**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

TESIS

# "CARACTERIZACIÓN DE CAMPOS DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU TIPO MAJORANA"

PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

ELABORADO POR:

**ABEL ALEJOS CORI**

iD: 0000-0003-4874-4888

ASESOR:

**Dr. JHOSEP VICTORINO BELTRÁN RAMIREZ**

iD: 0000-0002-7785-6427

LIMA - PERÚ

2023

| | |
|---|---|
| Citar/How to cite | Alejos Cori[1] |
| Referencia/Reference<br>Estilo/Style:<br>IEEE (2020) | [1] A. Alejos Cori, “Caracterización de Campos DKP tipo Majorana” [Trabajo de tesis]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2023. |

| | |
|---|---|
| Citar/How to cite | (Alejos, 2023) |
| Referencia/Reference<br>Estilo/Style:<br>APA (7ma ed.) | Alejos, A. (2023). Caracterización de Campos DKP tipo Majorana. [Trabajo de tesis, Universidad Nacional de Ingeniería], Repositorio institucional Cybertesis UNI. |

.

***Dedicatoria***

*Dedico este trabajo a mis padres, Máximo Alejos y Juana Cori que son el principal motivo por el cual puedo lograr mis sueños y uno de ellos es este trabajo. Gracias por todo el apoyo incondicional.*

# Agradecimiento

Agradecer a la Universidad Nacional de Ingeniería en la cual tuve las mejores experiencias de vida, conociendo amigos con los mismos intereses que yo y con los que convivo día a día. Con profesores que transmitían correctamente las teorías física para así poder ser un profesional en lo que tanto me gusta: ”La Física”. Como recuerdo y prueba viviente en la historia quedará esta tesis que perdurará dentro de los conocimientos y que servirá para aquel que lo lea a entender un poco de mis experiencias, investigaciones y conocimiento. Agradezco a todo aquel que este leyendo este apartado y lo demás de este trabajo.

Agradecer al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad Nacional de Ingeniería por la subvención que hizo posible esta tesis.

# Resumen

En este trabajó se encontrará las ecuaciones relativistas de primer orden para campos con espín arbitrario, en especial encontraremos la ecuación de DKP y el álgebra que sus matrices $\beta$ deben cumplir. Luego repasaremos las soluciones de la ecuación de Dirac para estudiar un subconjunto de soluciones a partir de tener una representación de Majorana de las matrices $\gamma$ y analizar su condición de realidad. Veremos como resolver la ecuación de DKP para el caso de campo libre mediante el uso de paquetes de onda y su transformación de conjugación de carga mediante el acople mínimo con el campo electromagnético. Finalmente, en analogía a la obtención de la condición de realidad para los campos de Majorana, caracterizaremos los campos de DKP tipo Majorana, es decir los campos de DKP que modelan partículas sin carga para el caso de campos de espín 0.

**Palabras clave:** Teoría de Campos, Física de Partículas, ecuación de onda relativista, campos de Majorana.

# Abstract

In this thesis, the first-order relativistic equations for fields with arbitrary spin will be derived. Specifically, the DKP equation and the algebra that its $\beta$ matrices must satisfy. Furthermore, a comprehensive review of the solutions of the Dirac equation will be undertaken, with the aim of studying a subset of solutions by way of a Majorana representation of the $\gamma$ matrices, and an analysis of their reality condition.

A study will also be conducted on the resolution of the DKP equation for the case of free fields using wave packets, and their charge conjugation transformation by minimal coupling with the electromagnetic field. Finally, analogous to the process of obtaining the reality condition for Majorana fields, the Majorana-type DKP fields will be characterized, that is, the DKP fields that model chargeless particles in the case of spin-0 fields.


**Keywords:** Field Theory, Particle Physics, relativistic wave equations, Majorana fields.

# Tabla de contenido

# Prólogo

La presente tesis fue desarrollada bajo la idea original del Dr. Prof. Jhosep Beltrán Ramirez tomando como base los tópicos de investigación dictados en el pregrado de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería.

La siguiente tesis está organizada de la siguiente manera:

- En el capítulo 1 introducimos la idea u objetivo por el cual se desarolló la presente tesis.
- En el capítulo 2 veremos como se encuentran ecuaciones de onda relativistas de primer orden partiendo de la condición de Klein-Gordon, en especial encontraremos la ecuación de DKP y el álgebra que sus coeficientes deben cumplir, y veremos que estos campos modelan partículas de espín 0 o 1.
- En el capítulo 3 revisaremos la ecuación de Dirac y su solución de campo libre, además revisaremos el artículo de Palash B. Pal [1] para ver cual es la condición para tener campos de Majorana, *i.e.* veremos cual es la *condición de realidad*.
- En el capítulo 4 estudiaremos la ecuación de DKP para el caso de espín 0 y encontraremos las soluciones para campos libres, en este caso tendremos representaciones de $\beta$ como matrices de $5 \times 5$ por lo que nuestras soluciones para el caso escalar serán funciones de onda como vectores columna de 5 componentes. Además, veremos como definir la transformación de conjugación de carga para campos DKP.
- Finalmente, en el capítulo 5 caracterizaremos los campos DKP tipo Majorana siguiendo lo hecho en el capítulo 3, pero encontrando cual será la nueva condición de realidad para campos DKP y calcularemos las propiedades de la matriz de conjugación de carga C.

# Capítulo 1

# Introducción

Mediante el mecanismo de Higgs una simetría de gauge se rompe espontáneamente al tomar un campo escalar ya sea real o complejo como un campo de dos componentes reales cuyos estados fundamentales son diferentes de cero. Una de las componentes será reemplazado por un estado polarizado longitudinalmente ahora de un campo de gauge masivo, mientras el otro campo se mantendrá como un campo neutral que representará una partícula de espín 0: el bosón de Higgs [2]. Cuando aprendemos a usar el mecanismo de Higgs para dar masa a las partículas fundamentales usamos el siguiente lagrangiano de Klein-Gordon con campos escalares reales

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4. \tag{1.1}$$

Los campos que se usan en el rompimiento de simetría son campos escalares reales que obedecen a la ecuación de Klein-Gordon.

Los campos DKP obedecen a una ecuación similar a la ecuación de Dirac, pero para el caso de partículas con espín 0 o 1. Y con el afán de recrear este mecanismo pero usando campos DKP, el objetivo de esta tesis sera encontrar cuales son las condiciones que deben tener para modelar campos sin carga.

Primero estudiaremos como se caracterizan estos campos reales en el caso de campos de Dirac. Los campos de Dirac son campos complejos de espín $\frac{1}{2}$, sin embargo, hay un subconjunto de campos conocidos como campos o fermiones de Majorana que se obtienen a partir de una representación especial, conocida como representación de Majorana de las conocidas matrices $\gamma$ de la ecuación de Dirac, y que modelan campos sin carga. Debido a que existe una similitud entre las ecuaciones de campo de Dirac y DKP, podremos hacer una analogía al caracterizar campos DKP tipo Majorana, *i.e.* caracterizaremos campos DKP sin carga.

# Capítulo 2

# Deducción de la ecuación DKP

Las ecuaciones de campo deben cumplir los postulados de la relatividad especial, los cuales debemos considerar como principios generales de la naturaleza. Las ecuaciones de onda de este tipo son llamadas *ecuaciones de onda relativistas*.

En este capítulo encontraremos ecuaciones de onda de primer orden y la estructura de esta ecuación, es decir, los coeficientes que acompañan a los operadores diferenciales. Partiremos de la condición de Klein-Gordon, que es la ecuación que cualquier campo relativista debe satisfacer. Luego, haremos la deducción de la ecuacón de Dirac, que es la ecuación relativista de primer orden más conocida, a partir de la condición de Klein-Gordon. Y encontraremos el álgebra de Dirac. Tomando esta deducción como ejemplo y sabiendo que los resultados son acordes a los ya conocidos, pasaremos a deducir las condiciones de los coeficientes, es decir, el álgebra de las matrices $\beta$ para partículas de determinado espín. En especial, nos centraremos en la deducción del álgebra para la ecuación de DKP [3]. También se estudiará el grado del operador diferencial, a fin de relacionarlo con el espín de la particula, ya que como veremos, según sea el grado del operador diferencial obtendremos diferentes álgebras para las matrices que acompañan a los operadores diferenciales en la ecuación de campo. Para esto, repasaremos las transformaciones de Lorentz y las relaciones de conmutación de los generadores del álgebra de Lorentz [4, 5].

## 2.1 Condición de Klein-Gordon

La ecuación de Schrodinger no es simétrica en las derivadas del espacio y del tiempo, por lo que esta no es invariante de Lorentz. Sabemos que la relación relativística entre la energía y el momento, para una partícula libre, viene dada por

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2, \tag{2.1}$$

donde $E$ es la energía, $\vec{p}$ es el tri-momentum, y $m$ es la masa de la partícula.

Podemos hacer uso del algoritmo de Schrodinger para obtener ecuaciones de onda de un partícula. Este algoritmo consiste en representar a la energía y el momentum mediante operadores diferenciales de la siguiente forma

$$\hat{E} = i\partial_0,$$
$$\hat{p}_i = -i\partial_i,$$

donde estamos considerando unidades naturales $\hbar = 1 = c$.

De aquí, haciendo uso de (2.1), se obtiene la ecuación de onda

$$(\Box + m^2)\psi(x) = 0, \tag{2.2}$$

donde $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ es el operador conocido como d'Alambertiano.

La ecuación (2.2) es conocida como la ecuación de Klein-Gordon. Y si sustituimos una función de onda plana $\psi = \exp(-ix^\mu p_\mu)$, es claro que obtendremos la condición relativista (2.1). Por esto asumimos que cualquier teoría de campos relativista debe satisfacer la siguiente condición: *Los campos $\psi$ correspondientes a particulas libres deben satisfacer la ecuación* (2.2) (**condición de K. G.**).

## 2.2 Deducción de la ecuación de Dirac

Podemos observar que la ecuación (2.2) es una ecuación diferencial de segundo orden. Además, de la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos que cualquier ecuación diferencial puede ser transformada a primer orden aumentando el número de funciones de onda.

Un ejemplo de esto es para el caso del campo escalar $\psi(x)$ que satisface (2.2). Podemos convertir la ecuación (2.2) en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left.\begin{aligned} \psi^\mu(x) &= \partial^\mu\psi(x) \\ \partial_\mu\psi^\mu(x) &= -m^2\psi(x) \end{aligned}\right\}, \tag{2.3}$$

donde se ha introducido el vector de cinco componentes $(\psi, \psi^\mu)$ [6]. Nótese, que cada componente de esta función cumple individualmente la ecuación de K. G.

En general, la ecuación de onda relativista, de primer orden, para un conjunto de funciones de onda $\psi_a$ $(a = 1, 2, ..., n)$ tiene la forma

$$\Lambda_{ab}(\partial)\ \psi_b = 0. \tag{2.4}$$

donde $\Lambda_{ab}(\partial)$ son los elementos de matriz de los operadores diferenciales de primer orden que actúan sobre las funciones.

La condición de K.G. limita esta ecuación de onda, ya que requiere la existencia del operador diferencial $d_{ab}(\partial)$ que satisfaga la relación

$$d_{ab}(\partial)\Lambda_{bc}(\partial) = (\Box + m^2)\delta_{ac}, \tag{2.5}$$

y la forma más general de este operador $d_{ab}$ está dada por una función de las derivadas parciales $\partial_\mu$'s

$$d(\partial) \equiv [d_{ab}(\partial)] = \alpha + \alpha^\mu\partial_\mu + ... + \alpha^{\mu_1...\mu_l}\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_l} + ..., \tag{2.6}$$

donde los coeficientes $\alpha, \alpha_\mu, ...$ son matrices de dimensión $n$.

