

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA



TESIS

**ESTRATEGIA DE OFERTA ÓPTIMA DE LOS
GENERADORES EN UN MERCADO ELÉCTRICO
HIDROTÉRMICO DE CORTO PLAZO BASADO EN OFERTAS
LIBRES**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN ENERGÉTICA**

**ELABORADO POR
JEAN PAÚL LOZANO PÉREZ**

ASESORES

Dr. ELADIO OCAÑA ANAYA

Dr. JAIME LUYO KUONG

LIMA - PERÚ

2020

*Dedicado a
mi familia*

Resumen

A partir de la década de 1990 se ha intensificado a nivel internacional el proceso de liberalización de los mercados de energía. Y aunque algunas reglas para el despacho de energía y la formación de precios son distintas en cada país o región donde se ha implementado un mercado eléctrico competitivo; la mayoría incorpora un mercado mayorista de energía eléctrica de corto plazo basado en subastas donde se compran y venden grandes bloques de energía. En este tipo de mercado, las compañías de generación eléctrica (GENCOs) buscan maximizar su beneficio económico producto de su participación y para esto elaboran y presentan al operador del mercado que también opera el sistema físico en la mayoría de casos (ISO - *Independent System Operator*), ofertas estratégicas de precio por unidad de energía (\$/MWh) y cantidad de energía (MWh) que desean vender por cada unidad generadora que administran y para cada periodo de tiempo preestablecido por el ISO. Conocer las estrategias de participación de las GENCOs también es importante para el ente regulador del mercado, ya que necesitan identificar a las compañías que tienen la capacidad de alterar el precio de despeje del mercado a partir de sus ofertas estratégicas. A estas compañías se les conoce usualmente como compañías creadoras de precio (*price maker*) y tienen la capacidad de ejercer poder de mercado (*market power*).

En este trabajo de investigación se desarrolla una metodología alternativa basada en la optimización matemática para determinar la oferta óptima de precio por unidad de energía (\$/MWh) y cantidad de energía (MWh) que debe ofertar una compañía de generación eléctrica creadora de precios para maximizar sus ingresos económicos cuando compite en un mercado hidrotérmico mayorista de corto plazo (Mercado de día en adelante - *Day-ahead market*) basado en ofertas libres (subastas). El modelo matemático formulado tiene una estructura de optimización binivel (*bi-level optimization problem*) donde el problema líder o primer nivel del problema (upper level) representa la maximización del beneficio económico (*profit maximization*) de la compañía en cuestión, considerando las restricciones técnicas

de las unidades generadoras que administra y las restricciones asociadas a los reservorios (embalses) de las centrales hidroeléctricas que opera desde el punto de vista determinístico. El problema seguidor o segundo nivel (lower level) corresponde al despacho económico ejecutado por el operador independiente del sistema (*ISO, independent system operator*) quien busca minimizar el costo total de operación del sistema manteniendo en todo momento el balance oferta - demanda de energía. Este problema será formulado como un problema de optimización lineal de variables continuas, sin considerar las restricciones de las redes de transmisión (sistema uninodal).

El problema binivel formulado es transformado en un problema de optimización cuadrático no-convexo de un solo nivel conocido como problema matemático con restricciones de equilibrio (*MPEC, Mathematical Problem with Equilibrium Constraints*) utilizando para ello las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker para el problema seguidor. El problema cuadrático resultante es resuelto mediante la aproximación a un Problema de Optimización Lineal Entero Mixto (MILP) a través de la transformación algebraica de la función objetivo a una expresión lineal usando el teorema de dualidad fuerte (*strong duality condition*) y a través de la discretización de las variables de oferta de precio y oferta de energía. La solución global del problema MILP resultante es hallado usando solvers comerciales y es de utilidad para fines prácticos tanto de las compañías generadoras y de las instituciones reguladoras del mercado de electricidad.

Agradecimientos

I want to thank the Concytec-Fondecyt for their support to my research activities in the field of energy at the Mechanical Engineering School of the UNI.

Índice

Índice de Figuras	vii
Índice de Tablas	ix
1 Introducción	1
1.1 La Electricidad y sus Características Particulares	1
1.2 Mercado Eléctrico	4
1.2.1 Mercado Eléctrico Mayorista Basado en Ofertas Libres	7
1.3 El Problema del Productor de Electricidad	10
1.3.1 Estrategia de Oferta Óptima	10
1.4 Planteamiento del Problema	14
1.4.1 Motivación y Justificación	14
1.4.2 Formulación del Problema	15
1.4.3 Objetivos de la Investigación	15
1.4.3.1 Objetivo General	15
1.4.3.2 Objetivos Específicos	16
2 Marco Teórico de la Optimización Binivel	17
2.1 Optimización	17
2.1.1 Teoría de Dualidad en la Programación Lineal	21
2.2 Optimización Binivel	23
3 Estrategia de Oferta Óptima en Mercados Competitivos de Energía de Corto Plazo	28
3.1 Introducción y Descripción General del Problema	29
3.2 Formulación Matemática del Problema	30

3.2.1	Despacho Económico (Market Clearing - Economic Dispatch)	31
3.2.2	Estrategia de Oferta Óptima	34
3.2.2.1	Caso 1: Mercado eléctrico puramente térmico	35
3.2.2.2	Formulación Matemática	39
3.2.3	Programa Matemático con Restricciones de Equilibrio (MPEC)	41
3.2.4	Formulación Lineal Equivalente	44
3.2.5	Datos y Resultados Computacionales	48
4	Estrategia de Oferta Óptima de Generadores en un Mercado Hidrotérmico de Corto Plazo Basado en Ofertas Libres	57
4.1	Introducción	57
4.1.1	El Problema del Productor Hidroeléctrico y el Costo de Oportunidad	58
4.2	Formulación Matemática del Problema	61
4.2.1	Despacho Económico en un Sistema Hidrotérmico	64
4.2.2	Maximización del Beneficio Económico de la Compañía Estratégica .	65
4.2.3	Modelo Binivel del Problema de Estrategia de Oferta Óptima	66
4.2.4	Programación Matemática con Restricciones de Equilibrio MPEC . . .	68
4.2.5	Formulación Lineal Equivalente	73
4.2.6	Datos y Resultados Computacionales	81
5	Conclusiones, Aportes y Sugerencias Para Trabajos Futuros	88
5.1	Aportes	92
5.2	Trabajos futuros	93
A	Artículo TECNIA - UNI	95
B	Código y resultado AMPL	107

Índice de Figuras

1.1	Evolución del problema de oferta óptima	12
1.2	Problemática del mercado mayorista Peruano	15
2.1	Función convexa y no-convexa	18
2.2	Esquematización de un problema de optimización binivel	24
3.1	Esquematización del despacho económico	33
3.2	Esquema de maximización del beneficio económico	38
3.3	Proceso de decisión del agente price maker	40
4.1	Esquematización del problema binivel	61

Índice de Tablas

2.1	Conversión de un problema primal a su dual	22
3.1	Datos para un despacho económico simplificado	35
3.2	Estrategia de $G5$ y $G1$ buscando el despacho total de energía	37
3.3	Estrategia de $G5$ y $G1$ buscando el despacho parcial de energía	37
3.4	Capacidad de generación del sistema de prueba 1	49
3.5	Costo promedio de producción de energía	49
3.6	Datos de las unidades generadoras de la compañía estratégica	50
3.7	Ofertas de las unidades generadoras que no pertenecen a la compañía estratégica	50
3.8	Partición de ofertas Precio - Energía para $K_1 = K_2 = 6, 7$ y 8	51
3.9	Asignación de generación (MWh)	52
3.10	Ofertas de precio estratégicas (\$/MWh)	52
3.11	Ofertas de energía (MWh)	53
3.12	Precio de despeje del mercado (\$/MWh)	53
3.13	Beneficio económico de la compañía Estratégica(\$)	53
3.14	Variables duales π_j^g	54
3.15	Asignación de generación en oferta pura de precios (MWh)	55
3.16	Precio de despeje del mercado en oferta pura de precios (\$/MWh)	55
3.17	Ofertas de precio estratégicas (\$/MWh)	56
3.18	Variables duales π_j^g	56
4.1	Horizontes temporales usados en el modelamiento del problema de producción hidroeléctrico	59
4.2	Datos de las centrales hidroeléctricas del sistema considerado	81
4.3	Datos de la central termoeléctrica	81
4.4	Ofertas iniciales de las compañías competidoras	82

4.5	Oferta estratégica para GENCO 1 - modelo no-lineal	82
4.6	Despacho económico hidrotérmico - modelo no-lineal	83
4.7	Volumen del reservorio, caudal vertido y caudal turbinado	83
4.8	Datos de entrada para el modelo MILP	84
4.9	Oferta estratégica para GENCO 1 - Modelo MILP	84
4.10	Despacho económico hidrotérmico - Modelo MILP	85
4.11	Volumen del reservorio, caudal vertido y caudal turbinado - MILP	85
4.12	Oferta estratégica para GENCO 1 - No lineal mejorado	86
4.13	Despacho económico hidrotérmico - No lineal mejorado	86
4.14	Volumen del reservorio, caudal vertido y caudal turbinado - No lineal mejorado	87

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo presentamos una revisión general del funcionamiento de un sistema eléctrico de potencia desde el punto de vista físico, operacional, económico y regulatorio. Luego se identifica el problema a investigar, se proponen los objetivos del estudio, el alcance de la presente investigación y la metodología a seguir.

1.1 La Electricidad y sus Características Particulares

La energía eléctrica es fundamental en las sociedades modernas. Su suministro impacta directamente en el desarrollo social y económico de una comunidad. El crecimiento económico con el consumo de energía eléctrica en una nación van siempre de la mano. Por esta razón, es fundamental que el suministro sea realizado de un modo continuo, abundante, seguro, confiable, eficiente, económico y ambientalmente amigable [1].

Con el fin de lograr estos objetivos se siguen desarrollando en cada país complejas infraestructuras técnicas con un sistema económico y regulatorio asociado cada vez más difícil de analizar y diseñar. En este contexto, se hace necesario una continua investigación y discusión de la problemática del sector en particular del diseño de mercados eléctricos.

Para muchos investigadores, la energía eléctrica es considerada como un commodity y como tal este se compra y se vende tanto como potencia y energía, con varios atributos que se comercializan dentro de un mercado organizado (mercado eléctrico). Sin embargo, la energía por su propia naturaleza tiene algunas características únicas que lo distinguen de casi todos los demás commodities [2].

- En primer lugar, la electricidad no puede almacenarse en grandes cantidades ni inventariarse. Por lo tanto, la electricidad tiene que ser generada y transmitida al mismo tiempo que es consumida. En todo momento debe mantenerse el equilibrio entre la generación (oferta) y la demanda caso contrario la frecuencia se saldría de los límites operativos y pondría en riesgo todo el sistema eléctrico. El hecho de que la demanda de energía eléctrica tenga que ser satisfecha en tiempo real tiene dos implicancias importantes. Primero, se necesita contar con una capacidad de generación instalada que pueda satisfacer la demanda máxima del sistema en tiempo real y la segunda es que se necesita contar con capacidad de reserva en caso de que se produjese eventos inesperados como fallas de las centrales de generación.
- En segundo lugar, es importante considerar la peculiaridad de la electricidad para su transporte ya que este no puede ser empaquetado ni etiquetado. Llevar la energía eléctrica desde los centros de generación hacia los centros de consumo requiere de extensas redes de transmisión y distribución que interconectan todo el sistema y tienen que funcionar sincronizadamente como un todo integrado. Una vez inyectada la energía eléctrica al sistema, la ruta por la que se transmite esta energía no puede ser elegida a voluntad, este es determinado por las leyes físicas de Kirchhoff donde la distribución de corriente depende de la impedancia en las líneas de transporte y los otros elementos a través del cual fluye la electricidad. Las leyes físicas establecen además que las distintas rutas de transmisión son altamente interdependientes, esto significa que cualquier cambio en la red de transmisión (problemas de congestión causado por incrementos súbitos de la demanda, conexión o desconexión de cargas, fallas inesperadas en las redes de transmisión, etc) causa una reconfiguración instantánea del flujo de carga y esto puede causar efectos significativos en las otras instalaciones del sistema interconectado. Excepto casos muy simples, todo lo que podemos conocer es la cantidad de energía eléctrica que es inyectada al sistema en un nodo o barra y la cantidad de energía que es retirado del sistema en otro nodo. Una analogía interesante es considerar al sistema de transmisión interconectado como una piscina (pool), todos los generadores inyectan energía al pool en nodos determinados y las cargas retiran la energía del pool en nodos determinados. En este contexto, es imposible distinguir quien retira la energía de quien y no es posible garantizar la ejecución física de los contratos bilaterales en el sentido estricto. Finalmente, desde el punto de vista económico es importante mencionar que

las actividades de transporte de energía eléctrica (transmisión y distribución) implican generalmente grandes costos de inversión.

- En tercer lugar, en el sector eléctrico existen diversas tecnologías para la generación de energía eléctrica. Algunas de ellas como las grandes centrales hidroeléctricas o centrales de generación nuclear, requieren ingentes inversiones para su construcción pero tienen menores costos operativos lo que las hace adecuadas para abastecer grandes cantidades de energía. Otras tecnologías, como la generación termoeléctrica basada en combustibles fósiles, tienen menores costos de inversión pero presentan altos costos variables de operación, por lo que en principio son adecuados para abastecer pequeñas o medianas cantidades de energía. En los últimos años la disminución del costo de inversión y operación de centrales de generación basados en recursos renovables no convencionales (solar y eólico) está impulsando a que muchos países los incorporen de manera apreciable dentro de su parque generador. Finalmente se puede decir que de acuerdo a la disponibilidad de recursos de cada nación o región todas las tecnologías mencionadas y otras más pueden ser combinadas para lograr un suministro seguro y eficiente de energía eléctrica al menor costo posible. [2]

Como consecuencia de las características mencionadas es necesario distinguir entre la operación física del sistema para mantener el equilibrio dinámico oferta-demanda en tiempo real y las transacciones económicas producto de la compra-venta de energía eléctrica. Garantizar el abastecimiento seguro, estable y confiable en tiempo real requiere usualmente de una institución independiente y reconocida por todos los agentes participantes del mercado eléctrico que se encargue exclusivamente de la operación del sistema físico con independencia de los acuerdos comerciales que puedan existir entre generadores y consumidores [1].

Como se puede apreciar, un mercado eléctrico es un sistema económico complejo, en su diseño se deben tomar en cuenta todas las características técnicas y económicas mencionadas, estableciendo las funciones de los diferentes agentes, las transacciones factibles entre los agentes, los mecanismos de operación física del sistema interconectado, los mecanismos de formación de precios en el mercado y los mecanismos de regulación.

1.2 Mercado Eléctrico

El funcionamiento de la industria eléctrica en cualquier país del mundo se basa en 4 actividades principales: generación, transmisión, distribución y comercialización.

Tradicionalmente todas estas actividades era realizado y administrado por una sola compañía, usualmente una compañía estatal. Esto significaba que las decisiones de operación del sistema e inversión en nueva infraestructura era ejecutada de manera centralizada teniendo como único objetivo la minimización del costo total de operación del sistema respetando todas las restricciones técnicas y asegurando un nivel satisfactorio de confiabilidad. Subsistía la idea de que era difícil coordinar la generación de energía eléctrica y la transmisión como empresas separadas, además de la necesidad de planificar de manera conjunta las inversiones en nueva infraestructura. Este modelo, denominado modelo verticalmente integrado, funcionó razonablemente bien durante la mayor parte del siglo XX, permitiendo atender aumentos rápidos de la demanda. Sin embargo, la ausencia de competencia provocó en muchos casos una pérdida de miedo al riesgo, generando muchas veces excesos de inversión en capacidad, malas decisiones en la elección de tecnologías y fuentes primarias, politización de los procesos de inversión y grandes dificultades en los procesos de regulación por la evidente asimetría de información [1].

Desde la segunda mitad de los años 80, producto de un cuestionamiento generalizado sobre la eficiencia de los monopolios estatales en las empresas de servicios públicos, el proceso de liberalización económica de la industria eléctrica ocupa un lugar destacado en los programas político-energéticos de muchos países. Con el fin de atraer la inversión privada, promover la competencia y mejorar la eficiencia económica del sector, en la mayoría de países pioneros en las reformas, se propuso primero una reestructuración del sector con varias medidas, entre ellas la privatización como actividades diferenciadas (generación, transmisión, distribución y comercialización) y promoción de la competencia donde este sea posible, manteniéndose el Gobierno sólo como regulador y supervisor del sistema [3].

La competencia en la industria eléctrica significa generalmente competencia en la producción (generación) de electricidad y en la actividad de comercialización. Las actividades de transporte de electricidad (transmisión y distribución) no pueden ser competitivos, estos son monopolios naturales ya que no resulta económico ni ambientalmente amigable construir multiples líneas de transmisión que compitan entre ellas por el transporte de la energía. Estos tienen que servir a todos y tienen que ser regulados para evitar sobrecargos en el

servicio [1].

Uno de los principales cambios producto de la liberalización es la aparición de mercados eléctricos competitivos con reglas de funcionamiento claras, estables y una regulación adecuada y efectiva que permita una interacción equilibrada entre todos los agentes participantes del mercado. A todo esto se conoce como diseño del mercado eléctrico.

La implementación de un mercado eléctrico competitivo trae consigo la formación de un mercado eléctrico mayorista (*wholesale electricity market*). En este mercado, todas las compañías generadoras que forman parte del sistema eléctrico de potencia compiten entre si en condiciones similares para vender la energía eléctrica que producen a las empresas distribuidoras, comercializadoras y/o a los grandes consumidores. Las redes de transmisión son el sistema físico (pool) abierto a todos que permite el funcionamiento de un mercado mayorista con libre competencia donde se negocian grandes bloques de energía.

En algunos países, las empresas distribuidoras, además de operar físicamente las redes de distribución se encargan de comercializar la energía eléctrica en zonas urbanas. Los pequeños usuarios finales no pueden elegir libremente a sus suministradores de electricidad y están obligados a comprarle energía a la distribuidora dueña de la concesión de su zona de residencia. Las distribuidoras, en representación de todos sus clientes compran grandes bloques de energía en el mercado mayorista.

Por otro lado, en mercados eléctricos más desarrollados, además del mercado mayorista se establece el funcionamiento del mercado minorista (*retail electricity market*). En este tipo de mercado aparece la figura de comercializador minorista (retailers) y los consumidores finales ya pueden elegir libremente a sus suministradores de energía (retailers), escogiéndolas de acuerdo a su conveniencia (bajo precio y calidad). En algunos casos, las mismas empresas distribuidoras pueden participar como comercializadoras minoristas, mientras que en otros casos están limitadas a sus funciones de operación de las redes de distribución. Las empresas comercializadoras y/o distribuidoras compiten entre ellas para la venta de energía a los usuarios finales. La red de distribución es el sistema físico que permite el funcionamiento de este mercado minorista.

Cada país establece un diseño de mercado eléctrico mayorista particular de acuerdo a sus propias características y circunstancias; sin embargo, el modelo de subasta gestionado por un organismo central reconocido por todos los agentes participantes del mercado eléctrico (*Modelo Power Pool*), es el modelo base presente en la mayoría de mercados eléctricos

liberalizados actualmente en funcionamiento. En el Power Pool, todas las compañías generadoras interesadas en la venta de energía eléctrica deben presentar al operador del mercado pares de oferta precio - capacidad de generación para diferentes intervalos temporales, con lo que se forma una curva agregada de oferta. Los precios ofertados por las generadoras pueden estar basados en costos variables auditados y predeterminados (*cost-based power pool*) o en ofertas libres de precios (*bid-based power pool o price-based power pool*) [4].

En un mercado eléctrico mayorista basado en costos, todos los agentes productores de electricidad (generadores) ofertan al operador del sistema sus costos marginales de operación el cual es auditado por el regulador del sistema que usualmente es una institución pública. Basado en los costos marginales declarados por los generadores, el operador del sistema resuelve diariamente el problema de operación óptima del sistema conocido también como el problema de despacho económico buscando minimizar el costo total de operación del sistema sin ninguna intervención de los generadores. Es decir, se opera todo el sistema como si tuviera un único dueño. En este contexto, el precio de despeje del mercado o precio spot está dado por el costo marginal de operación de todo el sistema (CMO), que es la variable dual asociada a la restricción de balance de oferta - demanda total en el problema de operación al mínimo costo. El CMO representa el costo de atender 1 MWh adicional de demanda y es el precio spot cuando los agentes ofertan sus costos marginales de operación sin ninguna estrategia de oferta y sin considerar sus compromisos contractuales. Este modelo de operación centralizada es propio de mercados que no son desregulados en el sentido estricto de la palabra como en Brasil, Perú, Chile y algunos mercados eléctricos de América Central.

El problema de operación óptima del sistema para un mercado eléctrico hidrotérmico basado en costos es un problema clásico y bien estudiado. La solución es desarrollada usando programación dinámica dual estocástica (*Stochastic Dual Dynamic Programming, SDDP*) propuesto en [5].

Por otro lado, en un **mercado basado en ofertas libres**, las compañías generadoras no necesitan revelar ni declarar sus costos marginales de operación. En este modelo, todos los generadores entregan ofertas al operador del sistema basados en sus propias estrategias. Estas ofertas conocidas en inglés como bids, son pares de precio y capacidad de generación para diferentes intervalos temporales, estas ofertas finalmente se esquematizan como curvas precio - cantidad, los cuales reflejan la energía que algún generador está dispuesto a vender por un precio determinado en un intervalo de tiempo específico. Muchos países como Estados

Unidos, Nueva Zelanda adoptaron este modelo de mercado eléctrico desregulado.

1.2.1 Mercado Eléctrico Mayorista Basado en Ofertas Libres

Este tipo de mercado tiene como pilar fundamental para su funcionamiento el mercado de día en adelante (*day-ahead market*), el mercado en tiempo real (*real time market*) y el mercado de servicios auxiliares (*ancillary services markets*). El mercado de día en adelante está basado en el concepto de subasta (*auction based framework*). La subasta implica que el operador independiente del sistema (ISO) procese los precios más bajos posibles para la energía a ser vendida por los generadores.

Según Maurer y Barroso [6], una subasta se realiza con tres reglas: ofertas (*bidding*), despeje (*clearing*) y pagos (*pricing*). Y aunque cada país implementa este mercado con sus propias particularidades, podemos considerar un esquema general con las principales características. En el mercado de día en adelante, los productores de energía eléctrica compiten entre si ofreciendo las mejores ofertas de precio y capacidad de generación disponible. El precio de despeje del mercado (*market-clearing price*) y la cantidad de energía que finalmente será producida por cada generador se establecen de la siguiente manera [6] [7]:

1. Ofertas : En esta etapa, los agentes generadores, basados en sus propias estrategias y metodologías, ofertan libremente al operador del sistema (ISO) curvas de precio por unidad de energía (\$/MWh) y capacidad de producción disponible (MWh) que desean inyectar al sistema en diferentes intervalos temporales del día siguiente. En algunos mercados, la demanda también participa con ofertas de cantidad y precio, reflejando su disposición a comprar energía en cada intervalo de tiempo.
2. Despeje : En esta etapa, el operador del sistema establece que agentes generadores serán despachados y que cantidad de energía inyectarán al sistema. Para lograr esto, el operador del sistema resuelve el problema de despacho económico para cada hora del día siguiente. El objetivo de este problema es buscar el menor costo total de operación del sistema que permita mantener el balance entre la oferta de generación y demanda total requerida. El precio del generador más caro despachado que permite cubrir la demanda establece el costo marginal del sistema también conocido como precio spot. Este precio será el precio de despeje del mercado para una hora determinada (*market-clearing price*). Esto corresponde al bien conocido formato de subasta de precio uniforme que

es generalmente adoptado en los mercados de electricidad desregulados.

3. Pago : En esta tercera etapa, los agentes generadores son pagados por la cantidad de energía que despacharon de acuerdo al precio de despeje del mercado. Toda la energía necesaria para cubrir la demanda es pagado al precio spot, sin importar el orden de mérito de los agentes que son parte del despacho económico establecido por el ISO en el ítem 2.

En un esquema bastante simplificado e ilustrativo, considerando que todos los productores de energía que participan en el mercado de día en adelante son agentes tomadores de precio, el ISO que para nuestro caso será el operador del mercado y operador del sistema, resuelve el siguiente problema de despacho económico. Para eliminar confusión, usaremos letras mayúsculas para representar a los parámetros y las letras minúsculas para representar a las variables.

Índices y Conjuntos

$i = 1, \dots, J$ - Índice que representa a los generadores de energía en el sistema

Parámetros

P_i - Precio ofertado por el productor i , se asume conocido [\$/MW]

E_i - Potencia ofertada por el productor i , se asume conocido [MW]

D - Demanda total en el mercado [MW]

Variables de Decisión

g_i - Potencia inyectada al sistema por el productor i [MW]

π_d - Precio de despeje del mercado [\$/MW]

$$\begin{array}{ll}
 \min_{g_j} & \sum_{i=1}^J P_i g_i \\
 s.t & \sum_{i=1}^J g_i = D \quad (\leftarrow \pi_d) \\
 & g_i \leq E_i \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, J \\
 & g_i \geq 0 \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, J
 \end{array}$$

Al resolver este problema, se determina el conjunto de generadores que inyectarán energía al sistema para cubrir la demanda en un intervalo de tiempo dado. El conjunto g_i ; $i = 1, \dots, J$ con $g_i \geq 0$ es la variable que representa la potencia que será inyectada por cada

generador despachado. Por otro lado, π^d es la variable dual (valor marginal o precio sombra) de la restricción de balance de carga total y representa el precio de despeje del mercado de día en adelante (precio spot).

Notemos que el modelo descrito anteriormente corresponde a una versión simplificada del problema. Si quitamos la consideración de que todos los productores son tomadores de precio, la formulación del problema se vuelve más complicada ya que debemos considerar en el modelo, cómo el precio de despeje del mercado (market-clearing price) puede cambiar en base a las ofertas de los agentes creadores de precio (price maker producers' bids). Si consideramos además las restricciones de las líneas de transmisión, el precio de despeje del mercado ya no será único para todo el sistema. En cada nodo es posible obtener un precio sombra, lo que en la literatura se llama precios marginales locales (LMPs).

Un número importante de mercados eléctricos competitivos en el mundo incorpora el mercado de día en adelante en su funcionamiento, por ejemplo: el PJM (USA), New England (USA), Nord Pool (Países Nórdicos), Nueva Zelanda y el recientemente reformado mercado eléctrico Mexicano. Esto demuestra la funcionalidad y madurez de este tipo de mercado. Por otro lado, es importante mencionar que una cantidad muy significativa de energía que requiere el mercado eléctrico mayorista para su correcto funcionamiento diario es asignado a través del mercado de día en adelante [8].

Al modelar un entorno de mercado desregulado basado en ofertas libres como el que proponemos en esta tesis se afronta una dificultad importante: El efecto del poder de mercado [9]. Puede ocurrir que algún agente o un grupo de agentes, posean una proporción significativa de capacidad de generación de energía y tengan así la capacidad de manipular los precios a voluntad, en esta situación estaremos frente a un oligopolio como efectivamente suelen ser los mercados eléctricos reales.

Los productores de energía que pueden alterar el precio de despeje del mercado del día en adelante con sus ofertas son denominados creadores de precio (*price-makers*). Por otro lado, aquellos productores que no tienen influencia en los precios producto de sus ofertas son denominados tomadores de precio (*price-takers*).

Para su participación en el mercado de día en adelante los productores de electricidad afrontan el problema de elaborar estrategias de oferta óptima que les permita maximizar sus beneficios [8]. Este problema, para el caso de los tomadores de precio es usualmente denominado problema de oferta óptima (*bidding problem*) [10], mientras que el mismo pro-

blema para los creadores de precio es denominado problema de oferta óptima estratégica (*strategic bidding problem*) ya que necesitan considerar el impacto de sus propias ofertas en el precio de despeje del mercado establecido por el operador central del mercado. Luego de la implementación de mercados desregulados basados en ofertas libres, se desarrolló exhaustiva investigación referente principalmente al problema de participación óptima que afrontan los agentes tomadores de precio (*price-takers*). Recientemente, hay creciente interés en desarrollar modelos aplicables a agentes creadores de precio [11]. Por otro lado, los operadores del sistema (ISOs) y las instituciones reguladoras también necesitan conocer apropiadamente los modelos de oferta óptima para regular aunque sea mínimamente el mercado y evitar el ejercicio de poder de mercado que puede reflejarse en precios abusivos de la energía eléctrica.

1.3 El Problema del Productor de Electricidad

El beneficio económico que cada compañía generadora de energía eléctrica obtiene por su participación en el mercado de día en adelante, depende de su habilidad para administrar sus ofertas de precio por unidad de energía (\$/MWh) y cantidad de energía (MWh) que ponen a disposición del mercado para cada una de sus unidades de producción. Las GENCOs deberán elaborar una estrategia para determinar los pares de ofertas óptimos que les permita maximizar su beneficio económico. Este problema se complica cuando en el mercado existen agentes generadores creadores de precio (*price makers*), debido a que estos pueden alterar el precio de despeje del mercado (precio spot) modificando sus ofertas. En este contexto, ya estaremos frente a un problema cíclico en el que las ofertas de algunas compañías afectan el precio de despeje del mercado y este precio a su vez afecta las ofertas que realizan las compañías.

1.3.1 Estrategia de Oferta Óptima

A continuación, presentamos una revisión de los diferentes modelos propuestos en la bibliografía para el problema de oferta óptima en el mercado de día en adelante de un mercado eléctrico mayorista desregulado basado en ofertas libres por el lado de los generadores. Así, identificamos el trabajo que queda por hacer para mejorar los modelos y discutimos los desafíos que deben superarse, teniendo en cuenta además que muy pocos investigadores estudian este problema en un contexto de un mercado hidrotérmico donde hay múltiples

compañías capaces de influir con sus ofertas en el precio de despeje del mercado (*multiple price-makers*).

El problema de oferta óptima en general puede ser abordado de diferentes maneras, dependiendo de la escala de tiempo del problema, la naturaleza de los agentes, creadores de precio o tomadores de precio y la naturaleza de las plantas de generación (plantas termoeléctricas o hidroeléctricas).

En la figura 1.1 tomada de [11] se esquematiza un resumen de las diferentes técnicas usadas para modelar y resolver las diferentes variantes del problema de oferta óptima. Explicamos el esquema a continuación: Un modelo interesante fue propuesto por Gross y Finlay en [12] y permite entender el comportamiento de agentes termoeléctricos tomadores de precio. En este trabajo no analizan el efecto de las ofertas de los productores de electricidad en el precio de despeje del mercado y tampoco considera la existencia de centrales de generación hidroeléctrica. En el trabajo propuesto por Gjelsvik en [13] analizan el comportamiento de productores hidroeléctricos tomadores de precio tomando en cuenta la dependencia temporal de los reservorios de agua y proponen un modelo lineal estocástico multietapa para este problema. Considerar el comportamiento de agentes termoeléctricos creadores de precio adiciona complejidad al problema ya que se obtiene un modelo no-lineal y no-convexo. Diferentes algoritmos heurísticos y procedimientos iterativos fueron propuestos para intentar resolver este problema, el más interesante es el trabajo propuesto por M. Pereira y su equipo en [14] ya que propone un procedimiento para aproximar el problema original mediante un problema de programación lineal entero mixto. En este último trabajo no consideran las características de los reservorios de agua al modelar el comportamiento de agentes hidroeléctricos. Considerar agentes hidroeléctricos creadores de precio, capaces de alterar el precio de despeje del mercado hacer aún más difícil el problema. Una primera propuesta para modelar agentes hidroeléctricos creadores de precio tomando en cuenta la dependencia temporal de los flujos de agua y el almacenamiento de agua se encuentra en [15]. Los autores formulan el problema usando la optimización dinámica dual estocástica (SDDP).

Para un mercado de día en adelante, no es posible analizar el problema de oferta óptima (*optimal bidding*) sin considerar el problema de la programación de la producción de las compañías generadoras (*producer's scheduling problem*). El resultado de resolver el problema de la programación de la producción a largo y mediano plazo, debe ser usado en los modelos de programación a corto plazo para determinar el conjunto de ofertas óptimas que

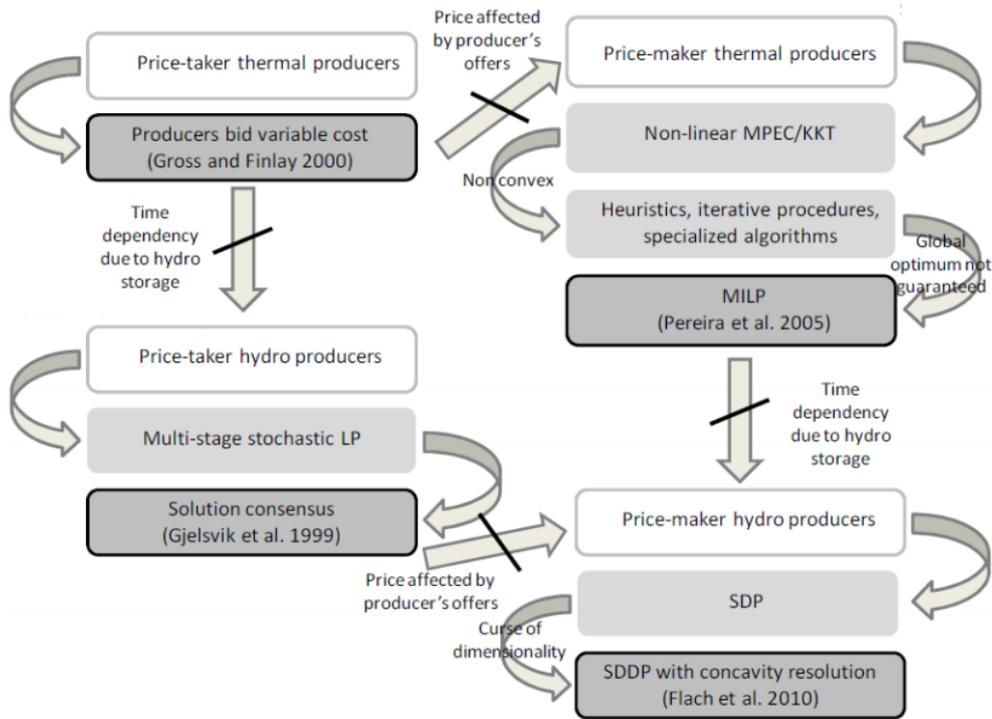


Figura 1.1: Evolución del problema de oferta óptima

será presentado por las compañías generadoras al mercado de día en adelante (*day-ahead bids*). Los productores de electricidad deciden estas ofertas en función a sus costos marginales de producción, que para el caso de los generadores hidroeléctricos es desconocido. Resolver el problema de la programación de la producción para los productores hidroeléctricos (*hydro producer's scheduling problem*) ofrece una aproximación del costo marginal de operación de dicha compañía [11].

Por otro lado, el problema de la producción de cada compañía generadora está estrechamente conectado al problema de operación del sistema el cual está basado en las ofertas diarias que presentan los productores. Para sistemas hidrotérmicos, el problema de operación centralizada es un problema no trivial cuya solución ya puede ser bien establecido [5].

Dependiendo de la naturaleza del sistema, hidrotérmico para nuestro caso, el problema de la producción tiene peculiaridades especiales que no son tratados en la bibliografía existente. El problema de la producción hidrotérmica es considerablemente más complejo debido a que hereda el planteamiento básico de un sistema puramente térmico y agrega otras dificultades propias como el acoplamiento temporal y los procesos estocásticos involucrados en el flujo de agua que entra a los embalses producto de las lluvias [11].

Si consideremos un sistema eléctrico, donde todos los agentes generadores son productores

termoeléctricos tomadores de precio. El problema de oferta óptima se reduce a su versión más simple. No hay acoplamientos temporales y no hay poder de mercado ejercido por los agentes generadores. Una revisión detallada de los trabajos realizados en este contexto puede encontrarse en [8], [16], [17].

