UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“CONVEXIDAD ABSTRACTA EN EL MODELO PRINCIPAL-AGENTE CON SELECCIÓN ADVERSA Y APLICACIÓN EN TARIFAS DE MONOPOLIO”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN ECONOMÍA MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

DAVID AMÉRICO HUARI LEASASKI

ASESOR:

Dr. JOSÉ BRAULIO CALAGUA MENDOZA

LIMA – PERÚ

2023

Dedicado a

mis padres Rita Leasaski Tito

y Leonidas Huari Salas

Resumen

El modelo Principal-Agente permite estudiar la existencia y las características de los contratos óptimos en presencia de selección adversa. El ambiente matemático natural para dicho modelo es uno descrito por el análisis variacional, donde se trata de maximizar un funcional de beneficios sujeto a dos restricciones asociadas con la convexidad de las funciones admisibles, denominadas racionalidad individual y compatibilidad de incentivos. Gran parte de las estrategias formales han empleado elementos del análisis convexo clásico, pero este no ha permitido dar un tratamiento más flexible y general al problema.

En este trabajo se estudia el modelo Principal-Agente con selección adversa introduciendo el concepto de convexidad abstracta, un objeto matemático de reciente manejo en la teoría económica que extiende los resultados de la convexidad clásica. La generalización del modelo, el replanteamiento de las restricciones de incentivos, la existencia de solución óptima, y la caracterización del equilibrio económico son posibles gracias al estudio de funciones, subdiferenciales y conjugadas en el lenguaje de la convexidad abstracta. Además, con ello conseguimos reescribir el modelo en el contexto aplicativo de una empresa monopólica que determina tarifas no lineales.

Palabras clave: Principal-Agente, compatibilidad de incentivos, contratos óptimos, convexidad abstracta, subdiferencial abstracto, conjugada abstracta, problema del monopolista.

Índice general

Introducción

En la teoría económica contemporánea la *economía de la información* se refiere al conjunto de teorías que estudian las decisiones de los agentes económicos y cómo estas cambian en relación a la disponibilidad de información y su distribución entre los agentes (Laffont y Martimort, 2002). El problema que se describe en esta área de la economía se denomina *información asimétrica*, la cual aparece cuando una de las partes de una relación o transacción económica posee mejor información relevante que la otra.

Existen dos tipos de problemas de información asimétrica. El primero se denomina *selección adversa* y sucede antes que la relación económica contractual se concrete. Por ejemplo, en el mercado de seguros, el cliente está mejor informado que la compañía aseguradora sobre el estado de su salud; en la compra y venta de automóviles de segunda mano, el comprador tiene mucha menos información sobre el estado del vehículo; o cuando se regula las tarifas eléctricas, la empresa regulada tiene más información precisa sobre los costos unitarios de producción que el regulador. El segundo problema es conocido como *riesgo moral* y surge una vez que el acuerdo se ha suscrito. Por ejemplo, un centro de investigación que ha contratado a un investigador para realizar un proyecto no puede verificar el esfuerzo realizado por el trabajador; o una empresa aseguradora de accidentes tiene dificultades para conocer la información sobre cuan cuidadoso ha sido un cliente para evitar accidentes. En la práctica es habitual encontrar simultáneamente ambos problemas.

Al respecto, uno de los enfoques teóricos que aborda satisfactoriamente estos problemas de información, y que mayor desarrollo ha tenido en las últimas décadas, recibe el nombre de *Principal-Agente* (P-A). Este modelo identifica los contratos óptimos y equilibrios económicos en situaciones de información asimétrica existentes entre las unidades de decisión económica, estas últimas pueden ser individuos, colectivos, instituciones, planificadores sociales, etc. Entre las aplicaciones que emplean el marco teórico P-A se encuentran; la teoría general de contratos, el diseño de mecanismos, la fijación de precios no lineales, la teoría óptima de impuestos, la regulación de monopolios, por mencionar sólo unos pocos.[1]

Actualmente los modelos P-A con selección adversa forman parte de un área de plena investigación en economía matemática. Así, encontrar soluciones óptimas y revelar sus características, han sido problemas que años atrás se creían irresolubles, y los avances han sido posible gracias al uso de herramientas matemáticas cada vez más sofisticadas.

Una de las cuestiones estructurales involucrada en el tratamiento matemático se refiere a la convexidad de los objetos. En específico, el modelo P-A con selección adversa se resume a un problema variacional donde se maximiza un funcional objetivo sujeto a dos restricciones globales asociadas a la convexidad de las funciones admisibles. Al respecto, la teoría del análisis convexo ofrece un desarrollo simple y potente al modelamiento de los problemas económicos con información asimétrica. No obstante, su principal limitación es que no se pueden emplear en contextos más generales, dejando de lado muchas aplicaciones que representan a una realidad más adecuada y precisa.

Frente a esta situación surge el análisis convexo abstracto, una estructura teórica

[1]En el orden citado de los modelos puede recurrir a los siguientes autores: Quinzii y Rochet (1985), McAfee y Mc-Millan (1988), Armstrong (1996), Rochet (1985), y Laffont y Tirole (1993).

que extiende los resultados del análisis convexo clásico. Las primeras ideas fueron introducidas por Moreau hace medio siglo y recientemente se han sistematizado en el trabajo seminal de Rubinov (2000). La idea principal de la convexidad abstracta es que se abandona el supuesto de funciones lineales afines como elementos del conjunto soporte de una función, y se da paso a uno más arbitrario sin linealidad (funciones elementales). Esta mejora resulta ser satisfactoria para el estudio de elementos no convexos en economía matemática (Carlier (2001), Basov (2002), Figalli et al (2011) y McCann y Zhang (2018)).

El uso de estas nuevas herramientas sobre los problemas de selección adversa se impulsaría gracias a los avances de la teoría del transporte óptimo[2] y su relación con la convexidad abstracta (Gangbo y McCann (1996); Ma, Trudinger y Wang (2005); y Trudinger (2014)), hecho que ya había anticipado tiempo atrás Ivar Ekeland, reconocido matemático que ha sido determinante para la producción de tesis en esta línea de la economía matemática[3].

Así, su estudiante de doctorado Guillaume Carlier (2001) comenzó demostrando el rol de la convexidad abstracta, introduciendo un nuevo criterio para verificar si una solución al problema de selección adversa es implementable. Con esto reformuló el modelo estándar y probó la existencia de solución óptima. Posteriormente, y utilizando el criterio de implementabilidad de Carlier, Basov (2002) realiza una caracterización parcial de la solución óptima al problema en cuestión utilizando herramientas del control óptimo. Otra influencia de Ekeland recae sobre el trabajo notable de Figalli-Kim-McCann (2011), quienes identificaron las condiciones estructurales para la convexidad del programa en el modelo P-A, permitiendo la posibilidad de alcanzar objetivos como la unicidad, el cálculo y solución numérica. Todas estas propuestas han sido mejoradas por McCann y Zhang (2018), pues ellos generalizan y resuelven el modelo Principal-Agente con selección adversa, uti-

[2]Para un tratado completo y reciente sobre esta teoría revisar el libro de Villani (2009).

[3]El uso de los métodos de transporte en economía se originó a finales de los noventa en París, Ekeland fue el primero en dar cuenta de esta conexión a través del trabajo de J.C. Rochet en economía y las conferencias de Robert McCann sobre transporte en París.

lizando la convexidad abstracta como principal herramienta. Más tarde, Carlier y Zhang (2020) demuestran la existencia en el modelo P-A utilizando herramientas matemáticas provenientes de sus trabajos por separado (2001 y 2018, respectivamente), con requerimientos mínimos sobre los objetos matemáticos, permitiendo (por ejemplo) el ingreso de espacios de dimensión infinita para el conjunto de decisiones.

El objetivo de la tesis es desarrollar el modelo Principal-Agente con selección adversa, incorporando las ideas y los resultados elementales de la convexidad abstracta (funciones, subdiferencial y conjugada). Para ello simplificamos la complejidad del problema reduciendo la dimensionalidad de los conjuntos de decisión e información, ya que en general encontrar una solución y describir sus características se vuelven técnicamente intratables. Con esto se consigue una mejor visualización del funcionamiento de los nuevos objetos (no convexos), y permite que estos resultados sean más accesibles para los investigadores de las áreas aplicadas.

Luego de la introducción se presenta el modelo estandar P-A con selección adversa en el contexto específico de una empresa monopólica que produce un único bien y se enfrenta a un conjunto de consumidores informados acerca de sus características privadas, de este modo se pretende familiarizar las principales ideas al lector no especializado en la teoría económica de la información. En el capítulo 2 se introducen los conceptos fundamentales de la convexidad abstracta para funciones, acompañadas de otras dos nociones relacionadas como lo son el subdiferencial y la conjugada, con el objetivo de dar a conocer las ideas al lector no matemático. Con este nuevo lenguaje se desarrolla en el siguiente capítulo una versión rigurosa y generalizada del modelo económico planteado en el primer capítulo, culminando en un programa de optimización con restricciones convexas abstractas. Finalmente, en el capítulo 4 realizamos una aplicación del modelo general a la determinación de tarifas de una empresa monopólica.

Capítulo 1

Modelo estándar Principal-Agente con selección adversa

El objetivo de este capítulo es introducir el modelo económico Principal-Agente para estudiar el problema de información asimétrica denominada selección adversa. Se desarrolla la teoría en el contexto aplicativo de una empresa monopólica quién determina óptimamente las combinaciones precio-cantidad de un producto ofertado a un conjunto de consumidores heterogéneos, cuyas características privadas son desconocidas por la firma.

Utilizando los métodos oportunos de optimización se caracterizan los contratos óptimos diseñados por la empresa. Este proceso tendrá en cuenta tres supuestos generales e implícitos. Primero, la empresa y los consumidores adoptan conductas racionales maximizadoras de sus utilidades y beneficios individuales. Segundo, la distribución de probabilidad objetiva de los tipos de consumidores existe y es conocida por las dos partes, este mismo hecho es también de conocimiento común. Por último, el monopolista es un maximizador bayesiano de la utilidad esperada.

Las ideas y los conceptos económicos fundamentales provienen del texto "The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model" de Laffont y Martimort (2002), específicamente del capítulo 2 y el apéndice 3.1. Sobre esta base se presenta una extensión y modificación del modelo estándar, propias de la tesis.

1.1. Problema

Suponga una empresa monopólica asumiendo el rol de principal, la cual puede producir un rango de cantidad (calidad) de una mercancía $q > 0$, con un costo de producción $C(q)$, donde $C(.)$ es su función de costo. La demanda del bien q lo puede realizar un conjunto de agentes consumidores segmentados en "tipos", cada tipo simbolizado por la variable $\theta \in \Theta = [\overline{\theta}, \underline{\theta}]$. El parámetro θ es información privada de los agentes;[1] es decir, la firma no conoce a cada tipo de consumidor en particular, pero si conoce como se distribuye el conjunto de tipos de consumidores a través de la función de densidad $f(\theta) > 0$.

Las preferencias de cada tipo de consumidor θ están representadas por la función de utilidad $u(\theta, q) - t$,[2] dependiente del bien consumido q y el precio o tarifa correspondiente t. Por su parte, indistintamente del tipo, la empresa puede calcular su beneficio restando el precio menos el costo, esto es, $t - C(q)$.

El objetivo del monopolista es diseñar un contrato (o conjunto de contratos) para los diferentes tipos de consumidores considerando su desventaja informacional, de tal modo que maximice su beneficio total. La especificación de dicho contrato podría ser de una gran complejidad, lo que conduciría a mayores esfuerzos en el tratamiento matemático. Por tal motivo, una primera simplificación teórica importante proviene de la teoría de mecanismos (ver cap. 2.9 en Laffont y Martimort (2002)) conocida como *principio de revelación* (Myerson, 1979).

Este principio permite, sin pérdida de generalidad, utilizar un mecanismo con

[1] Por ejemplo, un valor particular de θ podría reflejar la disposición personal a pagar por el bien o servicio.

[2] Este tipo de funciones reciben el nombre de cuasilineales, y es el que ha recibido mayor atención en la literatura, permitiendo simplificar algunas cuestiones técnicas en la modelación.

dos características: directo y honesto (*truth-telling*). Por un lado, se les pedirá a los agentes consumidores que revelen su tipo y se les ofrecerá un contrato de acuerdo con sus declaraciones (directo); es decir, para determinar los contratos óptimos basta considerar sólo uno para cada tipo de agente. Por otro lado, el agente encuentra óptimo anunciar el verdadero valor de su información privada (honesto), asegurando que cada tipo tenga incentivos para escoger sólo el contrato diseñado para él.

Gracias al principio de revelación, y en específico al mecanismo directo, el contrato se puede escribir como una función matemática que hace corresponder a cada tipo $\tilde{\theta} \in \Theta$ un vector $(q(\tilde{\theta}), t(\tilde{\theta}))$ especificando la cantidad (calidad) y el precio en la transacción.[3] Además, si el mecanismo es honesto podemos escribir la restricción más importante que debe afrontar el monopolista denominada *Compatibilidad de Incentivos* (CI), la cual podemos expresar de dos formas alternativas:

$$u(q(\theta), \theta) - t(\theta) \geq u(q(\tilde{\theta}), \theta) - t(\tilde{\theta}), \text{ para todo } \theta, \tilde{\theta} \in \Theta, \tag{1.1}$$

$$\theta \in \underset{\tilde{\theta} \in \Theta}{\arg\max} \left(u(q(\tilde{\theta}), \theta) - t(\tilde{\theta}) \right), \quad \text{para todo } \theta \in \Theta. \tag{1.2}$$

Es decir, el contrato (q, t) satisface la compatibilidad de incentivos si al tipo de agente consumidor θ le proporciona mayor utilidad siendo él mismo y no otro tipo $\tilde{\theta}$. En este caso, el lado derecho de la desigualdad (1.1) es la utilidad del tipo θ comportándose como $\tilde{\theta}$. La restricción CI es el centro de atención en los modelos con información asimétrica.

Adicionalmente, el contrato debe asegurar la participación de los consumidores en la transacción con el monopolista. Esto se consigue cuando la firma garantiza un nivel mínimo de utilidad a los agentes para que acepten el contrato. Dicho nivel de referencia se denomina *utilidad de reserva* y representa la utilidad reportada

[3]El monopolista puede ofrecer un único contrato a todos los tipos de agentes, en ese caso estaríamos en el contexto clásico de una empresa fijadora de un solo precio.

por la opción externa de los agentes. En efecto,

$$u(q(\theta),\theta) - t(\theta) \geq 0, \text{ para todo } \theta \in \Theta. \tag{1.3}$$

Esta restricción se denomina *Racionalidad Individual* (RI). Como en la mayoría de las aplicaciones, la utilidad de reserva es independiente del tipo de consumidor y normalizada a cero.

Por su parte, el beneficio total de la firma resulta de sumar los beneficios individuales ponderados por la distribución de los tipos, es decir,

$$\Pi(t,q) := \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \big(t(\theta - C(q(\theta))\big) f(\theta) d\theta,$$

recordando que f es la función de densidad de los tipos de agentes. Luego, el problema estandar en el modelo Principal-Agente con selección adversa se escribe como:

$$P_1 \begin{cases} \max \Pi(t,q) := \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \big(t(\theta - C(q(\theta))\big) f(\theta) d\theta \\ \text{sujeto a} \\ u(q(\theta),\theta) - t(\theta) \geq u(q(\tilde{\theta}),\theta) - t(\tilde{\theta}), \text{ para todo } \theta, \tilde{\theta} \in \Theta, \\ u(q(\theta),\theta) - t(\theta) \geq 0, \text{ para todo } \theta \in \Theta. \end{cases}$$

En este punto es apropiado introducir el concepto de *renta informacional* o *excedente del consumidor*. Esta renta es un valor que se origina porque cada tipo puede adoptar el comportamiento de otro, aprovechando su ventaja de información con respecto al monopolista. Para cada tipo de consumidor, la renta informacional es la diferencia entre el valor máximo de la utilidad alcanzada y su respectiva utilidad de reserva. En vista que esta última es cero para todos los tipos, se define la renta informacional como

$$U(\theta) := u(q(\theta),\theta) - t(\theta) = \max_{\tilde{\theta} \in \Theta} u(q(\tilde{\theta}),\theta) - t(\tilde{\theta}). \tag{1.4}$$

En el modelo Principal-Agente es habitual reescribir las condiciones RI y CI en términos de la variable U. Así, de la expresión (1.4) se deduce rápidamente que la nueva restricción de participación viene dada por

$$U(\theta) \geq 0, \text{ para todo } \theta \in \Theta. \tag{1.5}$$

No obstante, pensando en los métodos de optimización que se van a emplear, es indispensable obtener una versión local de la restricción CI, escrita en términos de la renta informacional U, y que tenga validez en el sentido global.

En esa línea, una expresión local de la condición CI se obtiene al aplicar el teorema de la envolvente (ver Teorema 2.15 en De la Fuente (2000)) en (1.4), asumiendo, desde luego, diferenciabilidad para $u(.)$. En efecto, se debe cumplir que la derivada de la renta informacional con respecto al tipo de consumidor θ es igual a la derivada parcial de la función de utilidad, manteniendo fijo el anuncio óptimo de los agentes $\tilde{\theta}$, esto es

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial u(q(\theta), \theta)}{\partial \theta}. \tag{1.6}$$

Se ha obtenido una restricción de compatibilidad en términos de la variable U en el sentido local, es decir, el agente no obtiene ganancias al desviar su anuncio en un entorno de su verdadera característica θ. Ahora falta demostrar bajo qué condiciones la condición local (1.6) es equivalente a uno global.

Para alcanzar esto se requiere de un supuesto que ordena a los tipos de agentes en función a sus utilidades marginales $\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)$, de modo que estas sean estrictamente crecientes en θ para todo $q \in Q$, es decir, $\frac{\partial^2 u}{\partial q \partial \theta} > 0$. Esta derivada parcial cruzada positiva es característica de los modelos unidimensionales y se conoce como la propiedad *Spence–Mirrlees* o *single-crossing* (Spence (1974) y Mirrlees (1971)).

Proposición 1.1. Sea $u(.)$ una función de utilidad que satisface la condición Spence-Mirrlees. Entonces, el contrato $((q(.), t(.))$ es Compatible en Incentivos si y solo si $q(.)$ es no decreciente y se cumple la Compatibilidad de Incentivos local $\frac{dU(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial u(q(\theta),\theta)}{\partial \theta}$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Considere las restricciones de compatibilidad (1.1) para los tipos θ y $\tilde{\theta}$ tomando en cuenta la variable renta informacional U:

$$\begin{aligned} U(\theta) &\geq U(\tilde{\theta}) + u(q(\tilde{\theta}), \theta) - u(q(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}) \\ U(\tilde{\theta}) &\geq U(\theta) + u(q(\theta), \tilde{\theta}) - u(q(\theta), \theta). \end{aligned}$$

Juntando ambas desigualdades se consigue

$$u(q(\theta), \tilde{\theta}) - u(q(\theta), \theta) \leq U(\tilde{\theta}) - U(\theta) \leq u(q(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}) - u(q(\tilde{\theta}), \theta).$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo en los extremos de las desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial u(q(\theta), \tau)}{\partial \theta} d\tau &\leq \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial u(q(\tilde{\theta}), \tau)}{\partial \theta} d\tau \\ \iff 0 &\leq \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \left(\frac{\partial u(q(\tilde{\theta}), \tau)}{\partial \theta} - \frac{\partial u(q(\theta), \tau)}{\partial \theta} \right) d\tau \\ \iff 0 &\leq \int_{\theta}^{\theta} \int_{q(\theta)}^{q(\tilde{\theta})} \frac{\partial^2 u(q, \tau)}{\partial \theta \partial q} dq d\tau, \end{aligned}$$

donde la última equivalencia resulta de aplicar nuevamente el teorema del cálculo, esta vez con respecto a la función derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial \theta}$. Puesto que el integrando $\frac{\partial^2 u(q,\tau)}{\partial \theta \partial q}$ en la última expresión es positivo por la condición Spence-Mirrlees, y el valor de la integral doble es no negativa, se sigue que los límites de las dos integrales deberían moverse en la misma dirección, es decir, $\theta < \tilde{\theta}$ implica $q(\theta) \leq q(\tilde{\theta})$, y en consecuencia $q(.)$ es no decreciente.

Este último resultado implica que $q(.)$ es continua en casi todo punto. En consecuencia, $U(\theta) = \max_{\tilde{\theta}\in\Theta} u(q(\tilde{\theta}),\theta) - t(\tilde{\theta})$ es continua diferenciable en casi todo punto, y por lo tanto podemos aplicar el teorema de la envolvente, obteniendo la implicancia deseada como en (1.6).

($\Longleftarrow$) Denote por $U(\tilde{\theta};\theta) := u(q(\tilde{\theta}),\theta) - t(\tilde{\theta})$ la utilidad del agente consumidor que pretende ser el tipo $\tilde{\theta}$ cuando realmente es θ. Debemos probar que $U(\theta) = U(\tilde{\theta};\theta)$.

Por definición tenemos

$$U(\theta) - U(\tilde{\theta};\theta) = U(\theta) - \big(u(q(\tilde{\theta}),\theta) - t(\tilde{\theta})\big).$$

Sumando y restando el término $u(q(\tilde{\theta}),\tilde{\theta}) - t(\tilde{\theta})$ en el lado derecho conseguimos

$$\begin{aligned} U(\theta) - U(\tilde{\theta};\theta) = U(\theta) &- \big(u(q(\tilde{\theta}),\theta) - t(\tilde{\theta})\big) \\ &+ \big(u(q(\tilde{\theta}),\tilde{\theta}) - t(\tilde{\theta})\big) - \big(u(q(\tilde{\theta}),\tilde{\theta}) - t(\tilde{\theta})\big). \end{aligned}$$

Cancelando el término $t(\tilde{\theta})$ e introduciendo (por definición) $U(\tilde{\theta}) = u(q(\tilde{\theta}),\tilde{\theta}) - t(\tilde{\theta})$ obtenemos

$$U(\theta) - U(\tilde{\theta};\theta) = U(\theta) - U(\tilde{\theta}) + \big(u(q(\tilde{\theta}),\tilde{\theta}) - u(q(\tilde{\theta}),\theta)\big),$$

donde las diferencias de la derecha se pueden expresar en integrales, en efecto

$$\begin{aligned} U(\theta) - U(\tilde{\theta}) &= -\int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial U(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ u(q(\tilde{\theta}),\tilde{\theta}) - u(q(\tilde{\theta}),\theta) &= \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial u(q(\tilde{\theta}),\tau)}{\partial \theta} d\tau. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$U(\theta) - U(\tilde{\theta};\theta) = -\int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial U(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial u(q(\tilde{\theta}),\tau)}{\partial \theta} d\tau.$$

Ahora podemos utilizar la condición de Compatibilidad de Incentivos local $\frac{dU(\theta)}{d\theta} =$

$\frac{\partial u(q(\theta),\theta)}{\partial\theta}$ para llegar a la expresión

$$U(\theta) - U(\tilde{\theta};\theta) = -\int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial u(q(\tau),\tau)}{\partial\theta} d\tau + \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial u(q(\tilde{\theta}),\tau)}{\partial\theta} d\tau.$$

Finalmente, aplicando otra vez el teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$\begin{aligned} U(\theta) - U(\tilde{\theta};\theta) &= \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \int_{q(\tau)}^{q(\tilde{\theta})} \frac{\partial}{\partial q}\Big(\frac{\partial u(q,\tau)}{\partial\theta}\Big) dq d\tau \\ &= \int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \int_{q(\tau)}^{q(\tilde{\theta})} \frac{\partial u^2(q,\tau)}{\partial q\partial\theta} dq d\tau. \end{aligned}$$

Como $q(.)$ es no decreciente, $\theta < \tau < \tilde{\theta}$ implica que $q(\tau) \leq q(\tilde{\theta})$. Entonces $U(\theta) - U(\tilde{\theta},\theta) \geq 0$, según la condición Spence-Mirrlees aplicada en la integral doble.