Denotamos el orden más alto de la serie de los operadores diferenciales en (2.6) por $r$, tal que

$$\alpha^{\mu_1 \dots \mu_l} = 0 \quad \text{para} \quad l > r. \tag{2.7}$$

Si usamos la misma filosofía para el operador $\Lambda(\partial)$, su estructura general se podría escribir de la siguiente forma

$$(i\rho^\mu \partial_\mu - m\beta)\psi(x) = 0, \tag{2.8}$$

donde $\rho^\mu$ y $\beta$ son ciertas matrices de dimensión $n$, y $\psi(x) = (\psi_1, \dots)^T$. Sustituyendo, (2.6) junto a $\Lambda(\partial) \equiv [\Lambda_{ab}(\partial)] = i\rho^\mu \partial_\mu - m\beta$ en la ecuación (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned} (\alpha + \alpha^\mu \partial_\mu + \dots)(i\rho^\nu \partial_\nu - m\beta) &= (\Box + m^2)I \\ -\alpha\beta m + (i\alpha\rho^\mu + m\alpha^\mu\beta)\partial_\mu + i\alpha^\mu \partial_\mu \rho^\nu \partial_\nu + O(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\gamma) &= (\Box + m^2)I. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Comparando los términos de orden cero en ambos lados de la ecuación (2.9), encontramos la siguiente identidad

$$-m\alpha\beta = m^2 I, \tag{2.10}$$

donde si aplicamos determinante a ambos lados, teniendo en cuenta que $I$ es la matriz identidad de orden $n$, obtenemos

$$\begin{aligned} |m\alpha\beta| &= |m^2 I| \\ m^n |\alpha||\beta| &= m^{2n} |I| \\ |\alpha||\beta| &= m^n. \end{aligned}$$

Considerando que en general $m$ es no nulo[1], entonces, tanto $\alpha$ como $\beta$ son matriz no singulares, es decir, existe la matriz inversa $\beta^{-1}$. Multiplicando (2.8) por $\beta^{-1}$ obtenemos

[1]En el caso de $m = 0$, es decir, el caso de los fotones, revisar la referencia [3]

otra forma de la ecuación general relativista de primer orden

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - mI)\psi(x) = 0, \tag{2.11}$$

donde,

$$\beta^{\mu} = \beta^{-1}\rho^{\mu}. \tag{2.12}$$

Como ejemplo, sea $d(\partial)$ un operador diferencial de primer orden (*i.e.* $r = 1$ en (2.7)),

$$d(\partial) = \alpha + \alpha^{\mu}\partial_{\mu}. \tag{2.13}$$

Usando el operador (2.13) junto a $\Lambda = (i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - mI)$ en la condición de K. G. (2.5), se obtiene la siguiente identidad

$$\begin{gathered}
(\alpha + \alpha^{\mu}\partial_{\mu})(i\beta^{\nu}\partial_{\nu} - mI) = (\Box + m^2)I \\
i\alpha\beta^{\nu}\partial_{\nu} - \alpha m + i\alpha^{\mu}\partial_{\mu}\beta^{\nu}\partial_{\nu} - \alpha^{\mu}\partial_{\mu}m = (\Box + m^2)I,
\end{gathered}$$

donde para que esta igualdad sea cierta, se debe cumplir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}
-\alpha m = m^2 I \\
i\alpha\beta^{\mu} - \alpha^{\mu}m = 0 \\
i(\alpha^{\mu}\beta^{\nu} + \alpha^{\nu}\beta^{\mu}) = 2g^{\mu\nu},
\end{cases} \tag{2.14}$$

estas ecuaciones conducen a

$$\begin{gathered}
\alpha = -mI \\
\alpha^{\mu} = -i\beta^{\mu} \\
\beta^{\mu}\beta^{\nu} + \beta^{\nu}\beta^{\mu} \overset{!}{=} 2g^{\mu\nu}.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

La tercera ecuación de (2.15) es la condición que deben cumplir los $\beta^{\mu}$'s para que la ecuación (2.11) sea relativista, pues proviene de la condición de K. G. En la literatura, esta ecuación es el álgebra de Dirac.

Como se verá en la sección 2.4, el valor de $r$ que aparece en (2.7) es igual a $2j$, donde $j$ es el valor máximo del espín de la representación del campo $\psi$. Entonces, en (2.13) se tiene que $j = 1/2$, por lo que (2.11) es la ecuación del campo con espín $1/2$, donde $\beta^\mu$ debe satisfacer (2.15). De manera similar, en la siguiente sección derivaremos las ecuaciones de campo para representaciones de mayor orden.

## 2.3 Ecuación de onda relativista general

Como ya vimos, una ecuación de campo relativista se puede escribir de la forma

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{2.16}$$

donde a los escalares se les considerará que se esta multiplicando por la matriz identidad, por lo que a partir de ahora no lo escribiremos explícitamente.

Ahora, sea una transformación de Lorentz dada por

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\mu, \tag{2.17}$$

donde, la transformación $\Lambda^\mu{}_\nu$ debe cumplir la siguiente condición

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \tag{2.18}$$

esta condición permite que las transformaciones de Lorentz dejen invariante la forma cuadrática $x^2 = x^\mu x_\mu$.

Asumimos que bajo la transformación (2.17) $\psi$ se transforma linealmente de acuerdo a

$$\psi' = L\psi, \tag{2.19}$$

donde, $L$ es la representación de la transformación de Lorentz de los campos.

De (2.17), podemos obtener la transformación de Lorentz para las derivadas

$$\partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu. \tag{2.20}$$

Sustituyendo (2.20) y (2.19) en (2.16) y multiplicando por $L$ por la izquierda

$$\begin{aligned}
(i\beta^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m)L^{-1}\psi' &= 0 \\
L(i\beta^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m)L^{-1}\psi' &= 0 \\
(iL\Lambda^\nu{}_\mu \beta^\mu L^{-1}\partial'_\nu - m)\psi' &= 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Para que la ecuación (2.21) sea covariante, debe tener la misma forma que (2.16), *i.e.* se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
L\Lambda^\nu{}_\mu \beta^\mu L^{-1} &= \beta^\nu, \\
\Lambda^\nu{}_\mu \beta^\mu &= L^{-1}\beta^\nu L.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

En la ecuación (2.22) tenemos en el lado izquierdo la transformación de $\beta^\mu$ como un cuadrivector, y en el lado derecho, la transformación de la matriz $\beta^\nu$.

Ya hemos visto un caso particular de una ecuación de onda relativista dada por la elección (2.13) del operador diferencial. Ahora, para encontrar una ecuación de onda relativista general de primer orden, sustituimos (2.6) en (2.5), con $\Lambda = (i\beta^\mu\partial_\mu - m)$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \alpha^\mu\partial_\mu + ... + \alpha^{\mu_1 \cdots \mu_l}\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_l} + ...)(i\beta^\nu\partial_\nu - m) &= (\Box + m^2)I \\
i\alpha\beta^\nu\partial_\nu - \alpha m + i\alpha^\mu\partial_\mu\beta^\nu\partial_\nu - \alpha^\mu\partial_\mu m + i\alpha^{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\beta^\nu\partial_\nu - m\alpha^{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} & \\
+ ... + i\alpha^{\mu_1 \cdots \mu_l}\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_l}\beta^\nu\partial_\nu - m\alpha^{\mu_1 \cdots \mu_l}\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_l} + ... &= (\Box + m^2)I \\
-\alpha m + (i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu)\partial_\mu + (i\alpha^\mu\beta^\nu - m\alpha^{\mu\nu})\partial_\mu\partial_\nu + i\alpha^{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\beta^\nu\partial_\nu & \\
+ ... + i\alpha^{\mu_1 \cdots \mu_l}\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_l}\beta^\nu\partial_\nu - m\alpha^{\mu_1 \cdots \mu_l}\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_l} + ... &= (\Box + m^2)I.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Como se puede observar de la expansión (2.6) del operador $d(\partial)$, las $\alpha^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$ son simétricas con respecto al intercambio de sus índices. Entonces, comparando ambos lados de la ecuación, encontramos las siguientes relaciones:

$$\alpha = -mI, \tag{2.24}$$

$$i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu = 0, \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} i\alpha^\mu\partial_\mu\beta^\nu\partial_\nu - m\alpha^{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} &= \partial^\mu\partial_\mu \\ i\alpha^\mu\beta^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m\alpha^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \\ \sum_{\{\mu\nu\}}(i\beta^\mu\alpha^\nu - m\alpha^{\mu\nu}) &= 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} i\alpha^{\mu_1\mu_2}\beta^\nu\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_\nu - m\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3} &= 0 \\ i\beta^{\mu_1}\alpha^{\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3} - m\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3} &= 0 \\ \sum_{\{\mu_1\mu_2\mu_3\}}(i\beta^{\mu_1}\alpha^{\mu_2\mu_3} - m\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}) &= 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\sum_{\{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l\}}(i\beta^{\mu_1}\alpha^{\mu_2\cdots\mu_l} - m\alpha^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}) = 0, \tag{2.28}$$

donde $\sum_{\{\mu_1\cdots\mu_l\}}$ indica una sumatoria sobre todas las permutaciones posibles de los índices. Despejando las $\alpha$'s

$$\alpha = -mI, \tag{2.29}$$

$$\alpha^\mu = -i\beta^\mu, \tag{2.30}$$

$$\alpha^{\mu\nu} = -\frac{1}{m}\left[g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu)\right], \tag{2.31}$$

los cálculos (2.29), (2.30) y (2.31) son similares a los cálculos hechos para la deducción de la ecuación Dirac (2.15).

Ahora, realizaremos los cálculos para $l = 3$ en adelante. De la simetría de los indices de las matrices $\alpha$'s, la ecuación (2.28) se puede reescribir como

$$i \sum_{\{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l\}} \beta^{\mu_1}\alpha^{\mu_2\cdots\mu_l} = \sigma! m\alpha^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}. \qquad (2.32)$$

- Para el caso $\sigma = 3$, usando la ecuación (2.26) para reemplazar el $\alpha^{\mu_2\mu_3}$

$$\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{1}{3!}\frac{(-i)}{m^2} \sum_{\{\mu_1\mu_2\mu_3\}} \beta^{\mu_1}(g^{\mu_2\mu_3} - \beta^{\mu_2}\beta^{\mu_3}). \qquad (2.33)$$

- Para el caso $\sigma = 4$, usamos (2.33) para reemplazar $\alpha^{\mu_2\mu_3\mu_4}$

$$\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{1}{4!}\frac{1}{m^3} \sum_{\{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\}} \beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}(g^{\mu_3\mu_4} - \beta^{\mu_3}\beta^{\mu_4}). \qquad (2.34)$$

Por lo que, para $\sigma = l$, se obtiene de manera iterativa

$$\alpha^{\mu_1\cdots\mu_l} = \frac{1}{l!}\frac{(i)^l}{m^{(l-1)}} \sum_{\{\mu_1\cdots\mu_l\}} \beta^{\mu_1}...\beta^{\mu_{l-2}}(g^{\mu_{l-1}\mu_l} - \beta^{\mu_{l-1}}\beta^{\mu_l}), \quad \text{para} \quad l > 2. \qquad (2.35)$$

Además, de la ecuación (2.7) podemos encontrar el álgebra de las matrices $\beta$

$$\sum_{\{\mu_1\cdots\mu_{b+1}\}} \beta^{\mu_1}...\beta^{\mu_{b-1}}(g^{\mu_b\mu_{b+1}} - \beta^{\mu_b}\beta^{\mu_{b+1}}) = 0. \qquad (2.36)$$

Asi, tenemos que el operador diferencial

$$\begin{aligned} d(\partial) =& - mI - i\beta^\mu\partial_\mu - \frac{1}{m}\left[\Box - (\beta^\mu\beta^\nu\partial_\mu\partial_\nu)\right] + ... \\ &+ \frac{(i)^l}{m^{(l-1)}}(\beta^{\mu_3}...\beta^{\mu_l}\Box - \beta^{\mu_1}...\beta^{\mu_l}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2})\partial_{\mu_3}...\partial_{\mu_l} + ... \\ =& - mI - i\beta^\mu\partial_\mu - \frac{1}{m}\left[\Box - (\beta^\mu\partial_\mu)^2\right] + ... \\ &+ \frac{i^l}{m^{l-1}}[\Box - (\beta^\mu\partial_\mu)^2](\beta^\mu\partial_\mu)^{l-2} + ... \end{aligned} \qquad (2.37)$$

## 2.4 Significado del grado *l* del operador diferencial

En esta sección intentaremos darle un sentido al grado del operador diferencial, ya que como vimos, según sea el grado de este operador, encontraremos diferentes ecuaciones de campo y veremos como esta se relaciona con el espín del campo. En esta sección seguiremos de cerca las referencias [4, 5]

Para esto primero haremos un repaso a las transformaciones de Lorentz y sus respectivos generadores [4].

Sea una transformación infinitesimal de Lorentz escrito de la siguiente manera

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \tag{2.38}$$

donde $\delta^{\mu}_{\nu}$ es la delta de Kroneker y $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ son los parámetros infinitesimales.

Reemplazamos (2.38) en la ecuación (2.18) para encontrar las restricciones que deben cumplir los parámetros $\omega^{\mu}_{\nu}$

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\tau} &= \eta_{\mu\nu}\left\{\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\rho}\right\}\left\{\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}\right\} \\
&= \eta_{\mu\nu}\delta^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \eta_{\mu\nu}\delta^{\mu}{}_{\rho}\omega^{\nu}{}_{\sigma} + \eta_{\mu\nu}\omega^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} \\
&= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} = \eta_{\rho\sigma},
\end{aligned}$$

por lo tanto, se debe cumplir que

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \tag{2.39}$$

entonces, los parametros infinitesimales $\omega_{\mu\nu}$ deben ser antisimétricos.

Para la transformación infinitesimal (2.38), la matriz de transformación de Lorentz $L$ de los campos tiene la forma

$$L = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \tag{2.40}$$

con

$$S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}. \tag{2.41}$$

Donde la antisimetría de $S^{\mu\nu}$ proviene del producto con los parámetros $\omega_{\mu\nu}$ que ya se ha visto que son antisimétricos.

Esta matriz de transformación es la transformación $L$ que vimos en la ecuación (2.19).