Para un mercado eléctrico compuesto solamente por agentes termoeléctricos tomadores de precio, Gross *et al.* [12] presenta una solución bastante completa recurriendo a ideas económicas. Muestra que la estrategia de oferta óptima de los generadores es ofertar la capacidad de generación con el costo variable de operación asociado. Por lo tanto, el precio spot que resulta del despeje del mercado en un mercado eléctrico competitivo basado en ofertas libres convergerá al precio de despeje que se obtendría en un mercado eléctrico centralizado basado en costos (*cost based pool*).

La energía hidroeléctrica es la fuente de energía renovable más importante y ampliamente usada. Con este recurso se genera casi el 18% de la energía eléctrica que se consume en el mundo [18]. China es el mayor productor de hidroelectricidad, seguido por Canadá, Brasil y Estados Unidos [19].

En América del Sur, la generación hidroeléctrica ocupa un lugar preponderante en la capacidad de generación instalada: Chile (30%), Colombia (69%), Brasil (65%), Perú (50%) [21]. En la mayoría de estos países aún queda un buen potencial hidroeléctrico aprovechable a diferencia de USA y los países europeos que ya agotaron su capacidad de generación con este recurso y ahora incentivan el uso masivo de nuevas tecnologías renovables de generación (solar, eólica). Estas nuevas tecnologías, aunque usan recursos renovables limpios, son de generación intermitente y es necesario el uso de grandes sistemas de almacenamiento o de plantas de respaldo con buena flexibilidad en la capacidad de regular su producción para mantener la confiabilidad en el suministro. Las hidroeléctricas pueden ofrecer esta flexibilidad. Por las razones mencionadas, es lógico que en Latinoamérica la generación hidroeléctrica siga ocupando un rol significativo dentro del parque de generación eléctrica.

La economía de recursos agotables viene siendo estudiada desde algunos siglos. Esta área de la economía busca determinar cómo consumir un recurso de stock fijo de manera óptima. Consumo en este contexto, se refiere a la producción, generación o extracción de un recurso. La programación (schedule) óptima del consumo de un recurso a lo largo del tiempo puede realizarse buscando maximizar los ingresos, maximizar el beneficio, minimizar costos, o minimizar algún efecto negativo producto del consumo del bien.

La hidroelectricidad es una fuente renovable que usa tecnologías maduras y eficientes. Sin embargo, este tipo de generación depende de la disponibilidad del agua el cual puede considerarse como un recurso de stock fijo almacenado en los embalses. En este sentido, es necesario el desarrollo de métodos más eficientes para modelar la participación de la generación hidroeléctrica en mercados eléctricos competitivos.

1.4 Planteamiento del Problema

1.4.1 Motivación y Justificación

Después de la reforma del sector eléctrico peruano con la promulgación de la Ley de Concesiones Eléctricas en 1992, se han ido observando mejoras en la productividad, acceso y reducción de pérdidas eléctricas en las redes posibilitando la mayor participación de agentes privados y promoviendo así la competencia principalmente en el sector de generación [21]. En los últimos años se están evidenciando graves fallas asociados principalmente al diseño del mercado eléctrico. Así, en noviembre del 2016 OSINERGMIN (Organismo Supervisor de la Inversión en Energía y Minas) presentó resultados preliminares del diagnóstico de la problemática actual del sector eléctrico en el Perú. El asesor académico del estudio fue el reconocido Profesor David Newbery del Cambridge Economic Policy Associates (CEPA). Los especialistas identificaron 6 problemas directamente relacionados al diseño actual del mercado, principalmente lo relacionado al mercado mayorista. En la figura 1.2 se muestra el mapa conceptual de los principales problemas identificados [22].

Considerando la problemática actual, se deben discutir los cambios necesarios en busca de un diseño de mercado eléctrico moderno, eficiente, transparente y adaptado a las características del Perú.

Un mercado eléctrico competitivo basado en ofertas libres (*bid-based markets*) sería una buena alternativa para implementarlo en el Perú, debido a la madurez y al éxito alcanzado en algunos países: PJM (Estados Unidos), New England (Estados Unidos), Canada, Nueva Zelanda, Noruega. Recientemente México realizó reformas a su mercado eléctrico tomando como referencia el éxito alcanzado en estos mercados.

Aunque existen diversas propuestas de modelamiento y análisis de un mercado eléctrico, estos son aplicables a mercados con características específicas o abordan aspectos teóricos generales. En este sentido, hay una falencia de herramientas aplicables al análisis de un mer-

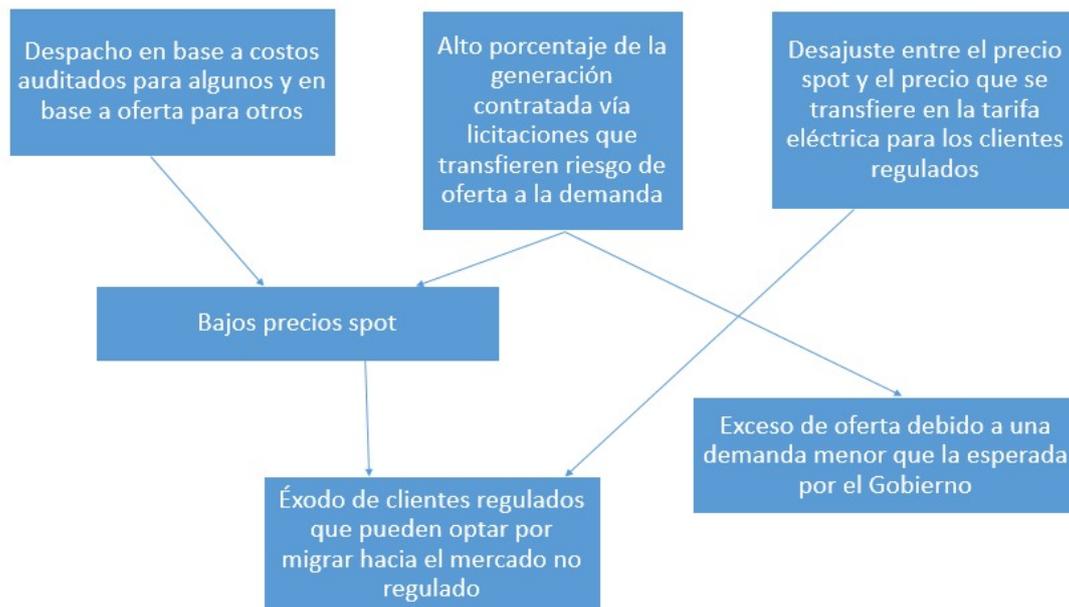


Figura 1.2: Problemática del mercado mayorista Peruano

cado eléctrico competitivo basado en ofertas libres con generación hidrotérmica predominante [23].

En general, el diseño de un mercado eléctrico liberalizado y el creciente interés de usar fuentes de energía renovables con tecnologías eficientes motiva el desarrollo de esta investigación.

1.4.2 Formulación del Problema

¿Cuál es la estrategia de oferta óptima (oferta de precio por unidad de energía y cantidad de energía para cada unidad de generación) con la que una compañía generadora de electricidad creadora de precios maximiza su beneficio económico cuando compite en un mercado hidrotérmico mayorista de corto plazo basado en ofertas libres?

1.4.3 Objetivos de la Investigación

1.4.3.1 Objetivo General

En el contexto de un mercado eléctrico tipo subasta del lado de la oferta (*bid-based markets*). El objetivo general de este trabajo de investigación es:

Desarrollar una metodología **para** determinar la estrategia de oferta óptima (oferta de precio por unidad de energía y cantidad de energía) que le permita a una compañía generadora de electricidad (GENCO) creadora de precios maximizar su beneficio económico cuando compite

en un mercado hidrotérmico mayorista de corto plazo basado en ofertas libres (*day-ahead market*).

1.4.3.2 Objetivos Específicos

- Modelar el comportamiento de una empresa de generación creadora de precios que compite en un mercado eléctrico mayorista de corto plazo basado en subasta por el lado de la oferta.
- Desarrollar una metodología para resolver el problema de estrategia de oferta óptima de una compañía generadora creadora de precios que compite en un mercado mayorista de día en adelante.
- Modelar y resolver el problema de estrategia de oferta óptima de una empresa de generación creadora de precio cuando compite en un mercado eléctrico mayorista hidrotérmico de día en adelante.
- Aplicación a casos de prueba y verificación de la metodología.

Capítulo 2

Marco Teórico de la Optimización

Binivel

Un problema de optimización general implica la maximización o minimización de una función objetivo, sujeto a ciertas restricciones. Este tipo de problemas se encuentran en una diversidad de áreas del conocimiento humano como la ingeniería (e.j. maximización de eficiencia, maximización de producción), logística (e.j. minimización de tiempo de reparto), economía (maximización del beneficio, minimización de riesgos) y otros. Si el problema tiene una sola función objetivo, este se conoce como problema de optimización de un solo nivel, pero si se tiene varios objetivos en conflicto se conoce como problema de optimización multiobjetivo. En este capítulo se explicarán los conceptos principales de la optimización matemática. El objetivo es establecer los principales resultados de optimalidad, para aplicarlo en la solución de nuestro problema de investigación.

2.1 Optimización

Optimizar desde el punto de vista matemático es el proceso de seleccionar el mejor elemento en un conjunto que cumple condiciones específicas.

Definición 2.1.1 *Un problema de optimización matemática consiste en minimizar o maximizar una función. Es decir, dada una función $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ con $P \subseteq \mathbb{R}^n$, se puede encontrar un elemento $x^* \in P$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in P$ en el caso de minimización, o $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in P$ en el caso de maximización.*

El conjunto P se denomina **conjunto factible**, $x \in P$ es el vector de variables de decisión denominado **solución factible** y $x^* \in P$ se conoce como **solución global o punto optimal**. En optimización con restricciones, el conjunto P es usualmente descrito por desigualdades o igualdades de la forma $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$ respectivamente con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$. La forma estandar de escribir un problema de optimización es [24].

$$\begin{aligned} \min_{x \in P} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, r \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observación 2.1.1: Un problema de minimización de $f(x)$ es equivalente a maximizar $-f(x)$, esto es conocido por el **principio de dualidad**.

Definición 2.1.2 Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **afín** si $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ para unos ciertos $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **lineal** si es afín y además $c_0 = 0$

Definición 2.1.3 Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si, para todo par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \leq (1 - \lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y})$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

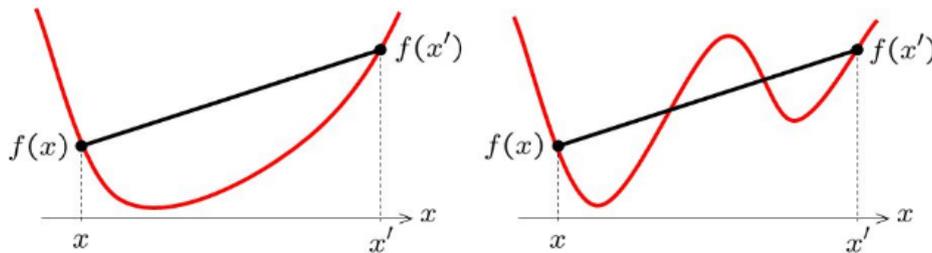


Figura 2.1: Función convexa y no-convexa

Teorema 2.1.1 Una función **afín** (en particular lineal) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

Definición 2.1.4 Se dice que un conjunto $P \in \mathbb{R}^n$ es **convexo** si, para todo par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$, se tiene que $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in P$ para todo $\lambda \in [0, 1]$

La interpretación geométrica de esta definición es que dados dos puntos cualesquiera de P , si la recta que une estos dos puntos está completamente contenida en P entonces el conjunto es convexo; caso contrario será no-convexo.

Definición 2.1.5 *Un problema de programación matemática es convexo si y solo si f es una función convexa y el conjunto factible P es un conjunto convexo.*

La complejidad de un problema de optimización matemática dado por (2.1) depende de las características de las funciones f , g y h . Por ejemplo, si f , g y h son funciones lineales, (2.1) es un problema de programación lineal. Si f y g son funciones convexas y h es una función afín, entonces (2.1) es un problema de optimización convexa. Notemos que los problemas de optimización lineal son casos especiales de los problemas de optimización convexa. Cualquier otro problema de optimización que no sea lineal será denominado no-lineal.

A continuación algunos ejemplos:

- Programación lineal

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}} \quad & 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ \text{s.t:} \quad & 4x_1 + 2x_2 - 30 \leq 0 \\ & x_1 + 2x_3 - 6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Programación no-lineal

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}} \quad & 7x_1x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t:} \quad & 3x_1 + 2x_2^2 - 20 \leq 0 \\ & x_1 - x_3 - 6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Programación convexa

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}} \quad & 3x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \\ \text{s.t:} \quad & 2x_1^2 - 3x_2^2 - 1 \leq 0 \\ & x_1 + x_3 - 12 = 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2 *En un problema de optimización convexa (en particular en cualquier problema de programación lineal), todo óptimo local es también óptimo global.*

Definición 2.1.6 Dado el siguiente problema de optimización matemática

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in P} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Dado un vector $\mathbf{x} \in P$ se define el conjunto $I(\mathbf{x}) = \{i : g_i(\mathbf{x}) = 0\}$. Dichas restricciones se denominan restricciones saturadas en el punto \mathbf{x} .

Teorema 2.1.3 (Condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker) Consideremos el siguiente problema de optimización matemática

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

suponiendo que \mathbf{x} es un punto factible tal que

- f y g_i con $i \in I(\mathbf{x})$ son diferenciables en \mathbf{x}
- $h_j, \forall j$ son continuamente diferenciables
- g_i con $i \notin I(\mathbf{x})$ son continuas en \mathbf{x}
- Los vectores $\nabla g_i(\mathbf{x})$ con $i \in I(\mathbf{x})$ y $\nabla h_j(\mathbf{x}), \forall j$ son linealmente independientes.

Si \mathbf{x} es un mínimo local, entonces existen escalares únicos $\mu_i, \forall i \in I(\mathbf{x})$ y $\nu_j, \forall j$ tales que:

- $\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in I(\mathbf{x})} \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \nu_j \nabla h_j(\mathbf{x}) = 0$
- $\mu_i \geq 0$ para todo $i \in I(\mathbf{x})$

Las condiciones KKT nos proporcionan unas condiciones necesarias para que un punto sea un óptimo local en cualquier problema de programación matemática. En problemas de programación lineal, estas condiciones son también suficientes para mínimo y para máximo. [25].

2.1.1 Teoría de Dualidad en la Programación Lineal

En esta sección enunciaremos los teoremas de dualidad débil y dualidad fuerte. Estos teoremas se enuncian para cualquier problema de optimización matemática, sin embargo aquí trabajaremos los teoremas de dualidad aplicados a la programación lineal ya que es lo que usaremos en el desarrollo de nuestra investigación.

Definición 2.1.7 *Cualquier problema de optimización lineal se puede expresar de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coeficientes de la función objetivo, $\mathbf{A} \in M_{m \times n}$ matriz de coeficientes de las restricciones y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vector de los términos independientes.

Teorema 2.1.4 *En un problema de optimización lineal, si el vector $\mathbf{c}^T \neq \lambda \mathbf{1}$ (\mathbf{c}^T no es proporcional al vector formado por unos) entonces el punto optimal \mathbf{x}^* es único.*

De acuerdo al teorema anterior, si encontramos que dos elementos del vector \mathbf{c}^T son diferentes entonces podremos concluir automáticamente que la solución optimal \mathbf{x}^* es única.

Definición 2.1.8 *Dado un problema de optimización lineal*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Se define el problema dual de este problema como

$$\begin{aligned} \max_{\pi} \quad & \pi^T \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T \pi = \mathbf{c} \end{aligned}$$

Podemos anotar algunas relaciones que hay entre el problema primal y el problema dual y que serán importantes para el desarrollo de nuestro trabajo.

- El problema dual tiene tantas variables como restricciones tiene el problema primal
- El problema dual tiene tantas restricciones como variables tiene el problema primal

- Los términos independientes de las restricciones del problema dual son los coeficientes de la función objetivo del problema primal.
- Los coeficientes de la función objetivo del problema dual son los términos independientes de las restricciones del problema primal.
- La matriz de coeficientes del problema dual es la transpuesta de la matriz de coeficientes del problema primal.
- Si el problema primal es de minimización, el problema dual asociado será de maximización.
- El problema dual de un problema dual es el problema primal original.

Hemos definido el problema dual para un problema de optimización lineal expresado en la forma mostrada en la definición 2.1.7. Cualquier problema de optimización lineal se puede expresar en esa forma. Sin embargo, se puede construir directamente el dual de un problema de optimización lineal con restricciones de igualdad, desigualdad y con variables mayores, menores o iguales que 0. Para esto podemos seguir las indicaciones de la tabla 2.1.

PRIMAL		DUAL	
Ojetivo	Minimizar	Maximizar	Objetivo
Restricciones	\geq	\geq	Variables
	\leq	\leq	
	$=$	libres	
Variables	\geq	\leq	Restricciones
	\leq	\geq	
	libres	$=$	

Tabla 2.1: Conversión de un problema primal a su dual

Teorema 2.1.5 (Teorema de Dualidad Débil) *Para todo par de soluciones factibles \mathbf{x} y π de los problemas primal y dual, respectivamente, se tiene que $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \pi^T \mathbf{b}$*

Corolario 2.1.5.1 *Dado un problema de optimización lineal expresado en la forma mostrada la definición 2.1.7. Si $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \pi^T \mathbf{b}$ con \mathbf{x} solución factible del problema primal y π solución*

factible del problema dual, entonces \mathbf{x} es un óptimo global del problema primal y π es un óptimo global del problema dual.

En general, dichas cotas pueden no coincidir, quedando un espacio entre ellas denominado **duality gap**. Solo en programación lineal esto no ocurre y se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.6 (Teorema de Dualidad Fuerte) *Dado un problema de optimización lineal y su dual asociado como en la definición 2.1.7. Entonces,*

$$\inf_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \} = \sup_{\pi} \{ \pi^T \mathbf{b} \}$$

2.2 Optimización Binivel

La programación binivel es un problema de optimización que como restricción incluye a otro problema de optimización. Así, tenemos un nivel superior conocido también como problema líder y un nivel inferior también llamado problema seguidor. En el segundo nivel se tiene que optimizar una función objetivo bajo parámetros dados por la solución del problema de primer nivel, quien a su vez optimiza su función objetivo considerando como parámetros la solución del nivel inferior. Esta clase de problemas fue introducido en la literatura por primera vez en un artículo de J. Bracken y J. T. McGill, dedicado a la asignación de recursos y armamentos para optimizar la ofensiva y defensiva simultáneamente [26]. A partir de este artículo varios autores estudiaron de manera intensiva la programación binivel y se proliferó rápidamente en el círculo de la programación matemática. Algunos trabajos interesantes son por ejemplo el publicado por W. Bialas y M. Karwan [27] donde presentan una estructura general matemática del problema de programación binivel, así como la propuesta de un algoritmo de solución con el método del punto extremo adyacente. Luego, J. Bard y J. Falk [28] estudian la programación multinivel en el juego de suma no nula y trabajan en un algoritmo de ramificación y acotamiento. De manera más general J. Fortuny - Amat y B. McCarl [29] exponen una formulación para problemas jerárquicos con procesos de decisiones en etapas.

La idea general de este tipo de problema se puede entender a partir del gráfico 2.2 considerado en la referencia [30]. Luego presentaremos la formulación matemática de este tipo de problemas.

Para cada vector \mathbf{x}_u del espacio de variables del nivel superior, el correspondiente problema de optimización del segundo nivel es optimizado para obtener \mathbf{x}_l^* y con esto calcular F_u .

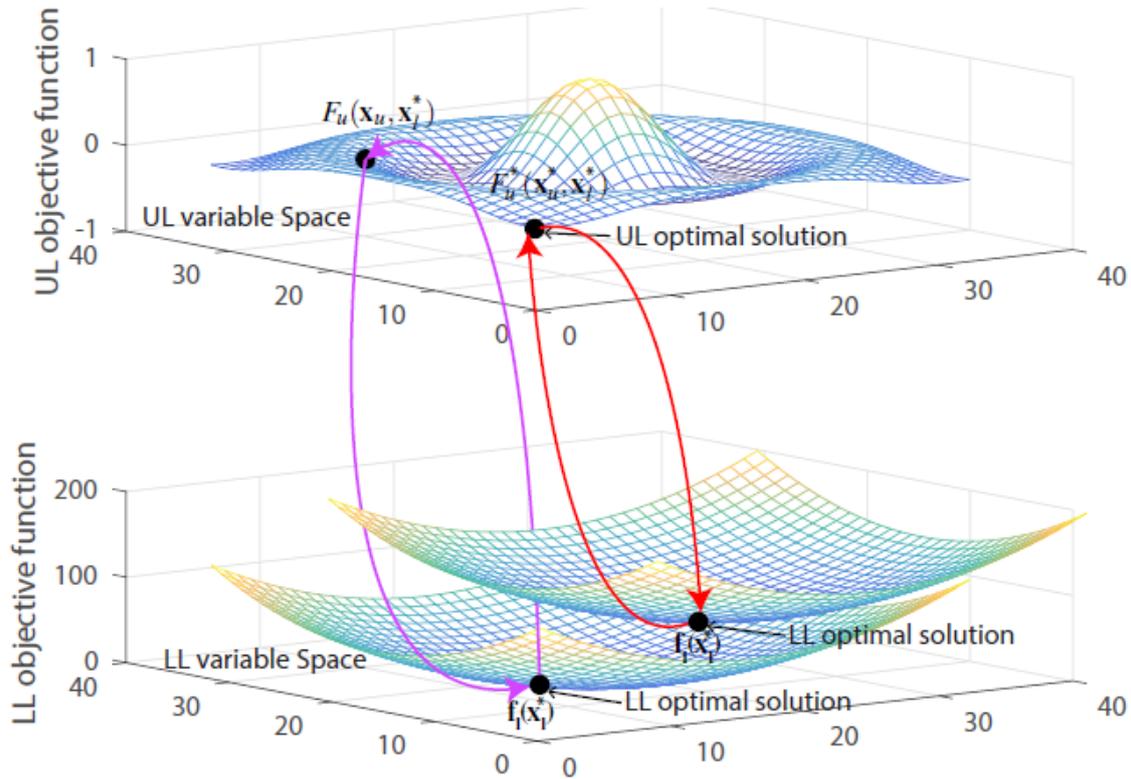


Figura 2.2: Esquemización de un problema de optimización binivel

El objetivo final es encontrar el óptimo de F_u .

La dificultad de un problema binivel depende de muchos factores, como el número de variables, número de restricciones, la no-linealidad de las funciones o restricciones, etc. La dificultad más notable en este tipo de problemas es la naturaleza de conflicto que puede existir entre el problema de primer y segundo nivel.

Se puede indentificar varias aplicaciones interesantes de la optimización binivel en diferentes áreas.

- **Optimización Estructural:** En la optimización estructural se puede usar la formulación binivel. El nivel inferior consiste por ejemplo de minimizar la energía elástica con restricciones de condiciones de equilibrio, y el nivel superior es la minimización de la función costo [31].
- **Transporte:** Una aplicación interesante de la optimización binivel se da en las redes de transporte. El nivel superior sería por ejemplo la maximización del ingreso producto del cobro de peajes en una red de carreteras. Y en el nivel inferior estarían los usuarios interesados en utilizar la ruta más corta y/o más rentable para su viaje [32].

- **Economía:** Una aplicación muy conocida de la aplicación binivel es el juego de Stackelberg . Un juego de Stackelberg es un escenario económico donde el líder y el seguidor (empresa/individuos) operan en el mismo mercado pero con intereses conflictivos. El objetivo de ambos puede ser por ejemplo maximizar su propio beneficio económico [33]. Otro problema interesante se puede encontrar por ejemplo en la operación de una compañía minera. En este caso una institución estatal puede actuar como líder y la empresa minera como seguidor. El líder puede por ejemplo tener dos objetivos, maximizar la recaudación de impuestos y minimizar el daño medioambiental mientras que el seguidor tiene un único objetivo que es maximizar su beneficio económico [34].
- **Industria Química:** En una reacción química se puede estar interesado en maximizar la cantidad particular de un producto específico lo que sería el problema líder, mientras que el problema seguidor sería la optimización de la función entropía para garantizar que se establezca un equilibrio.
- **Otros:** Aplicaciones en seguridad nacional como planificación de interceptores de misiles, sistemas de producción de petróleo y gas natural, industria pesquera, industria forestal, agricultura, logística, etc. son algunas de las tantas áreas donde también se puede aplicar la optimización binivel y multinivel.

En este trabajo de investigación nuestro marco matemático general será la optimización binivel. La formulación matemática general es como sigue:

$$\min_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.2)$$

$$\text{s.t:} \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad (2.3)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\min_y f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.5)$$

$$\text{s.t:} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad (2.6)$$

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (2.7)$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}, y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2} \quad (2.8)$$

Alternativamente se puede usar la siguiente formulación

$$\min \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \quad (2.9)$$

$$\text{s.t:} \quad g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq 0 \quad (2.10)$$

$$h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y}^* \in \operatorname{argmin}\{f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.12)$$

$$\text{s.t:} \quad g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad (2.13)$$

$$h_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \quad (2.14)$$

Las variables de decisión se dividen en dos conjuntos, las variables del primer nivel $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1}$ y las variables del segundo nivel $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2}$. Como podemos notar este tipo de problemas tiene una estructura jerárquica, ya que el problema del nivel superior incluye las soluciones óptimas del problema del nivel inferior como se indica en la restricción 2.12 pero no al revés. En cambio, en el problema de nivel inferior, las variables del nivel superior son parámetros fijos y no variables de decisión.

Existen varias definiciones relacionadas con la solución de un problema de optimización binivel que se describen a continuación:

- Con un problema de optimización binivel como el formulado líneas arriba, el conjunto factible relajado es definido como

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} : g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, h_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \quad (2.15)$$

Este conjunto representa los puntos que satisfacen las restricciones del nivel superior y del nivel inferior.

- La región factible del nivel superior es:

$$\Omega(X) = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : \exists y : (x, y) \in \Omega\} \quad (2.16)$$

Es el conjunto de variables del nivel superior que hace factible el problema del nivel inferior.

- Como el nivel inferior considera la variable del nivel superior como un parámetro. Para cada x fijo, el conjunto factible del nivel inferior será:

$$\Omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : g_2(x, y) \leq 0, h_2(x, y) = 0\} \quad (2.17)$$

- Como se indicó en la definición, la solución óptima del problema del nivel inferior depende de las variables del nivel superior. Para cada x fijo, el conjunto de reacción del nivel inferior es:

$$\Pi(x) = \{y^* \in \mathbb{R}^{n_2} : y^* \in \operatorname{argmin}(f_2(x, y) : y \in \Omega(x))\} \quad (2.18)$$

Es el conjunto de soluciones óptimas para un x fijo.

- Finalmente, la región factible o el conjunto de puntos factibles del problema binivel se conoce como región inducida y se define como [35]:

$$IR = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} : x \in \Omega(X), y \in \Pi(x)\} \quad (2.19)$$

Esto es, el conjunto factible de las variables x del primer nivel y su correspondiente solución del problema de nivel inferior, dado por el conjunto $\Pi(x)$.

Con todas las definiciones dadas, el problema de optimización binivel (2.9 - 2.14) puede reformularse como:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) \\ \text{s.t.} \quad & (x, y) \in IR \end{aligned} \quad (2.20)$$

Los problemas de optimización binivel pueden tener dos puntos de vista. Optimista si existe cooperación entre ambos niveles para la optimización o pesimista si la optimización del nivel inferior implica un riesgo para el nivel superior. En otras palabras, la optimización binivel optimista se da cuando ambos niveles de programación representan intereses similares. Por otro lado, en la optimización binivel pesimista, la cooperación entre líder y seguidor no es posible. Ambos niveles representan intereses enfrentados y en este caso, el líder no puede influir al seguidor y la optimización del problema del nivel inferior aleja la optimalidad al problema principal. Por ejemplo, maximizar el beneficio de una empresa bancaria, sujeta al interés de ahorro de sus clientes.

Hablemos ahora de la **complejidad** de solucionar un problema de optimización binivel. Esto se ha estudiado con amplitud en diversos trabajos, uno de los más representativos es el de R. Jeroslow [36], demostrando que el problema de optimización binivel lineal es NP-Hard. Este resultado fue confirmado por J. Bard [37] y O. Ben-Ayed y C. Blair [38]. Recientes investigaciones muestran que la búsqueda de optimalidad local de un problema binivel lineal es un problema también NP-Hard [39].

Capítulo 3

Estrategia de Oferta Óptima en Mercados Competitivos de Energía de Corto Plazo

En un mercado eléctrico mayorista competitivo de corto plazo basado en ofertas libres (*bid-based markets*), las compañías de generación, al tener la libertad de gestionar sus unidades de producción y sus recursos de manera independiente, deben desarrollar estrategias de ofertas para su participación en el mercado mayorista que les permita maximizar su beneficio económico producto de la venta de energía. En este capítulo presentamos el modelo matemático básico del problema denominado: Estrategia óptima de ofertas de los generadores para su participación en el mercado mayorista de corto plazo o mercado de día en adelante. Este problema será formulado como un problema de optimización bi-nivel, donde el primer nivel representa la intención de maximizar el beneficio económico de la compañía estratégica y el segundo nivel representa el despacho económico (*market clearing*) ejecutado por el ISO. El problema bi-nivel será convertido en un problema matemático con restricciones de equilibrio (*Mathematical Program with Equilibrium Constraints* - MPEC) el cual será finalmente transformado en un problema de programación lineal entero mixta (*Mixed-integer linear programming* - MILP) usando las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), el teorema de dualidad fuerte y un método de aproximación de variables continuas mediante una discretización. En este capítulo discutiremos una versión simplificada del problema: sin considerar las restricciones de transmisión, sin asignación de unidades (*unit commitment*) y sin considerar las restricciones asociadas a los embalses de las centrales de

generación hidroeléctrica.

3.1 Introducción y Descripción General del Problema

Una de las características básicas de un mercado eléctrico desregulado basado en ofertas libres es el mercado mayorista de corto plazo o mercado de día en adelante, donde la compra y venta de energía se liquidan en cada hora. En un esquema simplificado, el mercado de día en adelante funciona de la siguiente manera: i) Para participar en este mercado, las compañías de generación interesadas deben presentar al operador del mercado en un horario establecido, pares de ofertas de precio por unidad de energía (\$/MWh) y cantidad de energía (MWh) para cada una de sus unidades de producción y para cada hora del día siguiente. ii) Con las ofertas conocidas de todas las compañías que desean participar en el mercado, el operador debe determinar el precio de despeje del mercado y la generación que debe asignar a cada unidad productora en cada periodo de tiempo preestablecido, debiendo satisfacer en todo momento la demanda total en el sistema al menor costo de operación posible en el próximo periodo de 24 horas. iii) La energía producida por las unidades despachadas es remunerada con el precio spot del mercado (precio de despeje) [14].

El beneficio económico que cada compañía generadora de energía eléctrica obtiene por su participación en el mercado de día en adelante, depende de su habilidad para administrar sus ofertas de precio por unidad de energía (\$/MWh) y cantidad de energía (MWh) que ponen a disposición del mercado para cada una de sus unidades de producción. Este problema de oferta óptima se complica cuando en el mercado existen agentes generadores creadores de precio (price makers), debido a que estos pueden alterar el precio de despeje del mercado (precio spot) modificando sus ofertas. En este contexto, ya estaremos frente a un problema cíclico en el que las ofertas afectan el precio de despeje del mercado y este precio a su vez afecta las ofertas de los generadores. Modelar esta dependencia cíclica no solo es de interés para los agentes generadores sino también para las agencias reguladoras. Para las generadoras, puede ya no ser óptimo su participación en el mercado de día en adelante ofertando sus costos marginales de producción y deberán desarrollar estrategias para maximizar su rentabilidad. Por otro lado, las agencias reguladoras deben estudiar que estrategias usan las compañías generadoras buscando identificar abusos de posición dominante y manipulación de mercado [16], [44].

Para abordar la dependencia cíclica mencionada, el problema de oferta óptima estratégica (bidding strategy) es dividido en dos formulaciones dependientes: el problema de maximización del beneficio económico asociado a cada compañía generadora y el problema de despacho económico (market clearing) que resuelve el ISO buscando satisfacer la demanda total al mínimo costo. El problema completo se formula entonces como un problema de optimización de dos niveles. El primer nivel representa la maximización del beneficio económico de la compañía productora y el segundo nivel es el despacho económico que determina el precio de despeje del mercado (precio spot). Afortunadamente, el segundo nivel es un problema lineal y se puede usar las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker para convertir el problema lineal en un conjunto de ecuaciones no lineales. Agregando estas ecuaciones al primer nivel del problema tendremos un problema de optimización no lineal con una estructura especial conocida como *Mathematical Program with Equilibrium Constraints (MPEC)* [9] [14] [45].

Considerando conocido la estrategia de ofertas de las compañías competidoras, el MPEC considerado será resuelto para cada compañía productora price-maker, determinando así la mejor oferta precio-capacidad de generación que permita maximizar su beneficio económico en el mercado de día en adelante. Por otro lado, para evaluar la competencia entre las compañías generadoras participantes del mercado eléctrico se podría usar un procedimiento iterativo hasta que el equilibrio sea alcanzado, esto es, que ninguna compañía generadora pueda mejorar su beneficio unilateralmente. Este último punto es un problema que quedará pendiente para trabajos futuros.

3.2 Formulación Matemática del Problema

En esta sección, presentamos un modelo inicial (versión simplificada) del problema de estrategia óptima de ofertas de un agente generador creador de precio (price maker) que participa en un mercado de energía de corto plazo. Iniciaremos describiendo el despacho económico que ejecuta el operador del sistema (que también es el operador del mercado en algunos países) y luego expondremos el modelo bi-nivel para el problema sin considerar por ahora las redes de transmisión, las restricciones de unit commitment de las generadoras termoeléctricas y sin considerar las restricciones de los embalses y flujos de agua asociados a las generadoras hidroeléctricas. En los siguientes capítulos iremos relajando estas simplificaciones.

3.2.1 Despacho Económico (Market Clearing - Economic Dispatch)

En un mercado de día en adelante (day-ahead) basado en ofertas libres, la producción de cada agente generador es determinado por el operador del sistema en una subasta. Para esto, el ISO que en nuestro caso es también el operador del mercado, recibe de parte de los generadores que desean vender energía en el mercado de día en adelante, curvas de oferta de precio - capacidad de generación para diferentes periodos de tiempo del día siguiente (cada hora o media hora) ¹.

A partir de las ofertas hechas por los generadores y de una previsión de la demanda total del sistema para el día siguiente. El objetivo del ISO es satisfacer esta demanda total al mínimo costo posible y para esto formula el problema de optimización matemática conocido como despacho económico (market clearing). Al resolver este problema el ISO determina el precio de despeje del mercado y la cantidad de energía que debe inyectar al sistema cada generador asignado en el despacho. El precio de despeje corresponde matemáticamente a la variable dual π_d asociado a la restricción de balance oferta-demanda.

Inicialmente modelaremos el despacho económico sin considerar las redes de transmisión ni asignación de unidades (unit commitment) y consideraremos al sistema como un nodo único (single bus system). Las variables duales asociadas a cada restricción se expresarán en paréntesis.

Índices y Conjuntos

$j = 1, \dots, J$ - Índice para representar a todos los generadores del sistema (algunos de estos generadores pertenecen al agente o compañía price maker cuya oferta deseamos optimizar.)

Λ - Conjunto de generadores que pertenecen al agente creador de precio ($j \in \Lambda$); los demás generadores serán indicados por $j \notin \Lambda$.