La desigualdad $U(\theta) - U(\tilde{\theta},\theta) \leq 0$ se obtiene con un procedimiento análogo. Por lo tanto, $U(\theta) = U(\tilde{\theta};\theta)$ o equivalentemente $\theta \in \arg\max_{\tilde{\theta}\in\Theta} \big(u(q(\tilde{\theta}),\theta) - t(\tilde{\theta})\big)$. $\square$

Antes de plantear el problema general es conveniente expresar alternativamente la condición CI local en forma de ecuación integral. Esto se consigue integrando ambos lados de la igualdad (1.6), desde $\underline{\theta}$ hasta θ, obteniendo

$$U(\theta) = U(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} \frac{\partial u(q(\tau),\tau)}{\partial\theta} d\tau. \tag{1.7}$$

Así también, definamos la función $S(q(\theta),\theta) := \{u(q(\theta),\theta) - t(\theta)\} + \{t(\theta) - C(q(\theta))\}$ como el *excedente* o *valor social de intercambio*, esto es, la suma de las utilidades del monopolista y el tipo de consumidor θ. Es fácil notar que el beneficio de la empresa, en el intercambio con cada tipo de consumidor $\theta \in [\underline{\theta},\overline{\theta}]$, viene dado por la función $S(q(\theta),\theta) - U(\theta)$. Entonces, se redefine el beneficio total de la firma como el siguiente valor esperado:

$$\widetilde{\Pi}(U,q) := \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta),\theta) - U(\theta)\right) f(\theta) d\theta. \tag{1.8}$$

Por lo tanto, el problema estandar P_1 se traduce en el siguiente programa de optimización.

$$P_2 \left\{ \begin{array}{c} \text{máx}\, \widetilde{\Pi}(U,q) := \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta),\theta) - U(\theta)\right) f(\theta) d\theta \\ \text{sujeto a} \\ U(\theta) = U(\underline{\theta}) + \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\theta} \frac{\partial u(q(\tau),\tau)}{\partial \theta} d\tau, \\ \dfrac{dq}{d\theta} \geq 0, \\ U(\theta) \geq 0. \end{array} \right.$$

En la función objetivo se ha incorporado el valor social de intercambio $S(.)$. Asimismo, la primera restricción es la ecuación integral (1.7) equivalente a la compatibilidad local. Le siguen la condición de monotonicidad y la restricción de participación de los agentes con utilidad de reserva normalizada a cero.

Bajo condiciones suficientemente suaves para $u(.)$ y $C(.)$ el problema del monopolista tiene solución. En este capítulo no discutiremos la existencia del problema planteado, esta se desarrolla en detalle en el Capítulo 3 para un modelo más general.

La secuencia del proceso de optimización se puede resumir en la siguiente línea temporal:

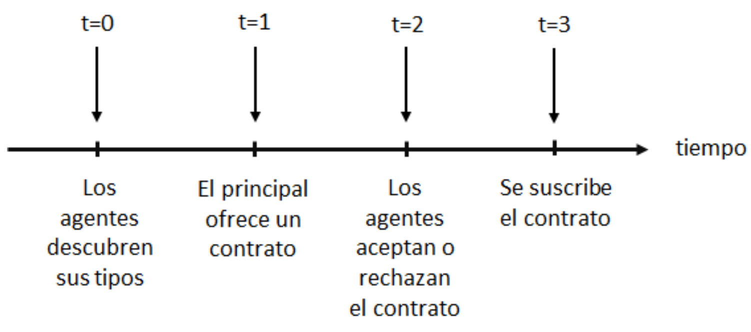

Figura 1.1: Timming del contrato bajo selección adversa.

De aquí en adelante utilizaremos notaciones alternativas de la derivada. Así, para funciones de varias variables, los subíndices simbolizarán a las derivadas parciales primeras, segundas y cruzadas (ejemplos: u_θ, u_q, $u_{q\theta}$, $u_{\theta\theta}$); mientras que, para funciones que solo dependen de θ, se emplean puntos encima de las variables (ejemplos: $\dot{U}$, $\dot{q}$).

1.2. Métodos de solución

Existen dos enfoques principales para calcular las soluciones óptimas del problema P (Basov, 2005). El primero consiste en resolver el denominado problema relajado, es decir, ignorando la monotonicidad y verificándola después de conseguir las soluciones sin dicha restricción. Esto es posible con el método directo o de integración por partes.[4] El segundo enfoque consiste en utilizar el Hamiltoniano sobre el problema completo.

Antes consideremos un supuesto adicional dado por $u_\theta \geq 0$ (supuesto de normalización en θ) con lo cual se deduce inmediatamente de (1.6) que $U(.)$ es no decreciente. Por lo tanto, para todo $\theta \in \Theta - \{\underline{\theta}\}$, $\underline{\theta} < \theta$ implica $0 \leq U(\underline{\theta}) \leq U(\theta)$. Esto es, la restricción de participación se reduce a $U(\underline{\theta}) \geq 0$, indicando que es suficiente asegurar la participación del tipo con menor valor en θ.

Asimismo, podemos reemplazar la renta informacional U de la ecuación integral (1.7) en la función de beneficio total (1.8) obteniendo

$$\widetilde{\Pi}(U,q) = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \Big(S(q(\theta),\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} u_\theta(q(\tau),\tau)d\tau \Big) f(\theta)d\theta - U(\underline{\theta}). \qquad (1.9)$$

Al maximizar dicho funcional es preciso garantizar que el valor de la constante $U(\underline{\theta})$ sea el mínimo posible, es decir, en el óptimo se debe satisfacer que $U(\underline{\theta}) = 0$.

Comencemos el método de relajación distribuyendo la integral de la función de

[4] Además, existen el método dual y el Hamiltoniano para el problema relajado (Basov, 2005).

beneficio total (1.9), en efecto

$$\widetilde{\Pi}(U,q) = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} S(q(\theta),\theta)f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(\int_{\underline{\theta}}^{\theta} u_\theta(q(\tau),\tau)d\tau \right) f(\theta)d\theta - U(\underline{\theta}).$$

Trabajemos el segundo término de la derecha aplicando integración por partes. Para ello consideremos el siguiente cambio de variable:

$$v' = f(\theta) \quad \text{y} \quad h = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} u_\theta(q(\tau),\tau)d\tau,$$

tomando en cuenta que $F(\underline{\theta}) = 0$ y $F(\overline{\theta}) = 1$, donde $F(.)$ es la función de distribución correspondiente a la función de densidad $f(.)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(\int_{\underline{\theta}}^{\theta} u_\theta(q(\tau),\tau)d\tau \right) f(\theta)d\theta &= \int_{\underline{\theta}}^{\theta} u_\theta(q(\tau),\tau)d\tau.F(\theta)\Bigg|_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} u_\theta(q(\theta),\theta)F(\theta)d\theta \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} u_\theta(q(\theta),\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} u_\theta(q(\theta),\theta)F(\theta)d\theta \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} u_\theta(q(\theta),\theta) \left(\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} \right) f(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Con este resultado el problema de la empresa (principal), relajando la condición de monotonicidad, se escribe del siguiente modo:

$$\max_{q(.)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta),\theta) - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} u_\theta(q(\theta),\theta) \right) f(\theta)d\theta. \tag{1.10}$$

Entonces, la empresa monopólica maximiza el valor esperado de la expresión entre paréntesis $\Omega(q,\theta) := S(q,\theta) - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} u_\theta(q,\theta)$ denominada *excedente virtual*; esto es, el excedente o valor social de intercambio corregido por el término $\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} u_\theta(q(\theta),\theta)$ que aparece exclusivamente por la introducción de la compatibilidad de incentivos como restricción.

La solución de (1.10) se obtiene al maximizar el integrando Ω en cada punto. En efecto, igualamos a cero la derivada de Ω con respecto a q, obteniendo la siguiente ecuación que caracteriza el contrato óptimo del problema relajado:

$$u_q(q^\star(\theta),\theta) - C_q(q^\star(\theta)) - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} u_{q\theta}(q^\star(\theta),\theta) = 0. \tag{1.11}$$

Para cada tipo de consumir θ, la cantidad $q^\star$ representa al maximizador de Ω, esto es, $q^\star(\theta) = \arg\max_{q} \Omega(q,\theta)$.

Ahora hace falta corroborar que dicha solución satisface la condición de monotonicidad. Para ello evaluamos la derivada de $\frac{\partial \Omega}{\partial q}$ con respecto a θ, resultando en

$$\frac{\partial^2 \Omega(q(\theta),\theta)}{\partial q \partial \theta} = u_{q\theta}(q(\theta),\theta) - \frac{u_{q\theta\theta}(q(\theta),\theta)}{h(\theta)} + u_{q\theta}(q(\theta),\theta)\frac{h_\theta(\theta)}{[h(\theta)]^2}, \tag{1.12}$$

donde se ha incorporado la notación $h(\theta) := \frac{f(\theta)}{1-F(\theta)}$, comúnmente conocida como ratio de hazard.[5]

En la expresión (1.12), $u_{q\theta}$ es positiva por la condición Spence-Mirrlees. Entonces, para que $q^\star(.)$ sea no decreciente se requiere que $u_{q\theta\theta} \leq 0$ y $h_\theta \geq 0$. Con estos dos supuestos adicionales cualquier solución del problema relajado satisface la monotonicidad, resolviendo así el problema completo.

Como se mencionó al inicio de la sección, el problema completo P_2 se puede resolver utilizando el Hamiltoniano de la teoría del control óptimo (Basov (2005) y Cerdá (2001)). La formulación correspondiente es:

$$P_3 \begin{cases} \max \widetilde{\Pi}(U,q) := \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta),\theta) - U(\theta)\right) f(\theta) d\theta \\ \qquad\qquad \text{sujeto a} \\ \qquad \dot{U}(\theta) = u_\theta(q(\theta),\theta), \\ \qquad \dot{q}(\theta) \geq 0, \\ \qquad U(\underline{\theta}) = 0. \end{cases}$$

A diferencia del problema P_2, la restricción de compatibilidad de incentivos local

[5] El ratio de hazard es la probabilidad condicional de que el tipo de consumidor pertenezca al intervalo $[\theta, \theta + d\theta]$, dado que se sabe que su tipo pertenece al intervalo $[\theta, \overline{\theta}]$

se ha colocado en forma de ecuación diferencial, la desigualdad es la restricción de monotonicidad, y la última expresión representa la condición inicial del problema.

Con estos elementos se forma el Hamiltoniano

$$H(q, U, \lambda, \theta) = \big(S(q(\theta), \theta) - U(\theta)\big) f(\theta) + \lambda(\theta) u_\theta(q(\theta), \theta),$$

donde U, q, λ representan las variables de estado, control, y coestado, respectivamente. Según el principio del máximo de Pontryagin (ver Teorema 4.1 en Cerdá (2001)), se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(q^\star, U^\star, \lambda^\star)}{\partial q} &= 0 \\ -\frac{\partial H(q^\star, U^\star, \lambda^\star)}{\partial U} &= \dot{\lambda}^\star(\theta). \end{aligned}$$

Desarrollando las derivadas obtenemos el sistema

$$S_q(q^\star(\theta), \theta) f(\theta) + \lambda^\star(\theta) u_{\theta q}(q^\star(\theta), \theta) = 0 \tag{1.13}$$

$$\dot{\lambda}^\star(\theta) = f(\theta). \tag{1.14}$$

Asimismo, la condición de transversalidad asociada a este problema resulta ser $\lambda^\star(\overline{\theta}) = 0$. Considerando esto e integrando (1.14) se satisface que

$$\lambda^\star(\theta) = F(\theta) - 1.$$

Incorporemos este resultado en (1.13) y desarrollemos la derivada $S_q(q(\theta), \theta)$. De este modo obtenemos

$$u_q(q^\star(\theta), \theta) - C_q(q^\star(\theta)) - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} u_{q\theta}(q^\star(\theta), \theta) = 0.$$

Es decir, llegamos a la misma condición de optimalidad (1.11) obtenida con el método de relajación.

La ecuación implícita para obtener el máximo podemos reorganizarla y escribirla como

$$u_q(q^\star(\theta),\theta) = C_q(q^\star(\theta)) + \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} u_{q\theta}(q^\star(\theta),\theta). \tag{1.15}$$

En el contexto del monopolista que ofrece un único producto a un conjunto de consumidores, el término de la izquierda no es más que la función inversa de demanda del tipo θ; mientras que, en lado derecho, con los supuestos mencionados anteriormente, se encuentra la suma del costo marginal y un término positivo asociado a la renta informacional existente al considerar el problema de información asimétrica.

Analizando la condición de optimalidad (1.15) se deduce que a todos los tipos les corresponden diferentes asignaciones en el contrato óptimo. Por un lado, en vista que $\frac{1-F(\overline{\theta})}{f(\overline{\theta})} = 0$, al tipo de consumidor $\overline{\theta}$ le corresponde un contrato que satisface $u_q(q(\theta),\theta) = C_q(q(\theta))$, conocida como solución de *primer mejor*, pues se le asocia a un resultado de eficiencia al no presentarse distorción en el mercado. Por otro lado, para los tipos de consumidores $\theta < \overline{\theta}$ se cumple que $u_q(q(\theta),\theta) > C_q(q(\theta))$. Los niveles de precio y cantidad de equilibrio que se derivan de esta condición se conocen como *segundo mejor*.

Asimismo, recordemos que el tipo $\underline{\theta}$ obtiene renta informacional nula en el óptimo ($U(\underline{\theta}) = 0$). Con este hecho, y tomando en cuenta la condición CI local (1.7), los tipos $\theta > \underline{\theta}$ obtienen renta informacional positiva (utilidades mayores a cero) en el contrato óptimo, es decir,

$$U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} u_\theta(q^\star(\tau),\tau)d\tau > 0. \tag{1.16}$$

Por último, la tarifa optima no lineal asociada a $q^\star$ resulta de combinar las ecuaciones (1.4) y (1.16), obteniéndose

$$t^\star(\theta) = u(q^\star(\theta),\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} u_\theta(q^\star(\tau),\tau)d\tau.$$

Capítulo 2

Análisis convexo abstracto

El análisis convexo abstracto constituye una herramienta que permite extender muchos resultados de la teoría convexa clásica a contextos más generales. Así, esta teoría provee interpretaciones recientes de las nociones ya existentes y genera nuevos enlaces entre los objetos matemáticos anteriormente desconectados, analizando la teoría convexa (no convexa) tradicional con una estructura más elegante y unificada. Es un campo relativamente nuevo en la investigación matemática y en las últimas décadas su desarrollo se ha motivado principalmente por las aplicaciones en el área de optimización (Rubinov (2001) y Andramonov (2002)), aunque extiende su dominio en áreas como análisis funcional (Lopéz et al, 2005), teoría de la aproximación (Singer, 1999), desde luego el análisis no convexo (Nedić et al (2007) y Pallaschke y Rolewicz (1997)), entre otras.

En la primera sección del presente capítulo se introduce la noción de convexidad abstracta para funciones, analizando el rol del conjunto soporte y la envoltura generalizada, y concluyendo con el teorema de separación entre un conjunto convexo abstracto y un punto. Luego en las siguientes secciones se introducen otros dos conceptos que se extienden de forma natural: el subdiferencial y la conjugada. Ambos permiten estudiar características importantes y encontrar formas equivalentes de entender a las funciones convexas abstractas. En ese sentido, se demuestran las proposiciones que relacionan las principales ideas, destacando un resultado central como es el teorema de Fenchel-Moreau. Con todo ello, se establecerá el nuevo lenguaje para reescribir posterioremente el modelo económico del primer capítulo.

La estructura y el contenido de las correspondientes secciones están orientadas principalmente por el trabajo seminal de Alexander Rubinov[1] realizado en el año 2000, donde se sistematiza la convexidad abstracta[2] y sus aplicaciones en optimización global. No obstante, el desarrollo de las demostraciones y los ejemplos del presente capítulo exhiben un mayor nivel de detalle y explicitud en relación al texto de referencia.

En adelante supondremos que X es un conjunto arbitrario mientras no sea especificado. Asimismo, el conjunto de los números reales extendidos se denotará por $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} = [-\infty, +\infty]$ y un subconjunto particular de este vendrá dado por $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

2.1. Funciones convexas abstractas

La idea de convexidad abstracta[3] se origina con uno de los resultados fundamentales del análisis convexo: toda función convexa semicontinua inferior (sci) f es la envolvente superior de un conjunto de funciones afines (ver Proposición 3.1 en Ekeland y Téman (1999)). Muchas propiedades de las funciones convexas son obtenidas gracias a esta representación. No obstante, si bien la linealidad juega un

[1]Este autor es el más citado en la literatura sobre el tema, pero otros textos complementarios que se pueden revisar son los de Pallaschke y Rolewicz (1997), y Singer (1997).

[2]Históricamente el concepto de convexidad abstracta fue introducido inicialmente por Moreau en 1970 y posteriormente desarrollado por Dolecky y Kurcyusz (1978).

[3]En la literatura se pueden encontrar otras denominaciones para este concepto: convexidad generalizada (Basov, 2005), c-convexidad (Villani, 2009), Φ-convexidad (Pallaschke y Rolewics, 1997), h-convexidad (Carlier, 2001), b-convexidad (Figali et al., (2011)), y G-convexidad (Trudinger, 2014).

rol importante en dicho contexto, también representa su principal limitación, lo que en efecto ha estimulado el desarrollo de una teoría más universal, eliminando el supuesto de linealidad y dando paso a un conjunto más general de funciones que aproximan a f. Esta idea se formaliza en la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea H un conjunto no vacío de funciones $h : X \to \mathbb{R}$. Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se denomina *convexa abstracta con respecto a H* o *H-convexa*[4] si existe un conjunto $U \subset H$ tal que f es la envolvente superior de dicho conjunto. Es decir,

$$f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\} \quad \text{para todo } x \in X. \tag{2.1}$$

Hay dos objetos importantes en la definición: la operación supremo y el conjunto de funciones sobre el cual se toma el supremo. Respecto del análisis clásico, la teoría abstracta de la convexidad conserva la operación supremo, pero reemplaza el conjunto de funciones lineales afines por la familia arbitraria H. Esta última se encuentra conformada por objetos primitivos denominados funciones elementales. Son lo suficientemente simples, de hecho son por lo general más simples que f (Rolewicz, 1997). Por ejemplo, tenemos a los conjuntos canónicos, cuadráticos, cuasiconvexos, etc[5].

Así como la familia de funciones lineales y afines conduce a la teoría clásica de conjuntos y funciones convexas, la elección de cada clase de funciones elementales H conduce a la teoría convexa abstracta de conjuntos y funciones con respecto a dicha clase.

A continuación veremos algunos ejemplos que nos permitirán entender el tipo de objeto matemático que estamos estudiando.

[4] Si bien el término más adecuado es el de convexidad abstracta, en todo el documento se utiliza indistintamente los términos: convexidad abstracta, convexidad generalizada, y H-convexidad. No obstante, esta última denominación es adaptable dependiendo del símbolo que reciba la clase de funciones H como se verán en los capítulos posteriores.

[5] La noción de convexidad abstracta puede ser extendida más allá del uso de las funciones elementales.

Proposición 2.1. Sea $H = \{ax^2 + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ la familia de funciones elementales cuadráticas. Entonces las funciones $f(x) = x^4 - x^2$ y $g(x) = 1 - 2|x|$ son H-convexas.

Demostración. En primer lugar encontremos un subconjunto apropiado de H. En efecto,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - x^2 \\
&= x^4 - x^2 - ax^2 + ax^2 \\
&= x^4 - (a+1)x^2 + ax^2 \\
&= x^4 - (a+1)x^2 + \frac{(a+1)^2}{4} - \frac{(a+1)^2}{4} - b + ax^2 + b \\
&= \left(x^2 - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{(a+1)^2}{4} + b\right) + ax^2 + b \\
&\geq ax^2 + b \quad \left(\text{si } \frac{(a+1)^2}{4} + b \leq 0\right) \\
&= h(x).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, sea $U = \{ax^2 + b : \frac{(a+1)^2}{4} + b \leq 0\}$. Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar a, b tal que $ax_0^2 + b > f(x_0) - \varepsilon$, para x_0 fijo y arbitrario.

Evaluemos los puntos de intersección de f y h, esto es, $x_0^4 - x_0^2 = ax_0^2 + b$. Entonces $x_0^4 - (1+a)x_0^2 - b = 0$, cuya derivada es $4x_0^3 - 2x_0 = 2ax_0$. Despejando los parámetros tenemos que $a = 2x_0^2 - 1$ y $b = -x_0^4$. Con estos valores es fácil mostrar que se satisface la condición $\frac{(a+1)^2}{4} + b \leq 0$.

En el problema basta tomar la curva $h(x) = (2x_0^2 - 1)x^2 - (x_0^4 + \frac{\varepsilon}{2})$, la cual pertenece a U pues $\frac{(2x_0^2+1-1)^2}{4} + (-x_0^4 - \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{4x_0^4}{4} - x_0^4 - \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2} \leq 0$. Luego $h(x_0) = (2x_0^2 - 1)x_0^2 - x_0^4 - \frac{\varepsilon}{2} = x_0^4 - x_0^2 - \frac{\varepsilon}{2} > x_0^4 - x_0^2 - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$.

Analicemos ahora el caso de la función $g(x) = 1 - 2|x|$. Sea $a < 0$, con lo cual

$$\begin{aligned}
1 - 2|x| &= 1 - 2|x| - ax^2 - b + ax^2 - b \\
&= -ax^2 - 2|x| - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + 1 - b + ax^2 + b \\
&= \left(\sqrt{-a}|x| - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{1}{a} + 1 - b + ax^2 + b \\
&\geq ax^2 + b
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se satisfface si $b \leq 1 + \frac{1}{a}$. Por consiguiente, tomaremos el subconjunto $U \subset H$ como $U = \{ax^2 + b : a < 0, b \leq 1 + \frac{1}{a}\}$. Probaremos pues que $g(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$. En efecto, dado $x_0 > 0$ (para el caso $x_0 < 0$ el análisis es similar), para todo $h \in U$ se satisface que $h(x_0) = ax_0^2 + b \leq 1 - 2|x_0|$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $a = \frac{-1}{x_0}$ y $b = 1 - x_0 - \frac{a}{2}$, entonces $a < 0$ y $b = 1 - x_0 - \frac{a}{2} \leq 1 - x_0 = 1 + \frac{1}{-1/x_0}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x_0) &= \frac{-1}{x_0}x_0^2 + 1 - x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= 1 - 2x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> 1 - 2x_0 - \varepsilon \\
&= 1 - 2|x_0| - \varepsilon \\
&= g(x_0) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, existe $\tilde{h} \in U$ tal que $\tilde{h}(x_0) > g(x_0) - \varepsilon$, culminando la prueba. $\square$

Intuitivamente la convexidad abstracta de una función pasa por encontrar el conjunto soporte adecuado de f relativo a la familia H. Es decir, que esté conformado por funciones elementales que ingresan a lugares (secciones cóncavas, vacíos o abolladuras) donde los hiperplanos afines de soporte no podrían (ver Figura 2.1). De ese modo, es posible aproximar una extensa variedad de funciones no convexas.

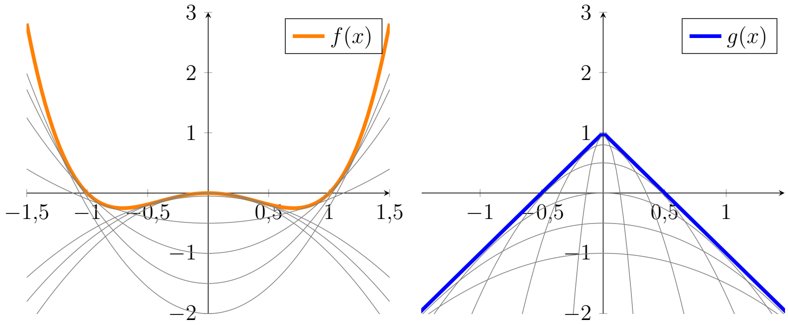

Figura 2.1: Funciones H-convexas f y g.

Proposición 2.2. Sea $X = \mathbb{R}$ y H un conjunto de funciones elementales de la forma $h_s(x) = \text{máx}\{0, |x - s| - 1\}$. Luego la función $f = 0$ no es H-convexa.

Demostración. Por contradicción, suponga que $f = 0$ es H-convexa. Entonces existe $U \subset H$ tal que $f(x) = \sup\{h_s(x) : h_s \in U\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere $h_{\hat{s}} \in U$ arbitrario, la cual podemos expresar como

$$h_{\hat{s}} = \begin{cases} |x - \hat{s}| - 1 & \text{si} \quad x \leq \hat{s} - 1 \vee x \geq \hat{s} + 1, \\ 0 & \text{si} \quad \hat{s} - 1 < x < \hat{s} + 1. \end{cases}$$

Sea $x_2 \notin [\hat{s}-1, \hat{s}+1]$, lo cual implica que $h_{\hat{s}}(x_2) > 0$. La contradicción es inmediata pues $f(x_2) = 0 = \sup\{h_s(x_2) : h_s \in U\} > 0$. Por lo tanto, f no es convexa abstracta con respecto a H. $\square$

Así también, los siguientes ejemplos describen funciones que no son convexas abstractas en relación a conjuntos específicos de funciones elementales.

- Sea $X = \mathbb{R}$. La función $f(x) = -e^{x^2} + \text{máx}\{0, 1 - |x|\}$ no es una función H-convexa, donde $H = \{-kg(d(x, x_0)) : x_0 \in X, k > 0\}$, $g(t) = e^{t^2}$ y $d(.)$ es la función distancia.
- Sea $X = \mathbb{R}$. La función $f(x) = x^3$ no es convexa abstracta con respecto a la clase H de todas las funciones cuadráticas.

- Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Consideremos a H la clase de funciones afines restringidas a X. Entonces

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ max\{0, \frac{1}{2} - y\} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

no es H-convexa.

Ahora bien, una forma de acumular información global de la función f es por medio del conjunto soporte relativo a la familia de funciones elementales H. Este objeto representa la versión abstracta de los conjuntos convexos cerrados.

Definición 2.2. El conjunto *soporte relativo a H* o *H-soporte* de la función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ está definido por

$$\text{supp}(f, H) := \{h \in H : h \leq f\}, \tag{2.2}$$

donde $h \leq f$ significa que $h(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$.

Cuando $\text{supp}(f,H) \neq \emptyset$ y $\text{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$ diremos que la función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es propia. Asimismo, por convención asumiremos que la función $f \equiv -\infty$ es H-convexa, donde $-\infty(x) = -\infty$ para todo $x \in X$. De este modo, $\text{supp}(f, H) = \emptyset$ si y solo si $f \equiv -\infty$.

Definición 2.3. La *envoltura H-convexa* de una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ está definida por

$$\text{co}_H f(x) := \sup\{h(x) : h \in \text{supp}(f, H)\} \text{ para todo } x \in X. \tag{2.3}$$

Esta función permite identificar de forma alternativa la convexidad abstracta de f, al ser la mayor función H-convexa mayorizada por f.

Proposición 2.3. Considere una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces f es H-convexa si y solo si $f(x) = \text{co}_H f(x)$.

Demostración. En efecto, si f es H-convexa, entonces existe $U \subset H$ tal que $f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$. Luego, para todo $h \in U$, $h(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $U \subset \text{supp}(f, H)$. Además, sea $h^\star \in U$ tal que $f(x) = h^\star(x)$, con $x \in X$. Se sigue que $h(x) \leq f(x)$ para todo $h \in \text{supp}(f, H)$. Por consiguiente, $f(x) = \sup\{h(x) : h \in \text{supp}(f, H)\}$. Para la suficiencia, existe $U = \text{supp}(f, H) \subset H$ tal que $f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$, satisfaciendo así la convexidad abstracta de$f$. $\square$

Ahora definamos la noción de convexidad abstracta para conjuntos. Diremos que un subconjunto U de H es convexo abstracto si coincide con el soporte de la función H-convexa bajo consideración.

Definición 2.4. Un conjunto $U \subset H$ se denomina convexo abstracto con respecto a H o (H, X)-convexo si existe una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $U = \text{supp}(f, H)$.

Note que el conjunto vacío $\emptyset \subset H$ es (H, X)-convexo, pues $\emptyset = \text{supp}(-\infty, H)$ por convención. Asimismo, un conjunto (H, X)-convexo U es propio si $U \neq \emptyset$ y $U \neq H$.

Definición 2.5. La intersección de todos los conjuntos (H, X)-convexos que contienen a $U \subset H$ recibe el nombre de envoltura convexa abstracta o envoltura (H, X)-convexa de U, y se denota por $\text{co}_{H,X}U$ u oportunamente $\text{co}_H U$.

Se debe entender que $\text{co}_H U$ es el menor conjunto H-convexo que contiene a $U \subset H$. Además, como en el caso de funciones, si U es un conjunto (H, X)-convexo entonces $U =\text{co}_H U$.

El siguiente lema es una reformulación de la definición de conjuntos convexos abstractos en términos de la propiedad de separación estudiada en el enfoque clásico. Es decir, $U \subset H$ es convexo abstracto con respecto a H si y solo si cada punto que no pertenece a U puede ser separado (no linealmente) de dicho conjunto por una función elemental en H.

Lema 2.1. Sea U un subconjunto propio no vacío de H. Entonces U es (H, X)-convexo si y solo si para cada $h' \in H$, con $h' \notin U$, existe $x \in X$ tal que $h'(x) > \sup\{h(x) : h \in U\}$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos U un conjunto (H, X)-convexo. Es decir, existe f tal que $U = \operatorname{supp}(f, H)$. Sea $f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$, con lo cual $h(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, para $h' \in H \setminus U$ existe un punto $x \in X$ tal que $h'(x) > f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$.

($\Longleftarrow$) Por hipótesis existe $x \in X$ tal que $h'(x) > f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$ para todo $h' \in H \setminus U$. Esto implica que $h' \notin \operatorname{supp}(f, H)$. Entonces, se deduce de inmediato que $\operatorname{supp}(f, H) \subset U$. Como la inclusión $U \subset \operatorname{supp}(f, H)$ es trivial, $U = \operatorname{supp}(f, H)$. Por consiguiente, U es (H, X)-convexo. □

Observación 2.1. En la teoría abstracta, a diferencia del enfoque clásico, la separación entre un punto y un conjunto no implica la propiedad de separación entre dos conjuntos.

Como se ha indicado, la teoría convexa abstracta con diferentes familias H agrupan a una amplia clase de funciones. En lo que resta del capítulo consideraremos, sin pérdida de generalidad, como funciones elementales a las versiones abstractas de las funciones lineales y afines del análisis convexo clásico.

En ese sentido, sea L un conjunto de funciones con dominio X y codominio $\mathbb{R}$. Para cada elemento $l \in L$ definamos su desplazamiento vertical como $h = (l, c) := l + c$, donde $c \in \mathbb{R}$ es constante. La función h es llamada afín abstracta con respecto a L, y a este último lo denominaremos conjunto de *funciones lineales abstractas* si $h \notin L$ para todo $l \in L$ y $c \neq 0$. Asimismo, al conjunto de *funciones afines abstractas* h lo denotaremos por H_L. Si L es el conjunto de funciones lineales abstractas, entonces $(l, c) = (l', c')$ si y solo si $l = l'$, y $c = c'$.

2.2. Subdiferencial abstracto

La subdiferenciabilidad de funciones es una de las herramientas analíticas claves en el análisis convexo. Esta puede ser naturalmente extendida en el entorno de las funciones convexas abstractas.

Definición 2.6. Una función $l \in L$ se llama *subgradiente abstracta* o *L-subgradiente* de una función propia H_L-convexa $f : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ en el punto x_0 si $f(x) \geq l(x) - (l(x_0) - f(x_0))$ para todo $x \in X$. Al conjunto de todos los L-subgradientes de f en el punto x_0 se denomina *subdiferencial abstracto* o *L-subdiferencial* de f en el punto x_0, el cual denotamos por $\partial_L f(x_0)$.

De la definición se deduce que el subdiferencial abstracto es el mapeo $\partial_L f : X \rightrightarrows L$. Asimismo, si $\partial_L f(x_0) \neq \emptyset$ entonces $x_0 \in \mathrm{dom} f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$.

Observación 2.2. Se satisface que $l \in \partial_L f(x_0)$ si y solo si $h \in \mathrm{supp}(f, H_L)$. En efecto, basta definir $h(x) := l(x) - (l(x_0) - f(x_0)) = l(x) - c$. Así, $h \in H_L$ y $f(x) \geq l(x) - (l(x_0) - f(x_0))$.

Un resultado bastante conocido en el análisis convexo muestra que una función es convexa si y solo si es subdiferenciable en todo punto (ver Proposición 5.2 en Ekeland y Téman (1987)). De igual manera, la siguiente proposición ofrece una caracterización alternativa de las funciones H_L-convexas a través de la subdiferenciabilidad abstracta.

Proposición 2.4. Sea $f : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$. Entonces el L-subdiferencial $\partial_L f(x_0)$ es no vacío si y solo si $f(x_0) = \max\{h(x_0) : h \in \mathrm{supp}(f, H_L)\}$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Como $\partial_L f(x_0) \neq \emptyset$, sea $l \in \partial_L f(x_0)$ de modo que formemos $h_l(x) = l(x) - (l(x_0) - f(x_0))$, la cual pertenece a H_L. Por definición de L-subgradiente $f(x) \geq l(x) - (l(x_0) - f(x_0)) = h_l(x)$ para todo $x \in X$, y $f(x_0) = h_l(x_0)$ cuando $x = x_0$, obteniendo la implicancia deseada.

($\Longleftarrow$) Recíprocamente, sea una función $h \in \operatorname{supp}(f, H_L)$ tal que $f(x_0) = h(x_0)$ y $f(x) \geq h(x)$ para todo $x \in X$. Elijamos $h(x) = l(x) - c$, donde $l \in L$ y $c \in \mathbb{R}$. Cuando $x = x_0$ resulta que $c = l(x_0) - h(x_0) = l(x_0) - f(x_0)$. Luego la función elegida satisface que $f(x) \geq h(x) = l(x) - c = l(x) - (l(x_0) - f(x_0))$, es decir, $l \in \partial_L f(x_0)$. □

Existe una íntima conexión entre el subdiferencial abstracto de la función f en el punto x_0 y el conjunto $\partial^\star_{H_L} f(x_0) := \{h \in \operatorname{supp}(f, H_L) : h(x_0) = f(x_0)\}$.

Proposición 2.5. Sea $f : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ una función H_L-convexa, $x_0 \in X$ y $l \in L$. Consideremos la función afín abstracta $h(x) = l(x) - c$ para todo $x \in X$, donde $c = l(x_0) - f(x_0)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $l \in \partial_L f(x_0)$;

(ii) $h \in \partial^\star_{H_L} f(x_0)$.

Demostración. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Si $l \in \partial_L f(x_0)$ entonces $h \in \operatorname{supp}(f, H_L)$, según la Observación 2.2. Asimismo, del enunciado $f(x_0) = h(x_0)$ cuando $x = x_0$. Por lo tanto, $h \in \partial^\star_{H_L} f(x_0)$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Considere $h \in \partial^\star_{H_L} f(x_0)$. Por definición $h \in \operatorname{supp}(f, H_L)$ y en efecto $f(x) \geq h(x) = l(x) - c$ para todo $x \in X$. El valor de la constante es $c = l(x_0) - f(x_0)$, por dato del enunciado. Así, obtenemos que $f(x) \geq l(x) - (l(x_0) - f(x_0))$, y en consecuencia $l \in \partial_L f(x_0)$. □

El subdiferencial abstracto se ha definido solo para funciones H_L-convexas. Sin embargo, tal definición es también válida para cualquier función $g : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$. Así pues, el L-subdiferencial de g en el punto $x_0 \in X$ viene dado por

$$\partial_L g(x_0) = \{l \in L : g(x) \geq l(x) - (l(x_0) - g(x_0)) \text{ para todo } x \in X\}.$$

La siguiente proposición muestra la relación entre los subdiferenciales abstractos de una función arbitraria g y su correspondiente envoltura H_L-convexa. Por lo tanto, el estudio del L-subdiferencial de una función arbitraria se reduce al caso de una función convexa abstracta.

Proposición 2.6. Sea $f : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ una función H_L-convexa, $g : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$una función arbitraria, y $f = \text{co}_{H_L} g$. Suponga que $\partial_L f(x_0) \neq \emptyset$ para todo $x_0 \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $g(x_0) = f(x_0)$;

(b) $\partial_L g(x_0) = \partial_L f(x_0)$;

(c) $\partial_L g(x_0) \neq \emptyset$.

Demostración. $(a) \implies (b)$. Como $\partial_L f(x_0) \neq \emptyset$, entonces existe $l \in \partial_L f(x_0)$ tal que $l(x) - l(x_0) \leq f(x) - f(x_0)$ para todo $x \in X$. Del enunciado sabemos que $f = \text{co}_{H_L} g$, y siendo $\text{co}_{H_L} g$ la mayor función H_L-convexa mayorizada por g, se cumple que $f = \text{co}_{H_L} g \leq g$. Con esto y la hipótesis en (a) se satisfacen las desigualdades $l(x) - l(x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0)$. Entonces $l \in \partial_L g(x_0)$, y con esto $\partial_L f(x_0) \subset \partial_L g(x_0)$. Para la otra inclusión, sea $l' \in \partial_L g(x_0)$, esto es, $g(x) \geq l'(x) - (l'(x_0) - g(x_0)) = h'(x)$ para todo $x \in X$. En consecuencia, $h' \in \text{supp}(g, H_L)$, donde $h' \in H_L$ y $c = l'(x_0) - g(x_0)$. Como $f(x) = \text{co}_{H_L} g(x)$ y $g(x_0) = f(x_0)$ son datos del problema, se sigue que $f(x) = \sup\{h(x) : h \in \text{supp}(g, H)\} \geq h'(x) = l(x) - (l'(x_0) - g(x_0)) = l(x) - (l'(x_0) - f(x_0))$ para todo $x \in X$. Luego $l' \in \partial_L f(x_0)$, y en efecto $\partial_L g(x_0) \subset \partial_L f(x_0)$.

$(b) \implies (c)$. La prueba es trivial.

$(c) \implies (a)$. Consideremos $l \in \partial_L g(x_0)$, es decir, $g(x) \geq l(x) - (l(x_0) - g(x_0))$ para todo $x \in X$. Asimismo, sea nuevamente la función $h(x) = l(x) - c$, donde $c = l(x_0) - g(x_0)$. Todo lo anterior implica que $h \in H_L$ y $h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Ahora bien, como $f = \text{co}_{H_L} g$, entonces $f(x) = \sup\{h(x) : h \in \text{supp}(g, H_L)\} \geq h(x)$. En vista que $h(x_0) = g(x_0)$ cuando $x = x_0$, la desigualdad $f(x_0) \geq g(x_0)$ es una implicancia válida. Por su parte, $f(x)=\text{co}_{H_L}g(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, y en particular $f(x_0) \leq g(x_0)$. Por lo tanto, $f(x_0) = g(x_0)$. □

2.3. Conjugada abstracta

En esta sección se estudia la convexidad abstracta de funciones a través de su íntima relación con la teoría de conjugación desarrollada por Moreau, extendiendo de manera natural los resultados de la conjugación clásica introducida por Fenchel (Rockafellar y Wets, 1998).

Es apropiado entender ahora a X y L como conjuntos de funciones elementales, donde $l \in L$ es una función definida en X, y $x \in X$ una función definida en L. Similarmente, H_L y H_X denotarán a los conjuntos de funciones afines abstractas definidas en X y L, de forma respectiva. A veces se representarán indistintamente las funciones $l(.)$ y $x(.)$ como $\langle l|x\rangle$, donde $\langle .|.\rangle : L \times X \to \mathbb{R}$ denota al operador de conjugada.

Para el resto del capítulo designaremos a F_X como la unión de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ y la función $-\infty := -\infty(x) = -\infty$ para todo $x \in X$. Así también, F_L adquiere un significado análogo.

Definición 2.7. Consideremos $f \in F_X$. Entonces, la función $f^\star$ definida por

$$f^\star(l) = \sup_{x \in X}\{l(x) - f(x)\} \text{ para todo } l \in L$$

es llamada *L-conjugada* para f o *conjugada (abstracta) de Fenchel-Moreau* para f con respecto a L.

Observe que $f^\star = +\infty$ y $f^\star = -\infty$ son las respectivas conjugadas abstractas de $f = -\infty$ y $f = +\infty$. Asimismo, si f toma valores en $\mathbb{R}_{+\infty}$ y $f \neq +\infty$, entonces $f^\star$ toma valores en $\mathbb{R}_{+\infty}$. De esta manera, $f^\star \in F_L$ para todo $f \in F_X$.

Las siguientes propiedades de las funciones conjugadas emergen directamente de la definición.

(a) Desigualdad de Young: si $f \in F_X$, entonces

$$f(x) + f^\star(l) \geq \langle l|x\rangle \quad \text{para todo } l \in L, x \in X; \tag{2.4}$$

(b) para $f_1, f_2 \in F_L$ se cumple que

$$f_1 \geq f_2 \implies f_1^\star \leq f_2^\star; \tag{2.5}$$

(c) sea $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia arbitraria de funciones acotadas inferiormente y $f(x) = \inf\limits_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$. Entonces $f^\star(l) = \sup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha^\star(l)$ para todo $l \in L$.

Proposición 2.7. Sea $f \in F_X$. Entonces la función $f^\star$ es convexa abstracta con respecto a H_X.

Demostración. Consideremos la función $f \in F_X$ con $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$. Escojamos el punto $x \in \mathrm{dom} f$ y la función $y_x : L \to \mathbb{R}$ definida por $y_x(l) := \langle l|x\rangle - f(x) \equiv x(l) - f(x)$. Claramente $y_x \in H_X$, donde la constante es $c = f(x)$. Con esta familia de funciones elementales formemos el conjunto $U = \{y_x : x \in \mathrm{dom} f\}$. Luego, para todo $l \in L$, $f^\star(l) = \sup\limits_{x\in X}\{\langle l|x\rangle - f(x)\} = \sup\limits_{x\in \mathrm{dom} f}\{x(l) - f(x)\} = \sup\limits_{\substack{x\in \mathrm{dom} f\\ y_x \in U}} y_x(l)$. Por lo tanto, $f^\star$ es convexa abstracta con respecto a H_X. $\square$

De acuerdo a la Definición 2.7 podemos pensar en la conjugada de Fenchel-Moreau aplicada a la función $f^\star$. En ese caso, como $f^\star \in F_L$ nos estaríamos refiriendo a la X-conjugada de la función $f^\star$, la misma que denotaremos por $f^{\star\star}$.

Definición 2.8. La función $f^{\star\star} := (f^\star)^\star$ es llamada *segunda conjugada* o *bicon-*

jugada de Fenchel-Moreau para f, y está definida por

$$f^{\star\star}(x) = \sup_{l\in L}\{\langle l|x\rangle - f^{\star}(l)\} \text{ para todo } x \in X.$$

Proposición 2.8. Si $f \in F_X$, entonces $f \geq f^{\star\star}$.

Demostración. Reordenando la desigualdad de Young (2.4) para $f \in F_X$, tenemos que $f(x) \geq \langle l|x\rangle - f^{\star}(l)$ para todo $l \in L$ y $x \in X$. Aplicando supremo en ambos lados, con l variable y x fijo, obtenemos que $f(x) \geq \sup_{l\in L}\{\langle l|x\rangle - f^{\star}(l)\} = f^{\star\star}(x)$. □

Teorema 2.1. (Fenchel-Moreau) Suponga $f \in F_X$. Entonces $f = f^{\star\star}$ si y solo si f es una función H_L-convexa.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Por hipótesis $f = f^{\star\star} = (f^{\star})^{\star}$. Utilizando la Proposición 2.7 para la función $f^{\star} \in F_L$ (en lugar de f) podemos concluir que $f^{\star\star} \in F_X$ es una función H_L-convexa, y por lo tanto f también lo es.

($\Longleftarrow$) Asuma ahora que f es H_L-convexa. Por definición de convexidad abstracta existe $U \subset H_L$ tal que $f(x) = \sup\{\langle l|x\rangle - c : (l,c) \in U\} \geq \langle l|x\rangle - c$ para todo $x \in X$. Entonces $c \geq \langle l|x\rangle - f(x)$ para todo $x \in X$. Al tomar supremo a dicha desigualdad, $c \geq \sup_{x\in X}\{\langle l|x\rangle - f(x)\} = f^{\star}(l)$. Por otro lado, $f^{\star\star}(x) = \sup_{l\in L}\{\langle l|x\rangle - f^{\star}(l)\} \geq \langle l|x\rangle - f^{\star}(l) \geq \langle l|x\rangle - c = h(x)$. Es decir, $f^{\star\star}(x) \geq h(x)$ para todo $h \in U$. Luego $f^{\star\star}(x) \geq \sup\{h(x) : h \in U\} = f(x)$. La otra desigualdad se consigue gracias a la Proposición 2.8, pues si $f \in F_X$ entonces $f^{\star\star}(x) \leq f(x)$. Por lo tanto, $f^{\star\star}(x) = f(x)$. □

En las secciones previas denotamos por $\mathrm{co}_{H_L} f$ a la envoltura H_L-convexa de una función f. Por definición, para $f \in F_X$ tenemos que

$$\mathrm{co}_{H_L} f(x) = \sup\{\langle l|x\rangle - c : (l,c) \in \mathrm{supp}(f, H_L)\}, \text{ para todo } x \in X.$$

Ahora bien, si otra función g es H_L-convexa y $g \leq f$, entonces $g \leq \mathrm{co}_{H_L} f$ y $f =\mathrm{co}_{H_L} f$ si y solo si f es una función H_L-convexa. La Proposición 2.9 muestra que la biconjugada abstracta de f, asumiendo el rol de g, coincide con su respectiva envoltura H_L-convexa.

Proposición 2.9. Sea $f \in F_X$. Entonces $f^{\star\star} =\mathrm{co}_{H_L} f$.

Demostración. Para comenzar, la biconjugada $f^{\star\star}$ es una función H_L-convexa (Proposición 2.7) que satisface la desigualdad $f^{\star\star} \leq f$ (Proposición 2.8). Asimismo, por definición de envoltura convexa abstracta $f^{\star\star} \leq \mathrm{co}_{H_L} f \leq f$, pues $\mathrm{co}_{H_L} f$ es la mayor función H_L-convexa mayorizada por f. Esta última desigualdad implica que $\mathrm{co}_{H_L} f^{\star} \geq f^{\star}$, según la propiedad (b) de la conjugada abstracta que aplicada nuevamente nos da $\mathrm{co}_{H_L} f^{\star\star} \leq f^{\star\star}$. Para finalizar, siendo $\mathrm{co}_{H_L} f$ una función H_L-convexa, el teorema de Fenchel-Moreau señala que $\mathrm{co}_{H_L} f =\mathrm{co}_{H_L} f^{\star\star}$, y en consecuencia $\mathrm{co}_{H_L} f \leq f^{\star\star}$. Juntando las desigualdades previas concluimos con la demostración. $\square$

La Proposición 2.10 postula la equivalencia entre la conjugada y el subdiferencial de una función en el entorno de la convexidad abstracta.

Proposición 2.10. Sean $l_0 \in L$ y $x_0 \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\langle l_0 | x_0 \rangle = f(x_0) + f^{\star}(l_0)$

(ii) $l_0 \in \partial_L f(x_0)$.

Demostración. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Por un lado, $f(x) + f^{\star}(l_0) \geq \langle l_0, x \rangle$ para todo $x \in X$ sucede gracias a la desigualdad de Young. Por otro lado, $f^{\star}(l_0) = \langle l_0 | x_0 \rangle - f(x_0)$ por hipótesis. Juntamos ambas relaciones y obtenemos que $f(x) - f(x_0) \geq \langle l_0, x \rangle - \langle l_0, x_0 \rangle$ para todo $x \in X$, es decir, $l_0 \in \partial_L f(x_0)$.

$(ii) \implies (i)$ Suponga que $l_0 \in \partial_L f(x_0)$. Reordenamos la definición 2.6 de L-subdiferencial para llegar a $\langle l_0, x_0\rangle - f(x_0) \geq \langle l_0, x\rangle - f(x)$. Tomando supremo en ambos lados conseguimos que $\langle l_0, x_0\rangle - f(x_0) \geq \sup_{x\in X}\{\langle l_0, x\rangle - f(x)\} = f^\star(l_0)$. Luego $\langle l_0, x_0\rangle \geq f(x_0) + f^\star(l_0)$. Además, por la desigualdad de Young $f(x_0) + f^\star(l_0) \geq \langle l_0, x_0\rangle$. Juntando las desigualdades previas se consigue la implicancia (i). □

Finalizamos el capítulo realizando los cálculos del L-subgradiente y la L-conjugada para las funciones $f(x) = x^4 - x^2$ y $g(x) = 1 - 2|x|$ de la primera sección. En este caso, el conjunto de funciones lineales abstractas es $L = \{ax^2 : a \in \mathbb{R}\}$.