Ahora, sustituyendo (2.40) y (2.38) en (2.22), y considerando solo términos a primer orden en $\omega$ encontramos que

$$\begin{aligned}
(1 + \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda})\beta^\sigma(1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda}) &= (\delta^\sigma_\nu + \omega^\sigma{}_\nu)\beta^\nu \\
\beta^\sigma - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}\beta^\sigma S^{\rho\lambda} + \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda}\beta^\sigma &= \beta^\sigma + g^{\sigma\mu}\omega_{\mu\nu}\beta^\nu \\
\tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}(S^{\rho\lambda}\beta^\sigma - \beta^\sigma S^{\rho\lambda}) &= g^{\sigma\mu}\omega_{\mu\nu}\beta^\nu,
\end{aligned}$$

además, usando las identidades $\omega_{\mu\nu} = \omega_{\rho\nu}\delta_{\rho\mu}$, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\nu\lambda}\delta_{\lambda\mu}$ obtenemos $\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\omega_{\rho\nu}\delta_{\rho\mu} - \omega_{\nu\lambda}\delta_{\lambda\mu})$. Entonces

$$\begin{aligned}
g^{\sigma\mu}\omega_{\mu\nu}\beta^\nu &= \frac{1}{2}(\omega_{\rho\nu}\delta_{\rho\mu}\beta^\nu g^{\sigma\mu} - \omega_{\nu\lambda}\delta_{\lambda\mu}\beta^\nu g^{\sigma\mu}) \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\rho\lambda}(g^{\sigma\rho}\beta^\lambda - g^{\sigma\lambda}\beta^\rho),
\end{aligned}$$

por lo tanto, ya que $\omega_{\rho\lambda}$ es arbitrario, encontramos que

$$[\beta^\sigma, S^{\rho\lambda}] = i(g^{\sigma\rho}\beta^\lambda - g^{\sigma\lambda}\beta^\rho). \tag{2.42}$$

Ya que $S^{\mu\nu}$ es un tensor de segundo orden, tenemos que se debe transformar por Lorentz como sigue

$$L^{-1}S^{\mu\nu}L = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma S^{\rho\sigma}, \tag{2.43}$$

análogamente al calculo de (2.42), reemplazamos (2.40) y (2.38) en (2.43) y calculamos haciendo uso de las identidades ya mencionadas

$$
\begin{aligned}
(1 + \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda})S^{\mu\nu}(1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda}) &= (\delta^{\mu}_{\sigma} + \omega^{\mu}{}_{\sigma})(\delta^{\nu}_{\theta} + \omega^{\nu}{}_{\theta})S^{\sigma\theta} \\
S^{\mu\nu} - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\mu\nu}S^{\rho\lambda} + \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda}S^{\mu\nu} &= S^{\mu\nu} + \delta^{\mu}_{\sigma}\omega^{\nu}{}_{\theta}S^{\sigma\theta} + \delta^{\nu}_{\theta}\omega^{\mu}{}_{\sigma}S^{\sigma\theta} \\
\tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}(S^{\rho\lambda}S^{\mu\nu} - S^{\mu\nu}S^{\rho\lambda}) &= g^{\nu\alpha}\omega_{\alpha\theta}S^{\mu\theta} + g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\sigma}S^{\sigma\nu} \\
&= \tfrac{1}{2}g^{\nu\alpha}(\omega_{\rho\theta}\delta_{\rho\alpha} - \omega_{\theta\lambda}\delta_{\lambda\alpha})S^{\mu\theta} + \tfrac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\omega_{\rho\sigma}\delta_{\rho\alpha} - \omega_{\sigma\lambda}\delta_{\lambda\alpha})S^{\sigma\nu} \\
\tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}(S^{\rho\lambda}S^{\mu\nu} - S^{\mu\nu}S^{\rho\lambda}) &= \tfrac{1}{2}(g^{\nu\rho}\omega_{\rho\theta}S^{\mu\theta} - g^{\nu\lambda}\omega_{\theta\lambda}S^{\mu\theta}) + \tfrac{1}{2}(g^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}S^{\sigma\nu} - g^{\mu\lambda}\omega_{\sigma\lambda}S^{\sigma\nu}) \\
&= \tfrac{1}{2}(g^{\nu\rho}\omega_{\rho\lambda}S^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda}\omega_{\rho\lambda}S^{\mu\rho}) + \tfrac{1}{2}(g^{\mu\rho}\omega_{\rho\lambda}S^{\lambda\nu} - g^{\mu\lambda}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\nu}) \\
&= \tfrac{1}{2}\omega_{\rho\lambda}(g^{\nu\rho}S^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda}S^{\mu\rho} + g^{\mu\rho}S^{\lambda\nu} - g^{\mu\lambda}S^{\rho\nu})
\end{aligned}
$$

de aquí, obtenemos el ya conocido álgebra de Lorentz

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\lambda}] = i(-g^{\mu\rho}S^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}S^{\nu\rho} - g^{\nu\lambda}S^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}S^{\mu\lambda}). \tag{2.44}$$

Ahora, introducimos las matrices de espín $J^k$ y las matrices $K^i$ construidas a partir de los generadores $S^{\mu\nu}$ de la siguiente manera

$$J^k \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{klm}S^{lm} \quad \text{con} \quad k, l, m = 1, 2, 3, \tag{2.45}$$

$$K^i \equiv S^{i0}, \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.46}$$

Las interpretaciones de $J^k$ y $K^i$ las encontraremos al calcular sus leyes de conmutación. Primero, reemplazaremos (2.45) en (2.44), para lo cual debemos tener en cuenta la siguiente propiedad del tensor métrico $g$, tal que

$$g^{ij} = -\delta^{ij}, \quad \text{con} \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.47}$$

en general, cualquier índice latino toma los valores $1, 2, 3$. Con esto

$$\begin{aligned}
[J^k, J^l] &= \frac{1}{4}\epsilon^{kij}\epsilon^{lpq}[S^{ij}, S^{pq}] \\
&= \frac{i}{4}\epsilon^{kij}\epsilon^{lpq}(-g^{ip}S^{jq} + g^{iq}S^{jp} - g^{jq}S^{ip} + g^{jp}S^{iq}) \\
&= \frac{i}{4}(\epsilon^{kij}\epsilon^{liq}S^{jq} - \epsilon^{kij}\epsilon^{lpi}S^{jp} + \epsilon^{kij}\epsilon^{lpj}S^{ip} - \epsilon^{kij}\epsilon^{ljq}S^{iq}) \\
&= \frac{i}{4}(\delta^{kl}\delta^{jq}S^{jq} - \delta^{kq}\delta^{jl}S^{jq} - \delta^{kp}\delta^{jl}S^{jp} + \delta^{kl}\delta^{jp}S^{jp} \\
&\quad + \delta^{kl}\delta^{ip}S^{ip} - \delta^{kp}\delta^{il}S^{ip} + \delta^{kl}\delta^{iq}S^{iq} - \delta^{kq}\delta^{li}S^{iq}) \\
&= \frac{i}{4}(\delta^{kl}S^{qq} - S^{lk} - S^{lk} + \delta^{kl}S^{pp} + \delta^{kl}S^{pp} - S^{lk} + \delta^{kl}S^{qq} - S^{lk}) \\
&= -\frac{i}{4}4S^{lk} = -iS^{lk} \\
&= -i(\epsilon^{mlk}J^m) = i\epsilon^{mkl}J^m,
\end{aligned}$$

donde hemos usado también la siguiente relación para $S^{lk}$

$$\begin{aligned}
J^m &= \frac{1}{2}\epsilon^{mlk}S^{lk} \\
\epsilon^{ilk}J^m &= \frac{1}{2}\epsilon^{ilk}\epsilon^{mlk}S^{lk} \\
\epsilon^{ilk}J^m &= \frac{1}{2}2\delta^{im}S^{lk} \\
\delta^{im}\epsilon^{ilk}J^m &= \delta^{im}\delta^{im}S^{lk} \\
\epsilon^{mlk}J^m &= S^{lk},
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos la relación de conmutación para las matrices $J^k$

$$[J^k, J^l] = i\epsilon^{klm}J^m. \tag{2.48}$$

Podemos observar que (2.48) es el álgebra de Lie de $SU(2)$, por lo que $J^k$, definido por (2.44), es el momento angular.

Ahora, calcularemos el conmutador de las matrices $K^i$ reemplazando (2.46) en (2.44)

$$\begin{aligned}
[K^l, K^m] &= [S^{l0}, S^{m0}] \\
&= i(-g^{lm}S^{00} + g^{l0}S^{0m} - g^{00}S^{lm} + g^{0m}S^{l0}) \\
&= -ig^{00}S^{lm},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la condición de que $S^{\mu\nu}$ es antisimétrica y que $g^{0i} = g^{i0} = 0$, de aquí

$$[K^l, K^m] = -i\epsilon^{lmk}J^k. \tag{2.49}$$

Finalmente, calculemos el conmutador entre $J^k$ y $K^i$, donde haremos uso de las identidades ya mencionadas en los cálculos anteriores

$$\begin{aligned}
[K^l, J^m] &= \frac{1}{2}\epsilon^{mpq}[S^{l0}, S^{pq}] \\
&= \frac{i}{2}\epsilon^{mpq}(-g^{lp}S^{0q} + g^{lq}S^{0p} - g^{0q}S^{lp} + g^{0p}S^{lq}) \\
&= \frac{i}{2}(\epsilon^{mlq}S^{0q} - \epsilon^{mpl}S^{0p}) \\
&= \frac{i}{2}(2\epsilon^{mlq}S^{0q}) = i(-\epsilon^{lmq})(-K^q) \\
&= i\epsilon^{lmq}K^q,
\end{aligned}$$

entonces,

$$[J^l, K^m] = i\epsilon^{lmq}K^q, \tag{2.50}$$

de (2.50) podemos observar que **K**, definido por (2.46), representa un vector espacial.

Hemos mencionado que (2.48) es la relación de conmutación de un momento angular. Por lo tanto, $J^k$ tiene las propiedades del momento angular, y tiene los autovalores $(j, j-1, ..., -j)$, donde $j$ puede toma un valor entero o semientero. En general, las matrices de momento angular $J^k$ (ver anexo A) se pueden descomponer en representaciones irreducibles $\mathscr{D}^{|j|}, \mathscr{D}^{|j-1|}, ...$ del grupo de rotación de tres dimensiones. Ya que, en una representación irreducible $\mathscr{D}^j$, la función de onda $\psi$ tiene $(2j+1)$ componentes independientes que corresponden a las direcciones del momento angular $(m_j)$, entonces, $\psi$ describe el estado de una partícula con espín $S = j$. Así, la función de onda $\psi$ en (2.16) describe estados de una partícula con espín $|j|, |j-1|, \ldots$.

Finalmente, podemos relacionar el orden del operador $d(\partial)$, llamémosle $b$, con el espín $j$, por

$$b = 2j, \qquad \text{si} \quad m \neq 0, \tag{2.51}$$

donde $j$ es el máximo valor del espín de los varios campos descritos por los campos $\psi$.

De esta manera, por ejemplo, podemos tener para espín $S = \frac{1}{2}$ (*i.e* $j = \frac{1}{2}$), (2.36) conduce a

$$\beta^\mu \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{2.52}$$

que es el álgebra en la teoría de Dirac. Para esta teoría, $d(\partial)$ es

$$d(\partial) = -(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \tag{2.53}$$

Para espín $S = 1$ o $0$ (*i.e* $j = 1$),

$$\sum_{\{\mu_1\mu_2\mu_3\}} \beta^{\mu_1}(g^{\mu_2\mu_3} - \beta^{\mu_2}\beta^{\mu_3}) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\beta^\mu\beta^\nu\beta^\sigma + \beta^\sigma\beta^\nu\beta^\mu - g^{\mu\nu}\beta^\sigma - g^{\sigma\nu}\beta^\mu \\
&+\beta^\mu\beta^\sigma\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\sigma\beta^\mu - g^{\mu\sigma}\beta^\nu - g^{\nu\sigma}\beta^\mu \\
&+\beta^\nu\beta^\mu\beta^\sigma + \beta^\sigma\beta^\mu\beta^\nu - g^{\nu\mu}\beta^\sigma - g^{\sigma\mu}\beta^\nu = 0
\end{aligned}$$

que se puede reescribir como

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho + \beta^\rho\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\rho + g^{\rho\nu}\beta^\mu, \tag{2.54}$$

y el operador diferencial $d(\partial)$

$$d(\partial) = -\left[\frac{1}{m}(\Box + m^2) + i\beta^\mu\partial_\mu - \frac{1}{2m}(\beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu)\partial_\mu\partial_\nu\right]. \tag{2.55}$$

Tenemos que para espín 0 o 1 la ecuación de onda viene dada por (2.16), que junto al álgebra (2.54) de las matrices $\beta$ es conocida como la ecuación Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Esta es la ecuación que queríamos encontrar para propósitos de este trabajo, en el capítulo 4 estudiaremos más acerca de esta ecuación para el caso de partículas de espín 0 a fin de encontrar los campos DKP tipo Majorana, pero primero hemos de repasar la teoría de Dirac y su representación de Majorana.

Finalmente, tenemos que podemos encontrar las ecuaciones de onda para campos con espín arbitrario, según el grado del operador diferencial con el que trabajemos.

# Capítulo 3

# Ecuación de Dirac y sus soluciones

Ahora que sabemos como deducir las ecuaciones de onda para partículas de espín arbitrario, daremos un estudio a la ecuación de Dirac y sus soluciones generales, así como también, analizaremos las soluciones reales y las consecuencias de trabajar en una representación imaginaria de las matrices $\gamma^\mu$.