VARIABLES DE DECISIÓN EN EL DESPACHO ECONÓMICO

g_j - Energía inyectada al sistema (vendida) por el agente generador j [MWh]

π^d - Precio de despeje del mercado [$\$/MWh$]

Parámetros para el Despacho Económico

¹En el despacho basado en costos, los agentes están obligados a ofertar toda su capacidad disponible junto a sus costos reales de producción (el cuál muchas veces es calculado por el mismo ISO). En el despacho basado en ofertas libres, las ofertas de precio pueden ser distintas al costo marginal de producción de las generadoras.

- p_j - Ofertas de precio del agente generador creador de precio para cada una de sus unidades generadoras, $j \in \Lambda$ [\$/MWh]
- e_j - Oferta de energía del agente creador de precio, $j \in \Lambda$ [MWh]
- P_j - Ofertas de precio de los agentes generadores tomadores de precio $j \notin \Lambda$ (costo variable), se asume conocido [\$/MWh]
- E_j - Oferta de energía de los agentes generadores tomadores de precio, $j \notin \Lambda$, se asume conocido [MWh]
- D - Demanda total del mercado [MWh]
- \bar{G}_j - Capacidad máxima de generación de los generadores j , $j = 1, \dots, J$ [MWh]
- C_j - Costo variable de operación del generador j , $j = 1, \dots, J$ [\$/MWh]

La formulación matemática del despacho económico es:

$$\min_{g_j} z = \sum_{j \in \Lambda} p_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j \quad \text{Costo total de operación del sistema} \quad (3.1)$$

$$\text{s.t: } \sum_{j=1}^J g_j = D \quad (\leftarrow \pi_d) \quad \text{Balance Oferta - Demanda} \quad (3.2)$$

$$g_j \leq e_j \quad \forall j \in \Lambda \quad (\leftarrow \pi_j^g) \quad (3.3)$$

$$g_j \leq E_j \quad \forall j \notin \Lambda \quad (\leftarrow \pi_j^g) \quad (3.4)$$

$$g_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (3.5)$$

Como podemos apreciar, para el ISO, el problema de despacho económico es un problema de optimización lineal. Gráficamente, la solución puede ser obtenida ordenando de manera creciente las ofertas de precio de los generadores, acumulando las cantidades de energía ofertadas hasta que la demanda total del sistema sea atendida. El precio de despeje de mercado será la oferta de precio más alta de las unidades que son parte del despacho económico.

En la figura 3.1 ilustramos el despacho económico de tres generadores, considerando de manera creciente sus ofertas de precio por unidad de energía para cada una de ellas. Notemos que los generadores 1 y 2 despachan toda su capacidad ofertada, mientras que el generador 3 produce parcialmente lo suficiente para cubrir la demanda d del sistema. Tengamos en cuenta que, si las restricciones de transmisión, unit commitment, y las restricciones de los embalses de las centrales hidroeléctricas se incluyen en el proceso de despacho, el problema se complica y el precio de despeje de mercado puede ya no corresponder a la oferta de precio más alta de las unidades que son parte del despacho económico. En nuestro problema,

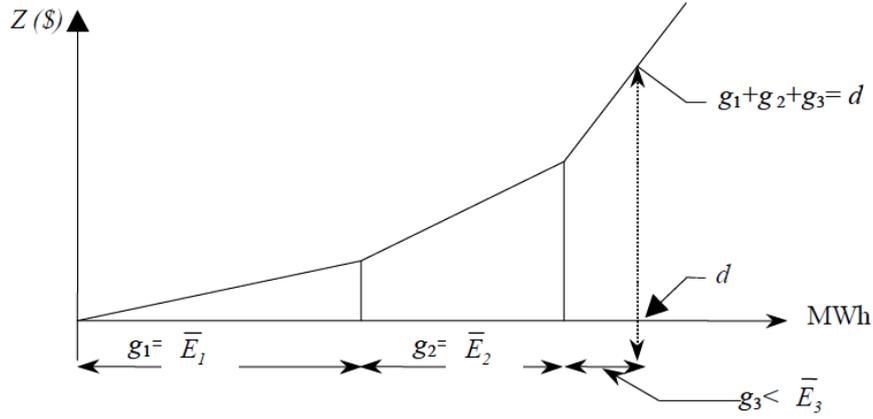


Figura 3.1: Esquemática del despacho económico

también asumiremos que no habrá desviaciones de los resultados obtenidos en el despacho (e.j. debido a cambios en la demanda o fallas de los generadores). En otras palabras, no consideramos mercados secundarios o de reserva.

Por la teoría de dualidad en la programación lineal, en la solución óptima del problema, el valor de la variable dual π_d asociada a la restricción de balance de carga, representa la derivada del costo z de operación del sistema en relación a la variación de la demanda ($\frac{\partial z}{\partial D}$). En otras palabras, si asumimos no-degeneración, la variable dual π_d representa el incremento del costo de operación del sistema para un aumento unitario en la demanda. Este valor es conocido como el precio de despeje del mercado, precio spot del mercado de día en adelante o precio sombra y es el precio con el que se remunera a todos los generadores participantes del despacho.

El problema dual asociado al despacho económico considerado en nuestro modelo sería:

$$\begin{aligned}
 \max_{\pi_d, \pi_j^g} \quad & D\pi_d + \sum_{j \in \Lambda} e_j \pi_j^g + \sum_{j \notin \Lambda} E_j \pi_j^g \\
 \text{s.t:} \quad & \pi_d + \pi_j^g \leq p_j \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (\leftarrow g_j) \\
 & \pi_d + \pi_j^g \leq P_j \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (\leftarrow g_j) \\
 & \pi_j^g \leq 0 \quad , \quad \forall j \\
 & \pi_d \quad \text{irrestringido}
 \end{aligned}$$

Con el despacho económico ejecutado por el ISO se establece la producción de cada agente generador g_j , así como el precio de despeje del mercado π_d (precio spot). Cada generador recibe una remuneración bruta dada por el producto del precio spot del sistema π_d y su producción g_j . La ganancia neta de cada generador (\$) estaría dado por la diferencia entre

la remuneración bruta $\pi_d g_j$ y su costo operativo $C_j g_j$. En este contexto, el agente creador de precio en el mercado (price maker) busca en todo momento maximizar sus ingresos. Usando la nomenclatura establecida este problema sería formulado como:

$$\text{Maximizar: } R_t = \sum_{j \in \Lambda} [\pi_d - C_j] g_j \quad \text{Beneficio neto del Price Maker} \quad (3.6)$$

Una compañía eléctrica puede tener varias unidades generadoras y hacer ofertas de precio - cantidad de energía diferentes para cada una de sus unidades. Para una mejor comprensión del problema de estrategia de oferta óptima consideremos dos situaciones extremas.

- **Oferta de precio nulo:** Para garantizar que un generador sea despachado, la oferta de precio para la energía que desea vender podría ser cero, pero si el resto de compañías competidoras ofertan también precio cero o casi cero, el precio de despeje del mercado será tan bajo que el generador en cuestión podría resultar en pérdida (costo marginal de producción mayor que el precio de despeje del mercado). En esta situación, incluso si obtuviera una ganancia, no tendría control sobre ella, ya que depende totalmente de las ofertas que hagan sus competidores.
- **Oferta de precio alto:** La compañía puede ofertar un precio alto para un generador buscando establecerlo como generador marginal y establecer el precio spot, en esta situación puede ser que no toda la capacidad de generación de dicho generador sea asignado en el despacho, a cambio de esto logra aumentar el precio por unidad de energía que recibirá como pago. En esta situación tiene más control sobre las ganancias que recibirá.

3.2.2 Estrategia de Oferta Óptima

Antes de formular matemáticamente nuestro problema, analizaremos un ejemplo sencillo para entender apropiadamente como funciona el mercado de día en adelante y como se construye la función beneficio económico para los agentes creadores de precio. Para nuestro ejemplo consideraremos un sistema eléctrico de potencia con 5 compañías generadoras competidoras, cada una administrando un generador. Asumiremos que dos de ellas (las de mayor capacidad de generación) son agentes creadores de precio y el resto las consideraremos como agentes tomadores de precio.

En nuestro modelo, cuando analizamos la estrategia de oferta óptima de un generador price

maker, asumimos que este conoce las ofertas de todos sus competidores y la demanda total del sistema. En una situación real, estas estimaciones se podrían obtener generando diversos escenarios, tomando como referencia los datos de despachos económicos pasados donde sus competidores hayan participado.

3.2.2.1 Caso 1: Mercado eléctrico puramente térmico

Consideremos un mercado eléctrico donde hay solamente generadores térmicos. En la siguiente tabla mostramos los datos de capacidad de generación, costo marginal de cada productor y demanda total de nuestro sistema ejemplo. Las dos columnas del lado derecho muestran el resultado del despacho económico en dos situaciones diferentes.

	Costo Variable de Producción C_j (\$/MWh)	Capacidad Máxima \bar{G}_j (MWh)	despacho I g_j (MWh)	despacho II g_j (MWh)
G1	10	240	240	240
G2	30	100	0	40
G3	15	120	120	120
G4	25	100	0	100
G5	20	200	140	0
D			500	500

Tabla 3.1: Datos para un despacho económico simplificado

Si el despacho económico fuera **basado en costos**, el ISO considera que cada generador participa en el mercado ofertando toda su capacidad de producción con su costo variable de producción asociado y realiza el despacho económico buscando satisfacer la demanda total al menor costo posible. Para esto, iniciará despachando el generador de menor costo G1; como este no puede cubrir la demanda total, el ISO busca el siguiente generador más barato que para nuestro caso es G3, este proceso continuará hasta que la demanda total sea satisfecha. Para nuestro ejemplo, el último generador despachado será G5 y este generador establecerá el precio de despeje del mercado (π_d) el cual será 20 \$/MWh. El resultado del despacho se muestra en la columna **despacho I** de la tabla 3.1.

Para nuestro análisis de estrategia de oferta óptima, consideremos que nuestro generador estratégico (price maker) es G5 debido a que tiene una capacidad de generación significativa

y el resto de generadores son agentes tomadores de precio. Bajo esta premisa G1,G2,G3 y G4 siempre participarán en el mercado ofertando su costo marginal de producción. Si G5 decidiera no participar en el mercado o participar con una oferta de precio muy alta, el despacho quedará establecido como se muestra en la columna **despacho II** de la tabla 3.1 y el precio de despeje de mercado (π_d) sería 30 \$/MWh.

Como podemos apreciar en el Despacho I (despacho basado en costos), el ISO realiza el despacho económico como si fuera el único dueño de todas las unidades generadoras, no hay libertad para desarrollar estrategias de maximización del beneficio económico por parte de cada generador. Por otro lado, en el despacho económico II notamos que si el generador estratégico G5 ofertara precios muy altos, este puede quedar fuera del despacho y por consiguiente su beneficio económico sería cero.

A partir de los resultados anteriores, analizemos ahora que estrategia puede utilizar G5 para mejorar su beneficio económico. Notemos que solo tiene dos opciones para desarrollar su estrategia, o despacha toda la energía que puede producir o despacha parcialmente. En ambas situaciones la estrategia es convertirse en generador marginal. Veamos:

- **Oferta de precio buscando el despacho total de energía:** Para que la compañía dueña del generador G5 consiga **despachar totalmente** toda su producción, el valor de su oferta de precio p_5 no deberá sobrepasar los 15 \$/MWh. Este valor es igual a la oferta de precio que hace el generador G3. Para nuestro análisis estamos considerando que en caso de empate el generador estratégico tiene preferencia de despacho. En esta situación, el precio de despeje del mercado será $\pi_d = 15$ \$/MWh y la producción asignada en el despacho y la función beneficio económico quedará establecido como se muestra en la columna **despacho III** de la tabla 3.2. El valor +0 lo usamos para indicar la ganancia del generador marginal ya que en una situación real no será estrictamente cero.

Si ahora consideramos que nuestro generador estratégico es G_1 . Para que la compañía dueña del generador G1 consiga **despachar totalmente** toda su producción, el valor de su oferta de precio p_1 no deberá sobrepasar los 20 \$/MWh. Este valor es igual a la oferta de precio que hace el generador G5 (ahora considerado generador tomador de precio). Como en caso de empate el generador estratégico tiene preferencia de despacho. El precio de despeje del mercado será $\pi_d = 20$ \$/MWh y la producción asignada a cada generador y la función beneficio económico quedará establecido como

	despacho III g_j (MWh)	Beneficio económico G5 $(\pi_d - C_j)g_j$ (\$)	despacho IV g_j (MWh)	Beneficio económico G1 $(\pi_d - C_j)g_j$ (\$)
G1	240	1200	240	2400
G2	0	0	0	0
G3	60	+0	120	600
G4	0	0	0	0
G5	200	-1000	140	+0
D	500		500	

Tabla 3.2: Estrategia de $G5$ y $G1$ buscando el despacho total de energía

se muestra en la columna **despacho VI** de la tabla 3.2. Notemos que en ambos casos el generador estratégico es el generador que establece finalmente el precio de despeje del mercado π_d .

- **Oferta de precio buscando el despacho parcial de energía:** Considerando que la compañía estratégica es dueña del generador $G5$. Si este ofertara toda su capacidad a un precio tal que $25 < p_5 \leq 30$. La producción despachada para este generador sería parcial tal como se muestra en columna **despacho V** de la tabla 3.3

	Despacho V g_j (MWh)	Beneficio económico G5 $(\pi_d - C_j)g_j$ (\$)	Despacho VI g_j (MWh)	Beneficio económico G1 $(\pi_d - C_j)g_j$ (\$)
G1	240	4800	80	1600
G2	0	0	0	0
G3	120	3000	120	1800
G4	100	500	100	500
G5	40	400	200	2000
D	500		500	

Tabla 3.3: Estrategia de $G5$ y $G1$ buscando el despacho parcial de energía

Por otro lado, si consideramos a $G1$ como el generador estratégico. Para tener un despacho parcial, la oferta de precio de este generador deberá ser tal que $25 < p_1 \leq 30$. La producción despachada para este generador sería parcial tal como se muestra en

columna **despacho VI** de la tabla 3.3

Analizando un poco el resultado mostrado en las tablas 3.2 y 3.3 notamos que a G5 no le conviene hacer una oferta de precio buscando el despacho total de su capacidad de producción sino más bien hacer una oferta de precio buscando un despacho parcial. Por otro lado, considerando que G1 es nuestro generador estratégico notamos que a este le conviene más hacer una oferta de precio buscando un despacho total de su capacidad de producción. A partir de este ejemplo podemos concluir que cada compañía deberá establecer una forma óptima de participación en el mercado de día en adelante. Mientras a algunas les puede convenir hacer ofertas de precio buscando despachar toda su capacidad de producción a otras compañías les resultará más beneficioso buscar un despacho parcial.

Esquematizemos el problema de oferta óptima considerando que la compañía estratégica **E** administra una unidad generadora. Por simplicidad consideremos que el costo operacional de cada compañía es cero. Sea el conjunto de ofertas de precios del resto de generadores (no estratégicos) igual a $\{\lambda_2^* \leq \lambda_3^* \leq \dots \leq \lambda_J^*\}$. En la solución óptima del despacho económico, para una oferta de precio λ_1 del generador estratégico, los generadores serán despachados hasta que la demanda total sea satisfecha, aumentando el precio spot. Sea k el menor índice tal que $\bar{g}_1^* + \sum_{j=2}^k \bar{g}_j^* > d$. Si $\lambda_1 \leq \lambda_k^*$, el generador de la compañía **E** despachará toda su capacidad máxima como parte de la solución del despacho económico y su beneficio económico será la constante $\lambda_k^* \bar{g}_1^*$ como se muestra en la figura 3.2 [43].

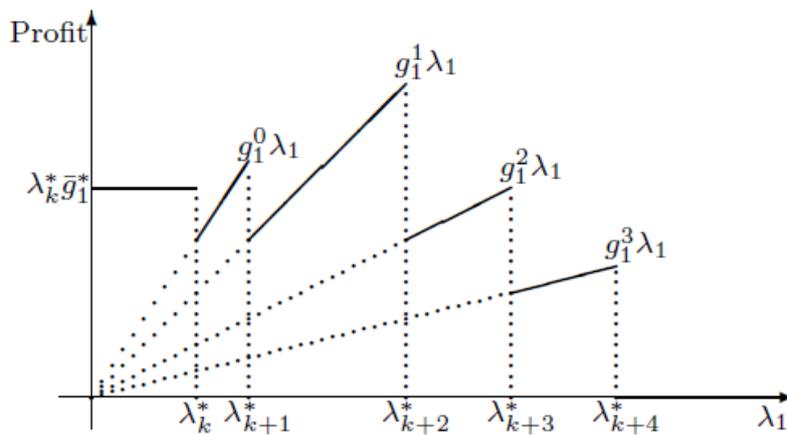


Figura 3.2: Esquema de maximización del beneficio económico

Si $\lambda_l^* < \lambda_1 \leq \lambda_{l+1}^*$, donde $l \in [k, J - 1]$, la producción de la compañía **E** en la solución

óptima del despacho económico será $g_1^{k-1} = \max\{0, d - \sum_{j=2}^l \bar{g}_j^*\}$ y la función de maximización del beneficio económico es una función lineal de λ_1 con inclinación g_1^{k-l} . Claramente $g_1^{k-l} \geq g_1^{k-l+1}$, para todo l .

El problema se complica si consideramos un mercado con decenas de generadores participando y teniendo en cuenta que cada compañía puede administrar más de un generador ya que no se podrá realizar con simples ordenamientos como en el ejemplo anterior. Será más complicado aún si se empieza a considerar las características técnicas de cada unidad generadora (costo de arranque de unidades térmicas, gestión de embalses de centrales hidroeléctricas, etc) y las restricciones de las líneas de transmisión (flujo óptimo de potencia).

3.2.2.2 Formulación Matemática

La dificultad en la ecuación 3.6 es que el precio de despeje del mercado π_d y la potencia que finalmente inyectará al sistema (pool) cada generador perteneciente al price-maker como resultado del despacho económico ($g_j, j \in A$), depende de las ofertas precio - capacidad de generación que hicieron todos los agentes generadores participantes del mercado. Por otro lado, las ofertas precio-capacidad que entregará el agente creador de precio al operador del mercado, depende del precio de despeje del mercado π_d .

El objetivo del agente productor creador de precio (price maker) es determinar la combinación precio - capacidad de generación (p_j, e_j), $j \in \Lambda$ que le permita maximizar su beneficio. Matemáticamente queda expresado como el siguiente problema de optimización:

$$\max R = \sum_{j \in \Lambda} (\pi_d((p_j, e_j)_{j \in \Lambda}, (P_j, E_j)_{j \notin \Lambda}) - C_j) g_j((p_j, e_j)_{j \in \Lambda}, (P_j, E_j)_{j \notin \Lambda}) \quad (3.7)$$

$$\text{s.t:} \quad e_j \leq \bar{G}_j \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.8)$$

La dependencia cíclica de los dos problemas presentados se puede esquematizar como se muestra en la figura 3.3

Las ofertas de precio ($p_j, j \in \Lambda$) [\$/MWh] y energía ($e_j, j \in \Lambda$) [MWh] para cada generador de la compañía estratégica son las principales variables de decisión mientras que las ofertas de precio y energía de los demás generadores $j \notin \Lambda$ son asumidas como conocidas y en el problema serán representados por $(P_j, j \notin \Lambda)$ y $(E_j, j \notin \Lambda)$

Juntando los dos modelos, ya se puede presentar el problema de dos niveles correspondien-

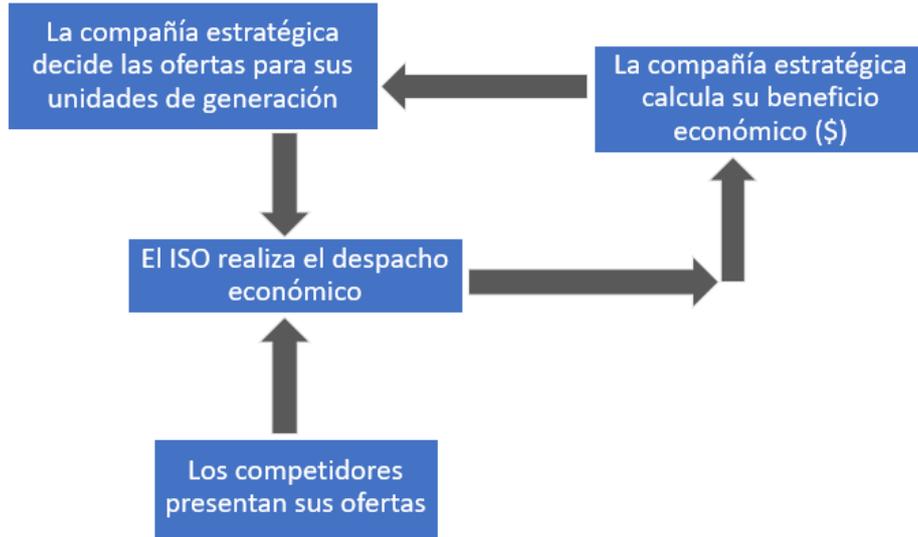


Figura 3.3: Proceso de decisión del agente price maker

te al proceso de la figura 3.3.

$$\max_{e_j, p_j, g_j, \pi_d} \quad R = \sum_{j \in \Lambda} (\pi_d - C_j) g_j \quad (3.9)$$

$$\text{s.t:} \quad e_j \leq \bar{G}_j \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.10)$$

$$\min_{g_j} \quad \sum_{j \in \Lambda} p_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j \quad (3.11)$$

$$\text{s.t:} \quad \sum_{j=1}^J g_j = D \quad (\leftarrow \pi_d) \quad (3.12)$$

$$g_j \leq e_j \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.13)$$

$$g_j \leq E_j \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.14)$$

$$g_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (3.15)$$

Usualmente, algunas simplificaciones son realizadas para analizar algunas propuestas de solución al problema, como por ejemplo, considerar solamente ofertas de capacidad de generación disponible (oferta de precio = 0), o solamente ofertas de precios (capacidad ofertada=capacidad total del generador) [47].

Con todo lo expuesto, ya tenemos las piezas necesarias para transformar este problema de optimización binivel en un único problema de optimización no lineal.

3.2.3 Programa Matemático con Restricciones de Equilibrio (MPEC)

El primer nivel (upper level) en nuestro modelo de optimización bi-nivel es la formulación matemática del problema de oferta óptima estratégica, mientras que el segundo nivel corresponde al despacho económico del sistema (market-clearing formulation). Este último, es un problema de optimización lineal convexo y se puede usar las condiciones de optimalidad de Karush - Kuhn - Tucker para caracterizar el óptimo del problema LP como un sistema de ecuaciones. Las condiciones de optimalidad de KKT caracterizan completamente el punto de solución óptimo, ya que estas son condiciones necesarias y suficientes para el caso de programación lineal. Plantearemos entonces las condiciones de optimalidad de KKT del problema primal del despacho económico.

El Lagrangiano asociado al problema primal del despacho económico estaría dado por la ecuación 3.16:

$$L(g_j, \pi_d, \pi_j^g, \lambda_1, \lambda_{2j}, \mu_j) = \sum_{j \in \Lambda} p_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j + \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^J g_j - D \right) + \sum_{j \in \Lambda} \lambda_{2j} (g_j - e_j) + \sum_{j \notin \Lambda} \lambda_{2j} (g_j - E_j) + \sum_{j=1}^J \mu_j (-g_j), \quad \text{donde :} \quad \lambda_{2j}, \mu_j \geq 0 \quad (3.16)$$

Recordemos que el multiplicador de Lagrange λ_1 asociado a la restricción de igualdad es libre de signo. La relación de los multiplicadores de Lagrange de este problema de programación lineal con las variables duales del despacho económico estará dado por $\lambda_{2j} = -\pi_j^g$ ($\pi_j^g \leq 0, \forall j$) y sin pérdida de generalidad podemos escribir $\lambda_1 = -\pi_d$ (π_d irrestricto):

Finalmente las condiciones de optimalidad KKT para este problema son:

- $\frac{\partial L}{\partial g_j} = 0$ (Restricciones del problema dual)

$$p_j - \pi_d - \pi_j^g - \mu_j = 0 \sim \pi_d + \pi_j^g \leq p_j, \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.17)$$

$$P_j - \pi_d - \pi_j^g - \mu_j = 0 \sim \pi_d + \pi_j^g \leq P_j, \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.18)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \pi_j^g \leq 0, \quad \pi_d : \text{irrestricto}, \quad \forall j \quad (3.19)$$

- Restricciones del problema primal

$$\sum_{j=1}^J g_j = D \quad (3.20)$$

$$g_j \leq e_j, \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.21)$$

$$g_j \leq E_j, \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.22)$$

$$g_j \geq 0, \quad \forall j \quad (3.23)$$

- Holgura Complementaria

$$(g_j - e_j)\pi_j^g = 0, \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.24)$$

$$(g_j - E_j)\pi_j^g = 0, \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.25)$$

$$(\pi_d + \pi_j^g - p_j)g_j = 0, \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.26)$$

$$(\pi_d + \pi_j^g - P_j)g_j = 0, \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.27)$$

Agregando este sistema de ecuaciones al primer nivel, obtenemos un problema de optimización no lineal con una estructura especial conocida como Mathematical Program with Equilibrium Constraints (MPEC).

$$\max_{e_j, p_j, g_j, \pi_d, \pi_j^g} \sum_{j \in \Lambda} (\pi_d - C_j)g_j \quad (3.28)$$

$$\text{s.t: } e_j \leq \bar{G}_j \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.29)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = D \quad (3.30)$$

$$0 \leq g_j \leq e_j \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.31)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.32)$$

$$\pi_d + \pi_j^g \leq p_j \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.33)$$

$$\pi_d + \pi_j^g \leq P_j \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.34)$$

$$\pi_j^g \leq 0 \quad , \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (3.35)$$

$$(\pi_d + \pi_j^g - p_j)g_j = 0 \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.36)$$

$$(\pi_d + \pi_j^g - P_j)g_j = 0 \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.37)$$

$$(e_j - g_j)\pi_j^g = 0 \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.38)$$

$$(E_j - g_j)\pi_j^g = 0 \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.39)$$

La restricción (3.29) corresponde a la restricción del problema de primer nivel. El conjunto de restricciones (3.30-3.32) y (3.33-3.35) corresponde a las restricciones del problema primal y dual del problema del segundo nivel (despacho económico) respectivamente. Finalmente las restricciones (3.36-3.39) son las condiciones de complementariedad.

Es importante recalcar que el conjunto de restricciones (3.30-3.39) substituye al problema

de optimización del despacho económico. Esto significa que cualquier par de ofertas (p_j, e_j) $j \in \Lambda$, que cumple con en el conjunto de restricciones (3.30-3.39) estará satisfaciendo automáticamente el despacho de mínimo costo del sistema.

Sin pérdida de generalidad podemos sumar todas las restricciones de complementariedad obtenemos.

$$\sum_{j \in \Lambda} (\pi_d + \pi_j^g - p_j)g_j + \sum_{j \notin \Lambda} (\pi_d + \pi_j^g - P_j)g_j + \sum_{j \in \Lambda} (e_j - g_j)\pi_j^g + \sum_{j \notin \Lambda} (E_j - g_j)\pi_j^g = 0$$

Reordenando y usando la restricción de igualdad (3.30), obtenemos.

$$\sum_{j \in \Lambda} p_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j - \pi_d D - \sum_{j \in \Lambda} e_j \pi_j^g - \sum_{j \notin \Lambda} E_j \pi_j^g = 0 \quad (3.40)$$

Esta última ecuación es la igualdad primal-dual del problema del segundo nivel. En otras palabras, podemos reescribir las restricciones de complementariedad (3.36-3.39) de forma equivalente a la igualdad primal-dual entre las funciones objetivo del problema de despacho económico y su problema dual asociado (strong duality condition). Este es un resultado conocido de la teoría de programación lineal y será usado en esta tesis.

Con todo lo considerado, la forma final (MPEC) del problema de optimización quedará expresado como:

$$\max_{e_j, p_j, g_j, \pi_d, \pi_j^g} \sum_{j \in \Lambda} (\pi_d - C_j)g_j \quad (3.41)$$

$$\text{s.t: } e_j \leq \bar{G}_j \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.42)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = D \quad (3.43)$$

$$g_j - e_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.44)$$

$$g_j - E_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.45)$$

$$g_j \geq 0 \quad , \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (3.46)$$

$$\pi_d + \pi_j^g - p_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.47)$$

$$\pi_d + \pi_j^g - P_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.48)$$

$$\pi_j^g \leq 0 \quad , \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (3.49)$$

$$\sum_{j \in \Lambda} p_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j - \pi_d D - \sum_{j \in \Lambda} \pi_j^g e_j - \sum_{j \notin \Lambda} \pi_j^g E_j = 0 \quad (3.50)$$

El MPEC obtenido es un problema cuadrático (no-lineal) y no-convexo debido a la existencia de productos de variables de decisión en la función objetivo $(\pi_d g_j)$ y en la restricción equivalente de complementariedad $p_j g_j, \pi_j^g e_j$. En general, la principal dificultad

con la que uno se encuentra al formular un MPEC es resolverlo de manera óptima. Según el conocimiento que revisamos hasta el momento, nadie ha resuelto un MPEC de manera óptima para utilizarlo en aplicaciones prácticas.

3.2.4 Formulación Lineal Equivalente

Como se mencionó anteriormente, el problema de estrategia de oferta óptima, aún en su versión simple no es tan fácil de resolver debido a las no-linealidades presentes en la función objetivo y en las restricciones. Para superar esta dificultad, en este apartado presentamos una reformulación del modelo (ecuaciones 3.41- 3.50) a un problema de programación lineal entero mixto (MILP).

Para esto, consideremos el modelo inicial (ecuaciones 3.28 - 3.39) expresado con la notación de complementariedad.

$$\max_{e_j, p_j, g_j, \pi_d, \pi_j^g, \mu_j} \sum_{j \in \Lambda} (\pi_d - C_j) g_j \quad (3.51)$$

$$\text{s.t: } e_j \leq \bar{G}_j \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.52)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = D \quad (3.53)$$

$$0 \leq g_j \leq e_j \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.54)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.55)$$

$$\pi_d + \pi_j^g + \mu_j = p_j \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.56)$$

$$\pi_d + \pi_j^g + \mu_j = P_j \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.57)$$

$$\pi_j^g \leq 0 \quad , \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (3.58)$$

$$0 \leq g_j \perp \mu_j \geq 0, \quad \forall j \quad (3.59)$$

$$0 \leq (e_j - g_j) \perp (-\pi_j^g) \geq 0, \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.60)$$

$$0 \leq (E_j - g_j) \perp (-\pi_j^g) \geq 0, \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.61)$$

$$0 \leq (p_j - \pi_d - \pi_j^g) \perp g_j \geq 0, \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.62)$$

$$0 \leq (P_j - \pi_d - \pi_j^g) \perp g_j \geq 0, \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.63)$$

Teniendo en cuenta que las condiciones KKT del problema de segundo nivel estan dadas por las ecuaciones (3.53) - (3.63). Podemos usar alguna de estas igualdades para linealizar la función objetivo (3.41).

Usando la ecuación (3.56) en la función objetivo (3.51) tendremos:

$$\sum_{j \in \Lambda} (\pi_d - C_j) g_j = \sum_{j \in \Lambda} (p_j - \pi_j^g - \mu_j - C_j) g_j \quad (3.64)$$

De (3.59) tenemos que $\sum_{j \in \Lambda} \mu_j g_j = 0$. Por otro lado de (3.60) tendremos $\sum_{j \in \Lambda} e_j \pi_j^g = \sum_{j \in \Lambda} g_j \pi_j^g$.

Usando estas dos relaciones en (3.64) tendremos:

$$\sum_{j \in \Lambda} (\pi_d - C_j) g_j = \sum_{j \in \Lambda} p_j g_j - \sum_{j \in \Lambda} \pi_j^g e_j - \sum_{j \in \Lambda} C_j g_j \quad (3.65)$$

Del teorema de igualdad primal-dual para el problema del segundo nivel (ecuación 3.50) tenemos:

$$\sum_{j \in \Lambda} p_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j - \pi_d D - \sum_{j \in \Lambda} e_j \pi_j^g - \sum_{j \notin \Lambda} E_j \pi_j^g = 0$$

Usando esta última igualdad en la ecuación (3.65) tendremos

$$\sum_{j \in \Lambda} (\pi_d - C_j) g_j = \pi_d D - \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} E_j \pi_j^g - \sum_{j \in \Lambda} C_j g_j \quad (3.66)$$

Con esta última relación tenemos linealizada la función objetivo ya que no aparecen productos de variables.

Para la linealización de la restricción (3.50), tendremos en cuenta el hecho de que en un mercado eléctrico real, las empresas generadoras de energía ofertan en la práctica, precios y cantidades dentro de intervalos pre-establecidos. Por ejemplo, la oferta de precio para los generadores termoeléctricos no podría ser menor a su costo real de producción y el límite superior sería la mayor oferta de precio hecha por sus competidores o el precio tope (price cap) determinado por el regulador. En cuanto a las ofertas de cantidad, las centrales hidroeléctricas estarán limitadas inferiormente por el volumen mínimo operativo de la central. Definir los límites mínimo y máximo para las ofertas de precio y cantidad de energía es responsabilidad de la compañía generadora y será considerado como restricción en nuestro modelo.

El proceso que desarrollaremos para transformar los productos de variables $p_j g_j$ y $\pi_j^g e_j$ de la restricción (3.50) en una formulación lineal entera está basado en la discretización binaria de las variables de decisión (binary expansion) [7].

En primer lugar **redefinamos el producto** $p_j g_j$. Como mencionamos anteriormente, se puede asumir sin pérdida de generalidad, que la estrategia de oferta de precios de una compañía generadora estará establecida dentro de un intervalo preestablecido por la empresa.

Consideremos por ejemplo que la oferta de precio p_j está dentro del intervalo $[P_j^{min}, P_j^{max}]$, los cuales representan el límite inferior y el límite superior del precio a ofertar respectivamente. En este contexto, se puede hacer una aproximación discreta de la función $f(p_j) = p_j$ dentro del intervalo $[P_j^{min}, P_j^{max}]$ considerando un paso $h_j = \frac{P_j^{max} - P_j^{min}}{N_1}$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que $N_1 = 2^{K_1} + 1$ para algún entero no negativo K_1 .

$$p_j = \begin{cases} P_j^{min}, & P_j^{min} \leq p < P_j^{min} + h_j. \\ P_j^{min} + h_j = P_j^{min} + h_j(2^0 \times 1), & P_j^{min} + h_j \leq p < P_j^{min} + 2h_j. \\ P_j^{min} + 2h_j = P_j^{min} + h_j(2^1 \times 1 + 2^0 \times 0), & P_j^{min} + 2h_j \leq p < P_j^{min} + 3h_j. \\ P_j^{min} + 3h_j = P_j^{min} + h_j(2^1 \times 1 + 2^0 \times 1), & P_j^{min} + 3h_j \leq p < P_j^{min} + 4h_j. \\ P_j^{min} + 4h_j = P_j^{min} + h_j(2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0), & P_j^{min} + 4h_j \leq p < P_j^{min} + 5h_j. \\ P_j^{min} + 5h_j = P_j^{min} + h_j(2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 1), & P_j^{min} + 5h_j \leq p < P_j^{min} + 6h_j. \\ P_j^{min} + 6h_j = P_j^{min} + h_j(2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0), & P_j^{min} + 6h_j \leq p < P_j^{min} + 7h_j. \\ P_j^{min} + 7h_j = P_j^{min} + h_j(2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1), & P_j^{min} + 7h_j \leq p < P_j^{min} + 8h_j. \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ P_j^{min} + 2^{K_1}h_j = P_j^{min} + h_j(2^{K_1} \times 1 + 2^{K_1-1} \times 0 + \dots + 0), & P_j^{min} + 2^{K_1}h_j \leq p < P_j^{max}. \end{cases}$$

Así, podemos escribir la aproximación discreta de p_j de la siguiente manera:

$$p_j = P_j^{min} + h_j \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \quad (3.67)$$

Donde x_{kj} : Variable binaria $\{0, 1\}$

La expresión (3.67) es denominada **expansión binaria** y requiere $K_1 + 1$ variables. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.67) por g_j y definiendo una nueva variable $z_{kj} = x_{kj}g_j$ para $k = 0, \dots, K_1$, obtenemos:

$$p_j g_j = P_j^{min} g_j + h_j \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kj} \quad (3.68)$$

Con la ecuación (3.68) tendremos que lidiar con un nuevo producto de variables $z_{kj} = x_{kj}g_j$. Esta nueva variable tiene que verificar lo siguiente

$$z_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{si } x_{kj} = 0. \\ g_j, & \text{si } x_{kj} = 1. \end{cases}$$

Esta relación, puede ser modelada por el siguiente conjunto de restricciones dado que $g_j \geq 0$.

$$0 \leq g_j - z_{kj} \leq M_1(1 - x_{kj}) \quad (3.69)$$

$$0 \leq z_{kj} \leq M_1 x_{kj} \quad (3.70)$$

Donde M_1 es un escalar grande de modo que (3.69) y (3.70) sean relajadas cuando $x_{kj} = 0$ y $x_{kj} = 1$ respectivamente. Podríamos considerar $M_1 = \bar{G}_j$, evitando así la necesidad de usar una constante muy grande que pueda traer dificultades numéricas en la solución del problema de optimización.