En efecto, la conjugada abstracta de f viene dada por $f^\star(l) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ a\in\mathbb{R}}}\{ax^2 - (x^4 - x^2)\}$, donde $l(x) = ax^2$. Si $a < -1$ el supremo se alcanza con $x = 0$; mientras que si $a \geq -1$ el supremo se alcanza con $x^2 = \frac{1+a}{2}$. Por lo tanto,

$$f^\star(l) = \begin{cases} \frac{(1+a)^2}{4} & \text{si } a \geq -1, \\ 0 & \text{si } a < -1 \end{cases}$$

En relación a la subdiferenciabilidad abstracta, valiéndonos de la Proposición 2.10 se tiene que dados $x, a \in \mathbb{R}$, $l \in \partial_L f(x)$ si y solo si $f^\star(l) + f(x) = l(x)$, es decir $f^\star(l) = ax^2 - (x^4 - x^2) = (1 + a)x^2 - x^4$. Evaluando en $x = 0$ se obtiene que $f^\star(l) = 0$, y según el cálculo de la conjugada se cumple solo cuando $a < -1$. En efecto, $\partial_L f(0) = \{l \in L : a < -1\}$. Para $x \neq 0$, $f^\star(l) = 0$ solo se satisface con $a \geq 1$, pues si $a \leq 1$ resulta que $0 = (1 + a)x^2 - x^4$ no es posible. Entonces $\frac{(1+a)^2}{4} = (1 + a)x^2 - x^4$ será válida cuando $a = 2x^2 - 1$. Por lo tanto,

$$\partial_L f(x) = \begin{cases} \{l \in L : a < -1\} & \text{si } x = 0, \\ \{l \in L : a = 2x^2 - 1\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Similarmente, la L-conjugada y el L-subdiferencial de la función $g(x) = 1 - 2|x|$

vienen dados por

$$g^\star(l) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \geq 0, \\ -1 - \frac{1}{a} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\partial_L g(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x = 0, \\ \{l \in L : a = \frac{-1}{|x|}\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Capítulo 3

Modelo general Principal-Agente con selección adversa

Este capítulo consiste en dotar de rigor matemático y generalizar el modelo Principal-Agente del primer capítulo, incorporando los elementos básicos de la convexidad abstracta. A partir de los trabajos de Carlier (2001) y McCann y Zhang (2018) se estudia el problema de selección adversa cuando el conjunto de información privada es de una dimensión y las funciones de utilidad son no lineales en todos sus argumentos. Se verifica que el problema es equivalente a uno con restricción de convexidad abstracta, mostramos que la solución existe para el problema equivalente, y adaptamos las condiciones necesarias y suficientes establecidas por McCann y Zhang para la concavidad del programa.

3.1. Preliminares

Comencemos con la notación de los objetos matemáticos relevantes que se emplearán durante todo el capítulo.

- Los símbolos Θ, Q y P denotan, respectivamente, el conjunto de tipos de agentes (información), el conjunto de decisiones (consumo, producción, etc) y el dominio de las transferencias monetarias (tarifas, salarios, impuestos, etc).

- Las funciones de utilidad de los agentes y el principal vienen dadas por $u : \Theta \times Q \times P \to \mathbb{R}$ y $\pi : \Theta \times Q \times P \to \mathbb{R}$, respectivamente. Asimismo, la función de utilidad de reserva de los agentes es $U_R : \Theta \to \mathbb{R}$, donde $U_R := u(\theta, q_R, p_R)$ con q_R y p_R exógenos.

- El espacio de medida de probabilidad es $(\Theta, \mathcal{B}, \mu)$, donde $\mathcal{B}$ es un conjunto de Borel. Luego, $\mu : \Theta \to \mathbb{R}_+$ describe la distribución de los tipos de agentes.

- Adicionalmente, λ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $cl(B)$ la clausura de un conjunto arbitrario B, y $C^k(B)$ el espacio de funciones continuas k diferenciables con dominio en B, donde $k = 0, 1, 2 \ldots$

Las primeras definiciones se establecen gracias al *principio de revelación* descrito en el Capítulo 1, ya que podemos aplicarlo también al caso general.

Definición 3.1. Un *contrato* es una función $(q, p) : \Theta \to cl(Q \times P)$. Luego, (q, p) satisface la *Compatibilidad de Incentivos* (**CI**) si y solo si $u(\theta, q(\theta), p(\theta)) \geq u(\theta, q(\theta'), p(\theta'))$ para todo $\theta, \theta' \in \Theta$. Asimismo, (q, p) satisface la *Racionalidad Individual* (**RI**) si y solo si $u(\theta, q(\theta), p(\theta)) \geq U_R(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.

Los supuestos del modelo serán enunciados en función a los requerimientos de las proposiciones.

Supuesto S1. La función de utilidad u pertenece al conjunto $C^1(cl(\Theta \times Q \times P))$, donde Θ y Q son subconjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}$, y $P = (\underline{p}, \overline{p}]$ con $-\infty < \underline{p} \leq \overline{p} \leq +\infty$.

Cuando la transferencia tome el valor $\overline{p} = +\infty$, la decisión correspondiente es eliminada por el principal y será por tanto infactible para los agentes.

La no linealidad de u, especialmente sobre p, es un aspecto ínfimamente considerado en la documentación.[1] Al respecto, el trabajo de Trudinger (2014), en el contexto del transporte óptimo, ha sido gravitante para la incorporación de preferencias generales,[2] yendo más allá de las funciones afines en transferencia (cuasilineales). Precisamente, la convexidad abstracta contribuyó a esta generalización.

Las siguientes dos definiciones describen las ideas abstractas de convexidad y subdiferenciablidad de funciones en el marco del modelo general P-A. En esa línea, sean los conjuntos Θ, Q, y P descritos previamente. Consideremos a las funciones $u(\cdot, q, p)$ definidas en Θ, donde $(q, p) \in cl(Q \times P)$. Luego, bajo el Supuesto S1, el conjunto de funciones elementales viene definido por

$$\mathbb{H} := \{u(\cdot, q, p) : u \in C^1(cl(\Theta \times Q \times P))\}. \tag{3.1}$$

En esta definición se entiende que los argumentos q y p están fijados o se pueden reemplazar como funciones de θ. Con este detalle reformularemos la Definición 2.1 sobre convexidad abstracta.

Definición 3.2. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de funciones elementales definido en la expresión (3.1). Una función $U : \Theta \to \mathbb{R}$ es convexa abstracta con respecto a $\mathbb{H}$ o $\mathbb{H}$-convexa si existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{H}$, tal que

$$U(\theta) = \sup\{u(\theta, q, p) : u \in \mathbb{U}\} \text{ para todo } \theta \in \Theta. \tag{3.2}$$

La no linealidad de las preferencias con respecto a p requiere de una relación inversa que es invariante en toda documentación. Es decir, cuando un agente realiza una mayor transferencia por la decisión tomada, esta le debe reportar

[1] No obstante, se pueden explorar los trabajos de Monteiro y Page (1996), Basov (2002), McCann y Zhang (2018), Nöldeke y Samuelson (2018), y Carlier y Zhang (2020). De estos autores solo Basov, y McCann y Zhang trabajan en el entorno de la convexidad abstracta.

[2] En su trabajo, y otros también relacionados a la teoría del transporte, la función de utilidad recibe el nombre más general de *función generadora o generatriz*, ver por ejemplo Penot (2010).

menor utilidad.

Supuesto S2. La función de utilidad u es estrictamente decreciente en p, para todo $(\theta, q) \in cl(\Theta \times Q)$.

Una implicancia de S2 es que podemos obtener información de los agentes a través de otro objeto matemático que preserva propiedades importantes de u. En efecto, sea $u(\theta, q, cl(P))$ la imagen de u para θ y q fijos, y p variable. Luego, para todo $(\theta, q) \in cl(\Theta \times Q)$ y $u \in u(\theta, q, cl(P))$ existe un único valor $p \in cl(P)$ tal que $u = u(\theta, q, p)$, donde hemos empleado el símbolo u para valor y función al mismo tiempo. Con esto se define la función u^{-1} como la inversa de u con respecto a la tercera variable. Entonces, $u^{-1}(\theta, q, u)$ representa la transferencia que realiza el agente θ por la decisión q cuando obtiene un nivel de utilidad u. Por propiedad básica de la función inversa (bajo S2) se debe cumplir que $p = u^{-1}(\theta, q, u(\theta, q, p))$.

Con los Supuestos S1 y S2 ya podemos adaptar y reescribir la Definición 2.6 de subdiferencial abstracto de la función $\mathbb{H}$-convexa U. En efecto, sea $u(., q, p) \in \mathbb{H}$ el subgradiente abstracto de U en el punto $\theta_0 \in \Theta$, con q y p fijos. Entonces $U(\theta) \geq u(\theta, q, p) - u(\theta_0, q, p) + U(\theta_0)$ para todo $\theta \in \Theta$. Consideremos convenientemente $U(\theta_0) = u(\theta_0, q, p)$, esto es, $U(\theta_0) \in u(\theta_0, q, cl(P))$. Por propiedad de la inversa existe un único $p = u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0))$. En consecuencia

$$\begin{aligned} U(\theta) &\geq u(\theta, q, u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0))) - u(\theta_0, q, p) + u(\theta_0, q, p) \\ &= u(\theta, q, u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0))). \end{aligned}$$

Definición 3.3. El subdiferencial abstracto relativo a $\mathbb{H}$ o $\mathbb{H}$-subdiferencial de una función $\mathbb{H}$-convexa $U : \Theta \to \mathbb{R}$, en el punto $\theta_0 \in \Theta$, es el conjunto definido por

$$\partial^{\mathbb{H}} U(\theta_0) := \{q \in cl(Q) : U(\theta) \geq u(\theta, q, u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0))), \text{ para todo } \theta \in \Theta\}. \tag{3.3}$$

Así, una función $\mathbb{H}$-convexa U es $\mathbb{H}$-subdiferenciable en el punto θ_0 si y solo si $\partial^{\mathbb{H}} U(\theta_0) \neq \emptyset$.

Con las Definiciones 3.2 y 3.3, y los Supuestos S1 y S2 ya podemos replantear la relación entre subdiferenciabilidad y convexidad de funciones en el sentido abstracto, enunciada en el Capítulo 2.

Lema 3.1. Consideremos los Supuestos S1 y S2. Una función $U : \Theta \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{H}$-convexa si y solo si es $\mathbb{H}$-subdiferenciable en todo punto.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea U una función $\mathbb{H}$-convexa. Es decir, dados q y p, existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{H}$ tal que $U(\theta) = \sup\{u(\theta, q, p) : u \in \mathbb{U}\} \geq u(\theta, q, p)$, para todo $\theta \in \Theta$. Además, sea $U(\theta_0) = u(\theta_0, q, p)$. Luego, el Supuesto S2 implica que $p = u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0))$. Introduciendo esta transferencia en la desigualdad anterior obtenemos $U(\theta) \geq u(\theta, q, u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0)))$ para todo $\theta \in \Theta$, con lo cual $q \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta_0)$ para θ_0 arbitrario. Entonces $\partial^{\mathbb{H}} U(\theta_0) \neq \emptyset$, y por lo tanto U es $\mathbb{H}$-subdiferenciable.

($\Longleftarrow$) Por hipótesis U es $\mathbb{H}$-subdiferenciable en todo punto, es decir, existe $q \in cl(Q)$ tal que $U(\theta) \geq u(\theta, q, u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0)))$ para todo $\theta \in \Theta$. Definamos $p := u^{-1}(\theta_0, q, U(\theta_0))$, con lo cual $U(\theta_0) = u(\theta_0, q, p)$ debido a la implicancia de S2. Se sigue que $U(\theta) \geq u(\theta, q, p)$. Entonces, existe $\mathbb{U}$:=supp$(U, \mathbb{H})$ conformado por funciones del tipo $u(., q, p)$ tal que tal $U(\theta) = \sup\{u(\theta, q, p) : u \in \mathbb{U}\}$, para todo $\theta \in \Theta$, consiguiendo la $\mathbb{H}$-convexidad de U. □

Antes de incorporar la teoría abstracta de la convexidad en el modelo es indispensable definir un nuevo objeto introducido por Brenier (1991), quién estudió el problema de transporte óptimo para costos cuadráticos. Expresado en el marco Principal-Agente, el autor muestra que en lugar de modelar y conocer un contrato (q, p) es suficiente enfocarse en una sola función denominada *potencial*[3], con algunas propiedades relativas a la convexidad ($\mathbb{H}$-convexidad en nuestro caso),

[3]Ekeland evidenció la función potencial por primera vez en la tesis doctoral de Rochet del año 1986, quién a su vez atribuye el término a R. T. Rockafellar.

y donde el subdiferencial abstracto de dicha función será el conjunto que albergaría las decisiones óptimas. La introducción del potencial permitirá simplificar considerablemente el desarrollo matemático.

Definición 3.4. El *potencial* asociado al contrato $(q,p) : \Theta \to cl(Q \times P)$ es la función $U(q,p) : \Theta \to \mathbb{R}$ definida por

$$U(q,p)(\theta) := u(\theta, q(\theta), p(\theta)), \text{ para todo } \theta \in \Theta. \tag{3.4}$$

Para las demostraciones facilitaremos la lectura haciendo que $U(q,p)(\theta) = U(\theta)$.

Un primer resultado importante expresa la compatibilidad de incentivos en el lenguaje de la convexidad abstracta.

Proposición 3.1. Consideremos los Supuestos S1 y S2. El contrato (q,p) satisface la Compatibilidad de Incentivos si y solo si el potencial $U(q,p)$ asociado es una función $\mathbb{H}$-convexa y $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(q,p)(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea (q,p) un contrato compatible en incentivos, es decir, $u(\theta, q(\theta), p(\theta)) \geq u(\theta, q(\theta'), p(\theta'))$ para todo $\theta, \theta' \in \Theta$. Asimismo, por definición de potencial $U(\theta) = u(\theta, q(\theta), p(\theta))$. Entonces $U(\theta) \geq u(\theta, q(\theta'), p(\theta'))$, y en efecto $u(., q(\theta'), p(\theta')) \in \operatorname{supp}(U, \mathbb{H})$, con $q(\theta') \in cl(Q)$ y $p(\theta') \in cl(P)$. Así pues existe $\mathbb{U} := \operatorname{supp}(U, \mathbb{H})$ tal que $U(\theta) = \sup\{u(\theta, q(\theta'), p(\theta')) : u \in \mathbb{U}\}$ para todo $\theta \in \Theta$, probando que U es $\mathbb{H}$-convexa.

Ahora bien, sea $U(\theta') = u(\theta', q(\theta'), p(\theta'))$ el potencial del tipo $\theta' \in \Theta$. Entonces $p(\theta') = u^{-1}(\theta', q(\theta'), U(\theta'))$ a razón del Supuesto S2. Con esta transferencia se sigue que $U(\theta) \geq u(\theta, q(\theta'), u^{-1}(\theta', q(\theta'), U(\theta')))$ para todo $\theta \in \Theta$, pues $u(., q(\theta'), p(\theta')) \in \operatorname{supp}(U, \mathbb{H})$. Por lo tanto, existe $q(\theta') \in cl(Q)$ tal que $q(\theta') \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta')$ para todo $\theta' \in \Theta$ arbitrario.

($\Longleftarrow$) Para el recíproco sea U el potencial $\mathbb{H}$-convexo y $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$. Entonces, con $\theta' \in \Theta$ fijo, $U(\theta) \geq u(\theta, q(\theta'), u^{-1}(\theta', q(\theta'), U(\theta')))$ para todo $\theta \in \Theta$, según la definición de subdiferencial abstracto. Además, $U(\theta') = u(\theta', q(\theta'), p(\theta'))$ por definición de potencial, con lo cual $p(\theta') = u^{-1}(\theta', q(\theta'), U(\theta'))$. Reemplazando en la desigualdad anterior obtenemos que $U(\theta) = u(\theta, q(\theta), p(\theta)) \geq u(\theta, q(\theta'), p(\theta'))$ para todo $\theta, \theta' \in \Theta$. Por lo tanto, el contrato (q, p) es compatible en incentivos. $\square$

3.2. Implementabilidad

En esta sección se introduce la noción de implementabilidad, la cual está íntimamente relacionada con la compatibilidad de incentivos y puede además ser expresada utilizando los conceptos abstractos de convexidad y subdiferenciabilidad.

Definición 3.5. Una función $q : \Theta \to cl(Q)$ se dice *implementable* si y solo si existe una función de transferencia $p : \Theta \to \mathbb{R}$ tal que el contrato (q, p) es Compatible en Incentivos.

Resulta que la implementabidad también se satisface con una transferencia no lineal dependiente de θ por medio de q. Esto es lo que se denomina como *Principio de imputación* o *taxation principle* en ingles (Guesnerie (1981), Rochet (1985)). Es decir, dado un mecanismo directo implementable (q, p), existe una transferencia no lineal $\tilde{p}$ denominada *menú* que implementa q. Más aún, el recíproco del enunciado anterior también se satisface, estableciendo por tanto una equivalencia con el principio de revelación, la cual apreciaremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. Consideremos los Supuestos S1 y S2. Entonces, una función $q : \Theta \to cl(Q)$ es *implementable* si y solo si existe un *menú* $\tilde{p} : cl(Q) \to \mathbb{R}$ tal que el contrato $(q, \tilde{p})$ es compatible en incentivos.

Demostración. ($\Longleftarrow$) Es directo, pues si $(q, \tilde{p})$ es compatible en incentivos, defínase $p(\theta) := \tilde{p} \circ q(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$, es decir, existe $p : \Theta \to \mathbb{R}$ con (q, p) también CI, y por la definición anterior q es implementable.

($\Longrightarrow$) Sea $q : \Theta \to cl(Q)$ una función implementable, es decir, existe $p : \Theta \to \mathbb{R}$ tal que (q, p) es CI. Construyamos la siguiente función:

$$\tilde{p} \circ q := \begin{cases} p(\theta) & \text{si } q = q(\theta), \text{ para } \theta \in \Theta \\ \overline{p} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos que $q(\theta) = q(\theta')$ con $\theta \neq \theta'$. Como (q, p) es compatible en incentivos, entonces $u(\theta, q(\theta), p(\theta)) \geq u(\theta, q(\theta'), p(\theta')) = u(\theta, q(\theta), p(\theta'))$. Esta desigualdad implica que $p(\theta) \leq p(\theta')$, pues u es estrictamente decreciente en la tercera variable (Supuesto S2). De igual forma, $u(\theta', q(\theta'), p(\theta')) \geq u(\theta', q(\theta), p(\theta)) = u(\theta', q(\theta'), p(\theta))$ implica $p(\theta) \geq p(\theta')$. En consecuencia, $p(\theta) = p(\theta')$. Es decir, se ha construido un menú $\tilde{p}$ bien definido. Además, $(q, \tilde{p})$ es CI pues (q, p) lo es, concluyendo la demostración. $\square$

El siguiente corolario expresa la equivalencia entre implementabilidad y convexidad abstracta de la función potencial, resultado que fue probado por Carlier (2001) para funciones de utilidad afines en transferencia.

Corolario 3.1. Sean los Supuestos S1 y S2. Entonces, la función $q : \Theta \to cl(Q)$ es implementable si y solo si el potencial U es $\mathbb{H}$-convexo tal que $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Consideremos q una función implementable. Es decir, existe $p : \Theta \to cl(P)$ tal que (q, p) es compatible en incentivos (Definición 3.5). Entonces, según la Proposición 3.1, U es convexa abstracta con respecto a $\mathbb{H}$ y $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.

($\Longleftarrow$) Sea U un potencial $\mathbb{H}$-convexo tal que $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.

Como $U(\theta) = u(\theta, q(\theta), p(\theta))$ por definición, el Supuesto S2 implica que $p(\theta) = u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))$. Se sigue que el contrato (q, p) es compatible en incentivos según el recíproco de la Proposición 3.1. Entonces q es implementable conforme a la Definición 3.5. $\square$

Inicialmente el principal ofrece un menú $p : cl(Q) \to cl(P)$, y con esta información cada tipo de agente identifica la decisión óptima que maximiza su utilidad, es decir,

$$v(\theta) := \max_{q \in cl(Q)} u(\theta, q, p(q)), \tag{3.5}$$

donde $v : \Theta \to \mathbb{R}$ es la función valor, también conocida como función de utilidad indirecta.

Luego de ello, el principal calcula sus beneficios totales, el cual se expresa a través del siguiente funcional:

$$\Pi(p, q) := \int_{\Theta} \pi(\theta, q(\theta), p(q(\theta))) d\mu(\theta). \tag{3.6}$$

El principal conoce la medida de probabilidad de Borel μ; sin embargo, las características individuales de los tipos θ es información que él no puede observar directamente. Luego, para maximizar (3.6) el principal diseña un contrato que se restringe por las condiciones de compatibilidad de incentivos y racionalidad individual.

En resumen, el programa de optimización queda descrito como:

$$P_1 \left\{ \begin{array}{c} \sup \Pi(p, q) := \displaystyle\int_{\Theta} \pi(\theta, q(\theta), p(q(\theta))) d\mu(\theta) \\ \text{sujeto a} \\ (q, p(q)) \;\; \text{CI y RI}, \\ p(q) \;\; \text{s.c.i., con } p(q_R) \leq p_R. \end{array} \right.$$

El término s.c.i. significa semicontinuidad inferior.

3.3. Equivalencia

En esta subsección se reformula el programa de optimización P_1 en términos de (q, U), pues demostraremos que existe una dualidad entre $p(q)$ y el potencial U en el entorno de la convexidad abstracta (Trudinger, 2014). El problema, en efecto, se convertirá en uno de maximización con restricciones $\mathbb{H}$-convexas.

Supuesto S3. Sean $(q_R, p_R) \in cl(Q \times P)$ y $u(\theta, q, \overline{p}) := \lim_{p \to \overline{p}} u(\theta, q, p)$. Asumiremos que $u(\theta, q, \overline{p}) \leq U_R(\theta)$, para todo $(\theta, q) \in \Theta \times cl(Q)$. Cuando $\overline{p} = +\infty$ la desigualdad se vuelve estricta. Además, para todo $(\theta, q) \in \Theta \times cl(Q)$, $u(\theta, q, p) < U_R(\theta)$ para todo p suficientemente grande.

Proposición 3.3. Consideremos los Supuestos S1, S2 y S3. Luego, la función potencial $U \in C^0(\Theta)$, con $U \geq U_R$, es $\mathbb{H}$-convexa si y solo si existe $p : cl(Q) \to cl(P)$ semicontinua inferior y $p(q_R) \leq p_R$ tal que $U(\theta) = \max_{q \in cl(Q)} u(\theta, q, p(q))$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Probaremos la implicancia deseada en el dominio restringido $Q' \subset cl(Q)$ del menú p, donde la elección de Q' estará relacionada al dato del subdiferencial abstracto de U. Luego extenderemos dicho resultado a $cl(Q)$ empleando las propiedades de la envoltura semicontinua inferior de p.

En efecto, sea $Q' := \bigcup_{\theta \in \Theta} \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ el dominio restringido de p. Por hipótesis U es $\mathbb{H}$-convexa, entonces existe $\mathbb{U}' \subset \mathbb{H}$ tal que

$$U(\theta) = \sup\{u(\theta, q_0, p(q_0)) : u \in \mathbb{U}'\} \text{ para todo } \theta \in \Theta, \tag{3.7}$$

donde $q_0 \in Q'$ y $p(q_0) \in cl(P)$. Vamos a demostrar que la función $p : Q' \to cl(P)$ está bien definida y es semicontinua inferior.

Sea $q_0 \in Q'$ y supongamos que existen $(\theta_0, p(q_0)), (\theta_1, p(q_1))$ con $p(q_0) < p(q_1)$, tal que $U(\theta_0) = u(\theta_0, q_0, p(q_0))$ y $U(\theta_1) = u(\theta_1, q_0, p(q_1))$. Por el Supuesto S2, $p(q_0) < p(q_1)$ implica $u(\theta_1, q_0, p(q_0)) > u(\theta_1, q_0, p(q_1)) = U(\theta_1)$. Esto contradice

(3.7), pues $U(\theta_1) \geq u(\theta_1, q_0, p(q_0))$. La otra contradicción se obtiene de manera análoga partiendo de $p(q_0) > p(q_1)$. Por consiguiente $p(q_0)$ y $p(q_1)$ tendrían que ser los mismos, es decir, la función p está bien definida.

Debido a como se ha tomado $p : Q' \to cl(P)$, es fácil notar que

$$U(\theta) = \max_{q \in Q'} u(\theta, q, p(q)) \text{ para todo } \theta \in \Theta. \tag{3.8}$$

Ahora bien, recordemos que una función $p : Q' \to cl(P)$ es semicontinua inferior en un punto arbitrario $q_0 \in Q'$ si $\liminf_{q \to q_0} p(q) \geq p(q_0)$. En línea con lo anterior consideremos la sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Q'$ convergente al punto $q_0 \in Q'$, esto es,

$$\lim_{n \to \infty} q_n = q_0. \tag{3.9}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ generamos la sucesión $\{p(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Luego, de (3.8) existe $\theta_n \in \Theta$ tal que

$$U(\theta) \geq u(\theta, q_n, p(q_n)) \text{ para todo } \theta \in \Theta, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.10}$$

y

$$U(\theta_n) = u(\theta_n, q_n, p(q_n)). \tag{3.11}$$

Observemos que $u(\theta_n, q_R, p_R) \leq U(\theta_n) = u(\theta_n, q_n, p(q_n))$. Además, según el Supuesto S3, $u(\theta, q, \lim_{n \to \infty} p(q_n)) \leq u(\theta, q_R, p_R)$ para todo $(\theta, q) \in \Theta \times cl(Q)$. En consecuencia, $\lim_{n \to \infty} p(q_n) < \infty$.

