UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“PRODUCTOS CRUZADOS DE HOPF Y SUS HOMOLOGÍAS DE HOCHSCHILD”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

FELIPE CLÍMACO CCOLQUE TAIPE

ASESOR:

Dr. JOE ALBINO PALACIOS BALDEÓN

CO-ASESOR:

Dr. CHRISTIAN HOLGER VALQUI HAASE

LIMA - PERÚ

2024

Dedicatoria

Esta tesis es dedicada a mis padres, Daniel y Vecintina, quienes se esforzaron para darme la educación en vida.

Agradecimientos

En primer lugar, expreso mi agradecimiento especial a mi hermano Adolfo, porque siempre me brinda su apoyo.

Agradezco a todos mis profesores de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa por haber contribuido con sus enseñanzas y dedicación a mi formación académica de pregrado. Por su aporte en mi formación matemática de posgrado, agradezco al Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA-Brasil), a la Universidad Federal de Rio de Janeiro (UFRJ-Brasil), a la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), a la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y al Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA). En especial, expreso mi cordial agradecimiento al Dr. Christian Valqui por haberme asesorado la tesis y guiado a la obtención de Grado Académico de Doctor en Ciencias con mención en Matemática; al Dr. Joe Palacios por su importante colaboración en la ejecución de la tesis, por leer el manuscrito y por sus valiosas sugerencias para corregirlo; a los miembros del jurado de la tesis por dedicar su tiempo, paciencia y amabilidad en la revisión de esta, y por alcanzarme las correcciones pertinentes.

Asimismo, agradezco a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNA-Puno) por haberme dado facilidades para realizar investigaciones y publicaciones, por haberme otorgado la Licencia por Estudios de Doctorado, y a los profesores Roberto Ticona, Faustino Morillo y Mario Quispe de dicha Universidad por asumir mi carga académica o realizar gestiones para continuar mis estudios de doctorado en Matemática.

Agradezco a los estudiantes de maestría y doctorado de IMCA por animarme a concluir el trabajo de tesis y a todo personal que labora en IMCA por darme un ambiente cómodo en infraestructura, atención y conocimientos para la realización de mi graduación y mis estudios de doctorado en matemática. Y finalmente agradezco a todas las personas, que de una u otra forma han contribuido en la realización de este trabajo.

La elaboración de la tesis fue apoyada por FONDECYT (ahora PROCIENCIA) con el contrato 120-2020.

Índice de Contenidos

Resumen

En la actualidad, el álgebra homológica es un área productiva de investigación en matemática. En esta tesis se estudia el producto cruzado introducido por Doi-Takeuchi y Blattner-Cohen-Montgomery en [4] y [3]. Caracterizamos el producto cruzado de Hopf como un módulo con multiplicación que depende de una acción débil y una aplicación bilineal, la cual es normal. Además, tanto la aplicación bilineal como la acción débil satisfacen las condiciones de cociclo y módulo torcido. En el caso en que el cociclo del producto cruzado sea invertible, se caracteriza como una extensión de Galois Hopf con propiedad de base normal y también como una extensión cleft derecha.

Determinamos que las homologías de Hochschild de un producto cruzado son los funtores derivados relativos izquierdos de un funtor covariante aditivo.

Principalmente calculamos la homología de Hochschild del producto cruzado del algebra $K[X]$ cocientado por el ideal generado por $X^t - a$, con el grupo cíclico C_t, para t mayor o igual a 2 bajo ciertas condiciones sobre K y sobre el $2-$cociclo f.

Abstract

Nowadays, homological algebra is a productive area of research in mathematics. In this thesis, we study the crossed product introduced by Doi-Takeuchi and Blattner-Cohen-Montgomery in [4] and [3]. We characterize the Hopf crossed product as a module with multiplication that depends on a weak action and a bilinear mapping, which is normal. Furthermore, both the bilinear map and the weak action satisfy the conditions of cocycle and twisted module. In the case where the cocycle of the crossed product is invertible, it is characterized as a Hopf Galois extension with normal basis property and also as a right cleft extension.

We determine that the Hochschild homologies of a crossed product are the left relative derived functors of an additive covariant functor.

We mainly compute the Hochschild homology of the crossed product of the algebra $K[X]$ modulo the ideal generated by $X^t - a$, with the cyclic group C_t, for t greater than or equal to 2 under certain conditions on K and on the $2-$cocycle f.

Introducción

En 1945, Gerhard Hochschild introdujo la homología de Hochschild para álgebras asociativas. Sea K un anillo conmutativo, E una $K-$álgebra unital asociativa y M un $E-$bimódulo. Conforme a la referencia *[20]*, se puede definir la homología de Hochschild de E con coeficientes en M vía el complejo de Hochschild de E con coeficientes en M:

Definición 0.0.1. *El complejo de cadenas de grupos abelianos (o $K-$módulos), $(C_*(E,M), b_*)$, se llama complejo de Hochschild de E con coeficientes en M; donde $C_n(E,M) := M \otimes_K E^{\otimes^n}$ y $b_n : C_n(E,M) \to C_{n-1}(E,M)$ es dado por*

$$\begin{aligned} b_n(r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n \\ &+ (-1)^n r_n r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} \ . \end{aligned}$$

Definición 0.0.2. *La homología de Hochschild de E con coeficientes en M se define como $H_*(E,M) = \{H_n(E,M)\}$, donde $H_n(E,M)$ es la homología de Hochschild de grado n de E con coeficientes en M dada por*

$$\begin{aligned} H_n(E,M) &:= H_n(C_*(E,M), b_*) \\ &= \frac{Ker(b_n)}{Im(b_{n+1})} \ para\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Si $M = E$, entonces se escribe $HH_n(E) = H_n(E,E)$. En este caso, $HH_*(E) = \{HH_n(E)\}$ es llamada homología de Hochschild de E.

En 1968, se introdujo el producto cruzado de Sweedler en [2], y posteriormente, en los artículos [3] y [4] de 1986, fue extendido en forma independiente omitiendo las suposiciones de conmutatividad y coconmutatividad.
Sean K un anillo conmutativo, A una $K-$álgebra y H una $K-$álgebra de Hopf.

Definición 0.0.3. [3, Defi. 4.1] *Dadas una acción débil de H sobre A (ver Definición 2.3.3), $f : H \times H \to A$ una aplicación $K-$bilineal. El $K-$módulo $A \otimes H$ provisto de multiplicación dada por*

$$(a \otimes h)(b \otimes l) = ab^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(1)}) \otimes h^{(3)} l^{(2)},$$

se llama producto cruzado de Hopf de A por H, si la multiplicación es asociativa y tiene como elemento unitario $1_A \otimes 1_H$. Este producto cruzado se denota por $A\#_f H$.

Ya que $A\#_f H$ es una $K-$álgebra, podemos interesarnos en calcular su homología de Hochschild.

En la literatura se encuentran informaciones acerca de productos cruzados:

- El producto cruzado de Sweedler para una acción de un álgebra de Hopf H sobre un álgebra A ha sido introducido en [2] cuando H es coconmutativo y A es conmutativo.
- Para obtener el teorema de estructura de un comódulo álgebra cleft, Doi y Takeuchi introdujeron en [4] el concepto de producto cruzado.
- Blattner, Cohen y Montgomery desarrollaron una teoría de productos cruzados de Hopf en [3], la utilizaron para expresar un álgebra de Hopf H que es dominio de un epimorfismo $\pi : H \to \overline{H}$ de álgebras de Hopf, que se descompone como morfismo de coálgebras, como un producto cruzado $A\#_f \overline{H}$, donde A es un subálgebra de H.
- Masouka A. [5] aplicó productos cruzados de Hopf para probar la suavidad equivariante de álgebras de Hopf, y la descomposición de superálgebras de Hopf superconmutativas en producto tensorial.

A partir de un producto cruzado de Hopf $E = A\#_f H$ y un $E-$bimódulo M, para abordar las sucesiones espectrales homológicas y cohomológicas asociadas a complejos filtrados de módulos, Jorge Alberto Guccione y Juan José Guccione construyeron en la Sección 2 de [1] los complejos $\widehat{X}_*(E, M)$ y $\widehat{X}^*(E, M)$, más pequeños que los canónicos, dando la homología de Hochschild de E con coeficientes en M y la cohomología de Hochschild de E con coeficientes en M, respectivamente. Como un antecedente principal destacamos el siguiente resultado.

Teorema 0.0.4. [1, Theo. 2.1.1] *La homología de Hochschild de un producto cruzado de Hopf E con coeficientes en un $E-$bimódulo M es la homología del complejo de cadenas*

$$\widehat{X}_*(E,M)\ :\ \widehat{X}_0 \xleftarrow{\widehat{d}_1} \widehat{X}_1 \xleftarrow{\widehat{d}_2} \widehat{X}_2 \xleftarrow{\widehat{d}_3} \widehat{X}_3 \xleftarrow{\widehat{d}_4} \widehat{X}_4 \xleftarrow{\widehat{d}_5} \widehat{X}_5 \xleftarrow{\widehat{d}_6} \widehat{X}_6 \xleftarrow{\widehat{d}_7} \cdots,$$

donde $\widehat{X}_n = \bigoplus_{r+s=n} M \otimes \overline{H}^s \otimes \overline{A}^r$ *y* $\widehat{d}_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{s} \widehat{d}^{\ell}_{rs}$.

El morfismo $\widehat{d}^{\ell}_{rs}$ es definido en la sección 2.1 del artículo [1] y $\widehat{X}_{rs} = M \otimes \overline{H}^s \otimes \overline{A}^r$.