Ahora **redefinamos el producto** $\pi_j^g e_j$. Para esto aplicaremos el mismo procedimiento anterior: Consideremos en primer lugar que la oferta de cantidad de energía e_j para ser viable debe estar dentro del intervalo $[E_j^{min}, E_j^{max}]$. Aplicando la expansión binaria a la variable e_j considerando un paso $\delta_j = \frac{E_j^{max} - E_j^{min}}{N_2}$ con $N_2 = 2^{K_2} + 1$, tendremos:

$$e_j = E_j^{min} + \delta_j \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \quad (3.71)$$

$$\pi_j^g e_j = \pi_j^g E_j^{min} + \delta_j \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kj}, \quad w_{kj} = \pi_j^g y_{kj} \quad (3.72)$$

$$0 \leq w_{kj} - \pi_j^g \leq M_2(1 - y_{kj}) \quad (3.73)$$

$$0 \leq -w_{kj} \leq M_2 y_{kj} \quad (3.74)$$

Donde: y_{kj} : Variable binaria $\{0, 1\}$ y M_2 es un escalar grande de modo que (3.73) y (3.74) sean relajadas cuando $y_{kj} = 0$ y $y_{kj} = 1$ respectivamente. Por ejemplo, M_2 podría ser el máximo del conjunto $\{C_j, P_j\}$.

Aplicando todas las transformaciones al modelo (3.41) - (3.50), obtenemos la formulación lineal final mostrada en las ecuaciones 3.75 - 3.91:

$$\max_{g_j, \pi_d, \pi_j^g, x_{kj}, y_{kj}, z_{kj}, w_{kj}} \quad \pi_d D - \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j + \sum_{j \notin \Lambda} E_j \pi_j^g - \sum_{j \in \Lambda} C_j g_j \quad (3.75)$$

$$\text{s.t: } E_j^{min} + \delta_j \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \leq \bar{G}_j = E_j^{max} \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.76)$$

$$P_j^{min} + h_j \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \leq P_j^{max} \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.77)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = D \quad (3.78)$$

$$g_j - E_j^{min} - \delta_j \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \leq 0 \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.79)$$

$$g_j - E_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.80)$$

$$g_j \geq 0 \quad , \quad \forall j = 1, 2 \dots J \quad (3.81)$$

$$\pi_d + \pi_j^g - P_j^{min} - h_j \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \leq 0 \quad , \quad \forall j \in \Lambda \quad (3.82)$$

$$\pi_d + \pi_j^g - P_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \notin \Lambda \quad (3.83)$$

$$\pi_j^g \leq 0 \quad , \quad \forall j = 1, 2 \dots J \quad (3.84)$$

$$\sum_{j \in \Lambda} [P_j^{min} g_j + h_j \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kj}] + \sum_{j \notin \Lambda} P_j g_j - \pi_d D - \sum_{j \in \Lambda} [\pi_j^g E_j^{min} + \delta_j \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kj}] - \sum_{j \notin \Lambda} \pi_j^g E_j = 0 \quad (3.85)$$

$$0 \leq g_j - z_{kj} \leq M_1(1 - x_{kj}) \quad , \quad \forall j \in \Lambda; \quad k \in K_1 \quad (3.86)$$

$$0 \leq z_{kj} \leq M_1 x_{kj} \quad , \quad \forall j \in \Lambda; \quad k \in K_1 \quad (3.87)$$

$$0 \leq w_{kj} - \pi_j^g \leq M_2(1 - y_{kj}) \quad , \quad \forall j \in \Lambda; \quad k \in K_2 \quad (3.88)$$

$$0 \leq -w_{kj} \leq M_2 y_{kj} \quad , \quad \forall j \in \Lambda; \quad k \in K_2 \quad (3.89)$$

$$x_{kj} \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall j \in \Lambda; \quad k \in K_1 \quad (3.90)$$

$$y_{kj} \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall j \in \Lambda; \quad k \in K_2 \quad (3.91)$$

El problema (3.75) - (3.91) es un problema de programación lineal enter mixta (MILP) y puede ser resuelto haciendo uso de algoritmos conocidos como Branch and Bound.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que la precisión de la solución depende de los valores para N_1 y N_2 que escogamos para el modelamiento. Cuanto más grande sea la partición, más preciso será el resultado.

Finalmente, en nuestra opinión, consideramos más natural discretizar p_j y e_j , debido a que estas pueden ser controladas por la compañía ofertante interesada en maximizar sus ingresos, mientras que los valores g_j y π_j^g son el resultado del problema de optimización asociado al despacho económico.

3.2.5 Datos y Resultados Computacionales

La metodología propuesta será aplicada en un sistema cuya configuración es derivada del subsistema sur Brasileiro establecido en [46]. Fueron seleccionados 10 centrales generadoras de las cuales 8 son hidroeléctricas y 2 son termoeléctricas. La capacidad instalada total es

de 2940 MW y la demanda total del sistema es $D=2214.5$ MWh.

$j \in J$	Capacidad Máxima \bar{G} (MWh)	Tipo de Tecnología
$G1^*$	344	H
$G2^*$	124	H
$G3^*$	99	H
$G4^*$	29	H
G5	216	H
G6	8	T
G7	124	T
G8	1156	H
G9	177	H
G10	663	H

Tabla 3.4: Capacidad de generación del sistema de prueba 1

La compañía estratégica controla los generadores marcados con * en la tabla 3.4. Dispone de una capacidad total de 596 MWh, lo que representa casi el 20% de la capacidad instalada total.

Los costos variables operacionales denotado en nuestro modelo por C para cada generador del sistema prueba serán obtenidos de manera aleatoria en el intervalo $[0.9C_T, 1.1C_T]$. Donde C_T es el costo variable de producción promedio para cada tecnología como se muestra en la tabla 3.5:

Tipo de Generación	Costo de Producción Promedio C_T (\$/MWh)
Hidro	28.92
Termo	80.64

Tabla 3.5: Costo promedio de producción de energía

Con todas estas consideraciones los datos de Costo Variable de Producción para nuestro modelo serán:

	Capacidad Máxima \bar{G} (MWh)	Costo Variable de Producción C (\$/MWh)
G1	344	30.85
G2	124	29.10
G3	99	27.45
G4	29	31.12
G5	216	73.5
G6	8	79.17
G7	124	26.38
G8	1156	31.50
G9	177	29.35
G10	663	29.74

Tabla 3.6: Datos de las unidades generadoras de la compañía estratégica

Las ofertas de precio que realizan los competidores denotado por $P_j, j \notin \Lambda$ pueden ser generados de manera aleatoria dentro del intervalo $[1.1C, 1.5C]$, garantizando así que las ofertas de cada unidad generadora sea siempre mayor que su costo variable de producción. Debemos remarcar que para nuestro modelo estas ofertas se consideran conocidas y se muestra en la tabla 3.7.

	Oferta de Energía E_j (MWh)	Oferta de Precios P_j (\$/MWh)
G5	216	96.74
G6	8	107.25
G7	124	35.18
G8	1156	36.64
G9	177	42.75
G10	663	35.67

Tabla 3.7: Ofertas de las unidades generadoras que no pertenecen a la compañía estratégica

Para obtener el resto de parámetros necesarios en nuestro modelo linealizado consideraremos: $K_1 = K_2 = 6, 7, 8 \quad \forall j \in \Lambda$. Es decir, todos los intervalos para las ofertas de precio - cantidad de energía viables de las unidades generadoras que pertenecen a la compañía

estratégica se **particionan en 65, 129 y 257 subintervalos** ($N_1 = 2^{K_1+1}$, $N_2 = 2^{K_2} + 1$).

Consideraremos $P_j^{min} = 1.1C$ para garantizar que la ganancia sea siempre positiva.

	P_j^{min} (\$/MWh)	P_j^{max}	E_j^{min} (MWh)	E_j^{max}	h_j (\$/MWh)	δ_j (MWh)
G1	33.94	107.25	0.0	344	1.1278	5.2923
G2	32.01	107.25	0.0	124	1.1575	1.9076
G3	30.20	107.25	0.0	99	1.1853	1.5230
G4	34.23	107.25	0.0	29	1.1233	0.4461
G1	33.94	107.25	0.0	344	0.5682	2.6666
G2	32.01	107.25	0.0	124	0.5832	0.9612
G3	30.20	107.25	0.0	99	0.5972	0.7674
G4	34.23	107.25	0.0	29	0.5660	0.2248
G1	33.94	107.25	0.0	344	0.2852	1.3385
G2	33.94	107.25	0.0	344	0.2927	0.4824
G3	33.94	107.25	0.0	344	0.2998	0.3852
G4	34.23	107.25	0.0	29	0.2841	0.1128

Tabla 3.8: Partición de ofertas Precio - Energía para $K_1 = K_2 = 6, 7$ y 8

Los valores de los parámetros M_1 y M_2 pueden ser el mayor valor de E_j^{max} y el mayor valor de P_j^{max} respectivamente. Para nuestro caso $M_1 = 344$ y $M_2 = 107.25$.

En las siguientes tablas 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 presentamos los resultados de: asignación de generación, precio de despeje del mercado, ofertas de precio, ofertas de energía y beneficio económico de la compañía estratégica respectivamente considerando los tres modelos discutidos ampliamente en la tesis: el despacho económico basado en costos; el modelo no-lineal de oferta estratégica propuesto y el modelo linealizado de oferta estratégica con particiones de 65, 129 y 257 nodos. Para la simulación se consideraron como datos de entrada los datos de las tablas 3.6, 3.7 y 3.8.

	Despacho basado en costos	Modelo No-lineal	Modelo MILP-65	Modelo MILP-129	Modelo MILP-257
G1	344	0	0	0	0
G2	124	0	0	0.11	0.12
G3	99	94.5	94.43	94.39	94.38
G4	29	0	0	0	0
G5	0	0	0.07	0	0
G6	0	0	0	0	0
G7	124	124	124	124	124
G8	654.5	1156	1156	1156	1156
G9	177	177	177	177	177
G10	663	663	663	663	663

Tabla 3.9: Asignación de generación (MWh)

Las ofertas de precio para las unidades que opera el generador estratégico será:

	Despacho basado en costos	Modelo No-lineal	Modelo MILP-65	Modelo MILP-129	Modelo MILP-257
G1	30.85	70.34	68.90	69.74	100.10
G2	29.10	69.20	104.93	96.75	96.70
G3	27.45	70.92	49.16	46.32	90.16
G4	31.12	70.72	34.23	97.02	47.58

Tabla 3.10: Ofertas de precio estratégicas (\$/MWh)

Las ofertas de energía para las unidades que opera el generador estratégico será:

	Despacho basado en costos	Modelo No-lineal	Modelo MILP-65	Modelo MILP-129	Modelo MILP-257
G1	344	0	0	0	330.61
G2	124	0	122.09	123.99	1.48
G3	99	94.5	94.43	94.39	94.37
G4	29	0	0	10.79	0

Tabla 3.11: Ofertas de energía (MWh)

El precio de despeje del mercado obtenido para cada caso es:

Despacho basado en costos	Modelo No-lineal	Modelo MILP-65	Modelo MILP-129	Modelo MILP-257
31.5	96.74	96.74	96.74	96.74

Tabla 3.12: Precio de despeje del mercado (\$/MWh)

La función objetivo (beneficio económico) resulta:

Despacho basado en costos	Modelo No-lineal	Modelo MILP-65	Modelo MILP-129	Modelo MILP-257
933.17	6547.91	6542.78	6547.72	6547.91

Tabla 3.13: Beneficio económico de la compañía Estratégica(\$)

En la tabla 3.13 se evidencia claramente que el beneficio económico que una compañía estratégica tendría en un mercado basado en ofertas libres es mucho mayor respecto al ingreso que obtendría en un mercado basado en costos marginales de producción.

Las variables duales denotados con π_j^g en nuestro modelo no-lineal y el modelo linealizado serán:

	Modelo No-lineal	Modelo MILP-65	Modelo MILP-129	Modelo MILP-257
G1	-695.16	-27.84	-27.0	0
G2	-51.85	0	0	-0.04
G3	-25.82	-47.58	-50.42	-6.58
G4	-91.64	-107.25	0	-49.16
G5	0	0	0	0
G6	0	0	0	0
G7	-61.56	-61.56	-61.56	-61.56
G8	-60.1	-60.1	-60.1	-60.1
G9	-53.99	-53.99	-53.99	-53.99
G10	-61.07	-61.07	-61.07	-61.07

Tabla 3.14: Variables duales π_j^g

Como un caso de estudio adicional consideraremos los resultados del **Modelo de Oferta Pura de Precios**: las ofertas de precio son las variables de decisión para la compañía estratégica mientras que la cantidad de energía ofertada será un parámetro fijo y dado por la máxima capacidad de cada unidad generadora. Cuando se ejecuta el modelo No-Lineal sin establecer valores iniciales para las variables de decisión obtenemos el resultado mostrado en la columna No-lineal SVI (Sin Valores Iniciales). Los resultados del modelo linealizado para discretizaciones de 65,129 y 257 nodos se muestran en las columnas Modelo MILP1-65, Modelo MILP1-129, Modelo MILP1-257 respectivamente. Cuando se ejecuta el modelo No-Lineal estableciendo valores iniciales para las variables de decisión obtenemos el resultado mostrado en la columna No-lineal CVI (Con Valores Iniciales).

En cuanto a la asignación de la generación se obtiene:

	Modelo No-lineal SVI	Modelo MILP1-65	Modelo MILP1-129	Modelo MILP1-257	Modelo No-lineal CVI
G1	344	0	0	0	0
G2	124	0	0	0	0
G3	99	94.5	94.5	94.5	94.5
G4	29	0	0	0	0
G5	0	0	0	0	0
G6	0	0	0	0	0
G7	124	124	124	124	124
G8	831.5	1156	1156	1156	1156
G9	0	177	177	177	177
G10	663	663	663	663	663

Tabla 3.15: Asignación de generación en oferta pura de precios (MWh)

El precio de despeje del mercado obtenido para cada caso es:

Modelo No-lineal SVI	Modelo MILP1-65	Modelo MILP1-129	Modelo MILP1-257	Modelo No-lineal CVI
36.64	96.46	96.49	96.58	96.74

Tabla 3.16: Precio de despeje del mercado en oferta pura de precios (\$/MWh)

La función objetivo (beneficio económico de la Compañía Estratégica (\$)) resulta:

No-lineal SVI	MILP1-65	MILP1-129	MILP1-257	No-lineal CVI
3996.61	6521.05	6524.2	6532.48	6547.91

Las ofertas de precio p_j para las unidades que opera el generador estratégico será:

	No-lineal SVI	MILP1-65	MILP1-129	MILP1-257	No-lineal CVI
G1	33.96	106.12	106.67	106.95	102.15
G2	32.06	106.09	106.66	106.94	101.67
G3	30.27	96.58	96.49	96.46	96.74
G4	34.28	107.24	97.06	107.24	102.19

Tabla 3.17: Ofertas de precio estratégicas (\$/MWh)

Las variables duales denotados con π_j^g serán:

	No-lineal CVI	MILP1-65	MILP1-129	MILP1-257
G1	0	0	0	0
G2	0	0	0	0
G3	0	0	0	0
G4	0	0	0	0
G5	0	0	0	0
G6	0	0	0	0
G7	-61.56	-61.40	-61.31	-61.27
G8	-60.1	-59.94	-59.85	-59.82
G9	-53.99	-53.83	-53.74	-53.71
G10	-61.07	-60.91	-60.82	-60.78

Tabla 3.18: Variables duales π_j^g

Capítulo 4

Estrategia de Oferta Óptima de Generadores en un Mercado Hidrotérmico de Corto Plazo Basado en Ofertas Libres

En este capítulo se presenta una extensión del modelo trabajado en el capítulo anterior; tendremos en cuenta ahora los flujos de agua y las restricciones de los embalses asociados a las generadoras hidroeléctricas.

Los flujos de agua (*water inflow*) serán considerados determinísticos durante el horizonte de planeamiento para cada reservorio en el sistema y por simplicidad, el costo variable de operación de las plantas termoeléctricas y la función de producción de las hidroeléctricas los consideraremos lineales. Adicionalmente, cada planta hidroeléctrica está asociado a un reservorio y una unidad generadora equivalente. La red de transmisión y la asignación de unidades no será considerada en este modelo.

4.1 Introducción

En un mercado mayorista de energía eléctrica de corto plazo, las compañías eléctricas se ven confrontadas diariamente al desafío de determinar sus ofertas de precio y cantidad de energía que les permita obtener el mayor beneficio económico posible durante su participación en el mercado. Estas ofertas dependen de las restricciones técnicas y económicas de las

unidades generadoras que administra la compañía y de las ofertas que hacen las compañías competidoras.

Las ofertas que las compañías elaboran son entregadas al operador del mercado o operador del sistema. Considerando el conjunto de ofertas y la proyección de la demanda total para las siguientes 24 horas, asigna cuanto de energía debe generar cada unidad de producción de modo que se pueda establecer el balance oferta-demanda en cada periodo de tiempo. En este contexto, es evidente que la estructura del problema de determinación de la oferta óptima de una compañía generadora puede ser formulado como un problema de optimización bi-nivel. Si además asumimos que las ofertas de los competidores son conocidos, esta formulación permitirá adelantarnos a la decisión del operador del sistema en cuanto a la asignación (despacho económico) y al precio del despeje del mercado para periodo de tiempo. Con esta información es posible realizar los ajustes a las ofertas hasta obtener aquellos valores que permitan obtener el beneficio económico máximo.

4.1.1 El Problema del Productor Hidroeléctrico y el Costo de Oportunidad

Dentro del paradigma de un mercado desregulado comentado anteriormente, los productores hidroeléctricos, como cualquier otro productor de electricidad buscan desarrollar estrategias de oferta óptima que les permita maximizar sus beneficios durante su participación en el mercado del día en adelante. Para lograrlo, deberán programar de manera óptima su producción de energía y almacenamiento de agua en un horizonte de tiempo dado.

Los productores hidroeléctricos con sistemas de embalse de agua son diferentes respecto de otros productores (otro tipo de generación) principalmente por la capacidad que tienen de almacenar energía a un costo muy bajo (almacenar agua en los embalses). Por esta capacidad de almacenamiento, las compañías hidroeléctricas deben considerar el impacto de producir energía hoy y gastar el agua almacenada versus guardar el agua para producir energía en el futuro cuando los precios de la electricidad sean más favorables. El impacto económico asociado con el uso del agua hoy respecto al uso futuro, lo que en economía se conoce como el costo de oportunidad, crea una relación de acoplamiento temporal entre las decisiones de producción del periodo presente y todos los periodos futuros. Este acoplamiento temporal puede ser resuelto en el contexto de la programación dinámica o sus variantes a través de la introducción de variables de estado. Pereira *et al.* [42], demostró en sus investigaciones que el

costo marginal de operación que se puede obtener resolviendo el problema de programación de la producción (*optimal company's scheduling problem*) para una compañía generadora representa el costo de oportunidad y puede ser usado como una aproximación del valor del agua para este productor.

En general, el costo de oportunidad para un generador hidroeléctrico depende de los escenarios futuros para el flujo de agua que ingresa al embalse, la demanda, el precio de la electricidad y la futura producción de los otros generadores; cada uno de estos inciertos.

En el modelamiento de la producción hidroeléctrica podemos tener diferentes escalas de tiempo, como se indica en la tabla 4.1. En el cortísimo plazo se considera horizontes de tiempo de minutos y se lleva a cabo la denominada operación intradiaria (*intra day operation*), el despacho en esta etapa es realizado para ajustarse con las variaciones de la demanda y para enfrentar problemas puntuales, las reservas y el compromiso de unidades (*unit commitment*) son fundamentales en este proceso. El corto plazo involucra horizontes de tiempo que van entre algunos días a meses. En el mediano plazo se considera horizontes de tiempo entre 1 a cinco años. Finalmente, el largo plazo involucra horizontes temporales de entre 10 a 30 años, que es un marco típico para estudiar el problema de expansión de la generación. Debemos aclarar que para los dos primeros casos, los flujos de entrada de agua a los embalses son usualmente tratados como datos determinísticos, mientras que en los dos últimos son considerados como datos estocásticos.

Plazo	Horizonte de tiempo	Flujos de entrada de agua	Importancia para el problema de oferta óptima
Cortísimo plazo	Minutos	Determinístico	-
Corto plazo	Días - Meses	Determinístico	✓
Mediano plazo	1-5 años	Estocástico	✓
Largo Plazo	10-30 años	Estocástico	-

Tabla 4.1: Horizontes temporales usados en el modelamiento del problema de producción hidroeléctrico

Para el problema de oferta óptima de los productores hidroeléctricos, las escalas de tiempo más importantes son el corto y mediano plazo. En el corto plazo, las pequeñas variaciones en el flujo de agua que ingresa a los embalses hace que el problema sea similar al problema de oferta que tienen que resolver los productores termoeléctricos.

En el mediano plazo (entre 1 y 5 años), los productores hidroeléctricos con embalse de regulación anual o plurianual pueden experimentar variaciones significativas en el flujo de agua que ingresa a los embalses producto de las lluvias que son estacionales. Para asegurarse de considerar este comportamiento en la evaluación del costo de oportunidad es necesario modelar el problema de programación de la producción en horizontes temporales que van entre 1 y 5 años, dependiendo de la capacidad de almacenamiento del embalse y el patrón estacional de los flujos de agua que ingresan [13].

Como explicaremos en la siguiente sección. Existe una relación directa entre el programa óptimo de producción a mediano plazo de las compañías hidroeléctricas y las ofertas que estas hacen en el mercado de día en adelante (day-ahead market). Consecuentemente, el problema de oferta óptima estratégica para generadores hidroeléctricos creadores de precio es dinámico y con incertidumbre.

En la gran mayoría de publicaciones científicas que estudian el problema de oferta óptima en un mercado de día en adelante, se proponen modelos válidos para agentes termoeléctricos tomadores de precios. Muy pocos investigadores abordan el problema para agentes creadores de precio y con mayor razón para productores hidroeléctricos creadores de precio. Aquellos pocos que lo hacen consideran horizontes temporales de corto plazo (uno o más días), debido principalmente a la dificultad presente en el modelado de problemas dinámicos no convexos con incertidumbre asociada a la producción hidroeléctrica en el mediano plazo (uno a más años) [11], [30]. Para ser más claros, en la literatura disponible no existe un modelo que determine una política de operaciones coherente y óptima para los productores hidroeléctricos considerando horizontes temporales de al menos un año en el contexto de su participación en un mercado de día en adelante [11]. La poca investigación realizada en esta área de mucha importancia para aquellos mercados eléctricos con significativa participación de centrales hidroeléctricas con embalse motiva el desarrollo de esta tesis doctoral. Es importante resaltar que aunque Perú y Brasil no tienen implementado el mercado de día en adelante, los diferentes problemas presentados en los últimos años, particularmente en el mercado eléctrico Peruano, generan preocupación en la academia y en las instituciones responsables del funcionamiento del sector. Las evidencias indican que es necesario realizar una reforma completa en el diseño del mercado eléctrico y una alternativa es implementar un mercado mayorista desregulado basado en ofertas libres por el lado de los generadores que incorpore el mercado de día en adelante.

4.2 Formulación Matemática del Problema

Respecto a la formulación del problema de estrategia de oferta óptima de una compañía de generación eléctrica como un problema de optimización matemática binivel se establece lo siguiente: El primer nivel denominado problema líder es el problema de maximización del beneficio económico de la compañía sujeto a las restricciones de límites de producción, restricciones operativas de las unidades de generación, restricciones de los reservorios de agua en caso de centrales de generación hidroeléctrica y las restricciones propias del compromiso de unidad (unit commitment) [40]. Adicionalmente, también se modela como restricción de este problema de primer nivel, el problema de minimización del costo total de operación del sistema o despacho económico que resuelve el operador del mercado. Este segundo problema de optimización que se modela como restricción se conoce como problema seguidor. Para mayor claridad en la conceptualización del problema se puede afirmar que la compañía interesada en maximizar su beneficio económico, considerando conocidas las ofertas de sus competidoras se adelanta y simula el despacho económico para que en función de este resultado realice los ajustes a las ofertas de las unidades generadoras que administra, hasta encontrar aquel conjunto de ofertas que hagan máximo a la función beneficio económico.

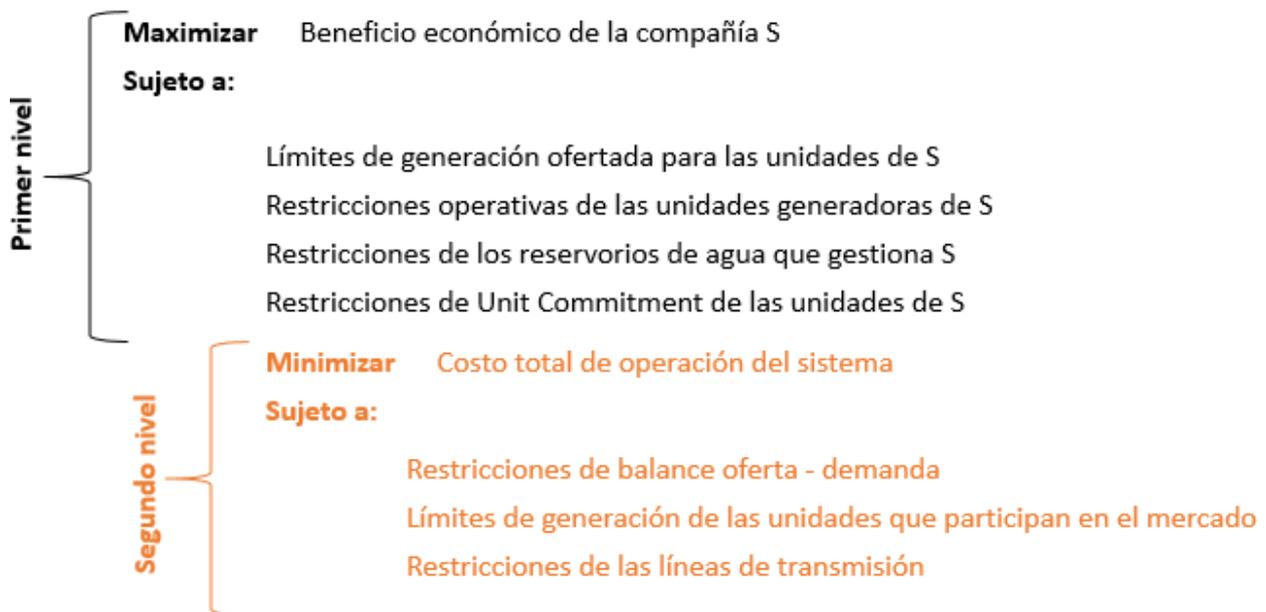


Figura 4.1: Esquematización del problema binivel

El detalle de la formulación de los dos problemas líder (maximización del beneficio) y seguidor (minimización del costo total de operación del sistema) que se muestra en el esquema 4.1 será mostrado de forma separada en las siguientes subsecciones.

Nomenclatura

Índices y Conjuntos

$i = 1, \dots, N_H$ - Índice para representar a las plantas generadoras hidroeléctricas del sistema. Algunas de estas plantas pertenecen al agente o compañía creadora de precio cuya oferta deseamos optimizar.

$j = 1, \dots, N_T$ - Índice para representar a las plantas generadoras termoeléctricas del sistema. Algunas de estas plantas pertenecen al agente o compañía creadora de precio cuya oferta deseamos optimizar.

$k = 1, \dots, N_R$ - Índice para representar a las plantas generadoras con energía renovable solar o eólica del sistema.

$t = 1, \dots, T$ - Índice para representar el periodo de tiempo.

m - Índice asociado con la planta hidroeléctrica aguas arriba de la planta hidroeléctrica i .

Ω_i - Conjunto de plantas hidroeléctricas ubicadas inmediatamente aguas arriba de la planta hidroeléctrica i .

Λ - Conjunto de plantas generadoras que pertenecen a una compañía estratégica específica (algunos $i \in \Lambda$ y algunos $j \in \Lambda$)

Las ofertas de plantas generadoras $i, j \in \Lambda$ son las principales variables de decisión del problema de oferta óptima estratégica del agente generador Λ . Estas ofertas son caracterizadas por precios $((ph_{t,i}, pt_{t,j}), i, j \in \Lambda)$ [\$/MWh] y capacidad $((eh_{t,i}, et_{t,j}) i, j \in \Lambda)$ [MWh]. En este modelo, las ofertas de precio y capacidad de los demás generadores $i, j \notin \Lambda$ son asumidas como conocidas.

Parámetros

D_t - Demanda total del sistema en el periodo t [MWh]

$PH_{t,i}$ - Oferta de precio para el periodo t de los agentes generadores hidroeléctricos que no pertenecen al generador estratégico Λ ($i \notin \Lambda$) [\$/MWh]

$PT_{t,j}$ - Oferta de precio para el periodo t de los agentes generadores termoeléctricos que no pertenecen al generador estratégico Λ ($j \notin \Lambda$) [\$/MWh]

$EH_{t,i}$ - Oferta de energía para el periodo t de los agentes generadores hidroeléctricos que no pertenecen al generador estratégico Λ ($i \notin \Lambda$) [MWh]

$ET_{t,j}$ - Oferta de energía para el periodo t de los agentes generadores termoeléctricos que no pertenecen al generador estratégico Λ ($j \notin \Lambda$) [MWh]

GH_i - Capacidad máxima de generación de la planta hidroeléctrica i [MWh]

GT_j - Capacidad máxima de generación de la planta termoeléctrica j $[MWh]$

$CH_{t,i}$ - Costo variable de operación asociado a la planta hidroeléctrica i en el periodo t $[\$/MWh]$

$CT_{t,j}$ - Costo variable de operación asociado a la planta termoeléctrica j en el periodo t $[\$/MWh]$

$R_{t,k}$ - Oferta de generación de las plantas de generación renovable k (solar o eólico) para el periodo t $[MWh]$

$C = 0.0036$ - Constante para convertir unidades de flujo de agua (m^3/s) a unidades de almacenamiento (hm^3) en un periodo de tiempo de una hora.

ρ_i - Productividad de la planta hidroeléctrica i $[MWh/(m^3/s)]$

V_i^{min} - Volumen mínimo del reservorio asociado con la planta hidroeléctrica i $[hm^3]$.

V_i^{max} - Volumen máximo del reservorio asociado con la planta hidroeléctrica i $[hm^3]$.

$A_{t,i}$ - Flujo incremental (caudal) de agua asociado a la planta hidroeléctrica i en el periodo t $[m^3/s]$

V_i^{goal} - Volumen mínimo del reservorio asociado a la planta hidroeléctrica i al final del periodo de planificación (hm^3)

Variables de Decisión

$ph_{t,i}$ - Oferta de precio de la planta hidroeléctrica i ($i \in \Lambda$) para suministrar energía en el periodo t $[\$/MWh]$

$pt_{t,j}$ - Oferta de precio de la planta termoeléctrica j ($j \in \Lambda$) para suministrar energía en el periodo t $[\$/MWh]$

$eh_{t,i}$ - Energía ofertada por la planta hidroeléctrica i ($i \in \Lambda$) para suministrarlo en el periodo t $[MWh]$

$et_{t,j}$ - Energía ofertada por la planta termoeléctrica j ($j \in \Lambda$) para suministrarlo en el periodo t $[MWh]$

$gh_{t,i}$ - Generación asignada en el despacho a la hidroeléctrica i para el periodo t $[MWh]$

$gt_{t,j}$ - Generación asignada en el despacho a la termoeléctrica j para el periodo t $[MWh]$

$u_{t,i}$ - Caudal turbinado (turbined outflow) por la planta hidroeléctrica i en el periodo t $[m^3/s]$.

$s_{t,i}$ - Caudal vertido (spillage) de la planta hidroeléctrica i en el periodo t $[m^3/s]$.

$v_{t,i}$ - Volumen del reservorio asociado a la planta hidroeléctrica i al inicio del periodo t $[hm^3]$

π_t - Precio de despeje del mercado (variable dual) para el periodo t [\$/MWh]
 $\pi_{t,i}^H, \pi_{t,j}^T$ - Multiplicadores de lagrange.

En este trabajo, el problema de estrategia óptima de ofertas de una compañía que opera centrales hidroeléctricas y que participa en un mercado hidrotérmico será formulado en su versión determinística. Las ofertas de las compañías competidoras las consideraremos conocidas, los flujos de entrada de agua a los reservorios asociados a las centrales de generación hidroeléctrica serán conocidas para nuestro horizonte de estudio, la demanda total del sistema para cada periodo tiempo también lo consideraremos conocido. No consideraremos las restricciones de compromiso de unidades (*unit commitment*) ni las restricciones asociadas a las redes de transmisión. Estas restricciones pueden incluir no convexidades al problema del segundo nivel y ya no tendremos garantía de poder transformar el problema de dos niveles en un único problema de programación matemática con restricciones de equilibrio MPEC, de acuerdo a la metodología utilizada en este trabajo [41].