Como vimos en el capítulo anterior, la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{3.1}$$

se obtiene a partir de tomar el operador diferencial (2.6) de orden 1, (*i.e* $j = \frac{1}{2}$), junto con el álgebra que deben cumplir las matrices $\gamma^\mu$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Una de las representaciones posibles de estas matrices y de uso frecuente es la siguiente [7]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

donde $I_2$ es la matriz identidad de dimensión 2, 0 es una matriz nula también de dimensión 2, y $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli.

## 3.1 Solución de la ecuación de Dirac para una partícula libre

Las soluciones para la ecuación de Dirac libre, escrita de la forma (3.1), utilizando la representación (3.3) deben ser vectores de cuatro componentes. Para calcular las soluciones de dicha ecuación, introducimos un *ansatz* [8, 9]

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip_\mu x^\mu} = u(p)e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}, \tag{3.4}$$

donde $u(p)$ es un vector de cuatro componentes.

Ahora, reemplazamos el *anzats* (3.4) en la ecuación (3.1)

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)u(p)e^{-ip_\mu x^\mu} &= 0 \\ (i\gamma^\mu u(p)(-ip_\mu)e^{-ip_\mu x^\mu} - m.u(p)e^{-ip_\mu x^\mu}) &= 0 \\ (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p)e^{-ip_\mu x^\mu} &= 0 \\ (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) &= 0 \\ (\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)u(p) &= 0 \\ (p_0 + \gamma^0\gamma^i p_i - \gamma^0 m)u(p) &= 0 \\ (\gamma^0\gamma^i p^i + \gamma^0 m)u(p) &= p_0 u(p) \end{aligned} \tag{3.5}$$

de (3.3), podemos calcular

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Escribiendo

$$u = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

con $\phi$ y $\chi$ vectores columna de dos componentes, y teniendo en cuenta que $p_0 = E$.

Reemplazamos (3.7) y (3.6) en (3.5),

$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\vec{p} + m\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$
$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{\sigma}\chi\\ \vec{\sigma}\phi\end{pmatrix}\vec{p} + m\begin{pmatrix}\phi\\ -\chi\end{pmatrix},$$

tenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} E\phi = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi + m\phi \\ E\chi = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\phi - m\chi \end{cases}, \tag{3.8}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{cases} (E-m)\phi - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi = 0 \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\phi - (E+m)\chi = 0 \end{cases}, \tag{3.9}$$

y escribiéndolo en su forma matricial, tenemos

$$\begin{pmatrix}E-m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(E+m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = 0. \tag{3.10}$$

Para que la ecuación (3.10) tenga soluciones no triviales, se debe cumplir que la determinante sea igual a cero, luego

$$(E^2 - m^2) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = 0. \tag{3.11}$$

Usando la relación

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}), \tag{3.12}$$

la ecuación (3.11) se transforma en

$$E^2 = m^2 + p^2. \tag{3.13}$$

Además, del sistema de ecuaciones (3.9), tenemos

$$\phi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - m}\chi \ , \ \ \chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}\phi. \tag{3.14}$$

Para las soluciones con energías positivas $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ necesitamos hacer elecciones para la forma de $\phi$. Hagamos la elección canónica y recordemos que $\phi$ es un spinor de 2 componentes, por lo que debemos especificar dos soluciones:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ o } \ \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

En cada uno de estos casos $\chi$ queda determinado por la elección de $\phi$, de modo que hay en general cuatro soluciones independientes para cada valor de momento $\vec{p}$.

Para escribir explícitamente (a excepción de un factor de normalización) las dos soluciones de energía positiva, basta obtener las componentes $\chi_1$ y $\chi_2$ correspondientes a $\phi_1$ y $\phi_2$ respectivamente. Esto es fácil de encontrar usando la relación (3.14) y además

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} p_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

luego,

$$\chi_1 = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_z & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & -p_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\chi_1 = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_z\\ p_x + ip_y\end{pmatrix}.$$

$$\chi_2 = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_z & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & -p_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\chi_2 = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_x - ip_y\\ -p_z\end{pmatrix}.$$

Análogamente hacemos para las dos soluciones de energía negativa $E = -\sqrt{p^2+m^2}$, tomamos

$$\bar{\chi}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ o } \bar{\chi}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Y usando nuevamente las relaciones (3.14) y (3.16)

$$\phi_1 = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix}p_z & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & -p_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\phi_1 = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix}p_z\\ p_x + ip_y\end{pmatrix}.$$

$$\phi_2 = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix}p_z & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & -p_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix}p_x - ip_y\\ -p_z\end{pmatrix}.$$

Así, obtenemos los cuatro espinores

$$u_1(p) = \begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{p_z}{E+m}\\ \frac{(p_x+ip_y)}{E+m}\end{pmatrix},\ u_2(p) = \begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{(p_x-ip_y)}{E+m}\\ \frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

$$u_3(p) = \begin{pmatrix}\frac{p_z}{E-m}\\ \frac{(p_x+ip_y)}{E-m}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ u_4(p) = \begin{pmatrix}\frac{(p_x-ip_y)}{E-m}\\ \frac{-p_z}{E-m}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

A partir de la ecuación (3.4) las soluciones serán:

$$\psi_1(x) = u_1(p)e^{-ip\cdot x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{(p_x+ip_y)}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} \tag{3.20}$$

$$\psi_2(x) = u_2(p)e^{-ip\cdot x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{(p_x-ip_y)}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} \tag{3.21}$$

$$\psi_3(x) = u_3(p)e^{-ip\cdot x} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E-m} \\ \dfrac{(p_x+ip_y)}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} \tag{3.22}$$

$$\psi_4(x) = u_4(p)e^{-ip\cdot x} = \begin{pmatrix} \dfrac{(p_x-ip_y)}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} \tag{3.23}$$

¿Cómo interpretamos estas soluciones energéticas negativas? la interpretación convencional se llama la interpretación de “Feynman-Stueckelberg” [9]: una solución de energía negativa representa una partícula de energía negativa que viaja hacia atrás en el tiempo, o de manera equivalente, una antipartícula de energía positiva que avanza en el tiempo. Con esta interpretación, tendemos a reescribir las soluciones de energía negativa para representar antipartículas positivas. A partir de las soluciones $E < 0$.

Haciendo $E \to -E$ y $\vec{p} \to -\vec{p}$ en (3.19) obtenemos:

$$\psi_3(x) = u_4(-p)e^{-i(-p)\cdot x} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-p_x + ip_y)}{-E - m} \\ \dfrac{p_z}{-E - m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(-p)\cdot x}$$

$$\psi_3(x) = u_4(-p)e^{-i(-p)\cdot x} = \begin{pmatrix} \dfrac{(p_x - ip_y)}{E + m} \\ \dfrac{-p_z}{E + m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(p)\cdot x}$$

$$\psi_3(x) = v_1(p)e^{ip\cdot x} = u_4(-p)e^{-i(-p)\cdot x}. \tag{3.24}$$

Análogamente para $\psi_4(x)$:

$$\psi_4(x) = u_3(-p)e^{-i(-p)\cdot x} = \begin{pmatrix} \dfrac{-p_z}{-E - m} \\ \dfrac{(-p_x - ip_y)}{-E - m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(-p)\cdot x}$$

$$\psi_4(x) = u_3(-p)e^{-i(-p)\cdot x} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E + m} \\ \dfrac{(p_x + ip_y)}{E + m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(-p)\cdot x}$$

$$\psi_4(x) = v_2(p)e^{ip\cdot x} = u_3(-p)e^{-i(-p)\cdot x}, \tag{3.25}$$

donde se esta definiendo $v_1(p) = u_4(-p)$ y $v_2(p) = u_3(-p)$.

Sabemos que las soluciones a la ecuación de onda forman un conjunto completo de estados, por superposición podemos sumar las soluciones para obtener una función arbitraria

$\psi(x)$ en términos de ellos

$$\psi(x) = \sum_s \int_p dp(a_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x} + a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{+ip\cdot x}), \tag{3.26}$$

donde $s = 1, 2$.

### 3.1.1 Soluciones reales de la ecuación de Dirac

Hemos encontrado las soluciones de la ecuación de Dirac libre, ahora revisaremos el artículo de Palash B. Pal [1] donde se estudia la condición de realidad de las ecuaciones de Dirac. Esto se obtiene a partir de trabajar en una representación distinta a la de Dirac donde todos los elementos no nulos de los cuatros $\gamma^\mu$'s son puramente imaginarios. Este repaso nos servirá como base para realizar un analisis similar para el caso de campos DKP.

Primero, es fácil ver que la ecuación

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0, \tag{3.27}$$

donde $\gamma^\mu$ tiene elementos puramente imaginarios, es real puesto que se tiene el término $i\gamma^\mu$.

La pregunta es si podemos definir los $\gamma^\mu$'s sujetos a las siguientes propiedades:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I, \;\; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3; \tag{3.28}$$

$$\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger, \tag{3.29}$$

y que sean puramente imaginarios.

Esto sí es posible, podemos escribir las matrices $\gamma$'s como productos tensoriales de la matrices de Pauli de la siguiente forma

$$\widetilde{\gamma}^0 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \widetilde{\gamma}^1 = i\sigma_1 \otimes I_2,$$
$$\widetilde{\gamma}^2 = i\sigma_3 \otimes I_2, \quad \widetilde{\gamma}^3 = i\sigma_2 \otimes \sigma_2, \tag{3.30}$$

donde denotamos a estas matrices por una tilde.

Estas matrices se pueden escribir explícitamente como

$$\widetilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \ \widetilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

de donde podemos observar que se cumple

$$\widetilde{\gamma}_\mu^* = -\widetilde{\gamma}_\mu. \tag{3.32}$$

Las matrices que cumplan la condición (3.32) constituyen una representación de Majorana particular de las matrices $\gamma$. Luego, si usamos esta representación en la ecuación (3.27), esta será una ecuación real, ya que los $\widetilde{\gamma}^\mu$'s son puramente imaginarios, y los $i\widetilde{\gamma}^\mu$'s son reales. Por lo tanto, uno debería poder encontrar soluciones reales $\widetilde{\psi}$ tal que

$$(i\widetilde{\gamma}^\mu \partial_\mu - m)\widetilde{\psi} = 0, \tag{3.33}$$

en otras palabras, encontraremos soluciones que satisfagan que

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}^*, \tag{3.34}$$

donde $\widetilde{\psi}$ representarán fermiones de Majorana.

## 3.2 Condición de Majorana

La condición (3.34) es conocida como la condición de Majorana, y se obtuvo a partir de una representación específica de las matrices $\gamma$'s. Para ver como se expresa esta condición en una representación cualquiera podemos hacer uso de una transformación de similaridad que nos lleve de la representación de Majorana a una representación general. Sea esta transformación dada por

$$\gamma^\mu = U\widetilde{\gamma}^\mu U^\dagger, \tag{3.35}$$

donde $U$ es una matriz unitaria.

Para verificar que la nueva representación cumpla con el álgebra, reemplacemos (3.35) en (3.28)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}^\mu\widetilde{\gamma}^\nu + \widetilde{\gamma}^\nu\widetilde{\gamma}^\mu &= 2g^{\mu\nu} \\
U^\dagger\gamma^\mu UU^\dagger\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu UU^\dagger\gamma^\mu U &= 2g^{\mu\nu} \\
U^\dagger\gamma^\mu\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu\gamma^\mu U &= 2g^{\mu\nu} \\
UU^\dagger(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)UU^\dagger &= 2g^{\mu\nu}UU^\dagger \\
\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu},
\end{aligned}$$

vemos efectivamente que estas nuevas matrices $\gamma$'s son una representación de la ecuación de Dirac.

Ahora veamos como se relacionan los fermiones de Majorana con los fermiones de

Dirac[1]. Para esto reeplazamos (3.35) en (3.33)

$$\begin{aligned}
(i\widetilde{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\widetilde{\psi} &= 0 \\
(iU^{\dagger}\gamma^{\mu}U\partial_{\mu} - m)\widetilde{\psi} &= 0 \\
(iUU^{\dagger}\gamma^{\mu}U\partial_{\mu} - mU)\widetilde{\psi} &= 0 \\
(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)U\widetilde{\psi} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

La ecuación (3.36) nos dice que una solución general de la ecuación de Dirac esta relacionada a una solución real mediante la siguiente relación

$$\psi \equiv U\widetilde{\psi}, \tag{3.37}$$

Con todo esto, podemos reemplazar (3.37) en (3.34) para ver como se expresa esta condición en una representación general

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi} &= \widetilde{\psi}^{*} \\
U^{\dagger}\psi &= (U^{\dagger}\psi)^{*} \\
U^{\dagger}\psi &= (U^{\dagger *}\psi^{*}) \\
U^{\dagger}\psi &= U^{\top}\psi^{*},
\end{aligned}$$

reescribimos esto como

$$\psi = UU^{\top}\psi^{*}. \tag{3.38}$$

Tenemos que $U$ es unitaria, *i.e.* $U^{\dagger} = U^{-1}$, luego, veamos si la combinación $UU^{\top}$

[1]Cabe resaltar que un fermión de Majorana es un fermión de Dirac, pero un fermión de Dirac no necesariamente es uno de Majorana

también lo es:

$$
\begin{aligned}
(UU^\top)^\dagger &= (U^\top)^\dagger U^\dagger \\
&= ((U^\top)^*)^\top U^{-1} \\
&= (U^\dagger)^\top U^{-1} \\
&= (U^{-1})^\top U^{-1} \\
&= (U^\top)^{-1} U^{-1} \\
(UU^\top)^\dagger &= (UU^\top)^{-1}, \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

por lo tanto, $UU^\top$ también es unitaria.