En el caso en que el cociclo f de E es invertible, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 0.0.5. [1, Coro. 4.4] *Las sucesiones espectrales homológicas de Cartan-Leray y de Hochschild-Serre son isomorfas. Además, vale la versión cohomológica.*

En el caso general, el complejo de cadenas $\widehat{X}_*(E,M)$ del Teorema 0.0.4 es demasiado complicado para obtener un cálculo completo de la homología de Hochschild de E con coeficientes en M. Los autores se dieron cuenta de esta dificultad y posteriormente construyeron en la Sección 3 de [27] un complejo de cadenas $\overline{X}_*(M)$ más simple que $\widehat{X}_*(E,M)$, que es útil para calcular las homologías de Hochschild para productos cruzados de tipo $E = A \rtimes_f G$, donde $A = \frac{K[X]}{\langle P \rangle}$ es un álgebra, G es un grupo cíclico finito, P es un polinomio mónico y $G = \langle g \rangle$ actúa sobre A mediante el automorfismo del anillo definido por $x^g = \lambda x + \beta$ con $\lambda, \beta \in K$ (para la definición ver [27, Theo. 2.2]).

Teorema 0.0.6. [27, Theo. 3.1] *La homología de Hochschild de un producto cruzado de una álgebra monogénica con un grupo cíclico finito E con coeficientes en un E-bimódulo M es la homología del complejo de cadenas*

$$\overline{X}_*(E,M)\ :\ \overline{X}_0 \xleftarrow{\overline{d}_1} \overline{X}_1 \xleftarrow{\overline{d}_2} \overline{X}_2 \xleftarrow{\overline{d}_3} \overline{X}_3 \xleftarrow{\overline{d}_4} \overline{X}_4 \xleftarrow{\overline{d}_5} \overline{X}_5 \xleftarrow{\overline{d}_6} \overline{X}_6 \xleftarrow{\overline{d}_7} \cdots,$$

donde $\overline{X}_n = \bigoplus_{r+s=n} M_{rs}$ *y* $\overline{d}_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{\min(2,s)} \overline{d}^{\ell}_{rs}$ *, donde cada M_{rs} es una copia de M.*

El morfismo $\overline{d}^{\ell}_{rs}$ es definido en la Proposición 4.3.10 y $\overline{X}_{rs} = M$.
El complejo de cadenas $\overline{X}_*(E,M)$ se denota por $\overline{X}_*(M)$.

A continuación, se presenta un problema a ser resuelto: Dado un cuerpo K y dada la acción del grupo $C_2 = \{1, g\}$ sobre $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$ definida por $g \cdot 1 = 1$, $g \cdot x = -x$ donde $x = X + \langle X^2 \rangle$; calcular la homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$. Se trata del problema que ha sido propuesto por el profesor Juan José Guccione en el Seminario de AGNC del 2019 realizado en la PUCP.

En esta tesis, estudiamos algunos productos cruzados de Hopf y sus homologías de Hochschild. Durante nuestra investigación, hemos observado que el problema propuesto se puede extender a productos cruzados de la forma $E = \frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 3$, donde la acción del grupo $C_t = \{1, g, \ldots, g^{t-1}\}$ sobre $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle}$ es definida por $g \cdot 1 = 1$, $g \cdot x = \lambda x$, con $x = X + \langle X^t \rangle$ y λ una raíz primitiva t-ésima de la unidad en K, i.e., $\lambda \in \mu_t(K)$.

Cuando K es un cuerpo, conforme a la Proposición 4.1.5 podemos asumir que el $2-$cociclo f de E es la aplicación $f : C_t \times C_t \to A^*$ definida por

$$f_\alpha(g^i, g^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j < t \\ \alpha & \text{si } i + j \geq t \ , \end{cases}$$

donde $0 \leq i, j < t$. Entonces bajo ciertas condiciones sobre K y sobre f, calculamos las homologías de Hochschild de los productos cruzados de la forma $E = A \rtimes_f C_t$ para $t \geq 2$, cuando $A = \frac{K[X]}{\langle P \rangle}$, $C_t = \langle g \rangle$ y la acción de C_t sobre A es dada vía $g \cdot x = \lambda x$ para $\lambda = -1$ o $\lambda \in \mu_t(K)$ para $t \geq 3$ y P un polinomio mónico. Vamos a utilizar la notación $Car(K) \neq 2$ para indicar que la característica del cuerpo K es diferente de dos. En la tabla de resultados 1 presentamos la cualidad de ser nula o no de las homologías de Hochschild de E y nuestros resultados.

<table>
<tr><th colspan="3">Condiciones</th><th colspan="2">Resultados</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$P = X^2 - a$</td><td>$Car(K) = 2$</td><td>$a = 0$, $\alpha \in K^*$</td><td>$HH_n(E) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} E$ para $n > 0$</td><td>T 5.2.18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Car(K) \neq 2$</td><td>$a \neq 0$</td><td>$HH_n(E)$ es nula para $n > 0$</td><td>T 5.2.17</td></tr>
<tr><td>$a = 0$</td><td>$HH_n(E)$ es no nula para $n > 0$</td><td>T 5.2.19</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$P = X^t - a$,
$t \geq 3$</td><td rowspan="2">$\mu_t(K) \neq \emptyset$</td><td>$a \neq 0$</td><td>$HH_n(E)$ es nula para $n > 0$</td><td>T 5.3.11</td></tr>
<tr><td>$a = 0$</td><td>$HH_n(E)$ es no nula para $n > 0$</td><td>T 5.3.12</td></tr>
</table>

Cuadro 1: Tabla de Resultados

En lugar de utilizar el Teorema 0.0.4 para hallar la homología de Hochschild de E con coeficientes en M, haremos uso del método teórico principal dado por el Teorema 3.5.2. Esto nos permite hallar la homología de Hochschild de un producto cruzado general mediante el Corolario 3.5.4.

Demostraremos el Teorema 0.0.6 en la Sección 4.3, reformulando el enunciado de este resultado en el Teorema 4.3.11. Usando adecuadamente el Teorema 0.0.6, conseguimos reducir la solución del problema propuesto y de su extensión al cálculo de homologías de complejos totales de t complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado (ver el Corolario 4.2.8 y el Corolario 4.3.12).

Para obtener sucesivamente nuestros resultados principales el Teorema 5.2.19 y el Teorema 5.3.12, hemos extraído las diferenciales horizontales y las diferenciales verticales de los complejos dobles asociados al producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$, luego las hemos transformado en matrices cuadradas. Esta transformación nos ha permitido simplificar los cálculos técnicos de las homologías de los complejos totales mencionados anteriormente.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1, tratamos la noción de homotopía de contracción de cadenas, la cual relaciona un par de resoluciones proyectivas relativas. Esta homotopía aparece con frecuencia en la construcción de dichas resoluciones. El Teorema 1.3.14 y el Corolario 1.3.15 indican que un producto cruzado de Hopf posee una resolución, y que un par de estas resoluciones difieren por una equivalencia homotópica.

El capítulo 2 está dedicado a la revisión de los resultados básicos de $K-$álgebras y productos cruzados de Hopf. La Proposición 2.2.16 y el Teorema 2.3.10 permiten identificar al producto cruzado $A \rtimes_f G$ de la Definición 4.1.1 como un producto cruzado de Hopf, donde el álgebra de Hopf es $K[G]$.

Dada una extensión finita de Galois E de un cuerpo F con grupo de Galois G, se ha descubierto en (2.15) un isomorfismo de $F-$módulos izquierdos y $F[G]^*-$comódulos derechos para mostrar que E/F tiene la propiedad de base normal. Esto queda ilustrado en el caso $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $F = \mathbb{Q}$ y $G = G(E/F)$. Del Teorema 2.5.8, se deduce que E es un producto cruzado de Hopf.

El capítulo 3 se dedica a la resolución barra normalizada y la resolución proyectiva rela-

tiva para un producto cruzado de Hopf, la relación que hay entre ellas y sus consecuencias para las homologías de Hochschild.
En la prueba de Lema 3.3.2, se introduce una matriz auxiliar asociada a la expresión $b'_n b'_{n+1}(r)$ para deducir con facilidad que $b'_n b'_{n+1} = 0$. Esta técnica se ha utilizado varias veces con la misma finalidad.
Dados $E = C\#_f H$, un producto cruzado de Hopf y M un $E-$bimódulo, el método para hallar la homología de Hochschild de E con coeficientes en M, y la homología de Hochschild de E, son determinados respectivamente con el Teorema 3.5.2 y el Corolario 3.5.4.

En el capítulo 4, se determina que el cálculo de homología de Hochschild de los productos cruzados $\frac{K[X]}{\langle X^t\rangle} \rtimes_f C_t$, para $t \geq 2$, bajo condiciones adecuadas sobre K y sobre f, se reducen al cálculo de homologías de los complejos totales asociados a los productos cruzados. El método del cálculo citado es una adaptación de aquel dado en [27]. Se establecen el Corolario 4.2.8 y el Corolario 4.3.12. Estos resultados son importantes porque proporcionan las diferenciales horizontales y verticales de complejos dobles de cadenas. En el capítulo siguiente, estas diferenciales serán herramientas fundamentales en el cálculo de homologías de los complejos totales.

En el capítulo 5, se resuelven el problema propuesto para la investigación y su extensión antes mencionada. Utilizando nociones de álgebra homológica y traduciendo al lenguaje de matrices las diferenciales horizontales y verticales de los complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado monoparamétrico $\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle} \rtimes_f C_2$, se calcula su homología de Hochschild. Siguiendo el procedimiento anterior, se calcula la homología de Hochschild del producto cruzado biparamétrico $\frac{K[X]}{\langle X^t-a\rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 3$. Los dos resultados principales obtenidos son el Teorema 5.2.19 y el Teorema 5.3.12.