4.2.1 Despacho Económico en un Sistema Hidrotérmico

El problema de minimizar el costo total de operación del sistema es establecido por el ISO y se expresa como:

$$\min_{\{gh_{t,i}, gt_{t,j}\}} \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} ph_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j} gt_{t,j} + \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j} gt_{t,j} \right] \quad (4.1)$$

$$\text{s.t:} \quad \sum_{i=1}^{N_H} gh_{t,i} + \sum_{j=1}^{N_T} gt_{t,j} = D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k} \quad (\leftarrow \pi_t), \quad \forall t \quad (4.2)$$

$$gh_{t,i} \leq eh_{t,i} \quad (\leftarrow \pi_{t,i}^H), \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.3)$$

$$gh_{t,i} \leq EH_{t,i} \quad (\leftarrow \pi_{t,i}^H), \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.4)$$

$$gt_{t,j} \leq et_{t,j} \quad (\leftarrow \pi_{t,j}^T), \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.5)$$

$$gt_{t,j} \leq ET_{t,j} \quad (\leftarrow \pi_{t,j}^T), \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.6)$$

$$gh_{t,i} \geq 0, \quad gt_{t,j} \geq 0 \quad , \quad \forall i, j \quad (4.7)$$

El problema dual asociado será:

$$\begin{aligned}
\text{Max: } & \sum_{t=1}^T (D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k}) \pi_t + \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} eh_{t,i} \pi_{t,i}^H + \sum_{j \in \Lambda} et_{t,j} \pi_{t,j}^T + \sum_{i \notin \Lambda} EH_{t,i} \pi_{t,i}^H + \sum_{j \notin \Lambda} ET_{t,j} \pi_{t,j}^T \right] \\
\text{s.t: } & \pi_t + \pi_{t,i}^H \leq ph_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \\
& \pi_t + \pi_{t,i}^H \leq PH_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \\
& \pi_t + \pi_{t,j}^T \leq pt_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \\
& \pi_t + \pi_{t,j}^T \leq PT_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \\
& \pi_{t,i}^H \leq 0, \quad \pi_{t,j}^T \leq 0 \quad , \quad \forall t, i, j \\
& \pi_t \text{ irrestricto} \quad , \quad \forall t, i, j
\end{aligned}$$

4.2.2 Maximización del Beneficio Económico de la Compañía Estratégica

El producto de la generación despachada por el ISO y el precio spot π_t menos el costo variable de operación de cada planta da como resultado el beneficio económico. Sin embargo, como cada compañía Λ tiene en su portafolio un conjunto de plantas hidroeléctricas y termoeléctricas, el beneficio económico neto de la compañía para un horizonte de planeamiento T quedará expresado por:

$$R_\Lambda = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} (\pi_t - CH_{t,i}) gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} (\pi_t - CT_{t,j}) gt_{t,j} \right]$$

El objetivo de la compañía Λ es maximizar R_Λ , para $t = 1, \dots, T$, sujeto a las restricciones operacionales de sus plantas hidroeléctricas ($i \in \Lambda$) y termoeléctricas ($j \in \Lambda$). Lo que se expresa finalmente como:

$$\max \quad R_\Lambda = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} (\pi_t - CH_{t,i}) gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} (\pi_t - CT_{t,j}) gt_{t,j} \right] \quad (4.8)$$

$$\text{s.t:} \quad 0 \leq eh_{t,i} \leq GH_i \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.9)$$

$$0 \leq et_{t,j} \leq GT_j \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.10)$$

$$v_{t+1,i} = v_{t,i} - C \left[ut_{t,i} + st_{t,i} - \sum_{m \in \Omega_i} (ut_{t,m} + st_{t,m}) - A_{t,i} \right] \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.11)$$

$$V_i^{\min} \leq v_{t+1,i} \leq V_i^{\max} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.12)$$

$$v_{T+1,i} \geq V_i^{\text{goal}} \quad \forall i \in \Lambda \quad (4.13)$$

$$s_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta la función de hidroproducción $gh_{t,i} = \rho_i u_{t,i}$, la restricción (4.11) puede reescribirse de la siguiente manera.

$$v_{t+1,i} = v_{t,i} - C \left[\frac{gh_{t,i}}{\rho_i} + s_{t,i} - \sum_{m \in \Omega_i} \left(\frac{gh_{t,m}}{\rho_m} + s_{t,m} \right) - A_{t,i} \right]$$

Las restricciones (4.9) y (4.10) denotan que las cantidades ofertadas por la compañía Λ para suministrar energía en el periodo t están limitados por la capacidad máxima de generación de las plantas. La restricción (4.11) representa el balance de masa para el reservorio asociado a la planta hidroeléctrica i ($i \in \Lambda$). Las restricciones (4.12) y (4.13) representan los volúmenes límite y el mínimo valor establecido por cada planta productora i para el volumen guardado al final del periodo de planificación en estudio (V_i^{goal}). Notemos que V_i^{goal} es el enlace entre este modelo a corto plazo con los modelos a largo plazo y representa la mínima cantidad de agua que un productor hidroeléctrico desea guardar para poder usarlo en el futuro en función a su pronóstico y/o expectativas de sus ingresos futuros.

4.2.3 Modelo Binivel del Problema de Estrategia de Oferta Óptima

Es importante recalcar que las restricciones asociadas a los reservorios corresponden estrictamente al problema de maximización del beneficio o problema del primer nivel. El ISO no es responsable en ningún caso de gestionar y controlar el reservorio de cada central hidroeléctrica. El despacho que asigna el ISO ($gh_{t,i}, gt_{t,j}$) depende exclusivamente de las ofertas precio-energía que hagan las compañías para cada una de sus centrales de generación y la demanda D_t . En caso la central hidroeléctrica o termoeléctrica no pueda cumplir con la asignación del ISO existen procedimientos de penalización propios del diseño de cada mercado eléctrico. El problema bi-nivel que debe resolver cada compañía para maximizar su beneficio tomando en cuenta la formación endógena del precio de despeje del mercado se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \max_{\{gh_{t,i}, gt_{t,j}, eh_{t,i}, et_{t,j}, ph_{t,i}, pt_{t,j}, \pi_t, v_{t,i}, s_{t,i}\}} \\
& \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} (\pi_t - CH_{t,i}) gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} (\pi_t - CT_{t,j}) gt_{t,j} \right] \tag{4.15} \\
& \text{s.t.} \quad 0 \leq eh_{t,i} \leq GH_i \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \tag{4.16} \\
& \quad 0 \leq et_{t,j} \leq GT_j \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \tag{4.17} \\
& \quad v_{t+1,i} = v_{t,i} - C \left[\frac{gh_{t,i}}{\rho_i} + s_{t,i} - \sum_{m \in \Omega_i} \left(\frac{gh_{t,m}}{\rho_m} + s_{t,m} \right) - A_{t,i} \right] \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \tag{4.18} \\
& \quad V_i^{min} \leq v_{t+1,i} \leq V_i^{max} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \tag{4.19} \\
& \quad v_{T+1,i} \geq V_i^{goal} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \tag{4.20} \\
& \quad s_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \tag{4.21} \\
& \quad \min_{gh_{t,i}, gt_{t,j}} \left[\sum_{i \in \Lambda} \left[\sum_{j \in \Lambda} ph_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j} gt_{t,j} + \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j} gt_{t,j} \right] \right] \tag{4.22} \\
& \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N_H} gh_{t,i} + \sum_{j=1}^{N_T} gt_{t,j} = D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k} \quad , \quad \forall t \tag{4.23} \\
& \quad gh_{t,i} \leq eh_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \tag{4.24} \\
& \quad gh_{t,i} \leq EH_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \tag{4.25} \\
& \quad gt_{t,j} \leq et_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \tag{4.26} \\
& \quad gt_{t,j} \leq ET_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \tag{4.27} \\
& \quad 0 \leq gh_{t,i} \quad , \quad 0 \leq gt_{t,j} \quad , \quad \forall i, j \tag{4.28}
\end{aligned}$$

4.2.4 Programación Matemática con Restricciones de Equilibrio MPEC

Hallemos primero las condiciones de optimalidad de KKT del problema primal del despacho económico.

El lagrangiano asociado a este problema estaría dado por :

$$\begin{aligned}
L(gh_{t,i}, gt_{t,j}, \lambda_t, \mu_{t,i}^{\min}, \mu_{t,i}^{\max1}, \mu_{t,i}^{\max2}, \nu_{t,j}^{\min}, \nu_{t,j}^{\max1}, \nu_{t,j}^{\max2}) = & \\
\sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} ph_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j} gt_{t,j} + \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j} gt_{t,j} \right] + & \\
\sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^{N_H} gh_{t,i} + \sum_{j=1}^{N_T} gt_{t,j} - D_t + \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k} \right) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_H} \mu_{t,i}^{\min} (-gh_{t,i}) + & \\
\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_T} \nu_{t,j}^{\min} (-gt_{t,j}) + \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} \mu_{t,i}^{\max1} (gh_{t,i} - eh_{t,i}) + \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} \mu_{t,i}^{\max2} (gh_{t,i} - EH_{t,i}) + & \\
\sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} \nu_{t,j}^{\max1} (gt_{t,j} - et_{t,j}) + \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} \nu_{t,j}^{\max2} (gt_{t,j} - ET_{t,j}) \quad , & \\
\mu_{t,i}^{\min}, \mu_{t,i}^{\max1}, \mu_{t,i}^{\max2}, \nu_{t,j}^{\min}, \nu_{t,j}^{\max1}, \nu_{t,j}^{\max2} \geq 0 \quad , \lambda_t \text{ irrestricto} &
\end{aligned}$$

Recordemos que el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de igualdad (λ_t) es libre de signo. La relación de los multiplicadores de Lagrange de este problema de programación lineal con las variables duales asociadas estará dado por: $\mu_{t,i}^{\max1} = -\pi_{t,i}^H \quad \forall i \in \Lambda$, $\mu_{t,i}^{\max2} = -\pi_{t,i}^H \quad \forall i \notin \Lambda$, $\nu_{t,j}^{\max1} = -\pi_{t,j}^T \quad \forall j \in \Lambda$, $\nu_{t,j}^{\max2} = -\pi_{t,j}^T \quad \forall j \notin \Lambda$ y sin pérdida de generalidad podemos escribir $\lambda_t = -\pi_t$ (π_t irrestricto)

Finalmentes las condiciones de optimalidad KKT para este problema son:

- $\frac{\partial L}{\partial gh_{t,i}} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial gt_{t,j}} = 0$ (Restricciones del problema dual)

$$ph_{t,i} - \pi_t - \pi_{t,i}^H - \mu_{t,i}^{\min} = 0 \sim \pi_t + \pi_{t,i}^H \leq ph_{t,i}, \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.29)$$

$$PH_{t,i} - \pi_t - \pi_{t,i}^H - \mu_{t,i}^{\min} = 0 \sim \pi_t + \pi_{t,i}^H \leq PH_{t,i}, \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.30)$$

$$pt_{t,j} - \pi_t - \pi_{t,j}^T - \nu_{t,j}^{\min} = 0 \sim \pi_t + \pi_{t,j}^T \leq pt_{t,j}, \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.31)$$

$$PT_{t,j} - \pi_t - \pi_{t,j}^T - \nu_{t,j}^{\min} = 0 \sim \pi_t + \pi_{t,j}^T \leq PT_{t,j}, \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.32)$$

$$\mu_{t,i}^{\min}, \nu_{t,j}^{\min} \geq 0, \quad \pi_{t,i}^H, \pi_{t,j}^T \leq 0, \quad \pi_d : \text{irrestricto}, \quad \forall i, j, t \quad (4.33)$$

- Restricciones del problema primal

$$\sum_{i=1}^{N_H} gh_{t,i} + \sum_{j=1}^{N_T} gt_{t,j} = D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k} \quad (4.34)$$

$$gh_{t,i} \leq eh_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.35)$$

$$gh_{t,i} \leq EH_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.36)$$

$$gt_{t,j} \leq et_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.37)$$

$$gt_{t,j} \leq ET_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.38)$$

$$0 \leq gh_{t,i}, \quad 0 \leq gt_{t,j} \quad , \quad \forall i, j \quad (4.39)$$

- Holgura Complementaria

$$\mu_{t,i}^{min} gh_{t,i} = 0 \quad (4.40)$$

$$\nu_{t,j}^{min} gt_{t,j} = 0 \quad (4.41)$$

$$(gh_{t,i} - eh_{t,i})\pi_{t,i}^H = 0, \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.42)$$

$$(gh_{t,i} - EH_{t,i})\pi_{t,i}^H = 0, \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.43)$$

$$(gt_{t,j} - et_{t,j})\pi_{t,j}^T = 0, \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.44)$$

$$(gt_{t,j} - ET_{t,j})\pi_{t,j}^T = 0, \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.45)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,i}^H - ph_{t,i})gh_{t,i} = 0, \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.46)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,i}^H - PH_{t,i})gh_{t,i} = 0, \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.47)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,j}^T - pt_{t,j})gt_{t,j} = 0, \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.48)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,j}^T - PT_{t,j})gt_{t,j} = 0, \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.49)$$

Agregando este sistema de ecuaciones al problema de optimización del primer nivel obtenemos el MPEC.

$$\text{Max:} \quad R_\Lambda = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} (\pi_t - CH_{t,i}) gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} (\pi_t - CT_{t,j}) gt_{t,j} \right] \quad (4.50)$$

$$\text{s.t:} \quad 0 \leq eh_{t,i} \leq GH_i \quad \forall t, \forall i, i \in \Lambda \quad (4.51)$$

$$0 \leq et_{t,j} \leq GT_j \quad \forall t, \forall j, j \in \Lambda \quad (4.52)$$

$$v_{t+1,i} = v_{t,i} - C \left[\frac{gh_{t,i}}{\rho_i} + s_{t,i} - \sum_{m \in \Omega_i} \left(\frac{gh_{t,m}}{\rho_m} + s_{t,m} \right) - A_{t,i} \right] \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.53)$$

$$V_i^{min} \leq v_{t+1,i} \leq V_i^{max} \quad \forall t, \forall i, i \in \Lambda \quad (4.54)$$

$$v_{T+1,i} \geq V_i^{goal} \quad \forall t, \forall i, i \in \Lambda \quad (4.55)$$

$$s_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, \forall i, i \in \Lambda \quad (4.56)$$

$$\sum_{i=1}^{N_H} gh_{t,i} + \sum_{j=1}^{N_T} gt_{t,j} = D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k} \quad , \quad \forall t \quad (4.57)$$

$$0 \leq gh_{t,i} \leq eh_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.58)$$

$$0 \leq gh_{t,i} \leq EH_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.59)$$

$$0 \leq gt_{t,j} \leq et_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.60)$$

$$0 \leq gt_{t,j} \leq ET_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.61)$$

$$\pi_t + \pi_{t,i}^H \leq ph_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.62)$$

$$\pi_t + \pi_{t,i}^H \leq PH_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.63)$$

$$\pi_t + \pi_{t,j}^T \leq pt_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.64)$$

$$\pi_t + \pi_{t,j}^T \leq PT_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.65)$$

$$\pi_{t,i}^H \leq 0, \quad \pi_{t,j}^T \leq 0 \quad , \quad \forall t, i, j \quad (4.66)$$

$$\pi_t \text{ irrestricto} \quad , \quad \forall t, i, j \quad (4.67)$$

$$(eh_{t,i} - gh_{t,i})\pi_{t,i}^H = 0, \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.68)$$

$$(EH_{t,i} - gh_{t,i})\pi_{t,i}^H = 0, \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.69)$$

$$(et_{t,j} - gt_{t,j})\pi_{t,j}^T = 0, \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.70)$$

$$(ET_{t,j} - gt_{t,j})\pi_{t,j}^T = 0, \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.71)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,i}^H - ph_{t,i})gh_{t,i} = 0, \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.72)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,i}^H - PH_{t,i})gh_{t,i} = 0, \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.73)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,j}^T - pt_{t,j})gt_{t,j} = 0, \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.74)$$

$$(\pi_t + \pi_{t,j}^T - PT_{t,j})gt_{t,j} = 0, \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.75)$$

Sin pérdida de generalidad podemos sumar todas las restricciones de complementariedad (ecuaciones 4.68 - 4.75).

$$\begin{aligned} & \sum_t \sum_{i \in \Lambda} (eh_{t,i} - gh_{t,i})\pi_{t,i}^H + \sum_t \sum_{i \notin \Lambda} (EH_{t,i} - gh_{t,i})\pi_{t,i}^H + \sum_t \sum_{j \in \Lambda} (et_{t,j} - gt_{t,j})\pi_{t,j}^T + \\ & \sum_t \sum_{j \notin \Lambda} (ET_{t,j} - gh_{t,j})\pi_{t,j}^T + \sum_t \sum_{i \in \Lambda} (\pi_t + \pi_{t,i}^H - ph_{t,i})gh_{t,i} + \sum_t \sum_{i \notin \Lambda} (\pi_t + \pi_{t,i}^H - PH_{t,i})gh_{t,i} + \\ & \sum_t \sum_{j \in \Lambda} (\pi_t + \pi_{t,j}^T - pt_{t,j})gt_{t,j} + \sum_t \sum_{j \notin \Lambda} (\pi_t + \pi_{t,j}^T - PT_{t,j})gt_{t,j} = 0 \end{aligned}$$

Reordenando y usando la igualdad 4.57 obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} ph_{t,i}gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j}gt_{t,j} + \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i}gh_{t,i} + \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j}gt_{t,j} \right] - \sum_{t=1}^T (D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k})\pi_t \\ & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} eh_{t,i}\pi_{t,i}^H - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} et_{t,j}\pi_{t,i}^T - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} EH_{t,i}\pi_{t,i}^H - \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} ET_{t,j}\pi_{t,j}^T = 0 \end{aligned}$$

Esta última relación obtenida es la igualdad primal-dual del problema del segundo nivel. En otras palabras podemos reescribir las restricciones de complementariedad de forma equivalente a la igualdad entre las funciones objetivo del problema de despacho económico y su problema dual asociado (strong duality condition). Este es un resultado conocido de la teoría de programación lineal.

Con todo lo desarrollado hasta esta etapa, la forma final del problema de Programación Matemática con Restricciones de Equilibrio (MPEC) quedará expresado como:

$$\begin{aligned}
& \max_{\{gh_{t,i}, gt_{t,j}, eh_{t,i}, et_{t,j}, ph_{t,i}, pt_{t,j}, \pi_t, v_{t,i}, s_{t,i}\}} \\
& R_\Lambda = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} (\pi_t - CH_{t,i}) gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} (\pi_t - CT_{t,j}) gt_{t,j} \right] \quad (4.76) \\
& \text{s.t:} \quad 0 \leq eh_{t,i} \leq GH_i, \quad 0 \leq et_{t,j} \leq GT_j \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \forall j \in \Lambda \quad (4.77) \\
& \quad v_{t+1,i} = v_{t,i} - C \left[\frac{gh_{t,i}}{\rho_i} + s_{t,i} - \sum_{m \in \Omega_i} \left(\frac{gh_{t,m}}{\rho_m} + s_{t,m} \right) - A_{t,i} \right] \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.78) \\
& \quad V_i^{\min} \leq v_{t+1,i} \leq V_i^{\max} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.79) \\
& \quad v_{T+1,i} \geq V_i^{\text{goal}} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.80) \\
& \quad s_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.81) \\
& \quad \sum_{i=1}^{N_H} gh_{t,i} + \sum_{j=1}^{N_T} gt_{t,j} = D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k} \quad \forall t \quad (4.82) \\
& \quad 0 \leq gh_{t,i} \leq eh_{t,i}, \quad 0 \leq gt_{t,j} \leq et_{t,j} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \forall j \in \Lambda \quad (4.83) \\
& \quad 0 \leq gh_{t,i} \leq EH_{t,i}, \quad 0 \leq gt_{t,j} \leq ET_{t,j} \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda, \forall j \notin \Lambda \quad (4.84) \\
& \quad \pi_t + \pi_{t,i}^H \leq ph_{t,i}, \quad \pi_t + \pi_{t,j}^T \leq pt_{t,j} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \forall j \in \Lambda \quad (4.85) \\
& \quad \pi_t + \pi_{t,i}^H \leq PH_{t,i}, \quad \pi_t + \pi_{t,j}^T \leq PT_{t,j} \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda, \forall j \notin \Lambda \quad (4.86) \\
& \quad \pi_{t,i}^H \leq 0, \quad \pi_{t,j}^T \leq 0 \quad \forall t, i, j \quad (4.87) \\
& \quad \pi_t \text{ irrestrictivo} \quad \forall t \quad (4.88) \\
& \quad \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} ph_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j} gt_{t,j} + \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j} gt_{t,j} \right] - \sum_{t=1}^T (D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k}) \pi_t \\
& \quad - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} eh_{t,i} \pi_{t,i}^H - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} et_{t,j} \pi_{t,j}^T - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} EH_{t,i} \pi_{t,i}^H - \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} ET_{t,j} \pi_{t,j}^T = 0 \quad (4.89)
\end{aligned}$$

4.2.5 Formulación Lineal Equivalente

Tengamos en cuenta que las condiciones KKT del problema de segundo nivel están dadas por las ecuaciones (4.29-4.49). Podemos usar alguna de las igualdades KKT para linealizar la función objetivo.

$$R_{\Lambda} = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} \pi_t gh_{t,i} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} \pi_t gt_{t,j} - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} CH_{t,i} gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} CT_{t,j} gt_{t,j}$$

Usando las ecuaciones 4.29 y 4.31 obtenemos.

$$\begin{aligned} R_{\Lambda} = & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} (ph_{t,i} - \pi_{t,i}^H - \mu_{t,i}^{min}) gh_{t,i} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} (pt_{t,j} - \pi_{t,j}^T - \nu_{t,j}^{min}) gt_{t,j} \\ & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} CH_{t,i} gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} CT_{t,j} gt_{t,j} \end{aligned} \quad (4.90)$$

De las ecuaciones 4.40 y 4.41 tenemos

$$\begin{aligned} \sum_t \sum_{i \in \Lambda} \mu_{t,i}^{min} gh_{t,i} &= 0 \\ \sum_t \sum_{j \in \Lambda} \nu_{t,j}^{min} gt_{t,j} &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando en la relación 4.90

$$\begin{aligned} R_{\Lambda} = & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} ph_{t,i} gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} \pi_{t,i}^H gh_{t,i} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j} gt_{t,j} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} \pi_{t,j}^T gt_{t,j} \\ & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} CH_{t,i} gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} CT_{t,j} gt_{t,j} \end{aligned} \quad (4.91)$$

De las ecuaciones 4.42 y 4.44 tenemos

$$\begin{aligned} eh_{t,i} \pi_{t,i}^H &= gh_{t,i} \pi_{t,i}^H \quad , \quad \forall t, \forall i \\ et_{t,j} \pi_{t,j}^T &= gt_{t,j} \pi_{t,j}^T \quad , \quad \forall t, \forall j \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación 4.91

$$\begin{aligned} R_{\Lambda} = & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} ph_{t,i} gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} \pi_{t,i}^H eh_{t,i} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j} gt_{t,j} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} \pi_{t,j}^T et_{t,j} \\ & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} CH_{t,i} gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} CT_{t,j} gt_{t,j} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Del teorema de igualdad primal-dual para el problema del segundo nivel teníamos la siguiente relación.

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in \Lambda} ph_{t,i}gh_{t,i} + \sum_{j \in \Lambda} pt_{t,j}gt_{t,j} + \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i}gh_{t,i} + \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j}gt_{t,j} \right] - \sum_{t=1}^T (D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k})\pi_t \\ - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} eh_{t,i}\pi_{t,i}^H - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} et_{t,j}\pi_{t,i}^T - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} EH_{t,i}\pi_{t,i}^H - \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} ET_{t,j}\pi_{t,j}^T = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación 4.92 obtenemos la función objetivo linealizada ya que no aparecen términos que contengan productos de variables de interés.

$$\begin{aligned} R_\Lambda = \sum_{t=1}^T (D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k})\pi_t + \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} EH_{t,i}\pi_{t,i}^H + \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} ET_{t,j}\pi_{t,j}^T \quad (4.93) \\ - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i}gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j}gt_{t,j} - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} CH_{t,i}gh_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} CT_{t,j}gt_{t,j} \end{aligned}$$

Ahora linealizaremos la restricción dada por la ecuación 4.89. Para esto **redefinamos primero el producto** $ph_{t,i}gh_{t,i}$ y $pt_{t,j}gt_{t,j}$.

Consideremos que las oferta de precio $ph_{t,i}$ y $pt_{t,j}$ de la compañía Λ para poder ser viable están limitados a estar en $[ph_{t,i}^{min}, ph_{t,i}^{max}]$ y $[pt_{t,j}^{min}, pt_{t,j}^{max}]$ respectivamente. Estos intervalos son predefinidos por la compañía.

Con esta consideración podemos establecer la aproximación discreta.

$$ph_{t,i} = ph_{t,i}^{min} + h_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{k,t,i}^1 \quad (4.94)$$

Donde $x_{k,t,i}^1 \in \{0, 1\}$, $h_{t,i}^1 = \frac{ph_{t,i}^{max} - ph_{t,i}^{min}}{N_1}$ y sin pérdida de generalidad se considera que $N_1 = 2^{K_1} + 1$.

Multiplicando la ecuación anterior por $gh_{t,i}$ y definiendo una nueva variable $z_{k,t,i}^1 = x_{k,t,i}^1 gh_{t,i}$ para $k = 0, \dots, K_1$, obtenemos:

$$ph_{t,i}gh_{t,i} = ph_{t,i}^{min} gh_{t,i} + h_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{k,t,i}^1 \quad (4.95)$$

Esta nueva variable tiene que verificar lo siguiente

$$z_{k,t,i}^1 = \begin{cases} 0, & \text{si } x_{k,t,i}^1 = 0. \\ gh_{t,i}, & \text{si } x_{k,t,i}^1 = 1. \end{cases}$$

Esta última relación puede ser modelada por el siguiente conjunto de restricciones dado que $gh_{t,i} \geq 0$.

$$0 \leq gh_{t,i} - z_{k,t,i}^1 \leq M_1(1 - x_{k,t,i}^1) \quad (4.96)$$

$$0 \leq z_{k,t,i}^1 \leq M_1 x_{k,t,i}^1 \quad (4.97)$$

Donde M_1 es un escalar grande de modo que las ecuaciones 4.96 y 4.97 sean relajadas cuando $x_{k,t,i}^1 = 0$ y $x_{k,t,i}^1 = 1$ respectivamente.

La otra aproximación discreta a considerar es:

$$pt_{t,j} = pt_{t,j}^{min} + h_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_2} 2^k x_{k,t,j}^2 \quad (4.98)$$

Donde $x_{k,t,j}^2 \in \{0, 1\}$, $h_{t,j}^2 = \frac{pt_{t,j}^{max} - pt_{t,j}^{min}}{N_2}$ y sin pérdida de generalidad se considera que $N_2 = 2^{K_2} + 1$.

Multiplicando la ecuación anterior por $gt_{t,j}$ y definiendo una nueva variable $z_{k,t,j}^2 = x_{k,t,j}^2 gt_{t,j}$ para $k = 0, \dots, K_2$, obtenemos:

$$pt_{t,j}gt_{t,j} = pt_{t,j}^{min}gt_{t,j} + h_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_2} 2^k z_{k,t,j}^2 \quad (4.99)$$

Esta nueva variable tiene que verificar lo siguiente

$$z_{k,t,j}^2 = \begin{cases} 0, & \text{si } x_{k,t,j}^2 = 0. \\ gt_{t,j}, & \text{si } x_{k,t,j}^2 = 1. \end{cases}$$

Esta última relación puede ser modelada por el siguiente conjunto de restricciones dado que $gt_{t,j} \geq 0$.

$$0 \leq gt_{t,j} - z_{k,t,j}^2 \leq M_2(1 - x_{k,t,j}^2) \quad (4.100)$$

$$0 \leq z_{k,t,j}^2 \leq M_2 x_{k,t,j}^2 \quad (4.101)$$

Donde M_2 es un escalar grande de modo que las ecuaciones 4.100 y 4.101 sean relajadas cuando $x_{k,t,j}^2 = 0$ y $x_{k,t,j}^2 = 1$ respectivamente.

Redefinamos ahora el producto $eh_{t,i}\pi_{t,i}^H$ y $et_{t,j}\pi_{t,j}^T$. Para esto, consideremos que las oferta de energía $eh_{t,i}$ y $et_{t,j}$ de la compañía Λ para poder ser viable están limitados a estar en $[eh_{t,i}^{min}, eh_{t,i}^{max}]$ y $[et_{t,j}^{min}, et_{t,j}^{max}]$ respectivamente. Estos intervalos son predefinidos por la compañía.

Con esta consideración podemos establecer la aproximación discreta.

$$eh_{t,i} = eh_{t,i}^{min} + \delta_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_3} 2^k y_{k,t,i}^1 \quad (4.102)$$

Donde $y_{k,t,i}^1 \in \{0, 1\}$, $\delta_{t,i}^1 = \frac{eh_{t,i}^{max} - eh_{t,i}^{min}}{N_3}$ y sin pérdida de generalidad se considera que $N_3 = 2^{K_3} + 1$.

Multiplicando la ecuación anterior por $\pi_{t,i}^H$ y definiendo una nueva variable $w_{k,t,i}^1 = y_{k,t,i}^1 \pi_{t,i}^H$ para $k = 0, \dots, K_3$, obtenemos:

$$eh_{t,i} \pi_{t,i}^H = eh_{t,i}^{min} \pi_{t,i}^H + \delta_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_3} 2^k w_{k,t,i}^1 \quad (4.103)$$

Esta nueva variable tiene que verificar lo siguiente

$$w_{k,t,i}^1 = \begin{cases} 0, & \text{si } y_{k,t,i}^1 = 0. \\ \pi_{t,i}^H, & \text{si } y_{k,t,i}^1 = 1. \end{cases}$$

Esta última relación puede ser modelada por el siguiente conjunto de restricciones.

$$0 \leq w_{k,t,i}^1 - \pi_{t,i}^H \leq M_3(1 - y_{k,t,i}^1) \quad (4.104)$$

$$0 \leq -w_{k,t,i}^1 \leq M_3 y_{k,t,i}^1 \quad (4.105)$$

Donde M_3 es un escalar grande de modo que las ecuaciones 4.104 y 4.105 sean relajadas cuando $y_{k,t,i}^1 = 0$ y $y_{k,t,i}^1 = 1$ respectivamente.

La otra aproximación discreta a considerar es:

$$et_{t,j} = et_{t,j}^{min} + \delta_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_4} 2^k y_{k,t,j}^2 \quad (4.106)$$

Donde $y_{k,t,j}^2 \in \{0, 1\}$, $\delta_{t,j}^2 = \frac{et_{t,j}^{max} - et_{t,j}^{min}}{N_4}$ y sin pérdida de generalidad se considera que $N_4 = 2^{K_4} + 1$.

Multiplicando la ecuación anterior por $\pi_{t,j}^T$ y definiendo una nueva variable $w_{k,t,j}^2 = y_{k,t,j}^2 \pi_{t,j}^T$ para $k = 0, \dots, K_4$, obtenemos:

$$et_{t,j} \pi_{t,j}^T = et_{t,j}^{min} \pi_{t,j}^T + \delta_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_4} 2^k w_{k,t,j}^2 \quad (4.107)$$

Esta nueva variable tiene que verificar lo siguiente

$$w_{k,t,j}^2 = \begin{cases} 0, & \text{si } y_{k,t,j}^2 = 0. \\ \pi_{t,j}^T, & \text{si } y_{k,t,j}^2 = 1. \end{cases}$$

Esta última relación puede ser modelada por el siguiente conjunto de restricciones.

$$0 \leq w_{k,t,j}^2 - \pi_{t,j}^T \leq M_4(1 - y_{k,t,j}^2) \quad (4.108)$$

$$0 \leq -w_{k,t,j}^2 \leq M_4 y_{k,t,j}^2 \quad (4.109)$$

Donde M_4 es un escalar grande de modo que las ecuaciones 4.108 y 4.109 sean relajadas cuando $y_{k,t,j}^2 = 0$ y $y_{k,t,j}^2 = 1$ respectivamente.

Aplicando todas las transformaciones descritas al modelo dado por las ecuaciones 4.76 - 4.89 obtenemos el modelo final linealizado siguiente.

$$\max \sum_{t=1}^T (D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k}) \pi_t + \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} E H_{t,i} \pi_{t,i}^H + \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} E T_{t,j} \pi_{t,j}^T - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} P H_{t,i} g h_{t,i}$$

$$- \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} P T_{t,j} g t_{t,j} - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} C H_{t,i} g h_{t,i} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} C T_{t,j} g t_{t,j} \quad (4.110)$$

$$\text{s.t.} \quad p h_{t,i}^{\min} + h_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{k,t,i}^1 \leq p h_{t,i}^{\max}, \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.111)$$

$$p t_{t,j}^{\min} + h_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_2} 2^k x_{k,t,j}^2 \leq p t_{t,j}^{\max}, \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.112)$$

$$e h_{t,i}^{\min} + \delta_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_3} 2^k y_{k,t,i}^1 \leq e h_{t,i}^{\max} = G H_i, \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.113)$$

$$e t_{t,j}^{\min} + \delta_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_4} 2^k y_{k,t,j}^2 \leq e t_{t,j}^{\max} = G T_j, \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.114)$$

$$v_{t+1,i} = v_{t,i} - C \left[\frac{g h_{t,i}}{\rho_i} + s_{t,i} - \sum_{m \in \Omega_i} \left(\frac{g h_{t,m}}{\rho_m} + s_{t,m} \right) - A_{t,i} \right] \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.115)$$

$$V_i^{\min} \leq v_{t+1,i} \leq V_i^{\max} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.116)$$

$$v_{T+1,i} \geq V_i^{\text{goal}} \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.117)$$

$$s_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.118)$$

$$\sum_{i=1}^{N_H} g h_{t,i} + \sum_{j=1}^{N_T} g t_{t,j} = D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k}, \quad \forall t \quad (4.119)$$

$$gh_{t,i} - eh_{t,i}^{min} - \delta_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_3} 2^k y_{k,t,i}^1 \leq 0 \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.120)$$

$$gh_{t,i} \leq EH_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.121)$$

$$gt_{t,j} - et_{t,j}^{min} - \delta_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_4} 2^k y_{k,t,j}^2 \leq 0 \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.122)$$

$$gt_{t,j} \leq ET_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.123)$$

$$gh_{t,i} \geq 0, \quad gt_{t,j} \geq 0 \quad , \quad \forall t, \forall i, \forall j \quad (4.124)$$

$$\pi_t + \pi_{t,i}^H - ph_{t,i}^{min} - h_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{k,t,i}^1 \leq 0 \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda \quad (4.125)$$

$$\pi_t + \pi_{t,i}^H \leq PH_{t,i} \quad , \quad \forall t, \forall i \notin \Lambda \quad (4.126)$$

$$\pi_t + \pi_{t,j}^T - pt_{t,j}^{min} - h_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_2} 2^k x_{k,t,j}^2 \leq 0 \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda \quad (4.127)$$

$$\pi_t + \pi_{t,j}^T \leq PT_{t,j} \quad , \quad \forall t, \forall j \notin \Lambda \quad (4.128)$$

$$\pi_{t,i}^H \leq 0, \quad \pi_{t,j}^T \leq 0 \quad , \quad \forall t, i, j \quad (4.129)$$

$$\pi_t \text{ irrestricto} \quad , \quad \forall t, i, j \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} (ph_{t,i}^{min} gh_{t,i} + h_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{k,t,i}^1) + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} (pt_{t,j}^{min} gt_{t,j} + h_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_2} 2^k z_{k,t,j}^2) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} PH_{t,i} gh_{t,i} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} PT_{t,j} gt_{t,j} - \sum_{t=1}^T (D_t - \sum_{k=1}^{N_R} R_{t,k}) \pi_t \\ & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in \Lambda} (eh_{t,i}^{min} \pi_{t,i}^H + \delta_{t,i}^1 \sum_{k=0}^{K_3} 2^k w_{k,t,i}^1) - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in \Lambda} (et_{t,j}^{min} \pi_{t,j}^T + \delta_{t,j}^2 \sum_{k=0}^{K_4} 2^k w_{k,t,j}^2) \\ & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin \Lambda} EH_{t,i} \pi_{t,i}^H - \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin \Lambda} ET_{t,j} \pi_{t,j}^T = 0 \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$0 \leq gh_{t,i} - z_{k,t,i}^1 \leq M_1(1 - x_{k,t,i}^1) \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \quad \forall k \in K_1 \quad (4.132)$$

$$0 \leq z_{k,t,i}^1 \leq M_1 x_{k,t,i}^1 \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \quad \forall k \in K_1 \quad (4.133)$$

$$0 \leq gt_{t,j} - z_{k,t,j}^2 \leq M_2(1 - x_{k,t,j}^2) \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda, \quad \forall k \in K_2 \quad (4.134)$$

$$0 \leq z_{k,t,j}^2 \leq M_2 x_{k,t,j}^2 \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda, \quad \forall k \in K_2 \quad (4.135)$$

$$0 \leq w_{k,t,i}^1 - \pi_{t,i}^H \leq M_3(1 - y_{k,t,i}^1) \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \quad \forall k \in K_3 \quad (4.136)$$

$$0 \leq -w_{k,t,i}^1 \leq M_3 y_{k,t,i}^1 \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \quad \forall k \in K_3 \quad (4.137)$$

$$0 \leq w_{k,t,j}^2 - \pi_{t,j}^T \leq M_4(1 - y_{k,t,j}^2) \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda, \quad \forall k \in K_4 \quad (4.138)$$

$$0 \leq -w_{k,t,j}^2 \leq M_4 y_{k,t,j}^2 \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda, \quad \forall k \in K_4 \quad (4.139)$$

$$x_{k,t,i}^1 \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \quad \forall k \in K_1 \quad (4.140)$$

$$x_{k,t,j}^2 \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \quad \forall k \in K_2 \quad (4.141)$$

$$y_{k,t,i}^1 \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall t, \forall i \in \Lambda, \quad \forall k \in K_3 \quad (4.142)$$

$$y_{k,t,j}^2 \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall t, \forall j \in \Lambda, \quad \forall k \in K_4 \quad (4.143)$$

4.2.6 Datos y Resultados Computacionales

El primer sistema que consideraremos para validar la metodología desarrollada consiste de una central termoeléctrica ubicado en Chilca y 3 centrales hidroeléctricas en cascada ubicadas en el cauce del río Mantaro en el orden H1, H2, H3. La compañía estratégica GENCO 1 es dueña de la central hidroeléctrica H1 y la central termoeléctrica T1. Las centrales H2 y H3 pertenecen a las compañías GENCO 2 y GENCO 3 respectivamente. Cada central hidroeléctrica esta asociada a un reservorio y cada central de generación está asociado a una unidad generadora equivalente. Por facilidad de cálculo computacional solo consideraremos un periodo de planeamiento de 3 horas y el tiempo de viaje del agua entre dos centrales hidroeléctricas es de una hora.