### 3.2.1 Transformación de conjugación de carga

En lugar de usar U directamente, es usual en la literatura usar otra matriz unitaria *C* que se define por

$$UU^T = \gamma_0 C, \qquad (3.40)$$

y luego tenemos una notación compacta para la relación (3.38)

$$\psi = \gamma_0 C \psi^*. \qquad (3.41)$$

La ecuación (3.41) es similar a la conocida en la literatura como la transformación de conjugación de carga.

$$\psi^c = \gamma_0 C \psi^*. \qquad (3.42)$$

En conclusión, la condición de Majorana para cualquier representación viene dada por la relación

$$\psi = \psi^c. \qquad (3.43)$$

En la representación de Majorana, la solución $\tilde{\psi}$ es real. Por lo que podemos escribir su solución en analogía con la ecuación (3.26) de la siguiente manera

$$\widetilde{\psi}(x) = \sum_s \int_p dp(a_s(p)\widetilde{u}_s(p)e^{-ip\cdot x} + a_s^\dagger(p)\widetilde{u}_s^*(p)e^{+ip\cdot x}), \tag{3.44}$$

donde $s = 1, 2$ corresponde a los dos espinores.

Como ya tenemos la relación entre las soluciones reales y las soluciones para una representación arbitraria , usamos la ecuación (3.37) para encontrar dichas soluciones arbitrarias

$$\psi(x) = \sum_s \int_p dp(a_s(p)U\widetilde{u}_s(p)e^{-ip\cdot x} + a_s^\dagger(p)U\widetilde{u}_s^*(p)e^{+ip\cdot x}). \tag{3.45}$$

Definamos ahora los espinores para la representación arbitraria a través de la relación

$$u_s(p) = U\widetilde{u}_s(p), \tag{3.46}$$

la ecuación (3.46) imita la ecuación (3.37) para el operador de campo.

Además, reemplazando (3.46) en el segundo término de (3.45), encontramos

$$U\widetilde{u}_s^*(p) = U(U^\dagger u_s(p))^* = UU^\top u_s^*(p) \tag{3.47}$$

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (3.45) como

$$\psi(x) = \sum_s \int_p dp(a_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x} + a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{+ip\cdot x}), \tag{3.48}$$

donde hemos introducido la notación

$$v_s(p) = UU^T u_s^*(p) = \gamma_0 C u_s^*(p), \tag{3.49}$$

y, donde la matriz *C* se definió en la ecuación (3.40).

Tomando el complejo conjugado de ambos lados de la ecuación (3.49) y multiplicando por $UU^T$, vemos que la nueva notación en (3.49) también implica

$$u_s(p) = \gamma_0 C v_s^*(p). \tag{3.50}$$

En la representación de Majorana, la ecuación (3.49) y la ecuación (3.50) significan lo mismo, es decir, los vectores $u$ y $v$ son conjugados de carga uno del otro, puesto que cumplen la condición de Majorana.

### 3.2.2 Algunas propiedades de la matriz C

Hemos introducido una matriz $C$ en la ecuación (3.41) que está relacionada con la transformación de conjugación de carga. Con esto en mente, encontraremos algunas propiedades que cumple la matriz $C$.

Usando la definición de la ecuación (3.40) podemos calcular la siguiente identidad

$$\begin{aligned} C^{-1}\gamma_\mu C &= (\gamma_0 UU^\top)^{-1}\gamma_\mu(\gamma_0 UU^\top) \\ &= (UU^\top)^\dagger \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 UU^\top \\ &= U^* U^\dagger \gamma_\mu^\dagger UU^\top \\ &= U^*(U^\dagger\gamma_\mu U)^\dagger U^\top \\ &= U^*\tilde{\gamma}_\mu^\dagger U^\top \\ &= (U\tilde{\gamma}_\mu^* U^\dagger)^\top, \end{aligned} \tag{3.51}$$

donde hemos usado las ecuaciones (3.29) y (3.35). Finalmente, usando la ecuación (3.32) y (3.35), obtenemos la primera propiedad que la matriz $C$ debe cumplir

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -(U\tilde{\gamma}_\mu U^\dagger)^\top = -\gamma_\mu^\top. \tag{3.52}$$

La ecuación (3.52) se pudo tomar como la definición para la matriz C, ya que esta relación es lo que usualmente se encuentra en la literatura cuando se habla de la transformación de conjugación de carga. Esta definición no se refiere solo a la representación de Majorana, sino que es válida para cualquier representación.

La ecuación (3.52) junto a la ecuación (3.41) nos da una definición de fermión de Majorana que es independiente de cualquier representación. Es decir, no importa con que representación de las matrices de Dirac se trabajen, se puede encontrar la matriz C en esa representación a través de la ecuación (3.52) y usarla para definir $\psi^c$ a través de la ecuación (3.41).

La segunda propiedad la podemos calcular a partir de la condición de que $U$ es una matriz unitaria, por lo que podemos calcular la siguiente relación

$$UU^T(UU^T)^* = UU^TU^*(U^T)^* = UU^TU^*U^\dagger = 1. \tag{3.53}$$

Reemplazando la definición (3.40) en la ecuación (3.53) podemos reescribirlo de la siguiente manera

$$\gamma_0 C(\gamma_0 C)^* = 1. \tag{3.54}$$

Usando la ecuación (3.52) y el hecho de que $\gamma_0$ es hermitiana en la relación (3.54), podemos calcular

$$\begin{aligned}\gamma_0 C\gamma_0^* C^* &= \gamma_0 C\gamma_0^\top C^* \\ &= \gamma_0 C(-C^{-1}\gamma_0 C)C^* \\ &= -CC^* = 1,\end{aligned} \tag{3.55}$$

o equivalentemente como

$$C^* = -C^{-1}. \tag{3.56}$$

Finalmente, usando la unitaridad de la matriz C, esta relación se puede convertir en la forma

$$C^* = -C^\dagger \tag{3.57}$$

$$C^\top = -C, \tag{3.58}$$

*i.e.*, C es una matriz antisimétrica en cualquier representación de las matrices de Dirac.

### 3.2.3 Invariancia de Lorentz de la condición de realidad

Tenemos la condición de Majorana generalizada dada por la igualdad (3.43). Esta condición será importante solo si se mantiene en cualquier marco de referencia *i.e.*, si es invariante de Lorentz. Ahora se muestra que este es el caso.

Bajo transformaciones infinitesimales de Lorentz que toman las coordenadas de un punto del espacio-tiempo de $x^\mu$ a $x'^\mu = x^\mu + \omega_{\mu\nu}x^\nu$, un campo fermiónico se transforma de la siguiente manera:

$$\Psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\Psi(x), \tag{3.59}$$

donde

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]. \tag{3.60}$$

Tomando la conjugada compleja de la ecuación (3.59) y multiplicando por la derecha por $\gamma_0 C$, obtenemos

$$\gamma_0 C\Psi'^*(x') = \gamma_0 C \exp\left(+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^*_{\mu\nu}\right)\Psi^*(x), \tag{3.61}$$

haciendo uso de la condición (3.42) en (3.61) obtenemos

$$\Psi'^c(x') = \gamma_0 C \exp\left(+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^*_{\mu\nu}\right)(\gamma_0 C)^{-1}\Psi^c(x). \tag{3.62}$$

La ecuación (3.62) contiene el complejo conjugado de las matrices sigma. Antes de seguir con el cálculo, debemos notar que las ecuaciones (3.29) y (3.52) nos dicen que

$$\begin{aligned}\gamma_\mu^* \equiv (\gamma_\mu^\dagger)^\top = \gamma_0^\top \gamma_\mu^\top \gamma_0^\top &= \gamma_0 \gamma_\mu^\top \gamma_0 \\ &= \gamma_0(-C^{-1}\gamma_\mu C)\gamma_0 \\ &= -(C\gamma_0)^{-1}\gamma_\mu C\gamma_0, \end{aligned} \tag{3.63}$$

Además, a partir de la ecuación (3.40) y la anti-simetría de $C$ podemos encontrar que

$$\begin{aligned} UU^\top &= \gamma_0 C \\ (UU^\top)^\top &= (\gamma_0 C)^\top \\ UU^\top &= -C\gamma_0 \\ \gamma_0 C &= -C\gamma_0. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Luego, reemplazando (3.64) en la ecuación (3.63) encontramos la siguiente relación para la conjugada de las matrices $\gamma$

$$\gamma_\mu^* = -(\gamma_0 C)^{-1}\gamma_\mu(\gamma_0 C). \tag{3.65}$$

Ahora, como las matrices $\sigma^{\mu\nu}$ estan compuestas por las matrices $\gamma^\mu$ ya podemos calcular la conjugada compleja de (3.60) usando (3.65) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}^* &= -\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu^*\gamma_\nu^* - \gamma_\nu^*\gamma_\mu^*\right) \\ &= -\frac{i}{2}\left\{(\gamma_0 C)^{-1}\gamma_\mu(\gamma_0 C)(\gamma_0 C)^{-1}\gamma_\nu(\gamma_0 C) - (\gamma_0 C)^{-1}\gamma_\nu(\gamma_0 C)(\gamma_0 C)^{-1}\gamma_\mu(\gamma_0 C)\right\} \\ &= -\frac{i}{2}\left\{(\gamma_0 C)^{-1}\gamma_\mu\gamma_\nu(\gamma_0 C) - (\gamma_0 C)^{-1}\gamma_\nu\gamma_\mu(\gamma_0 C)\right\},\end{aligned}$$

que lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned}(\gamma_0 C)\sigma^*_{\mu\nu}(\gamma_0 C)^{-1} &= -\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu\right) \\ (\gamma_0 C)\sigma^*_{\mu\nu}(\gamma_0 C)^{-1} &= -\sigma_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Finalmente, usando (3.66) podemos simplificar la ecuación (3.62) expandiendo al menos a primer orden y escribir

$$\Psi'^c(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\Psi^c. \tag{3.67}$$

Comparando (3.59) y (3.66) observamos que el campo $\Psi$ y el campo $\Psi^c$ se transforman de la misma manera bajo una transformación infinitesimal de Lorentz. Por lo tanto, podemos decir que la condición de realidad dada por la ecuación (3.43) es invariante de Lorentz, *i.e* si la condición es verdadera en algún marco de referencia de Lorentz, será cierto en todos los marcos de referencia.

# Capítulo 4

# La ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau y sus soluciones

En el capítulo 2 vimos que la ecuación de Dirac se puede generalizar para partículas con espín arbitrario, donde lo que se modificaba era el álgebra que las matrices $\beta$ debían cumplir. Ahora, partiremos de la afirmación que hicimos en el segundo capítulo: cualquier ecuación diferencial se puede puede transformar a una ecuación diferencial de primer orden aumentando el número de variables. La ecuación que transformaremos será la ecuación de Klein-Gordon y seguiremos el ejemplo que dimos en ese capítulo de tal manera que encontremos explícitamente la representación de las matrices $\beta$ de la ecuación DKP para el caso de espín 0 donde el campo es un vector de 5 componentes. Nos tomamos la molestia de encontrar explícitamente esta representación debido a que la usaremos para cálculos posteriores. Para más detalles referentes a los campos libres el lector puede revisar las referencias [5, 10].

Primero, transformaremos la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0, \tag{4.1}$$

donde $\varphi$ es una función de onda escalar que describe partículas de espín cero.

Para esto introducimos la siguiente notación para el vector gradiente

$$\psi^\mu \equiv \frac{i}{m}\partial^\mu \varphi, \tag{4.2}$$

con esta notación la ecuación (4.1) se puede reescribir como

$$i\partial_\mu \psi^\mu - m\varphi = 0. \tag{4.3}$$

Además, reordenando (4.2) tenemos

$$i\partial^\mu \varphi - m\psi^\mu = 0, \tag{4.4}$$

donde, podemos escribir explícitamente las ecuaciones (4.3) y (4.4) como un sistema de ecuaciones de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccccc} i\partial^0\varphi & + & 0 & + & 0 & + & 0 & - & m\psi^0 = 0 \\ 0 & - & i\partial_1\varphi & + & 0 & + & 0 & - & m\psi^1 = 0 \\ 0 & + & 0 & - & i\partial_2\varphi & + & 0 & - & m\psi^2 = 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & - & i\partial_3\varphi & - & m\psi^3 = 0 \\ i\partial_0\psi^0 & + & i\partial_1\psi^1 & + & i\partial_2\psi^2 & + & i\partial_3\psi^3 & - & m\varphi = 0. \end{array} \tag{4.5}$$

De la ecuación (4.5) observamos que esta se puede escribir de una forma compacta como

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \tag{4.6}$$

donde $\Psi$ es un vector columna de 5 componentes

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \\ \Psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \varphi \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Y, la representación de las matrices $\beta$ la podemos encontrar a partir de la ecuación (4.5) como

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Estas matrices $\beta$ son una solución particular de su representación irreducible para espín cero, que además obedecen al siguiente álgebra

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\rho + g^{\rho\nu} \beta^\mu. \quad (4.9)$$

La ecuación (4.6), junto al álgebra (4.9), es la ecuación que habíamos encontrado en el capítulo 2, conocida como la *ecuación de Dufin-Kemmer-Petiau* (DKP).