Lista de notaciones

${}_{\Lambda}\mathfrak{Ch}$ categoría de complejos de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos

C_μ cono de mapeo de μ

$\omega_{+1} : \phi\psi \simeq id$ relación de homotopía entre las aplicaciones $\phi\psi$ e id, donde ω_{+1} es la homotopía entre ellas

$\eta : F_1 \dashv F_2$ F_1 es adjunto izquierdo de F_2 con adjunción η

$\mathfrak{m}_S^{\ell}$ categoría de $S-$módulos izquierdos

$\mathscr{E}$ clase de epimorfismos en categoría abeliana $\mathfrak{A}$

E^e álgebra envolvente de E

$\mathscr{E}'$ familia de todos los epimorfismo de S-módulos, que se descomponen como morfismo de R-módulos

$f_q(D)$ $q-$ésima fila del diagrama D

$K[G]$ álgebra de grupo

$*$ producto por convolución

Kan isomorfismo canónico de $K-$módulos

$A\#_f H$ producto cruzado de Hopf de A por H

$A\#H$ producto smash de A y H

$A_f[H]$ producto torcido de A con H

A^H álgebra de $H-$invariantes de A

A^{coH} álgebra de $H-$coinvariantes de A

$(C_*(E,M),b)$ complejo de Hochschild de E con coeficientes en M

$H_*(E,M)$ homología de Hochschild de E con coeficientes en M

$HH_n(E)$ homología de Hochschild de grado n de E

$C_*^{bar}(E)$ la resolución barra de Hochschild de E

(A, μ_A, η_A) $K-$álgebra donde μ_A es la multiplicación de A y η_A es la unidad de A

$\overline{A}$ $K-$módulo cociente Coker(η_A) donde A es una $K-$álgebra

$(B_*(E), b')$ resolución barra normalizada de E

$\overline{B_*(E)}$ complejo aumentado de $B_*(E)$

$(P_*(E), b')$ resolución barra normalizada de $C \subseteq E$

$(\mathscr{A}_*, d)$ resolución proyectiva relativa de un producto cruzado $E = A\#_f H$ como un E^e-módulo izquierdo

$A \rtimes_f G$ producto cruzado de una $K-$álgebra A con un grupo G

$\mathbf{Car}(K)$ característica de un cuerpo K

C_t grupo cíclico de orden t generado por un elemento g para $t \geq 2$

$\mu_t(K)$ conjunto de las raíces primitivas t-ésimas de la unidad en K

$\langle X^t - a\rangle$ ideal de $K[X]$ generado por $X^t - a$

$\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle}$ álgebra cociente $K[X]$ por el ideal generado por $X^t - a$ para $t \geq 2$

$\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t$ producto cruzado de una $K-$álgebra $\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle}$ con un grupo C_t

A^* grupo de unidades de A

(X_*, d_*) resolución proyectiva relativa de un producto cruzado $E = \frac{K[X]}{\langle X^t\rangle} \rtimes_f C_t$ como un $E-$bimódulo

$\overline{X}_*(E, M)$ complejo de cadenas cuya homología es la homología de Hochschild de un producto cruzado de una álgebra monogénica con un grupo cíclico finito E con coeficientes en un E-bimódulo M

$HH_n(A \rtimes_f C_t)$ homología de Hochschild de grado n del producto cruzado de A con C_t

$\{\omega_1, \omega_g, \ldots, \omega_{g^{t-1}}\}$ base del A-módulo libre $E = \bigoplus_{i=0}^{t-1} A\omega_{g^i}$

$\overline{X}_*(A\omega_{g^i})$ complejo total de un complejo doble de cadenas asociado a un producto cruzado $E = \bigoplus_{i=0}^{t-1} A\omega_{g^i}$ para $i = 0, 1, \ldots, t-1$

$K\omega_1$ K-espacio vectorial generado por ω_1

$K\omega_{g^i}$ K-espacio vectorial generado por ω_{g^i} para $1 \leq i \leq t-1$

${}_1D$ **y** ${}_{g^i}D$ **para** $1 \leq i \leq t-1$ complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t$

X_0 complejo total de la columna cero del complejo doble ${}_1D$

$X_{2j-1,2j}$ complejo total de la franja entre las columnas $2j-1$ y $2j$ del complejo doble ${}_1D$ para $j \geq 1$

$X_{2j,2j+1}$ complejo total de la franja entre las columnas $2j$ y $2j+1$ del complejo doble ${}_{g^i}D$ para $j \geq 0$ y para $1 \leq i \leq t-1$

$H_n(X_{2j-1,2j})$ la homología de grado n del complejo total de la franja entre las columnas $2j-1$ y $2j$ de ${}_1D$

$H_n(X_{2j,2j+1})$ la homología de grado n del complejo total de la franja entre las columnas $2j$ y $2j+1$ de ${}_{g^i}D$

$\mathbb{N}_0$ conjunto de enteros no negativos

$\langle e_1, e_2, e_3, \ldots, e_t\rangle$ $K-$espacio vectorial generado por los elementos de la base canónica de K^t.

Ke_{2tm} K-espacio vectorial generado por el elemento e_{2tm} de la base canónica de K^{2tm}

Ke_{2tm+1} K-espacio vectorial generado por el elemento e_{2tm+1} de la base canónica de K^{2tm+t}

Citaciones se utiliza las cuatro primeras letras para citar referencias relativas a definición, proposición, teorema, etc.; independiente del idioma

Capítulo 1

Homotopía de contracción

En la primera sección, introducimos la homotopía de contracción de cadenas y establecemos una condición suficiente para que un morfismo de complejos de cadenas sea una equivalencia homotópica usando el cono de mapeo del morfismo de complejos de cadenas.

En la segunda sección, se introduce una terna (G, F, H) de funtores inducidos por el morfismo dado de anillos unitarios. Establecemos algunas propiedades necesarias de funtores adjuntos. Establecemos que G es adjunto izquierdo de F y que F es adjunto izquierdo de H y deducimos que F preserva monomorfismos y epimorfismos.

En la tercera sección, estudiamos una clase de epimorfismos $\mathscr{E}$ en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, abordando el problema de existencia y unicidad de una resolución $\mathscr{E}-$proyectiva de un objeto de $\mathfrak{A}$. Dado un morfismo de anillos unitarios de R en S, introducimos una clase $\mathscr{E}'$ de todos los epimorfismos de $S-$módulos que se descomponen como morfismos de $R-$módulos, y probamos que esta clase es proyectiva. De esto deducimos que cada $S-$módulo tiene una única salvo homotopías resolución $\mathscr{E}'-$proyectiva.

En la cuarta sección, desarrollamos las ideas expuestas en el apéndice A del artículo [1] para comprobar los resultados principales del método que permite la construcción de una resolución proyectiva relativa de un $S-$módulo N.

1.1 Cono de mapeo y equivalencia homotópica

Sea Λ un anillo. Se denotará por ${}_{\Lambda}\mathfrak{Ch}$ a la categoría de complejos de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos. Sean $f, g \in {}_{\Lambda}\mathfrak{Ch}(C, D)$. Una *homotopía h entre f y g* es una familia de morfismos de $\Lambda-$módulos izquierdos, $h = \{h_{q+1} : C_q \to D_{q+1}\}_{q\geq 0}$, tal que

$$d^D_{q+1} h_{q+1} + h_q d^C_q = f_q - g_q,\ \forall q \geq 0.$$

Definición 1.1.1. Un *complejo de cadenas* $C \in |\,{}_{\Lambda}\mathfrak{Ch}|$ es *contráctil* si existe una homotopía $h = \{h_{q+1} : C_q \to C_{q+1}\}_{q\geq 0}$ entre la identidad id_C y la aplicación nula 0_C. Esta homotopía h se llama *homotopía de contracción de cadenas de C*.

Dado un complejo de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos

$$C:\ 0 \longleftarrow C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \longleftarrow C_{q-1} \xleftarrow{\partial_q} C_q \xleftarrow{\partial_{q+1}} \cdots$$

Como $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ para $q \geq 1$, definimos *la homología de grado q de C* como el $\Lambda-$módulo cociente $H_q(C) = \dfrac{\mathrm{Ker}\,(\partial_q)}{\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})}$. Además, $H_0(C) = \frac{C_0}{\mathrm{Im}(\partial_1)}$.

Proposición 1.1.2. *Si C es un complejo de cadenas contráctil, entonces C es acíclico (i.e., $H_q(C) = 0$, $\forall q \geq 1$).*

Definición 1.1.3. Sea $\mu : (C, d^C) \to (D, d^D)$ un morfismo de complejos de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos. El complejo de cadenas C_μ, definido por

$$(C_\mu)_q = D_q \oplus C_{q-1} \text{ y } d^{C_\mu}_q(b, a) = (d^D_q b - \mu_{q-1} a, -d^C_{q-1} a),\ b \in D_q \text{ y } a \in C_{q-1},$$

es llamado *cono de mapeo de μ*

En seguida, estableceremos una condición suficiente para que un morfismo de complejos de cadenas sea una equivalencia homotópica usando el cono de mapeo del morfismo.

Proposición 1.1.4. *Sea C un complejo de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos, entonces sC, definido por $(sC)_q = C_{q-1}$ y $d^{sC}_q(a) = -d^C_{q-1}(a)$, es un complejo de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos.*

Prueba. Basta notar que $d^{sC}_q d^{sC}_{q+1}(a) = d^C_{q-1} d^C_q(a) = 0$ para $a \in (sC)_{q+1}$. $\square$

Proposición 1.1.5. *Si $\mu : C \to D$ es un morfismo de complejos de cadenas, entonces existe una sucesión exacta corta de complejos de cadenas,*

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0 \ ,$$

de modo que la conectante de la sucesión exacta larga de homologías es $H(\mu) : H(C) \to H(D)$.

Prueba. $i)$ Existe una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0 \ .$$

En efecto, sean

$\lambda_q : D_q \to D_q \oplus C_{q-1} = (C_\mu)_q$ y $\rho_q : (C_\mu)_q = D_q \oplus C_{q-1} \to C_{q-1} = (sC)_q$ dados por $\lambda_q(b) = (b, 0)$ y $\rho_q(b, a) = -a$.

Claramente, λ_q y ρ_q son morfismos de $\Lambda-$módulos izquierdos.

La sucesión $0 \longrightarrow D_q \xrightarrow{\lambda_q} D_q \oplus C_{q-1} \xrightarrow{\rho_q} C_{q-1} \longrightarrow 0$ es exacta, para $q \geq 1$, debido a que se cumplen las tres condiciones siguientes:

(1) λ_q es inyectivo, (2) ρ_q es sobreyectivo y (3) $Im(\lambda_q) = Ker(\rho_q)$.