En la tabla 4.2 se presenta los datos de las centrales hidroeléctricas que consideramos conocidos para nuestro modelo. Estos son el caudal incremental de los reservorios A_t , volumen inicial y límites mínimo y máximo del volumen de agua en el reservorio, productividad de la central hidroeléctrica, capacidad máxima de generación y el costo variable de generación CH. Las afluencias incrementales las estamos considerando constantes para cada periodo.

	A_t	V_1	V^{min}	V^{max}	V^{goal}	ρ	GH	CH
	(m^3/s)	(hm^3)	(hm^3)	(hm^3)	(hm^3)	$(MWh/m^3/s)$	(MWh)	$(\$/MWh)$
H_1	370	1400	1320	1477	1380	1.58	880	0
H_2	475	2795	2283	3340	2786	0.87	1140	0
H_3	669	4700	4300	5100	4696	0.91	1450	0

Tabla 4.2: Datos de las centrales hidroeléctricas del sistema considerado

En la tabla 4.3 se presenta los datos necesarios del generador termoeléctrico

	CT	GT
	$(\$/MWh)$	(MWh)
T1	70.75	1000

Tabla 4.3: Datos de la central termoeléctrica

Las ofertas de precio (PH) y cantidad de energía (EH) para las unidades generadoras que administran las compañías GENCO 2 y GENCO 3 se muestran en la tabla 4.4.

Periodo	GENCO 2 (H2)		GENCO 3 (H3)	
	PH	EH	PH	EH
	(\$/MWh)	(MWh)	(\$/MWh)	(MWh)
1	88.43	1140	88.43	1450
2	88.43	1140	88.43	1450
3	88.43	1140	88.43	1450

Tabla 4.4: Ofertas iniciales de las compañías competidoras

Como se puede apreciar en la tabla 4.4, estamos considerando que GENCO 2 y GENCO 3 ofertan su capacidad máxima de generación y la oferta de precio techo dado por el valor de 88.43 \$/MWh para los tres periodos considerados en el modelamiento. La demanda del sistema se considerará igual a 3000 MWh y será constante para cada intervalo de tiempo. También consideraremos un sistema de barra única, es decir no se tendrá en cuenta las restricciones de las redes de transmisión.

En el apéndice B se presenta el código AMPL utilizado para resolver el modelo MPEC y para la aproximación MILP formulados en este trabajo de investigación. La solución del problema no-lineal (4.76 - 4.89) para la compañía GENCO 1 que administra H1 y T1 con datos de entrada consideradas en las tablas anteriores resulta en las ofertas de precio y cantidad dados en la tabla 4.5.

Periodo	GENCO 1 (H1, T1)			
	eh	et	ph	pt
	(MWh)	(MWh)	(\$/MWh)	(\$/MWh)
1	880	1000	4.40	4.32
2	880	1000	4.40	4.32
3	880	1000	4.40	4.44

Tabla 4.5: Oferta estratégica para GENCO 1 - modelo no-lineal

En cuanto al despacho económico y el precio de despeje del mercado usando el modelo no-lineal tendremos:

Periodo	GENCO 1		GENCO 2	GENCO 3	Precio spot
	gh	gt	gh	gh	π_d
	(MWh)	(MWh)	(MWh)	(MWh)	(\$/MWh)
1	880	1000	502.804	617.196	88.43
2	880	1000	502.804	617.196	88.43
3	880	1000	502.804	617.196	88.43

Tabla 4.6: Despacho económico hidrotérmico - modelo no-lineal

Si la compañía GENCO 1 participara en el mercado hidrotérmico de día en adelanto ofertando lo mostrado en la tabla 4.5 para cada una de las unidades que administra, el **beneficio económico** total que obtendría GENCO 1 usando el modelo no-lineal es: \$ **286495**.

En cuanto a la gestión del reservorio asociado a la unidad hidroeléctrica H1 que administra GENCO 1 tenemos:

Periodo	H1		
	v	s	u
	(hm^3)	(m^3/s)	(m^3/s)
1	1400	1246.55	557
2	1394.84	1253.24	557
3	1389.65	1269.9	557
4	1384.41	-	-

Tabla 4.7: Volumen del reservorio, caudal vertido y caudal turbinado

Ahora usaremos el modelo linealizado para determinar los pares de oferta de precio por unidad de energía y cantidad de energía que debería realizar la compañía GENCO 1 para maximizar su beneficio económico durante su participación en el mercado de día en adelante del sistema hidrotérmico considerado. Los datos de entrada para resolver el modelo linealizado son los mostrados en las tablas 4.2, 4.3 y 4.4. A partir de estos datos y considerando una partición de 2049 nodos tenemos los valores de los parámetros h y δ .

Periodo	GENCO 1 (H1, T1)					
	ph_{max}	pt_{max}	h_1	h_2	δ_1	δ_2
	(\$)	(\$)	(\$)	(\$)	(MWh)	(MWh)
1	88.43	88.43	0.043	0.043	0.429	0.488
2	88.43	88.43	0.043	0.043	0.429	0.488
3	88.43	88.43	0.043	0.043	0.429	0.488

Tabla 4.8: Datos de entrada para el modelo MILP

Ahora que tenemos todos los datos necesarios, la solución del problema MILP (ec. 4.110 - 4.143) para la compañía GENCO 1 respecto a las ofertas de precio por unidad de energía y cantidad de energía resulta:

Periodo	GENCO 1 (H1, T1)			
	eh	et	ph	pt
	(MWh)	(MWh)	(\$/MWh)	(\$/MWh)
1	880	1000	88.387	88.387
2	880	1000	88.387	88.387
3	880	1000	88.387	88.387

Tabla 4.9: Oferta estratégica para GENCO 1 - Modelo MILP

En cuanto al despacho económico y al precio de despeje del mercado usando el modelo MILP obtenemos:

Periodo	GENCO 1		GENCO 2	GENCO 3	Precio spot
	gh	gt	gh	gh	π_d
	(MWh)	(MWh)	(MWh)	(MWh)	(\$/MWh)
1	879.998	999.998	1120	0	88.43
2	879.998	999.98	1120	0	88.43
3	879.998	999.998	1120	0	88.43

Tabla 4.10: Despacho económico hidrotérmico - Modelo MILP

El **beneficio económico** total que obtendría GENCO 1 usando el modelo MILP es: \$ **286495**.

En cuanto a la gestión del reservorio asociado a la unidad hidroeléctrica H1 que administra GENCO 1 tenemos:

Periodo	H1		
	v	s	u
	(hm ³)	(m ³ /s)	(m ³ /s)
1	1400	0	557
2	1399.33	4994.67	557
3	1380.67	0	557
4	1380	-	-

Tabla 4.11: Volumen del reservorio, caudal vertido y caudal turbinado - MILP

A partir de los resultados del modelo MILP, elaboramos una tabla de valores iniciales para $g_i, i \in \Delta$ y para π_d . Con estos valores iniciales se vuelve a resolver el problema no-lineal y lo que se obtiene son resultados muy cercanos a los resultados del modelo MILP, solo que esta vez estamos seguros que estamos resolviendo el problema no-lineal original y estamos obteniendo el máximo global.

La solución del problema no-lineal dados por las ecuaciones 4.76 - 4.89 para la compañía GENCO 1, considerando valores iniciales dados en la tabla 4.10, resulta en las ofertas de precio y cantidad dados en la tabla 4.12.

Periodo	GENCO 1 (H1, T1)			
	eh	et	ph	pt
	(MWh)	(MWh)	(\$/MWh)	(\$/MWh)
1	880	1000	88.39	88.39
2	880	1000	88.39	88.39
3	880	1000	88.39	88.39

Tabla 4.12: Oferta estratégica para GENCO 1 - No lineal mejorado

En cuanto al despacho económico y el precio de despeje del mercado usando el modelo no-lineal con valores iniciales para las variables $g_i, i \in \Delta$ y para π_d tendremos:

Periodo	GENCO 1		GENCO 2	GENCO 3	Precio spot
	gh	gt	gh	gh	π_d
	(MWh)	(MWh)	(MWh)	(MWh)	(\$/MWh)
1	880	1000	1120	0	88.43
2	880	1000	1120	0	88.43
3	880	1000	1120	0	88.43

Tabla 4.13: Despacho económico hidrotérmico - No lineal mejorado

Si la compañía GENCO 1 participara en el mercado hidrotérmico de día en adelante ofertando lo mostrado en la tabla 4.12 para cada una de las unidades que administra, el **beneficio económico** total que obtendría GENCO 1 usando el modelo no-lineal es: \$ **286495**.

En cuanto a la gestión del reservorio asociado a la unidad hidroeléctrica H1 que administra GENCO 1 tenemos:

Periodo	H1		
	v <i>(hm³)</i>	s <i>(m³/s)</i>	u <i>(m³/s)</i>
1	1400	1246.55	557
2	1394.84	1253.24	557
3	1389.65	1269.9	557
4	1384.41	-	-

Tabla 4.14: Volumen del reservorio, caudal vertido y caudal turbinado - No lineal mejorado

Capítulo 5

Conclusiones, Aportes y Sugerencias Para Trabajos Futuros

Un mercado eléctrico es un sistema complejo por la naturaleza particular que tiene la energía eléctrica. Se requiere una infraestructura tecnológica especial para ser generada, transportada, distribuida y una estructura normativa intrincada para ser comercializada. Conforme se van realizando reformas técnicas o normativas en un mercado eléctrico se van presentando nuevos desafíos por resolver. Una reforma importante aplicada en diversos países del mundo es la implantación de un mercado mayorista competitivo de corto plazo basado en ofertas libres más conocido como mercado de día en adelante. Las características más importantes que identificamos para este tipo de mercado son: i) Para participar, las compañías de generación deberán presentar al operador del mercado pares de ofertas de cantidad de energía (MWh) y precio por unidad de energía (\$/MWh) para cada una de las unidades de generación que administra y para cada hora del día siguiente. ii) Con las ofertas recibidas, el operador del mercado resuelve un problema de optimización conocido como despacho económico y determina el precio de despeje (precio spot) del mercado y la generación que debe asignar a cada unidad generadora para mantener el balance oferta - demanda de energía en cada periodo de tiempo considerado mientras busca mantener operativo todo el sistema al menor costo posible. iii) Las compañías son remuneradas con el precio spot y de acuerdo a cuanta energía se les asigna en el despacho económico a cada una de las unidades de generación que administra para cada periodo de tiempo.

Implantar un mercado eléctrico competitivo de día en adelante, trae consigo varios problemas aún pendientes por resolver. Uno de estos problemas es que dado el contexto de un mercado

donde las compañías tienen libertad de decisión en cuanto a que cantidad de energía desean poner a disposición del mercado (MWh) y el precio al que desean comercializar esta energía (\$/MWh) para cada una de las unidades que administra y para cada periodo de tiempo que se considera en el despacho, cómo establecer los pares cantidad - precio óptimos que le permitan a una compañía obtener el máximo beneficio económico. Resolver este problema no solo es de interés para las empresas generadoras; las instituciones reguladoras del mercado también desean estudiar y conocer las estrategias de actuación de los generadores buscando identificar situaciones de manipulación del mercado por parte de compañías con posición dominante.

En este trabajo de investigación se realizó en primer lugar una revisión y análisis crítico del diseño de mercados eléctricos, sustentado ampliamente en el capítulo 1 y en el anexo A de este documento. A partir de este análisis surgió la pregunta **¿cómo se comportaría un mercado eléctrico predominantemente hidrotérmico si se implementara un mercado mayorista de día en adelante basado en ofertas libres?**. La respuesta evidentemente no es sencilla y un aspecto importante a considerar es que en el mundo existe poca experiencia de implementación de este tipo de mercado eléctrico cuando el sistema de generación es predominantemente hidrotérmico como el caso Peruano. La mayoría de trabajos fueron desarrollados para sistemas de energía predominantemente de origen termoeléctrico. Cuando se trabaja en la planificación de sistemas hidrotérmicos ya debe tenerse en cuenta el comportamiento estocástico del recurso hídrico, las consecuencias futuras de decisiones tomadas en cada instante de tiempo, es decir el acoplamiento temporal entre las decisiones, también debe tenerse en cuenta el acoplamiento espacial cuando se trata de centrales hidroeléctricas ubicadas en una misma cuenca. Estos aspectos adicionan complejidad al diseño del mercado eléctrico principalmente cuando la administración del sistema ya no es centralizada.

En este proceso de análisis y con todas las consideraciones mencionadas identificamos un problema interesante que aún no había sido resuelto: **¿Cuál es la estrategia de oferta óptima con la que una compañía de generación eléctrica debería competir en un mercado mayorista de corto plazo o mercado de día en adelante basado en ofertas libres, para obtener el máximo beneficio económico?**. Así el objetivo principal de este trabajo de investigación fue presentar una metodología para formular y resolver el problema de estrategia de oferta óptima en mercados hidrotérmicos competitivos usando para ello la optimización matemática binivel, reformulaciones apropiadas y aproximaciones

novedosas.

El beneficio económico que cada compañía generadora de energía eléctrica obtiene por su participación en un mercado de día en adelante, depende de su habilidad para administrar sus ofertas. Este problema de estrategia de oferta óptima se complica cuando en el mercado existen agentes generadores creadores de precio (*price makers*), debido a que estos pueden alterar el precio de despeje del mercado (precio spot) modificando sus ofertas. En este contexto, ya nos enfrentamos a un problema cíclico en el que las ofertas afectan el precio de despeje del mercado y este precio a su vez afecta las ofertas que hacen las compañías para cada unidad generadora que administra.

Todas las compañías generadoras que participan en un mercado de corto plazo con formación de precio basado en ofertas libres están interesadas en maximizar sus ingresos económicos, mientras que el operador del mercado u operador del sistema desea minimizar el costo total de operación del sistema a lo largo de un horizonte de tiempo considerado. Estos intereses conflictivos y la dependencia cíclica mencionada fueron modelados como un problema de optimización de dos niveles.

El problema de estrategia de oferta óptima es entonces dividido en dos formulaciones dependientes: el problema de maximización del beneficio económico asociado a cada compañía generadora y el problema de despacho económico (market clearing) que resuelve el ISO buscando satisfacer la demanda total al mínimo costo. El primer nivel o problema líder representa la maximización del beneficio económico de la compañía productora y el segundo nivel o problema seguidor es el despacho económico que determina el precio de despeje del mercado (precio spot). Afortunadamente, el segundo nivel es un problema lineal, convexo y de variables continuas y se puede usar las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker para convertir este problema lineal en un sistema de ecuaciones no lineales. Agregando estas ecuaciones al primer nivel del problema convertimos el problema bi-nivel en un problema de optimización no lineal de un solo nivel con una estructura especial conocida como *Mathematical Program with Equilibrium Constraints (MPEC)*. Este nuevo problema no lineal y no convexo no se puede resolver con los métodos de programación no lineal tradicionales como el método del gradiente o el método del lagrangeano aumentado. Para resolver este problema y encontrar la solución óptima, en nuestro trabajo proponemos una reformulación de la función objetivo a una expresión lineal usando el teorema de dualidad fuerte (*strong duality condition*) y una aproximación binaria para las variables oferta de precio y oferta de energía, consiguiendo así

aproximar nuestro problema original por un problema de optimización lineal entero mixto (MILP) que ya puede ser resuelto con métodos tradicionales. Así, considerando conocido la estrategia de ofertas de las compañías competidoras y las principales restricciones asociadas a un sistema hidrotérmico, el MPEC y su aproximación MILP formulados fueron resueltos para cada compañía price-maker que opera unidades generadoras hidroeléctricas y/o termoeléctricas, determinando así el par precio por unidad de energía y cantidad de energía que debe ofertar para cada una de las unidades que administra y maximizar su beneficio económico producto de su participación en el mercado de día en adelante.

El modelo MPEC obtenido luego de la transformación del problema binivel formulado es un problema de optimización no lineal de un nivel y se resolvió usando el language de programación algebraica AMPL y un solver de optimización no lineal conocido como IPOPT (Interior Point Optimizer). La solución que obtenemos para este modelo no lineal sin haber establecido valores iniciales para las variables de interés es un óptimo local. Se resolvió el mismo modelo MPEC estableciendo valores iniciales para las variables de interés y lo que se obtuvo es otro valor óptimo para la función objetivo. En efecto, al tratarse de un problema no lineal, no es posible garantizar que la solución obtenida con el solver IPOPT sea el óptimo global del problema.

Con el modelo de aproximación binaria propuesto para nuestro MPEC se obtiene un problema de Optimización Lineal Entero Mixto (MILP). Este modelo MILP aproximado se resolvió usando el language de programación algebraica AMPL y un solver de optimización lineal, en nuestro caso usamos CPLEX y GUROBI. Lo que se obtiene es el valor de la función objetivo, valores para las variables de oferta de precio por unidad de energía y oferta de cantidad de energía para cada unidad que administra la compañía estratégica, el precio de despeje del mercado y la generación asignada a cada unidad generadora que participará en el despacho económico para cada periodo de tiempo. El valor obtenido para la función objetivo es más alto comparado con los valores obtenidos al resolver directamente el modelo no lineal (MPEC). Aunque inicialmente este resultado nos causó un poco de preocupación, lo que hicimos fue verificar que los valores óptimos para las variables de interés obtenidos al resolver este modelo MILP cumplieran con todas las restricciones de nuestro modelo no lineal, verificando así que la solución obtenida con el modelo MILP es una solución factible del modelo no lineal original. Al hacer la aproximación MILP lo que se hace es definir una región convexa y se obtiene la solución dentro de esta región convexa.

Los valores obtenidos en el modelo MILP para las variables de asignación de generación y precio de despeje del mercado se ingresaron al modelo no lineal principal como valores iniciales para estas variables y lo que se obtiene es una solución óptima global del problema no lineal original.

Habiendo validado nuestra metodología, lo aplicamos a un pequeño sistema hidrotérmico de prueba conformado por 3 unidades de generación hidroeléctrica y una termoeléctrica, agregando así al problema del nivel superior restricciones esenciales correspondientes a la conservación del flujo de agua o ecuaciones de balance hídrico, pero desde un punto de vista determinístico. La estocasticidad relacionada a los flujos naturales de agua que alimentan los embalses, así como la incertidumbre de la demanda de energía en el mercado, los cuales tienen un impacto considerable en el planeamiento de la operación de un sistema hidrotérmico no fueron modeladas en nuestro trabajo ya que nuestro modelamiento está centrado en un horizonte de planificación de corto plazo y las predicciones de flujos de agua y demanda de energía se vuelven más confiables y su comportamiento estocástico real pierde relevancia.

5.1 Aportes

El objetivo principal de este trabajo estuvo enmarcado en la contribución en el proceso de formular y resolver (desarrollo y aplicación de) un modelo matemático para determinar la estrategia de oferta óptima (oferta de precio por unidad de energía y cantidad de energía) que le permita a una compañía generadora maximizar su beneficio económico cuando compite en un mercado hidrotérmico mayorista de corto plazo basado en ofertas libres (*day-ahead market*). Con este fin se realizaron las siguientes contribuciones:

- Aplicación de la optimización binivel en el modelamiento matemático de un mercado eléctrico para determinar el par óptimo de precio por unidad de energía ($\$/MWh$) y cantidad de energía (MWh) que debe ofertar una compañía eléctrica creadora de precios para cada unidad generadora que administra cuando desea competir en un mercado mayorista hidrotérmico de corto plazo basado en ofertas libres y conseguir el máximo beneficio económico posible.
- Método alternativo de solución mediante la transformación de un problema de optimización binivel a un problema no-lineal de un solo nivel conocido como problema de programación matemática con restricciones de equilibrio (MPEC).

- Método alternativo de aproximación de un problema cuadrático (no-lineal) mediante un problema de Programación Lineal Entero Mixto (MILP).
- Modelamiento de un mercado eléctrico para determinar la estrategia de oferta óptima (oferta de precio por unidad de energía y cantidad de energía) de una compañía que administra unidades generadoras hidroeléctricas y termoeléctricas dadas las ofertas de las compañías competidoras y un marco determinístico para los flujos de agua que alimentan los reservorios asociados a las centrales hidroeléctricas y para la demanda del sistema.

5.2 Trabajos futuros

Queda pendiente la realización de los siguientes trabajos referentes a la metodología propuesta en nuestro trabajo de investigación.

- Considerar en la formulación del problema seguidor o problema asociado al despacho económico, restricciones como el flujo óptimo de potencia (consideración de las redes de transmisión), restricciones asociadas al compromiso de unidades (unit commitment) y otras extensiones adicionales.
- Considerar en la formulación del problema líder el comportamiento estocástico de los flujos de agua en las ecuaciones de balance hídrico. Es decir considerar el vínculo entre la planificación de mediano plazo con la planificación de corto plazo para la elaboración de la estrategia de ofertas óptima.
- Formular un modelo de equilibrio con restricciones de equilibrio (EPEC) donde no se considere conocido el par de ofertas de precio por unidad de energía y cantidad de energía de las compañías competidoras.
- Considerar un mercado de ofertas libres por el lado de la demanda. Es decir, que la demanda participe en el mercado mayorista ofertando pares de compra con: precio por unidad de energía y cantidad de energía que están dispuestos a comprar en cada periodo de tiempo.
- Habiendo comprendido el método propuesto, en trabajos futuros se podrá ir complicando el modelo hasta considerar la aproximación DC del flujo de carga en las redes

de transmisión, esto último permitirá obtener la energía que será despachada en cada nodo y los precios marginales locales (Locational Marginal Prices - LMPs).

Apéndice A

Artículo TECNIA - UNI

J. Lozano et al.

61

El Mercado Eléctrico Mayorista: Agentes y Modelos de Organización

Wholesale power market: agents and organization models

Jean Lozano^{1*}, Jaime Luyo¹, Yuri Molina²

¹Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 510, Lima - Perú

²Centro de Energías Alternativas e Renováveis, Universidade Federal da Paraíba, Cidade Universitária - João Pessoa - PB - Brasil

Recibido : 18/12/2017 Aceptado: 01/02/2018

RESUMEN

En este artículo se presenta una revisión de los modelos que sirvieron como base para el diseño de mercados eléctricos competitivos actualmente en funcionamiento en la mayor parte del mundo. Se explica en primer lugar las principales características de la electricidad que lo diferencian de cualquier otro producto que puede ser comercializado en un mercado organizado. Se describe a los agentes que pueden participar en un mercado eléctrico competitivo. Se presenta una clasificación del mercado eléctrico de acuerdo al grado de competencia dentro del contexto de liberalización y se hace un análisis de los modelos de organización y operación de mercados eléctricos centralizados con competencia en el mercado mayorista.

Palabras clave: (diseño, mercado eléctrico, organización, operación, liberalización)

ABSTRACT

This article presents a review of models that served as the basis for the design of competitive electricity markets currently in operation in most of the world. First, we explain the main characteristics of electricity that differentiate it from any other product that can be marketed in an organized market. Then, we describe the agents that can participate in the electricity market and we present a market classification according to the degree of competition within the current context of liberalization. Finally, we made an analysis of the models of organization and operation of electricity markets with competition in the wholesale market.

Keywords: (design, electricity market, organization, operation, liberalization)

1. INTRODUCCIÓN

La realización del presente estudio se justifica por dos razones principales. La primera es que para analizar la problemática actual de un mercado eléctrico se requiere del entendimiento previo de su modelo de organización y operación así como de los mecanismos de regulación y supervisión desarrollados para las diferentes actividades involucradas en su funcionamiento. En segundo lugar, no existe disponible en la bibliografía una revisión clara y completa del tema. En este sentido, esperamos que el presente artículo sea de mucha utilidad para aquellos estudiantes, profesionales y público en general que desean tener un conocimiento introductorio sobre el diseño de los mercados eléctricos.

La electricidad es un energético fundamental de las sociedades modernas y su suministro impacta directamente en el desarrollo social y económico de las naciones. Por esta razón, es fundamental que el suministro de este energético sea realizado de un modo seguro, confiable, eficiente y económico [1].

Con el fin de lograr estos objetivos, en las últimas décadas se vienen realizando continuas e importantes reformas en el sector eléctrico en países con diferentes niveles de industrialización. En este contexto de un sector eléctrico en constante proceso de cambio y búsqueda de mejores formas de organización y operación que fomenten la eficiencia y la sostenibilidad del servicio, incluyendo los aspectos medioambientales, se hace necesario una continua investigación y discusión de la problemática del sector en particular del diseño de mercados eléctricos.

* Correspondencia:
E-mail: jeanlozanop@gmail.com

Un mercado eléctrico es un sistema económico complejo de diseñar y analizar debido principalmente a las características particulares de la electricidad y a la complejidad técnica que implica establecer y operar un sistema interconectado para su suministro.

Antes de analizar la estructura y los principales modelos de organización que sirvieron como base para el diseño de mercados eléctricos competitivos actualmente en funcionamiento en la mayor parte del mundo, presentaremos una revisión previa de las principales características técnicas necesarias para el suministro de la energía eléctrica y de las características económicas de la electricidad como producto a ser comercializado.

La electricidad hoy en día es ampliamente considerada como un commodity. Como commodity, este se compra y se vende tanto como potencia y energía, con varios atributos que se comercializan en los mercados eléctricos. Sin embargo, este energético tiene algunas características únicas que lo distinguen de casi todos los demás commodities que se pueden comercializar dentro de un mercado organizado.

En primer lugar, la principal característica de la electricidad es que este no puede almacenarse en grandes cantidades ni inventariarse. Por lo tanto, la electricidad tiene que ser generada y transmitida al mismo tiempo que es consumida. En todo momento debe mantenerse el equilibrio entre la generación (oferta) y la demanda. El hecho de que la demanda de electricidad tenga que ser satisfecha en tiempo real tiene dos implicancias importantes sobre el sistema. Primero que se necesita contar con una capacidad de generación instalada que pueda satisfacer la demanda máxima del sistema en tiempo real y la segunda es que se necesita contar con capacidad de reserva en caso de que se produjese eventos inesperados.

En segundo lugar, es importante considerar la peculiaridad de la electricidad para su transporte ya que este no puede ser enviado en paquetes etiquetados. Llevar la energía eléctrica desde los centros de generación hacia los centros de consumo requiere de extensas redes de transmisión y distribución que interconectan todo el sistema y tienen que funcionar como un todo integrado. Una vez inyectada la energía eléctrica al sistema, la ruta por la que se transmite esta energía no puede ser elegida a voluntad, este es determinado por las leyes físicas (leyes de Kirchhoff) donde la distribución de corriente depende de la impedancia en las líneas de transporte y otros elementos a través del cual fluye la electricidad. Las leyes físicas establecen además que las distintas rutas de transmisión y distribución interconectadas son altamente interdependientes, esto significa que cualquier cambio en la red de transmisión (problemas de congestión causado por incrementos súbitos de la demanda, conexión y desconexión de cargas, fallas inesperadas en el sistema de transmisión, etc.) causa una reconfiguración instantánea del flujo de carga y este puede causar efectos significativos en las otras

instalaciones del sistema interconectado. Excepto en casos muy simples, todo lo que podemos conocer es la cantidad de energía eléctrica que es inyectada al sistema interconectado en un nodo o barra del sistema y la cantidad de energía que es retirada del sistema en otro nodo. Todos los generadores que participan en el mercado inyectan energía al sistema de transmisión en nodos determinados y todas las cargas (demanda) retiran la energía del sistema interconectado en nodos determinados. En este contexto, es imposible distinguir quien retira la energía de quien y no es posible garantizar la ejecución física de los contratos bilaterales.

Como consecuencia de las características mencionadas líneas arriba es necesario distinguir entre la operación física del sistema para mantener el equilibrio dinámico en tiempo real entre la oferta de generación y la demanda y las transacciones financieras que pueden existir entre los participantes del mercado eléctrico. Garantizar el abastecimiento seguro, estable y confiable en tiempo real requiere usualmente de una institución independiente y reconocida por todos los agentes participantes del sistema eléctrico que se encargue exclusivamente de la operación del sistema físico con independencia de los acuerdos comerciales que puedan existir entre productores y consumidores.

En cuarto lugar, en el sector eléctrico existen diversas tecnologías que son eficientes para la generación de energía eléctrica. Algunas de ellas, como la generación hidráulica o nuclear, requieren grandes inversiones para su construcción pero tienen menores costos operativos lo que las hace adecuadas para abastecer grandes cantidades de energía. Otras tecnologías, como la generación termoeléctrica (basada en combustibles fósiles), tienen menores costos de inversión pero presentan altos costos variables de operación, por lo que son adecuados para abastecer pequeñas o medianas cantidades de energía. En los últimos años la disminución del costo de inversión y operación de centrales de generación basadas en recursos renovables no convencionales (solar y eólico) está impulsando a que muchos países los incorporen de manera apreciable dentro de su parque generador.

De acuerdo a la disponibilidad de recursos de cada país, todas estas tecnologías pueden ser combinadas para lograr un suministro eficiente de energía eléctrica y al menor costo posible.

En quinto lugar, las actividades de transporte de electricidad (transmisión y distribución) implican usualmente grandes costos hundidos y no se hace funcional fomentar la competencia (no resulta económico ni ambientalmente amigable construir múltiples líneas de transmisión y/o distribución que compitan entre ellas para el transporte de energía). Para hacer atractiva la inversión en esta actividad y salvaguardar la eficiencia productiva se entregan concesiones exclusivas (argumentos de monopolios naturales) y se establecen mecanismos de pago

apropiados por el uso de la red. Estas características motivan diversas necesidades como las referidas a la regulación de los segmentos monopólicos y las decisiones de inversión en la transmisión.

En el diseño del mercado eléctrico se deben tomar en cuenta todas estas características y necesidades, estableciendo las funciones de los diferentes agentes, las transacciones factibles, los mecanismos de operación del sistema y los mecanismos de formación de precios. Debido a las características económicas y técnicas de la industria eléctrica, existen diversas maneras de organizar el mercado eléctrico [2].

2. AGENTES PARTICIPANTES EN UN MERCADO ELÉCTRICO LIBERALIZADO (Stakeholders)

Las peculiaridades de la electricidad y la complejidad en la planificación, coordinación y operación de una red eléctrica interconectada, llevaron a que en el pasado en la mayoría de países el sector eléctrico fuera administrado y operado por un monopolio estatal verticalmente integrado. Estas compañías tenían el control absoluto de todas las actividades desde la generación de la energía hasta la distribución a los usuarios finales. Subsistía la idea de que era difícil coordinar la generación y transmisión como empresas separadas, debido a que debía hacerse la operación en forma integrada, además de planificarse en forma conjunta las inversiones en generación y transmisión [3]. Aunque los modelos verticalmente integrados funcionaron razonablemente bien durante la mayor parte del siglo XX, siendo capaces de atender aumentos constantes y rápidos de la demanda, también es cierto que la ausencia de competencia provocó una pérdida de miedo al riesgo, generando muchas veces excesos de inversión en capacidad, malas decisiones en la elección de tecnologías y fuentes primarias, politización de los procesos de inversión y grandes dificultades en los procesos de regulación por la evidente asimetría de información.

Desde la segunda mitad de los años 80, producto del cuestionamiento generalizado sobre la eficiencia de los monopolios estatales en las empresas de servicios públicos, el proceso de liberalización de la industria eléctrica ocupa un lugar destacado en los programas político energético de muchos países. Con el fin de atraer la inversión privada, promover la competencia y mejorar la eficiencia económica del sector, en la mayoría de países pioneros en las reformas se propuso primero una reestructuración del sector con varias medidas, entre ellas la separación de la industria eléctrica en actividades diferenciadas (generación, transmisión, distribución y comercialización) y promoción de la competencia donde este sea posible manteniéndose el Gobierno solo como regulador y supervisor del sistema, principalmente en las

actividades donde por su naturaleza no se podía introducir competencia (transmisión y distribución) [4]. Desde las primeras reformas realizadas en cada país, la discusión sobre como introducir competencia y diseñar mercados con los mecanismos de regulación y supervisión apropiados, constituye hasta hoy uno de los mayores desafíos de las teorías de regulación [5].

De acuerdo al modelo de mercado eléctrico existen variaciones sobre las formas de organizar los intercambios físicos y comerciales. Sin embargo, los tipos de agentes participantes, las funciones y necesidades que presentan los mercados eléctricos liberalizados son esencialmente las mismas.

En la industria eléctrica se distinguen como actividades físicas necesarias para el suministro: la generación, la operación física del sistema, el transporte a grandes distancias en alta tensión y la distribución en áreas más pequeñas a menor tensión. Los agentes que cumplen estas funciones de carácter físico en el sistema son las empresas generadoras (Genco), empresas de transmisión (Transco), el operador del sistema (system operator - SO) y las empresas distribuidoras (Disco). Como actividades comerciales se distingue entre el comercio en el mercado mayorista (*wholesale market*) entre los agentes generadores con los distribuidores, grandes clientes, comercializadores (*retailers*) y/o con otros agentes generadores y el comercio minorista (*retail market*) entre los distribuidores o comercializadores y los consumidores finales.

En cuanto a los agentes que pueden participar en un mercado eléctrico liberalizado se tiene:

Empresas Generadoras (Genco): Son aquellos agentes que producen energía eléctrica en sus centrales y la ofrecen al mercado. En función a la tecnología de producción empleada se pueden clasificar en:

- **Generación Nuclear:** Con esta tecnología se aprovecha el calor obtenido mediante la fisión de los núcleos de uranio para producir energía eléctrica. Los costos de inversión de estas centrales son elevadas y sus costos variables de producción son relativamente bajos. Estas centrales tienen una capacidad de respuesta a la demanda y de regulación muy limitada. Por esta razón, son centrales de base y en general el precio de sus ofertas de energía dentro de un mercado liberalizado tienden a ser próximos a cero con el fin de asegurar su despacho.
- **Generación con carbón:** Son las centrales termoeléctricas clásicas que aprovechan el calor liberado de la combustión del carbón para la producción de electricidad mediante un ciclo termodinámico agua/vapor. Aunque su puesta en marcha toma en general entre 8 y 12 horas, estas centrales tienen una buena flexibilidad en su capacidad de regular su producción (el orden de minutos para subir o bajar la producción desde una

carga parcial). Por otro lado, estas centrales son las mayores contaminantes del planeta.