Tomando límite en (3.10), considerando (3.9) y $u \in C^1(cl(\Theta \times Q \times P))$, obtenemos que

$$\begin{aligned} U(\theta) &\geq \lim_{n \to \infty} u(\theta, q_n, p(q_n)) \\ &= u(\theta, \lim_{n \to \infty} q_n, \lim_{n \to \infty} p(q_n)) \\ &\geq u(\theta, q_0, \liminf_{q \to q_0} p(q)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Este resultado es válido para todo $\theta \in \Theta$, y en efecto $U(\theta_0) \geq u(\theta_0, q_0, \liminf_{q \to q_0} p(q))$. Por su parte, $U(\theta_0) = u(\theta_0, q_0, p(q_0))$ cuando $n = 0$ en (3.11). Por consiguiente $u(\theta_0, q_0, p(q_0)) \geq u(\theta_0, q_0, \liminf_{q \to q_0} p(q))$, y gracias a S2 conseguimos la desigualdad deseada $p(q_0) \leq \liminf_{q \to q_0} p(q)$.

Ahora solo falta extender los resultados encontrados desde Q' al dominio completo $cl(Q)$. Para ello emplearemos la envoltura semicontinua inferior de p, haciendo que $p(q_0) := \overline{p}$ para todo $q_0 \notin cl(Q')$.

Por la $\mathbb{H}$-convexidad del potencial U, para todo $\theta \in \Theta$, existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{H}$ tal que $U(\theta) = \sup\{u(\theta, q_0, p(q_0)) : u \in \mathbb{U}\}$ para todo $\theta \in \Theta$, donde $q_0 \in cl(Q)$ y $p(q_0) \in cl(P)$. Luego, del Supuesto S3 y el hecho que $p(q) = \overline{p}$, para todo $q \notin cl(Q')$, se tiene

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= u(\theta, q_0, p(q_0)) \\
&\geq u(\theta, q_R, p_R) \\
&\geq \sup\{u(\theta, q, p(q)) : u \in \mathbb{U}, q \in cl(Q) \setminus cl(Q')\}.
\end{aligned}
$$

Entonces, es suficiente extender el resultado de (3.8) desde Q' hasta $cl(Q')$ para que tenga validez en todo el dominio $cl(Q)$. Debido a que se ha seleccionado la más grande extensión semicontinua inferior de p fuera de Q', todo $q_0 \in cl(Q') \setminus Q'$ es aproximado por la secuencia $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en Q', para el cual $\lim_{n \to \infty} p(q_n) = p(q_0)$. En este contexto, la desigualdad (3.10) se sigue cumpliendo y por tanto implica a la desigualdad (3.12). De este modo (3.8) es cierto cuando se extiende el conjunto factible de Q' a $cl(Q)$.

Adicionalmente, si $p(q_R) > p_R$, entonces $U(\theta) \geq U_R(\theta) > u(\theta, q_R, p(q_R))$ gracias al Supuesto S2, y se puede redefinir convenientemente $p(q_R) := p_R$ sin violar la maximización en (3.5) o la semicontinuidad inferior de p.

($\Longleftarrow$) Supongamos que existe una función semicontinua inferior $p : cl(Q) \to cl(P)$

tal que $U(\theta) = \max_{q \in cl(Q)} u(\theta, q, p(q))$. Entonces, para todo $\theta \in \Theta$, existe $q_0 \in cl(Q)$ tal que $U(\theta) \geq u(\theta, q_0, p(q_0))$ y $U(\theta_0) = (\theta_0, q_0, p(q_0))$. Es decir, existe $\mathbb{U} = \text{supp}(U, \mathbb{H})$ de modo que $U(\theta) = \sup\{u(\theta, q, p(q)) : u \in \mathbb{U}\}$. Por lo tanto, U es convexa abstracta con respecto a $\mathbb{H}$. Así también, como $p(q_R) \leq p_R$, entonces $u(\theta, q_R, p(q_R)) \geq u(\theta, q_R, p_R)$ a razón del Supuesto S2, y con ello $U(\theta) \geq u(\theta, q_R, p_R) = U_R(\theta)$. Con esto se concluye la demostración. □

Observación 3.1. Consideremos los Supuestos S1 y S2. Si $p : cl(Q) \to cl(P)$ es semicontinua inferior y $\overline{p} < \infty$, entonces $U(\theta) = \max_{q \in cl(Q)} u(\theta, q, p(q))$.

Demostración. Como Q es acotado (Supuesto S1), $cl(Q)$ es compacto. Por ello, sea $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset cl(Q)$ una sucesión y $q_0 \in cl(Q)$ tal que $\lim_{n \to \infty} q_n = q_0$, y sea además $U(\theta) = \lim_{n \to \infty} u(\theta, q_n, p(q_n))$. De $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ extraemos la subsucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}}$, y con ello generamos, sin pérdida de generalidad, $\{p(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}}$ convergente al límite superior de $\{p(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset cl(P)$, es decir, $\lim_{n \to \infty} p(q_n) = \limsup_{n \to \infty} p(q_n)$. Por hipótesis p es semicontinua inferior. Luego, si $\lim_{n \to \infty} p(q_n) < \overline{p}$, entonces $p(q_0) \leq \liminf_{q \to q_0} p(q) = \liminf_{n \to \infty} p(q_n) \leq \limsup_{n \to \infty} p(q_n) < \overline{p}$. Asimismo, del Supuesto S1 se tiene que $-\infty < \underline{p} < \overline{p} \leq +\infty$. En consecuencia, $p(q_0) \leq \limsup_{n \to \infty} p(q_n) < \overline{p} < +\infty$, y como S2 dice que u es estrictamente decreciente en p, entonces

$$
\begin{aligned}
u(\theta, q_0, p(q_0)) &\geq u(\theta, q_0, \limsup_{n \to \infty} p(q_n)) \\
&= u(\theta, q_0, \lim_{n \to \infty} p(q_n)) \\
&= \lim_{n \to \infty} u(\theta, q_n, p(q_n)) \\
&= U(\theta) \\
&= \sup_{q \in cl(Q)} u(\theta, q, p(q)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se alcanza el máximo con q_0. □

Observación 3.2. Sean los Supuestos S1, S2 y S3. Si $p : cl(Q) \to cl(P)$ es semicontinua inferior y $\overline{p} = +\infty$ con $p(q_R) \le p_R$, entonces $U(\theta) = \max_{q \in cl(Q)} u(\theta, q, p(q))$.

Demostración. Tomemos en cuenta las consideraciones iniciales de la Observación 3.1. Luego, si $\limsup_{n\to\infty} p(q_n) = \overline{p}$, entonces $\lim_{n\to\infty} p(q_n) = \overline{p} = +\infty$. Del Supuesto S3 se cumple que $u(\theta, q_R, p_R) > u(\theta, q_n, p(q_n))$ para $\overline{p}$ suficientemente grande. Al tomar límite obtenemos que $u(\theta, q_R, p_R) \ge \lim_{n\to\infty} u(\theta, q_n, p(q_n)) = U(\theta) = \sup_{q\in cl(Q)} u(\theta, q, p(q))$. Asimismo, $p(q_R) \le p_R$ implica $u(\theta, q_R, p(q_R)) \ge u(\theta, q_R, p_R)$, según el Supuesto S2. Se sigue que $u(\theta, q_R, p(q_R)) \ge \sup_{q\in cl(Q)} u(\theta, q, p(q))$. Por lo tanto, se alcanza el máximo con q_R. $\square$

Teorema 3.1. Consideremos los Supuestos S1, S2 y S3, y $\overline{p} < +\infty$. El problema del principal P_1 es equivalente al siguiente problema:

$$P_2 \begin{cases} \sup \widetilde{\Pi}(q, U) := \displaystyle\int_\Theta \pi(\theta, q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta)))d\mu(\theta) \\ \text{sujeto a} \\ q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta) \text{ para todo } \theta \in \Theta, \\ U \text{ es } \mathbb{H}\text{-convexo}, \\ U(\theta) \ge U_R(\theta) \text{ para todo } \theta \in \Theta. \end{cases}$$

Demostración. ($P_2 \implies P_1$) Según la Proposición 3.3, si U es H-convexo con $U(\theta) \ge U_R(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$, entonces existe $p : cl(Q) \to cl(P)$ semicontinua inferior y $p(q_R) \le p_R$ tal que $U(\theta) = \max_{q\in cl(Q)} u(\theta, q, p(q))$. Sea $q(\theta) \in cl(Q)$ el maximizador de la expresión previa, o sea $U(\theta) = u(\theta, q(\theta), p(q(\theta)))$ para todo $\theta \in \Theta$, de donde $p(q(\theta)) = u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))$ según la implicancia de S2. Evaluando al tipo $\theta' \in \Theta$ se satisface que $U(\theta') = u(\theta', q(\theta'), p(q(\theta'))) \ge u(\theta', q(\theta), p(q(\theta))) = u(\theta', q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta)))$. Es decir, $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.

Como U es $\mathbb{H}$-convexo y $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$, entonces el contrato $(q, p(q))$ es compatible en incentivos (Proposición 3.1). Además, $U(\theta) \ge U_R(\theta)$ es el equivalente a la condición de racionalidad individual del contrato $(q, p(q))$.

Ahora bien, como $p(q(\theta)) = u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}(q, U) &= \int_\Theta \pi(\theta, q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta)))d\mu(\theta) \\
&= \int_\Theta \pi(\theta, q(\theta), p(q(\theta))) \\
&= \Pi(q, p).
\end{aligned}
$$

$(P_1 \implies P_2)$ Supongamos $p : cl(Q) \to cl(P)$ semicontinua inferior con $p(q_R) \leq p_R$ y $(q(\theta), p(q(\theta)))$ satisfaciendo las condiciones CI y RI. Por la Proposición 3.1, si tomamos el potencial como $U(\theta) := u(\theta, q(\theta), p(q(\theta)))$ para todo $\theta \in \Theta$, entonces la compatibilidad de incentivos asegura que U es $\mathbb{H}$-convexo y $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$, mientras que $U(\theta) \geq U_R(\theta)$ resulta de la racionalidad individual. Además, de $U(\theta') \geq u(\theta', q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta)))$, si $\theta' = \theta$ entonces $U(\theta) = u(\theta, q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta)))$, de donde $p(q(\theta)) = u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))$ por el Supuesto S2. Por lo tanto, obtendremos $\Pi(q, p) = \widetilde{\Pi}(q, U)$ al igual que en la primera implicancia. $\square$

3.4. Existencia

En este apartado se demuestra la existencia de solución óptima al problema equivalente P_2, empleando argumentos de la convexidad abstracta[4]. El enfoque es relativamente directo, en la medida que no se hará uso de la teoría del control. Asimismo, para una presentación óptima organizaremos la demostración a través de seis lemas, las cuales permitirán concluir en pocas líneas el teorema central de

[4]Para ámbitos fuera de la convexidad abstracta están los trabajos de Monteiro y Page (1998) y Noldeke y Samuelson (2018). Ellos prueban la existencia del modelo Principal-Agente para preferencias no lineales. El primero utiliza técnicas de análisis real en un modelo que incorpora restricciones presupuestarias de los agentes; el segundo basa sus resultados partiendo de nuevas definiciones sobre implementabilidad, para luego utilizar argumentos provenientes del álgebra (conexiones de Galois).

existencia.

Supuesto S4. Para todo $\theta \in \Theta$, el mapa $(q,p) \longmapsto (u_\theta, u)(\theta, q, p)$ es un homeomorfismo en el conjunto definido por $(cl(Q \times P))_\theta := (u_\theta, u)(\theta, cl(Q \times P)) \subset \mathbb{R}^2$.

Este es un replanteamiento de la condición *single-crossing*, muy conocida en los modelos unidimensionales y revisada en el Capítulo 1. Una lectura parcial de este supuesto nos dice que la utilidad marginal del tipo θ determina de manera única y suavizada la decisión q.

Ahora bien, la Definición 3.2 de convexidad abstracta del potencial U se satisface para todo $\theta \in \Theta$, y en particular para $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}$, es decir, donde U es diferenciable. Entonces, dados $q \in cl(Q), p \in cl(P)$, para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}$ tenemos que

$$\begin{aligned} U(\theta) &= u(\theta, q, p), \\ \dot{U}(\theta) &= u_\theta(\theta, q, p). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Recíprocamente, cuando estas igualdades se satisfagan y consideremos el Supuesto S4, podemos identificar de manera unívoca el par de funciones continuas (q_u, p_u) teniendo como argumentos a θ, $U(\theta)$ y $\dot{U}(\theta)$.

Supuesto S5. La función de beneficios π pertenece al conjunto $C^0(cl(\Theta \times Q \times P))$.

La función π depende de sus argumentos en un sentido bastante general, incluso con menos exigencia a lo requerido por la función de utilidad en cuanto a la suavidad de dicha función.

Lema 3.2. Consideremos los Supuestos S1 y S2. Entonces, la función u^{-1} es continua.

Demostración. Sea $u(\theta, q, cl(P))$ la imágen de u con $\theta \in cl(\Theta)$, $q \in cl(Q)$ fijos y $p \in cl(P)$ variable. Supongamos por contradicción que u^{-1} no es continua. Es decir, existe una sucesión $\{(\theta_n, q_n, u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset cl(\Theta \times Q \times u(\theta, q, cl(P)))$ que converge a (θ, q, u) y $\varepsilon > 0$ tal que $|u^{-1}(\theta_n, q_n, u_n) - u^{-1}(\theta, q, u)| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $u \in u(\theta, q, cl(P))$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u^{-1}(\theta_n, q_n, u_n) > u^{-1}(\theta, q, u) + \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, según el supuesto S2, $u(\theta_n, q_n, u^{-1}(\theta_n, q_n, u_n)) < u(\theta_n, q_n, u^{-1}(\theta, q, u) + \varepsilon)$. Tomando límite y considerando la continuidad de u (Supuesto S1) obtenemos que $u(\theta, q, u^{-1}(\theta, q, u)) < u(\theta, q, u^{-1}(\theta, q, u) + \varepsilon)$ la cual es una contradicción, pues una mayor transferencia debería reportar menor utilidad. $\square$

Lema 3.3. Consideremos el Supuesto S1. Entonces el potencial H-convexo U es Lipschitz.

Demostración. En efecto, como la función de utilidad u y su primera derivada son continuas (Supuesto S1), entonces u es Lipschitz. Es decir, existe $L > 0$ tal que, para todo $(\theta_1, q_1, p_1), (\theta_2, q_2, p_2) \in cl(\Theta \times Q \times P)$, se tiene

$$\begin{aligned}|u(\theta_1, q_1, p_1) - u(\theta_2, q_2, p_2)| &< L||(\theta_1, q_1, p_1) - (\theta_2, q_2, p_2)||\\ &= L||(\theta_1 - \theta_2, q_1 - q_2, p_1 - p_2)||.\end{aligned}$$

Como U es $\mathbb{H}$-convexo, para todo θ_1, θ_2, existen $(q_1, p_1), (q_2, p_2) \in cl(Q \times P)$ tal que $U(\theta) = \sup\{u(\theta, q_1, p_1) : u \in \mathbb{U}\}$ y $U(\theta) = \sup\{u(\theta, q_2, p_2) : u \in \mathbb{U}\}$, para los cuales $U(\theta_1) = u(\theta_1, q_1, p_1)$ y $U(\theta_2) = u(\theta_2, q_2, p_2)$, respectivamente. Tomando en cuenta estas expresiones podemos establecer lo siguiente:

$$\begin{aligned}U(\theta_1) - U(\theta_2) &= u(\theta_1, q_1, p_1) - u(\theta_2, q_2, p_2)\\ &\leq u(\theta_1, q_1, p_1) - u(\theta_2, q_1, p_1)\\ &< L||(\theta_1 - \theta_2, q_1 - q_1, p_1 - p_1)||\\ &= L|\theta_1 - \theta_2|,\end{aligned}$$

donde la desigualdad estricta resulta del hecho que u es Lipschitz. Similarmente,

$$\begin{aligned} U(\theta_1) - U(\theta_2) &= u(\theta_1, q_1, p_1) - u(\theta_2, q_2, p_2) \\ &\geq u(\theta_1, q_2, p_2) - u(\theta_2, q_2, p_2) \\ &> -L||(\theta_1 - \theta_2, q_2 - q_2, p_2 - p_2)|| \\ &= -L|\theta_1 - \theta_2|. \end{aligned}$$

Se sigue que $|U(\theta_1) - U(\theta_2)| < L|\theta_1 - \theta_2|$. Por lo tanto, U es también Lipschitz con la misma constante L. $\square$

Como detalle adicional diremos que una medida no negativa μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue λ si $\lambda(B) = 0$ implica $\mu(B) = 0$ para todo conjunto medible B. En ese caso escribiremos $\mu \ll \lambda$.

Lema 3.4. Sean $p(\theta) = u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))$ y $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$ y para todo potencial $\mathbb{H}$-convexo U. Entonces, siendo $\mu \ll \lambda$, el beneficio $\pi(\theta, q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta)))$ es medible en Θ para todo U.

Demostración. Sea $U : \Theta \to \mathbb{R}$ el potencial $\mathbb{H}$-convexo, donde Θ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ (Supuesto S1). Asimismo, por el lema anterior U es Lipschitz. Con estos datos el teorema de Rademacher (ver Teorema 3.1.6. en Federer (1969)) garantiza que U es diferenciable en casi todo punto, es decir, $\lambda(\Theta \backslash \operatorname{dom}\dot{U}) = 0$; y como μ es absolutamente continua con respecto a λ, entonces $\mu(\Theta \backslash \operatorname{dom}\dot{U}) = 0$. El conjunto medible $\Theta\backslash\operatorname{dom}\dot{U}$ se lee como todos los puntos de Θ donde U no es diferenciable. Además, como U es continua, entonces $\dot{U}$ es medible en $\operatorname{dom}\dot{U}$, ya que $\dot{U}(\theta) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{U(\theta+h) - U(\theta)}{h}$.

Por otra parte, como $q(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U(\theta)$ y $p(\theta) = u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))$, para todo $\theta \in$

dom$\dot{U}$, tenemos que

$$\begin{aligned} U(\theta) &= u(\theta, q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))), \\ \dot{U}(\theta) &= u_\theta(\theta, q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta))). \end{aligned} \tag{3.14}$$

El Supuesto S4 permite identificar q en términos de θ, U y $\dot{U}$ de modo que existe una función continua inyectiva q_u tal que

$$q(\theta) = q_u(\theta, U(\theta), \dot{U}(\theta)), \tag{3.15}$$

y en consecuencia q es Borel medible en dom$\dot{U}$. Además de este resultado sabemos que π y u^{-1} son funciones continuas (Supuesto S5 y Lema 3.2, respectivamente) y $\mu \ll \lambda$ (por hipótesis). Por lo tanto, $\pi(\theta, q(\theta), u^{-1}(\theta, q(\theta), U(\theta)))$ es medible en Θ. □

Lema 3.5. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones potenciales $\mathbb{H}$-convexos. Entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada para todo $\theta \in \Theta$.

Demostración. Sea U_n el potencial $\mathbb{H}$-convexo para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $q \in cl(Q)$ y $p \in cl(P)$, existe $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{H}$ tal que $U_n(\theta) = \sup\{u_n(\theta, q, p) : u_n \in \mathbb{U}_n\}$ para todo $\theta \in \Theta$, con $U_n(\theta_0) = u_n(\theta_0, q, p)$. Además, como $u_n \in C^1(cl(\Theta \times Q \times P))$ se sigue que u_n es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|u_n(\theta, q, p)| \leq |u_n(\theta_0, q, p)| < M$. Así pues, $|U_n(\theta)| < M$.

Lema 3.6. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a $U^\star : \Theta \to \mathbb{R}$. Entonces $U^\star$ es Lipschitz.

Demostración. Como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $U^\star$, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que $|U_n(\theta) - U^\star(\theta)| < \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$ y para todo

$\theta \in \Theta$. En particular, para $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
|U^\star(\theta_1) - U^\star(\theta_2)| &= |U^\star(\theta_1) - U_n(\theta_1) - U^\star(\theta_2) + U_n(\theta_2) + U_n(\theta_1) - U_n(\theta_2)| \\
&\leq |U_n(\theta_1) - U^\star(\theta_1)| + |U_n(\theta_2) - U^\star(\theta_2)| + |U_n(\theta_1) - U_n(\theta_2)| \\
&< 2\varepsilon + L||\theta_1 - \theta_2||,
\end{aligned}$$

donde se ha sumado y restado $U_n(\theta_1) - U_n(\theta_2)$ en la primera línea; mientras que la desigualdad estricta se debe a que U es Lipschitz, resultado del Lema 3.3. En conclusión, $U^\star$ es también Lipschitz. $\square$

Lema 3.7. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente a $U^\star : \Theta \to \mathbb{R}$. Entonces, para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}^\star$, la sucesión $\{q_n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset cl(Q)$ converge a $q^\star : \Theta \to cl(Q)$ para todo $q^\star(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta)$ y $q_n(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U_n(\theta)$.

Demostración. Del lema anterior la función $U^\star$ es Lipschitz y está definida sobre el abierto $\Theta \subset \mathbb{R}$, luego $U^\star$ es diferenciable en casi todo punto de Θ (teorema de Rademacher), es decir, $\mu(\Theta\backslash\ \mathrm{dom}\dot{U}^\star) = \lambda(\Theta\backslash\ \mathrm{dom}\dot{U}^\star) = 0$. Entonces, como en (3.15), para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}^\star$, obtenemos

$$\tilde{q}(\theta) = q_u(\theta, U^\star(\theta), \dot{U}^\star(\theta)), \tag{3.16}$$

con q_u continua e inyectiva (Supuesto S4). Esto significa que $\partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta) = \{q^\star(\theta)\}$ para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}^\star$.

Ahora bien, para $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}^\star$, supongamos que $q^{\star\star}(\theta)$ es otro punto de acumulación de $\{q_n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por hipótesis, $q_n(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U_n(\theta)$ para $n \in \mathbb{N}'$, y por definición de subdiferencial abstracto $U_n(\theta') \geq u(\theta', q_n(\theta), u^{-1}(\theta, q_n(\theta), U_n(\theta)))$ para todo $\theta' \in \mathrm{dom}\dot{U}^\star$. Tomando límite y utilizando la continuidad de u y u^{-1} (Supuesto S1 y Lema 3.2, respectivamente) obtenemos

$$\begin{aligned} U^\star(\theta') &\geq \lim_{n\to\infty} u(\theta', q_n(\theta), u^{-1}(\theta, q_n(\theta), U_n(\theta))) \\ &= u(\theta', q^{\star\star}(\theta), u^{-1}(\theta, q^{\star\star}(\theta), U^\star(\theta))). \end{aligned}$$

Es decir, $q^{\star\star}(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta)$, y en efecto $q^{\star\star}(\theta) = q^\star(\theta)$ para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}^\star$. Por lo tanto, la sucesión $\{q_n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset cl(Q)$ converge a $q^\star(\theta)$. □

Finalmente enunciamos el teorema de existencia en el modelo Principal-Agente con selección adversa.

Teorema 3.2. Consideremos los Supuestos del S1 al S5, $\overline{p} < +\infty$ y $\mu \ll \lambda$. Entonces, el problema P_2 admite solución óptima. Además, $U(\theta)$ determina $q(\theta)$ de manera única para casi todo punto $\theta \in \Theta$.

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathbb{H}$-convexas, $U_n(\theta) \geq U_R(\theta)$ y $q_n(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U_n(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\Pi}(q_n, U_n) = \sup \widetilde{\Pi}(q, U)$, entre todos los pares factibles (q, U). Probaremos que el par $(q^\star, U^\star)$, definido anteriormente, es el óptimo que permite alcanzar el máximo en P_2.

En efecto, por el Lema 3.5 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotadas. Además, como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente Lipschitz (Lema 3.3), entonces es uniformemente equicontinua. Con estos resultados, el teorema de Arzela-Ascoli (ver Capítulo D.6 en Ok (2004)) señala que existe una subsucesión $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$ que converge uniformemente. Sea $U^\star : \Theta \to \mathbb{R}$ el límite de dicha subsucesión.

La función $U^\star$ satisface la restricción de participación, pues tomando límite a $U_n(\theta) \geq U_R(\theta)$ se obtiene $U^\star(\theta) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(\theta) \geq U_R(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.

