

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**TESIS**

**PROPUESTA DE SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL  
ANÁLISIS SÍSMICO DE RESERVORIOS CIRCULARES  
APOYADOS APLICANDO LA ECUACIÓN DE MORLEY-  
KOITER.**

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO CIVIL**

**ELABORADO POR  
JOSUE EDISON AZURIN RENDICH**

**ASESOR  
Ing. RICHARD HIPÓLITO CRUZ GODOY**

**LIMA-PERÚ**

**2024**

© 2024, Universidad Nacional de Ingeniería. Todos los derechos reservados

**“El autor autoriza a la UNI a reproducir la tesis en su totalidad o en parte, con fines estrictamente académicos.”**

Azurín Rendich, Josué Edison

[josue-5806@hotmail.com](mailto:josue-5806@hotmail.com)

[josueazurin@gmail.com](mailto:josueazurin@gmail.com)

980780969

## ÍNDICE

<b>Resumen</b> .....	<b>4</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>5</b>
<b>Prólogo</b> .....	<b>6</b>
<b>Lista de cuadros</b> .....	<b>7</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>8</b>
<b>Lista de símbolos y siglas</b> .....	<b>10</b>
<b>Capítulo I: Introducción</b> .....	<b>17</b>
1.1 Generalidades.....	17
1.2 Planteamiento de la realidad problemática.....	17
1.2.1 Objetivo general.....	18
1.2.2 Objetivo específico.....	18
1.3 Formulación de hipótesis .....	19
1.3.1 Hipótesis general .....	19
1.3.2 Hipótesis específicas .....	19
<b>Capítulo II: Marcos teórico y conceptual</b> .....	<b>22</b>
2.1 Marco teórico .....	22
2.1.1 Teoría elemental de cáscaras .....	22
2.1.1.1 Introducción .....	22
2.1.1.2 Teoría de cáscaras .....	22
2.1.1.3 Descripción matemática de la superficie .....	24
2.1.1.4 Elementos shell en programa de elementos finitos .....	25
2.1.2 Métodos disponibles para el análisis de tanques circulares .....	25
2.1.2.1 Coeficientes del PCA (Portland Cement Association) .....	25
2.1.2.2 Método de la viga sobre fundación elástica.....	26
2.1.2.3 Programas computacionales basados en elementos finitos .....	26
2.2 Fundamento teórico y requerimiento de normas .....	27
2.2.1 Consideraciones geométricas .....	27
2.2.2 Relaciones fundamentales .....	28
2.2.2.1 Relación cinemática.....	29
2.2.2.2 Relación constitutiva .....	31
2.2.2.3 Relación de equilibrio.....	34
2.2.2.4 Condiciones de Contorno.....	36

2.2.3	Diseño sísmico de reservorios de concreto (ACI 350.3-06).....	39
2.2.3.1	Modelo dinámico.....	39
2.2.3.2	Masas impulsiva y convectiva.....	40
2.2.3.3	Uso de cargas estáticas de diseño sísmico (ACI 350.3-06).....	40
2.2.4	Norma técnica E.030 Diseño Sismorresistente del RNE.....	42
2.2.4.1	Dirección del sismo.....	42
<b>Capítulo III: Solución analítica de reservorios circulares con base en la ecuación de Morley-Koiter .....</b>		<b>43</b>
3.1	Introducción.....	43
3.2	Sistema de ecuaciones diferenciales.....	43
3.2.1	Ecuaciones diferenciales para los desplazamientos.....	43
3.2.2	Una sola ecuación diferencial para $U_z$ .....	45
3.3	Cáscaras cilíndricas cerradas de contorno curvo.....	48
3.3.1	Fuerzas externas como series trigonométricas infinitas.....	48
3.3.2	Tres comportamientos carga-deformación.....	49
3.3.2.1	Modo axisimétrico.....	50
3.3.2.2	Modo viga.....	51
3.3.2.3	Modos autobalanceados.....	51
3.3.3	Solución completa para el modo axisimétrico.....	52
3.3.3.1	Ecuación diferencial.....	52
3.3.3.2	Solución homogénea.....	54
3.3.3.3	Solución no homogénea.....	54
3.3.3.4	Solución completa.....	55
3.3.4	Solución completa para el modo viga.....	58
3.3.4.1	Ecuación diferencial.....	58
3.3.4.2	Solución homogénea.....	59
3.3.4.3	Solución completa.....	61
3.4	Ejemplo numérico.....	73
3.4.1	Descripción de la estructura y cargas actuantes.....	73
3.4.2	Fuerza hidrodinámica impulsiva.....	76
3.4.3	Fuerza hidrodinámica convectiva.....	78
3.4.4	Fuerza inercial.....	80
3.4.5	Aceleración vertical del terreno.....	82
3.4.6	Presión hidrostática.....	83
<b>Capítulo IV: Análisis computacional de reservorios circulares .....</b>		<b>86</b>

---

4.1	Introducción .....	86
4.2	Elementos shell en programas de análisis estructural basados en elementos finitos.....	86
4.2.1	Elemento shell .....	86
4.2.2	Grados de libertad.....	88
4.2.3	Shell thin y shell thick.....	88
4.3	Modelamiento estructural .....	90
4.3.1	Modelamiento del tanque .....	90
4.3.2	Cargas actuantes .....	91
4.3.3	Resultados del análisis estructural .....	94
<b>Capítulo V: Contrastación y validación de resultados.....</b>		<b>100</b>
5.1	Resultados gráficos de fuerzas internas.....	100
5.1.1	Resultados debido a la presión hidrodinámica impulsiva.....	100
5.1.2	Resultados debido a la presión hidrodinámica convectiva.....	103
5.1.3	Resultados debido a la carga inercial.....	105
5.1.4	Resultados debido a la carga por la aceleración vertical .....	108
5.1.5	Resultados debido a la presión hidrostática .....	109
5.2	Resumen comparativo de resultados .....	111
<b>Conclusiones .....</b>		<b>118</b>
<b>Recomendaciones .....</b>		<b>120</b>
<b>Referencias bibliográficas .....</b>		<b>121</b>
<b>Anexos .....</b>		<b>123</b>

## RESUMEN

A medida del avance tecnológico y la creación de softwares para el análisis estructural, se ha dejado de lado el método analítico para la solución de algunos problemas, lo cual nos ha llevado a desconocer el procedimiento de como hallar ciertos resultados. Un gran ejemplo de esto, es el diseño para reservorios circulares apoyados, ya que no existe un método analítico, para lograr encontrar los esfuerzos causados por fuerzas de naturaleza sísmica, en las paredes del reservorio. Por lo cual, la única manera de realizar un diseño para esta estructura, es empleando un programa de análisis estructural.

En la presente investigación, se propone la aplicación de una solución analítica, para el análisis sísmico y estático de reservorios circulares apoyados. Para lo cual, se tiene como base fundamental, la ecuación de Morley-Koiter, ya que ha demostrado en la tesis de doctorado del Dr. Hoefakker, ser eficiente para dar solución al problema de estructuras cilíndricas de pared delgada, sin embargo, dicha tesis se direcciona principalmente hacia el análisis de chimeneas sometidas a cargas de viento.

Mencionado esto, lo innovador de esta investigación, es demostrar que la ecuación de Morley – Koiter puede ser aplicada en reservorios cilíndricos apoyados, sometidos a cargas estáticas provocadas por el empuje del agua hacia las paredes, como cargas estáticas que pueden representar la presión del agua sobre las paredes, las cargas dinámicas por oleaje y demás cargas dinámicas que se presentan durante un evento sísmico.

El éxito de esta investigación, se logrará luego de que al aplicar la ecuación de Morley - Koiter a reservorios circulares apoyados, sometidos a cargas estáticas de sismo, presente resultados coherentes y similares a los resultados que se obtienen mediante el uso de un programa de análisis estructural. Demostrando su importancia y simplicidad para el diseño de tanques apoyados circulares.

Esta investigación, es de gran relevancia para los profesionales dedicados al diseño estructural, ya que podrán disponer de un método analítico, el cual llevándolo a una hoja de cálculo y sistematizándolo, será una herramienta de gran ayuda para dar solución a tanques circulares sometidos a cargas sísmicas.

## ABSTRACT

Since technology had advanced and some software for structural analysis has been developed, the analytical method for solving some problems has been left aside, which has led us ignore the procedure of how to find certain results. A great example of this, is the design for circular supported tanks, because there is not an analytical method to find the stresses caused by static or dynamic forces on the walls of the tank. Therefore, the only way to carry out a design for this structure is use a structural analysis program.

This research, propose an analytical solution for the analysis of circular supported tanks subject to static and dynamic loads. For it, the Morley - Koiter equation is going to be used as a fundamental knowledge, because it has been shown to be efficient in Dr. Hoefakker's doctoral thesis solving the problem of thin-walled cylindrical structures, however, the context where Hoefakker applies the Morley-Koiter equation, is for wind loads acting on chimneys.

The innovation of this research is show that the Morley - Koiter equation can be used for supported cylindrical tanks, subjected to static loads caused by the pressure of the water towards the walls, as well as dynamic loads caused by the oscillation of the water, caused by a seismic movement, as well as the dynamic loads caused by the same earthquake.

The success of this research will be achieved after applying the Morley - Koiter equation to circular supported tanks, subjected to static seismic loads, presenting results that are consistent and similar to the results obtained through the use of a structural analysis program. Demonstrating its importance and simplicity for the design of circular supported tanks.

This research is of great relevance for professionals dedicated to structural design, because they will have an analytical method, which, taking it to a spreadsheet and systematizing it, will be a very helpful tool to solve circular tanks subjected to seismic loads.

## PRÓLOGO

Pese a que los tanques circulares apoyados son comúnmente construidos en el Perú, no existe en el Reglamento Nacional de Edificaciones, una norma que nos muestre exactamente el método analítico para el diseño de las paredes de este tipo de estructuras teniendo en consideración cargas de naturaleza sísmica, lo cual hace depender a los ingenieros de algún software de análisis estructural, siendo esto un proceso mecanizado con una demanda de tiempo considerable para el modelamiento, y se confía sin ninguna objeción en estos resultados siendo conscientes de que se ignora el origen de estos resultados.

Por lo mencionado, en la presente investigación se espera contribuir al Reglamento Nacional de Edificaciones del Perú con la propuesta de una metodología de cálculo manual para el análisis estructural de tanques circulares apoyados que son de uso esencial en nuestro país. La propuesta de solución analítica es una herramienta con la cual se puede comparar los resultados provenientes de un análisis computacional y no quedarse con la incertidumbre de la veracidad de los resultados. La metodología propuesta de solución analítica, tiene como base fundamental la ecuación de Morley-Koiter.

La ecuación de Morley – Koiter ha venido siendo aplicada a lo largo del desarrollo de la teoría de las cáscaras, teniendo ciertas consideraciones por distintos investigadores como Donell, Love, etc. y en distintos contextos durante la historia, el último investigador en aportar a la teoría de cáscaras empleando a su vez la ecuación de Morley-Koiter fue el Dr. Hoefakker, sin embargo, el Dr. Hoefakker direccionó su trabajo principalmente hacia chimeneas frente a cargas de viento.

Esta investigación busca ser innovadora por lo que hasta la actualidad no ha existido una investigación donde se aplique la teoría de cáscaras y la ecuación de Morley – Koiter para dar solución al análisis estructural en tanques circulares apoyados, sometidos a cargas de sismo que se rigen a la normativa nacional E.030 y la norma ACI 350.3-06.

## LISTA DE CUADROS

Cuadro 3-1: Resultados por presión impulsiva con el método analítico .....	77
Cuadro 3-2: Resultados por presión convectiva con el método analítico .....	79
Cuadro 3-3: Resultados por carga inercial con el método analítico.....	81
Cuadro 3-4: Resultados por aceleración vertical con el método analítico .....	83
Cuadro 3-5: Resultados por presión hidrostática con el método analítico .....	85
Cuadro 3-6: Resumen de valores por cada tipo de fuerza .....	85
Cuadro 5-1: Cuadro comparativo para la fuerza hidrodinámica impulsiva.....	112
Cuadro 5-2: Cuadro comparativo para la fuerza hidrodinámica convectiva.....	113
Cuadro 5-3: Cuadro comparativo para la fuerza inercial .....	115
Cuadro 5-4: Cuadro comparativo para la aceleración vertical del terreno .....	116
Cuadro 5-5: Cuadro comparativo para la fuerza hidrostática .....	117
Cuadro A-1: Datos básicos relacionados con la estructura .....	125
Cuadro A-2: Propiedades dinámicas (ACI350.3-06) .....	125
Cuadro A-3: Parámetros sísmicos .....	126
Cuadro A-4: Valores de aceleración espectral efectiva .....	127
Cuadro A-5: Fuerzas sísmicas estáticas (ACI350.3-06).....	128
Cuadro A-6: Distribución vertical lineal de fuerzas dinámicas (ACI350.3-06)...	128
Cuadro A-7: Distribución superficial de presiones (ACI350.3-06).....	129

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Descripción geométrica de un elemento cáscara.....	24
Figura 2-2: Descripción geométrica de una superficie cilíndrica.....	27
Figura 2-3: Esquema de relaciones para una cáscara cilíndrica circular.....	28
Figura 2-4: Fuerzas internas en un elemento de cáscara cilíndrica .....	29
Figura 2-5: Parámetros que definen las condiciones de contorno.....	38
Figura 2-6: Distribución horizontal de las fuerzas inerciales.....	40
Figura 2-7: Distribución horizontal de la fuerza impulsiva y fuerza convectiva ...	41
Figura 2-8: Distribución horizontal de la fuerza por aceleración vertical.....	41
Figura 2-9: Distribución vertical de presiones .....	42
Figura 3-1: Cuatro estados de carga y modos de deformación para un anillo...	50
Figura 3-2: Modelo de tanque para el ejemplo numérico .....	73
Figura 3-3: Distribución vertical de presiones en la sección crítica .....	74
Figura 3-4: Distribución vertical de presiones según ACI 350 .....	74
Figura 3-5: Condiciones de borde en superficie cilíndrica .....	75
Figura 4-1: Fuerzas resistentes que representan al elemento shell .....	87
Figura 4-2: Grados de libertad que representan al elemento shell .....	88
Figura 4-3: Definición del elemento shell thick en un programa estructural.....	89
Figura 4-4: Definición del material en un programa estructural. ....	90
Figura 4-5: Vista tridimensional del modelo estructural.....	91
Figura 4-6: Paso 1 para asignar las cargas actuantes en el muro cilíndrico.....	92

---

Figura 4-7: Paso 2 para asignar las cargas actuantes en el muro cilíndrico.....	93
Figura 4-8: Paso 3 para asignar las cargas actuantes en el muro cilíndrico.....	94
Figura 4-9: Resultados por presión impulsiva usando elementos finitos .....	95
Figura 4-10: Resultados por presión convectiva usando elementos finitos .....	96
Figura 4-11: Resultados por fuerza inercial usando elementos finitos.....	97
Figura 4-12: Resultado por aceleración vertical usando elementos finitos .....	98
Figura 4-13: Resultados por presión hidrostática usando elementos finitos .....	99
Figura 5-1: VS de resultados por presión impulsiva .....	102
Figura 5-2: VS de resultados por presión convectiva .....	105
Figura 5-3: VS de resultados por fuerza inercial .....	107
Figura 5-4: VS de resultados por aceleración vertical .....	109
Figura 5-5: VS de resultados por presión hidrostática.....	110

## LISTA DE SÍMBOLOS Y SIGLAS

$a$	Radio de una superficie de referencia cilíndrica circular
$a_0, b_0$	Parámetros adimensionales de la solución homogénea para $n = 0$
$a_1, b_1$	Parámetros adimensionales de la solución homogénea para $n = 1$
$C_c$	Factor de amplificación sísmica para el componente convectivo del líquido almacenado
$C_i$	Coeficiente para determinar la frecuencia fundamental del sistema tanque-líquido
$C_i$	Factor de amplificación sísmica para el tanque y el componente impulsivo del líquido almacenado
$C_v$	Factor de amplificación sísmica para efectos de aceleración vertical
$C_w$	Coeficiente para determinar la frecuencia fundamental del sistema tanque-líquido
$D$	Diámetro del tanque cilíndrico medido en la superficie media
$D_i$	Diámetro interior del tanque
$D_b$	Rigidez a la flexión (placa)
$dx, dz$	Diferenciales de longitud en la dirección longitudinal y en la dirección normal de un elemento infinitesimal cilíndrico, respectivamente
$d\theta$	Diferencial de arco en la dirección circunferencial de un elemento infinitesimal cilíndrico
$E$	Módulo de elasticidad, módulo de Young
$e$	Vector de deformaciones unitarias
$e_{11}, e_{22}$	Componentes normales de las deformaciones unitarias
$e_{12}, e_{21}$	Componentes de corte longitudinal de las deformaciones unitarias

---

$e_{11}, e_{22}$	Componentes de corte transversal de las deformaciones unitarias
$f_c$	Resistencia a la compresión del concreto
F11, F22	Fuerzas normales de una cáscara cilíndrica circular en el programa de análisis estructural
F12, M12	Fuerza cortante longitudinal (tangencial) y momento torsional de una cáscara cilíndrica circular en el programa de análisis estructural, respectivamente
G	Módulo de corte
$H_L$	Altura de diseño del líquido almacenado
$H_w, L$	Altura del muro del tanque
I, U	Factor de importancia para análisis sísmico
k	Parámetro adimensional usado para describir los componentes $L_{ij}$
$L_{ij}$	Componentes de una matriz de operadores diferenciales
M11, M22	Momentos flectores de una cáscara cilíndrica circular en el programa de análisis estructural
$m_{11}, m_{22}$	Momentos flectores
$m_{xx}, m_{\theta\theta}$	Momentos flectores de una cáscara cilíndrica circular
$\bar{m}_{11}, \bar{m}_{22}$	Cantidades alternativas para $m_{11}, m_{22}$
n	Vector normal de la superficie de referencia en la base local
n	Número de modo igual al número de ondas completas de una cantidad trigonométrica (seno o coseno) en la dirección circunferencial, también se usa como subíndice para indicar parámetros asociados con el número de modo
$n_{11}, n_{22}$	Fuerzas normales
$n_{12}, n_{21}$	Fuerzas cortantes longitudinales
$m_{12}, m_{21}$	Momentos torsionales

$n_{xx}, n_{\theta\theta}$	Fuerzas normales de una cáscara cilíndrica circular
$n_{x\theta}, m_{x\theta}$	Fuerza cortante longitudinal (tangencial) y momento torsional de una cáscara cilíndrica circular, respectivamente
$\bar{n}_{11}, \bar{n}_{22}$	Cantidades alternativas para $n_{11}, n_{22}$
$\bar{n}_{12}, \bar{m}_{21}$	Cantidades alternativas para la fuerza cortante longitudinal y el momento torsional, respectivamente.
$n_{12}^*$	Fuerza cortante longitudinal combinada
$n_{x\theta}^*$	Fuerza cortante longitudinal (tangencial) combinada de una cáscara cilíndrica circular
<b>p</b>	Vector de cargas externas
$P_c$	Fuerza hidrodinámica convectiva del líquido almacenado
$P_{cy}$	Fuerza convectiva distribuida linealmente por unidad de altura
$p_{cy}$	Fuerza convectiva distribuida en toda la superficie del muro
$p_{hi}$	Fuerza de presión hidrostática distribuida en la superficie del muro
$P_i$	Fuerza hidrodinámica impulsiva del líquido almacenado
$P_{iy}$	Fuerza impulsiva distribuida linealmente por unidad de altura
$p_{iy}$	Fuerza impulsiva distribuida en la superficie del muro
$p_{vi}$	Fuerza por aceleración vertical distribuida en la superficie del muro
$P_w$	Fuerza de inercia lateral del muro
$P_{wy}$	Fuerza inercial distribuida linealmente por unidad de altura
$p_{wy}$	Fuerza inercial distribuida en toda la superficie del muro
$p_1, p_2, p_\zeta$	Fuerzas superficiales en la superficie de referencia
$p_x, p_\theta, p_z$	Fuerzas superficiales en la superficie de referencia de una cáscara cilíndrica circular
<b>R</b>	Radio constante de una superficie cilíndrica circular

---

$R_1, R_2$	Radios principales de curvatura en un punto sobre la superficie de referencia
$R_c$	Factor de modificación de respuesta para el componente convectivo de la aceleración del líquido almacenado
$R_i$	Factor de modificación de respuesta para el tanque y el componente impulsivo de la aceleración del líquido almacenado
$\mathbf{s}$	Vector de fuerzas internas
$S$	Factor de suelo para análisis sísmico
$S_{ac}$	Aceleración espectral efectiva horizontal para el componente convectivo del líquido almacenado
$S_{ai}$	Aceleración espectral efectiva horizontal para el tanque y el componente impulsivo del líquido almacenado
$S_{av}$	Aceleración espectral efectiva para efectos de aceleración vertical
$t, t_w$	Espesor finito de la cáscara delgada y espesor del muro cilíndrico, respectivamente
$T_c$	Período natural del primer modo (convectivo) de chapoteo
$T_i$	Período fundamental de oscilación del tanque (más el componente impulsivo del contenido)
$T_L$	Período que define el inicio de la zona del factor C con desplazamiento constante en el espectro de diseño
$T_P$	Período que define la plataforma del factor C en el espectro de diseño
$T_v$	Período natural de vibración del movimiento vertical del líquido
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos
$u_1, u_2, u_\zeta$	Desplazamientos en la superficie de referencia
$u_x, u_z, u_\theta$	Desplazamientos en la superficie de referencia de una cáscara cilíndrica circular

$V_{23}, V_{13}$	Fuerzas cortantes transversales (radiales) en una cáscara cilíndrica circular en el programa de análisis estructural
$v_1, v_2$	Fuerzas cortantes transversales
$v_x, v_\theta$	Fuerzas cortantes transversales (radiales) en una cáscara cilíndrica circular
$\bar{v}_1, \bar{v}_2$	Fuerzas cortantes transversales alternativas
$v_1^*$	Fuerza cortante transversal combinada o fuerza cortante efectiva de Kirchhoff.
$v_x^*$	Fuerza cortante transversal (radial) combinada en una cáscara cilíndrica circular o fuerza cortante efectiva de Kirchhoff.
$W_c$	Peso equivalente del componente convectivo del líquido almacenado
$W_i$	Peso equivalente del componente impulsivo del líquido almacenado
$W_L$	Peso total del líquido almacenado
$W_w$	Peso del muro del taque
$x, \theta$	Coordenadas ortogonales de una superficie de referencia cilíndrica circular
$Z$	Factor de zona para análisis sísmico
$z$	Coordenada en la dirección del espesor de una cáscara cilíndrica circular
$\alpha$	Ángulo de recorrido que genera un segmento cilíndrico
$\alpha_1, \alpha_2$	Parámetros de Lamé de la superficie de referencia
$\beta_{11}, \beta_{22},$	Cantidades de cambio de rotación de la normal a la superficie de referencia
$\beta_{12}, \beta_{21}$	Cantidades de torsión de la normal a la superficie de referencia
$\beta$	Parámetro adimensional utilizado para describir ecuaciones diferenciales de una cáscara cilíndrica circular

$\gamma_0$	Parámetro adimensional utilizado para describir $a_0$ , $b_0$
$\gamma_1$	Parámetro adimensional utilizado para describir $a_1$ , $b_1$
$\gamma_c$	Peso específico del concreto
$\gamma_L$	Peso específico del líquido almacenado
$\gamma_{x\theta}$ , $\rho_{x\theta}$	Cantidades alternativas para deformaciones unitarias de corte y torsión de una cáscara cilíndrica circular, respectivamente
$\Delta$	Operador de Laplace
$\varepsilon$	Coeficiente de masa efectiva
$\varepsilon_{11}$ , $\varepsilon_{22}$	Cantidades de deformación normal en la superficie de referencia
$\varepsilon_{12}$ , $\varepsilon_{21}$	Cantidades de deformación longitudinal de corte en la superficie de referencia
$\varepsilon_{1\zeta}$ , $\varepsilon_{2\zeta}$	Cantidades de deformación transversal de corte
$\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{\theta\theta}$	Deformaciones unitarias normales en una cáscara cilíndrica circular
$\zeta$	Coordenada normal a la superficie de referencia de una cáscara
$K_{11}$ , $K_{22}$	Cambio de curvatura, cantidades alternativas para $\beta_{11}$ , $\beta_{22}$ .
$K_{12}$ , $K_{21}$	Cambio de curvatura, cantidades alternativas para $\beta_{12}$ , $\beta_{21}$ .
$K_{xx}$ , $K_{\theta\theta}$	Cambios de curvatura en una cáscara cilíndrica circular
$\lambda$	Coeficiente para determinar la frecuencia circular convectiva
$\xi_1$ , $\xi_2$	Coordenadas curvilíneas ortogonales de una superficie de cáscara
$\sigma_{11}$ , $\sigma_{22}$	Esfuerzos normales
$\sigma_{12}$ , $\sigma_{21}$	Esfuerzos cortantes longitudinales
$\sigma_{1\zeta}$ , $\sigma_{2\zeta}$	Esfuerzos cortantes transversales
$\sigma_{xx}$ , $\sigma_{\theta\theta}$	Esfuerzos normales en una cáscara cilíndrica circular; longitudinal y circunferencial, respectivamente
$\sigma_{x\theta}$	Esfuerzo cortante longitudinal en una cáscara cilíndrica circular

$\nu$	Relación de Poisson
$\varphi_1, \varphi_2$	Rotaciones de una normal a la superficie de una cáscara en la dirección de las líneas paramétricas $\xi_1$ y $\xi_2$ , respectivamente.
$\varphi_x, \varphi_\theta$	Rotaciones de una normal a la superficie de referencia cilíndrica circular en la dirección $x$ y la dirección $\theta$ , respectivamente.
$\omega_c$	Frecuencia circular de oscilación del primer modo (convectivo) de chapoteo
$\varpi_n$	Rotación de cuerpo rígido sobre la normal a la superficie de referencia

## CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

### 1.1 GENERALIDADES

Para el análisis estructural de reservorios circulares apoyados sometidos a fuerzas de naturaleza sísmica, es común y frecuente en nuestro medio el uso de programas de análisis estructural que emplean elementos finitos, ya que un método analítico supone grandes desafíos.

La Ecuación de Morley-Koiter, ha surgido como una herramienta prometedora para abordar estos desafíos. Esta ecuación, que combina la teoría de pared delgada con la teoría de placas, permite un análisis detallado de las estructuras cilíndricas y circulares, considerando un comportamiento elástico. En esta propuesta, se explora la viabilidad y las ventajas de utilizar la ecuación de Morley-Koiter como base para un enfoque analítico simplificado en el análisis sísmico estático de reservorios circulares apoyados. Además, se mencionan los fundamentos teóricos de la ecuación, su adaptación a las características específicas de los reservorios y su integración con el análisis sísmico estático.

En última instancia, esta propuesta tiene como objetivo presentar una solución analítica simplificada con base en la Ecuación de Morley-Koiter que presente una alta precisión del análisis sísmico de reservorios circulares apoyados.

### 1.2 PLANTEAMIENTO DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

Actualmente, en el Perú, los reservorios son considerados por la Norma Sismorresistente E.030 (2018) como edificaciones esenciales, puesto que estas estructuras deben continuar en operación después de la ocurrencia de un sismo severo.

Sin embargo, la normativa peruana no presenta una metodología para el análisis sísmico de estas estructuras, por ello es necesario recurrir a normativas extranjeras como la norma ACI 350.3-06 en la cual se menciona los parámetros a tomar en cuenta al momento de idealizar las cargas aplicadas a las paredes de los tanques circulares apoyados.

Si bien con el reporte indicado es factible conocer la magnitud de las cargas aplicadas a las paredes del tanque circular apoyado, la dificultad se encuentra en

el procedimiento para realizar el análisis estructural. Es común y frecuente en nuestro medio el uso de un programa que haga el cálculo basado en el método de elementos finitos. Esta dependencia de programas de análisis estructural puede ser evidencia que los fundamentos y métodos de análisis sísmico de este tipo de estructuras no es del dominio general de los ingenieros en la práctica.

Esta investigación tiene una gran relevancia, al compartir una metodología de solución analítica para tanques circulares apoyados sometidos a fuerzas sísmicas y que son de uso esencial en nuestro país. El proceso de cálculo de esta metodología puede sistematizarse con cierta facilidad empleando una hoja de cálculo y convertirse en una herramienta de cálculo con resultados inmediatos, resultados que han de guardar similitud con los típicos resultados que nos brindan los programas de análisis estructural.

Por lo expuesto, en la presente investigación se propone la aplicación de una metodología de solución analítica que tiene como base fundamental de solución la ecuación de Morley-Koiter, ya que ha demostrado en la tesis de doctorado del Dr. Hoefakker, ser eficiente para dar solución al problema de estructuras cilíndricas de pared delgada, sin embargo, el Dr. Hoefakker direccionó su trabajo principalmente hacia chimeneas frente a cargas de viento. En esta investigación, la teoría será aplicada para cargas de sismo en tanques circulares apoyados.

## OBJETIVOS DEL ESTUDIO

### 1.2.1 Objetivo general

- Proponer la solución analítica del análisis sísmico de reservorios circulares apoyados aplicando la ecuación de Morley-Koiter como una alternativa sencilla, confiable y de uso práctico ingenieril en el territorio nacional.

### 1.2.2 Objetivo específico

- Validar la solución analítica para el diseño de reservorios circulares apoyados.
- Contrastar las fuerzas internas obtenidas con el método analítico frente a las fuerzas obtenidas del programa de análisis estructural para la carga de presión hidrostática del agua.

- Contrastar las fuerzas internas obtenidas con el método analítico frente a las fuerzas obtenidas del programa de análisis estructural para las cargas estáticas equivalentes de sismo.

### 1.3 FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS

#### 1.3.1 Hipótesis general

- El uso de la ecuación de Morley-Koiter aplicada a la solución de reservorios circulares apoyados presenta resultados coherentes y similares a los resultados que se obtienen mediante el uso de un programa de análisis estructural.

#### 1.3.2 Hipótesis específicas

- La solución analítica es confiable para el diseño de reservorios circulares apoyados.
- Las fuerzas internas obtenidas con el método analítico son comparables con las fuerzas obtenidas del programa de análisis estructural para la carga de presión hidrostática del agua.
- Las fuerzas internas obtenidas con el método analítico son comparables con las fuerzas obtenidas del programa de análisis estructural para las cargas estáticas equivalentes de sismo.

### 1.4 ANTECEDENTES REFERENCIALES

Mangelsdorf (1973), demuestra la solución de problemas de esfuerzos en los contornos de cáscaras cilíndricas circulares, basadas en las ecuaciones de equilibrio de Morley - Koiter.

Mangelsdorf se concentró en la solución general de las ecuaciones diferenciales con tres conjuntos comunes de condiciones de contorno.

En su investigación presenta la solución de estas ecuaciones para una carga simétrica longitudinalmente de una cáscara de espesor uniforme que tiene apoyos simétricos, lo cual aportara a la presente investigación el procedimiento para hallar esfuerzos en los contornos de las paredes de los reservorios circulares frente a cargas simétricas o estáticas.

Como segundo antecedente, se consideró la tesis de Jeroen Hendrik, Hoefakker (2010), quien en su investigación buscó la manera de optimizar el análisis de estructuras cilíndricas de pared delgada bajo cargas estáticas, proponiendo un conjunto de relaciones fundamentales. La teoría propuesta por Hoefakker intenta definir la mejor linealización en el marco de la teoría de aproximación de primer orden teniendo como principal referencia la ecuación de Morley – Koiter, que es la más adecuada para obtener soluciones de forma cerrada.

Hoefakker menciona tres diferentes casos o modos que permiten enfocar y comprender el análisis de la estructura según las condiciones de carga-deformación que ésta presente, como son el modo axisimétrico, el modo tipo viga y los modos auto balanceados (resultante de cargas igual a cero). Dentro de la propuesta de Hoefakker también está la implementación y desarrollo de un programa computacional, basada en la teoría propuesta que resuelva el análisis estructural de este tipo de estructuras, sin la necesidad de realizar cálculos manuales.

Sin embargo, Hoefakker direccionó esta teoría principalmente a chimeneas de pared delgada, sometidas a cargas de viento, ya que el análisis de largas chimeneas de acero es de gran demanda en Holanda, por lo cual Hoefakker no llegó a aplicar esta teoría en tanques circulares de concreto sometidos a cargas sísmicas.

Por lo tanto, al tener como antecedente la investigación mencionada, se pretende aplicar la teoría de Hoefakker únicamente para reservorios circulares apoyados, sometidos a cargas estáticas equivalentes de sismo, ya que estas estructuras presentan características geométricas similares.

Huisa (2017), propone una guía para el análisis sísmico de reservorios elevados de concreto armado para almacenamiento de agua, con la finalidad de obtener resultados confiables que permitan realizar un adecuado diseño estructural. Huisa, para determinar las fuerzas actuantes en los reservorios, parte del modelo dinámico de Housner que se define en la norma ACI 350.3-06 y sigue los lineamientos de la norma peruana E.030 para un análisis modal espectral. Huisa, en su investigación, muestra de manera detallada el correcto procedimiento para hallar el modelo de cargas, que se aplican en las paredes de los reservorios por consecuencia de la oscilación del agua causada por un sismo.

Al tener como antecedente lo propuesto en la tesis de Huisa, en esta investigación se propone seguir el mismo criterio normativo para obtener la idealización de cargas sísmicas, que se aplicarán a las paredes del reservorio circular apoyado, ya que el modelo de cargas es necesario para realizar el análisis y obtener los resultados buscados, independientemente de que el método sea analítico o si implica el uso de un programa computacional.

## CAPÍTULO II: MARCOS TEÓRICO Y CONCEPTUAL

### 2.1 MARCO TEÓRICO

#### 2.1.1 Teoría elemental de cáscaras

##### 2.1.1.1 Introducción

Una cáscara de pared delgada tiene una relación muy pequeña de grosor a radio menor, con frecuencia menor que  $1/50$ . Al igual que con las placas, una carga aplicada que actúa fuera del plano conduce a desplazamientos mayores que los generados por una carga que actúa en el plano con la misma intensidad. Debido a su curvatura inicial, una cáscara puede transferir una carga aplicada por acciones tanto en el plano como fuera del plano. Por lo tanto, una cáscara de pared delgada sujeta a una carga aplicada produce principalmente acciones en el plano llamadas fuerzas de membrana. Estas fuerzas de membrana son en realidad el resultado de esfuerzos normales y esfuerzos de corte en el plano que se distribuyen uniformemente en todo el espesor.

##### 2.1.1.2 Teoría de cáscaras

Una cáscara es una generalización de una placa isotrópica homogénea. Las placas son estructuras planas cuyas dimensiones en las dos direcciones en el plano son grandes en comparación con la tercera dirección perpendicular a la placa. La luz en dos direcciones es mucho mayor que el espesor. Las placas se definen por su plano medio, espesor y propiedades del material. Los desplazamientos del plano medio desempeñan el papel de grados de libertad en el modelado estructural. Las cargas de placas en el plano generan fuerzas de membrana en el plano, y las cargas fuera del plano generan momentos y fuerzas de corte transversales.

La diferencia de las cáscaras con las placas es que el plano medio de las placas es plano y el de las cáscaras es curvo. Como consecuencia, las cáscaras pueden transportar cargas fuera del plano mediante fuerzas de membrana en el plano, lo que no es posible para las placas. De hecho, esta es la razón principal por la cual las cáscaras son estructuras tan fuertes y económicas.

La teoría de este comportamiento de membrana se llama teoría de membrana. Sin embargo, la teoría de la membrana no satisface todos los requisitos de equilibrio y/o desplazamiento de los siguientes casos:

- Condiciones de contorno y restricciones de deformación que son incompatibles con los requisitos de un campo de membrana puro;
- Cargas concentradas
- Cambios en la geometría de las cáscaras

En las regiones donde la teoría de la membrana no se sostendrá, algunos de los componentes (o todos) del campo de flexión se producen para compensar las deficiencias del campo de membrana en la zona perturbada. Estas perturbaciones deben describirse mediante un análisis más completo, que conducirá a una teoría de flexión de las cáscaras elásticas de pared delgada.

Si se producen componentes de flexión, a menudo tienen un rango local de influencia. Según Ugural (2018) los cálculos y experimentos teóricos muestran que los componentes de flexión requeridos se atenúan y, a menudo, la flexión está confinada a límites donde no existe una solución de membrana pura. Por lo tanto, en muchos casos el comportamiento de flexión está restringido a una perturbación de borde. La mayor parte de la cáscara se comporta como una verdadera membrana. Esta propiedad única de las cáscaras es el resultado de la curvatura de la estructura espacial. El desempeño estructural eficiente es responsable de la aparición generalizada de cáscaras en la naturaleza. El progreso continuo de los métodos numéricos para la mecánica computacional, combinado con un rendimiento estructural eficiente y una forma agradable, hace que la aplicación de estructuras de cáscaras sea cada vez más posible y favorable. Sin embargo, para el uso de programas numéricos, se necesita algún conocimiento básico de las teorías fundamentales y el comportamiento mecánico de la estructura.

Se han desarrollado muchas teorías para analizar el comportamiento mecánico de las estructuras de cáscaras. Para superar la complejidad de una teoría exacta, se hacen suposiciones para producir teorías más simples de las cuales la teoría de la membrana es la más atractiva. Debido a su simplicidad, la teoría de la membrana ofrece una visión directa del comportamiento estructural y el orden de magnitud de la respuesta esperada sin cálculos elaborados. La teoría de la membrana es, por lo tanto, muy útil para el diseño inicial y el análisis.

### 2.1.1.3 Descripción matemática de la superficie

Para describir la superficie de referencia curva de una cáscara, es natural utilizar un sistema de coordenadas curvilíneas que coincide con las líneas principales de curvatura, las cuales son ortogonales.

Una superficie  $Q$  en el sistema de coordenadas rectangulares  $x_1, x_2, x_3$  se puede escribir como una función de dos parámetros, por ejemplo  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , que son las coordenadas curvilíneas de la superficie de referencia. Para describir la ubicación de un punto arbitrario dentro de las dos superficies exteriores de la cáscara, se introduce una tercera coordenada  $\zeta$  en la dirección del espesor (ver Figura 2-1).

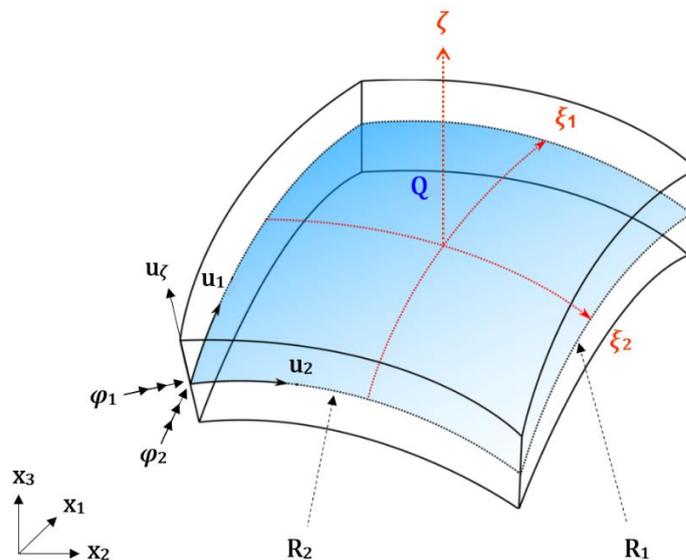


Figura 2-1: Descripción geométrica de un elemento cáscara

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 2-1 se aprecian también los radios de curvatura principales ( $R_1, R_2$ ), así como las rotaciones ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) y los desplazamientos ( $u_1, u_2, u_z$ ) con sus respectivas direcciones para un punto cualquiera sobre la superficie de referencia. También es importante mencionar que los parámetros de Lamé de la superficie de referencia ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) se pueden definir mediante las siguientes expresiones:

$$ds_1(\xi_1, \xi_2, \zeta) = \alpha_1 \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) d\xi_1 \quad , \quad ds_2(\xi_1, \xi_2, \zeta) = \alpha_2 \left( 1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\xi_2$$

Para el caso particular de una superficie cilíndrica resulta conveniente adoptar un nuevo sistema de coordenadas en el que  $\xi_1 = x, \xi_2 = \theta$  y  $\zeta = z$ , lo cual obliga a

un cambio de subíndices en todas las cantidades que se relacionan con esta superficie, tal como se verá en la sección 2.2.1 y en lo posterior.

#### 2.1.1.4 Elementos shell en programa de elementos finitos

Según Radwańska et al. (2017) el uso de la teoría clásica de la cáscara (*shell*) de pared delgada para problemas de geometría arbitraria conduce al desarrollo de ecuaciones diferenciales de orden superior que, en general, solo pueden resolverse aproximadamente utilizando la evaluación numérica de series infinitas.

Por lo tanto, existe un número limitado de soluciones solo para estructuras de cáscara con formas geométricas simples, estas soluciones cumplen una función importante en la evaluación de la precisión numérica de los programas informáticos modernos de elementos finitos, sin embargo, para el análisis estático y dinámico de estructuras de cáscaras de geometría arbitraria, el método de elementos finitos proporciona el único enfoque práctico en este momento.

La aplicación del método de elementos finitos para el análisis de estructuras de cáscaras requiere que el usuario comprenda las aproximaciones involucradas en el desarrollo de los elementos, la cuales son simplificaciones que se hacen a ecuaciones que son muy complejas asumiendo ciertos parámetros. La teoría básica de los elementos de la placa y la membrana, se derivan como un caso especial de la teoría de la elasticidad tridimensional, en el que las aproximaciones se establecen claramente. Por lo tanto, el uso de los elementos para el análisis de estructuras de cáscaras implica la introducción de muy pocas aproximaciones nuevas. Esta teoría es fundamental para el desarrollo de la presente investigación, ya que las paredes de los reservorios cilíndricos apoyados no tienen el mismo tratamiento de una placa, sino más bien como de una cáscara.

#### 2.1.2 Métodos disponibles para el análisis de tanques circulares

##### 2.1.2.1 Coeficientes del PCA (Portland Cement Association)

En Perú es común diseñar tanques pequeños menores a 200m<sup>3</sup> con mampostería. Estos tanques han tenido un excelente comportamiento durante sismos, pero tienen el inconveniente que si no se les da un mantenimiento adecuado sufren de fugas importantes en la junta de los bloques (mortero).

Las tablas de la PCA (Portland Cement Association) para el diseño de tanques tienen más de 30 años y son ampliamente utilizadas alrededor del mundo, los factores para momento, cortante y deflexiones están establecidos y se pueden aplicar a losas y tanques con diferentes condiciones de apoyo en los bordes y diferentes tipos de carga. Sin embargo, no dan solución para una demanda del tipo sísmica (fuerzas laterales) sobre el tanque, por esto resulta recomendable su uso en el prediseño usando esfuerzos admisibles bajo presiones hidrostáticas únicamente.

#### 2.1.2.2 Método de la viga sobre fundación elástica

Canny (2018) menciona que este método es muy usado en países que no cuentan con acciones sísmicas de consideración. El método se aplica a tanques circulares que están sometidos a cargas axisimétricas las cuales no se adaptan a la distribución de las cargas sísmicas estáticas que establece la norma ACI350.3-06. Sin embargo, suele ser usado en diseños preliminares que se basan en esfuerzos admisibles bajo cargas de servicio, lo cual limita la calidad del diseño por no considerar la demanda sísmica, más aún siendo esto necesario en un país altamente sísmico como el Perú.

#### 2.1.2.3 Programas computacionales basados en elementos finitos

El análisis usando programas de análisis estructural basados en elementos finitos es la metodología más común en la actualidad cuando se desea hacer un análisis completo para un tanque. El análisis completo implica una variedad de cargas simples o de alta complejidad, asimismo, modelos para un análisis dinámico o estático.

La metodología mencionada suele ser muy eficiente, sin embargo, para obtener resultados coherentes y fiables se requiere de un conocimiento fundamental de ingeniería estructural aplicado a cáscaras para su uso correcto en el programa. Además, se requiere de un tiempo considerable para el modelamiento, tiempo que depende de la complejidad del modelo estructural y de la complejidad de las cargas actuantes sobre la estructura.

## 2.2 FUNDAMENTO TEÓRICO Y REQUERIMIENTO DE NORMAS

### 2.2.1 Consideraciones geométricas

Para una cáscara cilíndrica circular, es conveniente aplicar un sistema de coordenadas polares al perfil de sección transversal con un radio constante  $a$ . Las direcciones de los ejes se eligen en la dirección longitudinal (eje  $x$ ), en la dirección circunferencial (ángulo  $\theta$ ) y en la dirección transversal (eje  $z$ ). Con respecto a la descripción de la superficie media de las cáscaras de revolución, la dirección longitudinal es la dirección a lo largo del meridiano, la dirección circunferencial es la dirección a lo largo del círculo paralelo y la dirección transversal es a lo largo de la normal a la superficie de referencia.

Por lo tanto, un elemento infinitesimal tiene lados con longitud de arco, medidos en la superficie de referencia,  $dx$  en la dirección longitudinal y  $a d\theta$  en la dirección circunferencial. El espesor constante del elemento se denota por  $t$ , dentro del cual una capa infinitesimal tiene un espesor  $dz$  en la dirección normal a la superficie de referencia. Las tres direcciones positivas de los desplazamientos ( $u_x, u_\theta, u_z$ ) se toman correspondientes a las tres direcciones positivas de las coordenadas ( $x, \theta, z$ ) tal como se muestra en la Figura 2-2.

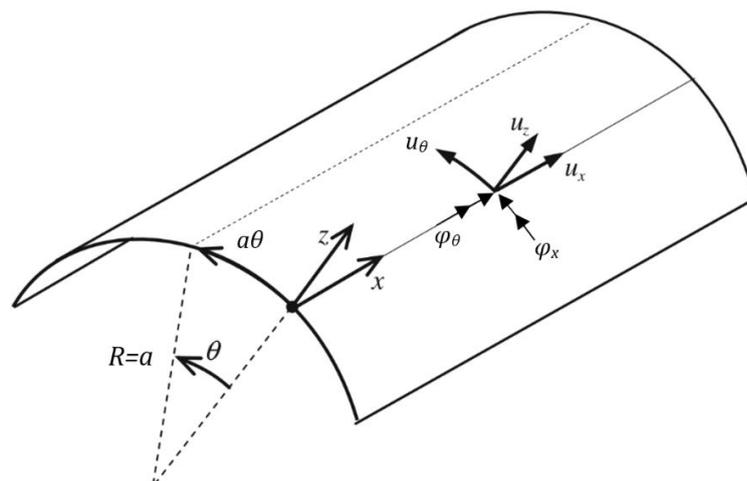


Figura 2-2: Descripción geométrica de una superficie cilíndrica

Fuente: Elaboración propia

La generatriz recta en la dirección longitudinal (eje  $x$ ) tiene un radio de curvatura  $R_x = \infty$  y por lo tanto una curvatura igual a cero. El radio de curvatura en la dirección circunferencial (ángulo  $\theta$ ) es  $R_\theta = a = \text{constante}$ .

La expresión de un elemento de línea se representa por:

$$ds^2 = dx^2 + a^2 \left(1 + \frac{z}{a}\right)^2 d\theta^2 + dz^2$$

Si el elemento de línea se mide en la superficie de referencia ( $z=0$ ), la expresión anterior se reduce a:

$$ds^2 = dx^2 + a^2 d\theta^2$$

### 2.2.2 Relaciones fundamentales

Los desplazamientos pueden variar en todas las direcciones. Por lo tanto, todas las deformaciones  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  y  $\gamma_{x\theta}$  cumplen un papel dentro del cálculo. La cáscara cilíndrica se flexiona en las direcciones  $x$  e  $y$ , por tanto, se producen los cambios de curvatura  $\kappa_{xx}$  y  $\kappa_{\theta\theta}$ . El análisis de la superficie cilíndrica también implica la deformación por torsión que se denota por  $\rho_{x\theta}$ . Las deformaciones y curvaturas se correlacionan con las fuerzas de membrana  $n_{xx}$ ,  $n_{\theta\theta}$ ,  $n_{x\theta}$ , los momentos flectores  $m_{xx}$ ,  $m_{\theta\theta}$  y el momento torsional  $m_{x\theta}$ .