- **Generación con biomasa:** Su funcionamiento es similar a las centrales de carbón. Sin embargo, el hecho de usar como combustible la biomasa les otorga en algunos países algunos beneficios como primas por la energía que producen.
- **Generación diésel:** Son centrales termoeléctricas de encendido rápido y muy buena flexibilidad en su capacidad de regulación de su producción. Se usa diésel como combustible. Este recurso es en general más caro que otro tipo de combustibles fósiles lo que hace que el funcionamiento de estas plantas se limite en muchos países a las horas punta o de mayor demanda.
- **Generación con gas natural:** Son centrales termoeléctricas que usan el gas natural como combustible. Estas centrales pueden ser de ciclo simple de turbina de gas o de ciclo combinado con turbina de gas y turbina de vapor. Tienen mayor flexibilidad operativa que las centrales clásicas de carbón pero con un costo de combustible generalmente más elevado.
- **Generación hidráulica:** Es la más flexible de todas las tecnologías. Se aprovecha la energía cinética o potencial del agua para generar energía mecánica y finalmente energía eléctrica. Estas centrales son en general consideradas limpias puesto que no emite productos contaminantes. Sin embargo, dependiendo del tamaño pueden producir un gran impacto ambiental debido a la construcción de represas que inundan grandes extensiones de terreno y modifican el caudal y calidad del agua de los ríos. El costo variable de producción de estas centrales es prácticamente nulo.
- **Generación eólica:** Estas centrales aprovechan la energía del viento para su funcionamiento y la mayor dificultad para estos productores está en la previsibilidad de su producción. Las ofertas de generación al mercado eléctrico consisten esencialmente en indicar hora a hora para el día siguiente el precio mínimo al que estaría dispuesto a vender y la cantidad de energía que se va a producir. Aquí es donde los productores eólicos tienen que recurrir a sofisticados modelos de predicción de producción para el día siguiente, so pena de incurrir en importantes penalizaciones por no cumplir su compromiso. El exceso o la falta de producción de una central debe compensarse en tiempo real a través de la producción de otra central de alta flexibilidad en producción por cuyo servicio, llamada de regulación cobra un precio sensiblemente mayor que el del mercado diario.
- **Generación termosolar:** Este tipo de centrales colecta la energía solar haciendo uso de espejos reflectores lo que permite generar vapor de agua que finalmente se usa para generar energía eléctrica. La energía solar recogida durante el día

también puede almacenarse en otros medios líquidos, sólidos o de cambio de fase como sal fundida. Por la noche se puede extraer la energía del medio de almacenamiento para hacer funcionar la central.

- **Generación solar fotovoltaica:** Estas centrales usan los fotones solares que impactan sobre las placas solares y movilizan electrones generando una diferencia de potencial (voltaje) en los terminales de la placa. Este tipo de centrales necesitan grandes extensiones de terreno para su funcionamiento a gran escala. No tienen capacidad de regulación y la predicción de su producción es limitada.
- **Productores especiales:** Corresponde a productores no convencionales como la cogeneración. Este consiste en la generación simultánea de electricidad y de calor útil usando turbinas de gas o motores diésel. El calor puede ser usado para un proceso industrial o para climatización. Este tipo de instalaciones normalmente se limita a aceptar el precio resultante del mercado ya que ofertarán su producción eléctrica a precio cero para despachar su energía.
- **Empresas Transportistas (Transco):** Son aquellas que transportan la energía eléctrica a largas distancias a través de redes de alta tensión (mayores a 220kV) desde las centrales de generación hasta las subestaciones de distribución o hasta las estaciones de los grandes clientes industriales. Aún en mercados liberalizados es usual que la actividad de transmisión sea una actividad regulada.
- **Empresas Distribuidoras (Disco):** Son los agentes que distribuyen la energía eléctrica a través de sus redes de distribución de media y baja tensión hasta los consumidores finales. Esta actividad también es regulada, otorgándose áreas de concesión definidas. La distribución de energía eléctrica se realiza en dos etapas. La primera etapa corresponde al reparto que se hacen usualmente en forma de anillos con tensiones entre 25 y 132kV alrededor de los grandes centros de consumo. La segunda etapa es la etapa de distribución propiamente dicha, con tensiones comprendidas en 3 y 30kV hasta llegar a los centros de transformación y de 125 a 400 V en las líneas de baja tensión para el suministro final a los clientes. Su diseño es usualmente radial.

En algunos mercados las empresas distribuidoras ejercen también el papel de comercializadores ante aquellos consumidores que no contratan su suministro con ningún agente comercializador.

Comercializadores (retailers): Los comercializadores son aquellos agentes que compran la energía eléctrica

en el mercado eléctrico para venderlo a sus clientes finales. Para ello deben pagar un peaje a la empresa transportista y/o a la empresa distribuidora por utilizar sus redes. Los comercializadores de energía eléctrica deben prever la demanda de sus clientes y realizar las pertinentes ofertas de compra en el mercado eléctrico. En general, el precio de compra que se indica en estas ofertas será el máximo posible en los mercados donde se ha establecido un precio techo o un precio suficientemente alto como para asegurarse de que la oferta de compra sea casada siempre. En algunos mercados eléctricos existen los denominados "comercializadores de último recurso" quienes suministran la energía a los consumidores que no desean o lo logran firmar un contrato con un comercializador al uso a un precio libremente pactado. En estos casos, el precio de la energía eléctrica es fijado a través de subastas específicas extraordinarias o en última instancia por el regulador.

Consumidores: Los agentes consumidores son aquellos que compran la energía eléctrica para su consumo final en virtud de un contrato con un comercializador, distribuidor o directamente en el mercado eléctrico. En la mayoría de casos es posible clasificar a los consumidores en dos grandes segmentos o grupos en función de su volumen de consumo de energía. El segmento regulado corresponde a clientes con bajo consumo (usualmente clientes residenciales) y sólo pueden contratar con un comercializador o distribuidor en función de tarifas reguladas. El segmento libre corresponde a los grandes consumidores de energía (usuarios comerciales e industriales) que ya tienen poder de negociación y contratan libremente con comercializadores, distribuidores o directamente con generadoras mediante contratos bilaterales sin intervención del regulador.

En cuanto a las necesidades operacionales de un mercado eléctrico se tiene:

La operación física: Dada las características técnicas de los sistemas eléctricos interconectados de gran tamaño. La operación física responde a la necesidad de mantener un suministro seguro, estable y confiable en tiempo real. En este sentido, es necesario la creación de una institución que se encargue exclusivamente de la operación física del sistema. Esta entidad puede ser una empresa transmisora o un operador independiente (Independent System Operator - ISO).

La entidad responsable de la operación física tendrá tres actividades fundamentales para asegurar el funcionamiento físico del sistema [6].

- Coordinar la producción de energía de las unidades generadoras (despacho) en tiempo real según la demanda o carga requerida en cada nodo o barra del sistema.
- Administrar las redes de transmisión.
- Administrar los servicios complementarios o auxiliares (las reservas en generación y transmisión

que permitan enfrentar contingencias y asegurar la estabilidad y confiabilidad del sistema).

Para garantizar la estabilidad del sistema es crítico controlar variables como: frecuencia, voltaje, flujos máximos por las líneas de transmisión, equilibrio generación - carga, etc.

La operación del mercado: En todo mercado eléctrico se debe garantizar el funcionamiento del sistema interconectado haciendo uso óptimo y económico de los recursos disponibles buscando minimizar el costo total del sistema y/o maximizando el beneficio social (operación económica del sistema). Además, se debe satisfacer las necesidades de todos los agentes participantes en términos de transparencia en los procedimientos, toma de decisiones y disponibilidad de información.

En la mayoría de mercados eléctricos liberalizados actualmente en funcionamiento, es usual que el organismo encargado de la operación del mercado tenga la administración de una bolsa de energía (power exchange), que corresponde a una instancia de coordinación económica donde se ordenan las ofertas de compra-venta de energía y el óptimo económico se alcanza al igualar las ofertas de los generadores y la demanda del sistema, determinando un precio de despeje del mercado que es aceptado por todos los participantes. Junto con la coordinación económica, el organismo encargado de la operación de mercado cumple también la función de coordinación comercial. Debe coordinar los intercambios comerciales entre los diferentes agentes del mercado, en base a los precios definidos en la bolsa. Entre las tareas que debe realizar dentro de esta coordinación comercial está la facturación, las liquidaciones en diferentes horizontes de tiempo (mensual, semanal o diario) y el manejo de diferentes fondos necesarios para el funcionamiento del mercado [7].

El operador de mercado (Market Operator) suele ser una entidad independiente sin fines de lucro.

En algunos países latinoamericanos (Perú, Chile, Colombia, Bolivia) es usual que una misma institución se encargue de la operación física del sistema y de la operación del mercado.

3. CLASIFICACIÓN GENERAL DE MERCADOS ELÉCTRICOS

Las reformas estructurales y regulatorias impulsaron la creación de mercados eléctricos competitivos. La competencia en la industria eléctrica significa generalmente competencia en la producción (generación) de electricidad y en la actividad de comercialización (venta de energía al consumidor final). Las actividades de transporte de electricidad (transmisión y distribución) no pueden ser competitivos, estos son monopolios naturales, tienen que servir a todos y tienen que ser regulados para evitar sobrecargos en el servicio. La mayoría de países aplican

a estas actividades (transmisión y distribución) dos grandes tipos de regulación de precios: la regulación por tasa de retorno (modelo americano) y la regulación por desempeño o basada en incentivos (modelo británico) [3].

Como en todo mercado organizado, los principales elementos que hay que definir son el conjunto de reglas, instrucciones e instrumentos necesarios para su funcionamiento; esto se conoce como el diseño del mercado eléctrico. En esta sección presentaremos una clasificación de los mercados eléctricos de acuerdo al grado de competencia que se puede introducir en el sistema. La mayoría de países que siguieron el proceso de liberalización años más tarde adoptaron como base uno de estos esquemas y sobre esta base continuaron las reformas y se implementaron regulaciones basadas en sus propias circunstancias y características.

Sea cual sea el diseño de mercado eléctrico adoptado, existen objetivos esenciales que se deben mantener al establecer un mercado de electricidad liberalizado aunque estos objetivos parezcan parcial o totalmente contradictorios [5]: i) garantizar el suministro de electricidad seguro, estable, continuo y de calidad (operación física del sistema) ii) garantizar la operación económica del sistema, es decir reducir en la mayor medida posible el precio de la electricidad pero basado en costos reales y iii) garantizar el menor impacto ambiental posible con el funcionamiento del sistema.

Aunque no existe una clasificación única aceptada internacionalmente, es posible distinguir 4 tipos de acuerdo al grado de competencia que se introduce en el sistema [4]. i) Monopolio verticalmente integrado que ya discutimos anteriormente ii) Modelo de comprador único (*single buyer model*) iii) Modelo con competencia mayorista (*wholesale competition*) y iv) Modelo con competencia minorista (*retail competition*).

3.1 Mercado Eléctrico con Comprador único

El modelo de comprador único fue uno de los primeros intentos por introducir competencia en el sector eléctrico. En este modelo existe una entidad compradora única (*single buyer*) que actúa como intermediario en la compra y venta de toda la energía a nivel mayorista. Los gobiernos de muchos países autorizaron la inversión privada y competencia en el submercado de generación permitiendo la participación de productores independientes de energía (*independent power producers - IPPs*). Estos IPPs tienen que vender la totalidad de la energía producida a la agencia compradora que en la mayoría de casos es una entidad estatal que se encarga de la operación física de las redes de transmisión y distribución y del suministro a los clientes finales.

3.2 Mercado Eléctrico con Competencia Mayorista

En este modelo, todos los generadores (Genco) que forman parte del sistema eléctrico de potencia compiten entre sí en condiciones similares para

establecer contratos de venta de energía de largo plazo con las empresas distribuidoras (Disco) y/o grandes consumidores (clientes industriales) y compiten también por ofertar su producción en el mercado mayorista de corto plazo (*wholesale spot market*) que es administrado por el operador del mercado eléctrico. Las redes de transmisión son el sistema físico abierto a todos que permite esta libre competencia y el funcionamiento de un mercado mayorista de energía eléctrica. En la Figura 1 se esquematiza el funcionamiento de este modelo [4] y como se puede apreciar todas las compras se hacen a nivel del mercado mayorista de energía el cual toma la forma de una piscina (*pool*) de energía donde los generadores inyectan y los consumidores pueden retirar la energía.

En este modelo de mercado eléctrico las empresas distribuidoras (Disco) son las empresas encargadas de operar las redes de distribución y suministrar (vender) la energía al consumidor final dentro de su área de concesión. A diferencia de los grandes consumidores los usuarios finales pequeños y medianos no tienen la libertad de elegir a su suministrador. Las empresas distribuidoras pueden acordar contratos de largo plazo con las generadoras lo que les permite estabilizar el precio de sus compras de electricidad.

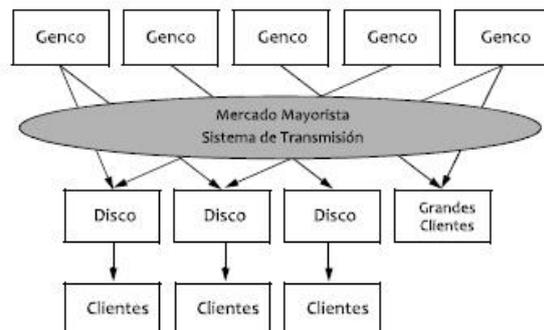


Figura 1. Mercado eléctrico con competencia mayorista

En un esquema básico de este modelo, solo las empresas generadoras pueden participar del mercado mayorista spot. Las generadoras con capacidad insuficiente para cumplir con sus contratos o que hayan sido desplazados del despacho adquieren electricidad de otras generadoras con capacidad disponible en el mercado mayorista spot y de esta manera cubren su déficit y pueden cumplir con sus compromisos contractuales. En algunos mercados más competitivos donde las distribuidoras y los grandes clientes pueden participar en el mercado mayorista spot, estos requieren tomar las mejores ofertas de las empresas generadoras, lo que impulsa la participación de corredores (*brokers*) dentro de las llamadas bolsas de energía.

3.3 Mercado Eléctrico con Competencia Minorista

En este modelo se considera por defecto la competencia en el mercado mayorista donde los generadores compiten por establecer contratos de suministro con comercializadores (*retailers*) y grandes consumidores y se incorpora el funcionamiento de un mercado minorista en el que las empresas comercializadoras minoristas y/o distribuidoras compiten entre ellas para la venta de energía a los usuarios finales. La red de distribución es el sistema físico que permite el funcionamiento de este mercado tal como se muestra en la **figura 2** [4].

Los consumidores finales pueden dentro de este modelo elegir libremente a sus suministradores (*retailers*), escogiéndolos de acuerdo a su conveniencia (bajo precio y calidad); en algunos casos las mismas empresas distribuidoras pueden participar como minoristas, mientras que en otros casos están limitadas a sus funciones en la operación de las redes de distribución.

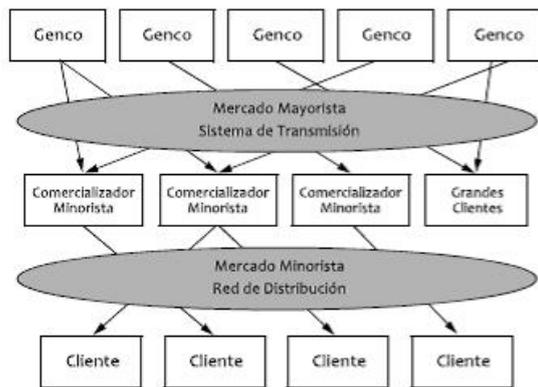


Figura 2. Mercado eléctrico con competencia minorista

En este modelo de organización es usual que tanto los ofertantes de energía (generadoras) y consumidores (distribuidores, comercializadores y grandes clientes) participen del mercado mayorista spot en las denominadas bolsas de energía.

4. DISEÑO DE MERCADOS ELÉCTRICOS CON COMPETENCIA MAYORISTA

El principio fundamental en el cual se basa la formación de un mercado eléctrico competitivo es la existencia de un mercado mayorista organizado de electricidad, cuya condicionante es la coordinación entre los diversos agentes participantes del mercado (generadores, transportistas y consumidores). En este sentido, dentro de los modelos que incorporan competencia en el mercado mayorista (*wholesale* y *retail*) es posible distinguir dos modelos principales de organización y operación: a) Mercado Centralizado y b) Modelo de contratos bilaterales o Mercado Descentralizado [8].

Ambas formas representan los postulados de las dos escuelas tradicionales de organización de mercados eléctricos. Por un lado se encuentran aquellos que sostienen que el mercado debe organizarse en torno a un ente independiente con poder discrecional sobre los agentes, que velando por el interés global de los participantes busca optimizar centralizadamente la operación económica del sistema organizando así el despacho de las unidades como si tuviese un solo dueño. Por el contrario la forma descentralizada, responde al modelo de organización donde son los agentes quienes bajo determinadas consideraciones toman sus propias decisiones en lo que respecta al despacho de las unidades sin la intervención directa de un organismo central superior. En otras palabras, el modelo de mercado centralizado defiende la idea de que debe existir un organismo central el cual debe conducir el mercado para lograr la eficiencia económica, mientras que el modelo descentralizado se basa en que la eficiencia económica en el mercado (señal de precio eficiente) se logra a través de transacciones bilaterales directas entre los participantes. El óptimo se espera alcanzar por medio de los mecanismos de mercado y la competencia al interior del sector [9].

Cada país que inició el proceso de liberalización de su sector eléctrico adoptó uno de estos modelos de organización o combinación de estos ya que no son mutuamente excluyentes. Sobre estos modelos continúan reformas y se implementan regulaciones basadas en sus propias características y circunstancias. En los últimos años, la incorporación de políticas medioambientales y la alta promoción en incorporación de energías renovables no convencionales (solar, eólico) en los sistemas eléctricos está llevando en muchos países a la revisión de los modelos de organización de mercados eléctricos para la implementación de mecanismos regulatorios que permitan a estas nuevas tecnologías incorporarse adecuadamente al sistema física y económicamente.

Por las características particulares de la electricidad y del sistema eléctrico en general no es posible implementar un mercado eléctrico basado completamente en contratos bilaterales. Por este motivo, el modelo de mercado eléctricos centralizado es el más usado en el mundo y puede adoptar la forma de Power Pools (PP) o Power Exchanges (PE). Este último es un modelo híbrido ya que incorpora los contratos bilaterales físicos en su diseño como explicaremos más adelante.

4.1 El modelo Poolco (Power Pool Markets)

El concepto principal de un mercado centralizado tipo power pool (Poolco) es que todos los agentes que participan en el mercado eléctrico reconocen y aceptan el funcionamiento de un organismo central que gestiona el mercado y bajo mecanismos apropiados

establece el precio de corto plazo del mercado mayorista de electricidad (wholesale spot price) el cual es el precio de despeje del mercado (clearing price) producto del equilibrio entre la oferta y la demanda. En los mercados de electricidad centralizados el precio spot lo determina el operador del mercado y se establece usualmente sin considerar las relaciones comerciales bilaterales entre los productores (empresas generadoras) y consumidores (grandes clientes, distribuidores y/o comercializadores).

Dentro del modelo Poolco, la participación de los agentes generadores es obligatoria y están sujetos a la programación y despacho económico de las unidades de generación (economic dispatch) que se establece centralizadamente producto de la coordinación entre el operador del mercado y el operador del sistema. Por este motivo a este tipo de mercado también se le conoce como Mandatory Pool.

El despacho económico se entiende como la coordinación y operación de las instalaciones de generación para producir la energía que permita satisfacer de manera confiable la demanda total del sistema al menor costo posible durante un periodo de tiempo tomando en consideración los límites operacionales de las centrales de generación y las líneas de transmisión. Son dos los componentes fundamentales para el despacho económico: la programación del despacho para el día siguiente (short term scheduling) y el despacho de unidades generadoras en tiempo real.

El modelo Poolco de organización de un mercado eléctrico es usado en buena parte del mundo y es usual que ambas funciones (operación del mercado y operación del sistema) se encuentren integradas dentro de un mismo organismo (operador central).

En algunos mercados (pools latinoamericanos), las generadoras están obligadas a participar en el mercado eléctrico mayorista declarando al operador del mercado y al operador del sistema toda su capacidad de generación disponible y el costo marginal de producción asociado (costos variables de generación), a este tipo de mercados se les conoce como Pool-Costos (Cost Based Pools). En este modelo es usual que la demanda no tenga participación activa en el mercado mayorista (no participa activamente con ofertas de compra) y para obtener el precio spot, el operador de mercado tiene establecidos procedimientos que le permiten hacer estimaciones de la demanda total futura (día siguiente) de todo el sistema, tomando como referencia los patrones históricos de consumo. A este tipo de pool donde sólo se considera las ofertas de venta de los generadores para establecer el precio spot también se les conoce como one-side auction pool o single auction pool (pool de un lado o de subasta simple). Este modelo de mercado busca emular las condiciones de competencia perfecta donde una empresa ofrece su producto al mercado a un precio igual a su costo marginal de producción.

Como ya se mencionó, en un mercado eléctrico con modelo de organización pool-costos, todos los agentes generadores que desean vender energía deben presentar sus ofertas para suministrar una cierta cantidad de energía (capacidad de generación disponible) y el costo marginal de producción asociado para un periodo definido y lo hacen a través de un sistema de subastas temporales (pueden ser horarias, cada media hora, cada 15 minutos) de energía convocados por el operador del mercado usualmente un día antes del despacho físico (mercado del día previo). El operador de mercado ordena estas ofertas de menor a mayor precio y forma una curva agregada de oferta la cual interseca con la demanda estimada para ese intervalo temporal tal como se muestra en la **figura 3**. El precio ofertado por el ultimo generador que permite cubrir la demanda al menor precio posible se convierte en el precio de despeje o precio spot del sistema para ese intervalo de tiempo. Este precio representa el precio de un MWh adicional de energía que sería necesario para cubrir la demanda en ese momento y por eso se llama el precio marginal del sistema.

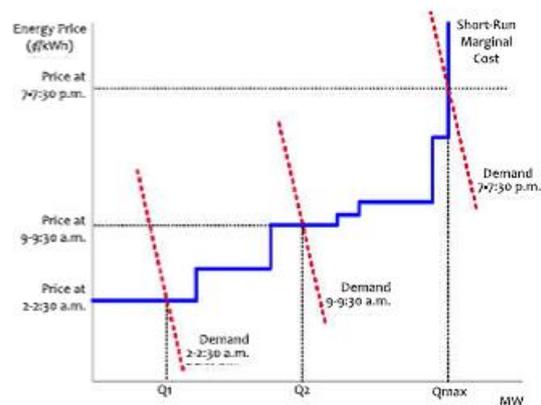


Figura 3. Determinación del precio spot en un pool básico [10].

Este tipo de pool es un mercado multilateral, donde toda la oferta y la demanda para un mismo periodo se igualan, sin necesidad de identificar los acuerdos o contratos bilaterales establecidos entre los agentes participantes. Para compatibilizar los compromisos asumidos por las generadoras mediante contratos con el despacho físico organizado por el OM y el OS (por ejemplo: un generador con un contrato de suministro con una distribuidora puede que no sea llamado a despachar por que ingresaron otros que tienen menor costo), se establece un mecanismo mediante el cual el operador de mercado realiza las transacciones financieras con el generador de modo que equivalgan al pago y/o cobro de energía retirada del pool por el compromiso contractual. Este balance financiero se realiza utilizando el precio spot para cada intervalo temporal establecido. Así, los contratos realizados bajo

este esquema de mercado eléctrico, usado actualmente en Chile, Perú, Brasil y algunos países Centro Americanos se conocen como contratos bilaterales financieros. Su firma no tiene implicancia alguna en el despacho centralizado dentro del pool [3]. En países con mercado eléctrico mayorista más sofisticado y competitivos, se establece que las compañías generadoras sean libres de presentar al operador de mercado ofertas de precio y capacidad disponible de generación que crean conveniente para su participación en el mercado (Bid Based Pools) y por otro lado los consumidores deben realizar ofertas libres de compra de distintos bloques de energía para periodos de tiempo definidos tal como se muestra en la figura 4. Como la participación de los generadores y consumidores es en función a precios libres, a este tipo de mercados también se les conoce como Pool-Precios (Price Based Pools), two-side auction pool o double auction pool debido a que existen ofertas por ambos lados (generación y demanda) para el establecimiento del precio de equilibrio (precio spot). Este modelo, a diferencia del modelo anterior (pool-costos) busca acercarse más a una condición de competencia perfecta ya que existen verdaderas curvas de oferta y demanda del mercado, estableciéndose un precio y cantidad de equilibrio. En este modelo se considera que la competencia hace que las empresas generadoras finalmente participen en el mercado ofreciendo su costo marginal de producción.

definen fechas y horarios que deben ser respetados por todos los agentes participantes del mercado. Dentro de un Poolco es usual que el OM gestione dos submercados (two settlement markets) para garantizar el funcionamiento del mercado mayorista de corto plazo: El mercado del día previo (day ahead market) el cual es un mercado de futuros (forward market) y el mercado en tiempo real o de equilibrio (real time spot market). En el mercado de día previo, los participantes del mercado entregan ofertas de venta y compra de energía, y el operador de mercado en coordinación con el operador del sistema establece la programación de la generación necesaria para cubrir la demanda del día siguiente estableciendo así el precio marginal en cada barra principal del sistema interconectado para cada una de las 24 horas del día siguiente. En el mercado de tiempo real, los participantes pueden comprar o vender energía para balancear las diferencias entre la programación del día previo y la carga en tiempo real, así el OM establece el precio en tiempo real en cada barra del sistema.

En un mercado real tipo Poolco las ofertas de venta y compra de bloques de energía presentados al operador de mercado por las generadoras y agentes consumidores respectivamente en el periodo establecido para la subasta (mercado del día previo por ejemplo) son evaluados en coordinación con el operador del sistema haciendo uso de herramientas computacionales sofisticadas que permiten modelar el funcionamiento del sistema despachando progresivamente a las generadoras con mejores ofertas, hasta alcanzar la demanda total tomando en cuenta con el mayor detalle posible todos los aspectos técnicos de la operación del sistema y características de las unidades generadoras (capacidad disponible, mínimos operativos, nivel de embalses, restricciones de la red de transmisión, etc). El precio obtenido a partir de la simulación no es el precio spot (precio de equilibrio del mercado) producto de la casación de oferta y demanda, es un precio de referencia (precio sombra) del sistema y sus restricciones. El operador del sistema (OS) valida así la factibilidad técnica del despacho determinado por el OM y se encarga de operar físicamente el sistema eléctrico interconectado en tiempo real manteniendo la seguridad, estabilidad y confiabilidad del mismo. De esta manera el OS realiza las correcciones necesarias al plan de operación y determina los servicios auxiliares requeridos para su correcto funcionamiento. Dentro de este modelo se gestiona usualmente una estructura de tarificación para la transmisión y para el conjunto de servicios auxiliares necesarios para garantizar el funcionamiento seguro, estable y confiable del sistema.

Como se mencionó antes, a diferencia del pool básico (pool-costos), en el modelo pool-precios se permite la participación de la demanda en el mercado mayorista spot y para esto el operador de mercado gestiona una institución usualmente denominada Bolsa de Energía

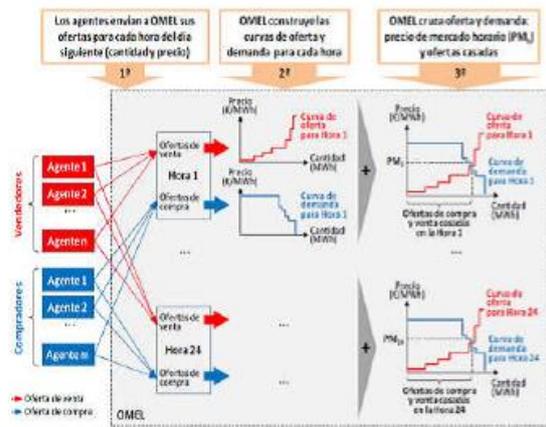


Figura 4 Determinación del precio spot en un poolco [11].

En ambos modelos (sea pool-costos o pool-precios), el operador de mercado en función de las ofertas de venta (precio y cantidad) de los generadores y las ofertas de compra de los consumidores o la demanda total estimada por el OM para una determinada hora, establece el precio de equilibrio (casación oferta - demanda) el cual es el precio de despeje del mercado spot para esa hora en curso (otros mercados establecen el precio spot cada media hora). Para el cumplimiento de los procesos mencionados, se

(BE) donde se realiza el ordenamiento de las ofertas (settlement) y donde concurren tanto generadores, distribuidores, comercializadores y grandes consumidores para transar libremente la energía que les sobra o les falta producto de sus contratos bilaterales previos (mercado en tiempo real) y de esta manera cubrir sus desbalances energéticos. La principal ventaja de este tipo de modelo es que al realizar la coordinación entre las curvas de oferta de compra y de venta, se está minimizando el costo de operación del sistema y maximizando el beneficio social a diferencia del modelo pool-costos donde despacho económico solo busca minimizar el costo total de operación del sistema. Por otra parte, la gran dificultad que se presentan en este tipo de organización es que existe la posibilidad de ejercicio de poder de mercado de algunos agentes. Dentro de los varios mercados existentes tipo Poolco competitivos, se pueden citar: Colombia, New York pool, New England pool, Omel (españa), Alberta.

4.2 El modelo Power Exchange (PX)

A diferencia de los Power Pools donde los contratos puede ser solo de naturaleza financiera. En un mercado eléctrico tipo Power Exchange, los contratos bilaterales entre vendedores y consumidores pueden ser de naturaleza física o de naturaleza financiera.

En el caso de los contratos bilaterales físicos, suministradores y consumidores establecen libremente relaciones y acuerdos de tipo comercial, ya sea en forma directa o a través de un comercializador. Estos contratos tienen participación directa en el despacho de las unidades generadoras dentro del plan operacional del sistema elaborado por el operador de mercado, su ejecución física obligatoria. Con este tipo de contratos de abastecimiento de energía, el generador asegura la inyección al sistema de la cantidad de energía y potencia contratada especificada en su plan de operación, a su vez, los consumidores tienen que orientar su consumo a la potencia especificada en el contrato y plan de operación. Este tipo de contratos son recolectados diariamente por el Operador de Mercado, quien finalmente establece la programación de todo el sistema y lo envía al Operador físico del sistema (ISO) para la verificación de factibilidad [12].

En el modelo Power Exchange, no todo el despacho está basado en contratos bilaterales físicos. Existe un mercado mayorista de corto plazo donde la participación es voluntaria. Este mercado es administrado por el Operador de Mercado usualmente denominado Power Exchange (PX). En este mercado mayorista participan aquellos agentes vendedores y compradores que no hayan conseguido establecer contratos bilaterales de cumplimiento físico. El PX ordena las ofertas de venta y compra y establece un

precio de casación similar al del modelo Poolco y este es el precio de despeje del mercado para un intervalo de tiempo particular [13].

El modelo eléctrico Power Exchange busca acercarse más a un mercado real donde la electricidad pueda negociarse como cualquier otro commodity bajo acuerdos bilaterales entre vendedor y comprador sin la intervención de organismos que gestionen centralizadamente todo el mercado. Bajo estas condiciones, los acuerdos de compra-venta bilaterales en el mercado eléctrico son de naturaleza física (entrega inmediata del producto comercializado).

A diferencia del modelo Poolco, en el que una sola institución puede asumir las funciones de operación física del sistema interconectado y la operación económica – comercial del mercado eléctrico. El modelo Power Exchange establece una explícita separación de estas dos actividades. Como resultado, hay una institución independiente que se encarga de la operación física de la red interconectada garantizando la confiabilidad y estabilidad del sistema (Operador Independiente del Sistema - ISO) y una institución independiente que se encarga de la operación del mercado (Power Exchange - PX). La separación completa está basada en la hipótesis de que los principios detrás del funcionamiento del mercado y la operación física de la red pueden ser completamente diferenciados. Mientras que el mercado eléctrico operado por el PX debe estar basado exclusivamente en principios económicos el ISO debe operar el sistema basado exclusivamente en principios físicos y los requerimientos de seguridad necesarios [15].

En la figura 4 se presenta esquemáticamente el funcionamiento del modelo Power Exchange. Se muestran los agentes participantes (stakeholders) y la interacción entre ellos dentro del mercado mayorista y minorista. El mercado OTC (mercado over the counter) es un mercado donde se negocian distintos instrumentos financieros directamente entre dos partes, estos acuerdan libremente la forma y fecha de liquidación de los instrumentos.

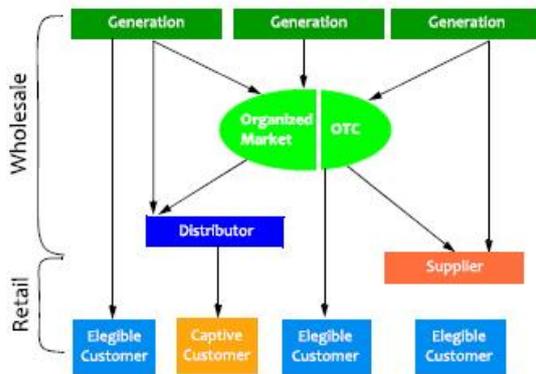


Figura 4 Mercado mayorista y minorista de electricidad en el modelo Power Exchange [14].

Los principales mercados tipo Power Exchange funcionando actualmente en el mundo son: NordPool, European Energy Exchange (EEX), California Power Exchange, ASX Energy (Australia) [15].

5. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una revisión sistemática de los principales modelos que sirvieron como base para el diseño de los mercados eléctricos liberalizados actualmente en funcionamiento. Cada país fue adaptando estos modelos de acuerdo a sus propias características y realidades, estableciendo complejas estructuras regulatorias.

En cuanto a las características generales de los mercados eléctricos, se puede concluir que aunque las reglas de interacción entre los agentes que pueden participar dentro de un mercado eléctrico puede variar dependiendo del diseño de mercado eléctrico adoptado, los tipos de agentes, las funciones de estos y las necesidades que presentan los mercados eléctricos liberalizados son esencialmente las mismas.

En cuanto a las necesidades operacionales de los mercados eléctricos se tiene: La operación física del sistema que busca mantener en tiempo real la seguridad, confiabilidad y estabilidad del suministro eléctrico dentro de los márgenes operacionales adecuados. La operación del mercado cuyo objetivo es garantizar la operación económica del sistema haciendo uso eficiente de los recursos energéticos, minimizando el costo total del funcionamiento del sistema y/o maximizando el beneficio social. La operación comercial es esencialmente la administración transparente de los pagos y cobros producto de la compra y venta de energía dentro del mercado eléctrico.

En cuanto a la clasificación general de mercados eléctricos competitivos se tiene: Los mercados eléctricos que solamente incorporan competencia a nivel mayorista (wholesale market) y los mercados eléctricos que incorporan competencia a nivel mayorista y minorista (retail market).

En cuanto a los modelos de organización de mercados eléctricos centralizados con competencia en el mercado mayorista se puede concluir lo siguiente. El modelo centralizado se basa en la idea de que la gestión eficiente física y económicamente de un sistema eléctrico interconectado solo puede garantizarse si es realizado por una institución central independiente. Esta institución gestiona el sistema eléctrico como si tuviera un único dueño, de esta manera la participación de los agentes generadores en el mercado eléctrico puede ser obligatoria (Power Pool) o voluntario (Power Exchange) presentando su capacidad disponible con el costo marginal de producción asociado (Cost Based Pools) o presentando ofertas libres de cantidad y precio para su participación en el mercado mayorista spot (Bid Based pools). Es usual que el operador de mercado gestione dos submercados (two settlement markets) para garantizar el funcionamiento del mercado mayorista de corto plazo: El mercado del día previo (day ahead market) y el mercado en tiempo real o de equilibrio (real time spot market). En función de la oferta y la demanda, el OM establece el precio de despeje del mercado (precio spot) para intervalos de tiempo definidos. El precio spot es el precio que usa el operador de mercado para realizar los balances financieros por la inyección y retiro de energía del sistema interconectado.

En el modelo Power Pool, todos los contratos bilaterales entre productores y consumidores son de naturaleza financiera, estos contratos no condicionan el despacho organizado por el operador central. En algunos mercados pequeños, la demanda no participa del mercado mayorista spot con ofertas de compra y para establecer el precio de despeje el operador central utiliza procedimientos que permiten estimar la demanda total en el sistema para intervalos de tiempo definidos. En el modelo Power Pool la operación física y económica (operación del mercado) está usualmente integrada en un organismo central único.