Falta verificar que $\lambda : D \to C_\mu$ y $\rho : C_\mu \to sC$ son morfismos de complejos de cadenas. Para ello, sea $b \in D_q$ y $(b, a) \in D_q \oplus C_{q-1}$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} d_q\lambda_q(b) &= d_q(b, 0) \\ &= (d_q^D(b) - \mu_{q-1}0, -d_{q-1}^C 0) \\ &= (d_q^D(b), 0) = \lambda_{q-1}d_q^D(b) \quad \text{y} \end{aligned}$$

$d_q^{sC}\rho_q(b, a) = d_q^{sC}(-a) = d_{q-1}^C a = \rho_{q-1}d_q(b, a)$. Por lo tanto, existe

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0 \ ,$$

una sucesión exacta corta de complejos de cadenas.

$ii)$ La conectante de la sucesión exacta larga de homologías es $H(\mu) : H(C) \to H(D)$.

Considerando la sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0 \ ,$$

se tiene el diagrama zig-zag siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
 & D_{q+1} \oplus C_q \ni (0,a) \arrow[r, mapsto, "\rho_{q+1}"] \arrow[d, "d_{q+1}"] & -a \in Z_{q+1}(sC) \arrow[dll, dotted] \\
Z_q(D) \ni -\mu_q(a) \arrow[r, mapsto, "\lambda_q"] & {} &
\end{tikzcd}
$$

$$d_{q+1}(0,a) = (d^D_{q+1}0 - \mu_q a, -d^C_q a) = (-\mu_q a, 0)$$

pues $0 = d^{sC}_{q+1}(a) = -d^C_q(a)$ y así $d^C_q a = 0$.

Como $d^D_q \mu_q(a) = 0$, la conectante $\delta_{q+1} : H_{q+1}(sC) \to H_q(D)$ es dada por $\delta_{q+1}([a]) = [\mu_q(a)] = H_q(\mu)[a]$ para $H_q(\mu) : H_q(C) \to H_q(D)$. Así, la conectante de la sucesión exacta larga de homologías es $\delta = H(\mu) : H(C) \to H(D)$.

$\square$

Un morfismo $g \in {}_\Lambda\mathfrak{Ch}(D,C)$ de complejos de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos es un *inverso homotópico derecho* de un morfismo $f \in {}_\Lambda\mathfrak{Ch}(C,D)$ si $fg \simeq id_D$.

Proposición 1.1.6. *Si existe una homotopía de cadenas entre λ y la aplicación nula, entonces μ tiene inverso homotópico derecho.*

Un morfismo $g \in {}_\Lambda\mathfrak{Ch}(D,C)$ de complejos de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos es un *inverso homotópico izquierdo* de un morfismo $f \in {}_\Lambda\mathfrak{Ch}(C,D)$ si $gf \simeq id_C$.

Proposición 1.1.7. *Si existe una homotopía de cadenas entre ρ y la aplicación nula, entonces μ tiene inverso homotópico izquierdo.*

Un morfismo $f \in {}_\Lambda\mathfrak{Ch}(C,D)$ de complejos de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos es una *equivalencia homotópica* si existe $g \in {}_\Lambda\mathfrak{Ch}(D,C)$ tal que $gf \simeq id_C$ y $fg \simeq id_D$.

Teorema 1.1.8. [11, Exer. 5.8] *Sea $\mu : C \to D$ un morfismo de complejos de cadenas de $\Lambda-$módulos izquierdos. Si C_μ es contráctil, entonces μ es una equivalencia homotópica.*

Prueba. Puesto que C_μ es un complejo de cadenas contráctil, existe una homotopía $h = \{h_{q+1} : (C_\mu)_q \to (C_\mu)_{q+1}\}$ entre la identidad de C_μ y la aplicación nula. Luego

$$d_{q+1}h_{q+1} + h_q d_q = id_{(C_\mu)_q}. \tag{1.1}$$

Según la Proposición 1.1.5, existe la sucesión de complejos de cadenas asociada a μ :

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0 \ ,$$

la cual es exacta, donde $\lambda_q : D_q \to (C_\mu)_q$ y $\rho_q : (C_\mu)_q \to (sC)_q$. De (1.1),
$d_{q+1}h_{q+1}\lambda_q + h_q d_q \lambda_q = \lambda_q$. Haciendo $h'_{q+1} = h_{q+1}\lambda_q : D_q \to (C_\mu)_{q+1}$, como $d_q\lambda_q = \lambda_{q-1}d_q$ se tiene $d_{q+1}h'_{q+1} + h'_q d_q = \lambda_q = \lambda_q - 0$. Así, $h'_{q+1} : D_q \to (C_\mu)_{q+1} = D_{q+1} \oplus C_q$ es una homotopía entre λ y la aplicación nula. Por la Proposición 1.1.6 existe un morfismo $\nu : D \to C$ de complejos de cadenas tal que

$$\mu\nu \simeq id_D. \tag{1.2}$$

Por otro lado, de (1.1): $\rho_q d_{q+1} h_{q+1} + \rho_q h_q d_q = \rho_q$, y como $\rho_q d_{q+1} = d_{q+1}\rho_{q+1}$,
$d_{q+1}\rho_{q+1}h_{q+1} + \rho_q h_q d_q = \rho_q$.
Haciendo $h'_{q+1} = \rho_{q+1}h_{q+1} : (C_\mu)_q \to (sC)_{q+1}$, se sigue que $d_{q+1}h'_{q+1} + h'_q d_q = \rho_q - 0$. Así, $h'_{q+1} : (C_\mu)_q \to (sC)_{q+1}$ es una homotopía entre ρ y la aplicación nula.
Por la Proposición 1.1.7, existe un morfismo $\nu' : D \to C$ de complejos de cadenas tal que $\nu'\mu \simeq id_C$. Puesto que $\nu\mu = id_C\nu\mu \simeq \nu'\mu\nu\mu \simeq \nu' id_D \mu = \nu'\mu$, por transitividad de homotopía

$$\nu\mu \simeq id_C. \tag{1.3}$$

Por (1.2) y (1.3), se concluye que μ es una equivalencia homotópica. $\square$

El recíproco de este teorema es verdadero (ver [13, Theo. 4.2.10]).

1.2 Funtores inducidos por un morfismo de anillos

Dado un morfismo de anillos unitarios $\varrho : R \to S$. Se escribirá $S-$módulo o $R-$módulo en lugar de $S-$módulo izquierdo o $R-$módulo izquierdo. Las pruebas de la siguientes proposiciones se dejan al lector. Estos hechos se pueden ver en [12, pág. 26].

Proposición 1.2.1. *Sea N un $R-$módulo, entonces $S \otimes_R N$ es un $S-$módulo.*

Sea N un $S-$módulo. Tomemos $F_\varrho(N) = N$ como grupo abeliano con una estructura de R-módulo dada por $r \cdot m = \varrho(r) \cdot m$ para $r \in R,\ m \in N$; y $F_\varrho(f)$ como el morfismo inducido de R-módulos.

Proposición 1.2.2. *Existe* $F_\varrho : \mathfrak{m}_S^\ell \to \mathfrak{m}_R^\ell$ *funtor covariante.*

El funtor F_ϱ es llamado el *funtor cambio de anillos.*

Sean N un $R-$módulo, $G_\varrho(N) = S \otimes_R N$ y $G_\varrho(f) = S \otimes_R f$.

Proposición 1.2.3. *Existe* $G_\varrho : \mathfrak{m}_R^\ell \to \mathfrak{m}_S^\ell$ *funtor covariante.*

Sean N un $R-$módulo, $H_\varrho(N) = \mathrm{Hom}_R(S, N)$ y $H_\varrho(\alpha) = \mathrm{Hom}_R(S, \alpha)$.

Proposición 1.2.4. *Existe* $H_\varrho : \mathfrak{m}_R^\ell \to \mathfrak{m}_S^\ell$ *funtor covariante.*

Definición 1.2.5. Sean $F_1 : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2, F_2 : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_1$ funtores covariantes. El *funtor* F_1 es *adjunto izquierdo* de F_2 si existe una equivalencia natural

$$\eta = \eta_{XY} : \mathfrak{C}_2(F_1X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}_1(X, F_2Y)$$

de funtores de $\mathfrak{C}_1^{op} \times \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{S}$ (categoría de conjuntos). En este caso, η se llama *adjunción* y se denota por $\eta : F_1 \dashv F_2$, el hecho que F_1 es adjunto izquierdo de F_2.

Teorema 1.2.6. *Sean* $D \xrightarrow{G} \mathfrak{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{H} \mathfrak{C}$ *funtores covariantes;* $\eta : G \dashv F$ *y* $\eta' : F \dashv H$ *adjunciones, entonces:*

1. *F preserva monomorfismos.*

2. *F preserva epimorfismos.*

Prueba. Usando la Definición 1.2.5, del hecho que $G \dashv F$ se sigue que F preserva monomorfismos. Análogamente, $F \dashv H$ implica que F preserva epimorfismos. $\square$

Puesto que $\mathrm{Hom}_S(S, M) \cong M$ y $S \otimes_S M \cong M$, considerando [10, Exer. III.7.3] se obtiene

Proposición 1.2.7. *Sea* $\varrho : R \to S$ *un morfismo de anillos unitarios.*

1) *Si* $M \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$ *y* $N \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$, *entonces existe una biyección*

$$\eta_1 : Hom_S(S \otimes M, N) \xrightarrow{\sim} Hom_R(M, N).$$

2) *Si* $N \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$ *y* $M \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$, *entonces existe una biyección*

$$\eta_3 : Hom_R(M, N) \xrightarrow{\sim} Hom_S\big(M, Hom_R(S, N)\big).$$

La prueba de la siguiente proposición se puede ver en [12, pág. 26].

