
k = 5,3680; a = 4,3315; sigma = 0,5407; x0 = 4,3829;
T = 1; N = 2^8 ; dt = 1/N ; t = [dt : dt : T ];
dW = sqrt(dt) * randn(1, N );
W = cumsum(dW );

```

(Esta parte calcula la integral $\int_0^{t_i} e^{ks} dW_s$ para cada t_i)

```

S = zeros(1, N );
for i = 1 : N ito = sum(exp(k * t(1 : i)). * dW (1 : i));
S(i) = ito;
end

```

(Trayectoria exacta teórica) (Figura 5.4)

```

xv = a + (x0 - a) * exp(-k * t) + sigma * (exp(-k * t) . * S);
figure(1)
plot([0:dt:T],[x0,xv],'b-'), hold on
dtt=1/262;

```

(Trayectoria por Euler-Maruyama) (Figura 5.4)

```

R = 4; Dt = R * dt; L = N/R;
xem = zeros(1, L);
xtemp = x0;
for j = 1 : L
winc = sum(dW (R * (j - 1) + 1 : R * j));
xtemp = xtemp + k * (a - xtemp) * Dt + sigma * winc;
xem(j) = xtemp;
end
plot([0:Dt:T],[x0, xem],'r-*'), hold off
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('X','FontSize',16)
legend('Solucion analitica','Precios reales',
'Aproximacion por EM',3)

```

(M trayectorias posibles y promediar M trayectorias)

```

M = 100;
dB = sqrt(dt) * randn(M, N );
B = cumsum(dB, 2);
nt = dt * ones(M, N ); ant = cumsum(nt, 2); U = zeros(M, N );
for i = 1 : M
for j = 1 : N
ito = sum(exp(k * ant(i, 1 : j)) . * dB(i, 1 : j));
U (i, j) = ito;
end
end

```

```
end
```

(M trayectorias exactas)

```
J=a+(x_0-a)*exp(-k*ant)+sigma*(exp(-k*ant).*U);  
D = mean(J);  
figure(2)
```

(graficamos 3 caminos del precio del crudo) (Figura 5.3)

```
plot([0:dt:T],[exp(x0)*ones(1,1),exp(J(10,:))],'b-')  
hold on  
plot([0:dt:T],[exp(x0)*ones(1,1),exp(J(1,:))],'r-')  
plot([0:dt:T],[exp(x0)*ones(1,1),exp(J(3,:))],'g-')  
xlabel('t(El tiempo esta en escala)','FontSize',16)  
ylabel('S_t Precio del crudo','FontSize',16)  
figure(3)
```

(Comparación entre solución analítica y aproximación de los precios del crudo) (Figura 5.2)

```
plot([0:dt:T],[exp(x0),exp(xv)],'b-'), hold on  
plot([0:Dt:T],[exp(x0), exp(xem)],'r-*'), hold off  
xlabel('t (El tiempo esta en escala)','FontSize',16)  
ylabel('S_t Preciodelcrudo','FontSize',16)  
legend('Solucion analitica','Aproximacion por EM',2)
```

(Comparación entre solución analítica, Euler-Maruyama y los precios reales del crudo) (Figura 5.5)

```
figure(4)  
plot([0:dt:T],[exp(x0),exp(xv)],'b-'), hold on  
plot([dtt:dtt:T], x , 'g-') plot([0:Dt:T],[exp(x0), exp(xem)],'r-*'),  
hold off  
xlabel('t(El tiempo esta en escala)','FontSize',16)
```