Para obtener el campo DKP conjugado, es necesario primero definir el conjunto de matrices hermitianas $\eta^\mu$ como

$$\eta^\mu \equiv 2\beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu}, \quad (4.10)$$

$$(\eta^\mu)^2 = I, \quad (4.11)$$

donde estas matrices complementan a las matrices $\beta^\mu$ de tal manera que estas tienen su conjugado hermítico a través de

$$\beta^{\mu\dagger} = \eta^0 \beta^\mu \eta^0. \tag{4.12}$$

Tomando el conjugado hermítico a la ecuación (4.6) y usando (4.12) podemos hacer el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
-i\partial_\mu \Psi^\dagger \beta^{\mu\dagger} - m\Psi^\dagger &= 0 \\
-i\partial_\mu \Psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 - m\Psi^\dagger &= 0 \\
-i\partial_\mu \Psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 \eta^0 - m\Psi^\dagger \eta^0 &= 0 \\
-i\partial_\mu \Psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu - m\Psi^\dagger \eta^0 &= 0.
\end{aligned}$$

Definiremos la función de onda adjunta $\overline{\Psi}$ por

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \eta^0, \tag{4.13}$$

entonces, la ecuación DKP conjugada viene dada por

$$\overline{\Psi}(i\beta^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m) = 0. \tag{4.14}$$

Recordemos que en el caso del campo de Dirac, el campo adjunto se introduce para poder escribir un Lagrangiano invariante de Lorentz y una corriente conservada [11], en analogía a esto es que se introduce el campor DKP conjugado mediante la definición (4.13) donde a diferencia de la matriz $\gamma^0$ se usa la matriz $\eta^0$ definido por (4.10)

## 4.1 Solución de la Ecuación DKP para partícula libre

Ya que el campo DKP obedece la ecuación de Klein-Gordon, podemos escribir una solución como una combinación lineal de ondas planas de la siguiente forma

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx}, \tag{4.15}$$

donde $u(p)$ es un vector columna de 5 componentes, tal que

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{bmatrix} e^{-ipx}.$$

Sustituyendo el *anzats* (4.15) en (4.6) podemos encontrar la siguiente ecuación para $u(p)$

$$\begin{aligned} (i\beta^\mu \partial_\mu - m)u(p)e^{-ipx} &= 0 \\ (\beta^\mu p_\mu - m)u(p)e^{-ipx} &= 0 \\ (\beta^\mu p_\mu - m)u(p) &= 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

y usando la regla de conjugación (4.13) obtenemos la ecuación para $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\eta^0$

$$\begin{aligned} u(p)^\dagger(\beta^{\mu\dagger} p_\mu - m) &= 0 \\ u(p)^\dagger(\eta^0\beta^\mu\eta^0 p_\mu - m) &= 0 \\ u(p)^\dagger(\eta^0\beta^\mu\eta^0\eta^0 p_\mu - m\eta^0) &= 0 \\ u(p)^\dagger(\eta^0\beta^\mu p_\mu - m\eta^0) &= 0 \\ u(p)^\dagger\eta^0(\beta^\mu p_\mu - m) &= 0 \\ \bar{u}(p)(\beta^\mu p_\mu - m) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, usando la representación (4.8) podemos encontrar

$$\beta^\mu p_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & p^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^3 \\ p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

reemplazando la expresión (4.17) en (4.16) encontramos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & p^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^3 \\ p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}; \tag{4.18}$$

de aquí, obtenemos las siguientes relaciones

$$p^\mu u^4(p) = m u^\mu(p), \tag{4.19}$$

$$p_\mu u^\mu(p) = m u^4(p). \tag{4.20}$$

De estas dos ecuaciones podemos encontrar la relación de dispersión de Einstein

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu u^4(p) = m p_\mu u^\mu(p) = m(m u^4(p)) = m^2 u^4(p) \\ \rightarrow p_\mu p^\mu = m^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

De (4.21) podemos observar que existe un vínculo para $p^0$

$$p^0 = \pm E = \pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \tag{4.22}$$

por lo que podemos escribir $u(p)$ en función del tri-momento $\mathbf{p}$. Entonces, de la relaciones

(4.19) y (4.20), $u^4(p)$ tiene la forma

$$u^4(p) = u^4(\mathbf{p}) = mN(\mathbf{p}). \tag{4.23}$$

Luego, tenemos dos soluciones, una con energía positiva y otra con energía negativa, dadas por

$$u^{\alpha}(\mathbf{p}) = N^{\alpha}(\mathbf{p})\begin{pmatrix} E \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ m \end{pmatrix} \quad y \quad u^{\beta}(\mathbf{p}) = N^{\beta}(\mathbf{p})\begin{pmatrix} -E \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ m \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

De aquí, tenemos dos soluciones en forma de onda plana

$$\psi^{\alpha}(x) = u^{\alpha}(\mathbf{p})e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}, \tag{4.25}$$

$$\psi^{\beta}(x) = u^{\beta}(\mathbf{p})e^{-i(-Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} = u^{\beta}(\mathbf{p})e^{i(Et+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}, \tag{4.26}$$

por lo que, la solución más general esta dada por

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} a_{\alpha}(\mathbf{p})u^{\alpha}(\mathbf{p})e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} a_{\beta}(\mathbf{p})u^{\beta}(\mathbf{p})e^{i(Et+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}, \tag{4.27}$$

haciendo **p** $\rightarrow$ **-p** en la segunda integral, obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} a_{\alpha}(\mathbf{p})u^{\alpha}(\mathbf{p})e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + \int \frac{-d^3p}{(2\pi)^{3/2}} a_{\beta}(-\mathbf{p})u^{\beta}(-\mathbf{p})e^{i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \\ \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} a_{\alpha}(\mathbf{p})u^{\alpha}(\mathbf{p})e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} a_{\beta}(-\mathbf{p})u^{\beta}(-\mathbf{p})e^{i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

En la solución (4.28) podemos fijar $p^0 = E > 0$, tal que la segunda integral puede ser interpretada como un paquete de ondas viajando en dirección opuesta al paquete representado por la primera integral. Además, con el objetivo de tener una solución similar a la solución de Dirac, podemos hacer las siguientes redefiniciones

$$\begin{cases} p^0 \equiv E > 0 \\ a(\mathbf{p}) \equiv a_\alpha(\mathbf{p}) \\ u^-(\mathbf{p}) \equiv u^\alpha(\mathbf{p}) \\ b^*(\mathbf{p}) \equiv a_\beta(-\mathbf{p}) \\ u^+(\mathbf{p}) \equiv u^\beta(-\mathbf{p}) \end{cases} \tag{4.29}$$

así, la solución (4.28) se puede escribir como

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left( a(\mathbf{p})u^-(\mathbf{p})e^{-ipx} + b^*(\mathbf{p})u^+(\mathbf{p})e^{ipx} \right), \tag{4.30}$$

donde

$$u^-(\mathbf{p}) = u^\alpha(\mathbf{p}) = N^-(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} +E \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ m \end{pmatrix} \quad ; \quad u^+(\mathbf{p}) = u^\beta(-\mathbf{p}) = N^+(\ \mathbf{p}) \begin{pmatrix} -E \\ -p^1 \\ -p^2 \\ -p^3 \\ m \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Para encontrar la solución de la onda conjugada, podemos tomar la conjuda de (4.30)

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(x) &= \psi^\dagger(x)\eta^0 \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left( a^*(\mathbf{p})u^{-\dagger}(\mathbf{p})\eta^0 e^{ipx} + b(\mathbf{p})u^{+\dagger}(\mathbf{p})\eta^0 e^{-ipx} \right) \\ \overline{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left( a^*(\mathbf{p})\overline{u^-}(\mathbf{p})e^{+ipx} + b(\mathbf{p})\overline{u^+}(\mathbf{p})e^{-ipx} \right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Calculando la energía

$$
\begin{aligned}
E &= \int d^3x T^{00} \\
&= \int d^3x \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\beta^0\partial^0\psi - \partial^0\overline{\psi}\beta^0\psi\right) \\
&= \int d^3x \int_p \int_k (-ik^0 - ip^0)\left(a^*(\mathbf{p})a(\mathbf{k})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{x}}\right. \\
&\left. -b(\mathbf{p})b^*(\mathbf{k})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{x}}\right) \\
&+ \int d^3x \int_p \int_k (ik^0 - ip^0)\left(a^*(\mathbf{p})b^*(\mathbf{k})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\mathbf{x}}\right. \\
&\left. -b(\mathbf{p})a(\mathbf{k})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\mathbf{x}}\right),
\end{aligned}
$$

usando

$$(2\pi)^{-3}\int e^{\pm i\mathbf{q}\mathbf{x}}d^3x = \delta(\mathbf{q})$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
&= \int_p \int_k (-ik^0 - ip^0)\left(a^*(\mathbf{p})a(\mathbf{k})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\mathbf{k})e^{i(p^0-k^0)}(2\pi)^{-3}\int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{x}}d^3x\right. \\
&\left. -b(\mathbf{p})b^*(\mathbf{k})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\mathbf{k})e^{-i(p^0-k^0)}(2\pi)^{-3}\int e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{x}}d^3x\right) \\
&+ \int d^3x \int_p \int_k (ik^0 - ip^0)\left(a^*(\mathbf{p})b^*(\mathbf{k})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\mathbf{k})e^{i(p^0+k^0)}(2\pi)^{-3}\int e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\mathbf{x}}d^3x\right. \\
&\left. -b(\mathbf{p})a(\mathbf{k})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\mathbf{k})e^{-i(p^0+k^0)}(2\pi)^{-3}\int e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\mathbf{x}}d^3x\right), \\
&= \int_p \int_k (-ik^0 - ip^0)\left(a^*(\mathbf{p})a(\mathbf{k})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\mathbf{k})e^{i(p^0-k^0)}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\right. \\
&\left. -b(\mathbf{p})b^*(\mathbf{k})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\mathbf{k})e^{-i(p^0-k^0)}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\right) \\
&+ \int d^3x \int_p \int_k (ik^0 - ip^0)\left(a^*(\mathbf{p})b^*(\mathbf{k})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\mathbf{k})e^{i(p^0+k^0)}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})\right. \\
&\left. -b(\mathbf{p})a(\mathbf{k})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\mathbf{k})e^{-i(p^0+k^0)}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})\right),
\end{aligned}
$$

sabemos también

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y),$$

e integrando en $k$

$$\begin{aligned} E = \frac{i}{2}\int_p(-ip^0 - ip^0)\Big(&a^*(\mathbf{p})a(\mathbf{k})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\mathbf{p})e^{i(p^0-p^0)} \\ &-b(\mathbf{p})b^*(\mathbf{p})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\mathbf{p})e^{-i(p^0-p^0)}\Big) \\ &+\frac{i}{2}\int_p(ip^0 - ip^0)\Big(a^*(\mathbf{p})b^*(\text{-}\mathbf{p})\overline{u^-}(\mathbf{p})\beta^0 u^+(\text{-}\mathbf{p})e^{i(p^0+p^0)} \\ &-b(\mathbf{p})a(\text{-}\mathbf{p})\overline{u^+}(\mathbf{p})\beta^0 u^-(\text{-}\mathbf{p})e^{-i(p^0+p^0)}\Big), \end{aligned}$$

$$E = \int_p p^0(a^*(p)a(p)\overline{u^-}(p)\beta^0 u^-(p) - b(p)b^*(p)\overline{u^+}(p)\beta^0 u^+(p)). \tag{4.33}$$

De la condición de que la energía en todo el espacio sea positiva, podemos obtener la normalización

$$\overline{u^\pm}\beta^0 u^\pm = \mp 1. \tag{4.34}$$

Para calcular $N^\pm(p)$, primero calcularemos el producto

$$\eta^0\beta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Usando la condición de normalización (4.34) junto al producto (4.35), encontramos que

$$\overline{u^{+}}(p)\beta^0 u^{+}(p) = (u^{+}(p))^{\dagger}\eta^0\beta^0 u^{+}(p)$$

$$= (N^{+}(p))^{\dagger}N^{+}(p)\begin{pmatrix} -E & -p^1 & -p^2 & -p^3 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -E \\ -p^1 \\ -p^2 \\ -p^3 \\ m \end{pmatrix}$$

$$\overline{u^{+}}(p)\beta^0 u^{+}(p) = -2mE(N^{+}(p))^{\dagger}N^{+}(p) = -1, \tag{4.36}$$

y de manera análoga tendremos para $u^{-}$

$$\overline{u^{-}}(p)\beta^0 u^{-}(p) = 2mE(N^{-}(p))^{\dagger}N^{-}(p) = 1. \tag{4.37}$$

De (4.36) y (4.37) podemos concluir que se cumple que

$$N^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2Em}} \tag{4.38}$$

## 4.2 Transformación de conjugación de carga

Hemos visto en subsección 3.2.1 que podemos encontrar la transformación de conjugación de carga a partir de la condición de Majorana. También se encontró una propiedad para la matriz C dada por la relación (3.52) y mencionamos que esta se podría tomar como definición para tener una transformación de conjugación de carga. Ahora veremos como es que usualmente se introduce esta transformación.