Proposición 1.2.8. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *G_ϱ es adjunto izquierdo de F_ϱ; i.e., $G_\varrho \dashv F_\varrho$.*

2. *H_ϱ es adjunto derecho de F_ϱ; i.e., $F_\varrho \dashv H_\varrho$.*

Puesto que $G_\varrho \dashv F_\varrho \dashv H_\varrho$, por el Teorema 1.2.6 se obtiene el resultado siguiente.

Corolario 1.2.9. *Sean $\varrho : R \to S$ un morfismo de anillos unitarios y $F_\varrho : \mathfrak{m}_S^\ell \to \mathfrak{m}_R^\ell$ el funtor de cambio de anillos. Entonces F_ϱ preserva monomorfismos y epimorfismos.*

1.3 Resoluciones proyectivas relativas (RPR)

Dados un morfismo de anillos unitarios $\varrho : R \to S$ y un $S-$módulo N, se desea garantizar que N tiene una resolución proyectiva relativa a la familia de epimorfismos de $S-$módulos que se descomponen como morfismos de $R-$módulos, salvo una equivalencia homotópica.

Un morfismo $f : M \to N$ en una categoría $\mathfrak{C}$ es un epimorfismo si para todos los morfismos $N \underset{g}{\overset{h}{\rightrightarrows}} W$ en $\mathfrak{C}$ tales que $gf = hf$ se tiene que $g = h$.

Sean $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{E}$ una clase de epimorfismos en $\mathfrak{A}$.

Definición 1.3.1. Sea $\varepsilon : B \to C$ un epimorfismo de $\mathfrak{A}$. Un objeto P de $\mathfrak{A}$ se llama *proyectivo relativo a* ε si $\varepsilon_* = \mathfrak{A}(P, \varepsilon) : \mathfrak{A}(P, B) \to \mathfrak{A}(P, C)$ es suryectiva. Es decir, dado $f \in \mathfrak{A}(P, C)$, $\exists g \in \mathfrak{A}(P, B)$ tal que $\varepsilon_*(g) = f$

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

P es llamado *$\mathscr{E}-$proyectivo* si es proyectivo relativo a ε, para todo $\varepsilon \in \mathscr{E}$.

Proposición 1.3.2. *Si P_1 y P_2 son $\mathscr{E}-$proyectivos, entonces $P_1 \oplus P_2$ es $\mathscr{E}-$proyectivo.*

Definición 1.3.3. La *clausura de* $\mathscr{E}$, denotada por $C(\mathscr{E})$, consiste de los epimorfismos ε en $\mathfrak{A}$ tal que cada objeto $\mathscr{E}-$proyectivo de $\mathfrak{A}$ es también proyectivo relativo a ε.
La *clase* $\mathscr{E}$ es llamada *cerrada* si $\mathscr{E} = C(\mathscr{E})$.

Un *epimorfismo* $\varepsilon : A \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow B$ *de* $R-$*módulos se descompone* si existe un morfismo $\nu : B \longrightarrow A$ de $R-$módulos tal que $\varepsilon\nu = id_B$:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, dotted, "\exists\nu"'] \arrow[d, "id_B"] & \\
A \arrow[r, "\varepsilon"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.4. *La clase* $\mathscr{E}_0$ *de epimorfismos de* $R-$*módulos izquierdos que se descomponen es cerrada.*

Definición 1.3.5. Sea $\mathscr{E}$ una clase cerrada de epimorfismos en $\mathfrak{A}$. Un *morfismo* φ de $\mathfrak{A}$ es $\mathscr{E}-$*admisible* si en la descomposición canónica $\varphi = \mu\varepsilon$, donde μ es un monomorfismo y ε es un epimorfismo, entonces se tiene que $\varepsilon \in \mathscr{E}$. Una *sucesión* exacta en $\mathfrak{A}$ es $\mathscr{E}-$*exacta* si todos sus morfismos son $\mathscr{E}-$admisibles. Un *complejo* en $\mathfrak{A}$,

$$K:\ 0 \longleftarrow K_0 \longleftarrow \cdots \longleftarrow K_{q-1} \longleftarrow K_q \longleftarrow \cdots$$

se llama $\mathscr{E}-$*proyectivo* si cada K_q es $\mathscr{E}-$proyectivo; K se llama $\mathscr{E}-$*acíclico* si el complejo aumentado

$$0 \longleftarrow H_0(K) \longleftarrow K_0 \longleftarrow \cdots \longleftarrow K_{q-1} \longleftarrow K_q \longleftarrow \cdots$$

es $\mathscr{E}-$exacta.
El complejo K es una *resolución* $\mathscr{E}-$*proyectiva de* A si K es $\mathscr{E}-$proyectivo, $\mathscr{E}-$acíclico y $H_0(K) \cong A$.

Definición 1.3.6. Una *clase* cerrada $\mathscr{E}$ de epimorfismos de $\mathfrak{A}$ es *proyectiva* si para cada objeto A de $\mathfrak{A}$ existe un epimorfismo $\varepsilon : P \to A$ en $\mathscr{E}$, donde P es $\mathscr{E}-$proyectivo.

Proposición 1.3.7. *La clase* $\mathscr{E}_0$ *de epimorfismos de* $R-$*módulos izquierdos que se descomponen es proyectiva.*

La prueba de la proposición siguiente es análoga a la prueba de [10, Lemm. IV.4.2].

Proposición 1.3.8. *Si $\mathscr{E}$ es una clase proyectiva, entonces cada objeto de $\mathfrak{A}$ posee una resolución $\mathscr{E}-$proyectiva.*

Teorema 1.3.9. [10, Theo. IX.1.3] *Sean*

$$K:\ K_0 \longleftarrow K_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow K_{q-1} \longleftarrow K_q \longleftarrow \cdots \quad y$$

$$L:\ L_0 \longleftarrow L_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow L_{q-1} \longleftarrow L_q \longleftarrow \cdots$$

dos complejos de cadenas en $\mathfrak{A}$. Si K es $\mathscr{E}-$proyectivo y L es $\mathscr{E}-$acíclico, entonces cada morfismo $\alpha : H_0(K) \to H_0(L)$ induce un morfismo de complejos de cadenas $\varphi : K \to L$. Además, dos morfismos de complejos de cadenas inducidos por α son homotópicos.

Prueba. El morfismo de complejos de cadenas $\varphi : K \to L$ se construye recursivamente. Puesto que L es $\mathscr{E}-$acíclico, $0 \longleftarrow H_0(L) \longleftarrow L_0$ es $\mathscr{E}-$exacta.
Si $q = 0$, K_0 es $\mathscr{E}-$proyectivo implica que existe $\varphi_0 : K_0 \to L_0$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_0(L) & L_0 \arrow[l, two heads, "\varepsilon"'] \\
H_0(K) \arrow[u, "\alpha"'] & K_0 \arrow[l] \arrow[u, dotted, "\varphi_0"]
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

es conmutativo, donde $\varepsilon \in \mathscr{E}$.
Si $q > 0$, suponga que $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{q-1}$ están definidos. Se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots & L_{q-2} \arrow[l] & L_{q-1} \arrow[l, "\partial_{q-1}"'] & L_q \arrow[l, "\partial_q"'] \\
\cdots & K_{q-2} \arrow[l] \arrow[u, "\varphi_{q-2}"] & K_{q-1} \arrow[l, "\partial"] \arrow[u, "\varphi_{q-1}"] & K_q \arrow[l, "\partial"] \arrow[u, dotted, "\varphi_q"]
\end{tikzcd}$$

(Si $q = 1$, poniendo $K_{-1} = H_0(K)$, $L_{-1} = H_0(L)$, el cuadrado del lado izquierdo es justamente (1.4)). Claramente se tiene $\partial\varphi_{q-1}\partial = \varphi_{q-2}\partial\partial = 0$, luego
$Im\,(\varphi_{q-1}\partial) \subseteq Ker\,\partial_{q-1}$. Como L es $\mathscr{E}-$acíclico, $Ker\,\partial_{q-1} = Im(\partial_q)$ donde $\partial_q = \mu_q\varepsilon_q$ con $\varepsilon_q \in \mathscr{E}$, de manera que se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Im(\partial_q) & L_q \arrow[l, two heads, "\varepsilon_q"'] \\
K_q \arrow[u, "\varphi_{q-1}\partial"] \arrow[ur, dotted, "\varphi_q"'] &
\end{tikzcd}$$

pues K_q es $\mathscr{E}-$proyectivo, $\varphi_{q-1}\partial : K_q \to Im\,\partial_q$, luego existe $\varphi_q : K_q \to L_q$ tal que $\partial\varphi_q = \varphi_{q-1}\partial$, esto termina el paso inductivo.

Sean $\varphi = \{\varphi_q\}$, $\psi = \{\psi_q\}$ dos morfismos de complejos de cadenas inducidos por $\alpha : H_0(K) \to H_0(L)$, entonces se debe probar que $\varphi \simeq \psi$.

Recursivamente se construye una homotopía $h : \varphi \simeq \psi$.

Si $q = 1$, se considera el diagrama siguiente para hallar h_1:

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0(L) \arrow[l] & L_0 \arrow[l, "\partial"'] & L_1 \arrow[l, "\partial_1"'] \\
0 & H_0(K) \arrow[l] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "h_0"'] & K_0 \arrow[l, "\partial"] \arrow[u, shift right, "\psi_0"] \arrow[u, shift left, "\varphi_0"'] \arrow[ur, dotted, "h_1"'] & K_1 \arrow[l] \arrow[u, shift right, "\psi_1"] \arrow[u, shift left, "\varphi_1"']
\end{tikzcd}$$

Puesto que φ_0 y ψ_0 son ambos inducidos por α : $\partial\psi_0 = \partial\varphi_0 = \alpha\partial$, luego $\partial(\psi_0 - \varphi_0) = 0$. Así $\psi_0 - \varphi_0$ aplica K_0 en $Ker(\partial : L_0 \to H_0(L)) = Im(L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0)$. Como K_0 es $\mathscr{E}-$proyectivo, $\psi_0 - \varphi_0 : K_0 \to Im\partial_1$ y $\partial_1 : L_1 \twoheadrightarrow Im\partial_1$ en $\mathscr{E}$, entonces existe $h_1 : K_0 \to L_1$ tal que $\psi_0 - \varphi_0 = \partial_1 h_1$. Así para $q = 1$ se tiene $\psi_0 - \varphi_0 = \partial_1 h_1 + h_0\partial_0$ donde $h_0 = 0$.