De forma similar, para $\theta \in \Theta$ fijo, la sucesión $\{q_n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está definida sobre un compacto $cl(Q)$ (Supuesto S1) y por ello existe una subsucesión $\{q_n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$

convergente. Sea $q^\star \in cl(Q)$ el límite de dicha subsucesión. Como $q_n(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U_n(\theta)$ para $n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, entonces $U_n(\theta') \geq u(\theta', q_n(\theta), u^{-1}(\theta, q_n(\theta), U_n(\theta)))$ para todo $\theta' \in \Theta$. Tomando límite obtenemos

$$\begin{aligned} U^\star(\theta') &\geq \lim_{n\to\infty} u(\theta', q_n(\theta), u^{-1}(\theta, q_n(\theta), U_n(\theta))) \\ &= u(\theta', q^\star(\theta), u^{-1}(\theta, q^\star(\theta), U^\star(\theta))). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $q^\star(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta)$. Es decir, $\partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta) \neq \emptyset$ para todo $\theta \in \Theta$, lo cual implica que la función $U^\star$ es $\mathbb{H}$-convexa según el Lema 3.1. Con este último resultado y los anteriores se ha probado que el par factible $(q^\star, U^\star)$ cumple con todas las restricciones del problema P_2.

Por su parte, que $U^\star(\theta)$ determine $q^\star(\theta)$ de manera única para casi todo punto $\theta \in \Theta$ es un resultado que se desprende del Lema 3.7, específicamente de la ecuación (3.16) donde se establece una inyección entre cualquier $\tilde{q}(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta)$ y $U^\star(\theta)$ para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}^\star$, con lo cual $\partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta) = \{q^\star(\theta)\}$.

Finalmente, reescribiendo el Lema 3.4 se tiene que $\pi(\theta, q^\star(\theta), u^{-1}(\theta, q^\star(\theta), U^\star(\theta)))$ es medible en Θ para toda función $\mathbb{H}$-convexa $U^\star$ y $q^\star(\theta) \in \partial^{\mathbb{H}} U^\star(\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\Pi}(q^\star, U^\star) &= \int_\Theta \pi(\theta, q^\star(\theta), u^{-1}(\theta, q^\star(\theta), U^\star(\theta)))d\mu(\theta) \\ &= \int_\Theta \pi(\theta, \lim_{n\to\infty} q_n(\theta), u^{-1}(\theta, \lim_{n\to\infty} q_n(\theta), \lim_{n\to\infty} U_n(\theta)))d\mu(\theta). \end{aligned}$$

Luego, de los Supuestos S1, S5 y el Lema 3.2 tenemos

$$\widetilde{\Pi}(q^\star, U^\star) = \int_\Theta \limsup_{n\to\infty} \pi(\theta, q_n(\theta), u^{-1}(\theta, q_n(\theta), U_n(\theta)))d\mu(\theta).$$

Por el lema de Fatou (ver Lema 2.18 en Folland (1999)) se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}(q^\star, U^\star) &\geq \limsup_{n\to\infty} \int_\Theta \pi(\theta, q_n(\theta), u^{-1}(\theta, q_n(\theta), U_n(\theta)))d\mu(\theta) \\ &= \lim_{n\to\infty} \widetilde{\Pi}(q_n, U_n) \\ &= \sup \widetilde{\Pi}(q, U).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se alcanza el supremo con $(q^\star, U^\star)$. □

3.5. Concavidad

En esta subsección se muestran las condiciones necesarias y suficientes para la concavidad en el modelo general Principal-Agente. La concavidad hace posible que el problema sea más ameno para el análisis teórico y computacional.[5] Además, es determinante para describir la unicidad y estabilidad del modelo.

Comencemos reescribiendo P_2 como un programa que maximiza el funcional objetivo dependiente solo del potencial U en lugar de (U, q). Esto es posible por el Supuesto S4 ya que la elección óptima $q(\theta)$ de casi todo tipo $\theta \in \Theta$ está unívocamente determinada por U. Recuerde que $(q_u, p_u)(\theta, U(\theta), \dot{U}(\theta))$ es el par que denota la única solución del sistema descrito en el sistema (3.13), para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}$. Asimismo, denotemos por $\mathcal{U}$ al conjunto de funciones potenciales $\mathbb{H}$-convexos, y con ello sea $\mathcal{U}_R := \{U \in \mathcal{U} : U \geq U_R\}$. Por lo tanto, el problema de optimización podemos escribirlo del siguiente modo:

$$P_3 : \quad \max_{U\in\mathcal{U}_R} \widehat{\Pi}(U) := \int_\Theta \pi(\theta, (q_u, p_u)(\theta, U(\theta), \dot{U}(\theta)))d\mu(\theta). \tag{3.17}$$

Ahora se requieren dos supuestos adicionales a través de los cuales la concavidad

[5]Ver por ejemplo el trabajo de Carlier y Dupuis (2016) que emplean el mismo marco de Figalli et al. (2011) para la solución numérica del modelo Principal-Agente utilizando el algoritmo de proyección iterada de Dykstra.

o convexidad de u y π (o sus derivadas) con respecto a p se reflejarán en la concavidad o convexidad de $\widehat{\Pi}$, garantizando que P_3 sea un programa convexo.

Supuesto S6. El conjunto $(cl(Q \times P))_\theta := (u_\theta, u)(\theta, cl(Q \times P)) \subset \mathbb{R}^2$ es convexo.

Para todo $\theta_0 \in \Theta$ y $(q_0, p_0), (q_1, p_1) \in cl(Q \times P)$ definamos el par (q_α, p_α) tal que, para todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$(u_\theta, u)(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha) = (1 - \alpha)(u_\theta, u)(\theta_0, q_0, p_0) + \alpha(u_\theta, u)(\theta_0, q_1, p_1). \tag{3.18}$$

Gracias a los Supuestos S4 y S6, la ecuación anterior determina (q_α, p_α) de manera única.

Definición 3.6. El mapa $\alpha \mapsto (\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$ se denomina el $\mathbb{H}$-segmento que conecta (θ_0, q_0, p_0) y (θ_0, q_1, p_1), con $\alpha \in [0, 1]$.

Supuesto S7. Para todo $\theta_0 \in \Theta$ y $\alpha \in [0, 1]$ el mapa $\alpha \mapsto u(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$ es convexo a lo largo de todos los $\mathbb{H}$-segmentos que conectan (θ_0, q_0, p_0) y (θ_0, q_1, p_1).

Este es el supuesto clave para la concavidad de $\widehat{\Pi}$, íntimamente ligada a la denominada hipótesis *nonnegative cross-curve* propuesta por Ma-Trudinger-Wang (2005) y que juega un rol crucial en la teoría del transporte óptimo.

Teorema 3.3. Si la función de utilidad u satisface los Supuestos S1, S4 y S6, entonces el Supuesto S7 representa una condición suficiente y necesaria para la convexidad de $\mathcal{U}_R$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Para probar la convexidad de $\mathcal{U}_R$ solo basta probar la convexidad de $\mathcal{U}$. En efecto, para todo $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ definamos

$$U_\alpha(\theta) := (1 - \alpha)U_0(\theta) + \alpha U_1(\theta), \text{ para todo } \alpha \in (0, 1). \tag{3.19}$$

Puesto que U_0, U_1 son funciones $\mathbb{H}$-convexos, existen $\mathbb{U}, \mathbb{U}'$ subconjuntos de $\mathbb{H}$ tales que

$$U_0(\theta) = \sup\{u(\theta, q_0, p_0) : u \in \mathbb{U}\},$$
$$U_1(\theta) = \sup\{u(\theta, q_1, p_1) : u \in \mathbb{U}'\},$$

donde $(q_0, p_0), (q_1, p_1) \in cl(Q \times P)$. Para $\theta_0 \in \Theta$, sean

$$U_0(\theta_0) = u(\theta_0, q_0, p_0),$$
$$U_1(\theta_0) = u(\theta_0, q_1, p_1).$$

Reemplazando estas expresiones en (3.19) se consigue $U_\alpha(\theta_0) = (1-\alpha)u(\theta_0, q_0, p_0) + \alpha u(\theta_0, q_1, p_1)$, y en efecto $U_\alpha(\theta_0) = u(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$, según la ecuación (3.18), donde $(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$ es el $\mathbb{H}$-segmento que conecta (θ_0, q_0, p_0) y (θ_0, q_1, p_1).

Por el Supuesto S7 la función $u(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$ es convexa a lo largo de los $\mathbb{H}$-segmentos, es decir, $(1-\alpha)u(\theta, q_0, p_0) + \alpha u(\theta, q_1, p_1) \geq u(\theta, q_\alpha, p_\alpha)$. Se sigue que $U_\alpha(\theta) = (1-\alpha)U_0(\theta) + \alpha U_1(\theta) \geq (1-\alpha)u(\theta, q_0, p_0) + \alpha u(\theta, q_1, p_1) \geq u(\theta, q_\alpha, p_\alpha)$. En resumen, $u(\theta, q_\alpha, p_\alpha) \in \mathbb{U}'' = \text{supp}(U_\alpha, \mathbb{H})$ y $U_\alpha(\theta_0) = u(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$. Concluimos que U_α es $\mathbb{H}$-convexo para todo $\alpha \in (0,1)$ y por ende pertenece a $\mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es convexo.

$(\Longleftarrow)$ Sean $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ los definidos anteriormente. Para todo $\theta_0 \in \Theta$ fijo sea $(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$ el $\mathbb{H}$-segmento que conecta (θ_0, q_0, p_0) y (θ_0, q_1, p_1). La función U_α, definida como en (3.19), es $\mathbb{H}$-convexa pues pertenece a $\mathcal{U}$ que es convexo por hipótesis. Luego, existe $\widetilde{\mathbb{U}} \subset \mathbb{H}$ tal que $U_\alpha(\theta) = \sup\{u(\theta, \tilde{q}_\alpha, \tilde{p}_\alpha) : u \in \widetilde{\mathbb{U}}\}$, donde $(\tilde{q}_\alpha, \tilde{p}_\alpha) \in cl(Q \times P)$. Asimismo, para $\theta_0 \in \Theta$ consideremos $U_\alpha(\theta_0) = u(\theta_0, \tilde{q}_\alpha, \tilde{p}_\alpha)$, cuya derivada con respecto a θ es $\dot{U}_\alpha(\theta_0) = u_\theta(\theta_0, \tilde{q}_\alpha, \tilde{p}_\alpha)$. Como $(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$ es un

$\mathbb{H}$-segmento, empleando la ecuación (3.18) obtenemos

$$\begin{aligned} u_\theta(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha) &= (1-\alpha)u_\theta(\theta_0, q_0, p_0) + \alpha u_\theta(\theta_0, q_1, p_1) \\ &= (1-\alpha)\dot{U}_0(\theta_0) + \alpha \dot{U}_1(\theta_0) \\ &= \dot{U}_\alpha(\theta_0). \end{aligned}$$

En consecuencia, por el Supuesto S4 $(\tilde{q}_\alpha, \tilde{p}_\alpha) = (q_\alpha, p_\alpha)$ para todo $\alpha \in (0,1)$. Por consiguiente, para todo $\theta \in \Theta$, $(1-\alpha)u(\theta, q_0, p_0) + \alpha u(\theta, q_1, p_1) = U_\alpha(\theta) \geq u(\theta, \tilde{q}_\alpha, \tilde{p}_\alpha) = u(\theta, q_\alpha, p_\alpha)$. Por lo tanto, la función $\alpha \mapsto u(\theta, q_\alpha, p_\alpha)$ es convexa a lo largo de todo $\mathbb{H}$-segmento $(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$. □

Finalizamos el capítulo con el siguiente teorema que establece una condición necesaria y suficiente para la concavidad estricta del funcional $\widehat{\Pi}$.

Teorema 3.4. Consideremos los Supuestos del S1 al S7. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) El mapa $\alpha \mapsto \pi(\theta, q_\alpha(\theta), p_\alpha(\theta))$ es estrictamente cóncavo a lo largo de todos los $\mathbb{H}$-segmentos $(\theta, q_\alpha(\theta), p_\alpha(\theta))$, que conectan los puntos (θ, q_0, p_0) y (θ, q_1, p_1), donde $\min\{u(\theta, q_0(\theta), p_0(\theta)), u(\theta, q_1(\theta), p_1(\theta))\} \geq U_R(\theta)$;

(ii) $\widehat{\Pi}(U)$ es estrictamente cóncavo en $\mathcal{U}_R$ para todo $\mu \ll \lambda$.

Demostración. $(i) \implies (ii)$. Para todo $U_0, U_1 \in \mathcal{U}_R$ y $\alpha \in (0,1)$ definamos U_α como en (3.19). El Supuesto S7 garantiza la convexidad de $\mathcal{U}_\mathcal{R}$ y en efecto $U_\alpha \in \mathcal{U}_R$. Según el Supuesto S4, a partir del sistema (3.13), existen $q_0, q_1 : \mathrm{dom}\dot{U} \to cl(Q)$ y $p_0, p_1 : \mathrm{dom}\dot{U} \to cl(P)$ tales que

$$\begin{aligned} (u_\theta, u)(\theta, q_0(\theta), p_0(\theta)) &= (\dot{U}_0, U_0)(\theta), \\ (u_\theta, u)(\theta, q_1(\theta), p_1(\theta)) &= (\dot{U}_1, U_1)(\theta). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Para todo $\theta \in \mathrm{dom}\dot{U}$ y para todo $(q_0(\theta), p_0(\theta)), (q_1(\theta), p_1(\theta)) \in cl(Q \times P)$, sea

$\alpha \mapsto (\theta, q_\alpha(\theta), p_\alpha(\theta))$ el $\mathbb{H}$-segmento que conecta $(\theta, q_0(\theta), p_0(\theta))$ y $(\theta, q_1(\theta), p_1(\theta))$. Multiplicando el sistema (3.20) por $1-\alpha$ y α, y sumando, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(1-\alpha)(u_\theta, u)(\theta, q_0(\theta), p_0(\theta)) + \alpha(u_\theta, u)(\theta, q_1(\theta), p_1(\theta)) &= (1-\alpha)(\dot{U}_0, U_0)(\theta) + \\
&\quad \alpha(\dot{U}_1, U_1)(\theta) \\
(u_\theta, u)(\theta, q_\alpha(\theta), p_\alpha(\theta)) &= (\dot{U}_\alpha, U_\alpha)(\theta). \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

El lado izquierdo de esta última igualdad se debe a la ecuación (3.18), mientras que el lado derecho resulta de la definición de U_α y su respectiva derivada $\dot{U}_\alpha$. Por el Supuesto S4 podemos despejar de (3.21) el par (q_α, p_α) en función de $\theta, U_\alpha(\theta)$ y $\dot{U}_\alpha(\theta)$, con lo cual

$$
\widehat{\Pi}(U_\alpha) = \int_\Theta \pi(\theta, (q_\alpha, p_\alpha)(\theta, U_\alpha(\theta), \dot{U}_\alpha(\theta))) d\mu(\theta).
$$

Por hipótesis π es estrictamente cóncava a lo largo de todos los $\mathbb{H}$-segmentos. Entonces, para todo $\alpha \in [0,1]$,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Pi}(U_\alpha) &> \int_\Theta \left[(1-\alpha)\pi(\theta, q_0(\theta), p_0(\theta)) + \alpha\pi(\theta, q_1(\theta), p_1(\theta))\right] d\mu(\theta) \\
&= (1-\alpha)\int_\Theta \pi(\theta, q_0(\theta), p_0(\theta)) + \alpha \int_\Theta \pi(\theta, q_1(\theta), p_1(\theta)) d\mu(\theta) \\
&= (1-\alpha)\widehat{\Pi}(U_0) + \alpha\widehat{\Pi}(U_1).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\widehat{\Pi}$ es estrictamente cóncava en $\mathcal{U}_R$.

$(ii) \implies (i)$. Sea $\widehat{\Pi}$ es estrictamente cóncava en $\mathcal{U}_R$, y por contradicción supongamos que el mapa $\alpha \mapsto \pi(\theta, q_\alpha(\theta), p_\alpha(\theta))$ no es estrictamente cóncavo a los largo de todos los $\mathbb{H}$-segmentos, es decir, existe un $\mathbb{H}$-segmento $(\theta_0, q_\alpha(\theta_0), p_\alpha(\theta_0))$ y $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que

$$
\pi(\theta_0, q_{\alpha_0}(\theta_0), p_{\alpha_0}(\theta_0)) < (1-\alpha_0)\pi(\theta_0, q_0(\theta_0), p_0(\theta_0)) + \alpha_0\pi(\theta_0, q_1(\theta_0), p_1(\theta_0))
$$

Sea $U_i(\theta) := u(\theta, q_i(\theta_0), p_i(\theta_0)) \geq U_R(\theta)$ para $i = 0, 1$ y $U_{\alpha_0} = (1-\alpha_0)U_0 + \alpha_0 U_1$. Por el Teorema 3.3, U_0, U_1, y U_{α_0} pertenecen a $\mathcal{U}_R$. Asimismo, del sistema (3.20) se sabe que $q_i(\theta) \equiv q_i(\theta_0), p_i(\theta) \equiv p_i(\theta_0)$, para $i = 0, 1$. Sea $\alpha \mapsto (\theta, q_\alpha(\theta), p_\alpha(\theta))$ el $\mathbb{H}$-segmento que conecta $(\theta), q_0(\theta), p_0(\theta))$ y $(\theta, q_1(\theta), p_1(\theta))$. Luego, combinando el sistema (3.13) y la ecuación (3.18), obtenemos

$$
\begin{aligned}
(u_\theta, u)(\theta, q_i(\theta_0), p_i(\theta_0)) &= (\dot{U}_i, U_i)(\theta) \text{ para } i = 0, 1 \\
(u_\theta, u)(\theta, q_{\alpha_0}(\theta), p_{\alpha_0}(\theta)) &= (\dot{U}_{\alpha_0}, U_{\alpha_0})(\theta).
\end{aligned}
$$

Así, q_{α_0} y p_{α_0} son continuas (Supuesto S4), y por el Supuesto S5, π es también continua. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\theta \in B(\theta_0, \varepsilon)$,

$$
\pi(\theta, q_{\alpha_0}(\theta), p_{\alpha_0}(\theta)) \leq (1-\alpha_0)\pi(\theta, q_0(\theta_0), p_0(\theta_0)) + \alpha_0 \pi(\theta, q_1(\theta_0), p_1(\theta_0)).
$$

Consideremos $d\mu = d\lambda|_{B(\theta_0,\varepsilon)}/\lambda(B(\theta_0, \varepsilon))$ una medida uniforme en $B(\theta_0, \varepsilon)$. En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Pi}(U_{\alpha_0}) &= \int_\Theta \pi(\theta, q_{\alpha_0}(\theta), p_{\alpha_0}(\theta)) d\mu(\theta), \\
&\leq \int_\Theta (1-\alpha_0)\pi(\theta, q_0(\theta_0), p_0(\theta_0)) + \alpha_0 \pi(\theta, q_1(\theta_0), p_1(\theta_0)) d\mu(\theta) \\
&= (1-\alpha_0)\widehat{\Pi}(U_0) + \alpha_0 \widehat{\Pi}(U_1).
\end{aligned}
$$

Esto contradice la concavidad estricta de $\widehat{\Pi}$, demostrando la implicancia deseada.

$\square$

Capítulo 4

Tarifas de monopolio

En este capítulo aplicaremos el modelo general Principal-Agente en el estudio del problema de selección adversa de un monopolio que determina tarifas no lineales. Mostraremos como la convexidad abstracta contribuye también en el proceso de encontrar soluciones explícitas.

Sea una empresa (Principal) que ofrece un bien o servicio q a un conjunto de consumidores (Agentes) que buscan maximizar su utilidad u. La empresa debe fijar la tarifa p (transferencia) con el objetivo de maximizar sus beneficios π tomando en cuenta las restricciones de participación y compatibilidad de incentivos.

Supongamos que $\Theta = [0, 1]$, $Q \subset \mathbb{R}_+$ abierto y acotado, $P = (0, \overline{p}]$, con $\overline{p} < +\infty$, y μ una medida de probabilidad uniforme sobre Θ. Asimismo, sea la función de utilidad $u(\theta, q, p) = \theta \dfrac{q^\gamma}{\gamma} - p^\phi$ y la función de beneficio $\pi(\theta, q, p) = p - \dfrac{q^\sigma}{\sigma}$, donde $\gamma \in (0, 1)$, $\phi > 0$ y $\sigma > 0$.

En este contexto los supuestos que garantizan la existencia de solución óptima se verifican directamente. No obstante, veamos algunos detalles en relación a los supuestos sobre la concavidad del problema. Así, recordemos que en el Capítulo

3.4 definimos al conjunto $(cl(Q\times P))_\theta := (u_\theta,u)(\theta, cl(Q\times P))\subset\mathbb{R}^2$, es decir,

$$(cl(Q\times P))_\theta = \left\{\left(\frac{q^\gamma}{\gamma}, \theta\frac{q^\gamma}{\gamma} - p^\phi\right) : (q,p)\in cl(Q\times P)\right\}.$$

Sean $(u'_\theta,u'),(u''_\theta,u'')\in(cl(Q\times P))_\theta$ y definamos

$$(\tilde{u}_\theta,\tilde{u}) := \beta(u'_\theta,u') + (1-\beta)(u''_\theta,u''),$$

para todo $\beta\in[0,1]$. Luego

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}_\theta,\tilde{u}) &= \beta\left(\frac{q'^\gamma}{\gamma}, \theta\frac{q'^\gamma}{\gamma} - p'^\phi\right) + (1-\beta)\left(\frac{q''^\gamma}{\gamma}, \theta\frac{q''^\gamma}{\gamma} - p''^\phi\right)\\
&= \left(\beta\frac{q'^\gamma}{\gamma} + (1-\beta)\frac{q''^\gamma}{\gamma}, \beta\left(\frac{\theta q'^\gamma}{\gamma} - p'^\phi\right) + (1-\beta)\left(\frac{\theta q''^\gamma}{\gamma} - p''^\phi\right)\right)\\
&= \left(\frac{\beta q'^\gamma + (1-\beta)q''^\gamma}{\gamma}, \frac{\theta(\beta q'^\gamma + (1-\beta)q''^\gamma)}{\gamma} - (\beta p'^\phi + (1-\beta)p''^\phi)\right)\\
&= \left(\frac{\tilde{q}^\gamma}{\gamma}, \theta\frac{\tilde{q}^\gamma}{\gamma} - \tilde{p}^\phi\right).
\end{aligned}$$

Como $(\tilde{q},\tilde{p})\in cl(Q\times P)$, se sigue que $(\tilde{u}_\theta,\tilde{u})\in(cl(Q\times P))_\theta$, esto es, validamos el Supuesto S6.

Por su parte, los $\mathbb{H}$-segmentos se obtienen resolviendo la igualdad (3.18). En efecto, para todo $\theta_0\in\Theta$ y $(q_0,p_0),(q_1,p_1)\in cl(Q\times P)$ definimos el par (q_α,p_α) tal que, para todo $\alpha\in[0,1]$,

$$(u_\theta,u)(\theta_0,q_\alpha,p_\alpha) = (1-\alpha)(u_\theta,u)(\theta_0,q_0,p_0) + \alpha(u_\theta,u)(\theta_0,q_1,p_1).$$

Se sique que

$$\left(\frac{q_\alpha^\gamma}{\gamma}, \theta_0\frac{q_\alpha^\gamma}{\gamma} - p_\alpha^\phi\right) = (1-\alpha)\left(\frac{q_0^\gamma}{\gamma}, \theta_0\frac{q_0^\gamma}{\gamma} - p_0^\phi\right) + \alpha\left(\frac{q_1^\gamma}{\gamma}, \theta_1\frac{q_1^\gamma}{\gamma} - p_1^\phi\right).$$

Por consiguiente, los $\mathbb{H}$-segmentos que conectan (q_0,p_0) y (q_1,p_1) vienen dados por

$$(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha) = \left(\theta_0, \left((1-\alpha)q_0^\gamma + \alpha q_1^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left((1-\alpha)p_0^\phi + \alpha p_1^\phi\right)^{\frac{1}{\phi}}\right). \tag{4.1}$$

Con esto se corrobora fácilmente que el mapa $\alpha \mapsto u(\theta_0, q_\alpha, p_\alpha)$ es convexo, validando el Supuesto S7.