Debido a que la ecuación DKP es una ecuación tipo Dirac, los siguientes cálculos son similares a lo que se hace para la ecuación de Dirac, con algunas variaciones debido a que las matrices $\beta$'s cumplen con un álgebra diferente.

Para nuestro cálculo tomaremos en cuenta la interacción con el campo electromagnético, mediante el acoplamiento mínimo. Para obtener la ecuación que describe la interacción, debemos hacer el cambio en (4.6) de $\partial_\mu$ por $\partial_\mu + ieA_\mu(x)$ (derivada covariante) donde $A_\mu(x)$ es el potencial del campo electromagnético y $e$ es la carga de la partícula; por lo cual tendremos la ecuación

$$[i\beta^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\psi = 0 \tag{4.39}$$

y para el campo conjugado

$$\overline{\psi}[i\beta^\mu(\partial_\mu + i(-e)A_\mu) + m] = 0. \tag{4.40}$$

Ahora, definamos la transformación de conjugación de carga de la siguiente manera

$$\psi^c \equiv C\overline{\psi}^T, \tag{4.41}$$

reemplazando en (4.40)

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}[i\beta^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m] &= 0 \\
[i(\beta^\mu)^T(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\overline{\psi}^T &= 0 \\
[i(\beta^\mu)^T(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]C^{-1}\psi^c &= 0,
\end{aligned}$$

multiplicando por $C$ por la izquierda

$$[iC(\beta^\mu)^T C^{-1}(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi^c = 0$$

si la matriz C satisface la condición

$$C(\beta^\mu)^T C^{-1} = -\beta^\mu, \tag{4.42}$$

podemos obtener

$$[i\beta^{\mu}(\partial_{\mu} + i(-e)A_{\mu}) - m]\psi^{c} = 0. \tag{4.43}$$

De manera análoga calculamos para el campo adjunto

$$\overline{\psi}^{c} = \psi^{T} C^{-1}, \tag{4.44}$$

reemplazando en (4.39)

$$\begin{aligned} [i\beta^{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) - m]\psi &= 0 \\ \psi^{T}[i(\beta^{\mu})^{T}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) - m] &= 0 \\ \overline{\psi}^{c} C[i(\beta^{\mu})^{T}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) - m] &= 0 \end{aligned}$$

nuevamente, si se cumple la relación (4.42), podemos encontrar

$$\overline{\psi}^{c}[i\beta^{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) + m] = 0 \tag{4.45}$$

Podemos observar que los campos $\psi^{c}$ y $\overline{\psi}^{c}$ cumplen las mismas ecuaciones (4.39) y (4.40), con la diferencia del signo en la carga de la partícula, esto nos dice físicamente que solamente estamos cambiando el signo de las particulas que modelan estos campos, siempre que se cumpla la relación (4.42).

# Capítulo 5

# Solucion real de la ecuación de DKP

Como queremos encontrar ecuaciones de campo DKP tipo Majorana, replicaremos los cálculos hechos para el caso de los fermiones de Majorana.

Sea una representación en la que las matrices $\beta_\mu$ tengan solo elementos imaginarios, tal que

$$\beta_\mu^* = -\beta_\mu, \tag{5.1}$$

tal representación puede ser, por ejemplo [12]:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

en esta representación tendremos que la matriz $\eta^0$ se escribe como

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Entonces, la ecuación DKP sería una ecuación real, de aquí uno podría encontrar soluciones reales $\widetilde{\psi}$ que cumplan

$$(i\widetilde{\beta}^\mu \partial_\mu - m)\widetilde{\psi} = 0, \tag{5.4}$$

esto significa que encontraremos soluciones que satisfacen

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}^*. \tag{5.5}$$

Una solución general se puede obtener a partir de esta representación particular, ya que se cumple que

$$\beta^\mu = U\widetilde{\beta}^\mu U^\dagger, \tag{5.6}$$

donde $U$ es una matriz unitaria que transforma la ecuación (5.4) en la siguiente ecuación general

$$\begin{aligned} (i\widetilde{\beta}^\mu \partial_\mu - m)\widetilde{\Psi} &= 0 \\ (iU^\dagger \beta^\mu U \partial_\mu - m)\widetilde{\Psi} &= 0 \\ (iUU^\dagger \beta^\mu U \partial_\mu - Um)\widetilde{\Psi} &= 0 \\ (i\beta^\mu \partial_\mu - m)U\widetilde{\Psi} &= 0 \\ (i\beta^\mu \partial_\mu - m)\Psi &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\Psi \equiv U\widetilde{\Psi}, \tag{5.7}$$

como la solución general.

Hemos de notar que estamos buscando cuál es la condición de realidad general para campos DKP sin carga similar a la condición (5.5), pero para cualquier representación; por eso hemos introducido esta matriz de similaridad $U$.

Con esto en mente, veremos como se escribe la condición (5.5) en una representación general. Para esto, reemplazamos la solución general en la condición (5.5)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi} &= \widetilde{\psi}^* \\
U^\dagger\psi &= (U^\dagger\psi)^* \\
U^\dagger\psi &= (U^{\dagger *}\psi^*) \\
U^\dagger\psi &= U^\top\psi^*,
\end{aligned}$$

reescribimos esto como

$$\psi = UU^\top\psi^*. \tag{5.8}$$

Recordando la conjugacion de carga vista en la sección (4.2), podemos notar que la ecuación (5.8) se asemeja a dicha transformación, que puede ser escrita explícitamente como

$$\psi^C = C(\eta^0)^T\psi^*, \tag{5.9}$$

usando la ecuación (4.42) y la definición de $\eta^0$ tenemos que se cumple que

$$\begin{aligned}
\eta_0 C &= (\beta_0^2 - 1)C = \beta_0(-C(\beta_0)^T) - C \\
&= -C(\beta_0)^T(-\beta_0)^T - C = C((\beta_0^2)^T - 1) \\
\eta_0 C &= C(\eta_0)^T. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Entonces, podemos reescribir (5.9) como

$$\psi^C = \eta^0 C \psi^*. \tag{5.11}$$

Comparando (5.8) con (5.11) se observa una similitud entre ambas igualdades, pero la ecuación (5.11) se usa para cualquier campo, cargado o no. Sin embargo, sabemos que para campos sin carga, necesariamente se cumple que

$$\psi^c = \psi, \tag{5.12}$$

por lo tanto, tendremos que

$$UU^\top = \eta^0 C. \tag{5.13}$$

La ecuación (5.12) es la condición de realidad general para campos sin carga, con esta condición tenemos una igualdad entre la matriz $C$ y la matriz unitaria $U$ dada por (5.13). Notemos que aún no hemos encontrado ni $U$ ni $C$, por lo que ahora procederemos ver como es la matriz $C$.

## 5.1 Propiedades de la matriz C

Las propiedades de la matriz $C$ pueden ser derivada a partir de la unitaridad de $U$ y la ecuación (5.13).

De la unitaridad de $U$ tenemos

$$UU^\top (UU^\top)^\dagger = UU^\top (U^\top)^\dagger U^\dagger = UU^\top U^* U^\dagger = UU^\top (UU^\top)^* = 1, \tag{5.14}$$

y de (5.13)

$$\eta_0 C (\eta_0 C)^* = 1, \tag{5.15}$$

reemplazando (5.10) en (5.15)

$$C\eta_0^T \eta_0^* C^* = 1$$
$$C(\eta_0^\dagger \eta_0)^* C^* = 1,$$

además sabemos que $\eta_0^\dagger = \eta_0$. Por lo tanto, tenemos que C cumple

$$CC^* = 1. \tag{5.16}$$

Finalmente, usando la unitaridad de C

$$C^T = C, \tag{5.17}$$

es decir, C es una matriz simétrica en cualquier representación de las matrices $\beta$.

Podemos definir $C$ en la representación con $\beta^\mu$ con elementos reales de la siguiente forma

$$C = \eta^1 \eta^2 \eta^3, \tag{5.18}$$

podemos verificar que la definición de C dada cumple las propiedades (5.17) y (4.42).

Para empezar calculemos $\eta^i$

$$\begin{aligned} \eta^i &= 2(\beta^i)^2 - g^{ii} \\ &= 2(\beta^i)^2 + \delta^{ii}, \end{aligned}$$

de aquí

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \eta^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \eta^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{5.19}$$

entonces

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

donde podemos observar fácilmente que $C$ es simétrica y unitaria.

Para una representación de Majorana, la matriz $C$ se puede escribir como

$$C = \eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

calculando la propiedad de C para la representación de Majorana

- para $\beta^0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(\beta^0)^T$$

- para $\beta^1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(\beta^1)^T$$

- para $\beta^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(\beta^2)^T$$

- para $\beta^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(\beta^3)^T$$

Con esto podemos afirmar que se cumple la propiedad

$$C^{-1}\beta^\mu C = -(\beta^\mu)^T. \tag{5.22}$$

Luego, la transformación (5.11) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\psi^c &= \eta^0 C\psi^* \\ &= \eta^0\eta^0\psi^* \\ &= \psi^*,\end{aligned} \tag{5.23}$$

y, debido a que en la representación de Majorana tenemos solo soluciones reales, *i.e* se cumple (5.5), reobtenemos la condición de realidad $\psi^c = \psi$. Notese que usando el operador de conjugación de cargar para una representación real esto no ocurriría.

## 5.2 Soluciones de onda

En el capítulo 4 vimos que la solución de campo DKP libre se escribe según la ecuación (4.30). Además, a diferencia de la ecuación (3.44) la solución no presenta una suma sobre los espines. Sin embargo, para el caso en el que tenemos una representación de Majorana de las matrices $\beta^\mu$, la solución real $\widetilde{\psi}$ se puede escribir como

$$\widetilde{\psi}(x) = \int_p dp \left[a(p)\widetilde{u}(p)e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(p)\widetilde{u}^*(p)e^{+ip\cdot x}\right], \tag{5.24}$$

donde se verifica fácilmente que $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}^*$. Y a partir de esta solución podemos ver como es esta expansión en una representación arbitraria de las matrices $\beta$, *i.e* como es una solución general.

Como vimos en este capítulo, de la existencia de una transformación de similaridad, la solución real y la solución general están relacionadas mediante la ecuación (5.7), por lo que la solución general (de campos sin carga) se puede escribir como

$$\psi(x) = \int_p dp(a(p)U\widetilde{u}(p)e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(p)U\widetilde{u}^*(p)e^{+ip\cdot x}). \tag{5.25}$$

Donde podemos definir el vector $u^-(p)$ de la solución general por comparación con la ecuación (4.30) de la siguiente manera

$$u^-(p) = U\widetilde{u}(p). \tag{5.26}$$

Además de (5.26) podemos calcular el segundo operador de campo de la solución (5.25)

$$U\widetilde{u}^*(p) = U(U^\dagger u^-(p))^* = UU^\top(u^-(p))^*, \tag{5.27}$$

e introduciendo la notación $u^+(p)$

$$u^+(p) = UU^\top(u^-(p))^*, \tag{5.28}$$

podemos escribir la solución general de la ecuación DKP de la siguiente forma

$$\psi(x) = \int_p dp(a(p)u^-(p)e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(p)u^+(p)e^{+ip\cdot x}), \tag{5.29}$$

que es la misma a la que encontramos en el capítulo anterior.

Ahora, veremos la relación que existe entre $u^+$ y $u^-$. Para ello, tomemos la conjugada compleja de (5.28) y multiplicando ambos lados por $UU^\top$

$$\begin{aligned} U^*U^\dagger u^-(p) &= (u^+(p))^* \\ UU^\top U^*U^\dagger u^-(p) &= UU^\top(u^+(p))^*, \end{aligned}$$

usando (5.14), encontramos la relación

$$u^-(p) = UU^T(u^+(p))^*, \tag{5.30}$$

donde, podemos reescribir tanto (5.28), así como (5.30) de la siguiente manera

$$u^+(p) = \eta^0 C(u^-(p))^*, \tag{5.31}$$

$$u^-(p) = \eta^0 C(u^+(p))^*, \tag{5.32}$$

que como hemos visto en (5.11), estas son transformaciones de conjugación de carga. Y, en la representación de Majorana, las ecuaciones (5.31) y (5.32) son lo mismo, es decir, $u^+$ y $u^-$ son conjugados complejos entre sí.