Para la geometría y el sistema de coordenadas que se menciona en la sección 2.2.1, se adoptan los siguientes vectores para describir las relaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_x \quad u_\theta \quad u_z] \\ \mathbf{e} &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \gamma_{x\theta} \quad \kappa_{xx} \quad \kappa_{\theta\theta} \quad \rho_{x\theta}] \\ \mathbf{s} &= [n_{xx} \quad n_{\theta\theta} \quad n_{x\theta} \quad m_{xx} \quad m_{\theta\theta} \quad m_{x\theta}] \\ \mathbf{p} &= [p_x \quad p_\theta \quad p_z] \end{aligned} \tag{2.1}$$

La relación entre estos vectores se muestra en la Figura 2-3.

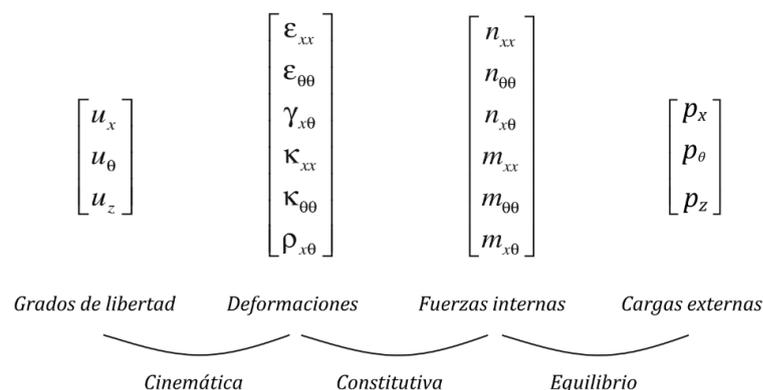


Figura 2-3: Esquema de relaciones para una cáscara cilíndrica circular

Fuente: Blaauwendraad y Hoefakker, 2014

Las fuerzas internas producidas en un elemento de cáscara cilíndrica se detallan en la Figura 2-4.

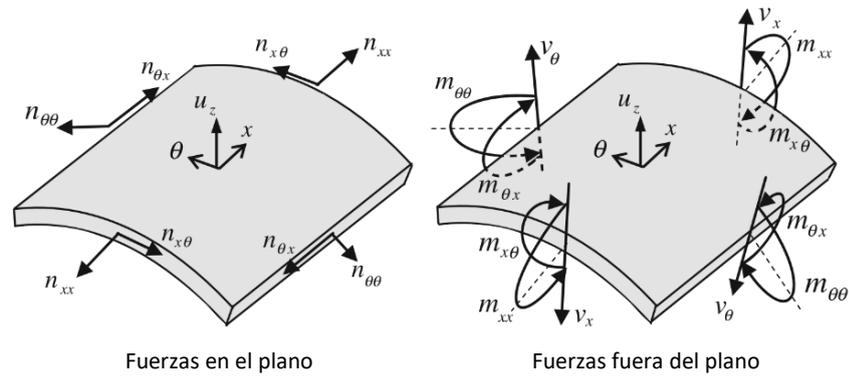


Figura 2-4: Fuerzas internas en un elemento de cáscara cilíndrica

Fuente: Blaauwendraad y Hoefakker, 2014

### 2.2.2.1 Relación cinemática

En la teoría fundamental de cáscaras elásticas se plantean las siguientes seis componentes de deformación relacionadas con diez cantidades de deformación:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} (\varepsilon_{11} + \zeta \beta_{11}) & e_{22} &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_2}} (\varepsilon_{22} + \zeta \beta_{22}) \\
 e_{12} &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} (\varepsilon_{12} + \zeta \beta_{12}) & e_{21} &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_2}} (\varepsilon_{21} + \zeta \beta_{21}) \\
 2e_{1\zeta} &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} (2\varepsilon_{1\zeta}) & 2e_{2\zeta} &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_2}} (2\varepsilon_{2\zeta})
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Las diez cantidades de deformación se dividen en cuatro deformaciones de la superficie de referencia denotadas por  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  y  $\varepsilon_{21}$ , en cuatro cambios de rotación de la normal a la superficie de referencia denotados por  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{22}$ ,  $\beta_{12}$  y  $\beta_{21}$ , y en dos deformaciones transversales de corte denotadas por  $2\varepsilon_{1\zeta}$  y  $2\varepsilon_{2\zeta}$ . Estas diez cantidades de deformación de la relación cinemática están relacionadas con los desplazamientos y rotaciones de la superficie de referencia como se muestra:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right) + \frac{u_\zeta}{R_1} & \beta_{11} &= \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\varphi_2}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right) \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{\alpha_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right) + \frac{u_\zeta}{R_2} & \beta_{22} &= \frac{1}{\alpha_2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} + \frac{\varphi_1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right) \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right) - \varpi_n & \beta_{12} &= \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} - \frac{\varphi_1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right) - \frac{\varpi_n}{R_1} \\
 \varepsilon_{21} &= \frac{1}{\alpha_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right) + \varpi_n & \beta_{21} &= \frac{1}{\alpha_2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} - \frac{\varphi_2}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\varpi_n}{R_2} \\
 2\varepsilon_{1\zeta} &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{R_1} + \varphi_1 & 2\varepsilon_{2\zeta} &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{R_2} + \varphi_2
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donde  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_\zeta$  son desplazamientos,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\zeta$  son coordenadas,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los parámetros de Lamé de la superficie de referencia,  $R_1$  y  $R_2$  son los radios principales de curvatura,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son rotaciones, y  $\varpi_n$  es la rotación de cuerpo rígido.

La teoría clásica de pequeñas deformaciones en cáscaras delgadas requiere que una normal permanezca normal a la superficie de referencia, lo que implica despreciar las deformaciones transversales de corte. Con esta suposición, las cantidades  $2\varepsilon_{1\zeta}$  y  $2\varepsilon_{2\zeta}$  dadas en (2.3) se igualan a cero y se consigue relacionar las rotaciones con los desplazamientos de la superficie de referencia mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi_1} \\
 \varphi_2 &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi_2}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Hoefakker define cantidades de deformación alternativas que se relacionan con las cantidades anteriores y que se representan de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}), \quad \kappa_{ij} = \beta_{ij} - (-1)^{i+j} \frac{\varepsilon_{ji}}{R_j}, \quad (i, j) = (1, 2) \tag{2.5}$$

También define cantidades alternativas para las fuerzas internas correspondientes y que se representan como sigue:

$$\bar{n}_{ij} = n_{ij} + (-1)^{i+j} \frac{m_{ji}}{R_j}, \quad \bar{m}_{ij} = \frac{1}{2}(m_{ij} + m_{ji}), \quad (i, j) = (1, 2) \quad (2.6)$$

La notación dada en (2.5) corresponde con las cantidades de deformación que se introducen para describir la siguiente distribución de deformaciones por corte:

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad \rho_{ij} = 2\kappa_{ij}, \quad i \neq j \quad (2.7)$$

Además, si se usa la descripción de una superficie cilíndrica circular como se explica en la sección 2.2.1 se deben hacer los siguientes cambios:

$$\begin{aligned} \xi_1 = x, \quad \alpha_1 = 1, \quad R_1 = \infty \\ \xi_2 = \theta, \quad \alpha_2 = a, \quad R_2 = a \end{aligned} \quad (2.8)$$

Reemplazando las expresiones (2.5), (2.7) y (2.8) en (2.3) y (2.4), y eliminando convenientemente la rotación de cuerpo rígido alrededor de la normal a la superficie de referencia se obtiene la relación cinemática simplificada propuesta por Hoefakker:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \rho_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 2.2.2.2 Relación constitutiva

Por definición, el ángulo de corte sobre el espesor de la cáscara está dado por  $2e_{12} = e_{12} + e_{21}$ , donde los ángulos respectivos están dados por (2.2). Usando (2.3) pero despreciando los términos  $\zeta/R_\alpha$  de las expresiones (2.2) y teniendo en cuenta las cantidades alternativas (2.5) y (2.7) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \rho_{12} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

En la teoría lineal de cáscaras elásticas se consideran las siguientes suposiciones de Kirchhoff:

- Los esfuerzos normales transversales a la superficie de referencia son pequeños en comparación con los esfuerzos normales sobre la misma superficie y pueden despreciarse.
- Una recta normal a la superficie de referencia permanece siempre recta y normal a la superficie sin sufrir deformación.

Las suposiciones anteriores conducen a una ley de Hooke bidimensional para cáscaras elásticas delgadas, que se describe como un estado plano de esfuerzos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Todas las fuerzas internas se expresan como integrales de área de los esfuerzos que actúan sobre las caras de una cáscara infinitesimal y, ya que estamos tratando una superficie, estas son fuerzas por unidad de longitud de arco en la superficie de referencia.

$$\begin{aligned} n_{11} &= \int_{\zeta} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta & n_{22} &= \int_{\zeta} \sigma_{22} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \\ n_{12} &= \int_{\zeta} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta & n_{21} &= \int_{\zeta} \sigma_{21} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \\ v_1 &= \int_{\zeta} \sigma_{1\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta & v_2 &= \int_{\zeta} \sigma_{2\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \\ m_{11} &= \int_{\zeta} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta & m_{22} &= \int_{\zeta} \sigma_{22} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \\ m_{12} &= \int_{\zeta} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta & m_{21} &= \int_{\zeta} \sigma_{21} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si se tiene en cuenta la ley de Hooke ( $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ) y se desprecian los términos  $\zeta/R_\alpha$  de las expresiones (2.12) para luego reemplazarlas en (2.6) se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \bar{n}_{11} \\ \bar{n}_{22} \\ \bar{n}_{12} \\ \bar{m}_{11} \\ \bar{m}_{22} \\ \bar{m}_{12} \end{bmatrix} = \int_{-\zeta}^{\zeta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} d\zeta \quad (2.13)$$

Y es evidente que las expresiones de (2.6) se convierten en lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{n}_{11} &= n_{11} \quad , \quad \bar{m}_{11} = m_{11} \\ \bar{n}_{22} &= n_{22} \quad , \quad \bar{m}_{22} = m_{22} \\ \bar{m}_{12} &= \bar{m}_{21} = m_{12} = m_{21} \\ \bar{n}_{12} &= \bar{n}_{21} = n_{12} = n_{21} \end{aligned}$$

Considerando la descripción (2.8) y la sustitución subsecuente de los conjuntos de expresiones (2.10), (2.11) y (2.13) se obtiene la relación constitutiva propuesta por Hoefakker:

$$\begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{\theta\theta} \\ n_{x\theta} \\ m_{xx} \\ m_{\theta\theta} \\ m_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_m & \nu D_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_m & D_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_m \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_b & \nu D_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D_b & D_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_b \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \rho_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Donde las cantidades  $D_m$  y  $D_b$  son la rigidez extensional (membrana) y la rigidez flexional (flexión), respectivamente, que están dadas por:

$$D_m = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad ; \quad D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.15)$$

Como se desprecian los términos  $\zeta/R_\alpha$ , es posible asumir una distribución lineal de esfuerzos en el espesor de la cáscara. Los respectivos componentes de esfuerzos normales y esfuerzos de corte se pueden obtener convenientemente a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{n_{xx}}{t} + z \frac{12m_{xx}}{t^3} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{n_{\theta\theta}}{t} + z \frac{12m_{\theta\theta}}{t^3} \\ \sigma_{x\theta} &= \frac{n_{x\theta}}{t} + z \frac{12m_{x\theta}}{t^3}\end{aligned}\tag{2.16}$$

### 2.2.2.3 Relación de equilibrio

Aplicando el principio de trabajo virtual (energía potencial mínima) con la teoría fundamental de cáscaras elásticas se obtienen seis ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{n_{11}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{n_{21}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2} \right) + \frac{n_{12}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - \frac{n_{22}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + \frac{v_1\alpha_1\alpha_2}{R_1} + p_1\alpha_1\alpha_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{n_{22}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{n_{12}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \frac{n_{21}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - \frac{n_{11}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + \frac{v_2\alpha_1\alpha_2}{R_2} + p_2\alpha_1\alpha_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{v_1\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{v_2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{n_{11}\alpha_1\alpha_2}{R_1} - \frac{n_{22}\alpha_1\alpha_2}{R_2} + p_\zeta\alpha_1\alpha_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{m_{21}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{m_{11}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1} \right) - \frac{m_{22}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + \frac{m_{12}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - v_1\alpha_1\alpha_2 + m_1\alpha_1\alpha_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{m_{12}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{m_{22}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{m_{11}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + \frac{m_{21}\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - v_2\alpha_1\alpha_2 + m_2\alpha_1\alpha_2 &= 0 \\ n_{12}\alpha_1\alpha_2 - n_{21}\alpha_1\alpha_2 + \frac{m_{12}\alpha_1\alpha_2}{R_1} - \frac{m_{21}\alpha_1\alpha_2}{R_2} &= 0\end{aligned}\tag{2.17}$$

La sexta ecuación de (2.17) es una identidad que se verifica directamente usando las expresiones dadas en (2.12) y la simetría de esfuerzos cortantes ( $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ). En las expresiones (2.3) se evidencia que al desprestigiar las deformaciones transversales de corte sólo quedan tres desplazamientos independientes ( $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_\zeta$ ). Esto implica tener solo tres ecuaciones de equilibrio para las tres fuerzas externas en la dirección de los desplazamientos independientes ( $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_\zeta$ ) y no tener en cuenta la influencia de los momentos externos ( $m_1$  y  $m_2$ ).

Análogamente, si se aplica el principio de trabajo virtual sin considerar las deformaciones transversales de corte y usando las cantidades de deformación dadas en (2.5), (2.6) y (2.7), se obtiene una nueva relación de equilibrio, la cual usando temporalmente la convención de que un operador entre llaves no se aplica al vector sobre el que actúa la matriz del operador, se expresa como sigue:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{\alpha_1} \right) & \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right\} & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} \right) & -\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right\} & \frac{1}{\alpha_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \frac{1}{R_1} \right] \right\} & \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right\} & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{2}{R_1 \alpha_2} \right) & -\frac{2}{R_1 \alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right\} \\ \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right\} & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} \right) & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{\alpha_1} \right) & -\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right\} & \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right\} & \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \frac{1}{R_2} \right] \right\} & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{2}{R_2 \alpha_1} \right) & -\frac{2}{R_2 \alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right\} \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} \alpha_1 \alpha_2 \\ \bar{m}_{22} \alpha_1 \alpha_2 \\ \bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2 \\ \bar{m}_{11} \alpha_1 \alpha_2 \\ \bar{m}_{22} \alpha_1 \alpha_2 \\ \bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \alpha_1 \alpha_2 \\ p_2 \alpha_1 \alpha_2 \\ p_\zeta \alpha_1 \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Donde los tres factores en la tercera fila son:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{\alpha_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right\} \right) - \frac{1}{R_1^2} \\ \lambda^2 &= -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right\} \right) - \frac{1}{R_2^2} \\ \lambda^3 &= -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{\alpha_1} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} \right) \right] \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de la descripción (2.8) en la relación (2.18) se obtiene la siguiente relación de equilibrio dada por Hoefakker:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2} & -\frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xx} a \\ n_{\theta\theta} a \\ n_{x\theta} a \\ m_{xx} a \\ m_{\theta\theta} a \\ m_{x\theta} a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x a \\ p_\theta a \\ p_z a \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La tercera ecuación de (2.18) se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{1}{\alpha_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\bar{m}_{11} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1} \right) - \frac{\bar{m}_{22} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2} \right) \right] \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{\bar{m}_{22} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{\bar{m}_{11} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1} \right) \right] \right) \\ & - \frac{\bar{n}_{11} \alpha_1 \alpha_2}{R_1} + \frac{\bar{m}_{11} \alpha_1 \alpha_2}{R_1^2} - \frac{\bar{n}_{22} \alpha_1 \alpha_2}{R_2} + \frac{\bar{m}_{22} \alpha_1 \alpha_2}{R_2^2} + p_\zeta \alpha_1 \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si se compara (2.20) con la tercera ecuación de (2.17) y se observa que  $n_{11}$  y  $n_{22}$  permanecen cambiando su forma según (2.6), se puede inferir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \alpha_1 \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\bar{m}_{11} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1} \right) - \frac{\bar{m}_{22} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2} \right) \\ \bar{v}_2 \alpha_1 \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{\bar{m}_{22} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{\bar{m}_{11} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\bar{m}_{12} \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Donde las barras indican que no son las fuerzas cortantes habituales sino las que corresponden con las cantidades alternativas de Hoefakker. Reemplazando los valores de la descripción (2.8) en las expresiones (2.21) se obtienen las fuerzas de corte transversales:

$$v_x = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial m_{x\theta}}{\partial \theta} \quad ; \quad v_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial m_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial m_{x\theta}}{\partial x} \quad (2.22)$$

#### 2.2.2.4 Condiciones de Contorno

Aplicando el principio de trabajo virtual (energía potencial mínima) con la teoría fundamental de cáscaras elásticas, además de las ecuaciones de equilibrio (2.17) también se obtiene el siguiente conjunto de integrales sobre las líneas de contorno:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_2}^{\xi_2} \left\{ (f_1 - n_{11}) \delta u_1 + (f_2 - n_{12}) \delta u_2 + (f_\zeta - v_1) \delta u_\zeta + (t_1 - m_{11}) \delta \varphi_1 + (t_2 - m_{12}) \delta \varphi_2 \right\} \alpha_2 d\xi_2 \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(2)}} \\ & + \int_{\xi_2}^{\xi_2} \left\{ (f_1 + n_{11}) \delta u_1 + (f_2 + n_{12}) \delta u_2 + (f_\zeta + v_1) \delta u_\zeta + (t_1 + m_{11}) \delta \varphi_1 + (t_2 + m_{12}) \delta \varphi_2 \right\} \alpha_2 d\xi_2 \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(1)}} \\ & + \int_{\xi_1}^{\xi_1} \left\{ (f_1 - n_{21}) \delta u_1 + (f_2 - n_{22}) \delta u_2 + (f_\zeta - v_2) \delta u_\zeta + (t_1 - m_{21}) \delta \varphi_1 + (t_2 - m_{22}) \delta \varphi_2 \right\} \alpha_1 d\xi_1 \Big|_{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \\ & + \int_{\xi_1}^{\xi_1} \left\{ (f_1 + n_{21}) \delta u_1 + (f_2 + n_{22}) \delta u_2 + (f_\zeta + v_2) \delta u_\zeta + (t_1 + m_{21}) \delta \varphi_1 + (t_2 + m_{22}) \delta \varphi_2 \right\} \alpha_1 d\xi_1 \Big|_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}} \end{aligned}$$

Los cuales dan lugar a las condiciones de borde para la coordenada  $\xi_1 = \text{constante}$ :

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = -n_{11} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = -n_{12} \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = -v_1 \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = -m_{11} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \\ t_2 = -m_{12} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \end{array} \right\} \xi_1 = \xi_1^{(1)} \quad \mathbf{y} \quad \left. \begin{array}{l} f_1 = n_{11} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = n_{12} \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = v_1 \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = m_{11} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \\ t_2 = m_{12} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \end{array} \right\} \xi_1 = \xi_1^{(2)}$$

Y para la coordenada  $\xi_2 = \text{constante}$ :

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = -n_{21} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = -n_{22} \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = -v_2 \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = -m_{21} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \\ t_2 = -m_{22} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \end{array} \right\} \xi_2 = \xi_2^{(1)} \quad \mathbf{y} \quad \left. \begin{array}{l} f_1 = n_{21} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = n_{22} \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = v_2 \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = m_{21} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \\ t_2 = m_{22} \quad 0 \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \end{array} \right\} \xi_2 = \xi_2^{(2)}$$

Donde las cantidades a la izquierda de cada igualdad son las prescritas en el borde. Análogamente, si se aplica el principio de trabajo virtual sin considerar las deformaciones transversales de corte y usando las cantidades de deformación dadas en (2.5), (2.6) y (2.7), se obtienen las nuevas condiciones de contorno para la coordenada  $\xi_1 = \text{constante}$ :

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = n_{11} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = n_{12}^* \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = v_1^* \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = \bar{m}_{11} \quad 0 \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 \end{array} \right\} \xi_1 = \xi_1^{(2)}, \quad \left. \begin{array}{l} f_1 = -n_{11} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = -n_{12}^* \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = -v_1^* \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = -\bar{m}_{11} \quad 0 \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 \end{array} \right\} \xi_1 = \xi_1^{(1)}$$

Con la condición adicional: (2.23)

$$\left[ t_2 \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(2)}} = \left[ \bar{m}_{12} \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(2)}} \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta, \quad \xi_1 = \xi_1^{(2)}$$

$$\left[ t_2 \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(1)}} = - \left[ \bar{m}_{12} \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(1)}} \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta, \quad \xi_1 = \xi_1^{(1)}$$

Además:

$$n_{11} = \bar{n}_{11} - \frac{1}{R_1} \bar{m}_{11}$$

$$n_{12}^* = \bar{n}_{12} + \frac{2}{R_2} \bar{m}_{12}$$

$$v_1^* = \bar{v}_1 + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \bar{m}_{12}}{\partial \xi_2}$$

Haciendo las siguientes aproximaciones:

$$\bar{n}_{11} - \frac{1}{R_1} \bar{m}_{11} \approx \bar{n}_{11}$$

$$\bar{n}_{12} + \frac{2}{R_2} \bar{m}_{12} \approx \bar{n}_{12}$$

Las expresiones (2.23) se convierten en:

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = \bar{n}_{11} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = \bar{n}_{12} \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = v_1^* \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = \bar{m}_{11} \quad 0 \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 \end{array} \right\} \xi_1 = \xi_1^{(2)}, \quad \left. \begin{array}{l} f_1 = -\bar{n}_{11} \quad 0 \quad \tilde{u}_1 = u_1 \\ f_2 = -\bar{n}_{12} \quad 0 \quad \tilde{u}_2 = u_2 \\ f_\zeta = -v_1^* \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta \\ t_1 = -\bar{m}_{11} \quad 0 \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 \end{array} \right\} \xi_1 = \xi_1^{(1)}$$

Con la condición adicional: (2.24)

$$\left[ t_2 \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(2)}} = \left[ \bar{m}_{12} \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(2)}} \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta, \quad \xi_1 = \xi_1^{(2)}$$

$$\left[ t_2 \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(1)}} = - \left[ \bar{m}_{12} \right]_{\xi_2 = \xi_2^{(1)}}^{\xi_2 = \xi_2^{(2)}} \Big|_{\xi_1 = \xi_1^{(1)}} \quad 0 \quad \tilde{u}_\zeta = u_\zeta, \quad \xi_1 = \xi_1^{(1)}$$

Para los bordes de coordenada  $\xi_2 = \text{constante}$ , se pueden obtener expresiones equivalentes donde los índices que denotan las líneas paramétricas se intercambian cuando corresponda.

Si la curva de borde en una de las dos líneas de coordenadas es una curva cerrada, la condición adicional se convierte en una identidad y las condiciones de contorno en la otra línea de coordenadas se reemplazan por condiciones de continuidad para todas las cantidades. De lo contrario, las condiciones adicionales describen cuatro cargas puntuales en las esquinas de la superficie de referencia.

Usando la descripción (2.8) en (2.24) se obtienen las siguientes condiciones de borde (ver Figura 2-5) en la coordenada  $x = \text{constante}$ :

$$\left. \begin{array}{l} f_x = n_{xx} \quad \text{o} \quad \tilde{u}_x = u_x \\ f_\theta = n_{x\theta} \quad \text{o} \quad \tilde{u}_\theta = u_\theta \\ f_z = v_x^* \quad \text{o} \quad \tilde{u}_z = u_z \\ t_x = m_{xx} \quad \text{o} \quad \tilde{\phi}_x = \phi_x \end{array} \right\} x = x^{(2)}, \quad \left. \begin{array}{l} f_x = -n_{xx} \quad \text{o} \quad \tilde{u}_x = u_x \\ f_\theta = -n_{x\theta} \quad \text{o} \quad \tilde{u}_\theta = u_\theta \\ f_z = -v_x^* \quad \text{o} \quad \tilde{u}_z = u_z \\ t_x = -m_{xx} \quad \text{o} \quad \tilde{\phi}_x = \phi_x \end{array} \right\} x = x^{(1)} \quad (2.25)$$

Donde la fuerza cortante combinada o cortante de Kirchhoff se convierte en:

$$v_x^* = v_x + \frac{1}{a} \frac{\partial m_{x\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{2}{a} \frac{\partial m_{x\theta}}{\partial \theta} \quad (2.26)$$

Además, ambas rotaciones definidas por (2.4) se convierten en:

$$\begin{aligned} \phi_x &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \phi_\theta &= \frac{u_\theta}{a} - \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.27)$$

La condición adicional en (2.24) se convierte en una identidad, ya que en lo posterior el análisis se enfoca en una cáscara cilíndrica circular con bordes circunferenciales completos.

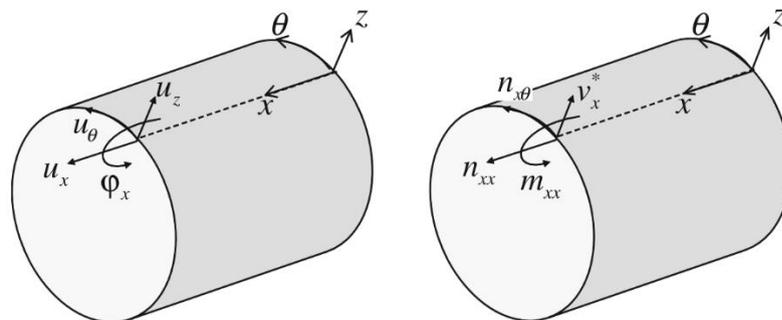


Figura 2-5: Parámetros que definen las condiciones de contorno

Fuente: Elaboración propia

### 2.2.3 Diseño sísmico de reservorios de concreto (ACI 350.3-06)

El Instituto Americano del Concreto (ACI) establece en su código 350.3-06 los requerimientos necesarios para el diseño y análisis de tanques de almacenamiento que estén bajo condiciones sísmicas. Esta publicación entrega pautas al diseñador para poder calcular las fuerzas sísmicas y aplicarlas en las estructuras de estudio. Todas las fuerzas de tipo sísmico generadas en tanques dependen del espectro de respuesta y las características físicas del tanque.

#### 2.2.3.1 Modelo dinámico

Antes de desarrollar los modelos dinámicos, estudiaremos cómo el líquido contenido en un tanque interactúa con las paredes de éste en un movimiento sísmico. Cuando hay un sismo, el movimiento vibratorio provoca el oleaje o chapoteo del líquido que se encuentra contenido dentro del tanque, cuando esto sucede el líquido disipa una cantidad de energía muy pequeña lo cual quiere decir que el grado de amortiguamiento es muy pequeño. Las presiones hidrodinámicas rigen la respuesta sísmica de un tanque con contenido líquido, debido a que este fluido ejercerá presiones dinámicas en la paredes y fondo del tanque durante un evento sísmico. Asimismo, cuando el líquido de la región inferior del tanque se comporta como una masa rígidamente conectada a la pared del depósito y aceleran induciendo presiones hidrodinámicas sobre la pared y también sobre su base o fondo, esta masa inferior se denomina masa impulsiva. La masa de la región superior es la que sufre el oleaje de la superficie libre, denominándose masa convectiva, pues ejerce presiones hidrodinámicas convectivas en las paredes y fondo.

El método de Housner considera los efectos hidrodinámicos debido a las fuerzas convectiva e impulsiva, tomando en cuenta la deformación elástica que sufre el tanque. El análisis también toma en cuenta las fuerzas originadas por la aceleración vertical del terreno y la inercia de los elementos que conforman el tanque. El modelo de Housner se basa en un tanque con forma circular sobre el cual actúan presiones muy parecidas a las de un tanque rectangular; este modelo fue aceptado desde los 80's (Suarez, 2014). En ausencia de un análisis más riguroso que tenga en cuenta las complejas variaciones verticales y horizontales de las presiones hidrodinámicas, las estructuras que contengan líquido se diseñarán para una distribución de presiones dinámicas y otra distribución de

cortantes dinámicos además de la distribución de presiones hidrostáticas. (ACI 350.3-06, 2006, p. 21)

### 2.2.3.2 Masas impulsiva y convectiva

La masa impulsiva representa el resultado del efecto de las presiones sísmicas impulsivas en la parte inferior de los muros del tanque. La masa impulsiva se mueve con las paredes del tanque, como respuesta al movimiento del suelo asumiéndose que el líquido es incompresible (ACI 350.3-06, 2006, p. 33). Para simular el fenómeno de presiones impulsivas se puede modelar a la masa impulsiva unida mediante resortes indeformables a las paredes del tanque.

La masa equivalente del líquido oscilante está representada por la masa convectiva, siendo ésta quien genera las presiones convectivas en la zona superior de las paredes del tanque. Para simular el fenómeno de presiones convectivas se puede modelar a la masa convectiva unida mediante resortes a las paredes del tanque, lo cual genera un periodo de vibración que corresponde al periodo del fluido batiéndose, es decir, simula el chapoteo. (ACI 350.3-06, 2006, p. 34)

### 2.2.3.3 Uso de cargas estáticas de diseño sísmico (ACI 350.3-06)

Para el análisis sísmico estático, las paredes cilíndricas de los tanques circulares deben ser cargadas por la propia fuerza de inercia  $P_w$  de la pared distribuida uniformemente alrededor de toda la circunferencia (ver figura 2-6).

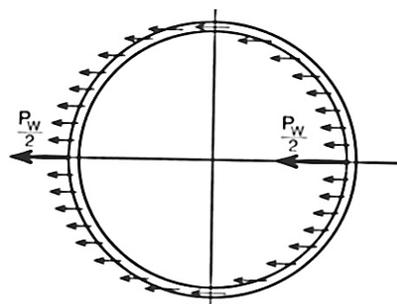


Figura 2-6: Distribución horizontal de las fuerzas inerciales

Fuente: Norma (ACI 350.3-06)

La mitad de la fuerza impulsiva  $P_i$  se aplica simétricamente alrededor de  $\theta = 0$  grados y actuando hacia afuera en la mitad de la circunferencia de la pared, y la

otra mitad de  $P_i$  simétricamente alrededor de  $\theta = 180$  grados y actuando hacia adentro en la mitad opuesta de la circunferencia de la pared. La mitad de la fuerza convectiva  $P_c$  actuando sobre la mitad de la circunferencia de la pared simétricamente alrededor de  $\theta = 0$  grados y la otra mitad de  $P_c$  simétricamente alrededor de  $\theta = 180$  grados y actuando hacia adentro en la mitad opuesta de la circunferencia de la pared (ver Figura 2-7). (ACI 350.3-06, 2006, p. 26)

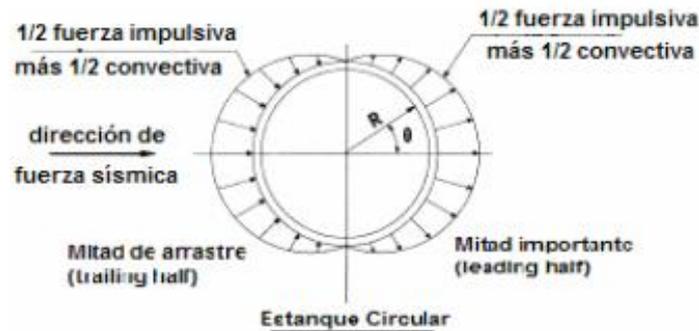


Figura 2-7: Distribución horizontal de la fuerza impulsiva y fuerza convectiva

Fuente: Norma (ACI 350.3-06)

De forma superpuesta a las fuerzas laterales no balanceadas actuará una fuerza balanceada debido a la aceleración vertical del terreno durante el sismo, la cual se define como la fuerza resultante de una presión axisimétrica  $p_{vy}$  sobre la pared del tanque (ver Figura 2-8).

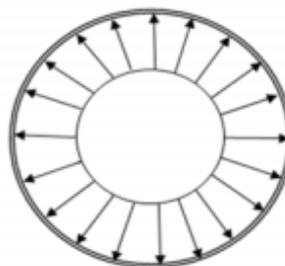


Figura 2-8: Distribución horizontal de la fuerza por aceleración vertical

Fuente: Norma (ACI 350.3-06)

La distribución vertical de todas las fuerzas mencionadas sigue una distribución lineal aproximada tal como se aprecia en la Figura 2-9 según la norma ACI 350.3-06 (2006).

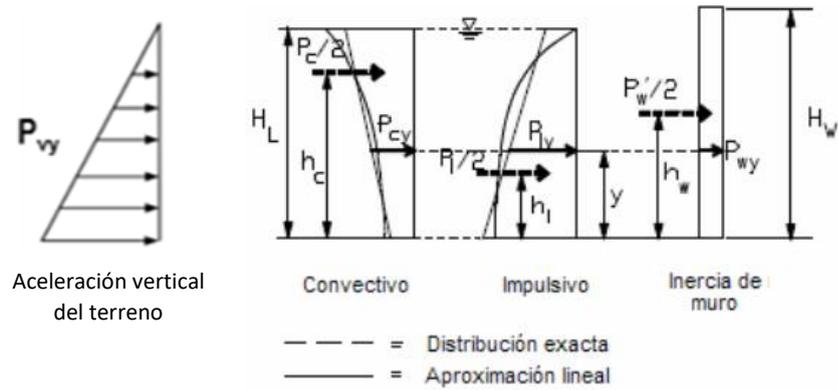


Figura 2-9: Distribución vertical de presiones

Fuente: Elaboración propia basada en la Norma (ACI 350.3-06)

#### 2.2.4 Norma técnica E.030 Diseño Sismorresistente del RNE

La norma técnica de edificaciones E.030 (Diseño Sismorresistente) se emplea para el diseño sismorresistente de las edificaciones. En la presente tesis se utilizó de forma parcial debido a que las estructuras hidráulicas (tanques) sometidas a cargas sísmicas no cuentan con una norma específica para el correcto diseño. En ella se encuentran los factores que sirven para determinar el espectro de respuesta de acuerdo a la zonificación y tipo de suelo.

##### 2.2.4.1 Dirección del sismo

Se considera que el movimiento del suelo durante el sismo de diseño actúa en cualquier dirección del plano horizontal, dirección que tendrán las resultantes de las cargas laterales aplicadas pasando por el eje de simetría del tanque. No es necesario tener en cuenta un movimiento sísmico simultáneo en dos direcciones ortogonales del plano horizontal, esto debido a la simetría del tanque circular. Por lo tanto, el análisis se realiza para una sola dirección horizontal y la dirección vertical también debe ser considerada.

## CAPÍTULO III: SOLUCIÓN ANALÍTICA DE RESERVORIOS CIRCULARES CON BASE EN LA ECUACIÓN DE MORLEY-KOITER

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Hoefakker (2010) desarrolla un procedimiento simplificado de solución analítica para estructuras cilíndricas de pared delgada basándose en una exhaustiva revisión de la literatura y aportando un criterio lógico que relaciona el tipo de carga y la deformación esperada en la estructura para diversos modos de carga-deformación y así llegar a una eficiente solución del tipo cerrada, sin embargo, el resultado final obtenido está limitado únicamente al desplazamiento en la dirección normal a las paredes del tanque (eje  $z$ ) y no se detallan las expresiones resultantes para las fuerzas internas que se producen en la estructura.

En este capítulo se explica el procedimiento realizado por Hoefakker y con ayuda del cálculo diferencial e integral se consigue un resultado más detallado, con expresiones resultantes para las fuerzas internas que se producen en la estructura, únicamente para los dos primeros modos de carga-deformación que son necesarios en el análisis sísmico estático de tanques. Finalmente se desarrolla un ejemplo numérico para un tanque apoyado circular de concreto armado con las expresiones resultantes brindadas.

### 3.2 SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

#### 3.2.1 Ecuaciones diferenciales para los desplazamientos

Hasta este momento, no se han introducido simplificaciones o suposiciones adicionales. Para obtener ecuaciones diferenciales convenientes para los desplazamientos, se asume que los parámetros que describen las propiedades del material y la geometría de la sección transversal, es decir,  $E$ ,  $\nu$  y  $a$ ,  $t$  respectivamente, son constantes para toda la cáscara cilíndrica circular.

La sustitución de la relación cinemática (2.9) en la relación constitutiva (2.14) resulta en lo que a veces se conoce como la "ley elástica", que dice:

$$n_{xx} = D_m \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{1}{a} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \nu \frac{1}{a} u_z \right) \quad m_{xx} = -D_b \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \nu \frac{1}{a^2} u_z \right) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} n_{\theta\theta} &= D_m \left( v \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a} u_z \right) & m_{\theta\theta} &= -D_b \left( v \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} u_z \right) \\ n_{x\theta} &= D_m \frac{1-v}{2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) & m_{x\theta} &= -D_b (1-v) \left( -\frac{1}{a} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial \theta} \right) \end{aligned}$$

La sustitución de esta ley elástica en (2.19) produce las siguientes tres ecuaciones diferenciales para los desplazamientos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1-v}{2} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} - \frac{1+v}{2} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x \partial \theta} - v \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{p_x}{D_m} \\ -\frac{1+v}{2} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial \theta} - \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{D_b}{D_m} \frac{1}{a^2} 2(1-v) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} \\ + \frac{D_b}{D_m} \frac{1}{a^2} 2(1-v) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial \theta} &= \frac{p_\theta}{D_m} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} v \frac{1}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a^2} u_z - \frac{D_b}{D_m} \frac{1}{a^2} 2(1-v) \frac{\partial^3 u_\theta}{\partial x^2 \partial \theta} \\ + \frac{D_b}{D_m} \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 u_z}{\partial \theta^4} + 2v \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right. \\ \left. + 2 \frac{1}{a^4} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^4} u_z \right) &= \frac{p_z}{D_m} \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones diferenciales se describen simbólicamente por:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \frac{1}{D_m} \begin{bmatrix} p_x \\ p_\theta \\ p_z \end{bmatrix}$$

Los operadores desde  $L_{11}$  hasta  $L_{33}$  forman una matriz de operador diferencial, en la cual los operadores son

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\Delta + \frac{1+v}{2} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & L_{12} &= L_{21} = -\frac{1+v}{2} \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ L_{22} &= -\Delta + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k(1-v) \frac{\partial^2}{\partial x^2} & L_{13} &= -L_{31} = -v \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{33} &= \frac{1}{a^2} + ka^2 \left( \Delta + \frac{1}{a^2} \right)^2 - 2ka^2(1-v) \frac{\partial^2}{\partial x^2} & L_{23} &= -L_{32} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2k(1-v) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} \end{aligned}$$

Aquí el operador de Laplace  $\Delta$  se define por:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.3)$$

Y se introduce el parámetro adimensional  $k$ , que se define por

$$k = \frac{D_b}{D_m a^2} = \frac{t^2}{12a^2} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, se observa que para una cáscara de pared delgada donde  $t < a$  se deduce que el parámetro  $k$  es insignificamente pequeño comparado con la unidad ( $k \ll 1$ ).

### 3.2.2 Una sola ecuación diferencial para $U_z$

Al eliminar  $u_x$  de la primera y segunda ecuación, se obtiene la ecuación diferencial que describe la relación entre  $u_\theta$  y  $u_z$ . De manera equivalente,  $u_\theta$  se elimina de la primera y segunda ecuación para obtener una relación entre  $u_x$  y  $u_z$ . Las ecuaciones simbólicas resultantes son respectivamente

$$\begin{aligned} (L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})u_\theta + (L_{11}L_{23} - L_{21}L_{13})u_z &= \frac{1}{D_m}(L_{11}p_\theta - L_{21}p_x) \\ (L_{22}L_{11} - L_{12}L_{21})u_x + (L_{22}L_{13} - L_{12}L_{23})u_z &= \frac{1}{D_m}(L_{22}p_x - L_{12}p_\theta) \end{aligned}$$

Esta operación solo es posible si los operadores en una función escalar  $\phi$  son conmutativos, lo que significa que, por ejemplo  $(L_{21}L_{11} - L_{11}L_{21})\phi = 0$ .

Al sustituir estas dos relaciones en la tercera ecuación, se obtiene una sola ecuación diferencial para el desplazamiento  $u_z$ , que simbólicamente se muestra como sigue:

$$\begin{aligned} [L_{31}(L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13}) + L_{32}(L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23}) + L_{33}(L_{22}L_{11} - L_{12}L_{21})]u_z \\ = \frac{1}{D_m}[(L_{22}L_{11} - L_{12}L_{21})p_z + (L_{31}L_{12} - L_{32}L_{11})p_\theta + (L_{32}L_{21} - L_{31}L_{22})p_x] \end{aligned}$$

En esta multiplicación de las derivadas en la forma apropiada, los términos con el cuadrado del parámetro  $k$  se desprecian en comparación con la unidad ( $k^2 \ll 1$ ).

La ecuación diferencial para  $u_z$  queda como sigue

$$\begin{aligned}
 & \Delta \Delta \left( \Delta + \frac{1}{a^2} \right)^2 u_z + 4\beta^4 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} \\
 & - 2(1-\nu) \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2(1+\nu) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 4(1-\nu^2) \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} \quad (3.5) \\
 & = \frac{1}{D_b} \left( \Delta \Delta p_z + (2+\nu) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 p_\theta}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 p_\theta}{\partial \theta^3} + \nu \frac{1}{a} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x^3} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \theta^2} \right)
 \end{aligned}$$

Aquí se introduce el parámetro  $\beta$ , mencionado en el libro de Blaauwendraad y Hoefakker (2014), que se define por

$$\beta^4 = \frac{1-\nu^2}{4a^4k} = \frac{3(1-\nu^2)}{(at)^2} \quad (3.6)$$

Y por lo tanto se puede concluir que, dado que  $t < a$  para cualquier cilindro circular, el parámetro adimensional  $\beta a > 1$ . Además, en caso de que existan derivadas de cuarto orden respecto a  $x$  de la función  $u_z$ , la que se multiplique por el parámetro  $(\beta a)^4$ , será un término principal ya que  $(\beta a)^4 \gg 1$ .

Para las perturbaciones de borde descritas por la solución homogénea, es evidente que las derivadas de mayor orden respecto a  $x$  pueden explicar las rápidas variaciones en la dirección axial del campo de desplazamientos, mientras que las derivadas de menor orden pueden explicar las lentas variaciones de este campo. La magnitud de la cuarta derivada respecto a  $x$  que se multiplica con el parámetro  $(\beta a)^4$  es lo suficientemente grande como para despreciar las otras derivadas de cuarto orden respecto a  $x$ , lo que también es válido para las posiblemente pequeñas contribuciones de la segunda y sexta derivada. Por lo tanto, por pura conveniencia, se puede establecer una ecuación diferencial simplificada y desde el punto de vista matemático mucho más elegante con prácticamente la misma precisión numérica. Sin embargo, existirán pequeñas diferencias entre una solución exacta a la ecuación (3.5) y una solución a una ecuación aproximada, pero estas diferencias son del mismo orden que las introducidas por Hoefakker al despreciar términos relacionados con la suposición de una pared delgada. Por lo tanto, enfatizar en estas diferencias no tiene sentido a menos que las deformaciones transversales de corte y las deformaciones en la dirección normal a la superficie de referencia también se tengan en cuenta.

De acuerdo con las consideraciones mencionadas anteriormente, la ecuación diferencial únicamente para  $u_z$  se aproxima despreciando las derivadas que no contribuyen sustancialmente en comparación con la derivada multiplicada por el parámetro  $(\beta a)^4$ . Para las otras dos ecuaciones que relacionan  $u_x$  y  $u_\theta$  con  $u_z$ , una observación similar conduce a despreciar términos pequeños, que se multiplican por el parámetro  $k$ . De este modo, se obtienen tres ecuaciones diferenciales que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} & \frac{1-v}{2} \left\{ \Delta \Delta u_\theta + (2+v) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \theta^3} \right\} \\ & = \frac{1}{D_m} \left\{ \frac{1+v}{2} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 p_x}{\partial x \partial \theta} - \Delta p_\theta + \frac{1+v}{2} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p_\theta}{\partial \theta^2} \right\} \\ & \frac{1-v}{2} \left\{ \Delta \Delta u_x + v \frac{1}{a} \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} - \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial \theta^2} \right\} \\ & = \frac{1}{D_m} \left\{ -\Delta p_x + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 p_\theta}{\partial x \partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \Delta \Delta \left( \Delta + \frac{1}{a^2} \right)^2 u_z + 4\beta^4 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} \\ & = \frac{1}{D_b} \left\{ \Delta \Delta p_z + (2+v) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 p_\theta}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 p_\theta}{\partial \theta^3} + v \frac{1}{a} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x^3} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \theta^2} \right\} \end{aligned}$$

Donde la última es la conocida ecuación de Morley - Koiter.

Extrañamente las dos primeras ecuaciones de (3.7) son ampliamente aceptadas, pero las muchas variaciones para la ecuación diferencial única (similar a la tercera ecuación de (3.7) indican que aún no se ha logrado un consenso general. Dado que la solución homogénea de la ecuación de Morley - Koiter es matemáticamente la más adecuada por sustitución con la misma precisión, esta ecuación se considera en el tratamiento posterior de las cáscaras cilíndricas circulares.

### 3.3 CÁSCARAS CILÍNDRICAS CERRADAS DE CONTORNO CURVO

#### 3.3.1 Fuerzas externas como series trigonométricas infinitas

En general, cualquier carga aplicada se puede transformar con bastante facilidad y muy convenientemente en una serie de Fourier con respecto a la coordenada circunferencial  $\theta$  en el círculo paralelo. Debido a la simetría de la superficie y la probable continuidad en la dirección circunferencial de cualquier carga superficial o lineal, dicha serie será una serie trigonométrica.

Considerando no solo la continuidad sino también la simetría de la carga en la dirección circunferencial y eligiendo un eje de simetría que se indica por  $\theta = 0$ , se observa que las cargas  $p_x$  y  $p_z$  son funciones periódicas pares con período  $2\pi$  con respecto a ese eje de simetría y que la carga  $p_\theta$  es una función periódica impar.

La serie de Fourier de cualquier función par o impar consta sólo de las funciones trigonométricas pares  $\cos(n\theta)$  o funciones trigonométricas impares  $\sin(n\theta)$ , respectivamente, y un término constante. Por lo tanto, los tres componentes de carga pueden describirse mediante una serie trigonométrica de Fourier expresada por:

$$\begin{aligned} p_x(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{xn}(x) \cos n\theta \\ p_\theta(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{\theta n}(x) \sin n\theta \\ p_z(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{zn}(x) \cos n\theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde  $n$  es el número de modo circunferencial y representa el número de ondas completas en la dirección circunferencial.

De acuerdo con la carga de serie trigonométrica, una solución tentativa para la ecuación diferencial reducida será de la forma de la serie trigonométrica. Obviamente, no solo la solución homogénea  $u^h$  debe describirse mediante una forma congruente con la distribución de carga, sino que también la solución no homogénea  $u^i$  tendrá la misma distribución circunferencial. Entonces, en

correspondencia con la distribución de los componentes de la carga, la solución general para los desplazamientos es de forma congruente:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_h u_x^h(x) + u_x^i(x)] \cos n\theta \\
 u_\theta(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_h u_\theta^h(x) + u_\theta^i(x)] \sin n\theta \\
 u_z(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_h u_z^h(x) + u_z^i(x)] \cos n\theta
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Donde  $C_h$  representa las ocho constantes arbitrarias por número de modo circunferencial.