Si $q > 1$, suponga que están definidos $h_1, h_2, \ldots, h_{q-1}$ tales que

$\psi_r - \varphi_r = \partial_{r+1}h_{r+1} + h_r\partial_r$, $r \leq q-2$. Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L_{q-3} & L_{q-2} \arrow[l] & L_{q-1} \arrow[l, "\partial_{q-1}"'] & L_q \arrow[l, "\partial_q"'] \\
K_{q-3} \arrow[ur, "h_{q-2}"'] & K_{q-2} \arrow[l, "\partial_{q-2}"] \arrow[u, shift right, "\psi_{q-2}"] \arrow[u, shift left, "\varphi_{q-2}"'] \arrow[ur, "h_{q-1}"'] & K_{q-1} \arrow[l, "\partial_{q-1}"] \arrow[u, shift right, "\psi_{q-1}"] \arrow[u, shift left, "\varphi_{q-1}"'] \arrow[ur, dotted, "h_q"'] & K_q \arrow[l] \arrow[u, shift right, "\psi_q"] \arrow[u, shift left, "\varphi_q"']
\end{tikzcd}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\partial_{q-1}(\psi_{q-1} - \varphi_{q-1} - h_{q-1}\partial_{q-1}) &= \psi_{q-2}\partial_{q-1} - \varphi_{q-2}\partial_{q-1} - \partial_{q-1}h_{q-1}\partial_{q-1} \\
&= (\psi_{q-2} - \varphi_{q-2} - \partial_{q-1}h_{q-1})\partial_{q-1} \\
&= h_{q-2}\partial_{q-2}\partial_{q-1} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Sea $\delta = \psi_{q-1} - \varphi_{q-1} - h_{q-1}\partial_{q-1} : K_{q-1} \to Ker\,\partial_{q-1} = Im\,\partial_q$. Como $\partial_q : L_q \twoheadrightarrow Im\partial_q$ en $\mathscr{E}$ y K_{q-1} es $\mathscr{E}-$proyectivo, existe $h_q : K_{q-1} \to L_q$ tal que $\delta = \partial_q h_q$. Reemplazando este valor en el primer miembro de la igualdad anterior, deducimos que $\psi_{q-1} - \varphi_{q-1} = \partial_q h_q + h_{q-1}\partial_{q-1}$.

Por inducción $h : \varphi \simeq \psi$. $\square$

La unicidad de resolución $\mathscr{E}-$proyectiva de un objeto es dada por la siguiente.

Proposición 1.3.10. *Dos resoluciones $\mathscr{E}-$proyectivas de un objeto A de $\mathfrak{A}$ son homotópicamente equivalentes.*

Prueba. Sean P y Q dos resoluciones $\mathscr{E}-$proyectivas de A. Por el Teorema 1.3.9, existen morfismos de complejos de cadenas $\varphi : P \to Q$ y $\psi : Q \to P$ inducidos por la identidad de $H_0(P) = A = H_0(Q)$.
La composición $\psi\varphi : P \to P$, así como la identidad $id_P : P \to P$ son morfismos de complejos de cadenas inducidos por id_A. Por el Teorema 1.3.9 $\psi\varphi \simeq id_P$. Análogamente, $\varphi\psi \simeq id_Q$. Por lo tanto, P y Q son homotópicamente equivalentes. $\square$

A continuación se presenta un ejemplo de un epimorfismo de E^e-módulos que se descompone como morfismo de $E-$módulos izquierdos.

Ejemplo 1.3.11. El morfismo $\widetilde{\mu}$ del Teorema 4.3.5 es un epimorfismo de E-bimódulos que se descompone como morfismo de E-módulos izquierdos, pero no se descompone como morfismo de E-bimódulos.

La multiplicación $\mu : E \otimes E \to E$ de una $K-$álgebra E es un epimorfismo de E-bimódulos que se descompone como morfismo de E-módulos izquierdos (vea el Teorema 3.2.9).

En virtud del Corolario 1.2.9 se obtiene lo siguiente.

Ejemplo 1.3.12. Sea $\varrho : R \to S$ un morfismo de anillos unitarios. Un epimorfismo de $S-$módulos que se descompone, también se descompone como morfismo de $R-$módulos.

Sea $\mathscr{E}'$ la familia de los epimorfismos de $S-$módulos que se descomponen como morfismos de R-módulos. La prueba del siguiente lema se realiza aplicando la Proposición 1.2.7.

Lema 1.3.13. *Sea $\varrho : R \to S$ un morfismo de anillos unitarios. Entonces para cada $N \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$, el $S-$módulo $S \otimes_R N$ es $\mathscr{E}'-$proyectivo.*

La prueba del teorema siguiente se hace usando el Corolario 1.2.9, el Lema 1.3.13 y la Proposición 1.2.1.

Teorema 1.3.14. [10, Exer. IX.1.5] *Sean* $\varrho : R \to S$ *un morfismo de anillos unitarios,* $F_\varrho : \mathfrak{m}_S^\ell \to \mathfrak{m}_R^\ell$ *el funtor de cambio de anillos y*

$$\mathscr{E}' = \{\varepsilon' : B \to C,\ \textit{epimorfismo en } \mathfrak{m}_S^\ell \mid F_\varrho(\varepsilon') : F_\varrho(B) \to F_\varrho(C) \textit{ se descompone en } \mathfrak{m}_R^\ell\} \ .$$

Entonces $\mathscr{E}'$ *es una clase proyectiva.*

Puesto que $\mathscr{E}' = \{\varepsilon' : B \twoheadrightarrow C \text{ en } \mathfrak{m}_S^\ell \mid \varepsilon' : B \twoheadrightarrow C \text{ en } \mathfrak{m}_R^\ell \text{ se descompone}\}$ es una clase proyectiva en la categoría abeliana de $S-$módulos izquierdos, usando la Proposición 1.3.8 y el Corolario 1.3.10 se obtiene

Corolario 1.3.15. *Sea* $\varrho : R \to S$ *un morfismo de anillos unitarios. Entonces cada* $S-$*módulo* N *tiene una única resolución proyectiva* P *relativa a la familia de todos los epimorfismos de* $S-$*módulos que se descomponen como morfismos de* $R-$*módulos.*

El Lema 1.3.13, el Teorema 1.3.14 y el Corolario 1.3.15 son los resultados de módulos izquierdos de esta sección; que serán usados en las pruebas del Corolario 1.4.14, del Corolario 3.5.3 y del Teorema 4.3.11, respectivamente.

1.4 Un método para la construcción de RPR

El propósito de esta sección es comprobar los resultados principales del método que permite la construcción de una resolución proyectiva relativa de un $S-$módulo N dada en el Apéndice A del artículo [1], para mostrar las aplicaciones del método en los capítulos 3 y 4 en la teoría de productos cruzados de Hopf.

Dados $\varrho : R \to S$ un morfismo de anillos unitarios y M un $S-$módulo izquierdo. En condiciones adecuadas, es posible construir una resolución proyectiva de M, relativo a la familia de todos los epimorfismos de $S-$módulos, que se descomponen como morfismos de $R-$módulos.

Para ello es necesario construir una homotopía de contracción de un cierto complejo de cadenas, la cual se aplicará a la existencia de la resolución proyectiva referida de M. Estos hechos son establecidos con los dos resultados siguientes el Teorema 1.4.12 y el Corolario 1.4.14:

Dado un complejo de cadenas de $S-$módulos

$$C: \quad C_0 \xleftarrow{d_1^C} C_1 \xleftarrow{d_2^C} \cdots \longleftarrow C_{q-1} \xleftarrow{d_q^C} C_q \xleftarrow{d_{q+1}^C} \cdots,$$

aplicando el funtor de cambio de anillos $F_\varrho : \mathfrak{m}_S^\ell \to \mathfrak{m}_R^\ell$ se ve que C es un complejo de cadenas de $R-$módulos ya que $F_\varrho(d_q^C)F_\varrho(d_{q+1}^C) = F_\varrho(d_q^C d_{q+1}^C) = F_\varrho(0) = 0, \ \forall n \geq 1$, debido a que F es funtor covariante aditivo.

Como $G_\varrho : \mathfrak{m}_R^\ell \to \mathfrak{m}_S^\ell$ es un funtor definido por $G_\varrho(N) = S \otimes N$, por la Proposición 1.2.1, se sabe que a partir de un $R-$módulo N se obtiene un $S-$módulo $S \otimes N$.

Dado el diagrama en $\mathfrak{m}_S^\ell$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, dotted] & & & & \\
B_1 \arrow[u, phantom, "d_2^B"] \arrow[d, "d_1^B"'] & A_{01} \arrow[l, "\psi_1"'] & A_{11} \arrow[l, "d_{11}^0"'] & \arrow[l, "d_{21}^0"'] & \cdots : \ f_1(D) \\
B_0 & A_{00} \arrow[l, "\psi_0"'] & A_{10} \arrow[l, "d_{10}^0"'] & \arrow[l, "d_{20}^0"'] & \cdots : \ f_0(D)
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

que satisface las tres condiciones:

1) La columna y las filas son complejos de cadenas. Es decir, B y $f_q(D) \in |\ {}_S\mathfrak{Ch}|$ para $q \geq 0$.

2) $\forall p, q \geq 0$, existen $\overline{A}_{pq} \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$; $s_{pq} \in \mathfrak{m}_S^\ell(A_{pq}, S \otimes \overline{A}_{pq})$ y $t_{pq} \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes \overline{A}_{pq}, A_{pq})$ tales que $t_{pq}s_{pq} = id_{A_{pq}}$.