## 5.3 Invariancia de Lorentz de la condición de realidad

Según Roman [5], tenemos la transformación de Lorentz infinitesimal para el campo DKP de la siguiente forma

$$\Psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(\beta^\mu\beta^\nu - \beta^\nu\beta^\mu)\right)\Psi(x), \tag{5.33}$$

tomando la conjugada compleja y multiplicando por la derecha por $\eta_0 C$, obtenemos

$$\eta_0 C\Psi'^*(x') = \eta_0 C\exp\left(+\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}(\beta^*_\mu\beta^*_\nu - \beta^*_\nu\beta^*_\mu)\right)\Psi^*(x). \tag{5.34}$$

De la condición de realidad (5.11) podemos reescribir (5.34) como

$$\Psi'^C(x') = \eta_0 C\exp\left(+\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}(\beta^*_\mu\beta^*_\nu - \beta^*_\nu\beta^*_\mu)\right)(\eta_0 C)^{-1}\Psi^C(x), \tag{5.35}$$

calculando la conjugada de una matriz $\beta^\mu$

$$\begin{aligned}
\beta_\mu^* &= (\beta^\dagger)^T = (\eta_0\beta_\mu\eta_0)^T \\
&= \eta_0^T\beta_\mu^T\eta_0^T \\
&= C^{-1}\eta_0 C(-C^{-1}\beta_\mu C)C^{-1}\eta_0 C \\
&= -C^{-1}\eta_0\beta_\mu\eta_0 C \\
&= -(\eta_0 C)^{-1}\beta_\mu(\eta_0 C),
\end{aligned}$$

de aqui, podemos obtener

$$(\eta_0 C)\beta_\mu^*\beta_\nu^*(\eta_0 C)^{-1} = -\beta_\mu\beta_\nu. \tag{5.36}$$

Finalmente, reemplazando esto en la ecuación (5.35)

$$\Psi'^C(x') = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu)\right)\Psi^C(x). \tag{5.37}$$

Esto implica que $\psi^C$, definida en (5.11), se transforma de la misma manera que lo hace el campo DKP bajo transformaciones de Lorentz propias.

Con esto, es fácil comprender por qué una condición de realidad como la de la ecuación (5.12) es invariante de Lorentz. Ya que ambos lados se transforman bajo Lorentz de la misma manera. Por lo tanto, si la condición es cierta en algún sistema de referencia inercial, será verdadera en todos los sistemas de referencia inerciales.

# Capítulo 6

# Análisis de resultados

Del capítulo 2 tenemos que la ecuación de onda relativista general (2.16) es una ecuación similar a la ecuación de Dirac, pero dependiendo del espín del campo tendremos diferentes álgebras, como por ejemplo para el campo de DKP que es un campo de espín 0 o 1 el álgebra viene dado por la relación (2.54).

En el capítulo 3 revisamos la ecuación de Dirac y observamos que esta modela campos complejos. Sin embargo, tomando una representación imaginaria o de Majorana dada por (3.31) encontramos una ecuación real que acepta soluciones que satisfacen la condición de realidad (3.34). Y que al pasar de esta representación de Majorana a una representación general, la condición de realidad se transforma en la condición (3.43) en la que los campos reales son campos donde su transformada de conjugación de carga es el mismo campo, *i.e.* son campos que modelan partículas sin carga.

En el capítulo 4 hemos dado solución a la ecuación de DKP como una función en paquetes de onda y encontramos que la solución no tiene una suma sobre los espines ya que estamos trabajando con el campo DKP para el caso de espín 0, esto quiere decir que estamos trabajando con la representación de orden 5. Luego, mediante el acople mínimo dado por la ecuación (4.39) definimos la transformación de conjugación de carga para campos DKP con la ecuación (4.41) y encontramos la propiedad que la matriz C de conjugación de carga debe cumplir.

Finalmente, en el capítulo 5 replicamos lo hecho por Palash [1] para encontrar la condición de realidad para campos DKP dada por (5.12). Vimos que a diferencia del caso de Dirac, la matriz $C$ es una matriz simétrica y comprobamos que la matriz $\eta^0$ cumple con estas condiciones. Además, encontramos como son las soluciones de la ecuación de DKP reales y que la condición de realidad (5.12) es válida en cualquier sistema de referencia inercial.

# Conclusiones

En este trabajo hemos tenido como objetivo encontrar campos DKP sin carga y en el capítulo 5 encontramos cual es la condición de realidad que estos campos deben cumplir y que está íntimamente relacionado con la conjugación de carga. Encontramos que la matriz $\eta^0$ es la matriz que cumple con dicha condición ya que lo comprobamos para dos representaciones de las matrices $\beta$.

Estos campos DKP tipo Majorana nos deberían servir para poder construir un Lagrangiano similar a (1.1) pero con campos DKP reales que nos permitan replicar el mecanismo de Higgs.

# Bibliografía


[1] Palash B. Pal. Dirac, majorana and weyl fermions. *American Journal of Physics*, pages 485–498, 2010.

[2] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, 2008.

[3] H Umezawa. *Quantum Field Theory*. NORTH HOLLAND PUBLISHING, 1956.

[4] Armin Wiedemann Harald J. W. Muller-Kirsten. *Introduction to Supersymmetry*. World Scientific Lecture Notes in Physics. World Scientific Publishing Company, 2 edition, 2010.

[5] Paul Roman. *Theory of elementary particles*. North-Holland, second, improved and revised edition, 1961.

[6] J. Beltrán. *Polarización del vacio de la electrodinámica cuántica escalar en la descripción de Heisenberg via campos de Duffin-Kemmer-Petiau*. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Ingeniería, 2019.

[7] Paul Adrien Maurice Dirac and Ralph Howard Fowler. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778):610–624, 1928.

[8] A. F. R. de Toledo Piza. *Mecânica Quântica*. Edusp, 2003.

[9] D.A. Bromley Walter Greiner. *Relativistic quantum mechanics: wave equations*. Springer, 3rd ed edition, 2000.

[10] Berestetskii V.B. Akhiezer A.I. *Quantum electrodynamics*. Interscience, 1965.

[11] Dan V. Schroeder Michael E. Peskin. *An introduction to quantum field theory*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley Pub. Co, 1995.

[12] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel. On equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon equations. *Theor. Math. Phys.*, 124:1234–1249, 2000.

# Anexos

## A. Representaciones de $SU_2$ [1]

# Anexo A

# Representaciones de $SU_2$

El grupo especial unitario de dos dimensiones esta definido , como el conjunto de las transformaciones lineales en el espacio complejo de dos dimensiones:

$$
\begin{aligned}
u_1' &= a\, u_1 + b\, u_2, \\
u_2' &= c\, u_1 + d\, u_2.
\end{aligned}
$$

Estas transformaciones están restringidas por la condición de unimodularidad

$$
\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1,
$$

y la condición de unitaridad

$$
M^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};
$$

lo que implica que $d = \bar{a}$ y $c = -\bar{b}$. Así, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
u_1' &= \quad a\, u_1 + b\, u_2, \\
u_2' &= -\bar{b}\, u_1 + \bar{a}\, u_2,
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

y la restricción se convierte en

$$
a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{A.2}
$$

Cada elemento del grupo es una matriz especial unitaria

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

estos elemento de grupo están caracterizados por tres parámetros reales, ya que os complejos $a$ y $b$ involucran 4 números, pero estas cantidades están restringidas por (A.2). Los elementos del espacio lineal complejo $u = (u_1, u_2)$ que tienen las propiedades de transformación (A.1), (A.2), se llaman *espinores elementales*.

Ahora, para encontrar las representaciones de $U_2$, consideraremos un espacio lineal generado por los monomios de grado $v$,

$$\begin{gathered} p_k \equiv u_1^{v-k} u_2^k \\ (p_0 = u_1^v, p_1 = u_1^{v-1} u_2, ..., \; p_v = u_2^v) \end{gathered} \tag{A.4}$$

con $v$ y $k$ enteros, y

$$0 \leqslant k \leqslant v. \tag{A.4a}$$

Para un $v$ fijo, hay $v+1$ monomios de tipo (A.4), de modo que el espacio considerado es de $v+1$ dimensiones.

Debido a la linealidad de las transformaciones (A.1), las cantidades (A.4) también se transforman linealmente, puesto que como consecuencia obtenemos

$$(au_1 + bu_2)^{v-k}(-\bar{b}u_1 + \bar{a}u_2)^k,$$

una combinación lineal de términos homogéneos tipo (A.4) Además, usando (A.2) se encuentra que si uno aplica un producto de dos transformaciones (A.1) en el espacio (A.4), el resultado es similar a como si hubiésemos aplicado las dos transformaciones sucesivamente. Finalmente a la transformación de (A.1), que se caracteriza por $a = 1, \; b = 0$, le corresponde en el espacio (A.4) la transformación identidad $p_k \to p_k$. Por lo tanto, tenemos que el espacio (A.4) es un espacio de representación para $U_2$; y uno puede obtener en el espacio de representación matrices $(v+1)\times(v+1)$, que corresponden a una transformación $M$ dada de $U_2$, calculando

$$p'_k = (au_1 + bu_2)^{v-k}(-\bar{b}u_1 + \bar{a}u_2)^k$$

y re-ordenando el resultado en términos de los monomios $p_k$, escribiendo

$$p'_k = D_{kl}\, u_1^{v-l}u_2^l = D_{kl}\, p_l.$$

Los elementos $D_{kl}$ de la matriz representativa $D$ dependerán obviamente de los parámetros *a, b* de la transformación en $U_2$.

Es común introducir una notación más conveniente

$$j = \tfrac{1}{2}v, \tag{A.5}$$

donde $j$ puede asumir cualquier valor entero o semientero $0,\ {}^1\!/\!_2,\ 1,\ {}^3\!/\!_2,\ 2$ .... Luego, la representación obtenida previamente se denota simbólicamente por $\mathscr{D}^j$. Consiste el en conjunto de matrices

$$\mathscr{D}^j = \{...\ D^j(M)\ ...\}$$

que dependen de los parámetros de la transformación $M$ en $U_2$. Son claramente matrices de $(2j+1)\times(2j+1)$; y el espacio de representación tiene $(2j+1)$ dimensiones. Los elementos de este espacio son llamados *espinores de orden* $2j$, que pertenecen al espacio real de tres dimensiones.

Además, *las representaciones $\mathscr{D}^j$ son irreducibles; y, todas las representaciones irreducibles de $U_2$ ocurren en la serie $\mathscr{D}^j$* $(j = 0, 1/2, 1, ...)$ [5].

La representación mas simple, $\mathscr{D}^0$, es unidimensional: para todos los elementos $M$ de $U_2$ les corresponde como imagen el número 1.

La representación $\mathscr{D}^{1/2}$ es la representación de $U_2$ por sí misma: $p_1 = u_1,\ p_2 = u_2$ son las dos componentes de los elementos del espacio de representación.

La representación $\mathscr{D}^1$ actúa en el espacio tridimensional $p_0 = u_1^2,\ p_1 = u_1u_2, p_2 = u_2^2$; la transformación $M$ en $U_2$ sobre este espacio es

$$\begin{aligned}
p_0' &= (u_1')^2 = (au_1 + bu_2)^2 = a^2u_1^2 + 2ab\, u_1u_2 + b^2u_2^2 \\
&= a^2p_0 + 2ab\, p_1 + b^2p_2, \\
p_1' &= u_1'u_2' = (au_1 + bu_2)(-\bar{b}u_1 + \bar{a}u_2) = -a\bar{b}\, u_1^2 + (a\bar{a} - b\bar{b})\, u_1u_2 + \bar{a}b\, u_2^2, \\
&= -a\bar{b}\, p_0^2 + (a\bar{a} - b\bar{b})\, p_1 + \bar{a}b\, p_2^2 \\
p_2' &= (u_2')^2 = (-\bar{b}u_1 + \bar{a}u_2)^2 = \bar{b}^2u_1^2 - 2\bar{a}\bar{b}\, u_1u_2 + \bar{a}^2u_2^2 \\
&= \bar{b}^2p_0 - 2\bar{a}\bar{b}\, p_1 + \bar{a}^2p_2,
\end{aligned}$$

y le corresponde la matriz

$$D^1(M) = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ -a\bar{b} & a\bar{a} - b\bar{b} & \bar{a}b \\ \bar{b}^2 & -2\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

y así sucesivamente.

Además el producto directo de dos representaciones es nuevamente una representación de $U_2$. Sin embargo, esta es, en general, completamente reducible de la siguiente forma

$$\mathscr{D}^{j_1} \otimes \mathscr{D}^{j_2} = \mathscr{D}^{j_1+j_2} \oplus \mathscr{D}^{j_1+j_2-1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{D}^{|j_1-j_2|} \equiv \sum_{c=0}^{j_1+j_2-|j_1-j_2|} \mathscr{D}^{j_1+j_2-c}, \tag{A.7}$$

que es el *teorema de Clebsch-Gordan*.

Concluiremos esta subsección con una observación importante. Consideremos la transformación que es la conjugada compleja de (A.1). Siguiendo una convención establecida, denotamos la conjugada compleja de $u_1, u_2$ por $u_{\dot 1}, u_{\dot 2}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} u'_{\dot 1} &= \bar a\, u_{\dot 1} + \bar b\, u_{\dot 2}, \\ u'_{\dot 2} &= -b\, u_{\dot 1} + a\, u_{\dot 2}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

Los espinores "punteados" $(u_{\dot 1}, u_{\dot 2})$, que se transforman acorde a (A.8),sin embargo, no generan un nuevo espacio de representación diferente de $\mathscr{D}^{1/2}$, ya que si hacemos

$$\begin{aligned} u_{\dot 2} &\sim -u_1, \\ u_{\dot 1} &\sim u_2, \end{aligned} \tag{A.8a}$$

la transformación (A.8) es idéntico a (A.1).