Bajo la misma consideración y por inspección de las relaciones fundamentales, se puede concluir que las rotaciones, las deformaciones y las fuerzas internas se describen mediante funciones de la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi_x, \quad \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\theta\theta}, \kappa_{xx}, \kappa_{\theta\theta}, \quad n_{xx}, n_{\theta\theta}, v_x, m_{xx}, m_{\theta\theta}, &\Rightarrow \cos n\theta \\
 \varphi_\theta, \quad \gamma_{x\theta}, \rho_{x\theta}, \quad n_{x\theta}, v_\theta, m_{x\theta}, &\Rightarrow \sin n\theta
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Las consideraciones descritas aquí se ejemplifican para una carga que es simétrica a un cierto eje, pero que puede extenderse fácilmente a una carga asimétrica describiendo las series de Fourier como combinaciones de serie de senos y cosenos por estado de carga. Tales combinaciones pueden ser tratadas simultáneamente, pero obviamente de forma separada, considerando la parte homogénea y la no homogénea de la solución general congruente. Por tanto, la elección de una carga simétrica no degenera la generalidad del enfoque.

### 3.3.2 Tres comportamientos carga-deformación

La respuesta de un cilindro a todas las cargas posibles indicadas por un número de modo diferente  $n$  se puede subdividir en tres comportamientos carga-deformación diferentes. Sin restringir las condiciones de contorno, la respuesta de un cilindro circular (largo) a cualquier carga es obviamente igual a la respuesta de un anillo a dicha carga. En la Figura 3-1 se visualizan cuatro estados de carga y su deformación correspondiente para un anillo circular. En realidad, la Figura 3-1

solo da la respuesta a las cargas  $p_\theta(\theta)$  y  $p_z(\theta)$ , pero es obvio que una carga  $p_x$  en un cilindro da un comportamiento congruente por número de modo  $n$ .

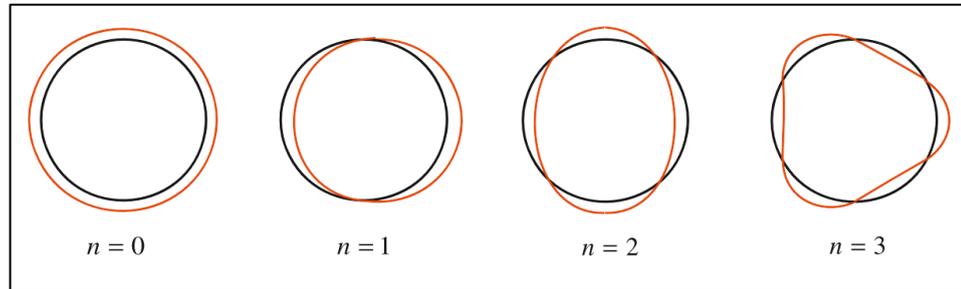


Figura 3-1: Cuatro estados de carga y modos de deformación para un anillo

Fuente: Elaboración propia

### 3.3.2.1 Modo axisimétrico

El modo indicado por  $n=0$  (lado izquierdo en la Figura 3-1) se conoce generalmente como el modo axisimétrico y describe un comportamiento constante en la dirección circunferencial. Tal carga conduce, en principio, a un cambio en el radio del cilindro con bordes circulares. Cualquier cantidad  $\varphi$  debe ser constante en la dirección circunferencial; en otras palabras, la sustitución  $\partial\varphi/\partial\theta=0$  debe hacerse en las ecuaciones gobernantes. Además, un desplazamiento constante en la dirección circunferencial  $u_\theta$  solo representa una rotación de cuerpo rígido del cilindro, que no conduce a ninguna deformación unitaria, y debido a consideraciones de simetría, la rotación  $\phi_\theta$  debería ser cero. Lo mismo aplica para las deformaciones unitarias de corte longitudinales  $\gamma_{x\theta}$ , la torsión  $\rho_{x\theta}$ , los correspondientes esfuerzos de corte longitudinales  $\sigma_{x\theta}$  y su fuerza  $n_{x\theta}$  y momento  $m_{x\theta}$ , lo cual también se puede concluir por inspección de las ecuaciones gobernantes.

No pudiendo describir  $u_\theta$  solo quedan dos desplazamientos independientes por describir ( $u_x$  y  $u_z$ ), lo cual implica que solo se pueden obtener dos ecuaciones diferenciales expresadas en los desplazamientos (mientras  $p_\theta$  sea igual a cero). Por lo tanto, la ecuación diferencial resultante no será de octavo orden, sino de sexto orden, ya que al inspeccionar el sistema (3.2) las ecuaciones diferenciales para  $p_x$  y  $p_z$  son de segundo orden para  $u_x$  y de cuarto orden para  $u_z$ , respectivamente.

Para mantener la coherencia, el modo axisimétrico será estudiado con la ecuación de Morley - Koiter, mientras se hacen las sustituciones necesarias, pero también se usarán las relaciones fundamentales presentadas en la sección 2.2.2.

### 3.3.2.2 Modo viga

El modo indicado por  $n=1$  (segundo a la izquierda en la Figura 3-1) se conoce generalmente como el modo viga y describe la respuesta que se obtendría del cilindro circular si se le tratara como una viga de sección transversal circular. En otras palabras, la deflexión lateral del cilindro circular es causada por la resultante de dicho estado de carga. Sin embargo, el uso de las expresiones generadas para los tres desplazamientos independientes de la cáscara ( $u_x$ ,  $u_\theta$  y  $u_z$ ) da como resultado la descripción inherente de una viga con rigidez tanto de flexión como de corte. Además, la ecuación gobernante es una ecuación diferencial de octavo orden y, obviamente no describe solo la solución polinómica de cuarto orden que representa la respuesta de la teoría de vigas de Euler, sino que también se obtiene una solución que atiende los estados de deformación que se dan en el borde circular y que no son satisfechos con tal teoría. Obviamente, esta parte de la solución describe las perturbaciones de borde que se originan principalmente por deformaciones restringidas en la sección transversal.

La ecuación de Morley se ajusta perfectamente a este comportamiento, donde para  $n=1$  todas las cantidades se pueden expresar como funciones del tipo  $\varphi(x,\theta)=\varphi_1(x)\cos\theta$  y  $\varphi(x,\theta)=\varphi_1(x)\sin\theta$  dependiendo del eje de simetría de la cantidad considerada.

### 3.3.2.3 Modos autobalanceados

Los modos indicados por  $n=2, 3, 4$  ( $n=2$  y  $n=3$  están representados en el lado derecho de la Figura 3-1) se conocen generalmente como los modos autobalanceados. La carga tiene tantos ejes de simetría como el número de modo  $n$ , donde estos ejes se cruzan entre sí en el punto central del círculo, lo cual también se cumple para  $n$  ejes de antisimetría. La respuesta de un anillo a dicha carga se describe íntegramente por una alteración de la forma circular sin desplazar el punto central del círculo, ya que la resultante de la carga es igual a cero.

La respuesta de un cilindro completo sin restricción a la deformación en sus bordes circulares será igual a la respuesta de un anillo con el perfil circular.

Se producirán únicamente la fuerza membranal, el momento flector y la fuerza cortante transversal en la dirección circunferencial. Sin embargo, si este comportamiento de respuesta se restringe en cualquier borde circular, también se provoca flexión y deformaciones unitarias de membrana en la dirección axial.

La ecuación de Morley describe excelentemente este comportamiento, donde para los números de modo  $n > 1$  todas las cantidades se pueden expresar como funciones del tipo  $\varphi(x, \theta) = \varphi_n(x) \cos n\theta$  y  $\varphi(x, \theta) = \varphi_n(x) \sin n\theta$  dependiendo del eje de simetría de la cantidad considerada.

### 3.3.3 Solución completa para el modo axisimétrico

Como se indica todas las cantidades son constantes en la dirección circunferencial para el modo axisimétrico. Por lo tanto, se pueden hacer las siguientes sustituciones para la carga y los desplazamientos

$$\begin{aligned} P_x(x, \theta) &= P_{x0}(x) & , & & u_x(x, \theta) &= u_{x0}(x) \\ P_\theta(x, \theta) &= 0 & , & & u_\theta(x, \theta) &= 0 \\ P_z(x, \theta) &= P_{z0}(x) & , & & u_z(x, \theta) &= u_{z0}(x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Obviamente, la derivada con respecto a  $\theta$  es igual a cero ( $\partial\varphi/\partial\theta=0$ ) para todas las cantidades.

#### 3.3.3.1 Ecuación diferencial

Al establecer  $\partial\varphi/\partial\theta=0$ , el sistema (3.2) se puede escribir como

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \nu \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{P_x}{D_m} \\ \nu \frac{1}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{a^2} u_z + \frac{D_b}{D_m} \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \frac{2\nu}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{u_z}{a^4} \right) &= \frac{P_z}{D_m} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por sustitución de las funciones de carga y desplazamiento dadas anteriormente, la ecuación diferencial para  $u_z$  en (3.7) se convierte en

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{a^2} \right)^2 + 4\beta^4 \right] \frac{d^4 u_{z0}(x)}{dx^4} = \frac{1}{D_b} \left( \frac{d^4 p_{z0}(x)}{dx^4} + v \frac{1}{a} \frac{d^3 p_{x0}(x)}{dx^3} \right) \quad (3.13)$$

La ecuación presentada aquí es de octavo orden, pero esto se debe al hecho de que la ecuación (3.7) se deriva eliminando el desplazamiento  $u_\theta$ , el cual es cero para el caso axisimétrico. Integrando tres veces con respecto a la coordenada  $x$  se produce la ecuación buscada, que se lee:

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{a^2} \right)^2 + 4\beta^4 \right] \frac{du_{z0}(x)}{dx} = \frac{1}{D_b} \left( \frac{dp_{z0}(x)}{dx} + v \frac{1}{a} p_{x0}(x) \right) \quad (3.14)$$

Aplicando un procedimiento similar a la segunda ecuación del conjunto (3.7), resulta en

$$\frac{\partial^2 u_{x0}(x)}{\partial x^2} + v \frac{1}{a} \frac{\partial u_{z0}(x)}{\partial x} = -\frac{1}{D_m} p_{x0}(x) \quad (3.15)$$

Obviamente, la ecuación (3.15) es igual a la primera ecuación del sistema (3.12) y una ecuación similar a (3.14) podría obtenerse directamente de este sistema. Haciéndolo, la ecuación diferencial para  $u_z$  se lee

$$\left[ \frac{D_b}{D_m} \left( \frac{d^4}{dx^4} + v \frac{2}{a^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{a^4} \right) + \frac{1}{a^2} (1 - v^2) \right] \frac{du_z}{dx} = \frac{1}{D_m} \left\{ \frac{dp_z}{dx} + v \frac{1}{a} p_x \right\}$$

También se puede obtener una ecuación diferencial para  $u_x$ , que se lee

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{D_b}{D_m} \left( \frac{d^4}{dx^4} + v \frac{2}{a^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{a^4} \right) + \frac{1}{a^2} (1 - v^2) \right] \frac{d^2 u_x}{dx^2} \\ & = \frac{1}{D_m} \left\{ \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{D_b}{D_m} \left( \frac{d^4}{dx^4} + v \frac{2}{a^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{a^4} \right) \right] p_x + v \frac{1}{a} \frac{dp_z}{dx} \right\} \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones muestran que la solución para  $u_x$  incluirá una constante más (es decir, seis) que la solución para  $u_z$  (es decir, cinco constantes).

La ecuación (3.14), que se obtiene de la ecuación diferencial para  $u_z$  en (3.7), es ligeramente diferente de la ecuación obtenida del sistema (3.12). Sin embargo, la diferencia entre las soluciones de estas ecuaciones es pequeña y, dado que se permite despreciar esta diferencia, la ecuación (3.14) se adoptará en el análisis posterior.

### 3.3.3.2 Solución homogénea

La solución general consiste en una parte homogénea y una no homogénea. Por inspección de la ecuación diferencial (3.14), se observa que la parte homogénea se puede separar en una parte polinómica y una parte no polinómica. Esta última puede obtenerse resolviendo la siguiente ecuación homogénea.

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{a^2} \right)^2 + 4\beta^4 \right] u_{zo}(x) = 0$$

Para la cual la solución está dada por:

$$u_{zo}(x) = e^{-a_0\beta x} [C_1 \cos(b_0\beta x) + C_2 \sin(b_0\beta x)] + e^{a_0\beta x} [C_3 \cos(b_0\beta x) + C_4 \sin(b_0\beta x)] \quad (3.16)$$

Donde los parámetros adimensionales  $a_0$  y  $b_0$  están definidos por

$$a_0 = \left[ (1 + Y_o^2)^{\frac{1}{2}} + Y_o \right]^{\frac{1}{2}} ; b_0 = \left[ (1 + Y_o^2)^{\frac{1}{2}} - Y_o \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

en el cual  $Y_o = -\frac{1}{2(\beta a)^2}$

La parte correspondiente para el desplazamiento axial  $u_x$  se obtiene resolviendo la segunda ecuación del conjunto (3.7), lo que resulta para el desplazamiento independiente  $u_x$  en

$$u_{xo}(x) = -v \frac{1}{a} \int u_{zo}(x) dx$$

En el que  $u_{zo}(x)$  viene dado por la expresión (3.16).

### 3.3.3.3 Solución no homogénea

Suponiendo una carga constante  $p_x$  y una carga lineal  $p_z$ , la solución no homogénea de la ecuación diferencial (3.14) se lee:

$$Etu_{zo}(x) = a^2 P_{zo}(x) + va \int P_{xo}(x) dx$$

Y por sustitución de este resultado en la segunda ecuación del sistema (3.7) se puede obtener la solución no homogénea para el desplazamiento axial  $u_x$ , lo que da:

$$Etu_{x_0}(x) = -va \int P_{z_0}(x)dx - \iint P_{x_0}(x)dxdx$$

Las dos constantes que surgirán son en realidad parte de la solución homogénea (parte polinómica), pero se pueden presentar aquí por conveniencia, lo que permite una mejor comprensión de la solución.

### 3.3.3.4 Solución completa

Describiendo las cargas  $p_x$  y  $p_z$  por las formas:

$$p_{x_0}(x) = p_{x_0}^{(2)} \frac{x}{l} + p_{x_0}^{(1)}$$

$$p_{z_0}(x) = p_{z_0}^{(2)} \frac{x}{l} + p_{z_0}^{(1)}$$

Si bien, tanto en el libro como en la tesis de Hoefakker el valor de  $p_{x_0}(x)$  es  $p_{x_0}^{(1)}$  es debido a que se considera que la sección circular del tanque es constante a lo largo de la altura, para esta investigación modificamos la expresión para que esta pueda ser aplicada también para tanques de sección variable conforme a la altura.

La solución completa para el desplazamiento independiente  $u_z$  es:

$$u_z(x) = e^{-a_0\beta x} [C_1 \cos(b_0\beta x) + C_2 \sin(b_0\beta x)] + e^{a_0\beta x} [C_3 \cos(b_0\beta x) + C_4 \sin(b_0\beta x)] + \frac{1}{Et} \left\{ a^2 \left( \frac{p_{z_0}^{(2)}}{l} x + p_{z_0}^{(1)} \right) + va \left( \frac{p_{x_0}^{(2)}}{l} \frac{x^2}{2} + p_{x_0}^{(1)} x + C_5 \right) \right\} \quad (3.18)$$

Y la solución completa para el desplazamiento independiente  $u_x$  es:

$$u_x(x) = v \frac{1}{a\beta} \frac{1}{(a_0)^2 + (b_0)^2} \left[ e^{-a_0\beta x} \{ C_1 (a_0 \cos(b_0\beta x) - b_0 \sin(b_0\beta x)) + C_2 (b_0 \cos(b_0\beta x) + a_0 \sin(b_0\beta x)) \} - e^{a_0\beta x} \{ C_3 (a_0 \cos(b_0\beta x) + b_0 \sin(b_0\beta x)) - C_4 (b_0 \cos(b_0\beta x) - a_0 \sin(b_0\beta x)) \} \right] - \frac{1}{Et} \left\{ va \left( \frac{p_{z_0}^{(2)}}{l} \frac{x^2}{2} + p_{z_0}^{(1)} x \right) + \frac{p_{x_0}^{(2)}}{l} \frac{x^3}{6} + p_{x_0}^{(1)} \frac{x^2}{2} + C_5 x + C_6 \right\} \quad (3.19)$$

Sustituyendo las expresiones (3.18), (3.19) y  $u_\theta(x) = 0$  en las expresiones (2.22), (2.27) y (3.1), se puede obtener la solución completa para todas las cantidades no triviales que se muestran a continuación:

Solución del giro en la dirección longitudinal (axial):  $\varphi_x$

$$\begin{aligned} \varphi_x(x) = -\frac{\partial u_z}{\partial x} = & -\beta \left[ e^{-a_0\beta x} \{ -C_1(a_0 \cos(b_0\beta x) + b_0 \sin(b_0\beta x)) \right. \\ & + C_2(b_0 \cos(b_0\beta x) - a_0 \sin(b_0\beta x)) \} \\ & + e^{a_0\beta x} \{ C_3(a_0 \cos(b_0\beta x) - b_0 \sin(b_0\beta x)) \\ & + C_4(b_0 \cos(b_0\beta x) + a_0 \sin(b_0\beta x)) \} \} \\ & - \frac{1}{Et} \left\{ a^2 \left( \frac{p_{z0}^{(2)}}{l} \right) + va \left( \frac{p_{x0}^{(2)}}{l} x + p_{x0}^{(1)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Solución del momento flector en la dirección longitudinal (axial):  $m_{xx}$

$$\begin{aligned} \frac{m_{xx}(x)}{D_b} = & -\frac{v}{a^2} e^{-a_0\beta x} [C_1 \cos(b_0\beta x) + C_2 \sin(b_0\beta x)] \\ & + e^{a_1\beta x} [C_3 \cos(b_0\beta x) \\ & + C_4 \sin(b_0\beta x)] - \beta^2 \left[ \left[ e^{-a_0\beta x} \{ C_1 \left( (a_0^2 - b_0^2) \cos(b_0\beta x) \right. \right. \right. \\ & + 2a_0b_0 \sin(b_0\beta x) \} \\ & + C_2 \left( (a_0^2 - b_0^2) \sin(b_0\beta x) - 2a_0b_0 \cos(b_0\beta x) \right) \} \\ & + e^{a_0\beta x} \{ C_3 \left( (a_0^2 - b_0^2) \cos(b_0\beta x) - 2a_0b_0 \sin(b_0\beta x) \right) \\ & + C_4 \left( (a_0^2 - b_0^2) \sin(b_0\beta x) + 2a_0b_0 \cos(b_0\beta x) \right) \} \right] \\ & - \frac{v}{Et a^2} \left\{ a^2 \left( \frac{p_{z0}^{(2)}}{l} x + p_{z0}^{(1)} \right) \right. \\ & \left. + va \left( \frac{p_{x0}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{v} \right) + p_{x0}^{(1)} x + C_5 \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Solución de la fuerza normal en la dirección longitudinal (axial):  $n_{xx}$

$$\frac{n_{xx}(x)}{D_m} = \frac{(v^2 - 1)}{Et} \left\{ \frac{p_{x0}^{(2)}}{l} \frac{x^2}{2} + p_{x0}^{(1)} x + C_5 \right\} \quad (3.22)$$

Solución de la fuerza normal en la dirección circunferencial:  $n_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{n_{\theta\theta}(x)}{D_m} = & \left( \frac{1}{a} - \frac{v^2}{a} \right) \left[ e^{-a_0\beta x} [C_1 \cos(b_0\beta x) + C_2 \sin(b_0\beta x)] \right. \\ & \left. + e^{a_1\beta x} [C_3 \cos(b_0\beta x) + C_4 \sin(b_0\beta x)] \right] \\ & + (1 - v^2) \frac{a}{Et} \left\{ \frac{p_{z0}^{(2)}}{l} x + p_{z0}^{(1)} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Solución del momento flector en la dirección circunferencial:  $m_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{m_{\theta\theta}(x)}{D_b} = & -\frac{1}{a^2} e^{-a_0\beta x} [C_1 \cos(b_0\beta x) + C_2 \sin(b_0\beta x)] \\
 & + e^{a_1\beta x} [C_3 \cos(b_0\beta x) \\
 & + C_4 \sin(b_0\beta x)] - \nu\beta^2 \left[ e^{-a_0\beta x} \left\{ C_1 \left( (a_0^2 - b_0^2) \cos(b_0\beta x) \right. \right. \right. \\
 & + 2a_0b_0 \sin(b_0\beta x) \left. \left. \left. + C_2 \left( (a_0^2 - b_0^2) \sin(b_0\beta x) - 2a_0b_0 \cos(b_0\beta x) \right) \right\} \right. \\
 & + e^{a_0\beta x} \left\{ C_3 \left( (a_0^2 - b_0^2) \cos(b_0\beta x) - 2a_0b_0 \sin(b_0\beta x) \right) \right. \\
 & + C_4 \left( (a_0^2 - b_0^2) \sin(b_0\beta x) + 2a_0b_0 \cos(b_0\beta x) \right) \left. \left. \right] \right. \\
 & - \frac{1}{Eta^2} \left\{ a^2 \left( \frac{p_{z0}^{(2)}}{l} x + p_{z0}^{(1)} \right) \right. \\
 & \left. + \nu a \left( \frac{p_{x0}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^2}{2} + \nu a^2 \right) + p_{x0}^{(1)} x + C_5 \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Solución de la fuerza cortante:  $v_x$

$$\begin{aligned}
 \frac{v_x(x)}{D_b} = & \frac{1}{D_b} \frac{\partial m_{xx}(x)}{\partial x} \\
 = & -\frac{\nu}{a^2} \beta \left[ e^{-a_0\beta x} \left\{ -C_1 (a_0 \cos(b_0\beta x) + b_0 \sin(b_0\beta x)) \right. \right. \\
 & + C_2 (b_0 \cos(b_0\beta x) - a_0 \sin(b_0\beta x)) \left. \left. + e^{a_0\beta x} \left\{ C_3 (a_0 \cos(b_0\beta x) - b_0 \sin(b_0\beta x)) \right. \right. \right. \\
 & + C_4 (b_0 \cos(b_0\beta x) + a_0 \sin(b_0\beta x)) \left. \left. \right\} \right. \\
 & - \beta^3 \left[ e^{-a_0\beta x} \left\{ C_1 \left( (-a_0^3 + 3a_0b_0^2) \cos(b_0\beta x) \right. \right. \right. \\
 & + (b_0^3 - 3a_0^2b_0) \sin(b_0\beta x) \left. \left. \left. + C_2 \left( (-a_0^3 + 3a_0b_0^2) \sin(b_0\beta x) \right. \right. \right. \\
 & - (b_0^3 - 3a_0^2b_0) \cos(b_0\beta x) \left. \left. \left. \right\} \right. \\
 & - e^{a_0\beta x} \left\{ C_3 \left( (-a_0^3 + 3a_0b_0^2) \cos(b_0\beta x) \right. \right. \\
 & - (b_0^3 - 3a_0^2b_0) \sin(b_0\beta x) \left. \left. \left. + C_4 \left( (-a_0^3 + 3a_0b_0^2) \sin(b_0\beta x) \right. \right. \right. \\
 & + (b_0^3 - 3a_0^2b_0) \cos(b_0\beta x) \left. \left. \left. \right] \right] \right. \\
 & - \frac{\nu}{Eta^2} \left\{ a^2 \left( \frac{p_{z0}^{(2)}}{l} \right) + \nu a \left( \frac{p_{x0}^{(2)}}{l} x + p_{x0}^{(1)} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

### 3.3.4 Solución completa para el modo viga

Como se indica, todas las cantidades para el modo viga se pueden describir por funciones del tipo  $\phi(x, \theta) = \phi_1(x)\cos\theta$  y  $\phi(x, \theta) = \phi_1(x)\sin\theta$  dependiendo del eje de simetría de la cantidad considerada. Por lo tanto, se pueden hacer las siguientes sustituciones para la carga y los desplazamientos:

$$\begin{aligned} P_x(x, \theta) &= P_{x1}(x)\cos\theta & , & & u_x(x, \theta) &= u_{x1}(x)\cos\theta \\ P_{x\theta}(x, \theta) &= P_{\theta1}(x)\sin\theta & , & & u_\theta(x, \theta) &= u_{\theta1}(x)\sin\theta \\ P_{xz}(x, \theta) &= P_{z1}(x)\cos\theta & , & & u_z(x, \theta) &= u_{z1}(x)\cos\theta \end{aligned}$$

Mientras que para las derivadas con respecto a la coordenada circunferencial  $\theta$  y, en consecuencia, para el operador de Laplace (3.3) se pueden hacer sustituciones de la forma

$$\frac{\partial \phi(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi_1(x)\cos\theta}{\partial \theta} = -\phi_1(x)\sin\theta \quad (3.26)$$

$$\Delta \phi(x, \theta) = \Delta_1 \phi_1(x)\cos\theta = \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \right) \phi_1(x)\cos\theta$$

Para cantidades generalmente descritas por  $\phi(x, \theta) = \phi_1(x)\cos\theta$  y de manera similar para las cantidades generalmente descritas por  $\phi(x, \theta) = \phi_1(x)\sin\theta$ .

#### 3.3.4.1 Ecuación diferencial

Al sustituir las funciones de carga y desplazamiento dadas anteriormente, la ecuación diferencial simple (3.7) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria y al omitir la función coseno para la distribución circunferencial, la ecuación diferencial gobernante se reduce a

$$\begin{aligned} &[\Delta_1 \Delta_1 + 4\beta^4] \frac{d^4 u_{z1}(x)}{dx^4} \\ &= \frac{1}{D_b} \left\{ \Delta_1 \Delta_1 p_{z1}(x) + (2 + \nu) \frac{1}{a^2} \frac{d^2 p_{\theta1}(x)}{dx^2} - \frac{1}{a^4} p_{\theta1}(x) \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{1}{a} \frac{d^3 p_{x1}(x)}{dx^3} + \frac{1}{a^3} \frac{dp_{x1}(x)}{dx} \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

En el cual el operador de Laplace  $\Delta_1$  para  $n=1$  se define por (3.26).

### 3.3.4.2 Solución homogénea

La solución general consiste en una parte homogénea y una no homogénea. Al inspeccionar la ecuación diferencial (3.27), se observa que la parte homogénea se puede separar en una parte polinómica y una parte no polinómica. Esta última puede obtenerse resolviendo la siguiente ecuación homogénea

$$[\Delta_1 \Delta_1 + 4\beta^4]u_{z1}(x) = 0$$

Para lo cual la solución se puede escribir como

$$u_{z1}(x) = -\frac{1}{4\beta^4} \Delta_1 \Delta_1 u_{z1}(x) \quad (3.28)$$

La solución a la ecuación homogénea viene dada por:

$$u_{z1}(x) = e^{-a_1 \beta x} [C_1 \cos(b_1 \beta x) + C_2 \sin(b_1 \beta x)] + e^{a_1 \beta x} [C_3 \cos(b_1 \beta x) + C_4 \sin(b_1 \beta x)] \quad (3.29)$$

Donde los parámetros a dimensionales  $a_1$  y  $b_1$  están definidos por

$$a_1 = \left[ (1 + \gamma_1^2)^{\frac{1}{2}} + \gamma_1 \right]^{\frac{1}{2}} ; \quad b_1 = \left[ (1 + \gamma_1^2)^{\frac{1}{2}} - \gamma_1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{donde } \gamma_1 = \frac{1}{2(\beta a)^2} \quad (3.30)$$

La solución homogénea para los desplazamientos independientes  $u_x$  y  $u_\theta$  se puede obtener resolviendo las dos primeras ecuaciones del conjunto (3.7), para las cuales se leen las ecuaciones homogéneas

$$\Delta \Delta u_\theta = -(2 + \nu) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \theta^3}$$

$$\Delta \Delta u_x = -\nu \frac{1}{a} \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial \theta^2}$$

Por sustitución de las funciones de desplazamiento dadas anteriormente, estas se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias en las que se pueden omitir la función seno (para  $u_\theta$ ) y la función coseno (para  $u_x$ ). Si se sustituye además  $u_{z1}(x)$  por lo expresado en (3.28) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\Delta_1 \Delta_1 u_{\theta 1}(x) = -\frac{1}{4\beta^4} \left[ (2 + \nu) \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{a^4} \right] \Delta_1 \Delta_1 u_{z1}(x)$$

$$\Delta_1 \Delta_1 u_{x1}(x) = \frac{1}{4\beta^4} \left[ -\nu \frac{1}{a} \frac{d^3}{dx^3} - \frac{1}{a^3} \frac{d}{dx} \right] \Delta_1 \Delta_1 u_{z1}(x)$$

Y al omitir los operadores de Laplace, las ecuaciones diferenciales se reducen a

$$u_{\theta 1}(x) = -\frac{1}{4\beta^4} \left[ (2 + \nu) \frac{1}{a^2} \frac{d^2 u_{z1}(x)}{dx^2} - \frac{1}{a^4} u_{z1}(x) \right]$$

$$u_{x1}(x) = \frac{1}{4\beta^4} \left[ \nu \frac{1}{a} \frac{d^3 u_{z1}(x)}{dx^3} + \frac{1}{a^3} \frac{du_{z1}(x)}{dx} \right]$$

Suponiendo cargas lineales  $p_x$ ,  $p_\theta$  y  $p_z$ , la ecuación no homogénea de (3.27) se reduce

$$4\beta^4 \frac{d^4 u_{z1}(x)}{dx^4} = \frac{1}{D_b} \left\{ \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \right)^2 p_{z1}(x) + (2 + \nu) \frac{1}{a^2} \frac{d^2 p_{\theta 1}(x)}{dx^2} - \frac{1}{a^4} p_{\theta 1}(x) \right. \\ \left. + \nu \frac{1}{a} \frac{d^3 p_{x1}(x)}{dx^3} + \frac{1}{a^3} \frac{dp_{x1}(x)}{dx} \right\}$$

dato que  $\beta^4 \gg 1$ . Mediante la integración y el reordenamiento posterior de las expresiones, la solución no homogénea se obtiene como:

$$u_{z1}(x) = \frac{a^2}{Et} \left[ \frac{1}{a^4} \int \int \int \int (p_{z1}(x) - p_{\theta 1}(x)) dx dx dx dx \right. \\ \left. - \frac{2}{a^2} \int \int \left( p_{z1}(x) - \frac{2 + \nu}{2} p_{\theta 1}(x) \right) dx dx + p_{z1}(x) \right] \\ + \frac{a}{Et} \left[ \frac{1}{a^2} \int \int \int p_{x1}(x) dx dx dx + \nu \int p_{x1}(x) dx \right]$$

Las cuatro constantes que surgirán son en realidad parte de la solución homogénea (parte polinómica), pero se pueden presentar aquí por conveniencia, lo que permite una mejor comprensión de la solución. Obviamente, esta parte de la solución es realmente la solución de membrana. Una manera formal de obtener expresiones para los otros desplazamientos independientes sería sustituir la solución para  $u_{z1}$  y después desprestigiar términos pequeños. Sin embargo, una manera más natural es determinar la solución de membrana para las ecuaciones de equilibrio.

La solución de membrana para el conjunto de ecuaciones de equilibrio (2.19) se escribe:

$$n_{\theta\theta}(x, \theta) = a \cos \theta [p_{z1}(x)]$$

$$n_{x\theta}(x, \theta) = a \sin \theta \left[ \frac{1}{a} \int (p_{z1}(x) - p_{\theta 1}(x)) dx \right]$$

$$n_{xx}(x, \theta) = a \cos \theta \left[ -\frac{1}{a^2} \int \int (p_{z1}(x) - p_{\theta 1}(x)) dx dx - \frac{1}{a} \int (p_{x1}(x)) dx \right]$$

Usando la "ley elástica" (3.1), los desplazamientos se pueden obtener por determinación sucesiva, lo que produce

$$u_x(x, \theta) = \frac{a^2}{Et} \cos\theta \left[ -\frac{1}{a^3} \int \int \int (p_{z1}(x) - p_{\theta1}(x)) dx dx dx \right. \\ \left. - v \frac{1}{a} \int p_{z1}(x) dx - \frac{1}{a^2} \int \int p_{x1}(x) dx dx \right]$$

$$u_\theta(x, \theta) = \frac{a^2}{Et} \sin\theta \left[ -\frac{1}{a^4} \int \int \int (p_{z1}(x) - p_{\theta1}(x)) dx dx dx dx + (2 \right. \\ \left. + v) \frac{1}{a^2} \int \int \left( p_{z1}(x) - \frac{2(1+v)}{2+v} p_{\theta1}(x) \right) dx dx \right) \\ \left. - \frac{1}{a^3} \int \int \int p_{x1}(x) dx dx dx \right]$$

$$u_z(x, \theta) = \frac{a^2}{Et} \cos\theta \left[ \frac{1}{a^4} \int \int \int \int (p_{z1}(x) - p_{\theta1}(x)) dx dx dx dx \right. \\ \left. - 2 \frac{1}{a^2} \int \int \left( p_{z1}(x) - \frac{(2+v)}{2} p_{\theta1}(x) \right) dx dx + p_{z1}(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{a^3} \int \int \int p_{x1}(x) dx dx dx + v \frac{1}{a} \int p_{x1}(x) dx \right]$$

Donde la expresión para  $u_z(x, \theta)$  es exactamente igual a la solución de la ecuación no homogénea presentada anteriormente. Además, si estas expresiones se sustituyen en las dos primeras ecuaciones del conjunto (3.7), estas ecuaciones se satisfacen de manera idéntica

Por sustitución de la expresión para  $u_z(x, \theta)$  las rotaciones se convierten

$$\phi_x(x, \theta) = -\frac{du_{z1}(x)}{dx} \cos\theta \quad ; \quad \phi_\theta(x, \theta) = u_{z1}(x) \sin\theta$$

Y todas las demás cantidades son cero para la solución de membrana, que es igual a la solución no homogénea.

### 3.3.4.3 Solución completa

Describiendo las cargas  $p_x$ ,  $p_\theta$  y  $p_z$  por las formas, donde  $l$  es el largo de la cáscara cilíndrica.

$$p_{x1}(x) = p_{x1}^{(2)} \frac{x}{l} + p_{x1}^{(1)}$$

$$p_{\theta1}(x) = p_{\theta1}^{(2)} \frac{x}{l} + p_{\theta1}^{(1)}$$

$$p_{z1}(x) = p_{z1}^{(2)} \frac{x}{l} + p_{z1}^{(1)}$$

La solución completa para el desplazamiento independiente  $u_z$  es:

$$\begin{aligned} \frac{u_z}{\cos \theta} = & e^{-a_1 \beta x} [C_1 \cos(b_1 \beta x) + C_2 \sin(b_1 \beta x)] \\ & + e^{a_1 \beta x} [C_3 \cos(b_1 \beta x) + C_4 \sin(b_1 \beta x)] \\ & + \frac{1}{E t a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^5}{120} - a^2 \frac{x^3}{3} + a^4 x \right) \right. \\ & + p_{z1}^{(1)} \left( \frac{x^4}{24} - a^2 x^2 + a^4 \right) - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^5}{120} - \frac{(2+v)}{6} a^2 x^3 \right) \\ & - p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{(2+v)}{2} a^2 x^2 \right) + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^4}{24} + v a^3 \frac{x^2}{2} \right) \\ & \left. + p_{x1}^{(1)} \left( a \frac{x^3}{6} + v a^3 x \right) \right\} + \left( \frac{x^3}{6 a^3} - 2 \frac{x}{a} \right) C_5 + \left( \frac{x^2}{2 a^2} - 2 \right) C_6 \\ & + \frac{x}{a} C_7 + C_8 \end{aligned} \quad (3.31)$$

La solución completa para el desplazamiento independiente  $u_\theta$  es:

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta}{\sin \theta} = & \frac{1}{4 \beta^4 a^4} \left[ e^{-a_1 \beta x} [C_1 \cos(b_1 \beta x) + C_2 \sin(b_1 \beta x)] + \right. \\ & \left. e^{a_1 \beta x} [C_3 \cos(b_1 \beta x) + C_4 \sin(b_1 \beta x)] \right] - \frac{(2+v)}{4 \beta^2 a^2} \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) + 2 a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) + C_2 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) - 2 a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} + e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) - 2 a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) + C_4 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) + 2 a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \right] + \\ & \frac{1}{E t a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( -\frac{x^5}{120} + (2+v) a^2 \frac{x^3}{6} \right) + p_{z1}^{(1)} \left( -\frac{x^4}{24} + \frac{(2+v)}{2} a^2 x^2 \right) + \right. \\ & \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^5}{120} - \frac{(2+2v)}{6} a^2 x^3 \right) + p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{(2+2v)}{2} a^2 x^2 \right) - \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^4}{24} \right) - \\ & \left. p_{x1}^{(1)} \left( a \frac{x^3}{6} \right) \right\} - \left\{ \left( \frac{x^3}{6 a^3} - (2+v) \frac{x}{a} \right) C_5 + \left( \frac{x^2}{2 a^2} - (2+v) \right) C_6 + \frac{x}{a} C_7 + C_8 \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

la solución completa para el desplazamiento independiente  $u_x$  es:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_x}{\cos \theta} = & \frac{1}{4a^3\beta^3} \left[ e^{-a_1\beta x} \{ -C_1(a_1 \cos(b_1\beta x) + b_1 \sin(b_1\beta x)) \right. \\
 & + C_2(b_1 \cos(b_1\beta x) - a_1 \sin(b_1\beta x)) \} \\
 & + e^{a_1\beta x} \{ C_3(a_1 \cos(b_1\beta x) - b_1 \sin(b_1\beta x)) \\
 & + C_4(b_1 \cos(b_1\beta x) + a_1 \sin(b_1\beta x)) \} \left. \right] \\
 & + \frac{v}{4a\beta} \left[ e^{-a_1\beta x} \left\{ C_1 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \right. \\
 & + (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \sin(b_1\beta x) \left. \right\} \\
 & + C_2 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \\
 & - e^{a_1\beta x} \left\{ C_3 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \\
 & - (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \sin(b_1\beta x) \left. \right\} \\
 & + C_4 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. + (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \left. \right] \\
 & - \frac{1}{Eta} \left\{ p_{z1}^{(2)} \left( \frac{x^4}{24} + va^2 \frac{x^2}{2} \right) + p_{z1}^{(1)} \left( \frac{x^3}{6} + va^2 x \right) \right. \\
 & \left. - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^4}{24} \right) - p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^3}{6} \right) + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^3}{6} \right) + p_{x1}^{(1)} \left( a \frac{x^2}{2} \right) \right\} \\
 & - \left\{ C_5 \left( \frac{x^2}{2a^2} + v \right) + C_6 \left( \frac{x}{a} \right) + C_7 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sustituyendo las expresiones (3.31), (3.32) y (3.33) en las expresiones (2.22), (2.26), (2.27) y (3.1), se puede obtener la solución completa para todas las cantidades no triviales que se muestran a continuación:

Solución del giro en la dirección longitudinal (axial):  $\varphi_x$

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi_x}{\cos \theta} = & -\beta \left[ e^{-a_1 \beta x} \{ -C_1 (a_1 \cos(b_1 \beta x) + b_1 \sin(b_1 \beta x)) \right. \\
 & + C_2 (b_1 \cos(b_1 \beta x) - a_1 \sin(b_1 \beta x)) \} \\
 & + e^{a_1 \beta x} \{ C_3 (a_1 \cos(b_1 \beta x) - b_1 \sin(b_1 \beta x)) \\
 & + C_4 (b_1 \cos(b_1 \beta x) + a_1 \sin(b_1 \beta x)) \} \left. \right] \\
 & - \frac{1}{E t a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^4}{24} - a^2 x^2 + a^4 \right) + p_{z1}^{(1)} \left( \frac{x^3}{6} - 2 a^2 x \right) \right. \\
 & - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{(2 + \nu)}{2} a^2 x^2 \right) - p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^3}{6} - (2 + \nu) a^2 x \right) \\
 & + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^3}{6} + \nu a^3 x \right) + p_{x1}^{(1)} \left( a \frac{x^2}{2} + \nu a^3 \right) \left. \right\} \\
 & - \left\{ \left( \frac{x^2}{2 a^3} - \frac{2}{a} \right) C_5 + \left( \frac{x}{a^2} \right) C_6 + \frac{1}{a} C_7 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Solución completa de la fuerza normal en la dirección longitudinal (axial):  $n_{xx}$

$$\begin{aligned}
 \frac{n_{xx}}{\cos\theta D_m} = \frac{v}{4a} & \left[ e^{-a_1\beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \right. \\
 & + (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \sin(b_1\beta x) \\
 & + C_2 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. - (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \right. \\
 & + e^{a_1\beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \sin(b_1\beta x) \right) \right. \\
 & + C_4 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. + (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \left. \right] \\
 & + \left( \frac{v}{4\beta^4 a^5} + \frac{v}{a} \right) \left[ e^{-a_1\beta x} [C_1 \cos(b_1\beta x) + C_2 \sin(b_1\beta x)] \right. \\
 & \left. + e^{a_1\beta x} [C_3 \cos(b_1\beta x) + C_4 \sin(b_1\beta x)] \right] \tag{3.35} \\
 & + \left( \frac{1 - (2 + v)v}{4\beta^2 a^3} \right) \left[ e^{-a_1\beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \right. \\
 & + 2a_1b_1 \sin(b_1\beta x) \\
 & + C_2 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1\beta x) - 2a_1b_1 \cos(b_1\beta x) \right) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1\beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1\beta x) - 2a_1b_1 \sin(b_1\beta x) \right) \right. \\
 & \left. \left. + C_4 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1\beta x) + 2a_1b_1 \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \right] \\
 & + \frac{(v^2 - 1)}{Eta} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} \right) + p_{z1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} \right) - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} \right) \right. \\
 & \left. - p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} \right) + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^2}{2} \right) + p_{x1}^{(1)}(ax) \right\} \\
 & + (v^2 - 1) \left\{ C_5 \left( \frac{x}{a^2} \right) + C_6 \left( \frac{1}{a} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Solución completa de la fuerza normal en la dirección circunferencial:  $n_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{n_{\theta\theta}}{\cos\theta D_m} = & \left( -\frac{2}{4a^3\beta^2} \right) \left[ \left[ e^{-a_1\beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \right. \right. \\
 & + 2a_1b_1 \sin(b_1\beta x) \\
 & + C_2 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1\beta x) - 2a_1b_1 \cos(b_1\beta x) \right) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1\beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1\beta x) - 2a_1b_1 \sin(b_1\beta x) \right) \right. \\
 & + C_4 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1\beta x) + 2a_1b_1 \cos(b_1\beta x) \right) \left. \right\} \left. \right] \\
 & + \frac{v^2}{4a} \left[ \left[ e^{-a_1\beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \right. \right. \\
 & + (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \sin(b_1\beta x) \\
 & + C_2 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. - (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \right. \right. \\
 & + e^{a_1\beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. - (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \sin(b_1\beta x) \right) \right\} \right. \\
 & + C_4 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \right] \\
 & + \left( \frac{1}{4\beta^4 a^5} + \frac{1}{a} \right) \left[ \left[ e^{-a_1\beta x} [C_1 \cos(b_1\beta x) + C_2 \sin(b_1\beta x)] \right. \right. \\
 & \left. \left. + e^{a_1\beta x} [C_3 \cos(b_1\beta x) + C_4 \sin(b_1\beta x)] \right] \right] \\
 & + \frac{(1-v^2)}{Eta^3} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} (a^4 x) + p_{z1}^{(1)} (a^4) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Solución completa de la fuerza cortante tangencial:  $n_{x\theta}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\sin \theta D_m (1 - \nu)} n_{x\theta} \\
 &= -\frac{(2 + 2\nu)}{4\beta a^2} \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + C_2 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. - e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \sin(b_1 \beta x) \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + C_4 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \left. \right] \\
 & + \frac{1}{E t a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( (2 + 2\nu) a^2 \frac{x^2}{2} \right) + p_{z1}^{(1)} ((2 + 2\nu) a^2 x) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{(2 + 2\nu)}{2} a^2 x^2 \right) - p_{\theta 1}^{(1)} ((2 + 2\nu) a^2 x) \right\} \\
 & + C_5 \left( (2 + 2\nu) \frac{1}{a} \right)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Solución completa del momento flector en la dirección longitudinal (axial):  $m_{xx}$

$$\begin{aligned}
 \frac{m_{xx}}{\cos \theta D_b} = & -\beta^2 \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) + 2a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \right. \\
 & + C_2 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) - 2a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) - 2a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \\
 & + C_4 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) + 2a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \left. \right\} \left. \right] \\
 & - \frac{1}{Et a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} - 2a^2 x \right) + p_{z1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} - 2a^2 \right) \right. \\
 & - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} - (2+v)a^2 x \right) - p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} - (2+v)a^2 \right) \\
 & \left. + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^2}{2} + va^3 \right) + p_{x1}^{(1)}(ax) \right\} - \left\{ \left( \frac{x}{a^3} \right) C_5 + \left( \frac{1}{a^2} \right) C_6 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Solución completa del momento flector en la dirección circunferencial:  $m_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{m_{\theta\theta}}{\cos \theta D_b} = & -v\beta^2 \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) + 2a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \right. \\
 & + C_2 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) - 2a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) - 2a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \\
 & + C_4 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) + 2a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \left. \right\} \left. \right] \\
 & - \frac{v}{Et a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} - 2a^2 x \right) + p_{z1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} - 2a^2 \right) \right. \\
 & - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} - (2+v)a^2 x \right) - p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} - (2+v)a^2 \right) \\
 & \left. + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^2}{2} + va^3 \right) + p_{x1}^{(1)}(ax) \right\} - v \left\{ \left( \frac{x}{a^3} \right) C_5 + \left( \frac{1}{a^2} \right) C_6 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Solución completa del momento torsional:  $m_{x\theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{m_{x\theta}}{\sin \theta D_b(1-\nu)} = & -\frac{(2+\nu)}{4\beta a^3} \left[ \left[ e^{-a_1\beta x} \left\{ C_1 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \right. \right. \\
 & + (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \sin(b_1\beta x) \\
 & + C_2 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \right. \\
 & - e^{a_1\beta x} \left\{ C_3 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \cos(b_1\beta x) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \sin(b_1\beta x) \right) \right. \\
 & + C_4 \left( (-a_1^3 + 3a_1b_1^2) \sin(b_1\beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. + (b_1^3 - 3a_1^2b_1) \cos(b_1\beta x) \right) \right\} \right] \tag{3.40} \\
 & + \left( \frac{1 + 4\beta^4 a^4}{4\beta^3 a^5} \right) \left[ \left[ e^{-a_1\beta x} \left\{ -C_1 (a_1 \cos(b_1\beta x) \right. \right. \right. \right. \\
 & + b_1 \sin(b_1\beta x)) + C_2 (b_1 \cos(b_1\beta x) - a_1 \sin(b_1\beta x)) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1\beta x} \left\{ C_3 (a_1 \cos(b_1\beta x) - b_1 \sin(b_1\beta x)) \right. \\
 & \left. \left. + C_4 (b_1 \cos(b_1\beta x) + a_1 \sin(b_1\beta x)) \right\} \right] \\
 & + \frac{1}{E t a} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( \nu \frac{x^2}{2} + a^2 \right) + p_{z1}^{(1)}(\nu x) + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} (\nu a x) \right. \\
 & \left. + p_{x1}^{(1)}(\nu a) \right\} + \frac{\nu}{a^2} C_5
 \end{aligned}$$

Solución de la fuerza cortante radial por flexión circunferencial:  $v_{\theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{v_{\theta}}{\sin \theta D_b} = & -\frac{(2+v)(1-v)}{4\beta^4 a^3} \beta^4 \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^4 + b_1^4 \right. \right. \right. \\
 & - 6a_1^2 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) + (4a_1^3 b_1 - 4a_1 b_1^3) \sin(b_1 \beta x) \\
 & + C_2 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. - (4a_1^3 b_1 - 4a_1 b_1^3) \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \right. \\
 & + e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (4a_1^3 b_1 - 4a_1 b_1^3) \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \\
 & + C_4 \left( (a_1^4 + b_1^4 - 6a_1^2 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \\
 & \left. \left. + (4a_1^3 b_1 - 4a_1 b_1^3) \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \left. \right] \\
 & + \left\{ \left( \frac{1 + 4\beta^4 a^4}{4\beta^4 a^5} \right) (1-v) \right. \\
 & \left. + \frac{v}{a} \right\} \beta^2 \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \\
 & + C_2 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) - 2a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (a_1^2 - b_1^2) \cos(b_1 \beta x) - 2a_1 b_1 \sin(b_1 \beta x) \right) \right. \\
 & \left. + C_4 \left( (a_1^2 - b_1^2) \sin(b_1 \beta x) + 2a_1 b_1 \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \left. \right] \\
 & + \frac{v}{Et a^3} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} - (v+1)a^2 x \right) + p_{z1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} - (v+1)a^2 \right) \right. \\
 & \left. - \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^3}{6} - (2+v)a^2 x \right) - p_{\theta 1}^{(1)} \left( \frac{x^2}{2} - (2+v)a^2 \right) \right. \\
 & \left. + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} \left( a \frac{x^2}{2} + a^3 \right) + p_{x1}^{(1)}(ax) \right\} + v \left\{ \left( \frac{x}{a^4} \right) C_5 + \left( \frac{1}{a^3} \right) C_6 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Solución de la fuerza cortante radial por flexión longitudinal:  $v_x$

$$\begin{aligned}
 \frac{v_x}{\cos \theta D_b} = & - \left( \frac{(2+v)(1-v)}{4\beta a^4} \right. \\
 & + \beta^3 \left[ \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \right. \right. \\
 & + (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \sin(b_1 \beta x) \\
 & + C_2 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \right. \right. \\
 & - e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \sin(b_1 \beta x) \right) \right\} \right. \\
 & + C_4 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \cos(b_1 \beta x) \right) \right\} \right] \\
 & + \left( \frac{1 + 4\beta^4 a^4}{4\beta^3 a^6} \right) (1 \\
 & - v) \left[ \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ -C_1 (a_1 \cos(b_1 \beta x) + b_1 \sin(b_1 \beta x)) \right. \right. \right. \\
 & + C_2 (b_1 \cos(b_1 \beta x) - a_1 \sin(b_1 \beta x)) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 (a_1 \cos(b_1 \beta x) - b_1 \sin(b_1 \beta x)) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + C_4 (b_1 \cos(b_1 \beta x) + a_1 \sin(b_1 \beta x)) \right\} \right] \right] \\
 & + \frac{1}{Et a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( (v - v^2 - 1) \frac{x^2}{2} + (3 - v) a^2 \right) \right. \\
 & + p_{z1}^{(1)} (v - v^2 - 1) x + \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^2}{2} - (2 + v) a^2 \right) + p_{\theta 1}^{(1)} (x) \\
 & \left. + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} (v - v^2 - 1) a x + p_{x1}^{(1)} (v - v^2 - 1) a \right\} \\
 & + \frac{(v - v^2 - 1)}{a^3} C_5
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Solución de la fuerza cortante radial por flexión longitudinal de Kirchhoff:  $v_x^*$

$$\begin{aligned}
 \frac{v_x^*}{\cos \theta D_b} = & - \left( \frac{(2+v)(1-v)}{2\beta a^4} \right. \\
 & + \beta^3 \left[ \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ C_1 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \right. \right. \\
 & + (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \sin(b_1 \beta x) \\
 & + C_2 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. - (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \cos(b_1 \beta x) \right\} \right. \right. \right. \\
 & - e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \cos(b_1 \beta x) \right. \right. \\
 & - (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \sin(b_1 \beta x) \\
 & + C_4 \left( (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2) \sin(b_1 \beta x) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + (b_1^3 - 3a_1^2 b_1) \cos(b_1 \beta x) \right\} \right] \right] \\
 & + \left( \frac{1 + 4\beta^4 a^4}{2\beta^3 a^6} \right) (1 \\
 & - v) \left[ \left[ e^{-a_1 \beta x} \left\{ -C_1 (a_1 \cos(b_1 \beta x) + b_1 \sin(b_1 \beta x)) \right. \right. \right. \\
 & + C_2 (b_1 \cos(b_1 \beta x) - a_1 \sin(b_1 \beta x)) \left. \right\} \\
 & + e^{a_1 \beta x} \left\{ C_3 (a_1 \cos(b_1 \beta x) - b_1 \sin(b_1 \beta x)) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + C_4 (b_1 \cos(b_1 \beta x) + a_1 \sin(b_1 \beta x)) \right\} \right] \right] \\
 & + \frac{1}{E t a^2} \left\{ \frac{p_{z1}^{(2)}}{l} \left( (2v - 2v^2 - 1) \frac{x^2}{2} + (4 - 2v) a^2 \right) \right. \\
 & + p_{z1}^{(1)} ((2v - 2v^2 - 1)x) + \frac{p_{\theta 1}^{(2)}}{l} \left( \frac{x^2}{2} - (2 + v) a^2 \right) \\
 & + p_{\theta 1}^{(1)} (x) + \frac{p_{x1}^{(2)}}{l} ((2va - 2v^2 a - a)x) \\
 & \left. + p_{x1}^{(1)} (2va - 2v^2 a - a) \right\} + \frac{(2v - 2v^2 - 1)}{a^3} C_5
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

### 3.4 EJEMPLO NUMÉRICO

#### 3.4.1 Descripción de la estructura y cargas actuantes

La estructura a modelar (tanque) está considerada para una capacidad de almacenamiento de 1500 m<sup>3</sup> (aproximadamente), tiene una altura total de 5 metros, un espesor de muro de 0.4 metros, un diámetro exterior de 20 metros y es de concreto armado  $f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$ , como se muestra en la Figura 3-2. Para obtener los parámetros sísmicos utilizados en el modelo de cargas actuantes, se ha elegido de manera aleatoria un lugar del territorio peruano perteneciente a la zona sísmica 4 y con un perfil de suelo tipo II, ya que dicha elección no tiene relevancia en los objetivos del presente trabajo. En primer lugar, se determina un conjunto de cargas que simulan la acción sísmica usando la metodología del ACI 350.3 y teniendo en cuenta los parámetros sísmicos vinculados a nuestro país mediante la norma E.030. Para una mejor comprensión del procedimiento realizado en la obtención de las cargas actuantes se presenta una tabla de cálculo paso a paso elaborada en una hoja de Excel (ver Anexo 1).