3) Para cada $q \geq 0$, $f_q(D) \in |\ {}_R\mathfrak{Ch}|$ es contráctil con homotopía de contracción $\sigma_{0q}^0 : B_q \to A_{0q}$ y $\sigma_{p+1,q}^0 : A_{pq} \to A_{p+1,q}$ $(p \geq 0)$.

Modificamos este diagrama agregando los morfismos en $\mathfrak{m}_S^\ell$

$$d_{pq}^r : A_{pq} \to A_{p+r-1,q-r} \ (p, q \geq 0 \text{ y } 1 \leq r \leq q).$$

Sea, $A_n := \bigoplus_{p+q=n} A_{pq}$ para cada $n \geq 0$. Para $n \geq 1$, $d_n : A_n \to A_{n-1}$ es dado por

$$d_n := \sum_{r=1}^{n} d_{0n}^r + \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=0}^{n-p} d_{p,n-p}^r \ . \tag{1.6}$$

Sea $\varphi = \{\varphi_n : A_n \to B_n\}_{n \geq 0}$ la familia de morfismos en $\mathfrak{m}_S^\ell$ dados por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{si } x \in A_{0n} \\ 0 & \text{si } x \in A_{p,n-p} \ (p > 0), \end{cases}$$

$$\text{es decir,} \quad \varphi_n = \langle \psi_n, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-\text{veces}} \rangle : A_{0n} \oplus A_{1,n-1} \oplus \cdots \oplus A_{n0} \to B_n.$$

Se van a definir las flechas d_{pq}^r de tal manera que (A, d) se convierta en un complejo de cadenas de $S-$módulos, y que $\varphi : (A, d) \to (B, -d^B)$ se convierta en una equivalencia homotópica de complejos de cadenas de $R-$módulos. Según el Teorema 1.1.8 será necesario construir una homotopía de contracción de cadenas de C_φ.

Definición 1.4.1. [1, Defi. A.3] Definimos los *morfismos en* $\mathfrak{m}_S^\ell$,
$d_{pq}^r : A_{pq} \to A_{p+r-1,q-r} (p \geq 0$ y $1 \leq r \leq q)$, recursivamente por $d_{pq}^r = e_{pq}^r s_{pq}$, donde
$e_{pq}^r : S \otimes \overline{A}_{pq} \to A_{p+r-1,q-r}$ $(p \geq 0$ y $1 \leq r \leq q)$ es un morfismo en $\mathfrak{m}_S^\ell$ definido por

$$e_{pq}^r(x) = \begin{cases} -\sigma_{0,q-1}^0 d_q^B \psi_q t_{0q}(x) & \text{si } p = 0 \text{ y } r = 1 \\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \sigma_{r-1,q-r}^0 d_{k-1,q-k}^{r-k} d_{0q}^k t_{0q}(x) & \text{si } p = 0 \text{ y } 1 < r \leq q \\ -\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \sigma_{p+r-1,q-r}^0 d_{p+k-1,q-k}^{r-k} d_{pq}^k t_{pq}(x) & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

para cada $x = 1 \otimes \overline{a} \in S \otimes \overline{A}_{pq}$.

Ejemplo 1.4.2. Verificar que $d_{30}^0 d_{13}^3 = -d_{03}^3 d_{13}^0 - d_{12}^2 d_{13}^1 - d_{21}^1 d_{13}^2$.

Prueba. Se puede obtener con la Proposición 1.4.3 o bien observando el diagrama de la Figura 1.1. □

$$
\begin{tikzcd}
B_4 & A_{04} \arrow[l, "\psi_4"'] \arrow[d, "d^1_{04}"'] \arrow[ddddrrr] & A_{14} \arrow[l, "d^0_{14}"'] \arrow[d, "d^1_{14}"'] & A_{24} \arrow[l, "d^0_{24}"'] \arrow[d, "d^1_{24}"'] \arrow[r, shift left, "h^0_{34}"] & A_{34} \arrow[l, shift left, "d^0_{34}"] \arrow[d, dotted, "d^1_{34}"'] \arrow[r, shift right, "s_{34}"'] & S \otimes_R \overline{A}_{34} \arrow[l, shift right, "t_{34}"'] \arrow[dl, "e^1_{34}"] \\
B_3 \arrow[from=u, "d^B_4"'] \arrow[d, "d^B_3"'] & A_{03} \arrow[l, "\psi_3"'] \arrow[d, "d^1_{03}"'] \arrow[ddr] \arrow[dddrr] & A_{13} \arrow[l, "d^0_{13}"'] \arrow[d, "d^1_{13}"'] \arrow[ddr] \arrow[dddrr] & A_{23} \arrow[l, "d^0_{23}"'] \arrow[d, "d^1_{23}"'] \arrow[ddr] & A_{33} \arrow[l] \arrow[d, "d^1_{33}"'] & \\
B_2 \arrow[d, "d^B_2"'] & A_{02} \arrow[l, "\psi_2"'] \arrow[d, "d^1_{02}"'] \arrow[ddr] & A_{12} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[ddr] & A_{22} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[ddr] & A_{32} \arrow[l] \arrow[d, "d^1_{32}"] & \\
B_1 \arrow[d, "d^B_1"'] & A_{01} \arrow[l, "\psi_1"'] \arrow[d, "d^1_{01}"'] & A_{11} \arrow[l] \arrow[d] & A_{21} \arrow[l] \arrow[d] & A_{31} \arrow[l] \arrow[d] & \\
B_0 & A_{00} \arrow[l, "\psi_0"'] & A_{10} \arrow[l, "d^0_{10}"'] & A_{20} \arrow[l, "d^0_{20}"'] & A_{30} \arrow[l, "d^0_{30}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.1: Construcción recursiva de morfismos d^r_{pq} .

Como $deg(d^k_{pq}) = (k-1,-k)$ y $deg(d^{r-k}_{p+k-1,q-k}) = (r-k-1,-r+k)$ tenemos

$$A_{0q} \xrightarrow{d^k_{0q}} A_{k-1,q-k} \xrightarrow{d^{r-k}_{k-1,q-k}} A_{r-2,q-r} \quad \text{y} \quad A_{pq} \xrightarrow{d^k_{pq}} A_{p+k-1,q-k} \xrightarrow{d^{r-k}_{p+k-1,q-k}} A_{p+r-2,q-r} \ .$$

Luego, tienen sentido las composiciones $d^0_{p+r-1,q-r} d^r_{pq} : A_{pq} \to A_{p+r-2,q-r}$,

$$d^{r-k}_{k-1,q-k} d^k_{0q} : A_{0q} \to A_{r-2,q-r} \quad \text{y} \quad d^{r-k}_{p+k-1,q-k} d^k_{pq} : A_{pq} \to A_{p+r-2,q-r} \ .$$

Como $\mathfrak{m}^\ell_S$ es una categoría abeliana, está definida la suma en $\mathfrak{m}^\ell_S(A_{pq}, A_{p+r-2,q-r})$.

Para probar que (A,d) es un complejo de cadenas se necesita la siguiente proposición.

Proposición 1.4.3. [1, Prop. A.4] *Se tiene* $\psi_{q-1} d^1_{0q} = -d^B_q \psi_q$ *y*

$$d^0_{p+r-1,q-r} d^r_{pq} = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} d^{r-k}_{k-1,q-k} d^k_{0q} & \textit{si } p=0 \ , \ 1 < r \leq q \\ -\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} d^{r-k}_{p+k-1,q-k} d^k_{pq} & \textit{si } p>0 \ , \ 1 \leq r \leq q \end{cases} .$$

Corolario 1.4.4. *(A,d) es un complejo de cadenas de $S-$módulos.*

Prueba. Como $A_{pq} \in |\mathfrak{m}^\ell_S|$ y $\mathfrak{m}^\ell_S$ es una categoría abeliana, $A_n := \bigoplus_{p+q=n} A_{pq} \in |\mathfrak{m}^\ell_S|$ para $n \geq 0$. Por la definición recursiva de d^r_{pq} dada en la Definición 1.4.1, como la composición de morfismos de $S-$módulos, d_{pq}^r es un morfismo de $S-$módulos para $p \geq 0$ y $1 \leq r \leq q$. Luego, como suma de morfismos de $S-$módulos, $d_n : A_n \to A_{n-1}$ dado por

$$d_n = \sum_{r=1}^{n} d_{0n}^r + \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-p} d_{p,n-p}^r$$

es un morfismo en $\mathfrak{m}_S^\ell$ para $n \geq 1$. Falta verificar que $d_n d_{n+1} = 0$ para $n \geq 1$.

Para $n = 1$, $d_1 d_2 = 0$. Este hecho se obtiene usando la Proposición 1.4.3 y la semi-exactitud de la fila cero del diagrama (1.5).

Para $n = 2$, $d_2 d_3 = 0$. En efecto, se cumple $d_2 = d_{02}^1 + d_{02}^2 + d_{11}^0 + d_{11}^1 + d_{20}^0$ y

$d_3 = d_{03}^1 + d_{03}^2 + d_{03}^3 + d_{12}^0 + d_{12}^1 + d_{12}^2 + d_{21}^0 + d_{21}^1 + d_{30}^0$ y

$a = (a_1, a_2, a_3, , a_4) \in A_{03} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{30} = A_3$; de modo que

$d_3(a) = d_{03}^1(a_1) + d_{03}^2(a_1) + d_{03}^3(a_1) + d_{12}^0(a_2) + d_{12}^1(a_2) + d_{12}^2(a_2) + d_{21}^0(a_3) + d_{21}^1(a_3) + d_{30}^0(a_4)$

calculando

$$\left.\begin{aligned}
d_{02}^1 d_3(a) &= d_{02}^1 d_{03}^1(a_1) + d_{02}^1 d_{12}^0(a_2)\\
d_{02}^2 d_3(a) &= d_{02}^2 d_{03}^1(a_1) + d_{02}^2 d_{12}^0(a_2)\\
d_{11}^0 d_3(a) &= d_{11}^0 d_{03}^2(a_1) + d_{11}^0 d_{12}^1(a_2) + d_{11}^0 d_{21}^0(a_3)\\
d_{11}^1 d_3(a) &= d_{11}^1 d_{03}^2(a_1) + d_{11}^1 d_{12}^1(a_2) + d_{11}^1 d_{21}^0(a_3)\\
d_{20}^0 d_3(a) &= d_{20}^0 d_{03}^3(a_1) + d_{20}^0 d_{12}^2(a_2) + d_{20}^0 d_{21}^1(a_3) + d_{20}^0 d_{30}^0(a_4)
\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Haciendo $p = 0$ en la Proposición 1.4.3, se tiene

$d_{20}^0 d_{03}^3 = -\sum_{k=1}^{3-1} d^{3-k} d^k = -d_{02}^2 d_{03}^1 - d_{11}^1 d_{03}^2$, $d_{11}^0 d_{03}^2 = -\sum_{k=1}^{2-1} d^{2-k} d^k = -d_{02}^1 d_{03}^1$.