Por otro lado, en el modelo Power Exchange, todo el despacho ya no es coordinado centralizadamente. Los participantes del mercado (compradores y vendedores) pueden establecer contratos de naturaleza física, estos contratos tienen participación directa y obligatoria en el despacho programado del sistema mientras cumplan las condiciones de factibilidad para su ejecución. El modelo Power Exchange incorpora en su estructura el Power Pool (Poolco) en el sentido de que hay un organismo operador del mercado (Power Exchange) que gestiona centralizadamente a los agentes del mercado que no desean o no pudieron establecer contratos de naturaleza física, la participación en este mercado es voluntario en función de sus propios intereses.

En el modelo Power Exchange existe una separación completa entre el operador del sistema físico que puede ser un ISO y el operador de mercado que es denominado Power Exchange.

REFERENCIAS

- [1] Antonio Gomez-Exposito, Antonio J. Conejo, Claudio Cañizares, *Electric Energy Systems: Analysis and Operation*. CRC Press, 2009.
- [2] Oficina de Estudios Economicos, *Reformas estructurales en el Sector Eléctrico*. Organismo Supervisor de la Inversión en Energía, Lima - Peru 2005.
- [3] Alfredo Dammert, Raúl García Carpio, Fiorella Molinelli, *Regulación y Supervisión del Sector Eléctrico*. Fondo Editorial PUCP, 2013.
- [4] Sally Hunt, *Making Competition Work in Electricity*. John Wiley & Sons, 2002.
- [5] Juan de la Cruz Ferrer, Jean Monnet, *Bases Para el Diseño de los Mercados Eléctricos*. REDETI, No 28 2007.
- [6] Paulo Andrés Atienza Yañez, Hugh Rudnick, *Aplicación del Modelo Bolsa de Energía en Chile*. Tesis para obtener el Título de Ingeniero. Pontificia Universidad Católica de Chile 2001.
- [7] Cristian Alberto Alvarez Arriagada, *Análisis comparativo de la gobernabilidad de mercados de generación eléctrica*. Tesis para optar el grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile 1998.
- [8] Luis Augusto Barroso, Teófilo H. Cavalcanti, Konrad Purchala and Paul Giesbertz, *Classification of Electricity Market Models Worldwide*. IEEE, 2005.
- [9] Enrique Salinas Escobar, *Sistema de Monitoreo para el Análisis del Manejo Estratégico de Capacidad de Corto Plazo en el Mercado Eléctrico Chileno (Sistema SIC)*. Universidad de Chile, 2013.
- [10] William W. Hogan, *Electricity Market Design Energy and Capacity Markets and Resource Adequacy*. EUCL Conference, Harvard University - Massachusetts 2015.
- [11] Álvaro Martínez Valle, *Modelado de la Curva Horaria de Precios del Mercado Diario Español*, Universidad Pontificia Comillas, Madrid 2010.
- [12] Juan Pablo Avalos, Roger M. Mellado, Hugh Rudnick. *Estructura y funciones de un operador independiente*. Pontificia Universidad Católica de Chile, 2012.
- [13] Cristian Alberto Alvarez Arriagada, *Análisis Comparativo de la Gobernabilidad de Mercados de Generación Eléctrica*. Pontificia Universidad Católica de Chile, 1998.
- [14] Coralia Verdugo Penado, *Role of the Physical Power Exchanges in the Electricity Wholesale Market*, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 2008.
- [15] David Watts, Paulo Atienza and Hugh Rudnick, *Application of the Power Exchange-Independent System Operator Model in Chile*. IEEE, 2002.
- [16] L. M. Cárdenas and C. J. Franco, *Structure and Current State of the Wholesale Electricity Markets*. IEEE 2017.

Apéndice B

Código y resultado AMPL

Código usado para resolver el MPEC

```
archivo estrategia_ofertaNL.mod
```

```
#Conjuntos
```

```
# hidroelectricas que pertenecen al gen estrategico S
```

```
set SH;
```

```
# termoelectricas que pertenecen al gen estrategico
```

```
set ST;
```

```
# hidroelectricas que NO pertenecen al gen estrategico
```

```
set NSH;
```

```
# termoelectricas que NO pertenecen al gen estrategico
```

```
set NST;
```

```
set T;      # periodo de tiempo
```

```
set T1;     # periodo de tiempo
```

```
#Parameters
```

```
# demanda
```

```
param D{T};
```

```
# Costo variable de hidroelectricas del gen estrategico
```

```
param CH{T,SH};
```

```

# Costo variable de termoelectricas del gen estrategico
param CT{T,ST};
# oferta de energia de hidros que no pertenecen a S
param EH_NS{T,NSH};
  # oferta de energia de termos que no pertenecen a s
param ET_NS{T,NST};
# oferta de precio de hidros que no pertenecen a s
param PH_NS{T,NSH};
# oferta de precio de termos que no pertenecen a s
param PT_NS{T,NST};
# capacidad maxima de generacion de las hidros de s
param GH_max{T,SH};
# capacidad maxima de generacion de las termos de s
param GT_max{T,ST};
# vol minimo del reservorio asociado a las hidros de s
param vol_min{SH};
# vol maximo del reservorio asociado a las hidros de s
param vol_max{SH};
# vol minino al final del periodo de planeamiento
param v_goal{SH};
param rho{SH};          # productividad
param C;                # factor de conversion de m3/s a hm3
param A{T,SH};         # incremental inflow
param vol_ini{SH};
param ph_max{T,SH};
param pt_max{T,ST};
param ph_min{T,SH};    #agregado recien
param pt_min{T,ST};   #agregado recien

#variables

var precio_despeje{T}; # precio de despeje del mercado

```

```

# generacion asignada en el despacho para las hidros de S
var gh_S{T,SH};
# generacion asignada en el despacho para las termos de S
var gt_S{T,ST};
# gen asignada para las hidros que no pertenecen a S
var gh_NS{T,NSH};
# gen asignada para las termos que no pertenecen a S
var gt_NS{T,NST};
# oferta de energia de las hidros de A para el periodo t
var eh_S{T,SH};
# oferta de energia de las termos de A para el periodo t
var et_S{T,ST};
# oferta de precio de las hidros de A para el periodo t
var ph_S{T,SH};
# oferta de precio de las termos de A para el periodo t
var pt_S{T,ST};
# vol del reservorio de hidros de A al inicio del periodo t
var vol{T1,SH};
# caudal vertido (spillage) de las hidros de A en el periodo t
var s_S{T,SH};
#var s_NS{T,NSH}; # spillage de las hidros que no pertenecen a S
var dualH_S{T,SH};
var dualT_S{T,ST};
var dualH_NS{T,NSH};
var dualT_NS{T,NST};

```

```

#Modelo

```

```

#maximize beneficio: sum{t in T, i in SH}
(precio_despeje[t]-CH[t,i])*gh_S[t,i] + sum{t in T, j in ST}
(precio_despeje[t]-CT[t,j])*gt_S[t,j];

```

maximize beneficio: $\sum\{t \text{ in } T\}D[t]*\text{precio_despeje}[t]$
 + $\sum\{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\}EH_{NS}[t, i1]*\text{dualH}_{NS}[t, i1]$
 + $\sum\{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}ET_{NS}[t, j1]*\text{dualT}_{NS}[t, j1]$
 - $\sum\{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\}PH_{NS}[t, i1]*\text{gh}_{NS}[t, i1]$
 - $\sum\{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}PT_{NS}[t, j1]*\text{gt}_{NS}[t, j1]$
 - $\sum\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}CH[t, i]*\text{gh}_S[t, i]$
 - $\sum\{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}CT[t, j]*\text{gt}_S[t, j];$

R1 $\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $0 \leq eh_S[t, i] \leq GH_{max}[t, i];$

R2 $\{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $0 \leq et_S[t, j] \leq GT_{max}[t, j];$

R3 $\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $ph_{min}[t, i] \leq ph_S[t, i] \leq ph_{max}[t, i];$

R4 $\{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $pt_{min}[t, j] \leq pt_S[t, j] \leq pt_{max}[t, j];$

R5 $\{i \text{ in } SH\}$: $vol[1, i] = vol_{ini}[i];$

#La hidro del gen estrategico estÃ¡ en la cabecera de cuenca

R6 $\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $vol[t+1, i] = vol[t, i]$

- $C*(gh_S[t, i]/rho[i] + s_S[t, i] - A[t, i]);$

R7 $\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $vol_{min}[i] \leq vol[t+1, i];$

R8 $\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $vol[t+1, i] \leq vol_{max}[i];$

R9 $\{i \text{ in } SH\}$: $vol[4, i] \geq v_{goal}[i];$

R10 $\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $s_S[t, i] \geq 0;$

R11 $\{t \text{ in } T\}$: $\sum\{i \text{ in } SH\}gh_S[t, i] + \sum\{j \text{ in } ST\}gt_S[t, j]$
 + $\sum\{i1 \text{ in } NSH\}gh_{NS}[t, i1] + \sum\{j1 \text{ in } NST\}gt_{NS}[t, j1] = D[t];$

$$\text{R12 } \{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad gh_S[t, i] \leq eh_S[t, i];$$

$$\text{R13 } \{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad 0 \leq gh_S[t, i];$$

$$\text{R14 } \quad \{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\}: \quad gh_NS[t, i1] \leq EH_NS[t, i1];$$

$$\text{R15 } \quad \{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\}: \quad 0 \leq gh_NS[t, i1];$$

$$\text{R16 } \{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}: \quad gt_S[t, j] \leq et_S[t, j];$$

$$\text{R17 } \{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}: \quad 0 \leq gt_S[t, j];$$

$$\text{R18 } \{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}: \quad gt_NS[t, j1] \leq ET_NS[t, j1];$$

$$\text{R19 } \{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}: \quad 0 \leq gt_NS[t, j1];$$

$$\text{R20 } \quad \{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualH_S}[t, i] \\ \leq \text{ph_S}[t, i];$$

$$\text{R21 } \quad \{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\}: \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualH_NS}[t, i1] \\ \leq \text{PH_NS}[t, i1];$$

$$\text{R22 } \{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}: \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualT_S}[t, j] \\ \leq \text{pt_S}[t, j];$$

$$\text{R23 } \{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}: \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualT_NS}[t, j1] \\ \leq \text{PT_NS}[t, j1];$$

$$\text{R24 } \{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad \text{dualH_S}[t, i] \leq 0;$$

$$\text{R25 } \quad \{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\}: \quad \text{dualH_NS}[t, i1] \leq 0;$$

$$\text{R26 } \{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}: \quad \text{dualT_S}[t, j] \leq 0;$$

$$\text{R27 } \{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}: \quad \text{dualT_NS}[t, j1] \leq 0;$$

$$\begin{aligned} \text{R28} \quad & : \text{sum}\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\} \text{gh_S}[t, i] * \text{ph_S}[t, i] + \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\} \text{gt_S}[t, j] * \text{pt_S}[t, j] + \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\} \text{PH_NS}[t, i1] * \text{gh_NS}[t, i1] + \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\} \text{PT_NS}[t, j1] * \text{gt_NS}[t, j1] - \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T\} D[t] * \text{precio_despeje}[t] - \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\} \text{eh_S}[t, i] * \text{dualH_S}[t, i] - \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\} \text{et_S}[t, j] * \text{dualT_S}[t, j] - \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\} \text{EH_NS}[t, i1] * \text{dualH_NS}[t, i1] - \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\} \text{ET_NS}[t, j1] * \text{dualT_NS}[t, j1] = 0; \end{aligned}$$

Código usado para resolver la aproximación MILP

```
archivo estrategia_ofertaMILP.mod

#Conjuntos

# unidades hidroelectricas que pertenecen al gen estrategico S
set SH;
# unidades termoelectricas que pertenecen al gen estrategico
set ST;
# unidades hidroelectricas que NO pertenecen al gen estrategico
set NSH;
# unidades termoelectricas que NO pertenecen al gen estrategico
set NST;
set T;      # periodo de tiempo
set T1;    # periodo de tiempo
set K1=0..11;
set K2=0..11;
set K3=0..11;
set K4=0..11;

#Parameters

param D{T};      # demanda
# Costo variable de operacion de las gen hidroelectricas
param CH{T,SH};
# Costo variable de operacion de las gen termoelectricas
param CT{T,ST};
# oferta de energia de los gen que no pertenecen a S
param EH_NS{T,NSH};
# oferta de energia de los gen que no pertenecen a S
param ET_NS{T,NST};
```

```

# oferta de precio de los gen que no pertenecen a S
param PH_NS{T,NSH};
# oferta de precio de los gen que no pertenecen a S
param PT_NS{T,NST};
# cap maxima de las hidros que pertenecen a A
param GH_max{T,SH};
# cap maxima de las termos que pertenecen a A
param GT_max{T,ST};
param vol_ini{SH};
# vol minimo del reservorio de las hidros de A
param vol_min{SH};
# vol maximo del reservorio de las hidros de A
param vol_max{SH};
# vol minino al final del periodo de planeamiento
param v_goal{SH};
param rho{SH};          #productividad
param C;                # factor de conversion de m3/s a hm3
param A{T,SH};         # incremental inflow

param ph_max{T,SH};
param pt_max{T,ST};
param h1{T,SH};
param h2{T,ST};
param delta1{T,SH};
param delta2{T,ST};

param M1;
param M2;
param M3;
param M4;

#variables

```

```

# precio de despeje del mercado  pi_t
var precio_despeje{T};
# gen asignada para las hidros de S
var gh_S{T,SH};
# gen asignada para las termos de S
var gt_S{T,ST};
# gen asignada para las hidros que no pertenecen a S
var gh_NS{T,NSH};
# gen asignada para las termos que no pertenecen a S
var gt_NS{T,NST};
# vol de las hidros de A al inicio del periodo t
var vol{T1,SH};
# caudal vertido (spillage) de las hidros de S
var s_S{T,SH};
# spillage de las hidros que no pertenecen a S
#var s_NS{T,NSH};
var dualH_S{T,SH};
var dualT_S{T,ST};
var dualH_NS{T,NSH};
var dualT_NS{T,NST};

var x1{K1,T,SH} binary;
var x2{K2,T,ST} binary;
var y1{K3,T,SH} binary;
var y2{K4,T,ST} binary;

var z1{K1,T,SH};
var z2{K2,T,ST};
var w1{K3,T,SH};
var w2{K4,T,ST};

```

#Modelo

maximize beneficio: sum{t in T}D[t]*precio_despeje[t] +
sum{t in T, i1 in NSH}EH_NS[t, i1]*dualH_NS[t, i1] +
sum{t in T, j1 in NST}ET_NS[t, j1]*dualT_NS[t, j1] -
sum{t in T, i1 in NSH}PH_NS[t, i1]*gh_NS[t, i1] -
sum{t in T, j1 in NST}PT_NS[t, j1]*gt_NS[t, j1] -
sum{t in T, i in SH}CH[t, i]*gh_S[t, i] -
sum{t in T, j in ST}CT[t, j]*gt_S[t, j];

subject to

R1 {t in T, i in SH}: h1[t, i]*sum{k1 in K1}2^k1*x1[k1, t, i]
<= ph_max[t, i];

R2 {t in T, j in ST}: h2[t, j]*sum{k2 in K2}2^k2*x2[k2, t, j]
<= pt_max[t, j];

R3 {t in T, i in SH}: delta1[t, i]*sum{k3 in K3}2^k3*y1[k3, t, i]
<= GH_max[t, i];

R4 {t in T, j in ST}: delta2[t, j]*sum{k4 in K4}2^k4*y2[k4, t, j]
<= GT_max[t, j];

R5 {i in SH}: vol[1, i]=vol_ini[i];

R6 {t in T, i in SH}: vol[t+1, i] = vol[t, i] -
C*(gh_S[t, i]/rho[i] + s_S[t, i] - A[t, i]);

R7 {t in T, i in SH}: vol_min[i]<= vol[t+1, i];

R8 {t in T, i in SH}: vol[t+1, i]<= vol_max[i];

$$R9 \quad \{i \text{ in SH}\}: \quad \text{vol}[4, i] \geq v_goal[i];$$

$$R10 \quad \{t \text{ in T}, i \text{ in SH}\}: \quad s_S[t, i] \geq 0;$$

$$R11 \quad \{t \text{ in T}\}: \quad \text{sum}\{i \text{ in SH}\}gh_S[t, i] + \\ \text{sum}\{j \text{ in ST}\}gt_S[t, j] + \text{sum}\{i1 \text{ in NSH}\}gh_NS[t, i1] \\ + \text{sum}\{j1 \text{ in NST}\}gt_NS[t, j1] = D[t];$$

$$R12 \quad \{t \text{ in T}, i \text{ in SH}\}: \quad gh_S[t, i] - \\ \text{delta1}[t, i] * \text{sum}\{k3 \text{ in K3}\}2^{k3} * y1[k3, t, i] \leq 0;$$

$$R13 \quad \{t \text{ in T}, i1 \text{ in NSH}\}: \quad gh_NS[t, i1] \leq EH_NS[t, i1];$$

$$R14 \quad \{t \text{ in T}, j \text{ in ST}\}: \quad gt_S[t, j] - \\ \text{delta2}[t, j] * \text{sum}\{k4 \text{ in K4}\}2^{k4} * y2[k4, t, j] \leq 0;$$

$$R15 \quad \{t \text{ in T}, j1 \text{ in NST}\}: \quad gt_NS[t, j1] \leq ET_NS[t, j1];$$

$$R16 \quad \{t \text{ in T}, i \text{ in SH}\}: \quad 0 \leq gh_S[t, i];$$

$$R17 \quad \{t \text{ in T}, i1 \text{ in NSH}\}: \quad 0 \leq gh_NS[t, i1];$$

$$R18 \quad \{t \text{ in T}, j \text{ in ST}\}: \quad 0 \leq gt_S[t, j];$$

$$R19 \quad \{t \text{ in T}, j1 \text{ in NST}\}: \quad 0 \leq gt_NS[t, j1];$$

$$R20 \quad \{t \text{ in T}, i \text{ in SH}\}: \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualH_S}[t, i] \\ \leq h1[t, i] * \text{sum}\{k1 \text{ in K1}\}2^{k1} * x1[k1, t, i];$$

$$R21 \quad \{t \text{ in T}, i1 \text{ in NSH}\}: \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualH_NS}[t, i1] \\ \leq PH_NS[t, i1];$$

$$\begin{aligned} \text{R22 } \{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}: & \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualT_S}[t, j] \\ \leq & \quad h2[t, j] * \text{sum}\{k2 \text{ in } K2\} 2^{k2} * x2[k2, t, j]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R23 } \{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}: & \quad \text{precio_despeje}[t] + \text{dualT_NS}[t, j1] \\ \leq & \quad \text{PT_NS}[t, j1]; \end{aligned}$$

$$\text{R24 } \{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad \text{dualH_S}[t, i] \leq 0;$$

$$\text{R25 } \quad \{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\}: \quad \text{dualH_NS}[t, i1] \leq 0;$$

$$\text{R26 } \{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}: \quad \text{dualT_S}[t, j] \leq 0;$$

$$\text{R27 } \{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\}: \quad \text{dualT_NS}[t, j1] \leq 0;$$

$$\begin{aligned} \text{R28 } & \quad : \text{sum}\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\} h1[t, i] * (\text{sum}\{k1 \text{ in } K1\} 2^{k1} * z1[k1, t, i]) \\ & + \text{sum}\{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\} h2[t, j] * (\text{sum}\{k2 \text{ in } K2\} 2^{k2} * z2[k2, t, j]) \\ & - \text{sum}\{t \text{ in } T, i \text{ in } SH\} \text{delta}1[t, i] * (\text{sum}\{k3 \text{ in } K3\} 2^{k3} * w1[k3, t, i]) \\ & - \text{sum}\{t \text{ in } T, j \text{ in } ST\} \text{delta}2[t, j] * (\text{sum}\{k4 \text{ in } K4\} 2^{k4} * w2[k4, t, j]) \\ & + \text{sum}\{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\} \text{PH_NS}[t, i1] * \text{gh_NS}[t, i1] + \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\} \text{PT_NS}[t, j1] * \text{gt_NS}[t, j1] - \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T\} D[t] * \text{precio_despeje}[t] - \\ & \text{sum}\{t \text{ in } T, i1 \text{ in } NSH\} \text{EH_NS}[t, i1] * \text{dualH_NS}[t, i1] \\ & - \text{sum}\{t \text{ in } T, j1 \text{ in } NST\} \text{ET_NS}[t, j1] * \text{dualT_NS}[t, j1] = 0; \end{aligned}$$

$$\text{R29 } \{k1 \text{ in } K1, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad 0 \leq \text{gh_S}[t, i] - z1[k1, t, i];$$

$$\begin{aligned} \text{R30 } & \quad \{k1 \text{ in } K1, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad \text{gh_S}[t, i] - z1[k1, t, i] \\ \leq & \quad M1 * (1 - x1[k1, t, i]); \end{aligned}$$

$$\text{R31 } \{k1 \text{ in } K1, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}: \quad 0 \leq z1[k1, t, i];$$

- R32 $\{k_1 \text{ in } K_1, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $z_1[k_1, t, i] \leq M_1 \cdot x_1[k_1, t, i]$;
- R33 $\{k_2 \text{ in } K_2, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $0 \leq gt_S[t, j] - z_2[k_2, t, j]$;
- R34 $\{k_2 \text{ in } K_2, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $gt_S[t, j] - z_2[k_2, t, j] \leq M_2 \cdot (1 - x_2[k_2, t, j])$;
- R35 $\{k_2 \text{ in } K_2, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $0 \leq z_2[k_2, t, j]$;
- R36 $\{k_2 \text{ in } K_2, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $z_2[k_2, t, j] \leq M_2 \cdot x_2[k_2, t, j]$;
- R37 $\{k_3 \text{ in } K_3, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $0 \leq w_1[k_3, t, i] - dualH_S[t, i]$;
- R38 $\{k_3 \text{ in } K_3, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $w_1[k_3, t, i] - dualH_S[t, i] \leq M_3 \cdot (1 - y_1[k_3, t, i])$;
- R39 $\{k_3 \text{ in } K_3, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $w_1[k_3, t, i] \leq 0$;
- R40 $\{k_3 \text{ in } K_3, t \text{ in } T, i \text{ in } SH\}$: $0 \leq w_1[k_3, t, i] + M_3 \cdot y_1[k_3, t, i]$;
- R41 $\{k_4 \text{ in } K_4, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $0 \leq w_2[k_4, t, j] - dualT_S[t, j]$;
- R42 $\{k_4 \text{ in } K_4, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $w_2[k_4, t, j] - dualT_S[t, j] \leq M_4 \cdot (1 - y_2[k_4, t, j])$;
- R43 $\{k_4 \text{ in } K_4, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $w_2[k_4, t, j] \leq 0$;
- R44 $\{k_4 \text{ in } K_4, t \text{ in } T, j \text{ in } ST\}$: $0 \leq w_2[k_4, t, j] + M_4 \cdot y_2[k_4, t, j]$;

Ejemplo del tipo de resultado que se obtiene con la aproximación MILP

beneficio = 286495

precio_despeje [*] :=

1 88.43

2 88.43

3 88.43

;

: gh_S gt_S gh_NS gt_NS :=

1 G1 879.998 . . .

1 G2 . 999.998 . .

1 G3 . . 0 .

1 G4 . . 1120 .

1 G5 . . . 0

1 G6 . . . 0

2 G1 879.998 . . .

2 G2 . 999.998 . .

2 G3 . . 0 .

2 G4 . . 1120 .

2 G5 . . . 0

2 G6 . . . 0

3 G1 879.998 . . .

3 G2 . 999.998 . .

3 G3 . . 0 .

3 G4 . . 1120 .

3 G5 . . . 0

3 G6 . . . 0

;

: y1 y2 x1 x2 :=

0 1 G1 1 . 0 .

0	1	G2	.	1	.	0
0	2	G1	1	.	0	.
0	2	G2	.	1	.	0
0	3	G1	1	.	0	.
0	3	G2	.	1	.	0
1	1	G1	0	.	0	.
1	1	G2	.	0	.	0
1	2	G1	0	.	0	.
1	2	G2	.	0	.	0
1	3	G1	0	.	0	.
1	3	G2	.	0	.	0
2	1	G1	0	.	0	.
2	1	G2	.	0	.	0
2	2	G1	0	.	0	.
2	2	G2	.	0	.	0
2	3	G1	0	.	0	.
2	3	G2	.	0	.	0
3	1	G1	0	.	0	.
3	1	G2	.	0	.	0
3	2	G1	0	.	0	.
3	2	G2	.	0	.	0
3	3	G1	0	.	0	.
3	3	G2	.	0	.	0
4	1	G1	0	.	0	.
4	1	G2	.	0	.	0
4	2	G1	0	.	0	.
4	2	G2	.	0	.	0
4	3	G1	0	.	0	.
4	3	G2	.	0	.	0
5	1	G1	0	.	0	.
5	1	G2	.	0	.	0
5	2	G1	0	.	0	.

5	2	G2	.	0	.	0
5	3	G1	0	.	0	.
5	3	G2	.	0	.	0
6	1	G1	0	.	0	.
6	1	G2	.	0	.	0
6	2	G1	0	.	0	.
6	2	G2	.	0	.	0
6	3	G1	0	.	0	.
6	3	G2	.	0	.	0
7	1	G1	0	.	0	.
7	1	G2	.	0	.	0
7	2	G1	0	.	0	.
7	2	G2	.	0	.	0
7	3	G1	0	.	0	.
7	3	G2	.	0	.	0
8	1	G1	0	.	0	.
8	1	G2	.	0	.	0
8	2	G1	0	.	0	.
8	2	G2	.	0	.	0
8	3	G1	0	.	0	.
8	3	G2	.	0	.	0
9	1	G1	0	.	0	.
9	1	G2	.	0	.	0
9	2	G1	0	.	0	.
9	2	G2	.	0	.	0
9	3	G1	0	.	0	.
9	3	G2	.	0	.	0
10	1	G1	0	.	0	.
10	1	G2	.	0	.	0
10	2	G1	0	.	0	.
10	2	G2	.	0	.	0
10	3	G1	0	.	0	.

```

10 3 G2 . 0 . 0
11 1 G1 1 . 1 .
11 1 G2 . 1 . 1
11 2 G1 1 . 1 .
11 2 G2 . 1 . 1
11 3 G1 1 . 1 .
11 3 G2 . 1 . 1
;

```

```

:      vol          s_S      dualH_S  dualT_S  dualH_NS  dualT_NS :=
1 G1  1400          3.03544e-11  -0.366    .         .         .
1 G2    .           .           .        -0.366    .         .
1 G3    .           .           .         .         0         .
1 G4    .           .           .         .         0         .
1 G5    .           .           .         .         .        -89
1 G6    .           .           .         .         .        -89
2 G1  1399.33      4994.67      -0.366    .         .         .
2 G2    .           .           .        -0.366    .         .
2 G3    .           .           .         .         0         .
2 G4    .           .           .         .         0         .
2 G5    .           .           .         .         .        -89
2 G6    .           .           .         .         .        -89
3 G1  1380.67      3.03544e-11  -0.366    .         .         .
3 G2    .           .           .        -0.366    .         .
3 G3    .           .           .         .         0         .
3 G4    .           .           .         .         0         .
3 G5    .           .           .         .         .        -89
3 G6    .           .           .         .         .        -89
4 G1  1380          .           .         .         .         .
;

```

Bibliografía

- [1] Sally Hunt, *Making Competition Work in Electricity*. John Wiley & Sons, 2002.
- [2] Ignacio Perez Arriaga, Hugh Rudnick, Michel Rivier Abbad *Electric Energy Systems An Overview*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018.
- [3] Alfredo Dammert, Raúl García Carpio, Fiorella Molinelli, *Regulación y Supervisión del Sector Eléctrico*. Fondo Editorial PUCP, 2013.
- [4] Luis Augusto Barroso, Teófilo H. Cavalcanti, Konrad Purchala and Paul Giesbertz, *Classification of Electricity Market Models Worldwide*. IEEE, 2005.
- [5] M. V. Pereira and L. M. Pinto *Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning*. Mathematical Programming, vol. 52, no. 1-3, pp. 359-375, 1991.
- [6] L. Maurer, L. Barroso, *Electricity auctions: An overview of efficient practices*. World Bank Publications, 2011.
- [7] L. A. Barroso, R. D. Carneiro, S. Granville, M. V. Pereira, and M. Fampa, *Nash equilibrium in strategic bidding: a binary expansion approach*. Power Systems, IEEE Transactions on, vol.21, no. 2, pp. 626, 2006.
- [8] R. H. Kwon, D. Frances *Optimization-based bidding in day ahead electricity auction markets: A review of models for power producers*, in: A. Sorokin, S. Rebennack, P. M. Pardalos, N. A. Iliadis, M. V. F. Pereira (Eds), *Handbook of Networks in Power Systems I, Energy Systems*, Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 41-59.
- [9] B. F. Hobbs, C. B. Metzler, and J. S. Pang, *Strategic gaming analysis for electric power systems: An MPEC approach*. Power Systems, IEEE Transactions on, vol.15, no. 2, pp. 638-645, 2000.

- [10] S. E. Fleten, T. K. Kristoffersen, *Stochastic programming for optimizing bidding strategies of a nordic hydropower producer*. European Journal of Operational Research 181, 2007.
- [11] G. Steeger, L. A. Barroso, and S. Rebennack, *Optimal bidding strategies for hydroelectric producers: A literature survey*. Power Systems, IEEE Transactions on, vol. 29, no. 4, pp. 1758-1766, 2014.
- [12] G. Gross and D. Finlay, *Generation supply bidding in perfectly competitive electricity markets*. Computational & Mathematical Organization Theory, vol. 6, no. 1, pp. 83-98, 2000.
- [13] A. Gjelsvik, B. Mo, and A. Haugstad *Long and medium-term operations planning and stochastic modelling in hydro-dominated power systems based on stochastic dual dynamic programming*. in Handbook of Power Systems I. Springer, 2010, pp. 33-55.
- [14] M. V. Pereira, S. Grandville, M. H. Fampa, R. Dix and L. A. Barroso, *Strategic bidding under uncertainty: a binary expansion approach*. Power Systems, IEEE Transactions on, vol. 20, no. 1, pp. 180-188, 2005.
- [15] B. C. Flach, L. A. Barroso and M. V. F. Pereira, *Long-term optimal allocation of hydro generation for a price-maker company in a competitive market: latest developments and a stochastic dual dynamic programming approach*,. in IET Generation, Transmission & Distribution, vol. 4, no. 2, pp. 299-314, February 2010.
- [16] A. J. Conejo and F. J. Prieto, *Mathematical programming and electricity markets*. Top, vol. 9, no. 1, pp. 1-22, 2001.
- [17] M. Ventosa, A. Baillo, A. Ramos, and M. Rivier, *Electricity market modeling trends*. Energy policy, vol. 33, no.7, pp. 897-913, 2005.
- [18] U.S. Department of the Interior, *Hydroelectric power water use*. U.S Geological Survey, 2017.
- [19] U.S. Department of Energy, *International Energy Outlook*. U.S Energy Information Administration, 2017.
- [20] Enrique Salinas Escobar, *Sistema de Monitoreo para el Análisis del Manejo Estratégico de Capacidad de Corto Plazo en el Mercado Eléctrico Chileno (Sistema SIC)*. Universidad de Chile, 2013.

- [21] World Bank, *Power Market Structures, Revisiting Policy Options*. 2013.
- [22] Cambridge Economic Policy Associates (CEPA) y Negocios Globales Inteligentes, *Consultoria para Osinergmin*. Lima , 2016.
- [23] J. P. Molina, J. M. Zolezzi and J. Contreras *Nash-Cournot Equilibria in hydrothermal electricity markets*. IEEE Trans. Power Syst. 2011
- [24] S. Boyd, L. Vandenbergue *Convex Optimization*. Cambridge university press, 2009.
- [25] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. Shetty *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley, 2006.
- [26] J. Bracken, J. T. McGill *Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints*. Operations Research, v.21, n.1, p.37-44. 1973.
- [27] W. Bialas and M. Karwan, *Multilevel linear programming*. Technical Report 78 -1, Operations Research Program, State University of New York at Buffalo, 1978.
- [28] J. Bard and J. Falk, *An explicit solution to the multi-level programming problem*. Computers and Operations Research,9:77 - 100, 1982.
- [29] J. Fortuny - Amat and B. McCarl, *A representation and economic interpretation of a two-level programming problem*. Journal of the Operational Research Society, 32: 783 - 792, 1981.
- [30] Md Monjurul Islam, *Development of Methods for Solving Bilevel Optimization Problems*, Phd Thesis, The University of New South Wales, 2018.
- [31] S. Christiansen, M. Patriksson, and L. Wynter *Stochastic bilevel programming in structural optimization*. Structural and multidisciplinary optimization, 21(5):361 - 371, 2001.
- [32] L. Brotcorne, M. Labbé, P. Marcotte, and G. Savard *A bilevel model for toll optimization on a multicommodity transportation network*. Transportation Science, 35(4):345 - 358, 2001.
- [33] W. Candler and R. Townsley *A linear two-level programming problem*. Computers and Operations Research, 9(1): 59 - 76, 1982.

- [34] A. Sinha, P. Malo, A. Frantsev, and K. Deb *Multiobjective stackelberg game between a regulating authority and a mining company: A case study in environmental economics*. Evolutionary Computation (CEC), IEEE Congress on, pages 478 - 485. IEEE, 2013.
- [35] J. F. Bard *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications*, Springer. 1996.
- [36] R. Jeroslow *The polynomial Hierarchy and a simple model for competitive analysis*. Mathematical Programming, 32:146 - 164, 1985.
- [37] J. Bard *Some properties of the bilevel programming problem*. Journal of Optimization Theory and Applications, 68: 371 - 378, Technical note, 1991.
- [38] O. Ben-Ayed and C. Blair *Computational difficulties of Bilevel Linear Programming*. Operations Research, 38: 556 - 560, 1990.
- [39] L. Vicente, G. Savard and J. Judice *Descent approaches for quadratic bilevel programming*. Journal of Optimization Theory and Applications, 81: 379 - 399, 1994.
- [40] A. J. Wood, B. F. Wollenberg *Power Generation, Operation, and Control*, 2nd ed., John Wiley & Sons. 1996.
- [41] S. Dempe, A. B. Zemkoho *KKT Reformulation and necessary conditions for optimality in nonsmooth bilevel optimization*. 2014.
- [42] M. V. Pereira and L. M. Pinto *Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: A decomposition approach*. Water Resources Research 21, pp. 779-792, 1985.
- [43] M. Fampa, L. A. Barroso, D. Candal, and L. Simonetti *Bilevel optimization applied to strategic pricing in competitive electricity markets*. Computational Optimization and Applications, vol.39, no. 2, pp.121-142,2008.
- [44] A. k. David, W. Fushuan *Strategic bidding in competitive electricity markets: a literature survey*. Proceedings of IEEE Summer Meeting, Seattle, July 2000.
- [45] B. F. Hobbs, U. Helman, *Modelling Prices in Competitive Electricity Markets: Chapter 3 complementary-based equilibrium modelling for electric power markets*, 2004.
- [46] Priscilla Lusie Coelho Velozo, *Busca de Otimos Locais Para um Problema Nao Convexo de Estrategia de Precos em Mercados de Energia*, Tese de D.Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2015.

- [47] Luiz Augusto Barroso, *Estratégias de Ofertas Ótimas sob Incerteza E Cálculos de Equilíbrios de Nash de Agentes Geradores em Mercados de Curto Prazo de Energia Elétrica. Uma Abordagem por Programacao Linear Inteira*, Tese de Doutorado, UFRJ, 2006.
- [48] J. Fortuny-Amat and B. McCarl, *A representation and economic interpretation of a two-level programming problem*. J. Oper. Res. Soc., vol 32,no. 9,pp. 783-792,sep 1981.
- [49] Carlos Ruiz, Antonio Conejo *Pool Strategy of a Producer With Endogenous Formation of Locational Marginal Prices*. IEEE Trans. Power Syst., vol 24,no 4,pp. 1855-1865, November 2009.