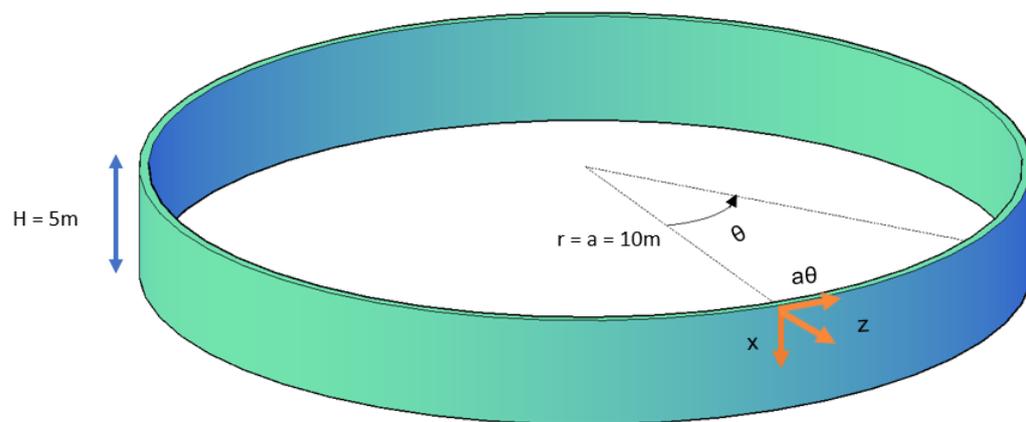


Figura 3-2: Modelo de tanque para el ejemplo numérico

Fuente: Elaboración propia

El conjunto de cargas obtenido para realizar el análisis estructural sísmico estático se muestra en la Figura 3-3 para una sección vertical con  $\theta=0^\circ$  (dirección del sismo) que presenta los máximos valores y es conforme con la variación lineal establecida en el ACI 350.3 (ver Figura 3-4). La variación de la magnitud en un plano horizontal se vio con detalle en la sección 2.2.3.2.

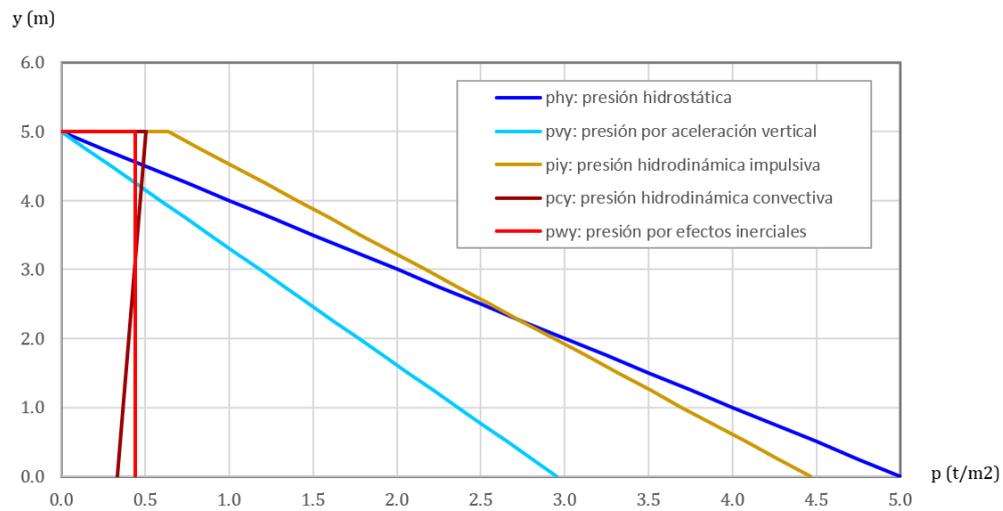


Figura 3-3: Distribución vertical de presiones en la sección crítica

Fuente: Elaboración propia

Este conjunto de cargas son cargas de superficie (se aplican sobre la superficie cilíndrica del tanque) cuya dirección se define mediante las coordenadas  $z$ ,  $x$  y  $\theta$  según corresponda, y varían su magnitud en función de las coordenadas  $x$  (altura) y  $\theta$  (ángulo barrido respecto a la dirección del sismo), por esto se utiliza la nomenclatura de  $p_z(x, \theta)$ ,  $p_\theta(x, \theta)$  y  $p_x(x, \theta)$ .

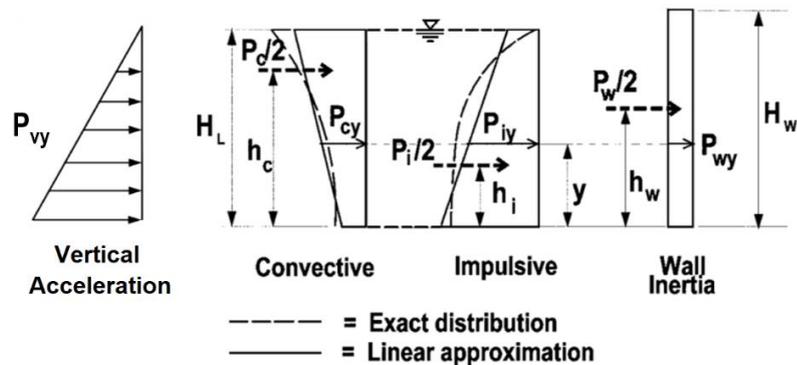


Figura 3-4: Distribución vertical de presiones según ACI 350

Fuente: Elaboración propia basada en la norma ACI 350.3-06

Para una mayor comprensión de las condiciones de borde, se muestra en la Figura 3-5 las cantidades involucradas para un análisis del modo viga y las coordenadas de referencia establecidas para la superficie cilíndrica. Las cantidades que definen las condiciones de borde son ocho, cuatro en el extremo inferior del tanque y cuatro en el extremo superior del tanque, esto conduce a un sistema de ocho

ecuaciones que permiten dar solución a las ocho constantes que pertenecen a la solución analítica de estas cantidades (ver sección 3.5.4). La solución analítica completa para el modo viga se da desde la ecuación (3.31) hasta la ecuación (3.43).

Para un análisis del modo axisimétrico se tienen solo seis cantidades involucradas con las condiciones de contorno, tres en el extremo inferior del tanque y tres en el extremo superior del tanque, esto debido a que las cantidades  $u_\theta$  y  $n_{x\theta}$  se anulan. Además, para este modo se verifica que  $v_x = v_x^*$  debido a que  $m_{x\theta} = 0$ . De igual manera que con el modo viga, se llega a seis ecuaciones que permiten dar solución a las seis constantes que pertenecen a la solución analítica de estas cantidades (ver sección 3.5.3). La solución analítica completa para el modo axisimétrico se da desde la ecuación (3.18) hasta la ecuación (3.25).

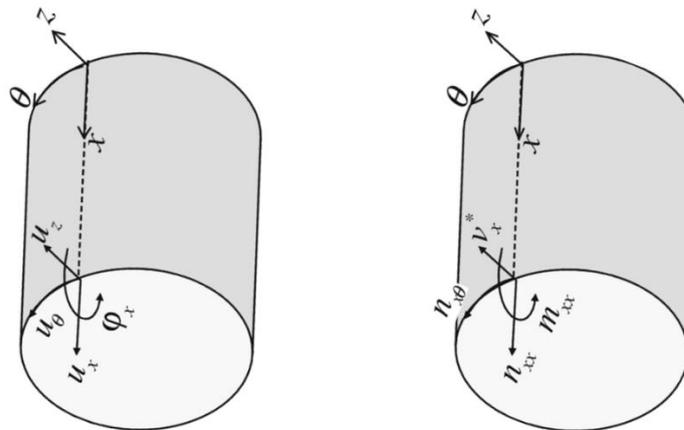


Figura 3-5: Condiciones de borde en superficie cilíndrica

Fuente: Elaboración propia

La solución para el conjunto de cargas que se aplican al tanque se resuelve de manera independiente para cada carga mediante la solución analítica del modo viga o del modo axisimétrico, según corresponda. A continuación, se muestra el desarrollo realizado paso a paso en una hoja de Excel aplicando la solución completa de Hoefakker, con los resultados obtenidos para cada una de las cargas actuantes.

### 3.4.2 Fuerza hidrodinámica impulsiva

- Datos generales

D =	<input type="text" value="20.00"/>	m	$\gamma_1 =$	0.01	$f'_c =$	<input type="text" value="2800"/>	t/m <sup>2</sup>
a =	10.00	m	$a_1 =$	1.01	E =	2509980.1	t/m <sup>2</sup>
$t_w =$	<input type="text" value="0.40"/>	m	$b_1 =$	0.99	$D_m =$	1045825.0	t/m
$v =$	<input type="text" value="0.20"/>				$D_b =$	13944.3	t.m <sup>2</sup> /m
$\beta =$	0.65	m <sup>-1</sup>			$H_w = L =$	<input type="text" value="5.00"/>	m

- Cargas de superficie

$p_z(x,\theta)$	$\Rightarrow$	$p_{z1}^{(2)}$	$(x/L) \cos \theta$	+	$p_{z1}^{(1)}$	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
Normal	$\Rightarrow$	<input type="text" value="3.83"/>	$(x/L) \cos \theta$	+	<input type="text" value="0.64"/>	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
$p_\theta(x,\theta)$	$\Rightarrow$	$p_{\theta 1}^{(2)}$	$(x/L) \sin \theta$	+	$p_{\theta 1}^{(1)}$	$\sin \theta$	t/m <sup>2</sup>
Tangente	$\Rightarrow$	<input type="text" value="0"/>	$(x/L) \sin \theta$	+	<input type="text" value="0"/>	$\sin \theta$	t/m <sup>2</sup>
$p_x(x,\theta)$	$\Rightarrow$	$p_{x1}^{(2)}$	$(x/L) \cos \theta$	+	$p_{x1}^{(1)}$	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
Axial	$\Rightarrow$	<input type="text" value="0"/>	$(x/L) \cos \theta$	+	<input type="text" value="0"/>	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>

- Condiciones de borde

Para el extremo superior libre (x=0):

$$n_{xx} = 0 \quad ; \quad n_{x\theta} = 0 \quad ; \quad v_x^* = 0 \quad ; \quad m_{xx} = 0$$

Simplificando los términos constantes de cada ecuación:

$$\frac{n_{xx}}{D_m} = 0 \quad ; \quad \frac{n_{x\theta}}{1-v} = 0 \quad ; \quad \frac{v_x^*}{D_b} = 0 \quad ; \quad \frac{m_{xx}}{D_b} = 0$$

Para el extremo inferior empotrado (x=L):

$$u_x = 0 \quad ; \quad u_\theta = 0 \quad ; \quad u_z = 0 \quad ; \quad \varphi_x = 0$$

Sistema matricial de ocho ecuaciones con ocho incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1.3E-05 & -1.1E-03 & 1.3E-05 & 1.1E-03 & 0.0E+00 & -9.6E-02 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -9.7E+03 & -9.6E+03 & 9.7E+03 & -9.6E+03 & 1.3E+05 & 0.0E+00 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -5.5E-01 & -5.5E-01 & 5.5E-01 & -5.5E-01 & -6.8E-04 & 0.0E+00 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -1.0E-02 & 8.5E-01 & -1.0E-02 & -8.5E-01 & 0.0E+00 & -1.0E-02 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -4.7E-04 & -6.7E-04 & 4.2E-01 & -4.0E-01 & -3.3E-01 & -5.0E-01 & -1.0E+00 & 0.0E+00 \\ 1.0E-04 & -9.7E-04 & -6.1E-02 & 6.8E-01 & 1.1E+00 & 2.1E+00 & -5.0E-01 & -1.0E+00 \\ -3.8E-02 & -3.6E-03 & -2.6E+01 & -2.5E+00 & -9.8E-01 & -1.9E+00 & 5.0E-01 & 1.0E+00 \\ -2.7E-02 & 2.2E-02 & 1.6E+01 & 1.9E+01 & 1.9E-01 & -5.0E-02 & -1.0E-01 & 0.0E+00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \\ C7 \\ C8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00E+00 \\ -2.13E-02 \\ -2.75E-06 \\ -1.27E-06 \\ 2.88E-05 \\ -5.21E-05 \\ -3.98E-04 \\ 5.12E-05 \end{pmatrix}$$

Solución de las constantes de integración:

$$\begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \\ C7 \\ C8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.77E-05 \\ -1.29E-05 \\ 1.78E-05 \\ -1.21E-05 \\ 2.12E-07 \\ 1.77E-08 \\ -1.66E-05 \\ 5.13E-05 \end{Bmatrix}$$

- Resultados obtenidos

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por presión impulsiva con el método analítico:

Cuadro 3-1: Resultados por presión impulsiva con el método analítico

Fuente: Elaboración propia

x	Altura	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$n_{xx}$	$v^*_x$	$v_{\theta}$	$n_{x\theta}$	$m_{x\theta}$
		(T.m/m) $\theta = 0^\circ$	(T.m/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 90^\circ$	(T/m) $\theta = 90^\circ$	(T.m/m) $\theta = 90^\circ$
0.00	5.00	0.000	0.000	12.981	0.000	0.000	0.003	-0.009	0.045
0.25	4.75	0.017	0.003	14.004	-0.004	0.153	0.002	0.304	0.046
0.50	4.50	0.070	0.014	15.034	-0.017	0.285	-0.003	0.595	0.046
0.75	4.25	0.153	0.031	16.051	-0.039	0.393	-0.011	0.864	0.045
1.00	4.00	0.261	0.052	17.018	-0.071	0.479	-0.022	1.110	0.042
1.25	3.75	0.386	0.077	17.888	-0.114	0.539	-0.034	1.332	0.036
1.50	3.50	0.524	0.105	18.606	-0.167	0.570	-0.048	1.525	0.028
1.75	3.25	0.666	0.133	19.112	-0.233	0.569	-0.062	1.686	0.017
2.00	3.00	0.803	0.161	19.341	-0.310	0.528	-0.076	1.808	0.004
2.25	2.75	0.926	0.185	19.234	-0.400	0.441	-0.088	1.884	-0.012
2.50	2.50	1.020	0.204	18.735	-0.502	0.298	-0.098	1.905	-0.031
2.75	2.25	1.072	0.214	17.801	-0.615	0.089	-0.103	1.859	-0.051
3.00	2.00	1.063	0.213	16.409	-0.739	-0.197	-0.102	1.738	-0.071
3.25	1.75	0.973	0.195	14.562	-0.874	-0.572	-0.094	1.527	-0.091
3.50	1.50	0.778	0.156	12.298	-1.017	-1.045	-0.075	1.217	-0.107
3.75	1.25	0.452	0.090	9.704	-1.169	-1.626	-0.043	0.799	-0.119
4.00	1.00	-0.033	-0.007	6.923	-1.326	-2.321	0.005	0.265	-0.123
4.25	0.75	-0.706	-0.141	4.172	-1.488	-3.131	0.071	-0.387	-0.116
4.50	0.50	-1.596	-0.319	1.750	-1.652	-4.052	0.160	-1.152	-0.093
4.75	0.25	-2.731	-0.546	0.058	-1.817	-5.069	0.273	-2.017	-0.050
5.00	0.00	-4.132	-0.826	-0.397	-1.983	-6.156	0.413	-2.958	0.018
<b>MAXIMO ABSOLUTO</b>		<b>4.132</b>	<b>0.826</b>	<b>19.341</b>	<b>1.983</b>	<b>6.156</b>	<b>0.413</b>	<b>2.958</b>	<b>0.123</b>

Los resultados obtenidos son los máximos que se dan en un corte vertical que corresponde a  $\theta = 0^\circ$  (función coseno) o a  $\theta = 90^\circ$  (función seno), según sea el caso.

### 3.4.3 Fuerza hidrodinámica convectiva

- Datos generales

D =	<input type="text" value="20.00"/>	m	$\gamma_1 =$	0.01	$f'_c =$	<input type="text" value="2800"/>	t/m <sup>2</sup>
a =	<input type="text" value="10.00"/>	m	$a_1 =$	1.01	E =	<input type="text" value="2509980.1"/>	t/m <sup>2</sup>
$t_w =$	<input type="text" value="0.40"/>	m	$b_1 =$	0.99	$D_m =$	<input type="text" value="1045825.0"/>	t/m
$\nu =$	<input type="text" value="0.20"/>				$D_b =$	<input type="text" value="13944.3"/>	t.m <sup>2</sup> /m
$\beta =$	0.65	m <sup>-1</sup>			$H_w = L =$	<input type="text" value="5.00"/>	m

- Cargas de superficie

$p_z(x, \theta)$	$\Rightarrow$	$p_{z1}^{(2)}$	$(x/L) \cos \theta$	+	$p_{z1}^{(1)}$	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
Normal	$\Rightarrow$	<input type="text" value="-0.17"/>	$(x/L) \cos \theta$	+	<input type="text" value="0.51"/>	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
$p_\theta(x, \theta)$	$\Rightarrow$	$p_{\theta 1}^{(2)}$	$(x/L) \sin \theta$	+	$p_{\theta 1}^{(1)}$	$\sin \theta$	t/m <sup>2</sup>
Tangente	$\Rightarrow$	<input type="text" value="0"/>	$(x/L) \sin \theta$	+	<input type="text" value="0"/>	$\sin \theta$	t/m <sup>2</sup>
$p_x(x, \theta)$	$\Rightarrow$	$p_{x1}^{(2)}$	$(x/L) \cos \theta$	+	$p_{x1}^{(1)}$	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
Axial	$\Rightarrow$	<input type="text" value="0"/>	$(x/L) \cos \theta$	+	<input type="text" value="0"/>	$\cos \theta$	t/m <sup>2</sup>

- Condiciones de borde

Para el extremo superior libre (x=0):

$$n_{xx} = 0 \quad ; \quad n_{x\theta} = 0 \quad ; \quad v_x^* = 0 \quad ; \quad m_{xx} = 0$$

Simplificando los términos constantes de cada ecuación:

$$\frac{n_{xx}}{D_m} = 0 \quad ; \quad \frac{n_{x\theta}}{1 - \nu} = 0 \quad ; \quad \frac{v_x^*}{D_b} = 0 \quad ; \quad \frac{m_{xx}}{D_b} = 0$$

Para el extremo inferior empotrado (x=L):

$$u_x = 0 \quad ; \quad u_\theta = 0 \quad ; \quad u_z = 0 \quad ; \quad \varphi_x = 0$$

Sistema matricial de ocho ecuaciones con ocho incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1.3E-05 & -1.1E-03 & 1.3E-05 & 1.1E-03 & 0.0E+00 & -9.6E-02 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -9.7E+03 & -9.6E+03 & 9.7E+03 & -9.6E+03 & 1.3E+05 & 0.0E+00 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -5.5E-01 & -5.5E-01 & 5.5E-01 & -5.5E-01 & -6.8E-04 & 0.0E+00 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -1.0E-02 & 8.5E-01 & -1.0E-02 & -8.5E-01 & 0.0E+00 & -1.0E-02 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ -4.7E-04 & -6.7E-04 & 4.2E-01 & -4.0E-01 & -3.3E-01 & -5.0E-01 & -1.0E+00 & 0.0E+00 \\ 1.0E-04 & -9.7E-04 & -6.1E-02 & 6.8E-01 & 1.1E+00 & 2.1E+00 & -5.0E-01 & -1.0E+00 \\ -3.8E-02 & -3.6E-03 & -2.6E+01 & -2.5E+00 & -9.8E-01 & -1.9E+00 & 5.0E-01 & 1.0E+00 \\ -2.7E-02 & 2.2E-02 & 1.6E+01 & 1.9E+01 & 1.9E-01 & -5.0E-02 & -1.0E-01 & 0.0E+00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \\ C7 \\ C8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00E+00 \\ 9.44E-04 \\ 1.22E-07 \\ -1.02E-06 \\ 5.20E-06 \\ -1.23E-05 \\ -2.27E-05 \\ -7.52E-06 \end{pmatrix}$$

Solución de las constantes de integración:

$$\begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \\ C7 \\ C8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.53E-06 \\ -2.72E-06 \\ 1.43E-06 \\ -1.60E-06 \\ -9.41E-09 \\ 1.41E-08 \\ -3.97E-06 \\ 1.31E-05 \end{Bmatrix}$$

- Resultados obtenidos

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por presión convectiva con el método analítico:

Cuadro 3-2: Resultados por presión convectiva con el método analítico

Fuente: Elaboración propia

x	Altura	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$n_{xx}$	$v^*_x$	$v_{\theta}$	$n_{x\theta}$	$m_{x\theta}$
		$\theta = 0^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 90^\circ$					
0.00	5.00	0.000	0.000	5.796	0.000	0.000	0.001	0.002	-0.010
0.25	4.75	0.003	0.001	5.577	-0.002	0.016	0.001	0.145	-0.010
0.50	4.50	0.009	0.002	5.363	-0.007	0.028	0.000	0.285	-0.009
0.75	4.25	0.017	0.003	5.153	-0.016	0.037	0.000	0.422	-0.009
1.00	4.00	0.028	0.006	4.941	-0.028	0.044	-0.002	0.555	-0.009
1.25	3.75	0.040	0.008	4.722	-0.043	0.046	-0.003	0.686	-0.010
1.50	3.50	0.052	0.010	4.492	-0.061	0.046	-0.004	0.813	-0.010
1.75	3.25	0.063	0.013	4.243	-0.081	0.041	-0.005	0.936	-0.011
2.00	3.00	0.073	0.015	3.972	-0.105	0.032	-0.006	1.054	-0.012
2.25	2.75	0.080	0.016	3.673	-0.131	0.018	-0.007	1.168	-0.014
2.50	2.50	0.083	0.017	3.342	-0.159	-0.002	-0.007	1.276	-0.015
2.75	2.25	0.080	0.016	2.979	-0.189	-0.029	-0.007	1.377	-0.017
3.00	2.00	0.070	0.014	2.583	-0.221	-0.062	-0.006	1.472	-0.018
3.25	1.75	0.050	0.010	2.160	-0.255	-0.104	-0.004	1.557	-0.019
3.50	1.50	0.019	0.004	1.717	-0.290	-0.155	-0.001	1.635	-0.020
3.75	1.25	-0.026	-0.005	1.268	-0.326	-0.214	0.003	1.703	-0.019
4.00	1.00	-0.087	-0.017	0.833	-0.363	-0.282	0.009	1.762	-0.018
4.25	0.75	-0.166	-0.033	0.439	-0.401	-0.358	0.017	1.813	-0.016
4.50	0.50	-0.265	-0.053	0.120	-0.438	-0.441	0.026	1.857	-0.012
4.75	0.25	-0.386	-0.077	-0.078	-0.476	-0.528	0.039	1.896	-0.005
5.00	0.00	-0.529	-0.106	-0.103	-0.514	-0.615	0.053	1.935	0.004
<b>MAXIMO ABSOLUTO</b>		<b>0.529</b>	<b>0.106</b>	<b>5.796</b>	<b>0.514</b>	<b>0.615</b>	<b>0.053</b>	<b>1.935</b>	<b>0.020</b>

Los resultados obtenidos son los máximos que se dan en un corte vertical que corresponde a  $\theta = 0^\circ$  (función coseno) o a  $\theta = 90^\circ$  (función seno), según sea el caso.

### 3.4.4 Fuerza inercial

- Datos generales

D =	<input type="text" value="20.00"/>	m	$\gamma_1 =$	0.01	$f'_c =$	<input type="text" value="2800"/>	t/m <sup>2</sup>
a =	10.00	m	$a_1 =$	1.01	E =	2509980.1	t/m <sup>2</sup>
$t_w =$	<input type="text" value="0.40"/>	m	$b_1 =$	0.99	$D_m =$	1045825.0	t/m
$v =$	<input type="text" value="0.20"/>				$D_b =$	13944.3	t.m <sup>2</sup> /m
$\beta =$	0.65	m <sup>-1</sup>			$H_w = L =$	<input type="text" value="5.00"/>	m

- Cargas de superficie

$$\begin{aligned}
 p_z(x,\theta) &\Rightarrow p_{z1}^{(2)} (x/L) \cos \theta + p_{z1}^{(1)} \cos \theta \\
 \text{Normal} &\Rightarrow \boxed{0} (x/L) \cos \theta + \boxed{0.44} \cos \theta \\
 \\ 
 p_\theta(x,\theta) &\Rightarrow p_{\theta 1}^{(2)} (x/L) \sin \theta + p_{\theta 1}^{(1)} \sin \theta \\
 \text{Tangente} &\Rightarrow \boxed{0} (x/L) \sin \theta + \boxed{-0.44} \sin \theta \\
 \\ 
 p_x(x,\theta) &\Rightarrow p_{x1}^{(2)} (x/L) \cos \theta + p_{x1}^{(1)} \cos \theta \\
 \text{Axial} &\Rightarrow \boxed{0} (x/L) \cos \theta + \boxed{0} \cos \theta
 \end{aligned}$$

- Condiciones de borde

Para el extremo superior libre (x=0):

$$n_{xx} = 0 \quad ; \quad n_{x\theta} = 0 \quad ; \quad v_x^* = 0 \quad ; \quad m_{xx} = 0$$

Simplificando los términos constantes de cada ecuación:

$$\frac{n_{xx}}{D_m} = 0 \quad ; \quad \frac{n_{x\theta}}{1-v} = 0 \quad ; \quad \frac{v_x^*}{D_b} = 0 \quad ; \quad \frac{m_{xx}}{D_b} = 0$$

Para el extremo inferior empotrado (x=L):

$$u_x = 0 \quad ; \quad u_\theta = 0 \quad ; \quad u_z = 0 \quad ; \quad \varphi_x = 0$$

Sistema matricial de ocho ecuaciones con ocho incógnitas:

$$\begin{pmatrix}
 1.3E-05 & -1.1E-03 & 1.3E-05 & 1.1E-03 & 0.0E+00 & -9.6E-02 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\
 -9.7E+03 & -9.6E+03 & 9.7E+03 & -9.6E+03 & 1.3E+05 & 0.0E+00 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\
 -5.5E-01 & -5.5E-01 & 5.5E-01 & -5.5E-01 & -6.8E-04 & 0.0E+00 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\
 -1.0E-02 & 8.5E-01 & -1.0E-02 & -8.5E-01 & 0.0E+00 & -1.0E-02 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\
 -4.7E-04 & -6.7E-04 & 4.2E-01 & -4.0E-01 & -3.3E-01 & -5.0E-01 & -1.0E+00 & 0.0E+00 \\
 1.0E-04 & -9.7E-04 & -6.1E-02 & 6.8E-01 & 1.1E+00 & 2.1E+00 & -5.0E-01 & -1.0E+00 \\
 -3.8E-02 & -3.6E-03 & -2.6E+01 & -2.5E+00 & -9.8E-01 & -1.9E+00 & 5.0E-01 & 1.0E+00 \\
 -2.7E-02 & 2.2E-02 & 1.6E+01 & 1.9E+01 & 1.9E-01 & -5.0E-02 & -1.0E-01 & 0.0E+00
 \end{pmatrix}
 \times
 \begin{pmatrix}
 C1 \\
 C2 \\
 C3 \\
 C4 \\
 C5 \\
 C6 \\
 C7 \\
 C8
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0.00E+00 \\
 0.00E+00 \\
 0.00E+00 \\
 -1.84E-06 \\
 6.21E-06 \\
 -2.50E-05 \\
 -2.10E-05 \\
 -9.02E-06
 \end{pmatrix}$$

Solución de las constantes de integración:

$$\begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \\ C7 \\ C8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8.02E-06 \\ -4.11E-06 \\ 1.88E-06 \\ -2.06E-06 \\ 0.00E+00 \\ 2.56E-08 \\ -4.62E-06 \\ 2.58E-05 \end{Bmatrix}$$

- Resultados obtenidos

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por carga inercial con el método analítico:

Cuadro 3-3: Resultados por carga inercial con el método analítico

Fuente: Elaboración propia

x	Altura	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$n_{xx}$	$v^*_x$	$v_{\theta}$	$n_{x\theta}$	$m_{x\theta}$
		(T.m/m) $\theta = 0^\circ$	(T.m/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 0^\circ$	(T/m) $\theta = 90^\circ$	(T/m) $\theta = 90^\circ$	(T.m/m) $\theta = 90^\circ$
0.00	5.00	0.000	0.000	5.389	0.000	0.000	0.002	0.002	-0.009
0.25	4.75	0.003	0.001	5.194	-0.003	0.022	0.002	0.244	-0.008
0.50	4.50	0.012	0.002	5.010	-0.012	0.040	0.001	0.482	-0.008
0.75	4.25	0.024	0.005	4.833	-0.027	0.053	0.000	0.715	-0.008
1.00	4.00	0.039	0.008	4.657	-0.048	0.062	-0.002	0.943	-0.008
1.25	3.75	0.055	0.011	4.475	-0.074	0.066	-0.003	1.167	-0.008
1.50	3.50	0.072	0.014	4.281	-0.106	0.065	-0.005	1.387	-0.009
1.75	3.25	0.088	0.018	4.065	-0.144	0.059	-0.007	1.601	-0.010
2.00	3.00	0.102	0.020	3.821	-0.186	0.047	-0.008	1.810	-0.011
2.25	2.75	0.112	0.022	3.543	-0.234	0.029	-0.009	2.012	-0.013
2.50	2.50	0.117	0.023	3.224	-0.287	0.003	-0.010	2.207	-0.015
2.75	2.25	0.115	0.023	2.862	-0.344	-0.031	-0.010	2.393	-0.017
3.00	2.00	0.103	0.021	2.459	-0.406	-0.075	-0.009	2.569	-0.019
3.25	1.75	0.078	0.016	2.020	-0.473	-0.129	-0.006	2.736	-0.020
3.50	1.50	0.039	0.008	1.553	-0.543	-0.194	-0.003	2.890	-0.021
3.75	1.25	-0.018	-0.004	1.078	-0.617	-0.271	0.003	3.033	-0.021
4.00	1.00	-0.096	-0.019	0.618	-0.695	-0.360	0.011	3.164	-0.019
4.25	0.75	-0.197	-0.039	0.208	-0.775	-0.459	0.021	3.284	-0.016
4.50	0.50	-0.324	-0.065	-0.106	-0.859	-0.567	0.033	3.395	-0.011
4.75	0.25	-0.480	-0.096	-0.267	-0.945	-0.681	0.049	3.500	-0.003
5.00	0.00	-0.665	-0.133	-0.207	-1.034	-0.795	0.067	3.604	0.009
<b>MAXIMO ABSOLUTO</b>		<b>0.665</b>	<b>0.133</b>	<b>5.389</b>	<b>1.034</b>	<b>0.795</b>	<b>0.067</b>	<b>3.604</b>	<b>0.021</b>

Los resultados obtenidos son los máximos que se dan en un corte vertical que corresponde a  $\theta = 0^\circ$  (función coseno) o a  $\theta = 90^\circ$  (función seno), según sea el caso.

### 3.4.5 Aceleración vertical del terreno

- Datos generales

D =	<input type="text" value="20.00"/>	m	$\gamma_0 =$	-0.01	$f'_c =$	<input type="text" value="2800"/>	t/m <sup>2</sup>
a =	<input type="text" value="10.00"/>	m	$a_0 =$	0.99	E =	<input type="text" value="2509980.1"/>	t/m <sup>2</sup>
$t_w =$	<input type="text" value="0.40"/>	m	$b_0 =$	1.01	$D_m =$	<input type="text" value="1045825.0"/>	t/m
$v =$	<input type="text" value="0.20"/>				$D_b =$	<input type="text" value="13944.3"/>	t.m <sup>2</sup> /m
$\beta =$	<input type="text" value="0.65"/>	m <sup>-1</sup>			$H_w = L =$	<input type="text" value="5.00"/>	m

- Cargas de superficie

$p_z(x)$	$\Rightarrow$	$p_{z0}^{(2)}$	(x/L)	+	$p_{z0}^{(1)}$	t/m <sup>2</sup>
Normal	$\Rightarrow$	<input type="text" value="2.95"/>	(x/L)	+	<input type="text" value="0"/>	t/m <sup>2</sup>
$p_x(x)$	$\Rightarrow$	$p_{x0}^{(2)}$	(x/L)	+	$p_{x0}^{(1)}$	t/m <sup>2</sup>
Axial	$\Rightarrow$	<input type="text" value="0"/>	(x/L)	+	<input type="text" value="0"/>	t/m <sup>2</sup>

- Condiciones de borde

Para el extremo superior libre (x=0):

$$n_{xx} = 0 \quad ; \quad v_x = v_x^* = 0 \quad ; \quad m_{xx} = 0$$

Simplificando los términos constantes de cada ecuación:

$$\frac{n_{xx}}{D_m} = 0 \quad ; \quad \frac{v_x}{D_b} = \frac{v_x^*}{D_b} = 0 \quad ; \quad \frac{m_{xx}}{D_b} = 0$$

Para el extremo inferior empotrado (x=L):

$$u_x = 0 \quad ; \quad u_z = 0 \quad ; \quad \varphi_x = 0$$

Sistema matricial de seis ecuaciones con seis incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & -9.56E-07 & 0.00E+00 \\ -5.61E-01 & -5.44E-01 & 5.61E-01 & -5.44E-01 & 0.00E+00 & 0.00E+00 \\ 8.00E-03 & 8.49E-01 & 8.00E-03 & -8.49E-01 & -3.98E-09 & 0.00E+00 \\ -5.12E-04 & -6.81E-04 & 4.38E-01 & -3.38E-01 & -4.98E-06 & -9.96E-07 \\ -3.89E-02 & -5.26E-03 & -2.52E+01 & -3.41E+00 & 1.99E-06 & 0.00E+00 \\ -2.86E-02 & 2.21E-02 & 1.41E+01 & 1.88E+01 & 0.00E+00 & 0.00E+00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00E+00 \\ 1.18E-07 \\ 0.00E+00 \\ 1.47E-05 \\ -2.94E-04 \\ 5.88E-05 \end{pmatrix}$$

Solución de las constantes de integración:

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.46E-05 \\ -6.53E-06 \\ 1.24E-05 \\ -6.18E-06 \\ -3.73E-16 \\ -7.19E+00 \end{pmatrix}$$

- Resultados obtenidos

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por aceleración vertical con el método analítico:

Cuadro 3-4: Resultados por aceleración vertical con el método analítico

Fuente: Elaboración propia

x	Altura	$m_{xx}$ (T.m/m)	$m_{\theta\theta}$ (T.m/m)	$n_{\theta\theta}$ (T/m)	$n_{xx}$ (T/m)	$v_x = *v_x$ (T/m)
0.00	5.0	0.000	-0.005	3.714	0.000	0.000
0.25	4.8	0.011	-0.004	4.783	0.000	0.088
0.50	4.5	0.043	0.001	5.845	0.000	0.165
0.75	4.3	0.093	0.009	6.886	0.000	0.232
1.00	4.0	0.158	0.021	7.884	0.000	0.287
1.25	3.8	0.235	0.035	8.809	0.000	0.329
1.50	3.5	0.321	0.051	9.627	0.000	0.356
1.75	3.3	0.412	0.069	10.299	0.000	0.364
2.00	3.0	0.501	0.086	10.785	0.000	0.349
2.25	2.8	0.584	0.102	11.044	0.000	0.307
2.50	2.5	0.652	0.116	11.039	0.000	0.230
2.75	2.3	0.696	0.125	10.741	0.000	0.113
3.00	2.0	0.704	0.127	10.130	0.000	-0.053
3.25	1.8	0.664	0.121	9.202	0.000	-0.275
3.50	1.5	0.561	0.102	7.977	0.000	-0.560
3.75	1.3	0.378	0.067	6.501	0.000	-0.916
4.00	1.0	0.097	0.013	4.857	0.000	-1.346
4.25	0.8	-0.301	-0.064	3.174	0.000	-1.854
4.50	0.5	-0.836	-0.169	1.630	0.000	-2.437
4.75	0.3	-1.525	-0.306	0.469	0.000	-3.089
5.00	0.0	-2.385	-0.477	0.000	0.000	-3.796
<b>MAXIMO ABSOLUTO</b>		<b>2.385</b>	<b>0.477</b>	<b>11.044</b>	<b>0.000</b>	<b>3.796</b>

### 3.4.6 Presión hidrostática

- Datos generales

$$\begin{array}{llll} D = & \boxed{20.00} & \text{m} & \gamma_0 = -0.01 \\ a = & \boxed{10.00} & \text{m} & a_0 = 0.99 \\ t_w = & \boxed{0.40} & \text{m} & b_0 = 1.01 \\ v = & \boxed{0.20} & & \\ \beta = & 0.65 & \text{m}^{-1} & \end{array} \quad \begin{array}{llll} f'_c = & \boxed{2800} & \text{t/m}^2 & \\ E = & 2509980.1 & \text{t/m}^2 & \\ D_m = & 1045825.0 & \text{t/m} & \\ D_b = & 13944.3 & \text{t.m}^2/\text{m} & \\ H_w = L = & \boxed{5.00} & \text{m} & \end{array}$$

- Cargas de superficie

$$\begin{array}{lcl}
 p_z(x) & \Rightarrow & p_{z0}^{(2)} (x/L) + p_{z0}^{(1)} \quad t/m^2 \\
 \text{Normal} & \Rightarrow & \boxed{5} (x/L) + \boxed{0} \quad t/m^2 \\
 \\ 
 p_x(x) & \Rightarrow & p_{x0}^{(2)} (x/L) + p_{x0}^{(1)} \quad t/m^2 \\
 \text{Axial} & \Rightarrow & \boxed{0} (x/L) + \boxed{0} \quad t/m^2
 \end{array}$$

- Condiciones de borde

Para el extremo superior libre (x=0):

$$n_{xx} = 0 \quad ; \quad v_x = v_x^* = 0 \quad ; \quad m_{xx} = 0$$

Simplificando los términos constantes de cada ecuación:

$$\frac{n_{xx}}{D_m} = 0 \quad ; \quad \frac{v_x}{D_b} = \frac{v_x^*}{D_b} = 0 \quad ; \quad \frac{m_{xx}}{D_b} = 0$$

Para el extremo inferior empotrado (x=L):

$$u_x = 0 \quad ; \quad u_z = 0 \quad ; \quad \varphi_x = 0$$

Sistema matricial de seis ecuaciones con seis incógnitas:

$$\begin{pmatrix}
 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & 0.00E+00 & -9.56E-07 & 0.00E+00 \\
 -5.61E-01 & -5.44E-01 & 5.61E-01 & -5.44E-01 & 0.00E+00 & 0.00E+00 \\
 8.00E-03 & 8.49E-01 & 8.00E-03 & -8.49E-01 & -3.98E-09 & 0.00E+00 \\
 -5.12E-04 & -6.81E-04 & 4.38E-01 & -3.38E-01 & -4.98E-06 & -9.96E-07 \\
 -3.89E-02 & -5.26E-03 & -2.52E+01 & -3.41E+00 & 1.99E-06 & 0.00E+00 \\
 -2.86E-02 & 2.21E-02 & 1.41E+01 & 1.88E+01 & 0.00E+00 & 0.00E+00
 \end{pmatrix}
 \times
 \begin{pmatrix}
 C1 \\
 C2 \\
 C3 \\
 C4 \\
 C5 \\
 C6
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0.00E+00 \\
 1.99E-07 \\
 0.00E+00 \\
 2.49E-05 \\
 -4.98E-04 \\
 9.96E-05
 \end{pmatrix}$$

Solución de las constantes de integración:

$$\begin{pmatrix}
 C1 \\
 C2 \\
 C3 \\
 C4 \\
 C5 \\
 C6
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 4.16E-05 \\
 -1.11E-05 \\
 2.11E-05 \\
 -1.05E-05 \\
 -6.32E-16 \\
 -1.22E+01
 \end{pmatrix}$$

- Resultados obtenidos

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por presión hidrostática con el método analítico:

Cuadro 3-5: Resultados por presión hidrostática con el método analítico  
Fuente: Elaboración propia

x	Altura	$m_{xx}$ (T.m/m)	$m_{\theta\theta}$ (T.m/m)	$n_{\theta\theta}$ (T/m)	$n_{xx}$ (T/m)	$v_x = *v_x$ (T/m)
0.00	5.0	0.000	-0.008	6.295	0.000	0.000
0.25	4.8	0.019	-0.007	8.106	0.000	0.149
0.50	4.5	0.073	0.001	9.906	0.000	0.280
0.75	4.3	0.157	0.016	11.671	0.000	0.393
1.00	4.0	0.268	0.036	13.362	0.000	0.486
1.25	3.8	0.399	0.060	14.931	0.000	0.558
1.50	3.5	0.545	0.087	16.317	0.000	0.603
1.75	3.3	0.698	0.116	17.457	0.000	0.617
2.00	3.0	0.850	0.146	18.280	0.000	0.592
2.25	2.8	0.990	0.173	18.719	0.000	0.520
2.50	2.5	1.105	0.196	18.711	0.000	0.390
2.75	2.3	1.179	0.211	18.205	0.000	0.191
3.00	2.0	1.193	0.216	17.169	0.000	-0.090
3.25	1.8	1.126	0.204	15.597	0.000	-0.466
3.50	1.5	0.952	0.172	13.520	0.000	-0.949
3.75	1.3	0.641	0.114	11.018	0.000	-1.552
4.00	1.0	0.165	0.022	8.233	0.000	-2.282
4.25	0.8	-0.510	-0.109	5.379	0.000	-3.142
4.50	0.5	-1.417	-0.287	2.763	0.000	-4.131
4.75	0.3	-2.585	-0.518	0.795	0.000	-5.236
5.00	0.0	-4.042	-0.808	0.000	0.000	-6.433
<b>MAXIMO ABSOLUTO</b>		<b>4.042</b>	<b>0.808</b>	<b>18.719</b>	<b>0.000</b>	<b>6.433</b>

Cuadro 3-6: Resumen de valores por cada tipo de fuerza  
Fuente: Elaboración propia

Resumen de Valores Máximos por cada Tipo de Fuerza								
Tipo de fuerzas	$m_{xx}$ (T.m/m)	$m_{\theta\theta}$ (T.m/m)	$n_{\theta\theta}$ (T/m)	$n_{xx}$ (T/m)	$v^*x$ (T/m)	$v_0$ (T/m)	$n_{x\theta}$ (T/m)	$m_{x\theta}$ (T.m/m)
Fuerza hidrodinámica impulsiva	4.132	0.826	19.341	1.983	6.156	0.413	2.958	0.123
Fuerza hidrodinámica convectiva	0.529	0.106	5.796	0.514	0.615	0.053	1.935	0.020
Fuerza inercial	0.665	0.133	5.389	1.034	0.795	0.067	3.604	0.021
Aceleración vertical del terreno	2.385	0.477	11.044	0.000	3.796			
Presión hidrostática	4.042	0.808	18.719	0.000	6.433			

## CAPÍTULO IV: ANÁLISIS COMPUTACIONAL DE RESERVORIOS CIRCULARES

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se explicará la metodología del análisis computacional para tanques circulares utilizando un programa de análisis estructural (SAP 2000) basado en elementos finitos. También, se llevará a cabo el modelamiento de un tanque apoyado circular de concreto armado con las mismas características del tanque mostrado en el ejemplo numérico del capítulo III y sometido a las mismas cargas actuantes, todo ello con la finalidad de contrastar posteriormente los resultados obtenidos con los resultados obtenidos usando el método analítico.