Ahora bien, para encontrar el óptimo del problema consideremos

$$\tilde{\pi}(\theta, U(\theta), w(\theta)) := \pi(\theta, (q_u, p_u)(\theta, U(\theta), \dot{U}(\theta)))$$

en el funcional del problema P_3. Entonces, el programa viene dado por

$$\max_{U \in \mathcal{U}_R} \int_\Theta \tilde{\pi}(\theta, U(\theta), w(\theta)) d\mu(\theta).$$

Relajemos el problema obviando la restricción de convexidad abstracta. Entonces, la empresa debe resolver

$$P_4 \begin{cases} \max \displaystyle\int_{[0,1]} \tilde{\pi}(\theta, U(\theta), w(\theta)) d\mu(\theta) \\ \qquad\qquad \text{sujeto a} \\ \qquad\quad \dot{U}(\theta) = w(\theta), \\ \qquad\quad U(\theta) \geq U_R(\theta). \end{cases}$$

Observamos que es un problema de control óptimo con restricciones de desigualdad (ver Capítulo 13.3 en Lomelí y Rumbos (2001)). Para este caso planteamos el siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \tilde{\pi}(\theta, U(\theta), w(\theta)) + \lambda_1(\theta) w(\theta) + \lambda_2(\theta)(U(\theta) - U_R(\theta)).$$

Luego aplicamos el principio de Pontryagin y obtenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_w &= 0 \\
-\dot{\lambda}_1 &= \mathcal{L}_U \\
\dot{U}(\theta) &= w(\theta) \\
U_R(\theta) - U(\theta) \leq 0, \lambda_2(\theta) &\geq 0, \lambda_2(\theta)(U_R(\theta) - U(\theta)) = 0 \\
\lambda_1(1) &= 0.
\end{aligned}$$

Desarrollando tenemos

$$\tilde{\pi}_w(\theta, U(\theta), w(\theta)) + \lambda_1(\theta) = 0 \tag{4.2}$$

$$-\dot{\lambda}_1(\theta) = \tilde{\pi}_U(\theta, U(\theta), w(\theta)) - \lambda_2(\theta) \tag{4.3}$$

$$\dot{U}(\theta) = w(\theta). \tag{4.4}$$

Sabemos que

$$\tilde{\pi}_w(\theta, U(\theta), w(\theta)) = p_w(\theta, U(\theta), w(\theta)) - (q(\theta, U(\theta), w(\theta)))^{\sigma-1} q_w(\theta, U(\theta), w(\theta)).$$

Derivamos esta expresión con respecto a θ, y omitiendo temporalmente los argumentos, conseguimos

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\pi}}_w &= p_{w\theta} + p_{wU}\dot{U} + p_{ww}\dot{w} - q_w c_{qq}\left(q_\theta + q_U\dot{U} + q_w\dot{w}\right) - c_q\left(q_{w\theta} + q_{wU}\dot{U} + q_{ww}\dot{w}\right) \\
&= (p_{ww} - c_{qq}q_w^2 - c_q q_{ww})\dot{w} + (p_{wU} - c_{qq}q_U q_w - c_q q_{wU})\dot{U} + (p_{w\theta} - c_{qq}q_\theta q_w - c_q q_{w\theta}).
\end{aligned}$$

Asimismo, $\tilde{\pi}_U = p_U - q_U$. Por consiguiente, reemplazando (4.3) y (4.4) en la derivada de (4.2), tomando en cuenta en caso $\lambda_2(\theta) = 0$, se llega al siguiente sistema:

$$\dot{w} = \frac{h_2(\theta, U, w)}{h_1(\theta, U, w)} w + \frac{h_3(\theta, U, w)}{h_1(\theta, U, w)} \tag{4.5}$$

$$\dot{U} = w, \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{aligned}
h_1(\theta, U, w) &= \frac{1-\phi}{\phi^2}\theta^2(\theta w - U)^{\frac{1}{\phi}-2} - (\sigma - \gamma)\gamma^{\frac{\sigma}{\gamma}-2} w^{\frac{\sigma}{\gamma}-2} \\
h_2(\theta, U, w) &= \frac{1-\phi}{\phi^2}\theta(\theta w - U)^{\frac{1}{\phi}-2} \\
h_3(\theta, U, w) &= -\frac{1-\phi}{\phi^2}\theta w(\theta w - U)^{\frac{1}{\phi}-2} - \frac{2}{\phi}(\theta w - U)^{\frac{1}{\phi}-1}.
\end{aligned}$$

Entonces, la solución al problema de la empresa se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales dado por

$$\dot{w} = \frac{\frac{2}{\phi}(\theta w - U)^{\frac{1}{\phi}-1}}{(\sigma - \gamma)\gamma^{\frac{\sigma}{\gamma}-2} w^{\frac{\sigma}{\gamma}-2} - \frac{1-\phi}{\phi^2}\theta^2(\theta w - U)^{\frac{1}{\phi}-2}} \tag{4.7}$$

$$\dot{U} = w. \tag{4.8}$$

Consideremos $\gamma = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1$ y $\phi = \frac{1}{2}$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \frac{8\theta}{1-4\theta^2} w - \frac{8}{1-4\theta^2} U \\
\dot{U} &= w.
\end{aligned}$$

Es decir, se llega a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes variables. Su correspondiente ecuación de segundo orden es

$$\ddot{U} - \frac{8\theta}{1-4\theta^2}\dot{U} + \frac{8}{1-4\theta^2}U = 0.$$

Para encontrar la solución realizamos los cambios de variable $U = \theta v$ y $\dot{v} = h$, obteniendo

$$\dot{h} = -\frac{2(1-8\theta^2)}{1-4\theta^2}h,$$

la cual podemos resolver integrando ambas partes. Haciendo las operaciones adecuadas la solución viene dada por

$$\overline{U}(\theta) = c_1\theta + c_2\left(\theta\left(log(1+2\theta) - log(1-2\theta)\right) - 1\right), \tag{4.9}$$

donde c_1 y c_2 son constantes del problema. Más aún, desarrollando los logaritmos como series infinitas y operando los términos conseguimos la siguiente aproximación:

$$\overline{U}(\theta) \approx c_1\theta + c_2(4\theta^2 - 1). \tag{4.10}$$

Por otro lado, cuando $\phi = 1$ (caso cuasilineal) el sistema conformado por las ecuaciones (4.7) y (4.8) se reduce a

$$\dot{w} = \frac{2}{(\sigma-\gamma)\gamma^{\frac{\sigma}{\gamma}-2}w^{\frac{\sigma}{\gamma}-2}} \tag{4.11}$$

$$\dot{U} = w. \tag{4.12}$$

En efecto, la solución viene dada por

$$\overline{U}(\theta) = \frac{\sigma-\gamma}{2\sigma\gamma}(2\theta-1)^{\frac{\sigma}{\sigma-\gamma}} + r(U_0), \tag{4.13}$$

donde $r(U_0) = U_0 - \frac{\sigma-\gamma}{2\sigma\gamma}(-1)^{\frac{\sigma}{\sigma-\gamma}}$, siendo U_0 el estado inicial.

En este caso podemos corroborar la concavidad estricta de π a lo largo de los $\mathbb{H}$-segmentos descritos en (4.1), y así garantizar la unicidad en la solución. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta, q_\alpha, p_\alpha) &= p_\alpha - \frac{q_\alpha^\sigma}{\sigma} \\
&= (1-\alpha)p_0 + \alpha p_1 - \frac{1}{\sigma}\left(((1-\alpha)q_0^\gamma + \alpha q_1^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\sigma \\
&> (1-\alpha)p_0 + \alpha p_1 - \frac{1}{\sigma}\left(((1-\alpha)q_0^\sigma + \alpha q_1^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}\right)^\sigma \\
&= (1-\alpha)p_0 + \alpha p_1 - \frac{1}{\sigma}\left((1-\alpha)q_0^\sigma + \alpha q_1^\sigma\right) \\
&= (1-\alpha)\left(p_0 - \frac{1}{\sigma}q_0^\sigma\right) + \alpha\left(p_1 - \frac{1}{\sigma}q_1^\sigma\right) \\
&= (1-\alpha)\pi(\theta, q_0, p_0) + \alpha\pi(\theta, q_1, p_1).
\end{aligned}
$$

Para obtener la desigualdad estricta se requiere que $\sigma > \gamma$.

Otra de forma de verificar la optimalidad global del problema P_4 es haciendo cumplir la concavidad clásica de $\tilde{\pi}$ directamente sobre (U, w). En efecto, la correspondiente matriz Hessiana para $\tilde{\pi}$ es,

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 \\
0 & -\gamma^{\frac{\sigma}{\gamma}}(\frac{\sigma}{\gamma} - 1)w^{\frac{\sigma}{\gamma}-2}
\end{pmatrix}
$$

Para que sea semidefinida negativa se ha de cumplir nuevamente que $\sigma > \gamma$. Con esta condición de concavidad consideremos ahora cualquier $\dot{U}(\theta) = w(\theta) \in C^0([0,1])$. Luego,

$$
\Pi(\overline{U}) - \Pi(U) = \int_{[0,1]} \tilde{\pi}(\theta, \overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta)) - \tilde{\pi}(\theta, U(\theta), w(\theta)) d\mu(\theta).
$$

Como $\tilde{\pi}$ es cóncava en $(U(\theta), w(\theta))$ para todo $\theta \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$, y $(\overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta))$,

$(U(\theta), w(\theta))$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}(\theta, \alpha(\overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta)) + (1-\alpha)(U(\theta), w(\theta))) &\geq \alpha\tilde{\pi}(\theta, \overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta)) \\
&+ (1-\alpha)\tilde{\pi}(\theta, U(\theta), w(\theta)) \\
&\Longleftrightarrow \\
\tilde{\pi}(\theta, \overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta)) - \tilde{\pi}(\theta, U(\theta), w(\theta)) &\geq \tilde{\pi}_U(\theta, \overline{U}(\theta), w(\theta))(\overline{U}(\theta) - U(\theta)) \\
&+ \tilde{\pi}_w(\theta, \overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta))(\overline{w}(\theta) - w(\theta))
\end{aligned}
$$

Esta equivalencia viene del teorema para funciones diferenciables cóncavas (ver Teorema 2.17. en De la Fuente (2000)). Reemplazando este resultado obtenemos

$$
\begin{aligned}
\Pi(\overline{U}) - \Pi(U) \geq \int_{[0,1]} & \tilde{\pi}_U(\theta, \overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta))(\overline{U}(\theta) - U(\theta)) + \\
& \tilde{\pi}_{\dot{U}}(\theta, \overline{U}(\theta), \overline{w}(\theta))(\overline{w}(\theta) - w(\theta)) d\mu(\theta) \\
= \int_{[0,1]} & -\dot{\overline{\lambda}}_1(\theta)(\overline{U}(\theta) - U(\theta)) + (-\overline{\lambda}_1(\theta))(\overline{w}(\theta) - w(\theta)) d\mu(\theta),
\end{aligned}
$$

donde hemos incorporado las condiciones de control óptimo (4.2) y (4.3). Consideremos $z(\theta) = \overline{U}(\theta) - U(\theta)$ y $\dot{v}(\theta) = \dot{\overline{\lambda}}_1(\theta)$. Luego, integrando por partes, tomando en cuenta la condición de transversalidad ($\lambda(1) = 0$), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1]} \dot{\overline{\lambda}}_1(\theta)(\overline{U}(\theta) - U(\theta)) &= (\overline{U}(\theta) - U(\theta))\overline{\lambda}_1(\theta)\Big|_0^1 - \int_{[0,1]} \overline{\lambda}_1(\theta)(\overline{w}(\theta) - w(\theta)) d\mu(\theta) \\
&= (\overline{U}(1) - U(1))\overline{\lambda}_1(1) - (\overline{U}(0) - U(0))\overline{\lambda}_1(0) - \\
&\int_{[0,1]} \overline{\lambda}_1(\theta)(\overline{w}(\theta) - w(\theta)) d\mu(\theta).
\end{aligned}
$$

Reordenando se consigue que

$$
\int_{[0,1]} -\dot{\overline{\lambda}}_1(\theta)(\overline{U}(\theta) - U(\theta)) - \overline{\lambda}_1(\theta)(\overline{w}(\theta) - w(\theta)) d\mu(\theta) = 0.
$$

Es decir, $\Pi(\overline{U}) - \Pi(U) \geq 0$. Por lo tanto, $\overline{U}$ es el óptimo global del problema P_4.

Ahora mostraremos que dicho óptimo es una función $\mathbb{H}$-convexa. Esto se consigue gracias al Teorema 2.1 sobre la conjugada abstracta de Fenchel-Moreau. En efecto, para cualquier función potencial U convexa abstracta se debe cumplir que $U = U^{\star\star}$, donde $U^{\star\star}$ es la segunda conjugada abstracta de Fenchel-Moreau.

En efecto, sea el potencial óptimo descrito en (4.13), luego su primera conjugada abstracta es

$$\overline{U}^{\star}(q) = \sup_{\theta} \left\{ \theta \frac{q^{\gamma}}{\gamma} - \frac{\sigma - \gamma}{2\sigma\gamma}(2\theta - 1)^{\frac{\sigma}{\sigma-\gamma}} - r(U_0) \right\}.$$

El supremo se alcanza con $\theta = \dfrac{q^{\sigma-\gamma}}{2} - \dfrac{1}{2}$, y con ello obtenemos que

$$\overline{U}^{\star}(q) = \frac{1}{2\sigma} q^{\sigma} + \frac{1}{2\gamma} q^{\gamma} - r(U_0). \tag{4.14}$$

Así también, la segunda conjugada abstracta viene dada por

$$\overline{U}^{\star\star}(\theta) = \sup_{q} \left\{ \frac{2\theta - 1}{2\gamma} q^{\gamma} - \frac{1}{2\sigma} q^{\sigma} + r(U_0) \right\}.$$

Eligiendo $q = (2\theta - 1)^{\frac{1}{\sigma-\gamma}}$, el valor óptimo viene dado por

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{\star\star}(\theta) &= \frac{2\theta - 1}{2\gamma}((2\theta - 1)^{\frac{1}{\sigma-\gamma}})^{\gamma} - \frac{1}{2\sigma}((2\theta - 1)^{\frac{1}{\sigma-\gamma}})^{\sigma} + r(U_0) \\
&= \frac{1}{2\gamma}(2\theta - 1)^{\frac{\sigma}{\sigma-\gamma}} - \frac{1}{2\sigma}(2\theta - 1)^{\frac{\sigma}{\sigma-\gamma}} + r(U_0) \\
&= \frac{\sigma - \gamma}{2\sigma\gamma}(2\theta - 1)^{\frac{\sigma}{\sigma-\gamma}} + r(U_0) \\
&= \overline{U}(\theta).
\end{aligned}$$

Finalmente podemos afirmar que $\overline{U}$ es el óptimo del problema bajo restricciones $\mathbb{H}$-convexas, pues se han garantizado las condiciones necesarias y suficientes para dicho resultado. Por lo tanto, se cumple que

$$\overline{U} = \arg\max_{U \in \mathcal{U}_R} \widehat{\Pi}(U).$$

El modelo anterior se puede extender para contratos en dimensión infinita, haciendo que la tarifa y el consumo dependan del tiempo. Esto es posible gracias al trabajo reciente de Carlier y Zhang (2020), quienes probaron que existe solución al problema general bajo mínimos requerimientos (principalmente para el espacio de decisión), utilizando herramientas matemáticas provenientes de sus trabajos por separado citados anteriormente.

Supongamos, con mayor grado de aplicación, que se modela las decisiones de una compañía de distribución[1] de energía eléctrica que satisface a un subconjunto de consumidores industriales que emplean la energía en su propio proceso de producción (Alasseur et al., 2018).

Existe un continuo de tipos de clientes industriales representados por $\theta \in \Theta = [0, 1]$. Las preferencias de estos individuos se expresan a través de la siguiente función de utilidad total

$$u(t, \theta, q, p) = \int_T (u_1(t, \theta, q) - p)dt, \tag{4.15}$$

donde $u_1(t, \theta, q) = 2\theta b(t)q^{\frac{1}{2}}$ es la función de utilidad instantánea sin considerar la tarifa como variable. En la teoría económica u_1 se denomina función de utilidad tipo CRRA, por sus siglas en ingles de Constant Relative Risk Aversion, siendo la utilidad marginal decreciente una de sus características sobresalientes. La función $b : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es un mapa continuo que representa las preferencias temporales y es común para todos los tipos; así por ejemplo, todos prefieren consumir (al mismo tiempo) durante el día en lugar de la noche. Adicionalmente, el horizonte temporal

[1] La empresa puede producir la energía o adquirirla de otra empresa en el mercado de generación de electricidad.

de suscripción del contrato se representa por $T = [0, 1]$.

Otro dato relevante es que el consumidor industrial tiene la posibilidad de no consumir lo ofrecido por la empresa, puesto que puede sustituir dicho consumo por otra fuente de energía, situación que no es tan habitual en consumidores residenciales.

Por su parte, la densidad de los tipos es uniforme y la utilidad de reserva de los tipos se normaliza a cero. Asimismo, el beneficio de la empresa en cada periodo de tiempo está dado por

$$\pi(t, \theta, q, p) = p - c(t)\frac{(\Sigma q)^2}{2}$$

donde $c : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es continua en t y $\Sigma q := \displaystyle\int_\Theta q d\mu(\theta)$. Observemos que la función de costos de la empresa depende de la producción (demanda) agregada. En esta modelación el costo de producción no es igual a la suma de los costos de producción de las demandas individuales, es decir, los rendimientos a escala son decrecientes (Costos medios de largo plazo crecientes). Esta modificación, que es específica en el caso de la industria de energía eléctrica, así como la introducción del tiempo, hace que esta aplicación se distinga del resto.

La razón de esta estructura particular de costos es que almacenar o producir energía adicional, cuando la producción alcanza su límite respecto a la demanda agregada (a razón de las horas pico) conlleva a una mayor complejidad tecnológica, y por tanto se vuelve particularmente más cara la producción.

Antes de resolver el problema se requiere adecuar el entorno matemático de los capítulos anteriores, empleando nuevas definiciones y modificando algunas proposiciones, lo suficiente como para obtener los resultados explícitos esperados, y que son necesarios por la introducción de la dimensión temporal.

Definición 4.1. Una estratégia de consumo *admisible* es un mapa Borel medible

$q : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Al conjunto de mapas admisibles lo denotaremos por $\mathcal{Q}$.

Sea $p : T \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_+$ un menú de precios propuesto por el principal. Con esta información los consumidores determinan óptimamente su nivel de consumo de energía eléctrica resolviendo el siguiente problema:

$$U(\theta) := \sup_{q \in \mathcal{Q}} \int_T (u_1(t, \theta, q(t)) - p(t, q(t)) dt \tag{4.16}$$

Este menú de precios p debe satisfacer la restricción de Racionalidad Individual (RI) dada por $U(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in \Theta$, la cual se expresa alternativamente por el conjunto de todos los individuos que aceptarán el contrato propuesto por la empresa, es decir,

$$\Theta(p) := \{\theta \in \Theta : U(\theta) \geq 0\}. \tag{4.17}$$

De otro modo, cuando $U(\theta) < 0$ el tipo θ no acepta el contrato y opta por otras opciones contractuales. Mientras tanto, en este ejemplo se obviará la restricción de Compatibilidad de Incentivos (CI) para simplificar los cálculos y centrar la atención en el procedimiento matemático que involucra los elementos abstractos de la convexidad.

Definición 4.2. Una tarifa $p : T \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_+$ se dirá *admisible*, si satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $(t, \theta) \in T \times \Theta(p)$ el subdiferencial abstracto $\partial^{\mathbb{H}} U_1(t, \theta)$ es diferente del vacío, donde U_1 representa al potencial instantáneo.

2. El mapa $\theta \mapsto U_1(t, \theta)$ es continua en Θ, Lebesgue diferenciable en casi todo punto, para todo $t \in T$, y además satisface

$$\int_T \int_\Theta |\dot{U}_1(t, \theta)| d\mu(\theta) dt < +\infty.$$

3. Sea $\overline{q} : T \times \Theta \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dado por

$$\overline{q}(t,\theta) = \left(\frac{\dot{U}_1(t,\theta)}{2b(t)} \right)^2, \tag{4.18}$$

entonces p restringido al conjunto $\{(t,q) \in T \times Q : \exists \theta \in \Theta(p), q = \overline{q}(t,\theta)\}$ es $\mathbb{H}$-convexa. Al conjunto de tarifas admisibles lo denotaremos por $\mathcal{P}$.

Hemos definido la condición para la convexidad abstracta de p, pues de esa manera podemos caracterizarla completamente a través de su conjugada abstracta U_1. En este caso, consideramos que las tarifas admisibles p sean $\mathbb{H}$-convexas solo en la pre imagen de $\Theta(p)$ y no en el conjunto total de consumo admisible $\mathcal{Q}$.

Definición 4.3. Sea el mapa $U_1 : T \times \Theta \to \mathbb{R}$, luego la $\mathbb{H}$-conjugada, denotada por $U_1^\star : T \times Q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ está definida por

$$U_1^\star(t,q) := \sup_{\theta \in \Theta} \{u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\} \text{ para todo } (t,q) \in T \times Q.$$

El siguiente lema es una adecuación del Teorema 2.1. de Fenchel-Moreau.

Lema 4.1. La función $U_1 : T \times \Theta \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{H}$-convexa si y solo si $U_1(t,\theta) = U_1^{\star\star}(t,\theta)$ para todo $(t,\theta) \in T \times \Theta$. Siendo $U_1^{\star\star}$ la segunda $\mathbb{H}$-conjugada de U_1.

Demostración. Presentaremos una prueba alternativa a lo ofrecido en el Capítulo 2. Así, para cualquier $U_1 : T \times \Theta \to \mathbb{R}$ probaremos que $U_1^\star(t,q) = U_1^{\star\star\star}(t,q)$ para todo $(t,q) \in T \times Q$. En efecto, por definición de $\mathbb{H}$-conjugada, para todo $(t,q) \in T \times Q$,

$$U_1^\star(t,q) := \sup_{\theta \in \Theta} \{u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\}.$$

Similarmente,

$$U_1^{\star\star}(t,\theta) := \sup_{q' \in Q} \{u_1(t,\theta,q') - \sup_{\theta \in \Theta} \{u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\}\}$$

y

$$U_1^{\star\star\star}(t,\theta) := \sup_{\theta'\in\Theta}\{u_1(t,\theta',q') - \sup_{q'\in Q}\{u_1(t,\theta,q') - \sup_{\theta\in\Theta}\{u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\}\}\}.$$

Por propiedades básicas de los operadores supremos se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
U_1^{\star\star\star}(t,\theta) &= \sup_{\theta'\in\Theta}\inf_{q'\in Q}\sup_{\theta\in\Theta}\{u_1(t,\theta',q') - u_1(t,\theta,q') + u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\} \\
&= \sup_{\theta'\in\Theta}\inf_{q\in Q}\sup_{\theta\in\Theta}\{u_1(t,\theta',q) - u_1(t,\theta,q) + u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\}, \quad (q = q') \\
&= \sup_{\theta'\in\Theta}\inf_{q\in Q}\sup_{\theta\in\Theta}\{u_1(t,\theta',q) - U_1(t,\theta)\} \\
&\leq \sup_{\theta\in\Theta}\{u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\} \\
&= U_1^{\star}(t,q).
\end{aligned}$$

La desigualdad contraria se obtiene reemplazando $\theta = \theta'$ en el procedimiento anterior. $\square$

Lema 4.2. Sea $U_1 : T\times\Theta \to \mathbb{R}$ una función potencial tal que $\theta \mapsto U_1(t,\theta)$ es no decreciente y convexa. Entonces U_1 es $\mathbb{H}$-convexa.

Demostración. Según el lema anterior la convexidad abstracta es equivalente a afirmar que $U_1(t,\theta) = U_1^{\star\star}(t,\theta)$, por consiguiente

$$\begin{aligned}
U_1(t,\theta) &= \sup_{q\in Q}\left\{u_1(t,\theta',q) - \sup_{\theta\in\Theta}\{u_1(t,\theta,q) - U_1(t,\theta)\}\right\} \\
&= \sup_{q\in Q}\left\{2\theta' b(t)q^{\frac{1}{2}} - \sup_{\theta\in\Theta}\{2\theta b(t)q^{\frac{1}{2}} - U_1(t,\theta)\}\right\} \\
&= \sup_{q\in Q}\min_{\theta\in[0,1]}\left\{2(\theta'-\theta)b(t)q^{\frac{1}{2}} + U_1(t,\theta)\}\right\}
\end{aligned}$$

Como $U_1(t,\theta)$ es convexa en θ, se sigue que para todo $(t,\theta,q)\in T\times[0,1]\times(0,+\infty)$ la expresión $2(\theta'-\theta)b(t)q^{\frac{1}{2}} + U_1(t,\theta)$ es convexa en θ, con (t,θ') fijos, y cuasicóncava con respecto a q en el conjunto $(0,+\infty)$. Luego, como $[0,1]$ es convexo y compacto podemos emplear el teorema minimax de Sion (ver Teorema 3.4 en Sion (1957)), obteniendo la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
\sup_{q>0} \min_{\theta\in[0,1]} \left\{2(\theta'-\theta)b(t)q^{\frac{1}{2}} + U_1(t,\theta)\right\} &= \min_{\theta\in[0,1]} \sup_{q>0} \left\{2(\theta'-\theta)b(t)q^{\frac{1}{2}} + U_1(t,\theta)\right\} \\
&= \min_{\theta\in[0,1]} \{+\infty \mathbf{1}_{\theta>\theta'} + U_1(t,\theta)\} \\
&= U_1(t,\theta).
\end{aligned}$$

En este procedimiento, calcular el supremo con $2q^{\frac{1}{2}}$ es lo mismo que hacerlo con q, es decir,

$$\sup_{q>0} \min_{\theta\in[0,1]} \left\{2(\theta'-\theta)b(t)q^{\frac{1}{2}} + U_1(t,\theta)\right\} = \sup_{q>0} \min_{\theta\in[0,1]} \left\{(\theta'-\theta)q + U_1(t,\theta)\right\},$$

la cual corresponde a la conjugada convexa clásica, obteniendo así el resultado deseado por el teorema de Fenchel-Moreau. $\square$

Resolviendo el problema de los consumidores

Utilizando el teorema de intercambio entre el operador supremo y el de integración (ver Teorema 14.60 en Rockafellar y Wets (1998)) el problema del consumidor (4.16) resulta en un problema de optimización puntual. En efecto,

$$\begin{aligned}
U(\theta) &= \sup_{q\in\mathcal{Q}} \int_T (u_1(t,\theta,q(t)) - p(t,q(t))dt \\
&= \int_T \sup_{q\in\mathcal{Q}} (u_1(t,\theta,q(t)) - p(t,q(t))dt.
\end{aligned}$$

Es decir, el potencial de todo el horizonte de tiempo U es la suma de los potenciales instantáneos.

$$U(\theta) = \int_T U_1(t,\theta)dt. \tag{4.19}$$

Ahora probaremos que $\overline{q}(t,\theta)$, de la expresión (4.18), es el óptimo para todo $\theta \in \Theta(p)$ y para todo $t \in T$.