```
ylabel('S_t Preciodelcrudo','FontSize',16)
legend('Solucion analitica','Precios reales','Aproximacion por EM',3)
figure(5)
plot([0:dt:T],[exp(x0) exp(D)],'b-')
ylabel('S_t Preciodelcrudo','FontSize',16)
xlabel('t(El tiempo esta en escala)','FontSize',16)
title('Promedio de 100 posibles trayectorias','FontSize',11)
```

Conclusiones y recomendaciones

Entender y modelar la dinámica del valor del petróleo es importante porque las variaciones del valor del barril de crudo influye fuertemente en la economía de un país, generando inestabilidad y reduciendo su capacidad productiva. En tal sentido, entender sus propiedades estadísticas es muy importante para modelar el precio de una mejor forma. Respecto a la propiedad de reversión a la media que tiene el valor del petróleo, como lo muestra la Figura 3.1.1, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, así como su versión discreta AR(1), modelan bien dicha propiedad en el corto y mediano plazo.

Las gráficas mostradas que simulan el comportamiento del precio del crudo predicen en cierto grado la tendencia real del precio, como se puede observar. Hay ventanas de tiempo donde la tendencia real es totalmente opuesta a la simulada. Pero esto se puede explicar al cambio abrupto que generalmente ocurre con los precios y estos cambios se deben a factores que se salen del comportamiento estocástico de los precios. En ventanas de tiempo donde el precio no tuvo cambios bruscos, las gráficas simuladas predicen la tendencia de los precios, pero no los precios reales, puesto que la desviación respecto a la data real es grande. Esto se puede explicar a que el intervalo de tiempo tomado fue muy amplio y no se realizó simulaciones en intervalos cortos para medir tendencias secundarias y terciarias. Además, predecir exactamente una trayectoria en modelos continuos tiene probabilidad cero. Observamos también que la tendencia primaria de la simulación es exactamente la misma que la serie de datos reales, una tendencia a la baja a largo plazo, con la diferencia que la serie real tiene una tendencia a la baja más abrupta, en el periodo estudiado.

Para poder modelar el precio del petróleo el cálculo estocástico demuestra ser una herramienta poderosa para poder representar la aleatoriedad y el comportamiento difusivo que

tiene el precio del petróleo. El presente trabajo desarrolla una teoría autocontenida sobre procesos estocásticos y cálculo estocástico para aplicarlo al estudio de la dinámica del precio del petróleo. Los resultados que se han obtenido en este trabajo de tesis confirman lo que otros estudios y papers más especializados y con teoría más sofisticadas obtuvieron sobre el modelamiento estocástico del valor del petróleo.

Para modelar y predecir mejor el comportamiento del valor del petróleo es necesario incorporar otros factores que influyen en la dinámica del precio, como efectos de oferta y demanda del commodity. Este tipo de análisis se escapa de los objetivos de este trabajo, pero para un mejor análisis se recomienda fuertemente hacerlo.

Finalmente, como trabajo futuro se recomienda aplicar este tipo de modelos para el valor del petróleo, no solamente para modelar la dinámica y las fluctuaciones del precio, si no también para hacer pricing de otros derivados financieros que tienen al petróleo como activo subyacente.

Referencias

- Akgiray, V., Booth, G., y Loistl, O. (1989). Stable laws are inappropriate for describing german stock returns. *Al legemeines Statistisches*, 73(2), 115–121.
- Athreya, K., y Lahiri, S. (2006). *Measure theory and probability theory*. Springer, New York.
- Bayram, M., Partal, T., y Orucova, G. (2018). Numerical methods for simulation of stochastic differential equations. *Adv Differ Equ*, 17, 650–705.
- Billingsley, P. (1999). *Convergence of probability measures*. Wiley, New York.
- Brzezniak, S., y Zastawniak, T. (1999). *Basic stochastic processes*. Springer.
- Cerda-Hernaández, J., y Sikov, A. (2021). *Teoría de riesgo para seguros*. EDUNI.
- Cochrane, J. H. (2009). *Asset pricing: Revised edition*. Princeton university press.
- Cognigni, A., y Manera, M. (2008). Oil prices, inflation and interest rates in a structural cointegrated var model for the g7 countries. *Energy Economics*, 30(3), 856-888. doi: <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2006.11.001>
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Ikeda, N., y Watanabe, S. (1981). *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North Holland, Amsterdam.
- Jevenal, L., y Ivan, P. (2015). Speculation in the oil market. *Journal of Applied Econometrics*, 30, 621–649.
- Karatzas, I., y Shreve, S. (1991). *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer.
- Kloeden, P. E., y Platen, E. (1992). *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer Berlin, Heidelberg.

- Koedijk, K. G., Schafgans, M. M., y De Vries, C. G. (1990). The tail index of exchange rate returns. *Journal of international economics*, 29(1-2), 93–108.
- Lee, H.-S., Cheng, F.-F., y Chong, S.-C. (2016). Markowitz portfolio theory and capital asset pricing model for kuala lumpur stock exchange: A case revisited. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 6(3S).
- Longin, F. M. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of business*, 383–408.
- Munk, C. (2013). *Financial asset pricing theory*. OUP Oxford.
- Murat, G., y Gazanfer, U. (2012). Crude oil price modelling with lévy process. *International journal of Economics and finance studies*, 4(2), 139-49.
- Øksendal, B. (2014). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (Universitext)* (6th ed.). Springer.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Amaral, L., Gabaix, X., y Stanley, H. E. (2000). Economic fluctuations and anomalous diffusion. *Physical Review E*, 62(3), R3023.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Amaral, L., Meyer, M., y Stanley, H. E. (1999). Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies. *Physical review e*, 60(6), 6519.
- Resnick, S. (1999). *A probability path*. Birkhauser Boston.
- Ross, S. (2004). *Stochastic processes*. Wiley (Asia), Singapore.
- Ross, S. (2005). *Introduction to probability models*. Elsevier India, New Delhi.
- Schwartz, E. S. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, 52(3), 923-973.
- Shiryaev, A. N. (1996). *Probability* (2th ed.). Springer.
- Swishchuk, A., y A., S. (2016). Pricing crude oil options using l'évy processes. *Journal of Energy markets*, 47-63.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series* (Vol. 543). John wiley & sons.
- Uhlenbeck, G. E., y Ornstein, L. S. (1930, septiembre). On the Theory of the Brownian Motion. *Physical Review*, 36(5), 823-841. doi: 10.1103/PhysRev.36.823
- Zhao, H. (2019). Chapter five - energy security: From energy independence to energy

interdependence. En H. Zhao (Ed.), *The economics and politics of china's energy security transition* (p. 99-120). Academic Press. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815152-5.00005-1>