Además, se explica el proceso de modelamiento y el ingreso de las cargas de superficie que actúan sobre la superficie media del muro en la herramienta computacional siguiendo los lineamientos de la norma ACI350.3-06. Todo esto con la finalidad de mostrar al ingeniero una guía para el análisis estructural de tanques circulares de concreto sometidos a carga sísmica estática usando la herramienta en mención.

### 4.2 ELEMENTOS SHELL EN PROGRAMAS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL BASADOS EN ELEMENTOS FINITOS

Un programa de análisis estructural basado en elementos finitos es una herramienta muy rigurosa y muy útil para los ingenieros estructurales interesados en el análisis y diseño de gran complejidad. Los dos elementos más utilizados en estos programas son los elementos frame y shell, siendo este último el de mayor enfoque para nuestro trabajo de tesis.

#### 4.2.1 Elemento shell

El elemento shell es una formulación de tres o cuatro nodos que combina el comportamiento de membrana (en el plano) con el de placa (fuera del plano). El comportamiento de membrana usa una formulación isoparamétrica que incluye rigidez a desplazamientos en el plano del elemento, y rigidez a rotación en el plano, alrededor de la normal al mismo. Únicamente tomará fuerzas y momentos

torsores (alrededor de la normal) en el plano. El comportamiento de placa incluye rigidez flexional en dos direcciones ortogonales, y rigidez a desplazamientos en dirección normal al plano del elemento; sin tener en cuenta los efectos de deformación por corte, sólo tomará momentos flectores y fuerzas normales al plano, al modelar una estructura con elementos shell podemos elegir que adopte comportamiento puramente de membrana, puramente de placa, o la combinación de ambos. El elemento de cuatro nudos no tiene que ser plano, cada elemento shell tiene su propio sistema de coordenadas locales para definir las cargas y propiedades del material, y para interpretar los resultados, se muestran las fuerzas resistentes que representan al elemento shell. En la Figura 4-1 se muestra un esquema de las fuerzas resistentes para un comportamiento de membrana o un comportamiento de placa.

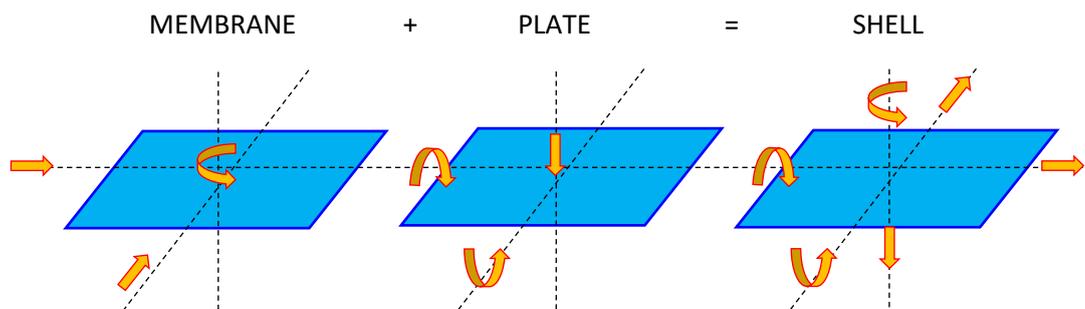


Figura 4-1: Fuerzas resistentes que representan al elemento shell

Fuente: Elaboración propia

Para calcular la rigidez del shell se utiliza una formulación de integración numérica de cuatro puntos. Los esfuerzos y fuerzas internas, en las coordenadas locales del elemento, se evalúan con una integración en los puntos de Gauss y luego se extrapolan a los nudos del elemento.

Las estructuras que se pueden modelar con este elemento incluyen:

- Sistemas de piso
- Sistemas de pared
- Losas de tablero en puentes
- Superficies curvas tridimensionales, como tanques y domos.
- Modelos detallados de vigas, columnas, tuberías, etc.

#### 4.2.2 Grados de libertad

El elemento shell siempre tiene en cuenta los seis grados de libertad de cada uno de los nodos a los que está conectado. Cuando se utiliza el comportamiento puro de membrana, se debe asegurar que los grados de libertad correspondientes a la translación normal al plano y las rotaciones debidas a la flexión han sido restringidos. Por otro lado, cuando el elemento es usado como placa deberán restringirse los grados de libertad correspondientes a la translación en el plano y a la rotación alrededor de la normal al plano. En la Figura 4-2 se muestran los grados de libertad que representan al elemento shell.

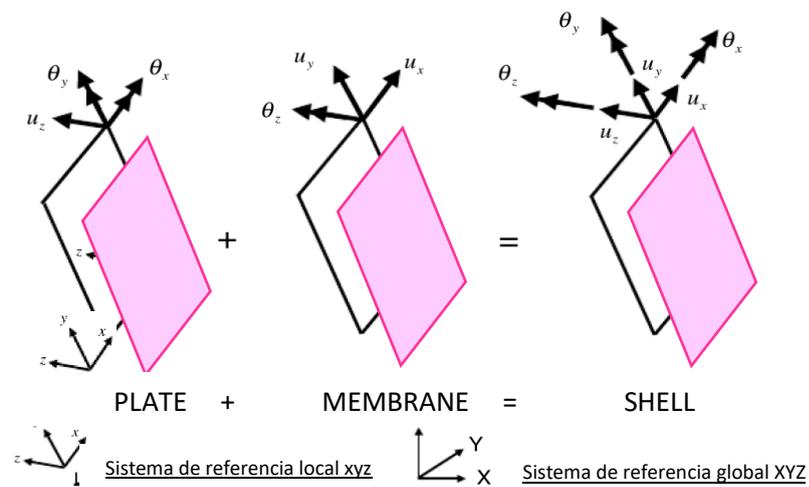


Figura 4-2: Grados de libertad que representan al elemento shell

Fuente: Elaboración propia

#### 4.2.3 Shell thin y shell thick

La inclusión de la deformación por corte transversal en el comportamiento de flexión de la placa es la principal diferencia entre la formulación del shell thin (pared delgada) y shell thick (pared gruesa). La formulación del shell thin sigue una aplicación de Kirchhoff-Love, que desprecia la deformación por corte transversal, mientras que la formulación del shell thick sigue a Mindlin-Reissner (Schöllhammer y Fries, 2019), que sí tiene en cuenta el comportamiento de corte. La formulación del shell thick no tiene ningún efecto sobre el comportamiento de membrana (en el plano), solo el comportamiento de flexión (fuera del plano) de la placa.

La formulación del shell thick también se recomienda en general porque tiende a ser más precisa, aunque ligeramente más rigurosa. Por tanto, en este ejemplo de cálculo se opta por usar la formulación del shell thick. En la Figura 4-3 se muestra la selección y definición del elemento shell en un programa de análisis estructural.

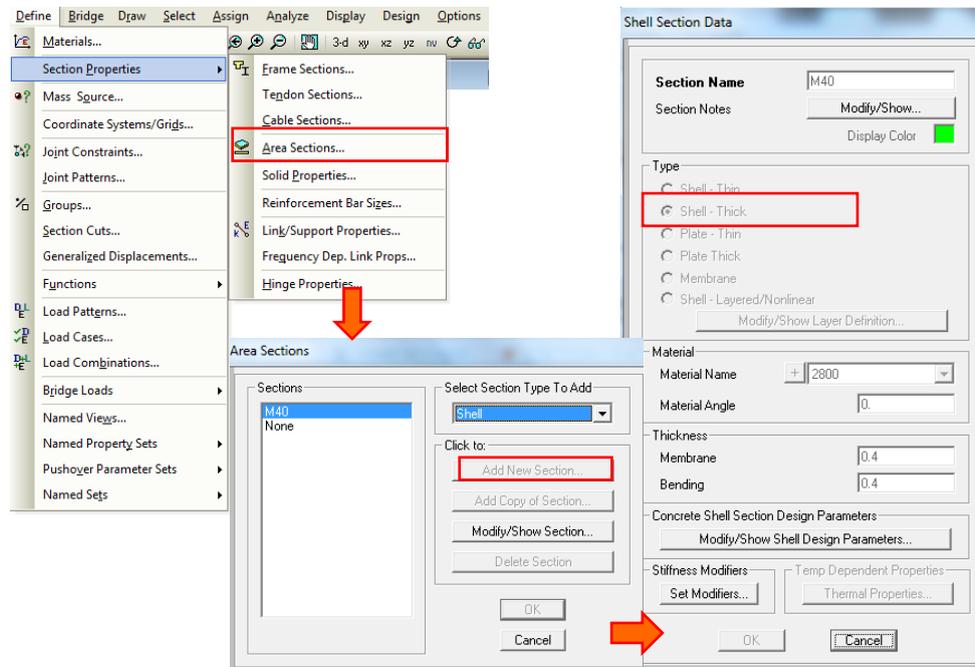


Figura 4-3: Definición del elemento shell thick en un programa estructural

Fuente: Elaboración propia

## 4.3 MODELAMIENTO ESTRUCTURAL

### 4.3.1 Modelamiento del tanque

El análisis estructural se ha realizado usando el Método de Elementos Finitos (M.E.F.) implementado en el programa computacional SAP 2000 e idealizando la estructura con 6 grados de libertad por cada nudo.

El modelamiento de la estructura comprende: geometría, materiales y condiciones de apoyo, los cuales son congruentes con los datos utilizados en el ejemplo numérico del capítulo III. La geometría curva del tanque cilíndrico se representa por una superficie formada por 1200 pequeños elementos shell planos de 4 nudos como se muestra en la Figura 4-5. La estructura cilíndrica es de material homogéneo e isotrópico (concreto) y tiene un comportamiento lineal elástico. Todas las propiedades del material se añaden al modelo matemático en el programa de cómputo como se muestra en la Figura 4-4.

Para las condiciones de contorno o borde se considera empotramiento perfecto en el extremo inferior del tanque (base) y total libertad para giros y desplazamientos en el extremo superior.

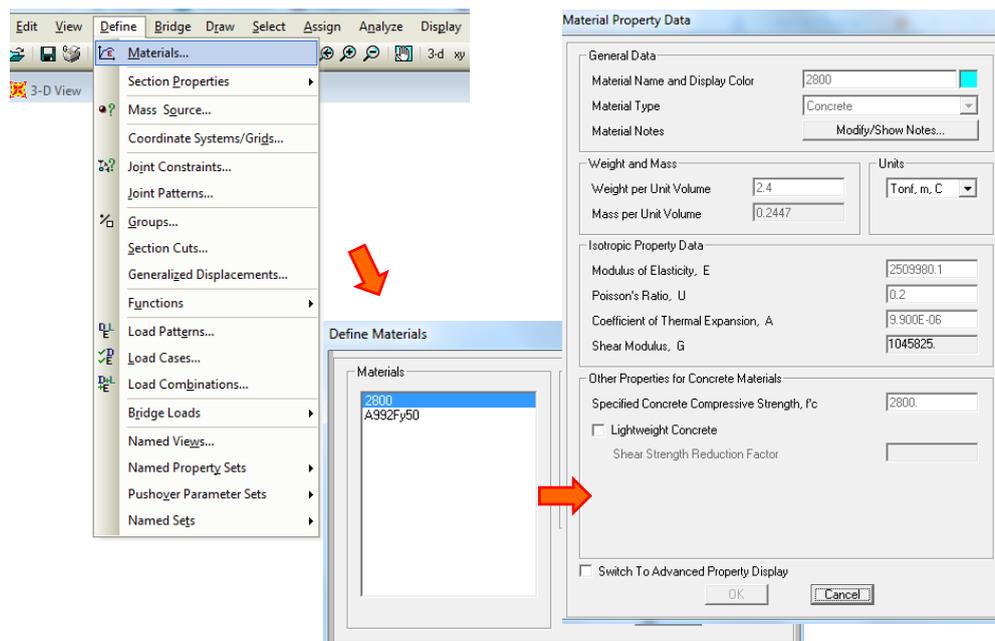


Figura 4-4: Definición del material en un programa estructural.

Fuente: Elaboración propia

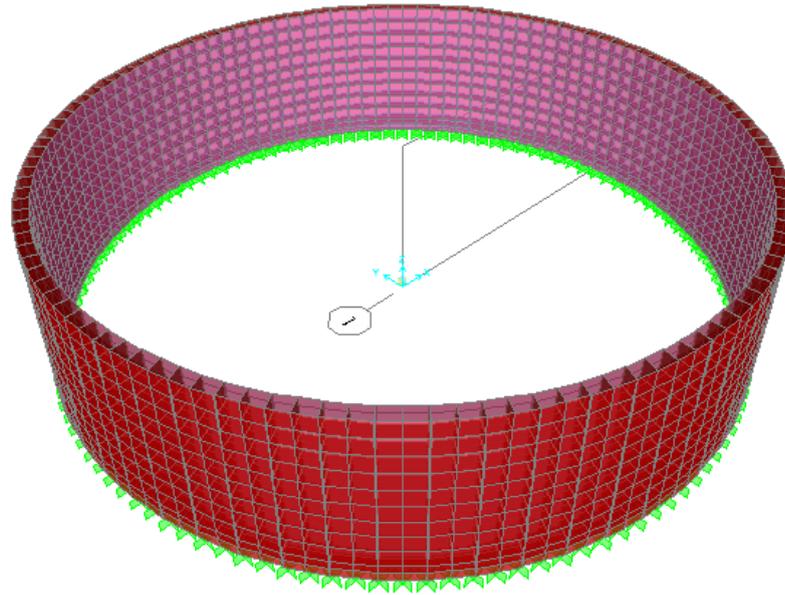


Figura 4-5: Vista tridimensional del modelo estructural

Fuente: Elaboración propia

#### 4.3.2 Cargas actuantes

El patrón de cargas obtenido para realizar el análisis estructural sísmico estático sigue la distribución lineal en la altura del tanque y es el mismo que se utilizó en el ejemplo numérico del capítulo III y que se muestra en la Figura 3-3 para una sección de máxima demanda en la dirección del sismo.

La distribución horizontal sigue una distribución del tipo función coseno para las fuerzas hidrodinámicas impulsivas y convectivas. La distribución horizontal para la fuerza inercial es uniformemente distribuida a lo largo de la circunferencia en la dirección del eje considerado para el sismo. La distribución horizontal debido a la aceleración vertical es axisimétrica e igual a la distribución de la presión hidrostática.

Para conseguir la distribución horizontal es común usar una edición interactiva con una hoja de Excel para asignar valores de presión correspondientes en cada nudo del modelo estructural. En las Figuras 4-6, 4-7 y 4-8 se muestra en tres pasos el procedimiento para editar y definir los valores correspondientes en cada nudo debido a la distribución total de las cargas actuantes en un programa de análisis estructural.

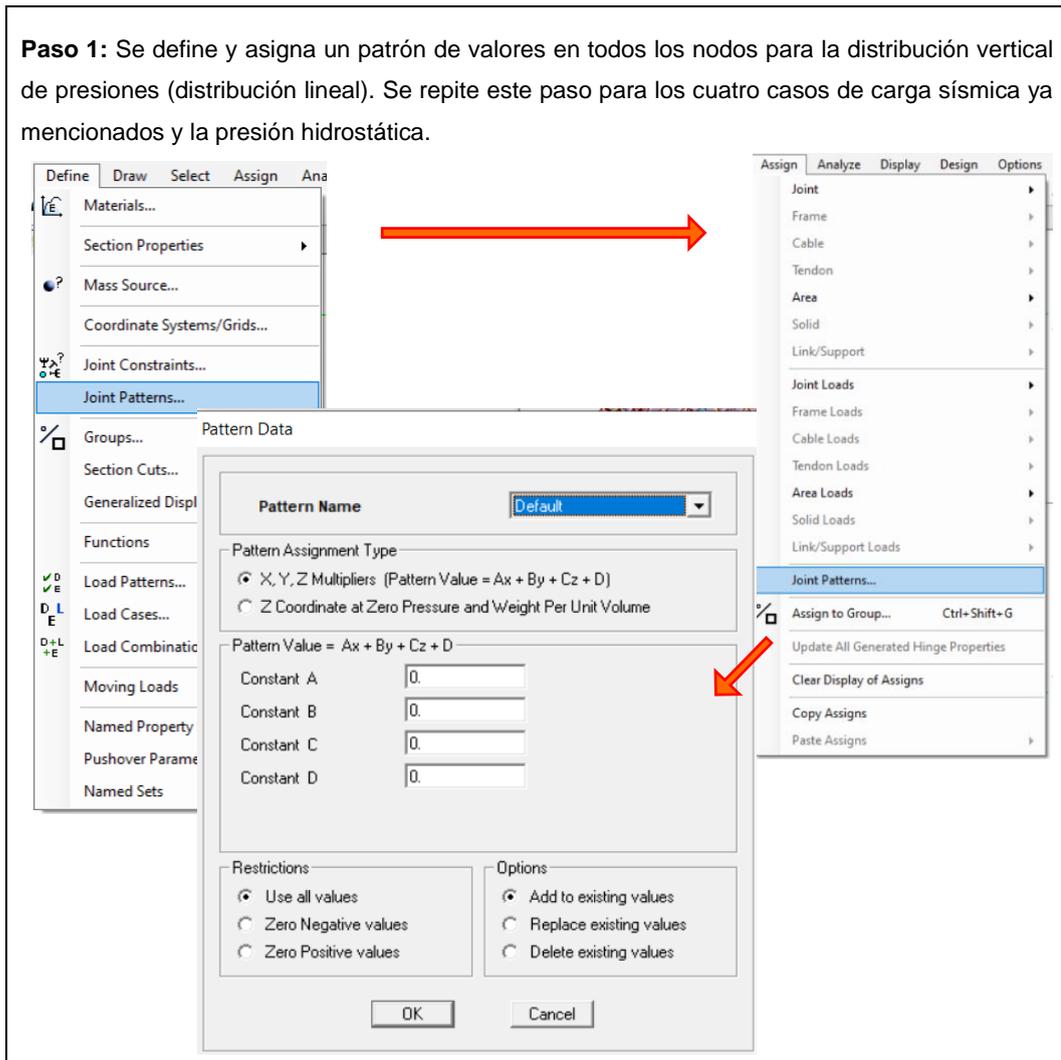


Figura 4-6: Paso 1 para asignar las cargas actuantes en el muro cilíndrico

Fuente: Elaboración propia

Para este caso las ecuaciones que se deberían de ingresar al programa son lineales, sin embargo, para este tipo de fuerzas no son lineales por lo cual no se pueden ingresar las fuerzas como función, en lugar de esto las fuerzas se ingresan manualmente en cada nudo de la estructura.

**Paso 2:** Se exportan las coordenadas de todos los nudos de la estructura para ser manipulables en una hoja de Excel.

Choose Tables for Interactive Editing

MODEL DEFINITION (1 of 45 tables selected)

- System Data
- Property Definitions
- Load Pattern Definitions
- Other Definitions
- Load Case Definitions
- Connectivity Data
  - Joint Coordinates
    - Table - Joint Coordinates
  - Object Connectivity
- Joint Assignments
- Area Assignments
- Options/Preferences Data
- Miscellaneous Data

OK Cancel

Interactive Database Editing - Joint Coordinates

Joint	CoordSys	CoordType	XorR	Y	T	Z	SpecialJt
Text	Text	Text	m	m	Degrees	m	Yes/No
1	1 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		5.00000	No
2	2 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		0.00000	No
3	3 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		4.50000	No
4	4 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		4.00000	No
5	5 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		3.50000	No
6	6 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		3.00000	No
7	7 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		2.50000	No
8	8 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		2.00000	No
9	9 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		1.50000	No
10	10 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		1.00000	No
11	11 GLOBAL	Cartesian	10.00000	0.00000		0.50000	No
12	12 GLOBAL	Cartesian	9.94522	1.04528		4.50000	No
13	13 GLOBAL	Cartesian	9.94522	1.04528		5.00000	No
14	14 GLOBAL	Cartesian	9.78148	2.07912		4.50000	No
15	15 GLOBAL	Cartesian	9.78148	2.07912		5.00000	No
16	16 GLOBAL	Cartesian	9.51057	3.09017		4.50000	No
17	17 GLOBAL	Cartesian	9.51057	3.09017		5.00000	No

Copy  
Paste  
Paste Insert  
Paste Append  
Delete Record  
Append Blank Rows  
Find...  
Replace...  
To Excel  
From Excel  
Cancel Excel  
Advanced Options...  
Undo Last Apply  
Apply to Model  
Done

Figura 4-7: Paso 2 para asignar las cargas actuantes en el muro cilíndrico

Fuente: Elaboración propia

**Paso 3:** A partir de las coordenadas extraídas en el paso 2 se calculan fácilmente los valores de presión correspondientes a cada nudo (join pattern) y se usa la edición interactiva con una hoja de Excel.

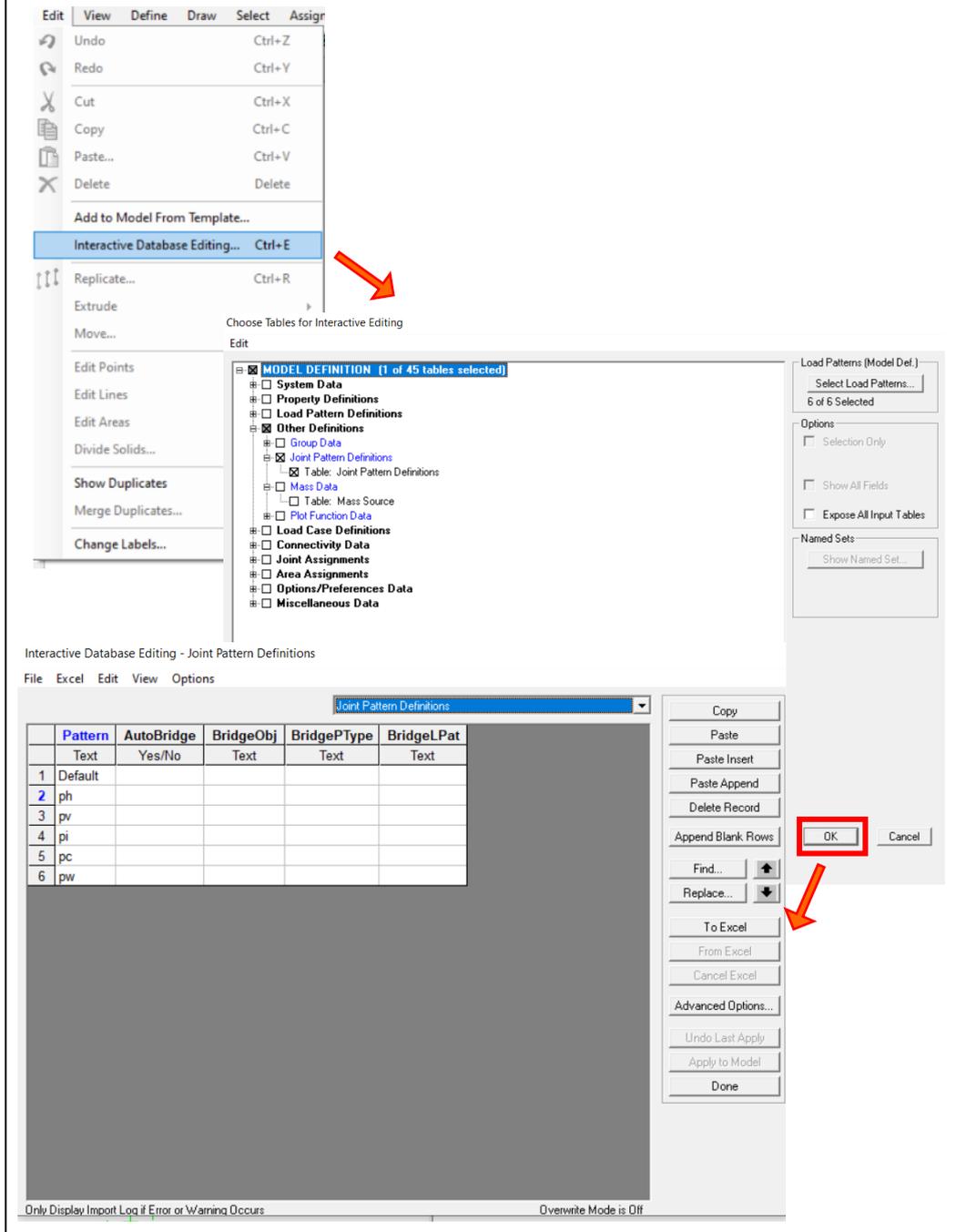


Figura 4-8: Paso 3 para asignar las cargas actuantes en el muro cilíndrico

Fuente: Elaboración propia

#### 4.3.3 Resultados del análisis estructural

De lo procesado en el programa SAP 2000 se obtienen las fuerzas máximas en la pared del tanque circular apoyado, cuyos resultados se muestran a continuación.

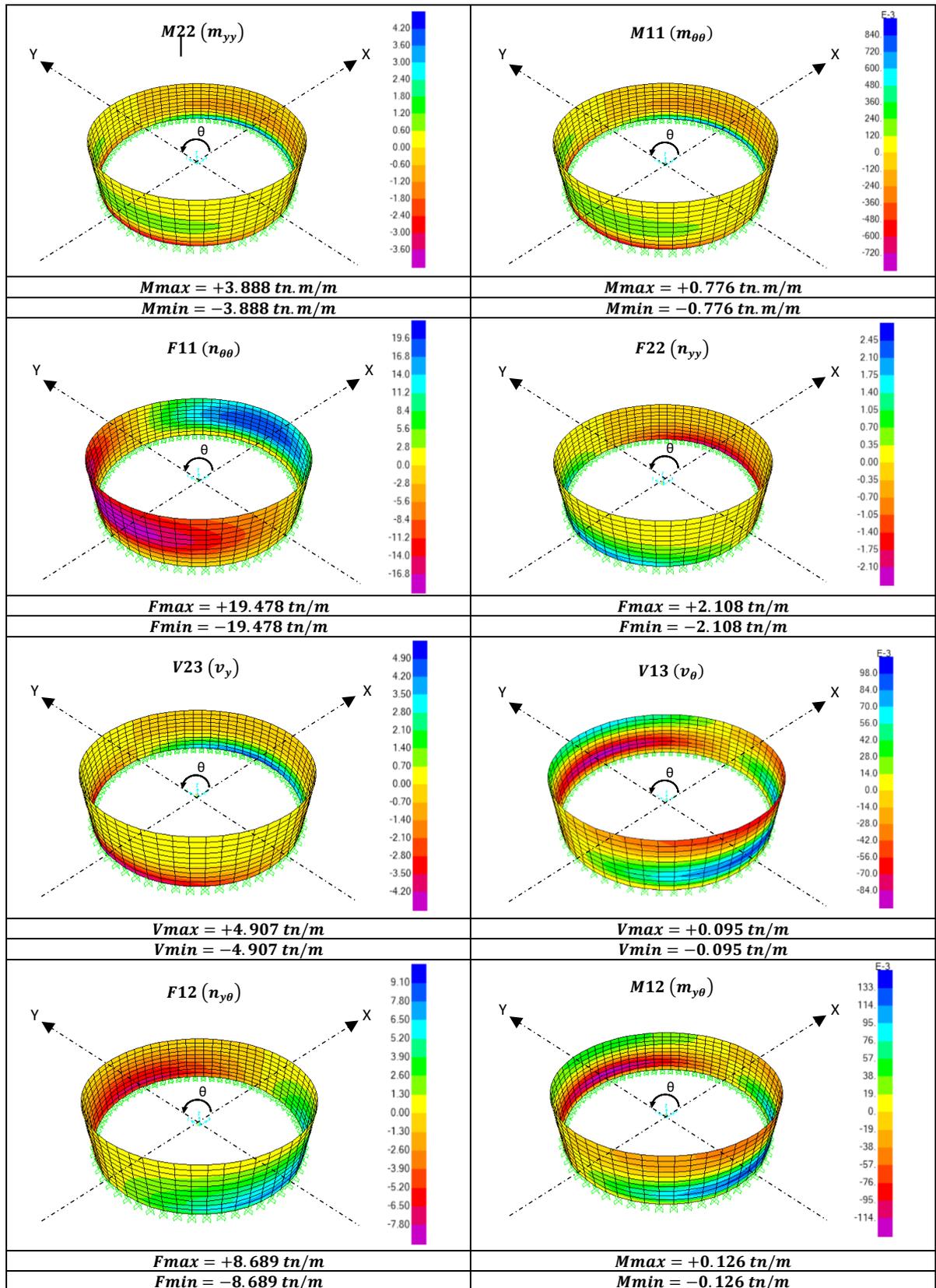


Figura 4-9: Resultados por presión impulsiva usando elementos finitos

Fuente: Elaboración propia

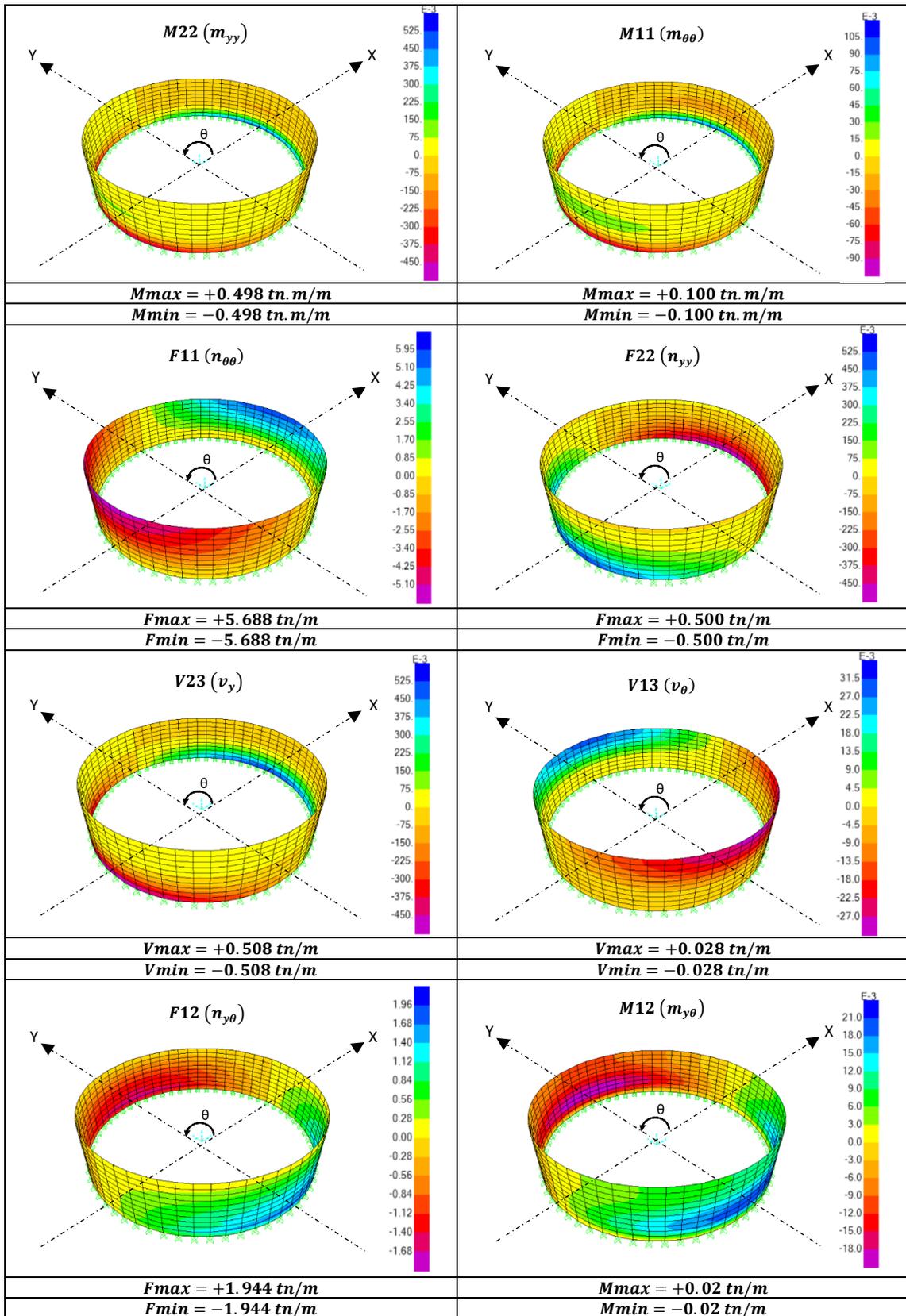


Figura 4-10: Resultados por presión convectiva usando elementos finitos

Fuente: Elaboración propia

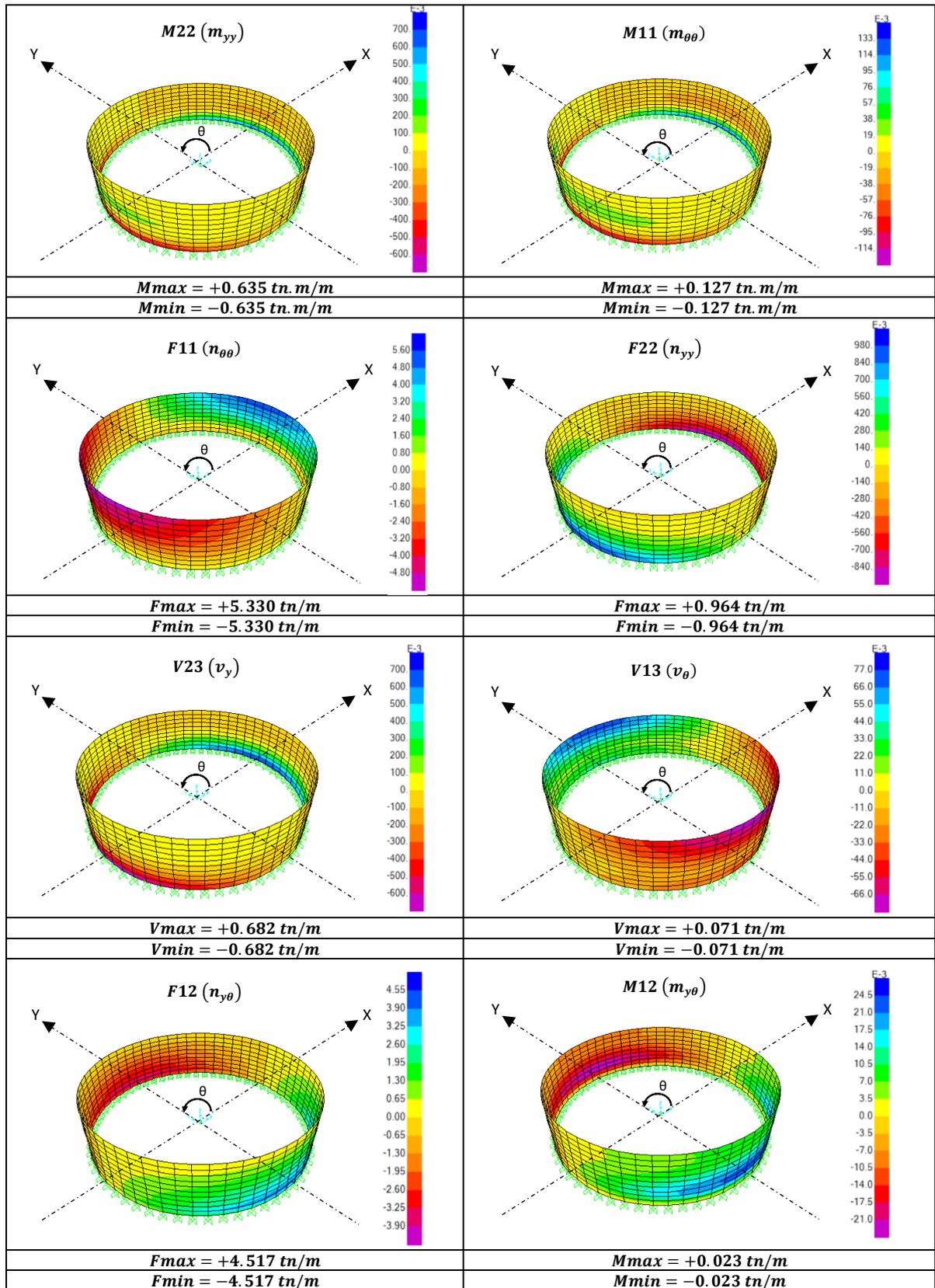


Figura 4-11: Resultados por fuerza inercial usando elementos finitos

Fuente: Elaboración propia

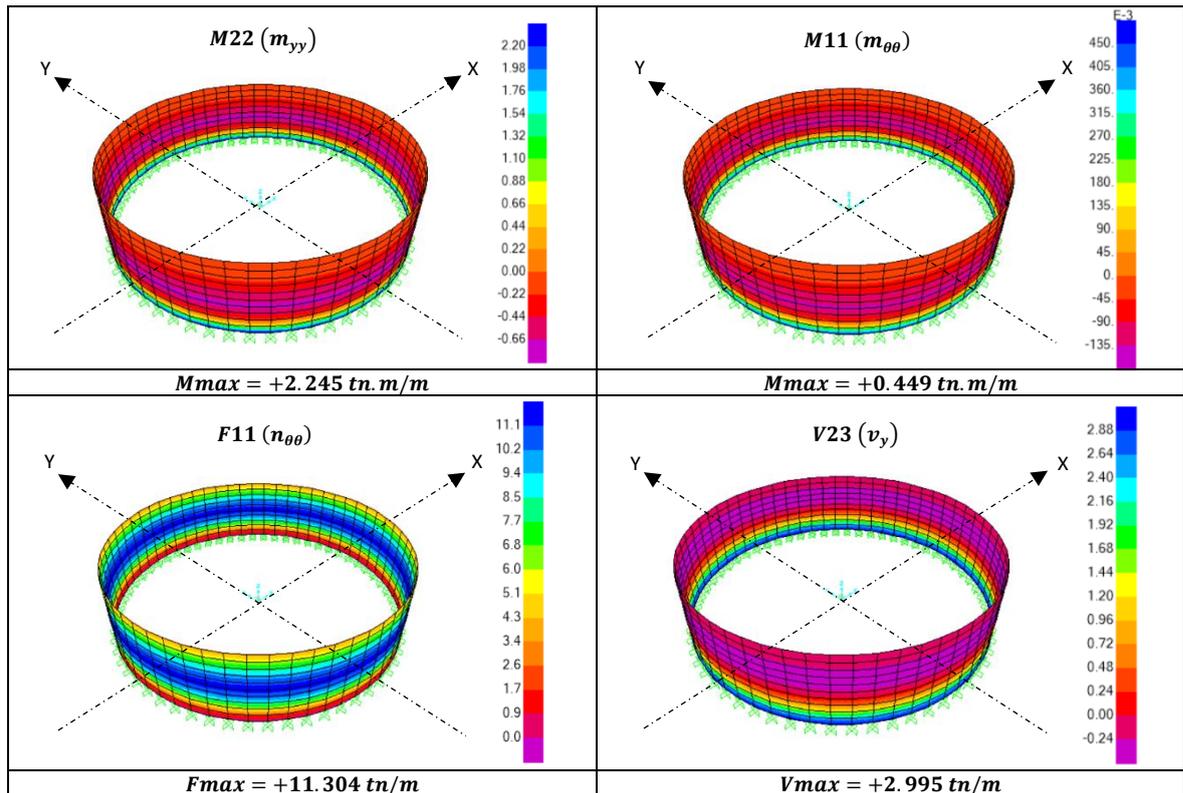


Figura 4-12: Resultado por aceleración vertical usando elementos finitos

Fuente: Elaboración propia

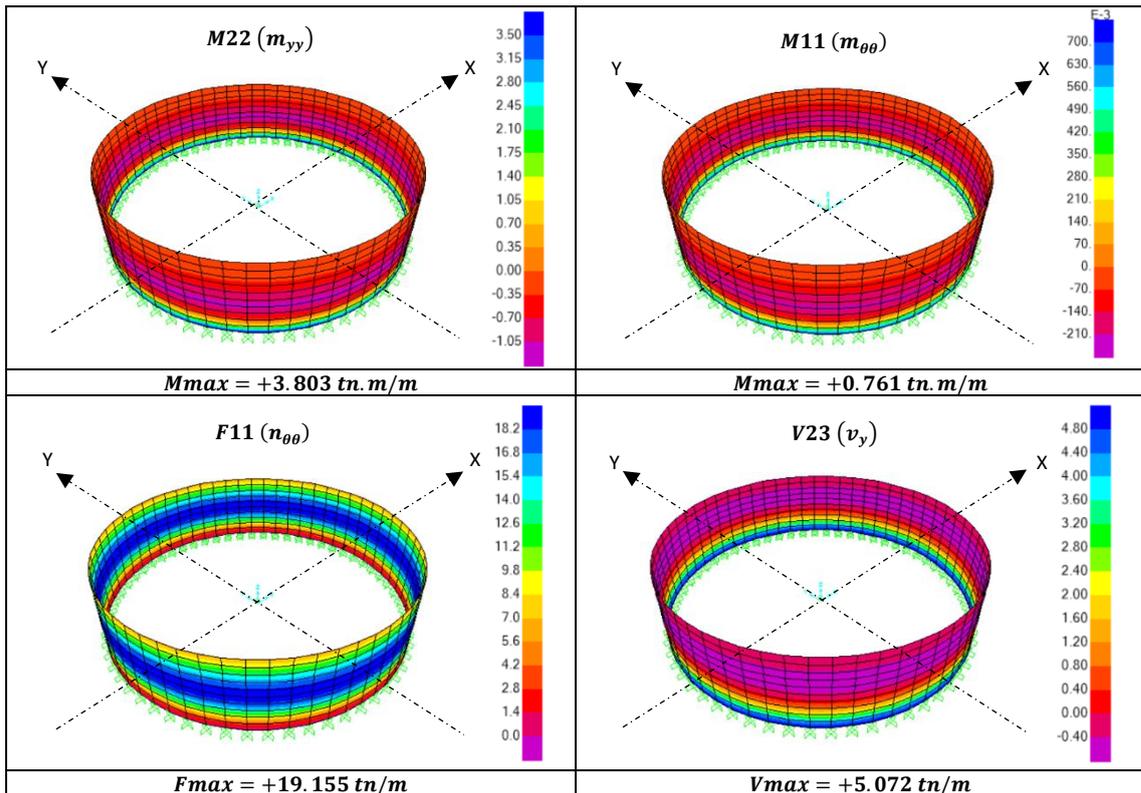


Figura 4-13: Resultados por presión hidrostática usando elementos finitos

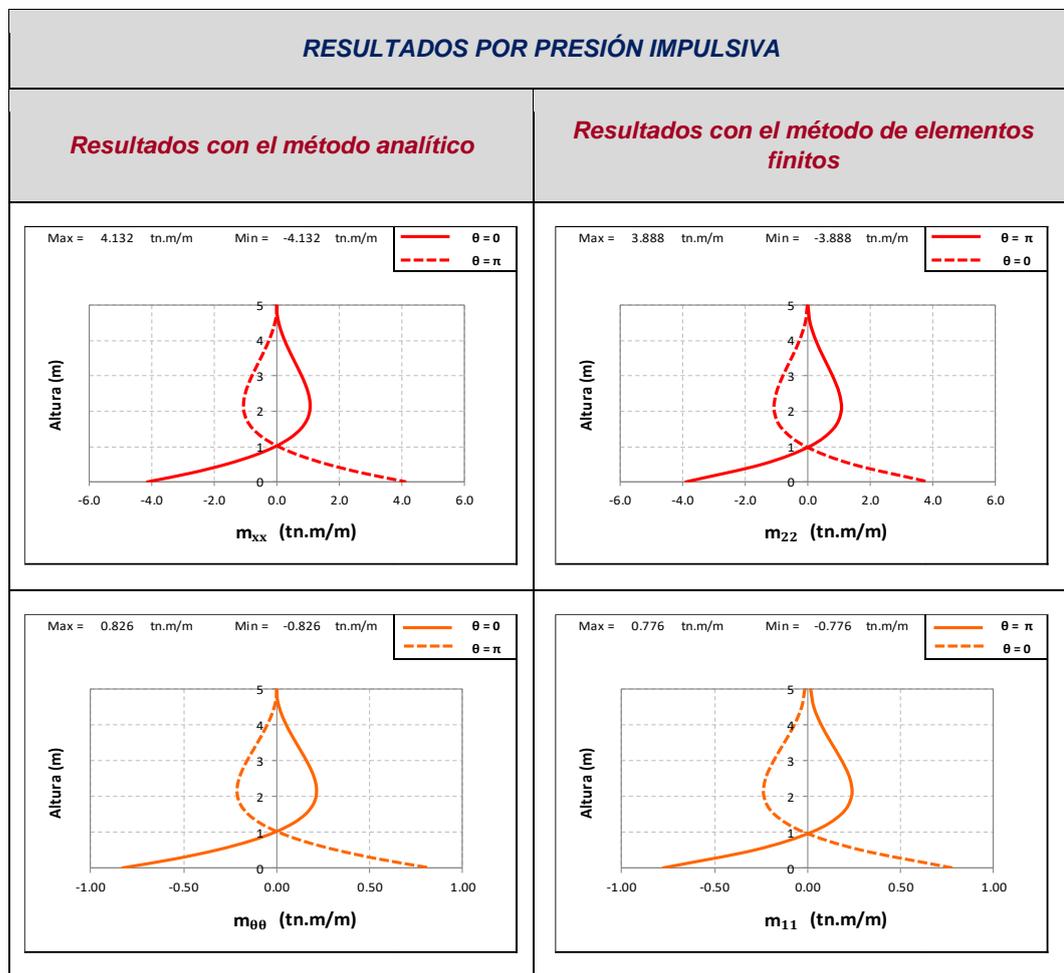
Fuente: Elaboración propia

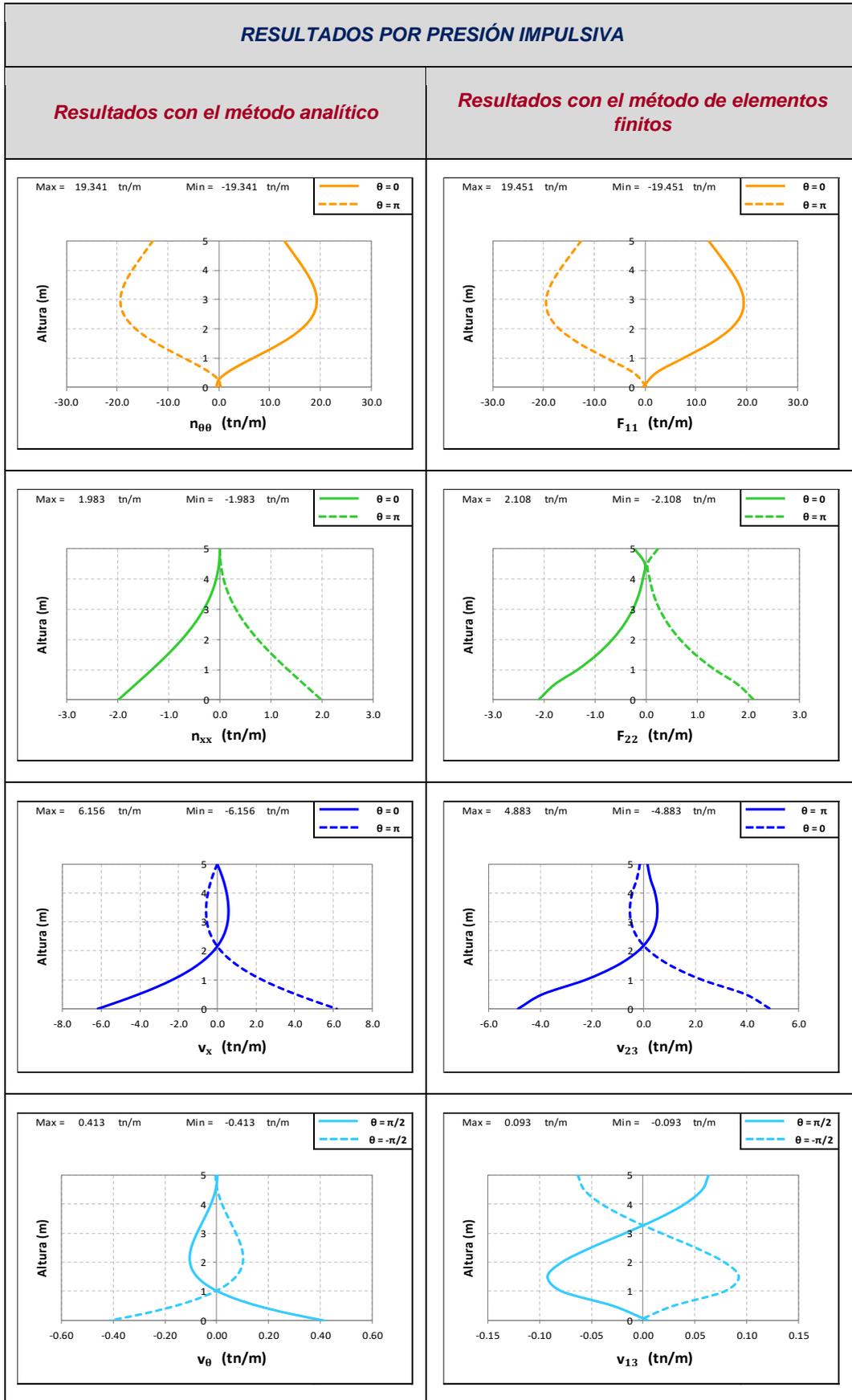
## CAPÍTULO V: CONTRASTACIÓN Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo se muestran los resultados tanto de la solución analítica como de los obtenidos en el programa de análisis estructural (SAP 2000) para un reservorio apoyado circular teniendo en cuenta el material, la geometría de la estructura, las condiciones de borde y las cargas actuantes mencionadas anteriormente en los capítulos III y IV. La solución analítica es desarrollada usando las expresiones finales obtenidas en el capítulo III.