Así, según la Definición 4.2, con $p \in \mathcal{P}$ se satisface que $\partial^{\mathbb{H}} U_1(t,\theta) \neq \emptyset$ para todo $(t,\theta) \in T \times \Theta(p)$. Por lo tanto, existe una estrategia de consumo, llámese $\overline{q} : T \to \mathbb{R}_+$, que pertenece a $\partial^{\mathbb{H}} U_1(t,\theta)$ para casi todo $t \in T$. Introduciendo esta senda de consumo en la optimización de cada periodo obtenemos

$$\begin{aligned} U_1(t,\theta) &= u_1(t,\theta,\overline{q}(t)) - p(t,\overline{q}(t))dt \\ &= 2\theta b(t)\overline{q}(t)^{\frac{1}{2}} - p(t,\overline{q}(t))dt \end{aligned} \tag{4.20}$$

Sabiendo que u_1 no depende de θ cuando $q = 0$, el teorema de la envolvente asegura que $\theta \mapsto U_1(t,\theta)$ es Lebesgue diferenciable en casi todo punto, y que para todo $(t,\theta) \in T \times \Theta(p)$

$$\dot{U}_1(t,\theta) = 2b(t)\overline{q}(t)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.21}$$

Despejando obtenemos la expresión (4.18).

Es conveniente ahora redefinir el conjunto de consumidores que aceptan el contrato $\Theta(p)$, empleando la función potencial U, esto es,

$$\Theta(p) = \overline{\Theta}(U_1) := \left\{ \theta \in \Theta : U(\theta) = \int_T U_1(t,\theta) \geq 0 \right\}. \tag{4.22}$$

Puesto que U_1 es no decreciente en θ, entonces, para todo $\theta_0 \in [0,1]$,

$$\int_T U_1(t,\theta_0)d\theta \geq 0 \Longrightarrow \int_T U_1(t,\theta)d\theta \geq 0, \text{ para todo } \theta \geq \theta_0.$$

El conjunto $\overline{\Theta}(U_1)$ tiene necesariamente la forma $\overline{\Theta}(U_1) = [\theta_0, 1]$, donde $\theta_0 \in [0,1]$ es una incógnita que se determina verificando que $U(\theta_0) = \displaystyle\int_T U_1(t,\theta_0)dt = 0$.

Resolviendo el problema del principal

La tarea del principal es elegir una tarifa admisible $p \in \mathcal{P}$ que resuelva el siguiente problema:

$$\Pi := \sup_{p\in\mathcal{P}} \int_T \left[\int_\Theta p(t,\overline{q}(t,\theta))d\mu(\theta) - \frac{c(t)}{2}\left(\int_\Theta \overline{q}(t,\theta)d\mu(\theta)\right)^2 \right] dt. \tag{4.23}$$

Incorporando (4.20), (4.21) y (4.22) podemos expresar Π en términos del potencial instantáneo U_1. En efecto, omitiendo los argumentos de las funciones y haciendo $\overline{\Theta} := \overline{\Theta}(U_1)$, tenemos

$$\Pi := \sup_{p\in\mathcal{P}} \int_T \left[\int_{\overline{\Theta}} \left(\theta\dot{U}_1 - U_1\right) d\mu - \frac{c}{2}\left(\int_{\overline{\Theta}} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b}\right)^2 d\mu\right)^2 \right] dt. \tag{4.24}$$

La segunda condición de la Definición 4.2 asegura que la derivada del potencial U_1 pertenezca a un conjunto más específico. Para ello, sea $\mathcal{U}$ el espacio de funciones potenciales U_1 tal que, para todo $t \in T$, $\theta \mapsto U_1(t,\theta)$ es continua, no decreciente, y satisface

$$\int_T \int_\Theta |\dot{U}_1(t,\theta)| d\mu(\theta) dt < +\infty.$$

Volvamos a escribir el problema del principal ahora para funciones U_1 en $\mathcal{U}$.

$$\widetilde{\Pi} := \sup_{U_1\in\mathcal{U}} \int_T \left[\int_{\overline{\Theta}} \left(\theta\dot{U}_1 - U_1\right) d\mu - \frac{c}{2}\left(\int_{\overline{\Theta}} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b}\right)^2 d\mu\right)^2 \right] dt. \tag{4.25}$$

En general se satisface que $\widetilde{\Pi} \geq \Pi$. La relajación del problema está bien definida desde que los potenciales en $\mathcal{U}$ son no decrecientes con respecto a θ y por lo tanto Lebesgue diferenciable en casi todo punto. Ahora el objetivo es calcular $\widetilde{\Pi}$.

El problema de elección del potencial $U_1 \in \mathcal{U}$ puede pasar primero por resolver el problema de encontrar $\theta_0 \in [0,1]$, esto significa que debemos optimizar sobre los potenciales definidos en $[\theta_0, 1]$. Así, el problema (4.25) puede escribirse como

$$\widetilde{\Pi} := \sup_{\theta_0 \in [0,1]} \sup_{U_1 \in \mathcal{U}(\theta_0)} \int_T \left[\int_{[\theta_0,1]} \left(\theta \dot{U}_1 - U_1 \right) d\mu - \frac{c}{2} \left(\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\mu \right)^2 \right] dt \tag{4.26}$$

donde

$$\mathcal{U}(\theta_0) := \left\{ U_1 \in \mathcal{U} : U(\theta_0) = \int_T U_1(t, \theta_0) dt = 0 \right\} = \{ U_1 \in \mathcal{U} : \overline{\Theta}(U_1) = [\theta_0, 1] \}.$$

La formulación anterior permite reducir el problema a una dimensión. Integrando por partes (4.26) y tomando en cuenta el dato de la distribución uniforme de los tipos, para todo $\theta_0 \in [0, 1]$ y para todo $U_1 \in \mathcal{U}(\theta_0)$, obtenemos

$$\int_T \left[\int_{[\theta_0,1]} (2\theta - 1) \dot{U}_1 d\theta - \frac{c}{2} \left(\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta \right)^2 \right] dt + (\theta_0 - 1) \int_T U_1(t, \theta_0) dt,$$

donde el último término integral es cero, acorde a la definición de $\mathcal{U}(\theta_0)$. Finalmente, el problema relajado se reduce a

$$\begin{aligned} \widetilde{\Pi} &:= \sup_{\theta_0 \in [0,1]} \sup_{U_1 \in \mathcal{U}(\theta_0)} \int_T \left[\int_{[\theta_0,1]} (2\theta - 1) \dot{U}_1 d\theta - \frac{c}{2} \left(\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta \right)^2 \right] dt \\ &= \sup_{\theta_0 \in [0,1]} \sup_{U_1 \in \mathcal{U}(\theta_0)} \Psi_{\theta_0}(U_1). \end{aligned}$$

Analizando los elementos de Ψ_{θ_0}, esta resulta ser continua, Fréchet diferenciable, y cóncava. Luego, para todo $\widetilde{U}_1 \in L^1(T \times [0, 1])$, la derivada de Ψ_{θ_0} resulta en la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{\theta_0}}{\partial \widetilde{U}_1} = & \int_T \int_{[\theta_0,1]} (2\theta - 1) \dot{\widetilde{U}}_1 d\theta dt - \\ & \int_T \int_{[\theta_0,1]} 2 \left(\frac{1}{2b} \right)^2 \dot{\widetilde{U}}_1 \dot{U}_1 . c \left(\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta \right) d\theta dt. \end{aligned}$$

Debido a la concavidad de Ψ_{θ_0}, la condición necesaria y suficiente de optimalidad con θ_0 fijo es $\frac{\partial \Psi_{\theta_0}}{\partial \widetilde{U}_1} \leq 0$, para todo $\widetilde{U}_1$ que pertenece al cono tangente del conjunto cerrado $\mathcal{U}(\theta_0)$ en el punto U_1, el mismo que se denota por $\mathbf{T}_{\mathcal{U}(\theta_0)}(U_1)$. En efecto, juntando las integrales y factorizando la expresión $\dot{\widetilde{U}}_1(t,\theta)$ en la anterior derivada, para todo $\widetilde{U}_1 \in \mathbf{T}_{\mathcal{U}(\theta_0)}(U_1))$ y casi todo $(t,\theta) \in T \times [\theta_0, 1]$, se sigue que

$$\dot{\widetilde{U}}_1 \left[(2\theta - 1) - 2c \left(\frac{1}{2b} \right)^2 \left(\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta \right) \dot{U}_1 \right] \leq 0.$$

Esto significa que el óptimo $U_1 \in \mathcal{U}(\theta_0)$ debe verificar

$$\dot{U}_1 = \frac{2b^2 \max\{2\theta - 1, 0\}}{c \displaystyle\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta}. \tag{4.27}$$

Observemos que la función $\dot{U}_1$ es constante o lineal con respecto a θ, en ambos casos U_1 resulta ser convexa y no decreciente. Entonces U_1 es $\mathbb{H}$-convexa, según el Lema 4.2, así como lo es también p por definición. Luego U_1 es la $\mathbb{H}$-conjugada de p y en consecuencia $p \in \mathcal{P}$, con lo cual se concluye que $\widetilde{\Pi} = \Pi$.

Reagrupemos convenientemente (4.27) y elevemos al cuadrado para obtener

$$\left(\frac{c}{b} \right)^2 \left(\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta \right)^2 \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 = \max\{2\theta - 1, 0\}^2.$$

Integrando conseguimos que

$$\left(\frac{c}{b} \right)^2 \left(\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta \right)^3 = \int_{[\theta_0,1]} \max\{2\theta - 1, 0\}^2 d\theta.$$

Luego, sea $s(t,\theta_0) := \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{[\theta_0,1]} \text{máx}\{2\theta - 1, 0\}^2 d\theta \right)^{\frac{1}{3}}$, con lo cual

$$\int_{[\theta_0,1]} \left(\frac{\dot{U}_1}{2b} \right)^2 d\theta = s(t,\theta_0).$$

Haciendo los reemplazos en el funcional $\widetilde{\Pi}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Pi} &= \sup_{\theta_0 \in [0,1]} \int_T \left[\int_{[\theta_0,1]} (2\theta - 1) \frac{2b^2 \,\text{máx}\{2\theta - 1, 0\}}{cs(t,\theta_0)} d\theta - \frac{c}{2} \left(s(t,\theta_0) \right)^2 \right] dt \\
&= \sup_{\theta_0 \in [0,1]} \int_T \left[2c(s(t,\theta_0))^2 - \frac{c}{2} \left(s(t,\theta_0) \right)^2 \right] dt \\
&= \sup_{\theta_0 \in [0,1]} \int_T \frac{3c}{2} (s(t,\theta_0))^2 dt.
\end{aligned}$$

Observemos que el argumento del supremo es una función continua que alcanza su máximo sobre el compacto $[0,1]$ para algún $\overline{\theta}_0$. Además,

$$s(t,\theta_0) := \left(\frac{b}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{6} \left(1 - \text{máx}\{2\theta_0 - 1, 0\}^3 \right) \right)^{\frac{1}{3}}$$

es nodecreciente en $[0, \frac{1}{2}]$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Pi} &= \sup_{\theta_0 \in [\frac{1}{2},1]} \int_T \frac{3c}{2} (s(t,\theta_0))^2 dt && (4.28) \\
&= \sup_{\theta_0 \in [\frac{1}{2},1]} \left\{ \frac{3}{2} \left(\int_T \frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}} dt \right) \int_{[\theta_0,1]} \text{máx}\{2\theta - 1, 0\}^2 d\theta \right\} \\
&= \sup_{\theta_0 \in [\frac{1}{2},1]} \left\{ \frac{3}{2} \left(\int_T \frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}} dt \right) \left(\frac{1}{6} \left(1 - \text{máx}\{2\theta_0 - 1, 0\}^3 \right) \right)^{\frac{2}{3}} \right\} && (4.29) \\
&= \sup_{\theta_0 \in [\frac{1}{2},1]} g(\theta_0). && (4.30)
\end{aligned}$$

Derivando g obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_0} = - \int_T \frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}} dt \left(\frac{1}{6} \left(1 - \text{máx}\{2\theta_0 - 1, 0\}^3 \right) \right)^{-\frac{1}{3}} \text{máx}\{2\theta_0 - 1, 0\}^2.$$

Se observa que la derivada es decreciente en $(\frac{1}{2}, 1]$, lo cual implica que es cóncava. Por lo tanto, el óptimo resultante $\overline{\theta}_0$ es único. Con este valor óptimo procedemos a encontrar la forma explícita del potencial U_1. Esto se consigue integrando ambos lados de (4.27), obteniendo

$$U_1(t,\theta) = \left(\frac{b(t)}{c(t)}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{6}\left(1 - \text{máx}\{2\theta_0 - 1, 0\}^3\right)\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{2b^2(t)}{c(t)} \int_{[\overline{\theta}_0, \theta]} \text{máx}\{2\tilde{\theta} - 1, 0\} d\tilde{\theta}. \quad (4.31)$$

La solución viene dada por

$$U_1(t,\theta) = m(t)\left(\text{máx}\{2\theta - 1, 0\}^2 - (2\overline{\theta}_0 - 1)^2\right), \quad (4.32)$$

donde

$$m(t) := \left(\frac{3b^4(t)}{c(t)}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - (2\overline{\theta}_0 - 1)^3\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Tomando en cuenta la ecuación (4.20) se verifica que para $q \geq 0$ la expresión $p(t, \overline{q}(t,\theta)) = 2\theta b(t) q^{\frac{1}{2}} - U_1(t,\theta)$ es cóncava en $[0,1]$, entonces alcanza su máximo en el punto

$$\overline{\theta}(q) := \mathbf{1}_{q > \left(\frac{2m(t)}{b(t)}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b(t)}{2m(t)} q^{\frac{1}{2}}\right) \mathbf{1}_{q \leq \left(\frac{2m(t)}{b(t)}\right)^2}.$$

Finalmente, la tarifa óptima tiene la siguiente forma:

$$p(t,q) = \begin{cases} 2b(t)q^{\frac{1}{2}} + m(t)\left((2\overline{\theta}_0 - 1)^2 - 1\right), \text{ si } q > \left(\frac{2m(t)}{b(t)}\right)^2, \\ b(t)q^{\frac{1}{2}} + \frac{b^2(t)}{4m(t)} q + m(t)(2\overline{\theta}_0 - 1)^2, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Note que para todo $(t,\theta) \in T \times [0,1]$, el mapa $q \mapsto 2b(t)\theta q^{\frac{1}{2}} - p(t,q)$ es decreciente en $\mathbb{R}_+$ si $\theta < \frac{1}{2}$, y es cóncava en $\mathbb{R}_+$ si $\theta \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, este logra su máximo en el punto

$$\overline{q}(t,\theta) := \left(\frac{2m(t)}{b(t)}\right)^2 (2\theta - 1)^2 \mathbf{1}_{\theta \in (\frac{1}{2}, 1]}.$$

La tarifa tiene un componente lineal y no lineal respecto del consumo de energía eléctrica. El primero refleja la relación contemporánea entre el consumo y el precio; y el segundo opera solo cuando el consumo es lo suficientemente alto, y se diseña para ponderar a los agentes de consumo elevado a través de incrementos marginales de precio también elevados.

Aunque menos notorio, el hecho que la tarifa óptima no tenga un componente independiente del consumo, que refleje la tarifa de entrada o de suscripción de contrato, se debe al supuesto de utilidad de reserva de los tipos normalizada a cero. Además, la relación del precio con el tiempo indica el ajuste que la empresa realiza en situaciones como por ejemplo el consumo en horas pico.

Conclusiones

1. En los capítulos 1 y 2 desarrollamos el modelo estandar Principal-Agente con selección adversa y los conceptos básicos de la convexidad abstracta, respectivamente. Por un lado, se evidencia que el modelo P-A es un problema de optimización con restricciones de incentivos y participación, donde el supuesto *single-crossing* juega un rol esencial para determinar la suficiencia de la condición local de incentivos. Por otro lado, la convexidad abstracta extiende de manera natural la teoría clásica de la convexidad. En ambos casos se buscó facilitar la comprensión a los lectores que no están familiarizados con las ideas de la economía de la información y los nuevos elementos matemáticos.

2. Los resultados centrales de la tesis se demuestran en el Capítulo 3, tomando como base los trabajos de Carlier (2001) y McCann y Zhang (2018), quienes aprovecharon las conexiones entre la teoría del transporte y los modelos de incentivos. Así, establecimos la equivalencia entre implementabilidad y convexidad abstracta de la función potencial, de este modo mostramos que el modelo general Principal-Agente se reescribe como un problema variacional con restricciones de convexidad abstracta. Haciendo uso de seis lemas, principalmente sobre convergencia de la función potencial convexa abstracta, se prueba que existe solución óptima para el problema planteado, empleando herramientas de análisis real y análisis convexo abstracto. Considerando supuestos adicionales de convexidad en las funciones de utilidad se muestra

que la concavidad del programa es posible. Esto permite encontrar características básicas de la solución óptima y facilita en gran medida el desarrollo computacional.

3. El estudio de una empresa monopólica que enfrenta problemas de selección adversa se desarrolló en el Capítulo 4 a modo de aplicación. Asimismo, todos los procedimientos realizados se pueden replicar para cualquier problema que sea descrito en el marco del modelo general P-A. Se destaca la importancia de los elementos abstractos de la convexidad en el proceso de cálculo de soluciones, contribuyendo al objetivo de encontrar soluciones explícitas. De ese modo, la determinación de tarifas no lineales se puede estudiar con bastante detalle.

4. Finalmente, los lectores de las áreas de ciencias y teoría económica pueden encontrar en esta tesis un punto de partida para continuar con el desarrollo reciente de investigaciones que emplean la teoría de la convexidad abstracta, fortaleciendo el vínculo entre la economía y las matemáticas aplicadas.

Bibliografía

Alasseur C., Ekeland I., Élie R., Hernandez Santibáñez N. y Possamaï D. (2018). An adverse selection approach to power pricing. SIAM Journal on Control and Optimization 58(2).

Andramonov M (2002). A survey of methods of abstract convex programming, Journal of Statis- tics and Management Systems 5 (1-3) 21-37.

Armstrong, M. (1996). Multiproduct nonlinear pricing. Econometrica 64 , N°. 1, 51–75.

Basov S. (2002). A partial characterization of the solution of the multidimensional screening problem with nonlinear preferences. The University of Melbourne, Department of Economics, Research Paper 860.

Basov S. (2005). Multidimensional screening. Studies in Economic Theory, 22. Springer, Berlin.

Brenier Y. (1991). Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. Comm. Pure Applied Mathematics. 44(4), 375–417.

Carlier G. (2001). A general existence result for the principal-agent problem with adverse selection. J. Mathematical. Economics. 35 , No. 1, 129–150.

Carlier G. y Dupuis X. (2016). An Iterated Projection Approach to Variational Problems Under Generalized Convexity Constraints. Appl Math Optim.

Carlier G. y Zhang K. (2020). Existence of solutions to principal–agent problems with adverse selection under minimal assumptions. Journal of Mathematical Economics 88:64-71.

Cerdá E. (2001). Optimización dinámica, Madrid, España, Prentice Hall.

Dolecki S. y Kurcyusz S. (1978). On Φ-convexity in extremal problems. SIAM J. Control Optim. 16, 277-300.

De la fuente A. (2000). Mathematical Methods and Models for Economists. Cambridge University Press.

Ekeland I. y Témam R. (1999). Convex analysis and variational problems, volume 28 of Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, english edition. ISBN 0-89871-450-8.

Federer, Herbert (1969). Geometric measure theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 153. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

Figalli A., Kim Y. y McCann, R. (2011). When is multidimensional screening a convex program? Journal of Economic Theory 146, N°. 2, 454–478.

Folland G. (1999). Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, New York, Wiley.

Gangbo W. y McCann R. (1996). The geometry of optimal transportation. Acta Math., 177:113-161.

Guesnerie, R. (1981). On taxation and incentives: Further reections on the limits to redistribution. Mimeo.

Laffont J. y Martimort D. (2002). The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model. Princeton University Press.

Laffont J. y Tirole J. (1993). A Theory of Incentives in Procurement and Regulation, vol. 1, first ed. The MIT Press.

Lomelí H. y Rumbos B. (2003). Métodos dinámicos en Economía. Otra búsqueda del tiempo perdido, México, Thomson.

Lopez M., Rubinov A. y deSerio V. (2005). Stability of semi-infinite inequality systems involving min-type functions, Numerical Functional Analysis and Optimization 26 (1) 81-112.

Ma X., Trudinger N., y Wang X. (2005). Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. Arch. Ration. Mech. Anal. 177(2), 151–183.

McCann R. y Zhang K. (2018) On Concavity of the Monopolist's Problem Facing Consumers with Nonlinear Price Preferences. Communications on Pure and Applied Mathematics 72(7) 1386-1423.

McAfee R. y McMillan, J. (1988). Multidimensional incentive compatibility and mechanism design. J. Econom. Theory 46 (1988), No. 2, 335–354.

Mirrlees J. (1971). An exploration in the theory of optimum income taxation. Rev. Econom. Stud.,38:175:208.

Monteiro P. y Page F. (1998). Optimal selling mechanisms for multiproduct monopolists: incentive compatibility in the presence of budget constraints. J. Mathematical Economics. 30, No. 4, 473–502.

Moreau J. (1970). Inf-convolutions, sous-additivité, convexité des functions numériques. J. Math. pures et appl. 49, 109–154.

Nöldeke G. y Samuelson L. (2018). The implementation duality. Econometrica, 86 (4):1283-1324.

Nedic´ A., Ozdaglar A. y Rubinov A. (2007). Abstract convexity for nonconvex optimization duality, Optimization 56, 655–674.

Ok E. (2007). Real Analysis with Economic Applications, Princeton: Princeton University Press.

Pallaschke D. y Rolewicz S. (1997). Foundations of Mathematical Optimization. Kluwer Academic, Dordrecht.

Penot J. (2010). Are Dualities Appropriate for Duality Theories in Optimization?, Journal of Global Optimization, 47(3), 503-525.

Quinzii M. y Rochet J. (1985). Multidimensional screening. J. Math. Econom. 14 (1985), N°. 3, 261–284.

Rockafellar R y Wets R. (1998). Variational Analysis. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin.

Rolewicz S. (2003).Φ-convex functions defined on metric spaces. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 115, N°. 5.

Rochet J. (1985). The taxation principle and multi-time Hamilton-Jacobi equations. Journal of Mathematical Economics 14 (1985) 113-128.

Rubinov A. (2000). Abstract Convex Analysis and Global Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London.

Singer I. (1997). Abstract convex analysis. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. Wiley, New York.

Singer I. (1999). Duality in quasi-convex supremization and reverse convex in mization via abstract convex analysis, and applications to approximation, Optimization 45 (1-4) 255-307.

Sion M. (1958). On general minimax theorems, Pac. J. Math. 8, 171-176.

Spence M. (1974). Competitive and optimal responses to signals: an analysis of efficiency and distribution. Journal of Economic Theory, 7:296:332.

Trudinger N. (2014). On the local theory of prescribed Jacobian equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 34 , N°. 4, 1663–1681.

Villani C. (2008). Optimal transport: old and new, volume 338 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschafte. Springer.

Zhang K. (2018). Existence, uniqueness, concavity and geometry of the monopolist's problem facing consumers with nonlinear price preferences. Doctoral Thesis. Graduate Department of Mathematics University of Toronto.