### 5.1 RESULTADOS GRÁFICOS DE FUERZAS INTERNAS

#### 5.1.1 Resultados debido a la presión hidrodinámica impulsiva





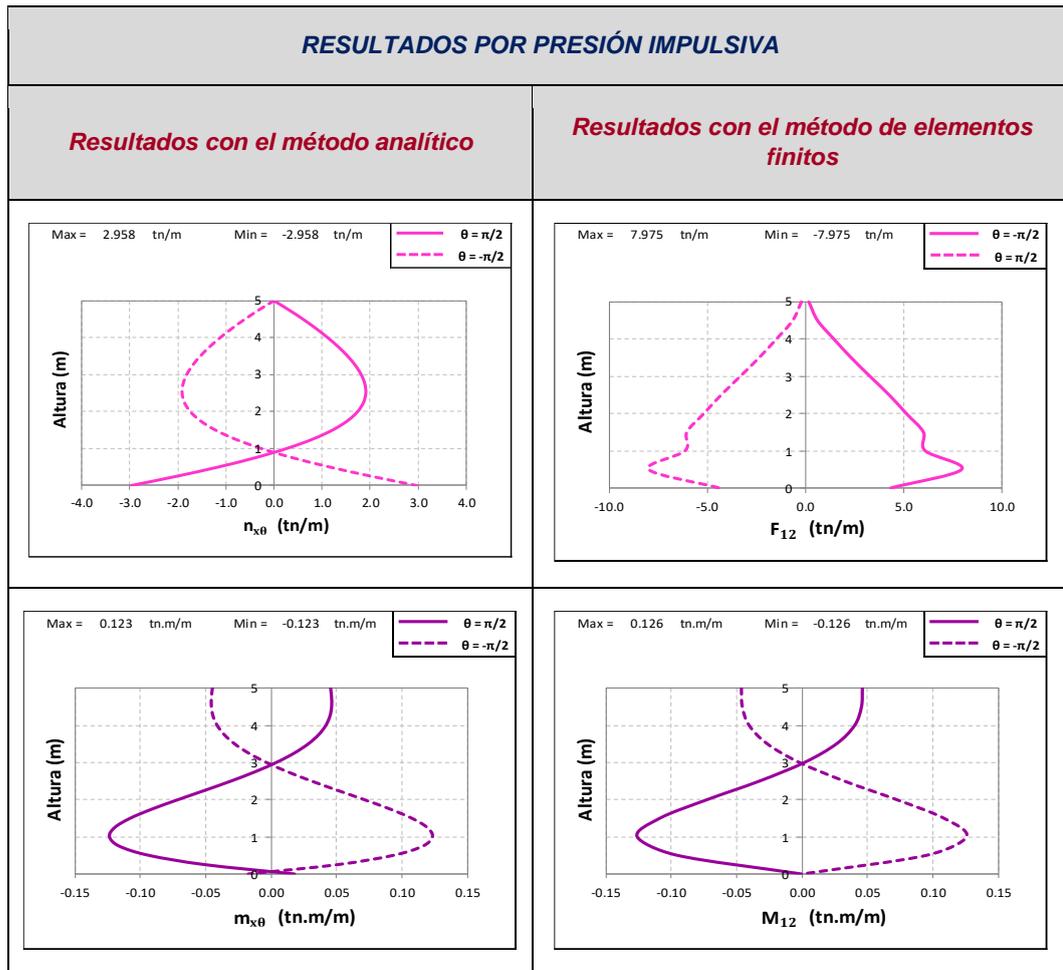
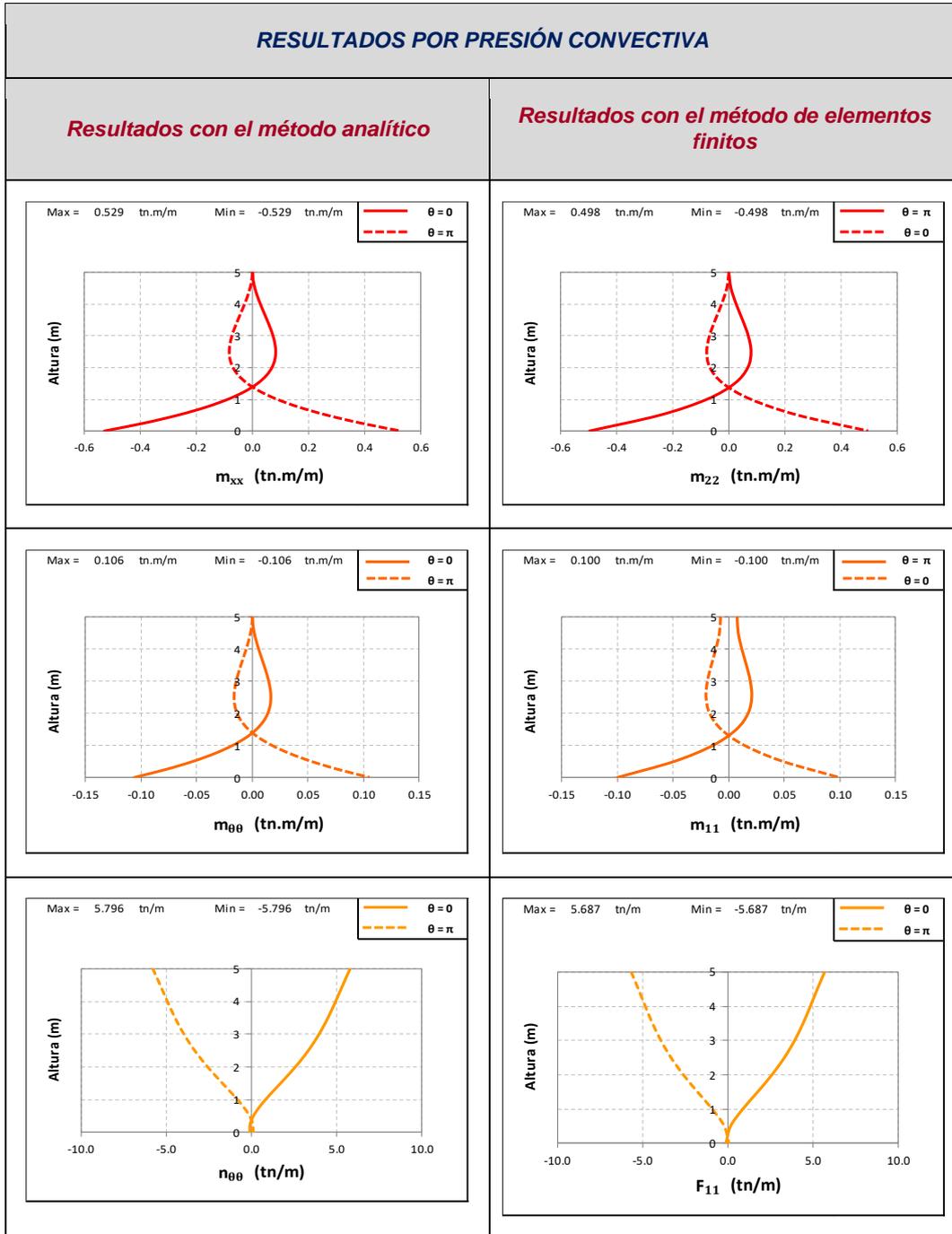


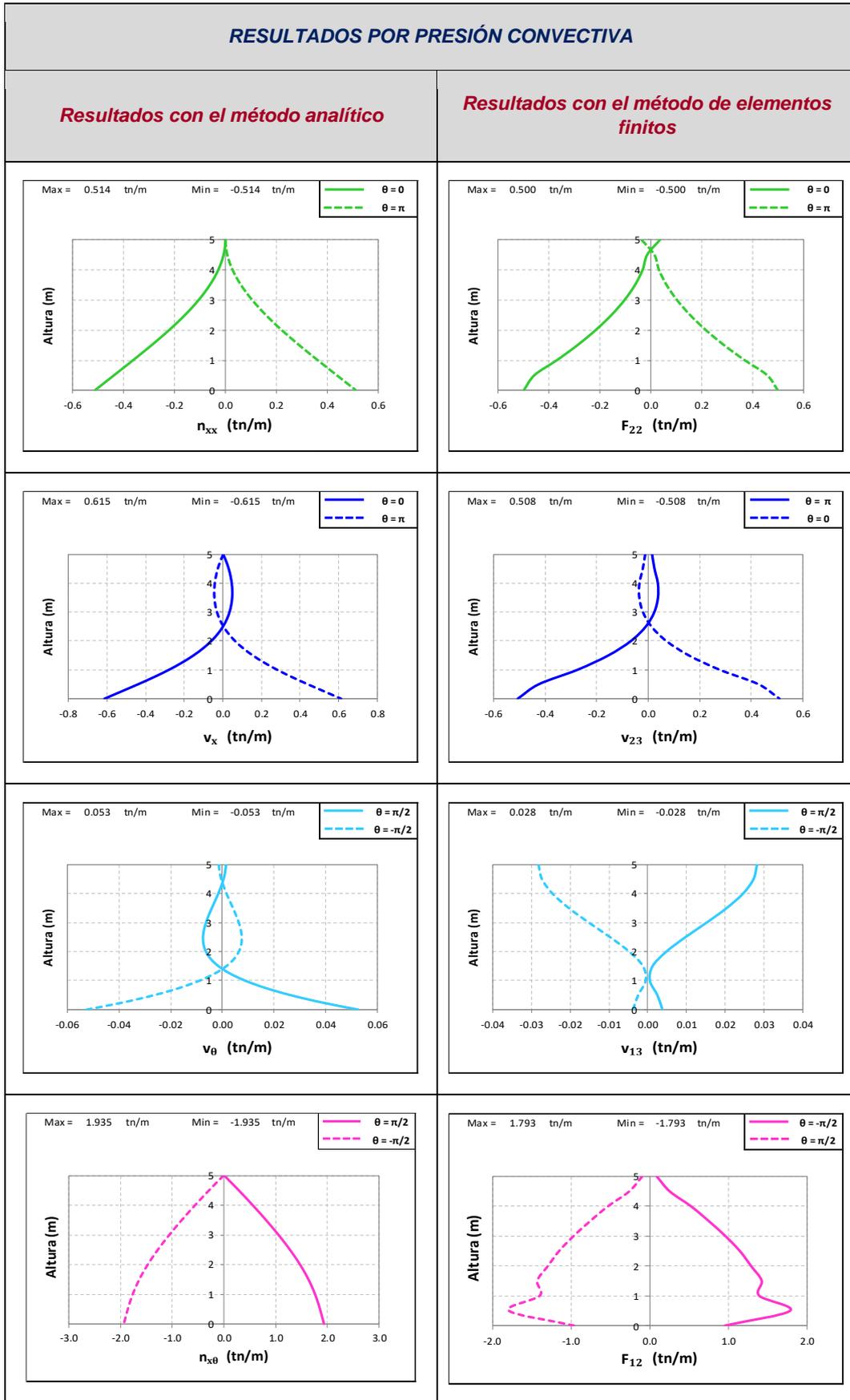
Figura 5-1: VS de resultados por presión impulsiva

Fuente: Elaboración propia

Los valores máximos y mínimos corresponden a diferentes puntos por simetría.

5.1.2 Resultados debido a la presión hidrodinámica convectiva





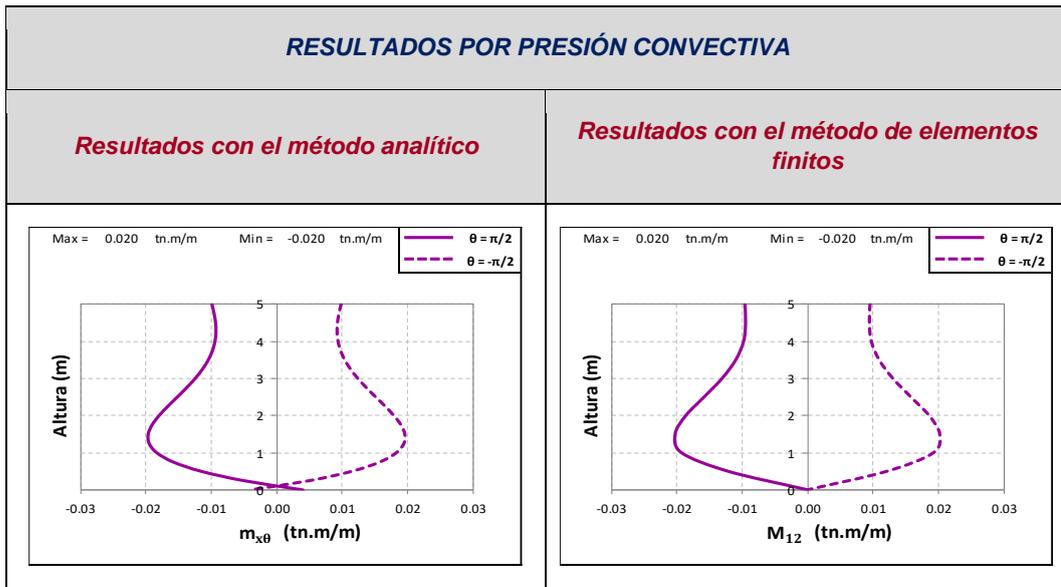
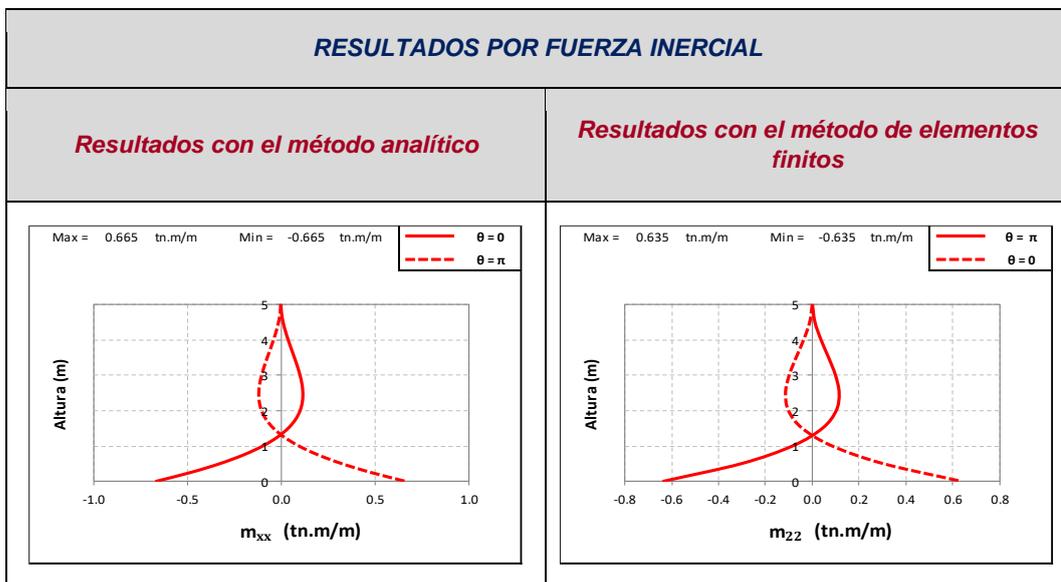
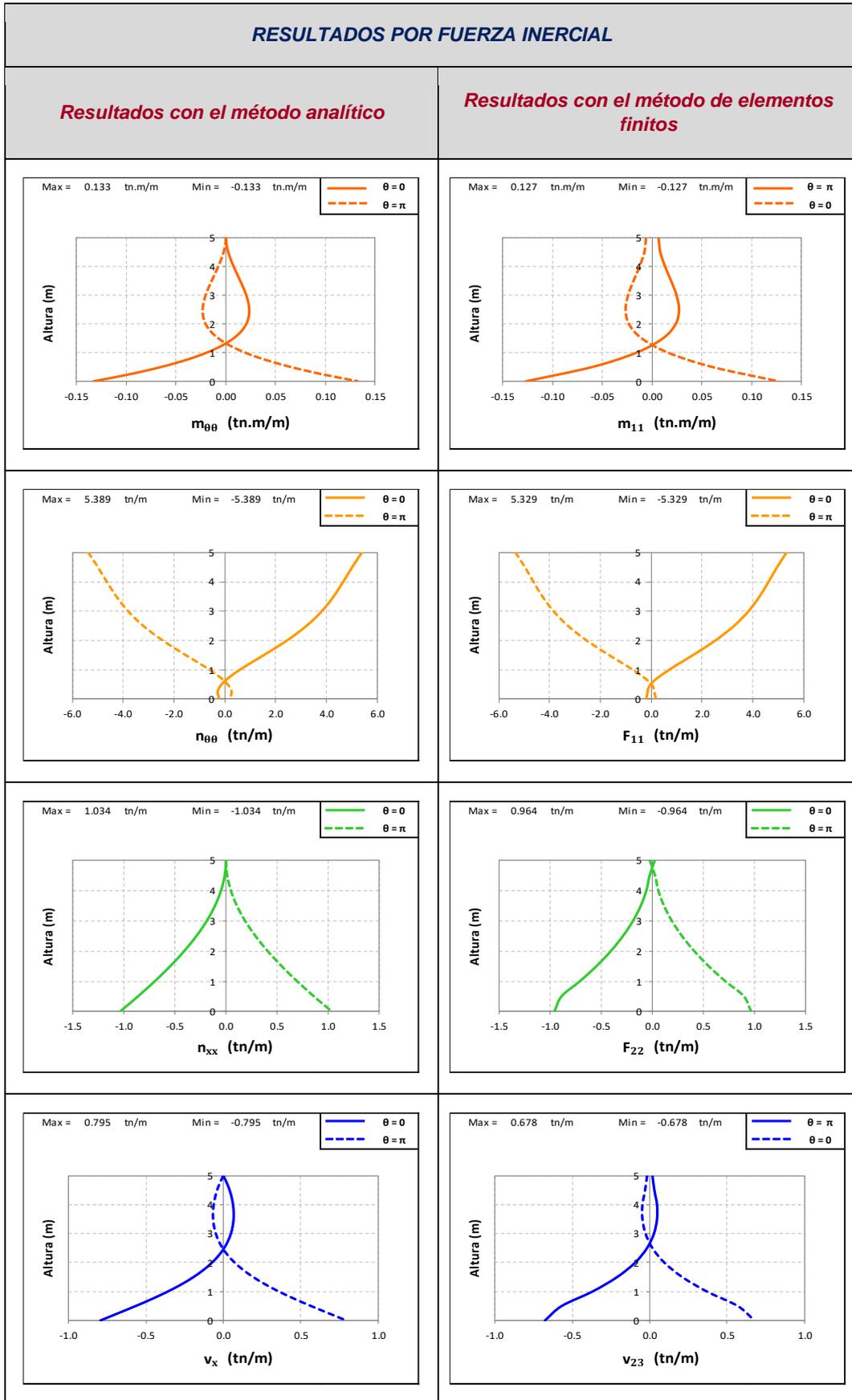


Figura 5-2: VS de resultados por presión convectiva

Fuente: Elaboración propia

### 5.1.3 Resultados debido a la carga inercial





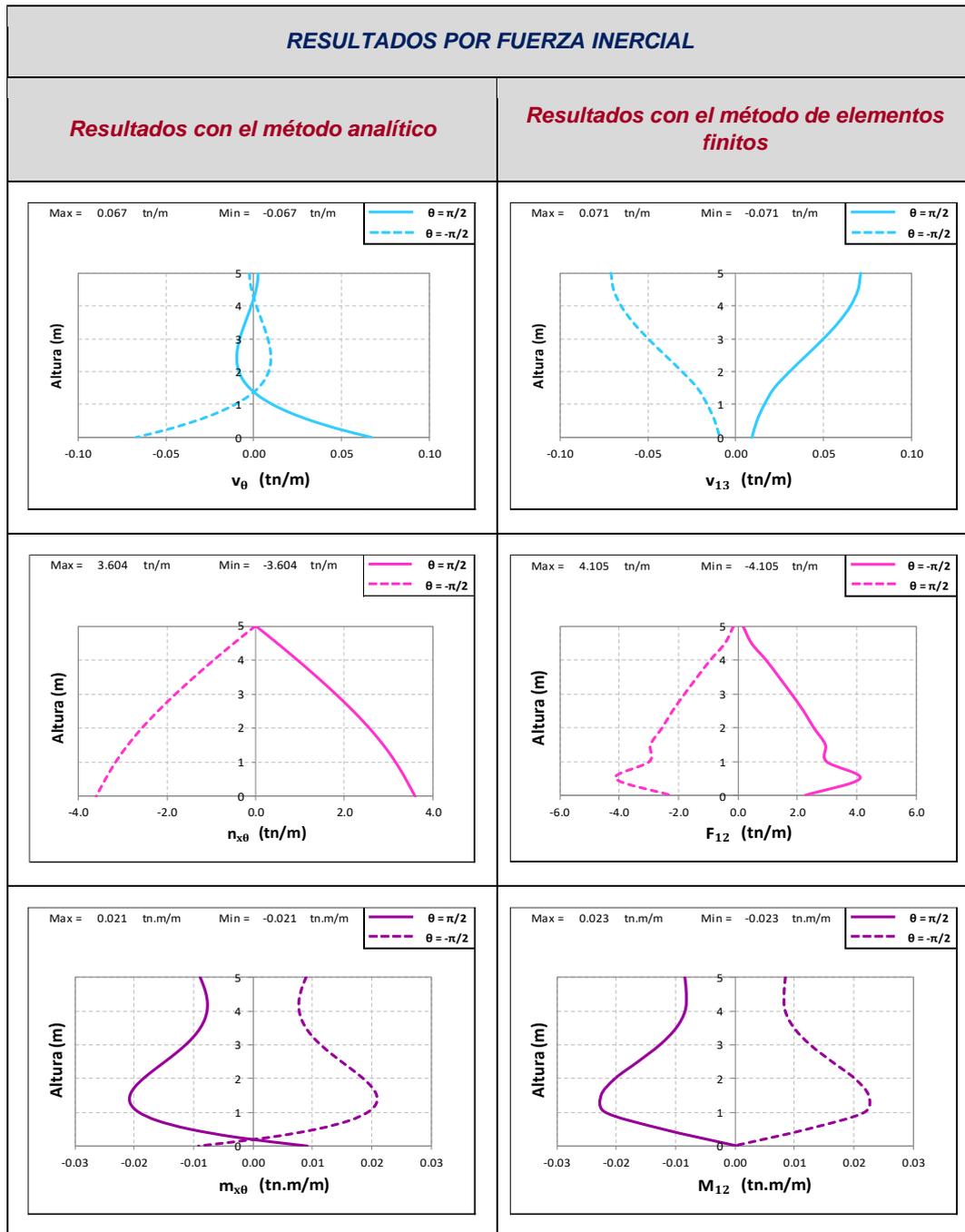
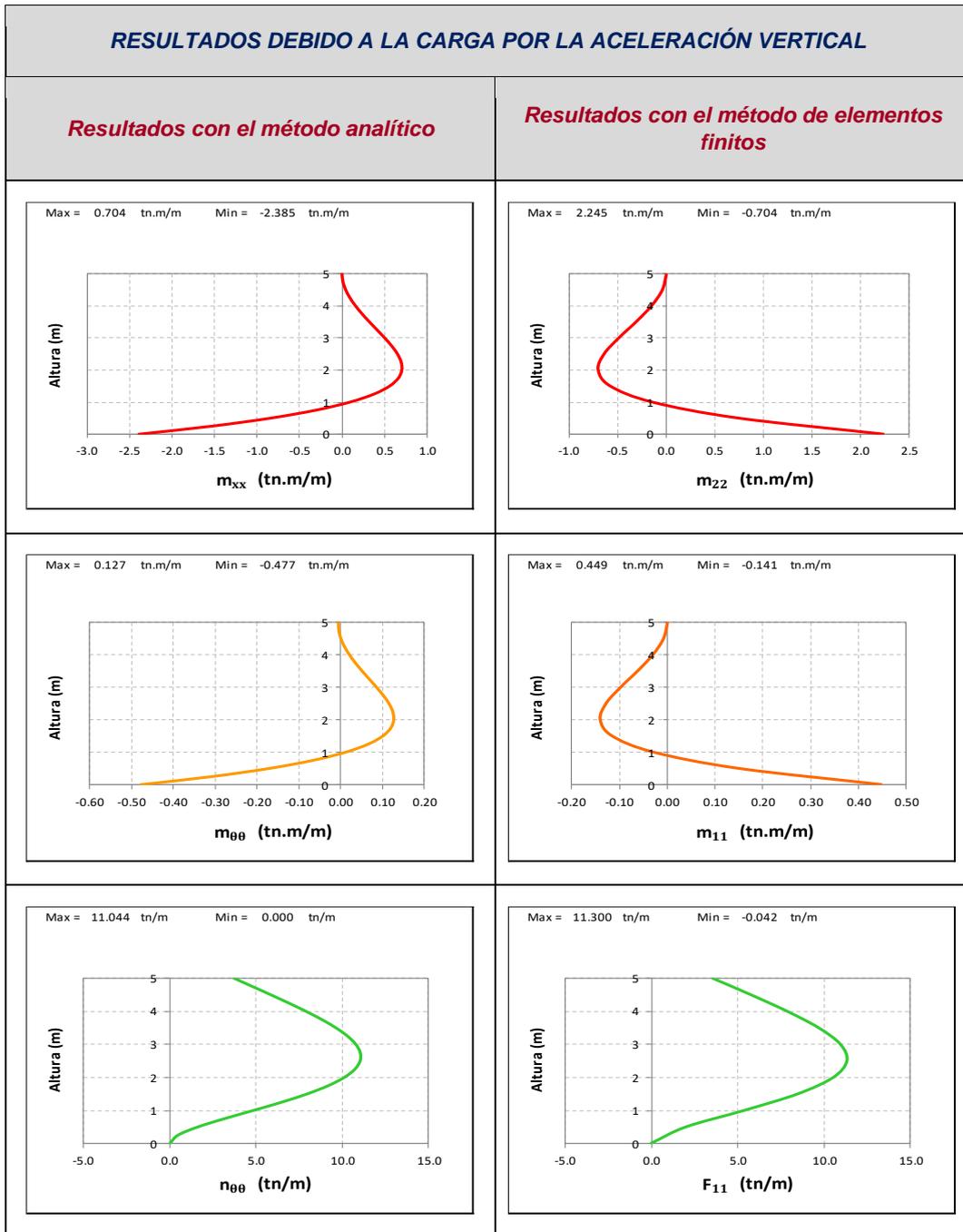


Figura 5-3: VS de resultados por fuerza inercial

Fuente: Elaboración propia

5.1.4 Resultados debido a la carga por la aceleración vertical



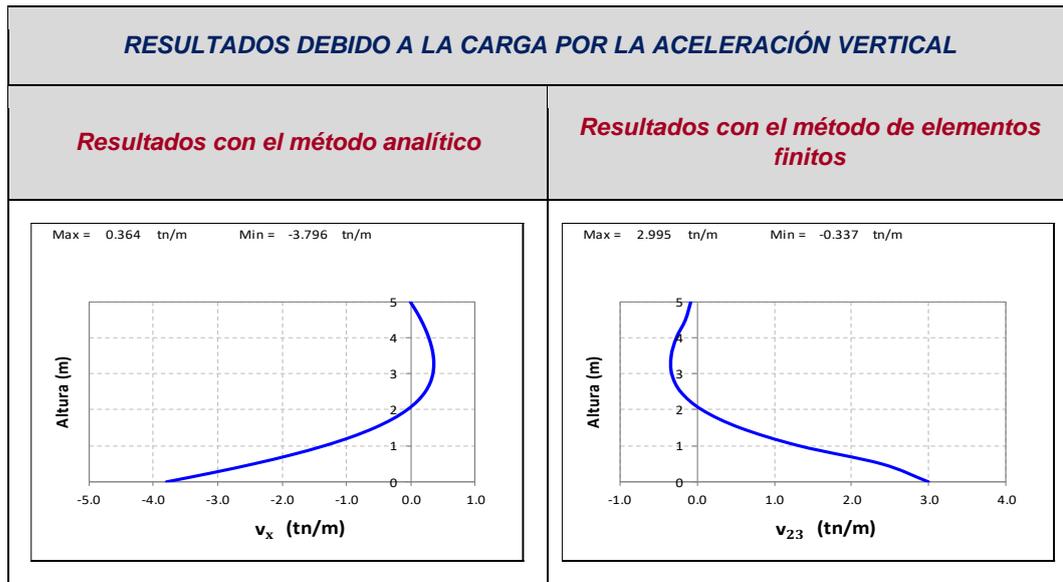
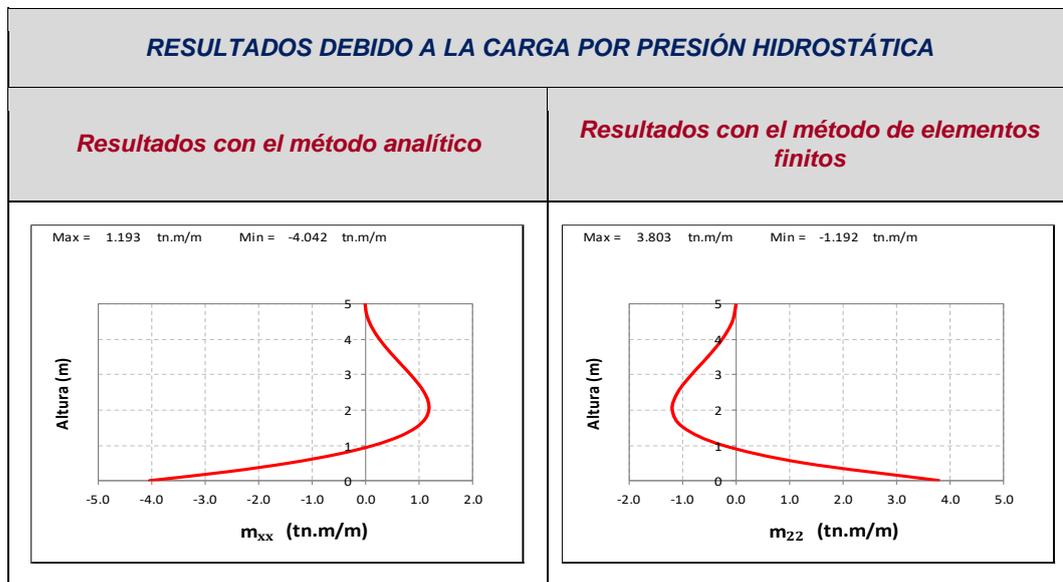


Figura 5-4: VS de resultados por aceleración vertical

Fuente: Elaboración propia

### 5.1.5 Resultados debido a la presión hidrostática



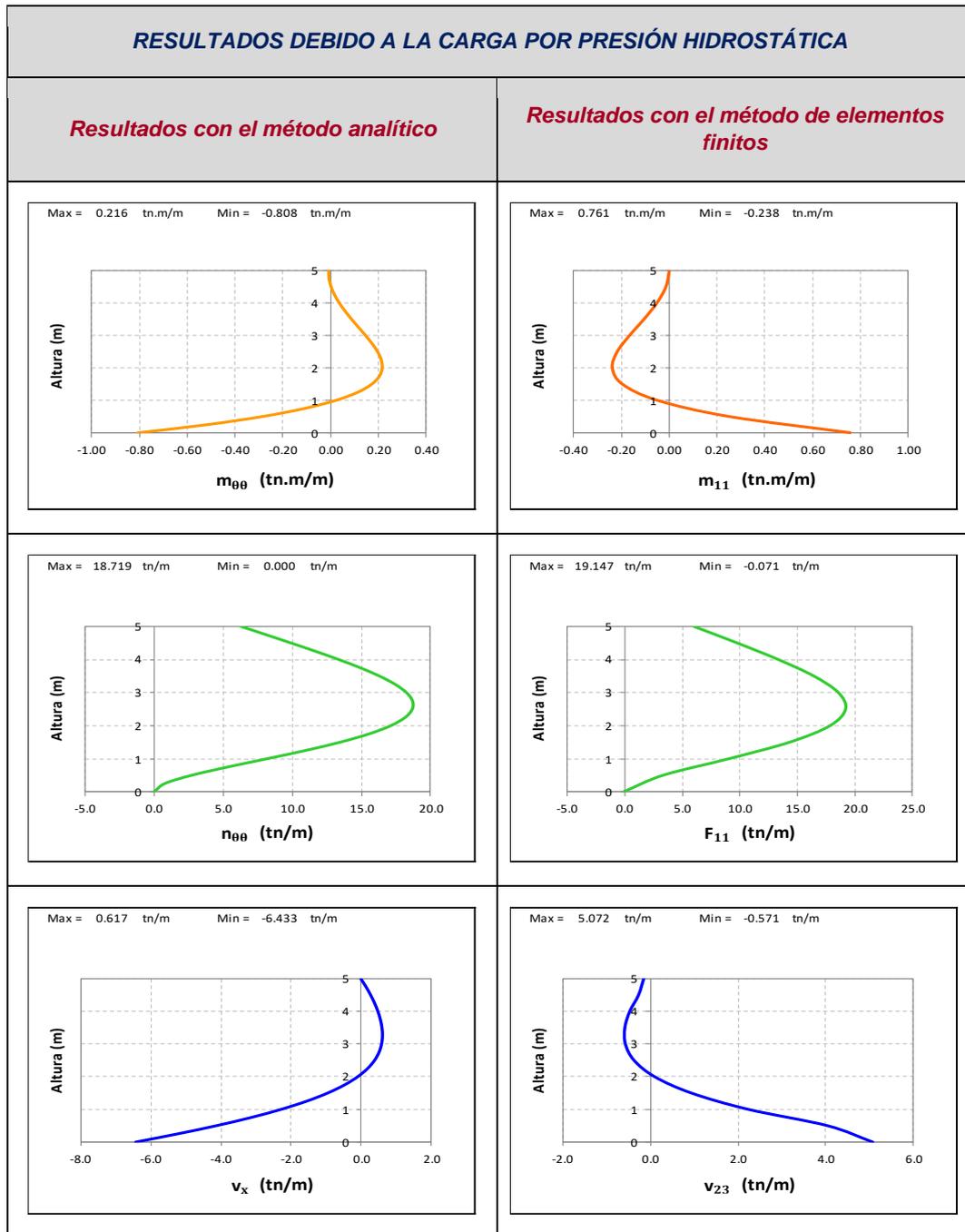


Figura 5-5: VS de resultados por presión hidrostática

Fuente: Elaboración propia

## 5.2 RESUMEN COMPARATIVO DE RESULTADOS

Antes de comparar los resultados obtenidos por el método analítico y el método de elementos finitos con uso del programa SAP 2000, es relevante mencionar que el diseño de concreto armado en tanques circulares apoyados se realiza de la siguiente manera, para el acero vertical se toma en consideración el valor del momento flector en la dirección vertical (axial)  $m_{xx}$ , para el acero horizontal se toma en consideración la fuerza normal en la dirección circunferencial  $n_{\theta\theta}$ , y para la verificación por fuerza cortante se toma tanto la fuerza cortante radial  $v_x$  así como la fuerza cortante tangencial  $n_{x\theta}$ . Por lo mencionado, es de mayor relevancia analizar los resultados que se relacionan con el diseño.

A modo de resumen, se muestran los resultados críticos obtenidos debido a todas las fuerzas actuantes tanto para la solución con el método analítico como para la solución usando elementos finitos en el programa estructural SAP 2000 (Ver los cuadros 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5).

Para la fuerza hidrodinámica impulsiva se puede apreciar en el Cuadro 5-1 que los resultados obtenidos por método analítico difieren del método de elementos finitos, para los valores obtenidos del momento flector en dirección vertical  $m_{xx}$  se tiene un valor máximo de 4.132 T.m/m para el primer método y un valor máximo de 3.888 T.m/m para el segundo, encontrándose una diferencia de un 6.28 % en relación al valor obtenido por el método de elementos finitos. Sin embargo, para el diseño del acero vertical sería preferible tomar en cuenta el valor obtenido por el método analítico, ya que al ser este mayor que el obtenido por el método de elementos finitos, el diseño estructural sería más conservador.

Para los valores obtenidos de la fuerza normal en la dirección circunferencial  $n_{\theta\theta}$  también existe una diferencia de 0.70 % entre el máximo valor obtenido del método analítico y el método de elementos finitos, ya que para el primer método se tiene un valor máximo de 19.341 T/m y para el segundo un valor máximo de 19.478 T/m. Si bien es apreciable que el valor obtenido por el método de elementos finitos es mayor que al valor obtenido por el método analítico, la diferencia de estos no es significativa, esto quiere decir que la diferencia no producirá un cambio en el diseño del acero horizontal.

En cuanto a los valores obtenidos para la fuerza cortante radial  $v_x$  y para la fuerza cortante tangencial  $n_{x\theta}$  mediante el método analítico, estos tienen una diferencia

significativa respecto a los valores obtenidos por el método de elementos finitos. La diferencia que se tiene para la fuerza cortante radial es de un 25.49%, al tener un valor máximo obtenido de 6.158 T/m con el método analítico y un valor máximo de 4.907 T/m con el método de elementos finitos. Para la fuerza cortante tangencial la diferencia es de 65.96%, al tener un valor máximo obtenido de 2.958 T/m con el método analítico y un valor máximo de 8.689 T/m con el método de elementos finitos. Si bien la diferencia de resultados con ambos métodos no es tan pequeña para ambas fuerzas cortantes, estos valores no son determinantes para el diseño, ya que difícilmente superan un 30% de la fuerza cortante resistente con la que se realiza la comprobación. Por ejemplo, si se aplica de forma aproximada la fórmula  $v_c = 0.53\sqrt{f'c} d$  con los valores de nuestro ejercicio, obtenemos un valor aproximado de  $v_c = 0.53\sqrt{280} 34/10 \approx 30 T/m$  para la fuerza cortante resistente del concreto, lo cual demuestra lo mencionado líneas arriba.

Cuadro 5-1: Cuadro comparativo para la fuerza hidrodinámica impulsiva  
Fuente: Elaboración propia

FUERZA HIDRODINÁMICA IMPULSIVA								
SMA	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$n_{xx}$	$v_x$	$v_{\theta}$	$n_{x\theta}$	$m_{x\theta}$
	4.132	0.826	19.341	1.983	6.158	0.413	2.958	0.123
SEF	$M22$	$M11$	$F11$	$F22$	$V23$	$V13$	$F12$	$M12$
	3.888	0.776	19.478	2.108	4.907	0.095	8.689	0.126
% de Variación	6.28%	6.44%	0.70%	5.93%	25.49%	334.74%	65.96%	2.38%

Para la fuerza hidrodinámica convectiva se puede apreciar en el **Cuadro 5-2** que los resultados obtenidos por método analítico difieren del método de elementos finitos, para los valores obtenidos del momento flector en dirección vertical  $m_{xx}$  se tiene un valor máximo de 0.529 T.m/m para el primer método y un valor máximo de 0.498 T.m/m para el segundo, encontrándose una diferencia de un 6.22 % en relación al valor obtenido por el método de elementos finitos. Sin embargo, para el diseño del acero vertical sería preferible tomar en cuenta el valor obtenido por el método analítico, ya que al ser este mayor que el obtenido por el método de elementos finitos, el diseño estructural sería más conservador.

Para los valores obtenidos de la fuerza normal en la dirección circunferencial  $n_{\theta\theta}$  también existe una diferencia de 1.90 % entre el máximo valor obtenido del método

analítico y el método de elementos finitos, ya que para el primer método se tiene un valor máximo de 5.796 T/m y para el segundo un valor máximo de 5.688 T/m. Si bien es apreciable que el valor obtenido por el método de analítico es mayor que al valor obtenido por el método de elementos finitos, la diferencia de estos no es significativa, esto quiere decir que la diferencia no producirá un cambio en el diseño del acero horizontal.

En cuanto a los valores obtenidos para la fuerza cortante radial  $v_x$  y para la fuerza cortante tangencial  $v_\theta$  mediante el método analítico, la primera tiene una diferencia significativa respecto a los valores obtenidos por el método de elementos finitos. La diferencia que se tiene para la fuerza cortante radial es de un 21.06%, al tener un valor máximo obtenido de 0.615 T/m con el método analítico y un valor máximo de 0.508 T/m con el método de elementos finitos. Para la fuerza cortante tangencial la diferencia es de 0.46 %, al tener un al tener un valor máximo obtenido de 1.935 T/m con el método analítico y un valor máximo de 1.944 T/m con el método de elementos finitos. Si bien la diferencia de resultados con ambos métodos no es tan pequeña para la fuerza cortante radial, estos valores no son determinantes para el diseño, ya que difícilmente superan un 30% de la fuerza cortante resistente con la que se realiza la comprobación. Por ejemplo, si se aplica de forma aproximada la fórmula  $v_c = 0.53\sqrt{f'_c} d$  con los valores de nuestro ejercicio, obtenemos un valor aproximado de  $v_c = 0.53\sqrt{280} 34/10 \approx 30 T/m$  para la fuerza cortante resistente del concreto, lo cual demuestra lo mencionado líneas arriba.

Cuadro 5-2: Cuadro comparativo para la fuerza hidrodinámica convectiva

Fuente: Elaboración propia

FUERZA HIDRODINÁMICA CONVECTIVA								
SMA	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$n_{xx}$	$v_x$	$v_\theta$	$n_{x\theta}$	$m_{x\theta}$
	0.529	0.106	5.796	0.514	0.615	0.053	1.935	0.02
SEF	$M22$	$M11$	$F11$	$F22$	$V23$	$V13$	$F12$	$M12$
	0.498	0.100	5.688	0.500	0.508	0.028	1.944	0.02
% de Variación	6.22%	6.00%	1.90%	2.80%	21.06%	89.29%	0.46%	0.00%

Para la fuerza inercial se puede apreciar en el Cuadro 5-3 que los resultados obtenidos por método analítico difieren del método de elementos finitos, para los valores obtenidos del momento flector en dirección vertical  $m_{xx}$  se tiene un valor máximo de 0.665 T.m/m para el primer método y un valor máximo de 0.635 T.m/m para el segundo, encontrándose una diferencia de un 4.72 % en relación al valor obtenido por el método de elementos finitos. Sin embargo, para el diseño del acero vertical sería preferible tomar en cuenta el valor obtenido por el método analítico, ya que al ser este mayor que el obtenido por el método de elementos finitos, el diseño estructural sería más conservador.

Para los valores obtenidos de la fuerza normal en la dirección circunferencial  $n_{\theta\theta}$  también existe una diferencia de 1.11 % entre el máximo valor obtenido del método analítico y el método de elementos finitos, ya que para el primer método se tiene un valor máximo de 5.389 T/m y para el segundo un valor máximo de 5.330 T/m. Si bien es apreciable que el valor obtenido por el método de analítico es mayor que al valor obtenido por el método de elementos finitos, la diferencia de estos no es significativa, esto quiere decir que la diferencia no producirá un cambio en el diseño del acero horizontal.

En cuanto a los valores obtenidos para la fuerza cortante radial  $v_x$  y para la fuerza cortante tangencial  $v_\theta$  mediante el método analítico, estos tienen una diferencia significativa respecto a los valores obtenidos por el método de elementos finitos. La diferencia que se tiene para la fuerza cortante radial es de un 16.72%, al tener un valor máximo obtenido de 0.796 T/m con el método analítico y un valor máximo de 0.682 T/m con el método de elementos finitos. Para la fuerza cortante tangencial la diferencia es de 20.21%, al tener un al tener un valor máximo obtenido de 3.604 T/m con el método analítico y un valor máximo de 4.517 T/m con el método de elementos finitos. Si bien la diferencia de resultados con ambos métodos no es tan pequeña para ambas fuerzas cortantes, estos valores no son determinantes para el diseño, ya que difícilmente superan un 30% de la fuerza cortante resistente con la que se realiza la comprobación. Por ejemplo, si se aplica de forma aproximada la fórmula  $v_c = 0.53\sqrt{f'_c} d$  con los valores de nuestro ejercicio, obtenemos un valor aproximado de  $v_c = 0.53\sqrt{280} 34/10 \approx 30 T/m$  para la fuerza cortante resistente del concreto, lo cual demuestra lo mencionado líneas arriba.

Cuadro 5-3: Cuadro comparativo para la fuerza inercial

Fuente: Elaboración propia

FUERZA INERCIAL								
SMA	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$n_{xx}$	$v_x$	$v_{\theta}$	$n_{x\theta}$	$m_{x\theta}$
	0.665	0.133	5.389	1.034	0.796	0.067	3.604	0.021
SEF	$M22$	$M11$	$F11$	$F22$	$V23$	$V13$	$F12$	$M12$
	0.635	0.127	5.330	0.964	0.682	0.071	4.517	0.023
% de Variación	4.72%	4.72%	1.11%	7.26%	16.72%	5.63%	20.21%	8.70%

Para la aceleración vertical del terreno se puede apreciar en el **Cuadro 5-4** que los resultados obtenidos por método analítico difieren del método de elementos finitos, para los valores obtenidos del momento flector en dirección vertical  $m_{xx}$  se tiene un valor máximo de 2.385 T.m/m para el primer método y un valor máximo de 2.245 T.m/m para el segundo, encontrándose una diferencia de un 6.24 % en relación al valor obtenido por el método de elementos finitos. Sin embargo, para el diseño del acero vertical sería preferible tomar en cuenta el valor obtenido por el método analítico, ya que al ser este mayor que el obtenido por el método de elementos finitos, el diseño estructural sería más conservador.

Para los valores obtenidos de la fuerza normal en la dirección circunferencial  $n_{\theta\theta}$  también existe una diferencia de 2.30 % entre el máximo valor obtenido del método analítico y el método de elementos finitos, ya que para el primer método se tiene un valor máximo de 11.044 T/m y para el segundo un valor máximo de 11.304 T/m. Si bien es apreciable que el valor obtenido por el método por elementos finitos es mayor que al valor obtenido por el método analítico, la diferencia de estos no es significativa, esto quiere decir que la diferencia no producirá un cambio en el diseño del acero horizontal.

En cuanto al resultado obtenido para la fuerza cortante radial  $v_x$  mediante el método analítico, tiene una diferencia significativa respecto al valor obtenido por el método de elementos finitos. La diferencia que se tiene para la fuerza cortante radial es de un 26.74%, al tener un valor máximo obtenido de 3.796 T/m con el método analítico y un valor máximo de 2.995 T/m con el método de elementos finitos. Si bien la diferencia de resultados con ambos métodos no es tan pequeña, este valor no es determinante para el diseño, ya que difícilmente supera un 30% de la fuerza cortante resistente con la que se realiza la comprobación. Por ejemplo,

si se aplica de forma aproximada la fórmula  $v_c = 0.53\sqrt{f'c} d$  con los valores de nuestro ejercicio, obtenemos un valor aproximado de  $v_c = 0.53\sqrt{280} 34/10 \approx 30 T/m$  para la fuerza cortante resistente del concreto, lo cual demuestra lo mencionado líneas arriba.

Cuadro 5-4: Cuadro comparativo para la aceleración vertical del terreno

Fuente: Elaboración propia

ACELERACIÓN VERTICAL DEL TERRENO				
SMA	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$v_x$
	2.385	0.477	11.044	3.796
SEF	$M22$	$M11$	$F11$	$V23$
	2.245	0.449	11.304	2.995
% de Variación	6.24%	6.24%	2.30%	26.74%

Para la fuerza hidrostática se puede apreciar en el Cuadro 5-5 que los resultados obtenidos por método analítico difieren del método de elementos finitos, para los valores obtenidos del momento flector en dirección vertical  $m_{xx}$  se tiene un valor máximo de 4.042 T.m/m para el primer método y un valor máximo de 3.803 T.m/m para el segundo, encontrándose una diferencia de un 6.28 % en relación al valor obtenido por el método de elementos finitos. Sin embargo, para el diseño del acero vertical sería preferible tomar en cuenta el valor obtenido por el método analítico, ya que al ser este mayor que el obtenido por el método de elementos finitos, el diseño estructural sería más conservador.

Para los valores obtenidos de la fuerza normal en la dirección circunferencial  $n_{\theta\theta}$  también existe una diferencia de 2.28 % entre el máximo valor obtenido del método analítico y el método de elementos finitos, ya que para el primer método se tiene un valor máximo de 18.719 T/m y para el segundo un valor máximo de 19.155 T/m. Si bien es apreciable que el valor obtenido por el método por elementos finitos es mayor que al valor obtenido por el método analítico, la diferencia de estos no es significativa, esto quiere decir que la diferencia no producirá un cambio en el diseño del acero horizontal.

En cuanto al resultado obtenido para la fuerza cortante radial  $v_x$  mediante el método analítico, tiene una diferencia significativa respecto al valor obtenido por el método de elementos finitos. La diferencia que se tiene para la fuerza cortante

radial es de un 26.83%, al tener un valor máximo obtenido de 6.433 T/m con el método analítico y un valor máximo de 5.072 T/m con el método de elementos finitos. Si bien la diferencia de resultados con ambos métodos no es tan pequeña, este valor no es determinante para el diseño, ya que difícilmente supera un 30% de la fuerza cortante resistente con la que se realiza la comprobación. Por ejemplo, si se aplica de forma aproximada la fórmula  $v_c = 0.53\sqrt{f'c}d$  con los valores de nuestro ejercicio, obtenemos un valor aproximado de  $v_c = 0.53\sqrt{280}34/10 \approx 30 \text{ T/m}$  para la fuerza cortante resistente del concreto, lo cual demuestra lo mencionado líneas arriba.

Cuadro 5-5: Cuadro comparativo para la fuerza hidrostática

Fuente: Elaboración propia

FUERZA HIDROSTÁTICA				
SMA	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta}$	$v_x$
	4.042	0.808	18.719	6.433
SEF	$M22$	$M11$	$F11$	$V23$
	3.803	0.761	19.155	5.072
% de Variación	6.28%	6.18%	2.28%	26.83%

Donde:

$m_{xx}$ : Momento flector en la dirección vertical del tanque

$m_{\theta\theta}$ : Momento flector en la dirección circunferencial del tanque

$n_{\theta\theta}$ : Fuerza normal en la dirección circunferencial del tanque

$n_{xx}$ : Fuerza normal en la dirección vertical del tanque

$v_x$ : Fuerza cortante transversal en la dirección radial del tanque que produce  $m_{xx}$

$v_\theta$ : Fuerza cortante transversal en la dirección radial del tanque que produce  $m_{\theta\theta}$

$n_{x\theta}$ : Fuerza cortante tangencial

$m_{x\theta}$ : Momento torsional

*SMA*: Solución usando el método analítico

*SEF*: Solución usando elementos finitos

## CONCLUSIONES

En esta investigación se concluye que el uso de la ecuación de Morley-Koiter aplicada a la solución de reservorios circulares apoyados presenta resultados coherentes y similares a los resultados que se obtienen mediante el uso de un programa de análisis estructural, esto se comprueba al ver los gráficos de VS de resultados por presión impulsiva, por presión convectiva, por fuerza inercial, por aceleración vertical del terreno y por presión hidrostática en las Figuras (5-1), (5-2), (5-3), (5-4) y (5-5) respectivamente, ya que también la forma que presentan estos resultados en relación a la altura para un determinado ángulo  $\theta$  son similares.

Se concluye que la solución analítica propuesta es confiable para el diseño de reservorios circulares apoyados, ya que se aprecian resultados muy similares a los obtenidos por el programa de análisis estructural SAP 2000, tanto para los resultados obtenidos por la fuerza hidrodinámica impulsiva, la fuerza hidrodinámica convectiva, la fuerza inercial, la fuerza por aceleración vertical del terreno y la presión hidrostática.

En esta investigación se concluye que los resultados del método analítico que son relevantes para el diseño del tanque son totalmente confiables, ya que estos resultados presentan diferencias pequeñas o muy pequeñas con los resultados obtenidos mediante elementos finitos, diferencias que no comprometen el diseño.

En esta investigación se concluye también que los resultados obtenidos del método analítico con mayor diferencia respecto a los resultados con elementos finitos son de nula relevancia para el diseño del tanque.

La solución propuesta para el modo axisimétrico resuelve el tanque frente a la fuerza aplicada por efectos de la aceleración vertical del terreno y también permite dar solución frente a la fuerza por presión hidrostática.

La solución propuesta para el modo viga permite dar solución al tanque frente a la fuerza hidrodinámica impulsiva, la fuerza hidrodinámica convectiva y la fuerza inercial.

La propuesta de solución analítica permite analizar también un tanque circular para diferentes condiciones de apoyo, por ejemplo, un tanque circular articulado en su base.

La solución analítica propuesta representa un aporte en la elaboración de una guía para el análisis y diseño de tanques en nuestro país.

En la solución analítica propuesta puede considerarse también un borde libre en el extremo superior del tanque, siempre que esto se considere importante, solo debe tenerse en cuenta la continuidad en la sección del espejo de agua, es decir, las cantidades relacionadas con las condiciones de borde deben coincidir en dicha sección.

Este trabajo se puede generalizar para tanques circulares apoyados de cualquier material que se asuma homogéneo e isotrópico y siempre bajo la normativa sísmica del país que corresponda. En caso de no contar con un procedimiento de cargas estáticas equivalentes, la norma ACI 350.3 siempre es una opción.

## RECOMENDACIONES

Se recomienda sistematizar la solución analítica propuesta usando algún lenguaje de programación para la ingeniería (Matlab u otro similar), lo cual facilitaría su aplicación.

Se recomienda estudiar la solución analítica considerando que el tanque se apoya sobre una base flexible (cimentación elástica) y cuán trascendente resulta esta particularidad para el diseño estructural.

Se recomienda estudiar la solución analítica considerando la propuesta de cargas dinámicas que ofrece la norma ACI350.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blaauwendraad, J., & Hoefakker J. H. (2014). *Structural Shell Analysis: Understanding and Application*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6701-0>
- Canny, I. K. (2018). *Seismic Response of Liquid Storage Tank in a Semi Analytical Method* [Master thesis, Delft University of Technology]. TU Delft Institutional Repository. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:bd1e88fc-bb20-4078-8733-040b89942a7c>
- Carrión, L., y Corpus, B. (2015). *Procedimiento de diseño estructural de un reservorio circular apoyado de concreto armado cumpliendo los parámetros de la propuesta de norma E030 2014 para la zona de Cajamarquilla* [Tesis de pregrado, Universidad Ricardo Palma]. Repositorio Institucional URP. <https://hdl.handle.net/20.500.14138/2182>
- Donnell, L. H., & United States National Advisory Committee for Aeronautics. (1933). *Stability of Thin-walled Tubes Under Torsion*. G.P.O. <http://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpSTWTTNA3/stability-of-thin>
- Farshad, M. (1992). *Design and Analysis of Shell Structures*. Kluwer Academic. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1227-9>
- Flügge, W. (1932). Die Stabilität der Kreiszyinderschale. *Ingenieur-Archiv*, 3(5), 463-506. <https://doi.org/10.1007/BF02079822>
- Flügge, W. (1973). *Stresses in Shells* (2<sup>nd</sup> ed). Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-88291-3>
- Hoefakker, J. H. (2010). *Theory Review for Cylindrical Shells and Parametric Study of Chimneys and Tanks* [Doctoral thesis, Delft University of Technology]. TU Delft Institutional Repository. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:b3287e0d-ae33-4d1f-91c6-7e7a6dd470a3>
- Houghton, D.S. & Johns, D.J. (1961). A Comparison of the Characteristic Equations in the Theory of Circular Cylindrical Shells. *Aeronautical Quarterly*, 12(3), 228-236. <https://doi.org/10.1017/S0001925900002080>
- Huisa, J. (2017). *Formulación de una Guía de Diseño para Mejorar la Respuesta Sísmica en Reservorios de Concreto Armado para Almacenamiento de Agua* [Tesis de maestría, Universidad Privada de Tacna]. Repositorio Institucional UPT. <http://hdl.handle.net/20.500.12969/622>
- Koiter, W. T. (1967). *On the Stability of Elastic Equilibrium*. National Aeronautics and Space Administration. <http://catalog.hathitrust.org/api/volumes/oclc/13765167.html>
- Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (4<sup>th</sup> ed). Dover.

- Love, A. E. H., & Darwin, G. H. (1888). XVI. The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. (A.), 179, 491–546. <https://doi.org/10.1098/rsta.1888.0016>
- Mangelsdorf, C. P. (1971). Koiter's Modified Energy Functional for Circular Cylindrical Shells. *AIAA Journal*, 9(10), 2098–2099. <https://doi.org/10.2514/3.6482>
- Mangelsdorf, C. P. (1973). The Morley-Koiter Equations for Thin-Walled Circular Cylindrical Shells: Part 1—General Solution for Symmetrical Shells of Uniform Thickness. *Journal of Applied Mechanics*, 40(4), 961–965. <https://doi.org/10.1115/1.3423194>
- Mangelsdorf, C. P. (1973). The Morley-Koiter Equations for Thin-Walled Circular Cylindrical Shells: Part 2—Solution for a Line Loaded Cylinder With Close-Spaced Circumferential Grooves. *Journal of Applied Mechanics*, 40(4), 966–970. <https://doi.org/10.1115/1.3423195>
- Morley, L. S. (1959). An Improvement on Donnell's Aproximaiton for Thin-Walled Circular Cylinders. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 12(1), 89-99. <https://doi.org/10.1093/qjmam/12.1.89>
- Niordson, F. I. (1985). *Shell Theory*. Elsevier Science. <https://www.sciencedirect.com/science/book/9780444876409>
- Radwańska, M., Stankiewicz, A., Wosatko, A., & Pamin, J. (2017). *Plate and shell structures: selected analytical and finite element solutions*. John Wiley & Sons, Inc. <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=1441010>
- Schöllhammer, D., & Fries, T. P. (2019). A Unified Approach for Shell Analysis on Explicitly and Implicitly Defined Surfaces. *Proceedings of IASS Annual Symposia, 2019*(18), 1–8. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:208781216>
- Standards Perú. (2018). *Norma Técnica de Edificación: E.030 Diseño Sismorresistente*. Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento.
- Standards The United States of America. (2006). *Seismic Design of Liquid-Containing Concrete Structures and Commentary (ACI 350.3-06): An ACI Standard* (First printing, November 2006). American Concrete Institute.
- Suarez, H. (2014). Análisis y diseño de tanques y tuberías enterradas bajo cargas sísmicas [Tesis de pregrado, Pontificia Universidad Católica del Ecuador]. Repositorio Institucional PUCE. <https://repositorio.puce.edu.ec/handle/123456789/26144>
- Ugural, A. C. (2018). *Plates and Shells: Theory and Analysis* (4<sup>th</sup> ed). CRC Press, Taylor & Francis Group. <http://doi.org/10.1201/9781315104621>

## ANEXOS

Anexo 1. Carga sísmica estática en tanques circulares con uso conjunto de las normas E.030 y ACI 350.3 .....	124
Anexo 2. Hojas de cálculo .....	130

**ANEXO 1:**

**CARGA SÍSMICA ESTÁTICA EN TANQUES CIRCULARES CON USO  
CONJUNTO DE LAS NORMAS E.030 Y ACI 350.3**

## DATOS GENERALES

Para obtener la carga sísmica estática que actúa sobre un tanque circular de concreto armado siguiendo las recomendaciones de la norma ACI350.3-06 es necesario contar inicialmente con datos relacionados a la geometría de la estructura y a los materiales involucrados en el análisis. En el Cuadro A-1 se muestran los datos generales involucrados con el desarrollo numérico de las cargas mencionadas.

Cuadro A-1: Datos básicos relacionados con la estructura

Fuente: Elaboración propia

$H_L =$	5.0	$m$	Altura de diseño del líquido almacenado
$H_w =$	5.0	$m$	Altura del muro o cuba
$D_i =$	19.60	$m$	Diámetro interior del tanque
$t_w =$	0.40	$m$	Espesor del muro
$\gamma_L =$	1.0	$t/m^3$	Peso específico del líquido almacenado
$\gamma_c =$	2.4	$t/m^3$	Peso específico del concreto
$E_c =$	2509980.1	$t/m^2$	Módulo de elasticidad del concreto
$Vol. =$	1509	$m^3$	Volumen del líquido almacenado

## MODELO DINÁMICO

El modelo dinámico de la estructura se rige a lo establecido en la norma ACI350.3-06 y a su vez en el modelo propuesto por Housner en 1963. En el Cuadro A-2 se muestran las características dinámicas obtenidas para la estructura de almacenamiento ya definida.

Cuadro A-2: Propiedades dinámicas (ACI350.3-06)

Fuente: Elaboración propia

$D_i/H_L =$	3.92	–	Relación diámetro/altura del líquido almacenado	-
$W_L =$	1508.6	$t$	Peso total del líquido almacenado	-
$W_w =$	301.6	$t$	Peso del muro del tanque	-
$W_i =$	443.4	$t$	Peso equivalente del componente impulsivo del líquido almacenado	(9-15)
$W_c =$	999.2	$t$	Peso equivalente del componente convectivo del líquido almacenado	(9-16)

$C_w =$	0.14	–	Coeficiente para determinar la frecuencia fundamental del sistema tanque-líquido	Figura 9.3.4 (a)
$C_l =$	0.28	–	Coeficiente para determinar la frecuencia fundamental del sistema tanque-líquido	(9-24)
$\omega_i =$	177.88	rad/s	Frecuencia circular del modo impulsivo de vibración	(9-23)
$T_i =$	0.0353	s	Período fundamental de oscilación del tanque (más el componente impulsivo del contenido)	(9-25)
$\lambda =$	5.15	–	Coeficiente para determinar la frecuencia circular convectiva	(9-29)
$\omega_c =$	1.16	rad/s	Frecuencia circular de oscilación del primer modo (convectivo) de chapoteo	(9-28)
$T_c =$	5.40	s	Período natural del primer modo (convectivo) de chapoteo	(9-30)
$T_v =$	0.0313	s	Período natural de vibración del movimiento vertical del líquido	(9-31)
$\varepsilon =$	0.51	–	Coeficiente de masa efectiva	(9-45)

## CARGAS ESTÁTICAS DE DISEÑO SÍSMICO

### a) Parámetros sísmicos

Los parámetros sísmicos para el diseño de tanques circulares de concreto armado apoyado sometidos a cargas sísmicas se rigen a la norma ACI350.3-06 y la norma E.030. En el Cuadro A-3 se muestran los parámetros sísmicos para la estructura de almacenamiento ya definida.

Cuadro A-3: Parámetros sísmicos

Fuente: Elaboración propia

$Z =$	0.45	–	Factor de zona	E030 Tabla N°1
$I = U =$	1.50	–	Factor de importancia	ACI 350.3-06 Tabla 4.4.1 (a)
$T_p =$	0.60	s	Período que define la plataforma del factor C	E030 Tabla N° 4
$T_L =$	2.00	s	Período que define el inicio de la zona del factor C con desplazamiento constante	E030 Tabla N° 4
$C_i =$	2.50	–	Factor de amplificación sísmica para el tanque y el componente impulsivo del líquido almacenado	E030 Capítulo 2 Artículo 14

$C_c =$	0.10	–	Factor de amplificación sísmica para el componente convectivo del líquido almacenado	E030 Capítulo 2 Artículo 14
$S =$	1.05	–	Factor de suelo	E030 Tabla N° 3
$R_i =$	2.00	–	Factor de modificación de respuesta para el tanque y el componente impulsivo de la aceleración del líquido almacenado	ACI 350.3-06 Tabla 4.4.1 (b)
$R_c =$	1.00	–	Factor de modificación de respuesta para el componente convectivo de la aceleración del líquido almacenado	ACI 350.3-06 Tabla 4.4.1 (b)
$C_v =$	2.50	–	Factor de amplificación sísmica para efectos de aceleración vertical	E030 Capítulo 2 Artículo 14

b) Aceleración espectral efectiva

En el Cuadro A-4 se muestran los valores de aceleración espectral efectiva obtenidos a partir de los espectros inelásticos de respuesta para el componente impulsivo, el componente convectivo y la aceleración vertical respectivamente.

*Cuadro A-4: Valores de aceleración espectral efectiva  
Fuente: Elaboración propia*

$S_{ai}/g =$	0.886	–	Aceleración espectral efectiva horizontal para el tanque y el componente impulsivo del líquido almacenado
$S_{ac}/g =$	0.073	–	Aceleración espectral efectiva horizontal para el componente convectivo del líquido almacenado
$S_{av}/g =$	0.591	–	Aceleración espectral efectiva para efectos de aceleración vertical

c) Fuerzas estáticas horizontales

Las cargas horizontales estáticas por sismo se calculan multiplicando los valores de aceleración espectral efectiva horizontal por el peso efectivo correspondiente. Estas cargas se muestran en el Cuadro A-5.

Cuadro A-5: Fuerzas sísmicas estáticas (ACI350.3-06)

Fuente: Elaboración propia

$P_w =$	134.96	$t$	Fuerza de inercia lateral del muro	ACI 350.3-06 (4-1)
$P_i =$	392.82	$t$	Fuerza hidrodinámica impulsiva del líquido almacenado	ACI 350.3-06 (4-3)
$P_c =$	72.80	$t$	Fuerza hidrodinámica convectiva del líquido almacenado	ACI 350.3-06 (4-4)

d) Distribución de la fuerza sísmica sobre el muro circular

La distribución vertical, por metro de altura del muro, de las fuerzas dinámicas que actúan sobre la mitad del muro se muestra en el Cuadro A-6.

Cuadro A-6: Distribución vertical lineal de fuerzas dinámicas (ACI350.3-06)

Fuente: Elaboración propia

$y/H_w$	$y$	$P_{iy}$	$P_{cy}$	$P_{wy}$
-	$m$	$t/m$	$t/m$	$t/m$
0.00	0.00	68.74	5.81	13.50
0.10	0.50	62.85	6.10	13.50
0.20	1.00	56.96	6.40	13.50
0.30	1.50	51.07	6.69	13.50
0.40	2.00	45.17	6.99	13.50
0.50	2.50	39.28	7.28	13.50
0.60	3.00	33.39	7.57	13.50
0.70	3.50	27.50	7.87	13.50
0.80	4.00	21.61	8.16	13.50
0.90	4.50	15.71	8.46	13.50
1.00	5.00	9.82	8.75	13.50

La distribución de la presión dinámica, por metro cuadrado del muro, para una sección vertical orientada en la dirección del sismo ( $\theta = 0^\circ$ ) se muestra en el

Cuadro A-7. En el mismo cuadro también se muestran la presión hidrostática y la presión por aceleración vertical del terreno, las cuales no varían con el ángulo  $\theta$ .

Cuadro A-7: Distribución superficial de presiones (ACI350.3-06)

Fuente: Elaboración propia

$y/H_w$	$y$	$p_{hy}$	$p_{vy}$	$p_{iy}$	$p_{cy}$	$p_{wy}$
-	m	$t/m^2$	$t/m^2$	$t/m^2$	$t/m^2$	$t/m^2$
		$\theta = [0, 2\pi]$	$\theta = [0, 2\pi]$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 0^\circ$
0.00	0.00	5.00	2.95	4.47	0.34	0.44
0.10	0.50	4.50	2.66	4.08	0.35	0.44
0.20	1.00	4.00	2.36	3.70	0.37	0.44
0.30	1.50	3.50	2.07	3.32	0.39	0.44
0.40	2.00	3.00	1.77	2.93	0.40	0.44
0.50	2.50	2.50	1.48	2.55	0.42	0.44
0.60	3.00	2.00	1.18	2.17	0.44	0.44
0.70	3.50	1.50	0.89	1.79	0.45	0.44
0.80	4.00	1.00	0.59	1.40	0.47	0.44
0.90	4.50	0.50	0.30	1.02	0.49	0.44
1.00	5.00	0.00	0.00	0.64	0.51	0.44

**ANEXO 2:**  
**HOJAS DE CÁLCULO**

## A) PARA LA FUERZA HIDRODINÁMICA CONVECTIVA:

**SOLUCION COMPLETA PARA UNA RESPUESTA DEL TIPO VIGA (n=1)**

**DATOS DE ENTRADA**

D = 20.00 m     $\gamma_1 = 0.01$      $f'_c = 2800$  t/m<sup>2</sup>  
a = 10.00 m     $a_1 = 1.01$     E = 2509980 t/m<sup>2</sup>  
 $t_w = 0.40$  m     $b_1 = 0.99$      $D_m = 1045825$  t/m  
 $v = 0.20$      $D_b = 13944$  t.m<sup>2</sup>/m  
 $\beta = 0.65$  m<sup>2</sup>     $H_w = L = 5.00$  m

**CARGAS DE SUPERFICIE**

$p_n(x, \theta) \Rightarrow \frac{p_{n1}^{(2)}}{L} (x/L) \cos \theta + \frac{p_{n1}^{(1)}}{L} \cos \theta$  t/m<sup>2</sup>  
Normal  $\Rightarrow \frac{-0.17}{L} (x/L) \cos \theta + \frac{0.51}{L} \cos \theta$  t/m<sup>2</sup>

$p_t(x, \theta) \Rightarrow \frac{p_{t1}^{(2)}}{L} (x/L) \sin \theta + \frac{p_{t1}^{(1)}}{L} \sin \theta$  t/m<sup>2</sup>  
Tangente  $\Rightarrow \frac{0}{L} (x/L) \sin \theta + \frac{0}{L} \sin \theta$  t/m<sup>2</sup>

$p_a(x, \theta) \Rightarrow \frac{p_{a1}^{(2)}}{L} (x/L) \cos \theta + \frac{p_{a1}^{(1)}}{L} \cos \theta$  t/m<sup>2</sup>  
Axial  $\Rightarrow \frac{0}{L} (x/L) \cos \theta + \frac{0}{L} \cos \theta$  t/m<sup>2</sup>

**CONDICIONES DE BORDE**

x = 0 m (top) (apoyo libre)

SENO = 0.00	COS = 1.00	EXP(-) = 1	EXP(+) = 1
x <sup>5</sup> /120 = 0.00	x <sup>4</sup> /24 = 0.00	x <sup>3</sup> /6 = 0.00	x <sup>2</sup> /2 = 0.00

$n_{xx} / D_m = 1.33E-05$  C1 + -0.001 C2 + 1.33E-05 C3 + 0.001 C4 + 0.000 C5 + -0.096 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 + 0.000 = 0  
 $n_{xy} / (1-v) = -9650.25$  C1 + -9627.66 C2 + 9650.25 C3 + -9627.66 C4 + 125505 C5 + 0.000 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 + -0.001 = 0  
 $m_{xx} / D_b = -0.554$  C1 + -0.552 C2 + 0.554 C3 + -0.552 C4 + -0.0007 C5 + 0.000 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 + 0.000 = 0  
 $\phi_x / D_b = -0.010$  C1 + 0.849 C2 + -0.010 C3 + -0.849 C4 + 0.000 C5 + -0.010 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 + 1.02E-06 = 0

x = 5.00 m (bottom) (apoyo fijo)

SENO = -0.10	COS = -1.00	EXP(-) = 0.0378	EXP(+) = 26.4703
x <sup>5</sup> /120 = 26.04	x <sup>4</sup> /24 = 26.04	x <sup>3</sup> /6 = 20.83	x <sup>2</sup> /2 = 12.50

$u_x = -4.73E-04$  C1 + -6.73E-04 C2 + 0.415 C3 + -0.399 C4 + -0.325 C5 + -0.500 C6 + -1.000 C7 + 0.000 C8 + -5.20E-06 = 0  
 $u_y = 1.00E-04$  C1 + -9.74E-04 C2 + -0.061 C3 + 0.684 C4 + 1.079 C5 + 2.075 C6 + -0.500 C7 + -1.000 C8 + 1.23E-05 = 0  
 $u_z = -0.0376$  C1 + -0.0036 C2 + -26.348 C3 + -2.5386 C4 + -0.979 C5 + -1.875 C6 + 0.500 C7 + 1.000 C8 + 2.27E-05 = 0  
 $\phi_x = -0.0270$  C1 + 0.0220 C2 + 15.61974 C3 + 18.7246 C4 + 0.188 C5 + -0.050 C6 + -0.100 C7 + 0.000 C8 + 7.52E-06 = 0

**CONSTANTES DE INTEGRACIÓN**

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.3E-05	-1.1E-03	1.3E-05	1.1E-03	0.0E+00	-9.6E-02	0.0E+00	0.0E+00
-9.7E+03	-9.6E+03	9.7E+03	-9.6E+03	1.3E+05	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
-5.5E-01	-5.5E-01	5.5E-01	-5.5E-01	-6.8E-04	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
-1.0E-02	8.5E-01	-1.0E-02	-8.5E-01	0.0E+00	-1.0E-02	0.0E+00	0.0E+00
-4.7E-04	-6.7E-04	4.2E-01	-4.0E-01	-3.3E-01	-5.0E-01	-1.0E+00	0.0E+00
1.0E-04	-9.7E-04	-6.1E-02	6.8E-01	1.1E+00	2.1E+00	-5.0E-01	-1.0E+00
-3.8E-02	-3.6E-03	-2.6E+01	-2.5E+00	-9.8E-01	-1.9E+00	5.0E-01	1.0E+00
-2.7E-02	2.2E-02	1.6E+01	1.9E+01	1.9E-01	-5.0E-02	-1.0E-01	0.0E+00

$\Rightarrow$

C1	-0.09734	2.74E-07	-1.77755	-1.1517	0.011457	-0.10431	-0.10431	-0.11457	0.00E+00
C2	-0.05555	-1.2E-07	-0.02364	1.16042	-0.00548	0.031357	0.031357	0.054819	9.44E-04
C3	-0.0836	3.86E-08	0.002193	0.001636	0.00038	-0.04004	-0.04004	-0.0038	1.22E-07
C4	0.069	-1.2E-07	-0.00272	-0.00437	-0.00562	0.033058	0.033058	0.056214	-1.02E-06
C5	0.000	7.97E-06	-0.13887	0	0	0	0	0	5.20E-06
C6	-10.415	0	-1E-16	-0.01389	0	0	-6.5E-18	-6.5E-18	-1.23E-05
C7	5.145	-2.5E-06	0.047985	0.009134	-0.9976	-0.0298	-0.0298	-0.02401	-2.27E-05
C8	-24.132	9.77E-06	-0.176	-0.03772	0.49494	-0.96008	0.039918	0.050599	-7.52E-06

$C^T =$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
5.5E-06	-2.7E-06	1.4E-06	-1.6E-06	-9.4E-09	1.4E-08	-4.0E-06	1.3E-05

• RESULTADOS (θ = 0)

x/L	x	exp (-)	exp (+)	seno	coseno	u <sub>z1</sub> (x)	u <sub>z1</sub> '(x)	u <sub>z1</sub> ''(x)	u <sub>z1</sub> '''(x)	u <sub>z1</sub> ''''(x)	x^5/120	x^4/24	x^3/6	x^2/2
0.00	0.00	1.000	1.000	0.000	1.000	6.96E-06	-5.48E-06	1.02E-06	-2.10E-07	-4.99E-06	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	0.25	0.849	1.178	0.161	0.987	5.62E-06	-5.25E-06	8.18E-07	-1.34E-06	-4.03E-06	0.0000	0.0002	0.0026	0.0313
0.10	0.50	0.721	1.388	0.318	0.948	4.32E-06	-5.10E-06	3.68E-07	-2.23E-06	-3.11E-06	0.0003	0.0026	0.0208	0.1250
0.15	0.75	0.612	1.635	0.467	0.884	3.06E-06	-5.08E-06	-2.77E-07	-2.89E-06	-2.21E-06	0.0020	0.0132	0.0703	0.2813
0.20	1.00	0.519	1.926	0.603	0.798	1.77E-06	-5.25E-06	-1.06E-06	-3.33E-06	-1.30E-06	0.0083	0.0417	0.1667	0.5000
0.25	1.25	0.441	2.268	0.724	0.690	4.16E-07	-5.62E-06	-1.92E-06	-3.53E-06	-3.38E-07	0.0254	0.1017	0.3255	0.7813
0.30	1.50	0.374	2.672	0.826	0.564	-1.06E-06	-6.21E-06	-2.81E-06	-3.49E-06	7.06E-07	0.0633	0.2109	0.5625	1.1250
0.35	1.75	0.318	3.148	0.906	0.424	-2.71E-06	-7.02E-06	-3.64E-06	-3.17E-06	1.88E-06	0.1368	0.3908	0.8932	1.5313
0.40	2.00	0.270	3.708	0.962	0.272	-4.58E-06	-8.02E-06	-4.36E-06	-2.54E-06	3.21E-06	0.2667	0.6667	1.3333	2.0000
0.45	2.25	0.229	4.368	0.994	0.114	-6.73E-06	-9.18E-06	-4.88E-06	-1.55E-06	4.75E-06	0.4805	1.0679	1.8984	2.5313
0.50	2.50	0.194	5.145	0.999	-0.048	-9.18E-06	-1.04E-05	-5.10E-06	-1.46E-07	6.51E-06	0.8138	1.6276	2.6042	3.1250
0.55	2.75	0.165	6.061	0.978	-0.208	-1.19E-05	-1.17E-05	-4.92E-06	1.73E-06	8.51E-06	1.3106	2.3830	3.4661	3.7813
0.60	3.00	0.140	7.139	0.932	-0.363	-1.50E-05	-1.29E-05	-4.20E-06	4.13E-06	1.07E-05	2.0250	3.3750	4.5000	4.5000
0.65	3.25	0.119	8.410	0.861	-0.509	-1.84E-05	-1.37E-05	-2.81E-06	7.11E-06	1.32E-05	3.0216	4.6486	5.7214	5.2813
0.70	3.50	0.101	9.907	0.768	-0.641	-2.19E-05	-1.42E-05	-5.90E-07	1.07E-05	1.57E-05	4.3768	6.2526	7.1458	6.1250
0.75	3.75	0.086	11.670	0.654	-0.756	-2.54E-05	-1.40E-05	2.61E-06	1.50E-05	1.83E-05	6.1798	8.2397	8.7891	7.0313
0.80	4.00	0.073	13.747	0.524	-0.852	-2.88E-05	-1.28E-05	6.95E-06	1.99E-05	2.08E-05	8.5333	10.6667	10.6667	8.0000
0.85	4.25	0.062	16.194	0.380	-0.925	-3.17E-05	-1.04E-05	1.26E-05	2.54E-05	2.31E-05	11.5548	13.5939	12.7943	9.0313
0.90	4.50	0.052	19.076	0.226	-0.974	-3.38E-05	-6.37E-06	1.97E-05	3.14E-05	2.47E-05	15.3773	17.0859	15.1875	10.1250
0.95	4.75	0.045	22.471	0.066	-0.998	-3.47E-05	-4.03E-07	2.83E-05	3.77E-05	2.56E-05	20.1505	21.2111	17.8620	11.2813
1.00	5.00	0.038	26.470	-0.096	-0.995	-3.38E-05	7.92E-06	3.85E-05	4.40E-05	2.51E-05	26.0417	26.0417	20.8333	12.5000

x/L	x	Altura	m <sub>xx(0)</sub>	m <sub>xx</sub>	m <sub>θθ</sub>	n <sub>θθ(0)</sub>	n <sub>θθ</sub>	n <sub>xx(0)</sub>	n <sub>xx</sub>	V <sub>x(0)</sub>	V <sub>x</sub>	V* <sub>x(0)</sub>	V* <sub>x</sub>	V <sub>θ(0)</sub>	V <sub>θ</sub>	n <sub>xθ(0)</sub>	n <sub>xθ</sub>	m <sub>xθ(0)</sub>	m <sub>xθ</sub>
0.00	0.00	5.00	1.02E-06	0.000	0.000	4.88E-06	5.796	-1.4E-09	0.000	-9.5E-08	0.001	-1.2E-07	0.000	-1.22E-08	0.001	-9.41E-10	0.002	-3.4E-07	-0.010
0.05	0.25	4.75	9.99E-07	0.003	0.001	4.80E-06	5.577	-2.8E-09	-0.002	-9.6E-08	0.017	-1.2E-07	0.016	-1.20E-08	0.001	1.26E-07	0.145	-3.4E-07	-0.010
0.10	0.50	4.50	9.81E-07	0.009	0.002	4.71E-06	5.363	-7.3E-09	-0.007	-9.7E-08	0.029	-1.2E-07	0.028	-1.18E-08	0.000	2.53E-07	0.285	-3.3E-07	-0.009
0.15	0.75	4.25	9.64E-07	0.017	0.003	4.63E-06	5.153	-1.5E-08	-0.016	-9.8E-08	0.038	-1.2E-07	0.037	-1.16E-08	0.000	3.80E-07	0.422	-3.3E-07	-0.009
0.20	1.00	4.00	9.46E-07	0.028	0.006	4.55E-06	4.941	-2.5E-08	-0.028	-9.9E-08	0.044	-1.3E-07	0.044	-1.13E-08	-0.002	5.07E-07	0.555	-3.3E-07	-0.009
0.25	1.25	3.75	9.27E-07	0.040	0.008	4.47E-06	4.722	-3.8E-08	-0.043	-1.0E-07	0.047	-1.3E-07	0.046	-1.11E-08	-0.003	6.34E-07	0.686	-3.3E-07	-0.010
0.30	1.50	3.50	9.09E-07	0.052	0.010	4.39E-06	4.492	-5.4E-08	-0.061	-1.0E-07	0.047	-1.3E-07	0.046	-1.09E-08	-0.004	7.61E-07	0.813	-3.2E-07	-0.010
0.35	1.75	3.25	8.9E-07	0.063	0.013	4.31E-06	4.243	-7.3E-08	-0.081	-1.0E-07	0.042	-1.3E-07	0.041	-1.06E-08	-0.005	8.88E-07	0.936	-3.2E-07	-0.011
0.40	2.00	3.00	8.71E-07	0.073	0.015	4.23E-06	3.972	-9.4E-08	-0.105	-1.0E-07	0.033	-1.3E-07	0.032	-1.04E-08	-0.006	1.02E-06	1.054	-3.2E-07	-0.012
0.45	2.25	2.75	8.51E-07	0.080	0.016	4.15E-06	3.673	-1.2E-07	-0.131	-1.0E-07	0.019	-1.3E-07	0.018	-1.01E-08	-0.007	1.14E-06	1.168	-3.2E-07	-0.014
0.50	2.50	2.50	8.32E-07	0.083	0.017	4.06E-06	3.342	-1.5E-07	-0.159	-1.0E-07	-0.001	-1.3E-07	-0.002	-9.86E-09	-0.007	1.27E-06	1.276	-3.2E-07	-0.015
0.55	2.75	2.25	8.12E-07	0.080	0.016	3.98E-06	2.979	-1.7E-07	-0.189	-1.1E-07	-0.027	-1.3E-07	-0.029	-9.59E-09	-0.007	1.40E-06	1.377	-3.1E-07	-0.017
0.60	3.00	2.00	7.91E-07	0.070	0.014	3.90E-06	2.583	-2.1E-07	-0.221	-1.1E-07	-0.060	-1.3E-07	-0.062	-9.32E-09	-0.006	1.52E-06	1.472	-3.1E-07	-0.018
0.65	3.25	1.75	7.71E-07	0.050	0.010	3.82E-06	2.160	-2.4E-07	-0.255	-1.1E-07	-0.102	-1.3E-07	-0.104	-9.05E-09	-0.004	1.65E-06	1.557	-3.1E-07	-0.019
0.70	3.50	1.50	7.5E-07	0.019	0.004	3.74E-06	1.717	-2.8E-07	-0.290	-1.1E-07	-0.153	-1.3E-07	-0.155	-8.77E-09	-0.001	1.78E-06	1.635	-3.1E-07	-0.020
0.75	3.75	1.25	7.29E-07	-0.026	-0.005	3.66E-06	1.268	-3.2E-07	-0.326	-1.1E-07	-0.212	-1.3E-07	-0.214	-8.49E-09	0.003	1.90E-06	1.703	-3.1E-07	-0.019
0.80	4.00	1.00	7.08E-07	-0.087	-0.017	3.58E-06	0.833	-3.6E-07	-0.363	-1.1E-07	-0.280	-1.3E-07	-0.282	-8.20E-09	0.009	2.03E-06	1.762	-3.0E-07	-0.018
0.85	4.25	0.75	6.86E-07	-0.166	-0.033	3.49E-06	0.439	-4.0E-07	-0.401	-1.1E-07	-0.357	-1.3E-07	-0.358	-7.90E-09	0.017	2.16E-06	1.813	-3.0E-07	-0.016
0.90	4.50	0.50	6.65E-07	-0.265	-0.053	3.41E-06	0.120	-4.5E-07	-0.438	-1.1E-07	-0.440	-1.4E-07	-0.441	-7.61E-09	0.026	2.28E-06	1.857	-3.0E-07	-0.012
0.95	4.75	0.25	6.43E-07	-0.386	-0.077	3.33E-06	-0.078	-4.9E-07	-0.476	-1.1E-07	-0.527	-1.4E-07	-0.528	-7.30E-09	0.039	2.41E-06	1.896	-3.0E-07	-0.005
1.00	5.00	0.00	6.21E-07	-0.529	-0.106	3.25E-06	-0.103	-5.4E-07	-0.514	-1.1E-07	-0.615	-1.4E-07	-0.615	-7.00E-09	0.053	2.54E-06	1.935	-3.0E-07	0.004

**B) PARA LA FUERZA HIDRODINÁMICA IMPULSIVA:**

**SOLUCION COMPLETA PARA UNA RESPUESTA DEL TIPO VIGA (n=1)**

**DATOS DE ENTRADA**

D =	20.00	m	$\gamma_1 =$	0.01	$f'_c =$	2800	t/m <sup>2</sup>
a =	10.00	m	$a_1 =$	1.01	E =	2509980.1	t/m <sup>2</sup>
$t_w =$	0.40	m	$b_1 =$	0.99	$D_m =$	1045825.0	t/m
$v =$	0.20				$D_b =$	13944.3	t.m <sup>2</sup> /m
$\beta =$	0.65	m <sup>2</sup>	$H_w = L =$	5.00			m

**CARGAS DE SUPERFICIE**

$p_n(x, \theta)$	$\Rightarrow$	$\frac{p_{n1}^{(2)}}{3.83} (x/L) \cos \theta$	+	$\frac{p_{n1}^{(1)}}{0.64} \cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
Normal	$\Rightarrow$	$\frac{p_{n1}^{(2)}}{3.83} (x/L) \cos \theta$	+	$\frac{p_{n1}^{(1)}}{0.64} \cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
$p_t(x, \theta)$	$\Rightarrow$	$\frac{p_{t1}^{(2)}}{0} (x/L) \sin \theta$	+	$\frac{p_{t1}^{(1)}}{0} \sin \theta$	t/m <sup>2</sup>
Tangente	$\Rightarrow$	$\frac{p_{t1}^{(2)}}{0} (x/L) \sin \theta$	+	$\frac{p_{t1}^{(1)}}{0} \sin \theta$	t/m <sup>2</sup>
$p_a(x, \theta)$	$\Rightarrow$	$\frac{p_{a1}^{(2)}}{0} (x/L) \cos \theta$	+	$\frac{p_{a1}^{(1)}}{0} \cos \theta$	t/m <sup>2</sup>
Axial	$\Rightarrow$	$\frac{p_{a1}^{(2)}}{0} (x/L) \cos \theta$	+	$\frac{p_{a1}^{(1)}}{0} \cos \theta$	t/m <sup>2</sup>

**CONDICIONES DE BORDE**

x =	0	m	(top)	(apoyo libre)	SENO =	0.00	COS =	1.00	EXP(-) =	1	EXP(+) =	1															
					$x^5/120 =$	0.00	$x^4/24 =$	0.00	$x^3/6 =$	0.00	$x^2/2 =$	0.00															
$n_{xx} / D_m =$	1.33E-05	C1	+	-0.001	C2	+	1.33E-05	C3	+	0.001	C4	+	0.000	C5	+	-0.096	C6	+	0.000	C7	+	0.000	C8	+	0.000	=	0
$n_{\theta\theta} / (1-\nu) =$	-9650.25	C1	+	-9627.66	C2	+	9650.25	C3	+	-9627.66	C4	+	125505	C5	+	0.000	C6	+	0.000	C7	+	0.000	C8	+	0.021	=	0
$m_{\theta x} / D_b =$	-0.554	C1	+	-0.552	C2	+	0.554	C3	+	-0.552	C4	+	-0.0007	C5	+	0.000	C6	+	0.000	C7	+	0.000	C8	+	0.000	=	0
$m_{xx} / D_b =$	-0.010	C1	+	0.849	C2	+	-0.010	C3	+	-0.849	C4	+	0.000	C5	+	-0.010	C6	+	0.000	C7	+	0.000	C8	+	1.27E-06	=	0
x =	5.00	m	(bottom)	(apoyo fijo)	SENO =	-0.10	COS =	-1.00	EXP(-) =	0.0378	EXP(+) =	26.4703															
					$x^5/120 =$	26.04	$x^4/24 =$	26.04	$x^3/6 =$	20.83	$x^2/2 =$	12.50															
$u_x =$	-4.73E-04	C1	+	-6.73E-04	C2	+	0.415	C3	+	-0.399	C4	+	-0.325	C5	+	-0.500	C6	+	-1.000	C7	+	0.000	C8	+	-2.88E-05	=	0
$u_\theta =$	1.00E-04	C1	+	-9.74E-04	C2	+	-0.061	C3	+	0.684	C4	+	1.079	C5	+	2.075	C6	+	-0.500	C7	+	-1.000	C8	+	5.21E-05	=	0
$u_y =$	-0.0376	C1	+	-0.0036	C2	+	-26.348	C3	+	-2.5386	C4	+	-0.979	C5	+	-1.875	C6	+	0.500	C7	+	1.000	C8	+	3.98E-04	=	0
$\varphi_x =$	-0.0270	C1	+	0.0220	C2	+	15.61974	C3	+	18.7246	C4	+	0.188	C5	+	-0.050	C6	+	-0.100	C7	+	0.000	C8	+	-5.12E-05	=	0

**CONSTANTES DE INTEGRACIÓN**

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8				
1.3E-05	-1.1E-03	1.3E-05	1.1E-03	0.0E+00	-9.6E-02	0.0E+00	0.0E+00	C1	0.00E+00		
-9.7E+03	-9.6E+03	9.7E+03	-9.6E+03	1.3E+05	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	C2	-2.13E-02		
-5.5E-01	-5.5E-01	5.5E-01	-5.5E-01	-6.8E-04	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	C3	-2.75E-06		
-1.0E-02	8.5E-01	-1.0E-02	-8.5E-01	0.0E+00	-1.0E-02	0.0E+00	0.0E+00	x	C4	=	-1.27E-06
-4.7E-04	-6.7E-04	4.2E-01	-4.0E-01	-3.3E-01	-5.0E-01	-1.0E+00	0.0E+00	C5	2.88E-05		
1.0E-04	-9.7E-04	-6.1E-02	6.8E-01	1.1E+00	2.1E+00	-5.0E-01	-1.0E+00	C6	-5.21E-05		
-3.8E-02	-3.6E-03	-2.6E+01	-2.5E+00	-9.8E-01	-1.9E+00	5.0E-01	1.0E+00	C7	-3.98E-04		
-2.7E-02	2.2E-02	1.6E+01	1.9E+01	1.9E-01	-5.0E-02	-1.0E-01	0.0E+00	C8	5.12E-05		
C <sup>T</sup> =	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8			
	4.8E-05	-1.3E-05	1.8E-05	-1.2E-05	2.1E-07	1.8E-08	-1.7E-05	5.1E-05			

● RESULTADOS PARA UN CORTE VERTICAL DE MAXIMA DEMANDA

x/L	x	exp (-)	exp (+)	seno	coseno	$u_{z1}(x)$	$u_{z1}'(x)$	$u_{z1}''(x)$	$u_{z1}'''(x)$	$u_{z1}^{(4)}(x)$	$x^5/120$	$x^4/24$	$x^3/6$	$x^2/2$
0.00	0.00	1.000	1.000	0.000	1.000	6.56E-05	-3.58E-05	1.27E-06	2.17E-06	-4.72E-05	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	0.25	0.849	1.178	0.161	0.987	5.67E-05	-3.55E-05	4.10E-07	-8.82E-06	-4.08E-05	0.0000	0.0002	0.0026	0.0313
0.10	0.50	0.721	1.388	0.318	0.948	4.78E-05	-3.58E-05	-3.00E-06	-1.82E-05	-3.45E-05	0.0003	0.0026	0.0208	0.1250
0.15	0.75	0.612	1.635	0.467	0.884	3.87E-05	-3.72E-05	-8.57E-06	-2.60E-05	-2.80E-05	0.0020	0.0132	0.0703	0.2813
0.20	1.00	0.519	1.926	0.603	0.798	2.90E-05	-4.02E-05	-1.59E-05	-3.22E-05	-2.12E-05	0.0083	0.0417	0.1667	0.5000
0.25	1.25	0.441	2.268	0.724	0.690	1.84E-05	-4.53E-05	-2.45E-05	-3.66E-05	-1.37E-05	0.0254	0.1017	0.3255	0.7813
0.30	1.50	0.374	2.672	0.826	0.564	6.19E-06	-5.26E-05	-3.40E-05	-3.90E-05	-5.14E-06	0.0633	0.2109	0.5625	1.1250
0.35	1.75	0.318	3.148	0.906	0.424	-8.12E-06	-6.23E-05	-4.38E-05	-3.90E-05	4.97E-06	0.1368	0.3908	0.8932	1.5313
0.40	2.00	0.270	3.708	0.962	0.272	-2.52E-05	-7.45E-05	-5.33E-05	-3.63E-05	1.71E-05	0.2667	0.6667	1.3333	2.0000
0.45	2.25	0.229	4.368	0.994	0.114	-4.55E-05	-8.89E-05	-6.17E-05	-3.03E-05	3.16E-05	0.4805	1.0679	1.8984	2.5313
0.50	2.50	0.194	5.145	0.999	-0.048	-6.98E-05	-1.05E-04	-6.81E-05	-2.03E-05	4.89E-05	0.8138	1.6276	2.6042	3.1250
0.55	2.75	0.165	6.061	0.978	-0.208	-9.82E-05	-1.23E-04	-7.15E-05	-5.61E-06	6.93E-05	1.3106	2.3830	3.4661	3.7813
0.60	3.00	0.140	7.139	0.932	-0.363	-1.31E-04	-1.41E-04	-7.05E-05	1.46E-05	9.30E-05	2.0250	3.3750	4.5000	4.5000
0.65	3.25	0.119	8.410	0.861	-0.509	-1.68E-04	-1.57E-04	-6.36E-05	4.12E-05	1.20E-04	3.0216	4.6486	5.7214	5.2813
0.70	3.50	0.101	9.907	0.768	-0.641	-2.10E-04	-1.72E-04	-4.93E-05	7.49E-05	1.50E-04	4.3768	6.2526	7.1458	6.1250
0.75	3.75	0.086	11.670	0.654	-0.756	-2.54E-04	-1.81E-04	-2.56E-05	1.16E-04	1.82E-04	6.1798	8.2397	8.7891	7.0313
0.80	4.00	0.073	13.747	0.524	-0.852	-3.00E-04	-1.84E-04	9.58E-06	1.66E-04	2.16E-04	8.5333	10.6667	10.6667	8.0000
0.85	4.25	0.062	16.194	0.380	-0.925	-3.45E-04	-1.75E-04	5.82E-05	2.24E-04	2.49E-04	11.5548	13.5939	12.7943	9.0313
0.90	4.50	0.052	19.076	0.226	-0.974	-3.86E-04	-1.53E-04	1.22E-04	2.91E-04	2.81E-04	15.3773	17.0859	15.1875	10.1250
0.95	4.75	0.045	22.471	0.066	-0.998	-4.20E-04	-1.13E-04	2.04E-04	3.64E-04	3.06E-04	20.1505	21.2111	17.8620	11.2813
1.00	5.00	0.038	26.470	-0.096	-0.995	-4.41E-04	-4.95E-05	3.05E-04	4.43E-04	3.23E-04	26.0417	26.0417	20.8333	12.5000

x/L	x	Altura	$m_{xx(0)}$	$m_{xx}$	$m_{\theta\theta}$	$n_{\theta\theta(0)}$	$n_{\theta\theta}$	$n_{xx(0)}$	$n_{xx}$	$V_{x(0)}$	$V_x$	$V_x^*$	$V_{\theta(0)}$	$V_{\theta}$	$n_{x\theta(0)}$	$n_{x\theta}$	$m_{x\theta(0)}$	$m_{x\theta}$	
0.00	0.00	5.00	1.27E-06	0.000	0.000	6.12E-06	12.981	-1.7E-09	0.000	2.1E-06	-0.005	2.7E-06	0.000	-1.53E-08	0.003	2.12E-08	-0.009	7.6E-06	0.045
0.05	0.25	4.75	1.66E-06	0.017	0.003	7.95E-06	14.004	-4.3E-09	-0.004	2.1E-06	0.149	2.7E-06	0.153	-1.99E-08	0.002	1.81E-07	0.304	7.6E-06	0.046
0.10	0.50	4.50	2.04E-06	0.070	0.014	9.78E-06	15.034	-1.2E-08	-0.017	2.1E-06	0.280	2.7E-06	0.285	-2.44E-08	-0.003	3.40E-07	0.595	7.6E-06	0.046
0.15	0.75	4.25	2.42E-06	0.153	0.031	1.16E-05	16.051	-2.6E-08	-0.039	2.1E-06	0.389	2.7E-06	0.393	-2.90E-08	-0.011	4.99E-07	0.864	7.6E-06	0.045
0.20	1.00	4.00	2.8E-06	0.261	0.052	1.34E-05	17.018	-4.7E-08	-0.071	2.1E-06	0.474	2.7E-06	0.479	-3.35E-08	-0.022	6.59E-07	1.110	7.7E-06	0.042
0.25	1.25	3.75	3.17E-06	0.386	0.077	1.53E-05	17.888	-7.6E-08	-0.114	2.1E-06	0.535	2.7E-06	0.539	-3.80E-08	-0.034	8.18E-07	1.332	7.7E-06	0.036
0.30	1.50	3.50	3.55E-06	0.524	0.105	1.71E-05	18.606	-1.1E-07	-0.167	2.1E-06	0.567	2.7E-06	0.570	-4.25E-08	-0.048	9.77E-07	1.525	7.7E-06	0.028
0.35	1.75	3.25	3.93E-06	0.666	0.133	1.89E-05	19.112	-1.6E-07	-0.233	2.1E-06	0.567	2.7E-06	0.569	-4.70E-08	-0.062	1.14E-06	1.686	7.7E-06	0.017
0.40	2.00	3.00	4.3E-06	0.803	0.161	2.08E-05	19.341	-2.3E-07	-0.310	2.1E-06	0.528	2.7E-06	0.528	-5.15E-08	-0.076	1.30E-06	1.808	7.7E-06	0.004
0.45	2.25	2.75	4.68E-06	0.926	0.185	2.26E-05	19.234	-3.0E-07	-0.400	2.1E-06	0.442	2.7E-06	0.441	-5.59E-08	-0.088	1.46E-06	1.884	7.7E-06	-0.012
0.50	2.50	2.50	5.05E-06	1.020	0.204	2.44E-05	18.735	-3.9E-07	-0.502	2.1E-06	0.301	2.7E-06	0.298	-6.03E-08	-0.098	1.61E-06	1.905	7.7E-06	-0.031
0.55	2.75	2.25	5.42E-06	1.072	0.214	2.63E-05	17.801	-4.9E-07	-0.615	2.1E-06	0.094	2.7E-06	0.089	-6.46E-08	-0.103	1.77E-06	1.859	7.7E-06	-0.051
0.60	3.00	2.00	5.79E-06	1.063	0.213	2.81E-05	16.409	-6.1E-07	-0.739	2.1E-06	-0.190	2.7E-06	-0.197	-6.90E-08	-0.102	1.93E-06	1.738	7.7E-06	-0.071
0.65	3.25	1.75	6.16E-06	0.973	0.195	2.99E-05	14.562	-7.5E-07	-0.874	2.1E-06	-0.563	2.7E-06	-0.572	-7.32E-08	-0.094	2.09E-06	1.527	7.8E-06	-0.091
0.70	3.50	1.50	6.52E-06	0.778	0.156	3.18E-05	12.298	-9.1E-07	-1.017	2.1E-06	-1.034	2.7E-06	-1.045	-7.75E-08	-0.075	2.25E-06	1.217	7.8E-06	-0.107
0.75	3.75	1.25	6.88E-06	0.452	0.090	3.36E-05	9.704	-1.1E-06	-1.169	2.1E-06	-1.614	2.7E-06	-1.626	-8.17E-08	-0.043	2.41E-06	0.799	7.8E-06	-0.119
0.80	4.00	1.00	7.25E-06	-0.033	-0.007	3.54E-05	6.923	-1.3E-06	-1.326	2.1E-06	-2.309	2.7E-06	-2.321	-8.59E-08	0.005	2.57E-06	0.265	7.8E-06	-0.123
0.85	4.25	0.75	7.6E-06	-0.706	-0.141	3.72E-05	4.172	-1.5E-06	-1.488	2.1E-06	-3.120	2.7E-06	-3.131	-9.00E-08	0.071	2.73E-06	-0.387	7.8E-06	-0.116
0.90	4.50	0.50	7.96E-06	-1.596	-0.319	3.91E-05	1.750	-1.7E-06	-1.652	2.0E-06	-4.043	2.7E-06	-4.052	-9.41E-08	0.160	2.89E-06	-1.152	7.8E-06	-0.093
0.95	4.75	0.25	8.31E-06	-2.731	-0.546	4.09E-05	0.058	-2.0E-06	-1.817	2.0E-06	-5.063	2.7E-06	-5.069	-9.81E-08	0.273	3.05E-06	-2.017	7.9E-06	-0.050
1.00	5.00	0.00	8.66E-06	-4.132	-0.826	4.27E-05	-0.397	-2.3E-06	-1.983	2.0E-06	-6.158	2.7E-06	-6.156	-1.02E-07	0.413	3.21E-06	-2.958	7.9E-06	0.018

C) PARA LA FUERZA INERCIAL:

**SOLUCION COMPLETA PARA UNA RESPUESTA DEL TIPO VIGA (n=1)**

**DATOS DE ENTRADA**

D = 20.00 m     $\gamma_1 = 0.01$      $f_c = 2800$  t/m<sup>2</sup>  
a = 10.00 m     $a_1 = 1.01$     E = 2509980 t/m<sup>2</sup>  
 $t_w = 0.40$  m     $b_1 = 0.99$      $D_m = 1045825$  t/m  
 $v = 0.20$      $D_b = 13944$  t.m<sup>2</sup>/m  
 $\beta = 0.65$  m<sup>-1</sup>     $H_w = L = 5.00$  m

**CARGAS DE SUPERFICIE**

Normal  $p_n(x, \theta) \Rightarrow \frac{p_{n1}^{(2)}}{0} (x/L) \cos \theta + \frac{p_{n1}^{(1)}}{0.44} \cos \theta$  t/m<sup>2</sup>  
Tangente  $p_t(x, \theta) \Rightarrow \frac{p_{t1}^{(2)}}{0} (x/L) \sin \theta + \frac{p_{t1}^{(1)}}{-0.44} \sin \theta$  t/m<sup>2</sup>  
Axial  $p_a(x, \theta) \Rightarrow \frac{p_{a1}^{(2)}}{0} (x/L) \cos \theta + \frac{p_{a1}^{(1)}}{0} \cos \theta$  t/m<sup>2</sup>

**CONDICIONES DE BORDE**

x = 0 m (top) (apoyo libre)	SENO = 0.00	COS = 1.00	EXP(-) = 1	EXP(+) = 1
	$x^5/120 = 0.00$	$x^4/24 = 0.00$	$x^3/6 = 0.00$	$x^2/2 = 0.00$

$n_{xx} / D_m = 1.33E-05$  C1 + -0.001 C2 + 1.33E-05 C3 + 0.001 C4 + 0.000 C5 + -0.096 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 = 0  
 $n_{\theta} / (1-v) = -9650.25$  C1 + -9627.66 C2 + 9650.25 C3 + -9627.66 C4 + 125505 C5 + 0.000 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 = 0  
 $m_{xz} / D_b = -0.554$  C1 + -0.552 C2 + 0.554 C3 + -0.552 C4 + -0.0007 C5 + 0.000 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 = 0  
 $m_{\theta z} / D_b = -0.010$  C1 + 0.849 C2 + -0.010 C3 + -0.849 C4 + 0.000 C5 + -0.010 C6 + 0.000 C7 + 0.000 C8 + 1.84E-06 = 0

x = 5.00 m (bottom) (apoyo fijo)	SENO = -0.10	COS = -1.00	EXP(-) = 0.0378	EXP(+) = 26.4703
	$x^5/120 = 26.04$	$x^4/24 = 26.04$	$x^3/6 = 20.83$	$x^2/2 = 12.50$

$u_x = -4.73E-04$  C1 + -6.73E-04 C2 + 0.415 C3 + -0.399 C4 + -0.325 C5 + -0.500 C6 + -1.000 C7 + 0.000 C8 + -6.21E-06 = 0  
 $u_\theta = 1.00E-04$  C1 + -9.74E-04 C2 + -0.061 C3 + 0.684 C4 + 1.079 C5 + 2.075 C6 + -0.500 C7 + -1.000 C8 + 2.50E-05 = 0  
 $u_z = -0.0376$  C1 + -0.0036 C2 + -26.348 C3 + -2.5386 C4 + -0.979 C5 + -1.875 C6 + 0.500 C7 + 1.000 C8 + 2.10E-05 = 0  
 $\phi_x = -0.0270$  C1 + 0.0220 C2 + 15.61974 C3 + 18.7246 C4 + 0.188 C5 + -0.050 C6 + -0.100 C7 + 0.000 C8 + 9.02E-06 = 0

**CONSTANTES DE INTEGRACIÓN**

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
1.3E-05	-1.1E-03	1.3E-05	1.1E-03	0.0E+00	-9.6E-02	0.0E+00	0.0E+00
-9.7E+03	-9.6E+03	9.7E+03	-9.6E+03	1.3E+05	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
-5.5E-01	-5.5E-01	5.5E-01	-5.5E-01	-6.8E-04	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
-1.0E-02	8.5E-01	-1.0E-02	-8.5E-01	0.0E+00	-1.0E-02	0.0E+00	0.0E+00
-4.7E-04	-6.7E-04	4.2E-01	-4.0E-01	-3.3E-01	-5.0E-01	-1.0E+00	0.0E+00
1.0E-04	-9.7E-04	-6.1E-02	6.8E-01	1.1E+00	2.1E+00	-5.0E-01	-1.0E+00
-3.8E-02	-3.6E-03	-2.6E+01	-2.5E+00	-9.8E-01	-1.9E+00	5.0E-01	1.0E+00
-2.7E-02	2.2E-02	1.6E+01	1.9E-01	1.9E-01	-5.0E-02	-1.0E-01	0.0E+00

$C^T =$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
8.0E-06	-4.1E-06	1.9E-06	-2.1E-06	0.0E+00	2.6E-08	-4.6E-06	2.6E-05

C1	-0.09734	2.74E-07	-1.77755	-1.1517	0.011457	-0.10431	-0.10431	-0.11457	0.00E+00
C2	-0.05555	-1.2E-07	-0.02364	1.16042	-0.00548	0.031357	0.031357	0.054819	0.00E+00
C3	-0.0836	3.86E-08	0.002193	0.001636	0.00038	-0.04004	-0.04004	-0.0038	0.00E+00
C4	= 0.069	-1.2E-07	-0.00272	-0.00437	-0.00562	0.033058	0.033058	0.056214	x -1.84E-06
C5	0.000	7.97E-06	-0.13887	0	0	0	0	0	6.21E-06
C6	-10.415	0	-1E-16	-0.01389	0	0	-6.5E-18	-6.5E-18	-2.50E-05
C7	5.145	-2.5E-06	0.047985	0.009134	-0.9976	-0.0298	-0.0298	-0.02401	-2.10E-05
C8	-24.132	9.77E-06	-0.176	-0.03772	0.49494	-0.96008	0.039918	0.050599	-9.02E-06

● RESULTADOS PARA UN CORTE VERTICAL DE MAXIMA DEMANDA

x/L	x	exp (-)	exp (+)	seno	coseno	u <sub>z1</sub> (x)	u <sub>z1</sub> '(x)	u <sub>z1</sub> ''(x)	u <sub>z1</sub> '''(x)	u <sub>z1</sub> ''''(x)	x^5/120	x^4/24	x^3/6	x^2/2
0.00	0.00	1.000	1.000	0.000	1.000	9.90E-06	-8.02E-06	1.84E-06	-1.28E-07	-7.09E-06	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	0.25	0.849	1.178	0.161	0.987	7.95E-06	-7.58E-06	1.60E-06	-1.72E-06	-5.69E-06	0.0000	0.0002	0.0026	0.0313
0.10	0.50	0.721	1.388	0.318	0.948	6.10E-06	-7.25E-06	1.01E-06	-2.98E-06	-4.37E-06	0.0003	0.0026	0.0208	0.1250
0.15	0.75	0.612	1.635	0.467	0.884	4.31E-06	-7.10E-06	1.37E-07	-3.92E-06	-3.10E-06	0.0020	0.0132	0.0703	0.2813
0.20	1.00	0.519	1.926	0.603	0.798	2.53E-06	-7.20E-06	-9.25E-07	-4.53E-06	-1.84E-06	0.0083	0.0417	0.1667	0.5000
0.25	1.25	0.441	2.268	0.724	0.690	6.92E-07	-7.57E-06	-2.10E-06	-4.83E-06	-5.40E-07	0.0254	0.1017	0.3255	0.7813
0.30	1.50	0.374	2.672	0.826	0.564	-1.28E-06	-8.25E-06	-3.31E-06	-4.80E-06	8.55E-07	0.0633	0.2109	0.5625	1.1250
0.35	1.75	0.318	3.148	0.906	0.424	-3.46E-06	-9.22E-06	-4.47E-06	-4.39E-06	2.40E-06	0.1368	0.3908	0.8932	1.5313
0.40	2.00	0.270	3.708	0.962	0.272	-5.91E-06	-1.05E-05	-5.48E-06	-3.58E-06	4.15E-06	0.2667	0.6667	1.3333	2.0000
0.45	2.25	0.229	4.368	0.994	0.114	-8.71E-06	-1.19E-05	-6.22E-06	-2.30E-06	6.15E-06	0.4805	1.0679	1.8984	2.5313
0.50	2.50	0.194	5.145	0.999	-0.048	-1.19E-05	-1.36E-05	-6.58E-06	-4.80E-07	8.44E-06	0.8138	1.6276	2.6042	3.1250
0.55	2.75	0.165	6.061	0.978	-0.208	-1.55E-05	-1.52E-05	-6.41E-06	1.95E-06	1.10E-05	1.3106	2.3830	3.4661	3.7813
0.60	3.00	0.140	7.139	0.932	-0.363	-1.95E-05	-1.67E-05	-5.55E-06	5.06E-06	1.39E-05	2.0250	3.3750	4.5000	4.5000
0.65	3.25	0.119	8.410	0.861	-0.509	-2.38E-05	-1.79E-05	-3.82E-06	8.93E-06	1.71E-05	3.0216	4.6486	5.7214	5.2813
0.70	3.50	0.101	9.907	0.768	-0.641	-2.84E-05	-1.85E-05	-1.02E-06	1.36E-05	2.04E-05	4.3768	6.2526	7.1458	6.1250
0.75	3.75	0.086	11.670	0.654	-0.756	-3.30E-05	-1.83E-05	3.06E-06	1.91E-05	2.38E-05	6.1798	8.2397	8.7891	7.0313
0.80	4.00	0.073	13.747	0.524	-0.852	-3.74E-05	-1.69E-05	8.62E-06	2.55E-05	2.71E-05	8.5333	10.6667	10.6667	8.0000
0.85	4.25	0.062	16.194	0.380	-0.925	-4.13E-05	-1.38E-05	1.59E-05	3.27E-05	3.01E-05	11.5548	13.5939	12.7943	9.0313
0.90	4.50	0.052	19.076	0.226	-0.974	-4.42E-05	-8.77E-06	2.50E-05	4.05E-05	3.23E-05	15.3773	17.0859	15.1875	10.1250
0.95	4.75	0.045	22.471	0.066	-0.998	-4.55E-05	-1.17E-06	3.62E-05	4.87E-05	3.35E-05	20.1505	21.2111	17.8620	11.2813
1.00	5.00	0.038	26.470	-0.096	-0.995	-4.45E-05	9.48E-06	4.94E-05	5.71E-05	3.30E-05	26.0417	26.0417	20.8333	12.5000

x/L	x	Altura	m <sub>xx(0)</sub>	m <sub>xx</sub>	m <sub>θθ</sub>	n <sub>θθ(0)</sub>	n <sub>θθ</sub>	n <sub>xx(0)</sub>	n <sub>xx</sub>	V <sub>x(0)</sub>	V <sub>x</sub>	V* <sub>x(0)</sub>	V* <sub>x</sub>	V <sub>θ(0)</sub>	V <sub>θ</sub>	n <sub>xθ(0)</sub>	n <sub>xθ</sub>	m <sub>xθ(0)</sub>	m <sub>xθ</sub>
0.00	0.00	5.00	1.84E-06	0.000	0.000	4.21E-06	5.389	-2.5E-09	0.000	0.0E+00	0.001	0.0E+00	0.000	-2.98E-08	0.002	0.00E+00	0.002	0.0E+00	-0.009
0.05	0.25	4.75	1.84E-06	0.003	0.001	4.21E-06	5.194	-5.1E-09	-0.003	-2.0E-09	0.023	-1.8E-09	0.022	-2.98E-08	0.002	2.19E-07	0.244	2.2E-09	-0.008
0.10	0.50	4.50	1.84E-06	0.012	0.002	4.21E-06	5.010	-1.3E-08	-0.012	-4.0E-09	0.041	-3.7E-09	0.040	-2.98E-08	0.001	4.38E-07	0.482	4.4E-09	-0.008
0.15	0.75	4.25	1.84E-06	0.024	0.005	4.21E-06	4.833	-2.6E-08	-0.027	-6.0E-09	0.054	-5.5E-09	0.053	-2.97E-08	0.000	6.57E-07	0.715	6.6E-09	-0.008
0.20	1.00	4.00	1.84E-06	0.039	0.008	4.21E-06	4.657	-4.5E-08	-0.048	-8.1E-09	0.062	-7.4E-09	0.062	-2.97E-08	-0.002	8.77E-07	0.943	8.8E-09	-0.008
0.25	1.25	3.75	1.83E-06	0.055	0.011	4.21E-06	4.475	-6.8E-08	-0.074	-1.0E-08	0.066	-9.2E-09	0.066	-2.97E-08	-0.003	1.10E-06	1.167	1.1E-08	-0.008
0.30	1.50	3.50	1.83E-06	0.072	0.014	4.21E-06	4.281	-9.7E-08	-0.106	-1.2E-08	0.066	-1.1E-08	0.065	-2.96E-08	-0.005	1.31E-06	1.387	1.3E-08	-0.009
0.35	1.75	3.25	1.83E-06	0.088	0.018	4.21E-06	4.065	-1.3E-07	-0.144	-1.4E-08	0.060	-1.3E-08	0.059	-2.95E-08	-0.007	1.53E-06	1.601	1.5E-08	-0.010
0.40	2.00	3.00	1.82E-06	0.102	0.020	4.21E-06	3.821	-1.7E-07	-0.186	-1.6E-08	0.049	-1.5E-08	0.047	-2.94E-08	-0.008	1.75E-06	1.810	1.8E-08	-0.011
0.45	2.25	2.75	1.82E-06	0.112	0.022	4.21E-06	3.543	-2.2E-07	-0.234	-1.8E-08	0.030	-1.7E-08	0.029	-2.94E-08	-0.009	1.97E-06	2.012	2.0E-08	-0.013
0.50	2.50	2.50	1.81E-06	0.117	0.023	4.21E-06	3.224	-2.7E-07	-0.287	-2.0E-08	0.005	-1.8E-08	0.003	-2.92E-08	-0.010	2.19E-06	2.207	2.2E-08	-0.015
0.55	2.75	2.25	1.81E-06	0.115	0.023	4.21E-06	2.862	-3.2E-07	-0.344	-2.2E-08	-0.029	-2.0E-08	-0.031	-2.91E-08	-0.010	2.41E-06	2.393	2.4E-08	-0.017
0.60	3.00	2.00	1.8E-06	0.103	0.021	4.21E-06	2.459	-3.8E-07	-0.406	-2.4E-08	-0.073	-2.2E-08	-0.075	-2.90E-08	-0.009	2.63E-06	2.569	2.6E-08	-0.019
0.65	3.25	1.75	1.79E-06	0.078	0.016	4.21E-06	2.020	-4.5E-07	-0.473	-2.6E-08	-0.127	-2.4E-08	-0.129	-2.89E-08	-0.006	2.85E-06	2.736	2.8E-08	-0.020
0.70	3.50	1.50	1.79E-06	0.039	0.008	4.21E-06	1.553	-5.2E-07	-0.543	-2.8E-08	-0.192	-2.6E-08	-0.194	-2.87E-08	-0.003	3.07E-06	2.890	3.1E-08	-0.021
0.75	3.75	1.25	1.78E-06	-0.018	-0.004	4.21E-06	1.078	-5.9E-07	-0.617	-3.0E-08	-0.269	-2.8E-08	-0.271	-2.86E-08	0.003	3.29E-06	3.033	3.3E-08	-0.021
0.80	4.00	1.00	1.77E-06	-0.096	-0.019	4.21E-06	0.618	-6.8E-07	-0.695	-3.2E-08	-0.358	-2.9E-08	-0.360	-2.84E-08	0.011	3.51E-06	3.164	3.5E-08	-0.019
0.85	4.25	0.75	1.76E-06	-0.197	-0.039	4.21E-06	0.208	-7.6E-07	-0.775	-3.4E-08	-0.458	-3.1E-08	-0.459	-2.82E-08	0.021	3.73E-06	3.284	3.7E-08	-0.016
0.90	4.50	0.50	1.75E-06	-0.324	-0.065	4.21E-06	-0.106	-8.5E-07	-0.859	-3.6E-08	-0.566	-3.3E-08	-0.567	-2.80E-08	0.033	3.94E-06	3.395	3.9E-08	-0.011
0.95	4.75	0.25	1.74E-06	-0.480	-0.096	4.21E-06	-0.267	-9.5E-07	-0.945	-3.8E-08	-0.680	-3.5E-08	-0.681	-2.78E-08	0.049	4.16E-06	3.500	4.2E-08	-0.003
1.00	5.00	0.00	1.73E-06	-0.665	-0.133	4.21E-06	-0.207	-1.1E-06	-1.034	-4.0E-08	-0.796	-3.7E-08	-0.795	-2.76E-08	0.067	4.38E-06	3.604	4.4E-08	0.009



• RESULTADOS PARA UN CORTE VERTICAL

x/L	x	exp (-)	exp (+)	seno	coseno	u <sub>z1</sub> (x)	u <sub>z1</sub> '(x)	u <sub>z1</sub> ''(x)	u <sub>z1</sub> '''(x)	x <sup>3</sup> /6	x <sup>2</sup> /2	m <sub>xx</sub> (0)	m <sub>xx</sub>	m <sub>θθ</sub> (0)	m <sub>θθ</sub>	n <sub>θθ</sub> (0)	n <sub>θθ</sub>	n <sub>xx</sub> (0)	n <sub>xx</sub>	V <sub>x</sub> (0)	V <sub>x</sub>
0.00	0.00	1.000	1.000	0.000	1.000	3.70E-05	-1.62E-05	-7.40E-08	-8.52E-08	0.000	0.000	1.5E-24	0.000	7.4E-24	-0.005	0.00E+00	3.714	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.000
0.05	0.25	0.851	1.176	0.163	0.987	3.29E-05	-1.63E-05	-8.97E-07	-6.38E-06	0.003	0.031	-2.9E-08	0.011	-1.5E-07	-0.004	1.41E-06	4.783	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.088
0.10	0.50	0.723	1.382	0.322	0.947	2.88E-05	-1.67E-05	-3.20E-06	-1.19E-05	0.021	0.125	-5.9E-08	0.043	-2.9E-07	0.001	2.82E-06	5.845	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.165
0.15	0.75	0.615	1.625	0.472	0.882	2.45E-05	-1.80E-05	-6.80E-06	-1.67E-05	0.070	0.281	-8.8E-08	0.093	-4.4E-07	0.009	4.23E-06	6.886	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.232
0.20	1.00	0.523	1.911	0.609	0.793	1.98E-05	-2.02E-05	-1.15E-05	-2.07E-05	0.167	0.500	-1.2E-07	0.158	-5.9E-07	0.021	5.64E-06	7.884	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.287
0.25	1.25	0.445	2.247	0.730	0.683	1.43E-05	-2.38E-05	-1.71E-05	-2.37E-05	0.326	0.781	-1.5E-07	0.235	-7.3E-07	0.035	7.05E-06	8.809	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.329
0.30	1.50	0.379	2.641	0.832	0.555	7.74E-06	-2.88E-05	-2.32E-05	-2.56E-05	0.563	1.125	-1.8E-07	0.321	-8.8E-07	0.051	8.46E-06	9.627	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.356
0.35	1.75	0.322	3.106	0.911	0.412	-2.55E-07	-3.54E-05	-2.97E-05	-2.61E-05	0.893	1.531	-2.1E-07	0.412	-1.0E-06	0.069	9.87E-06	10.299	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.364
0.40	2.00	0.274	3.651	0.966	0.257	-1.01E-05	-4.37E-05	-3.62E-05	-2.51E-05	1.333	2.000	-2.4E-07	0.501	-1.2E-06	0.086	1.13E-05	10.785	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.349
0.45	2.25	0.233	4.293	0.995	0.096	-2.22E-05	-5.35E-05	-4.21E-05	-2.20E-05	1.898	2.531	-2.6E-07	0.584	-1.3E-06	0.102	1.27E-05	11.044	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.307
0.50	2.50	0.198	5.047	0.998	-0.067	-3.70E-05	-6.46E-05	-4.70E-05	-1.65E-05	2.604	3.125	-2.9E-07	0.652	-1.5E-06	0.116	1.41E-05	11.039	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.230
0.55	2.75	0.169	5.934	0.973	-0.229	-5.46E-05	-7.68E-05	-5.01E-05	-8.05E-06	3.466	3.781	-3.2E-07	0.696	-1.6E-06	0.125	1.55E-05	10.741	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	0.113
0.60	3.00	0.143	6.977	0.923	-0.385	-7.54E-05	-8.95E-05	-5.07E-05	-3.86E-06	4.500	4.500	-3.5E-07	0.704	-1.8E-06	0.127	1.69E-05	10.130	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-0.053
0.65	3.25	0.122	8.203	0.848	-0.530	-9.93E-05	-1.02E-04	-4.78E-05	1.98E-05	5.721	5.281	-3.8E-07	0.664	-1.9E-06	0.121	1.83E-05	9.202	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-0.275
0.70	3.50	0.104	9.644	0.750	-0.661	-1.26E-04	-1.13E-04	-4.04E-05	4.03E-05	7.146	6.125	-4.1E-07	0.561	-2.1E-06	0.102	1.97E-05	7.977	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-0.560
0.75	3.75	0.088	11.339	0.632	-0.775	-1.56E-04	-1.22E-04	-2.73E-05	6.58E-05	8.789	7.031	-4.4E-07	0.378	-2.2E-06	0.067	2.12E-05	6.501	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-0.916
0.80	4.00	0.075	13.331	0.498	-0.867	-1.87E-04	-1.26E-04	-7.08E-06	9.67E-05	10.667	8.000	-4.7E-07	0.097	-2.4E-06	0.013	2.26E-05	4.857	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-1.346
0.85	4.25	0.064	15.674	0.349	-0.937	-2.18E-04	-1.24E-04	2.15E-05	1.33E-04	12.794	9.031	-5.0E-07	-0.301	-2.5E-06	-0.064	2.40E-05	3.174	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-1.854
0.90	4.50	0.054	18.428	0.192	-0.981	-2.48E-04	-1.14E-04	5.99E-05	1.75E-04	15.188	10.125	-5.3E-07	-0.836	-2.6E-06	-0.169	2.54E-05	1.630	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-2.437
0.95	4.75	0.046	21.666	0.029	-1.000	-2.74E-04	-9.36E-05	1.09E-04	2.22E-04	17.862	11.281	-5.6E-07	-1.525	-2.8E-06	-0.306	2.68E-05	0.469	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-3.089
1.00	5.00	0.039	25.474	-0.134	-0.991	-2.94E-04	-5.88E-05	1.71E-04	2.72E-04	20.833	12.500	-5.9E-07	-2.385	-2.9E-06	-0.477	2.82E-05	0.000	3.566E-22	0.000	-1.18E-07	-3.796

### E) PARA LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA:

**SOLUCION COMPLETA PARA UNA RESPUESTA AXISIMÉTRICA (n=0)**

---

**• DATOS DE ENTRADA**

D =	<input type="text" value="20.00"/>	m	$\gamma_0 =$	-0.01	$f_c =$	<input type="text" value="2800"/>	t/m <sup>2</sup>
a =	<input type="text" value="10.00"/>	m	$a_0 =$	0.99	E =	2509980	t/m <sup>2</sup>
$t_w =$	<input type="text" value="0.40"/>	m	$b_0 =$	1.01	$D_m =$	1045825.0	t/m
$\nu =$	<input type="text" value="0.20"/>		$D_b =$	13944.3			t.m <sup>2</sup> /m
$\beta =$	0.65	m-1	$H_w = L =$	<input type="text" value="5.00"/>			m

---

**• CARGAS DE SUPERFICIE**

$p_r(x,\theta)$	⇒	$p_{0r}^{(2)}$	(x/L)	+	$p_{0r}^{(1)}$	t/m <sup>2</sup>
Normal	⇒	<input type="text" value="5"/>	(x/L)	+	<input type="text" value="0"/>	t/m <sup>2</sup>
$p_x(x,\theta)$	⇒	$p_{0x}^{(2)}$	(x/L)	+	$p_{0x}^{(1)}$	t/m <sup>2</sup>
Axial	⇒	<input type="text" value="0"/>	(x/L)	+	<input type="text" value="0"/>	t/m <sup>2</sup>

---

**• CONDICIONES DE BORDE**

x = 0 m (top) (apoyo libre)	SEN0 = 0.00      COS = 1.00      EXP(-) = 1      EXP(+) = 1 x <sup>2</sup> /2 = 0.00      x <sup>3</sup> /6 = 0.00
$n_{xx} / D_m = 0.00E+00$ C1    +    0.000    C2    +    0.00E+00    C3    +    0.000    C4    +    0.000    C5    +    0.000    C6    +    0.00E+00    =    0	
$v_x / D_b = -0.561$ C1    +    -0.544    C2    +    0.561    C3    +    -0.544    C4    +    0.0000    C5    +    0.000    C6    +    -1.99E-07    =    0	
$m_{xx} / D_b = 0.008$ C1    +    0.849    C2    +    0.008    C3    +    -0.849    C4    +    0.000    C5    +    0.000    C6    +    0.00E+00    =    0	
x = 5.00 m (bottom) (apoyo fijo)	SEN0 = -0.13      COS = -0.99      EXP(-) = 0.0393      EXP(+) = 25.4736 x <sup>2</sup> /2 = 12.50      x <sup>3</sup> /6 = 20.83
$u_x = -5.12E-04$ C1    +    -6.81E-04    C2    +    0.438    C3    +    -0.338    C4    +    0.000    C5    +    0.000    C6    +    -2.49E-05    =    0	
$u_z = -0.0389$ C1    +    -0.0053    C2    +    -25.244    C3    +    -3.414169    C4    +    0.000    C5    +    0.000    C6    +    4.98E-04    =    0	
$\varphi_x = -0.0286$ C1    +    0.0221    C2    +    14.109107    C3    +    18.750636    C4    +    0.000    C5    +    0.000    C6    +    -9.96E-05    =    0	

---

**• CONSTANTES DE INTEGRACIÓN**

<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td>C1</td><td>C2</td><td>C3</td><td>C4</td><td>C5</td><td>C6</td></tr> <tr><td>0.00E+00</td><td>0.00E+00</td><td>0.00E+00</td><td>0.00E+00</td><td>-9.56E-07</td><td>0.00E+00</td></tr> <tr><td>-5.61E-01</td><td>-5.44E-01</td><td>5.61E-01</td><td>-5.44E-01</td><td>0.00E+00</td><td>1.99E-07</td></tr> <tr><td>8.00E-03</td><td>8.49E-01</td><td>8.00E-03</td><td>-8.49E-01</td><td>-3.98E-09</td><td>0.00E+00</td></tr> <tr><td>-5.12E-04</td><td>-6.81E-04</td><td>4.38E-01</td><td>-3.38E-01</td><td>-4.98E-06</td><td>-9.96E-07</td></tr> <tr><td>-3.89E-02</td><td>-5.26E-03</td><td>-2.52E+01</td><td>-3.41E+00</td><td>1.99E-06</td><td>0.00E+00</td></tr> <tr><td>-2.86E-02</td><td>2.21E-02</td><td>1.41E+01</td><td>1.88E+01</td><td>0.00E+00</td><td>0.00E+00</td></tr> </table>	C1	C2	C3	C4	C5	C6	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-9.56E-07	0.00E+00	-5.61E-01	-5.44E-01	5.61E-01	-5.44E-01	0.00E+00	1.99E-07	8.00E-03	8.49E-01	8.00E-03	-8.49E-01	-3.98E-09	0.00E+00	-5.12E-04	-6.81E-04	4.38E-01	-3.38E-01	-4.98E-06	-9.96E-07	-3.89E-02	-5.26E-03	-2.52E+01	-3.41E+00	1.99E-06	0.00E+00	-2.86E-02	2.21E-02	1.41E+01	1.88E+01	0.00E+00	0.00E+00	x	=	0.00E+00	⇒	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td>C1</td><td>-2.22E-01</td><td>-1.78E+00</td><td>-1.14E+00</td><td>-4.79E-18</td><td>-1.09E-01</td><td>-1.23E-01</td><td>0.000</td></tr> <tr><td>C2</td><td>6.64E-02</td><td>1.14E-02</td><td>1.18E+00</td><td>1.43E-18</td><td>3.43E-02</td><td>6.02E-02</td><td>0.000</td></tr> <tr><td>C3</td><td>=</td><td>-9.15E-02</td><td>3.47E-03</td><td>2.16E-03</td><td>-1.97E-18</td><td>-4.39E-02</td><td>-7.79E-03</td></tr> <tr><td>C4</td><td></td><td>6.84E-02</td><td>-5.35E-03</td><td>-4.76E-03</td><td>1.48E-18</td><td>3.28E-02</td><td>5.89E-02</td></tr> <tr><td>C5</td><td></td><td>-1.05E+06</td><td>0.00E+00</td><td>0.00E+00</td><td>-2.26E-11</td><td>0.00E+00</td><td>-7.05E-13</td></tr> <tr><td>C6</td><td></td><td>5.17E+06</td><td>4.25E+03</td><td>2.34E+03</td><td>-1.00E+06</td><td>-3.04E+04</td><td>-2.34E+04</td></tr> </table>	C1	-2.22E-01	-1.78E+00	-1.14E+00	-4.79E-18	-1.09E-01	-1.23E-01	0.000	C2	6.64E-02	1.14E-02	1.18E+00	1.43E-18	3.43E-02	6.02E-02	0.000	C3	=	-9.15E-02	3.47E-03	2.16E-03	-1.97E-18	-4.39E-02	-7.79E-03	C4		6.84E-02	-5.35E-03	-4.76E-03	1.48E-18	3.28E-02	5.89E-02	C5		-1.05E+06	0.00E+00	0.00E+00	-2.26E-11	0.00E+00	-7.05E-13	C6		5.17E+06	4.25E+03	2.34E+03	-1.00E+06	-3.04E+04	-2.34E+04
C1	C2	C3	C4	C5	C6																																																																																										
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-9.56E-07	0.00E+00																																																																																										
-5.61E-01	-5.44E-01	5.61E-01	-5.44E-01	0.00E+00	1.99E-07																																																																																										
8.00E-03	8.49E-01	8.00E-03	-8.49E-01	-3.98E-09	0.00E+00																																																																																										
-5.12E-04	-6.81E-04	4.38E-01	-3.38E-01	-4.98E-06	-9.96E-07																																																																																										
-3.89E-02	-5.26E-03	-2.52E+01	-3.41E+00	1.99E-06	0.00E+00																																																																																										
-2.86E-02	2.21E-02	1.41E+01	1.88E+01	0.00E+00	0.00E+00																																																																																										
C1	-2.22E-01	-1.78E+00	-1.14E+00	-4.79E-18	-1.09E-01	-1.23E-01	0.000																																																																																								
C2	6.64E-02	1.14E-02	1.18E+00	1.43E-18	3.43E-02	6.02E-02	0.000																																																																																								
C3	=	-9.15E-02	3.47E-03	2.16E-03	-1.97E-18	-4.39E-02	-7.79E-03																																																																																								
C4		6.84E-02	-5.35E-03	-4.76E-03	1.48E-18	3.28E-02	5.89E-02																																																																																								
C5		-1.05E+06	0.00E+00	0.00E+00	-2.26E-11	0.00E+00	-7.05E-13																																																																																								
C6		5.17E+06	4.25E+03	2.34E+03	-1.00E+06	-3.04E+04	-2.34E+04																																																																																								

<table border="0" style="width: 100%;"> <tr><td>C1</td><td>C2</td><td>C3</td><td>C4</td><td>C5</td><td>C6</td></tr> <tr><td>c<sup>T</sup> =</td><td>4.2E-05</td><td>-1.1E-05</td><td>2.1E-05</td><td>-1.0E-05</td><td>-6.3E-16</td><td>-1.2E+01</td></tr> </table>	C1	C2	C3	C4	C5	C6	c <sup>T</sup> =	4.2E-05	-1.1E-05	2.1E-05	-1.0E-05	-6.3E-16	-1.2E+01
C1	C2	C3	C4	C5	C6								
c <sup>T</sup> =	4.2E-05	-1.1E-05	2.1E-05	-1.0E-05	-6.3E-16	-1.2E+01							

• RESULTADOS PARA UN CORTE VERTICAL

x/L	x	exp (-)	exp (+)	seno	coseno	u <sub>z1</sub> (x)	u <sub>z1</sub> '(x)	u <sub>z1</sub> ''(x)	u <sub>z1</sub> '''(x)	x <sup>3</sup> /6	x <sup>2</sup> /2	m <sub>xx(0)</sub>	m <sub>xx</sub>	m <sub>θθ(0)</sub>	m <sub>θθ</sub>	n <sub>θθ(0)</sub>	n <sub>θθ</sub>	n <sub>xx(0)</sub>	n <sub>xx</sub>	V <sub>x(0)</sub>	V <sub>x</sub>
0.00	0.00	1.000	1.000	0.000	1.000	6.27E-05	-2.74E-05	-1.25E-07	-1.44E-07	0.000	0.000	2.5E-24	0.000	1.3E-23	-0.008	0.00E+00	6.295	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.000
0.05	0.25	0.851	1.176	0.163	0.987	5.58E-05	-2.76E-05	-1.52E-06	-1.08E-05	0.003	0.031	-5.0E-08	0.019	-2.5E-07	-0.007	2.39E-06	8.106	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.149
0.10	0.50	0.723	1.382	0.322	0.947	4.89E-05	-2.84E-05	-5.43E-06	-2.02E-05	0.021	0.125	-1.0E-07	0.073	-5.0E-07	0.001	4.78E-06	9.906	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.280
0.15	0.75	0.615	1.625	0.472	0.882	4.15E-05	-3.05E-05	-1.15E-05	-2.83E-05	0.070	0.281	-1.5E-07	0.157	-7.5E-07	0.016	7.17E-06	11.671	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.393
0.20	1.00	0.523	1.911	0.609	0.793	3.35E-05	-3.43E-05	-1.95E-05	-3.50E-05	0.167	0.500	-2.0E-07	0.268	-1.0E-06	0.036	9.56E-06	13.362	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.486
0.25	1.25	0.445	2.247	0.730	0.683	2.42E-05	-4.03E-05	-2.89E-05	-4.01E-05	0.326	0.781	-2.5E-07	0.399	-1.2E-06	0.060	1.20E-05	14.931	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.558
0.30	1.50	0.379	2.641	0.832	0.555	1.31E-05	-4.88E-05	-3.94E-05	-4.33E-05	0.563	1.125	-3.0E-07	0.545	-1.5E-06	0.087	1.43E-05	16.317	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.603
0.35	1.75	0.322	3.106	0.911	0.412	-4.33E-07	-6.01E-05	-5.04E-05	-4.43E-05	0.893	1.531	-3.5E-07	0.698	-1.7E-06	0.116	1.67E-05	17.457	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.617
0.40	2.00	0.274	3.651	0.966	0.257	-1.71E-05	-7.40E-05	-6.13E-05	-4.25E-05	1.333	2.000	-4.0E-07	0.850	-2.0E-06	0.146	1.91E-05	18.280	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.592
0.45	2.25	0.233	4.293	0.995	0.096	-3.77E-05	-9.06E-05	-7.13E-05	-3.73E-05	1.898	2.531	-4.5E-07	0.990	-2.2E-06	0.173	2.15E-05	18.719	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.520
0.50	2.50	0.198	5.047	0.998	-0.067	-6.26E-05	-1.10E-04	-7.96E-05	-2.79E-05	2.604	3.125	-5.0E-07	1.105	-2.5E-06	0.196	2.39E-05	18.711	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.390
0.55	2.75	0.169	5.934	0.973	-0.229	-9.26E-05	-1.30E-04	-8.49E-05	-1.36E-05	3.466	3.781	-5.5E-07	1.179	-2.7E-06	0.211	2.63E-05	18.205	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	0.191
0.60	3.00	0.143	6.977	0.923	-0.385	-1.28E-04	-1.52E-04	-8.59E-05	6.54E-06	4.500	4.500	-6.0E-07	1.193	-3.0E-06	0.216	2.87E-05	17.169	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-0.090
0.65	3.25	0.122	8.203	0.848	-0.530	-1.68E-04	-1.73E-04	-8.11E-05	3.35E-05	5.721	5.281	-6.5E-07	1.126	-3.2E-06	0.204	3.11E-05	15.597	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-0.466
0.70	3.50	0.104	9.644	0.750	-0.661	-2.14E-04	-1.92E-04	-6.85E-05	6.83E-05	7.146	6.125	-7.0E-07	0.952	-3.5E-06	0.172	3.35E-05	13.520	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-0.949
0.75	3.75	0.088	11.339	0.632	-0.775	-2.64E-04	-2.06E-04	-4.62E-05	1.11E-04	8.789	7.031	-7.5E-07	0.641	-3.7E-06	0.114	3.59E-05	11.018	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-1.552
0.80	4.00	0.075	13.331	0.498	-0.867	-3.16E-04	-2.14E-04	-1.20E-05	1.64E-04	10.667	8.000	-8.0E-07	0.165	-4.0E-06	0.022	3.82E-05	8.233	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-2.282
0.85	4.25	0.064	15.674	0.349	-0.937	-3.70E-04	-2.11E-04	3.65E-05	2.26E-04	12.794	9.031	-8.5E-07	-0.510	-4.2E-06	-0.109	4.06E-05	5.379	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-3.142
0.90	4.50	0.054	18.428	0.192	-0.981	-4.21E-04	-1.94E-04	1.02E-04	2.96E-04	15.188	10.125	-9.0E-07	-1.417	-4.5E-06	-0.287	4.30E-05	2.763	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-4.131
0.95	4.75	0.046	21.666	0.029	-1.000	-4.65E-04	-1.59E-04	1.85E-04	3.76E-04	17.862	11.281	-9.5E-07	-2.585	-4.7E-06	-0.518	4.54E-05	0.795	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-5.236
1.00	5.00	0.039	25.474	-0.134	-0.991	-4.98E-04	-9.96E-05	2.90E-04	4.61E-04	20.833	12.500	-1.0E-06	-4.042	-5.0E-06	-0.808	4.78E-05	0.000	6.045E-22	0.000	-1.99E-07	-6.433