Para $p > 0$ por la Proposición 1.4.3, tenemos

$d_{20}^0 d_{12}^2 = -\sum_{k=0}^{1} d^{2-k} d^k = -d_{02}^2 d_{12}^0 - d_{11}^1 d_{12}^1$, $d_{11}^0 d_{12}^1 = -\sum_{k=0}^{0} d^{1-k} d^k = -d_{02}^1 d_{12}^0$;

$d_{20}^0 d_{21}^1 = -\sum_{k=0}^{0} d^{1-k} d^k = -d_{11}^1 d_{21}^0$.

Por semi-exactitud de las filas de (1.5) , $d_{11}^0 d_{21}^0 = 0 = d_{20}^0 d_{30}^0$. Sumando las igualdades de (1.7) de izquierda a derecha, columna por columna obtenemos $d_2 d_3(a) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

En general, $d_n d_{n+1} = 0$.

En efecto, como $d_n = \sum_{r=1}^{n} d_{0n}^r + \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-p} d_{p,n-p}^r$ y para $d_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$,

$a = (a_1, \ldots, a_{n+2}) \in A_{n+1}$: $d_{n+1}(a) = \sum_{r=1}^{n+1} d_{0,n+1}^r(a_1) + \sum_{r=0}^{n} d_{1,n}^r(a_2) + \cdots + d_{n+1,0}^0(a_{n+2})$;

de modo que

$$\left.\begin{array}{rclclcccl}
d^1_{0n}d_{n+1}(a) & = & d^1_{0n}d^1_{0,n+1}(a_1) & + & d^1_{0n}d^0_{1,n}(a_2) & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & \\
d^n_{0n}d_{n+1}(a) & = & d^n_{0n}d^1_{0,n+1}(a_1) & + & d^n_{0n}d^0_{1,n}(a_2) & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & \\
d^0_{n0}d_{n+1}(a) & = & d^0_{n0}d^{n+1}_{0,n+1}(a_1) & + & d^0_{n0}d^n_{1,n}(a_2) & + & \cdots & + & d^0_{n0}d^0_{n+1,0}(a_{n+2})
\end{array}\right\}$$

Usando la semi-exactitud de las filas del diagrama (1.5), aplicando la Proposición 1.4.3 como en el caso $n = 2$ y sumando columna a columna este arreglo, se deduce que
$d_n d_{n+1}(a) = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n+2-veces} = 0.$ $\square$

Usando la Proposición 1.4.3 y la semi-exactitud de la filas del diagrama (1.5) se obtiene el siguiente resultado

Proposición 1.4.5. *La aplicación $\varphi : (A, d) \to (B, -d^B)$ es un morfismo de complejos de cadenas de $S-$módulos.*

Tomando $\mu = \varphi$, $(C, d^C) = (A, d)$, $(D, d^D) = (B, -d^B)$ en la Definición 1.1.3; para el morfismo de complejos de cadenas $\varphi : (A, d) \to (B, -d^B)$ de $S-$módulos se definen

$$(C_\varphi)_q = B_q \oplus A_{q-1} \text{ y } d_q^{C_\varphi}(y_q, x_{q-1}) = (-d_q^B y_q - \varphi_{q-1}x_{q-1}, -d_{q-1}x_{q-1}).$$

Por consiguiente, C_φ es un complejo de cadenas de $S-$módulos.

Para demostrar que φ es una equivalencia homotópica de complejos de cadenas de $R-$módulos, construiremos los morfismos en $\mathfrak{m}^\ell_R$, $\sigma^r_{r,q-r} : B_q \to A_{r,q-r}$ y
$\sigma^r_{p+r+1,q-r} : A_{pq} \to A_{p+r+1,q-r}$ $(p, q \geq 0\ ,\ 1 \leq r \leq q)$, satisfaciendo el Teorema 1.4.12.

Definición 1.4.6. [1, Defi. A.5] Definimos $\sigma^r_{r,q-r} : B_q \to A_{r,q-r}$ y
$\sigma^r_{p+r+1,q-r} : A_{pq} \to A_{p+r+1,q-r}$ $(0 < r \leq q\ ,\ p \geq 0)$, recursivamente por
$\sigma^r_{p+r+1,q-r} = -\sum_{i=0}^{r-1} \sigma^0_{p+r+1,q-r} d^{r-i}_{p+i+1,q-i} \sigma^i_{p+i+1,q-i}$ $(0 < r \leq q\ ,\ p \geq -1)$.

Ejemplo 1.4.7. $\sigma^1_{11} = -\sigma^0_{11}d^1_{02}\sigma^0_{02}$ y $\sigma^2_{30} = -\sigma^0_{30}d^2_{12}\sigma^0_{12} - \sigma^0_{30}d^1_{21}\sigma^1_{21}$.

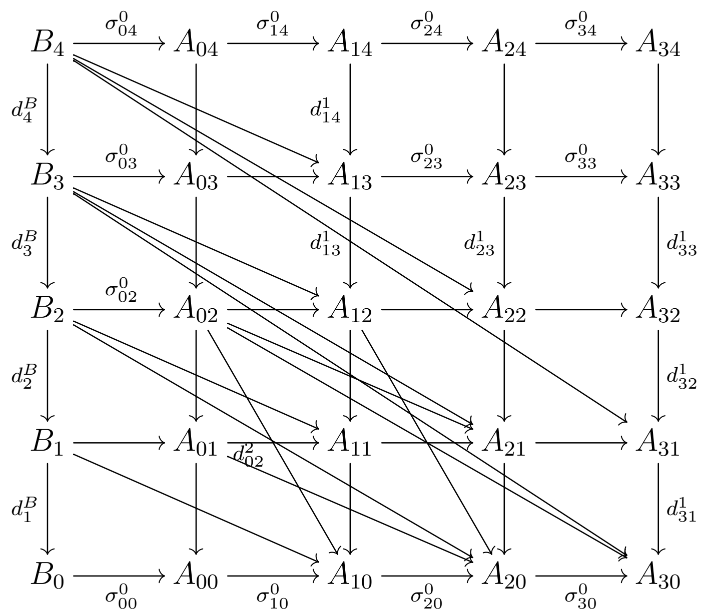

Figura 1.2: Construcción recursiva de morfismos $\sigma^r_{p'q'}$.

Teniendo en cuenta la definición de los morfismos d^r_{pq} y $\sigma^r_{p'q'}$ y adoptando las notaciones $d^0_{0q} = \psi_q$, $d^1_{-1,q} = d^B_q$, $d^r_{-1,q} = 0\ \forall r > 1$ y $d^0_{-1,q} = 0$ se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.4.8. *Se verifican las dos fórmulas*

$$\sigma^0_{pq} d^0_{pq} + d^0_{p+1,q}\sigma^0_{p+1,q} = id_{A_{pq}} \quad , \quad \sum_{i=0}^{r} \sigma^{r-i}_{p+r,q-r} d^i_{pq} + \sum_{i=0}^{r} d^{r-i}_{p+i+1,q-i}\sigma^i_{p+i+1,q-i} = 0 \ (r > 0) \ .$$

Prueba. La prueba está dada en [1, Proof of Theorem A.1]. □

$$\text{Sea } \hat{\sigma}_n = \sum_{r=0}^{n} \sigma^r_{r,n-r} : B_n \to A_n \text{ un morfismo de } R\text{−módulos.} \qquad (1.8)$$

Esta notación utilizaremos en el siguiente ejemplo y en lo que resta de esta sección.

Ejemplo 1.4.9. $d_3\hat{\sigma}_3 y + \hat{\sigma}_2 d^B_3 y = 0$ para $y \in B_3$.

Puesto que $\hat{\sigma}_3 = \sigma^0_{03} + \sigma^1_{12} + \sigma^2_{21} + \sigma^3_{30}$, $d_3 = d^1_{03} + d^2_{03} + d^3_{03} + d^0_{12} + d^1_{12} + d^2_{12} + d^0_{21} + d^1_{21} + d^0_{30}$, deducimos que

$$\begin{aligned} d_3\hat{\sigma}_3 y &= d_3(\sigma^0_{03}y + \sigma^1_{12}y + \sigma^2_{21}y + \sigma^3_{30}y) \\ &= d^1_{03}\sigma^0_{03}y + d^2_{03}\sigma^0_{03}y + d^3_{03}\sigma^0_{03}y + d^0_{12}\sigma^1_{12}y \\ &+ d^1_{12}\sigma^1_{12}y + d^2_{12}\sigma^1_{12}y + d^0_{21}\sigma^2_{21}y + d^1_{21}\sigma^2_{21}y + d^0_{30}\sigma^3_{30}y \ . \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Además $\hat{\sigma}_2 = \sigma_{02}^0 + \sigma_{11}^1 + \sigma_{20}^2$ y

$$\hat{\sigma}_2 d_3^B y = \sigma_{02}^0 d_3^B y + \sigma_{11}^1 d_3^B y + \sigma_{20}^2 d_3^B y \ . \tag{1.10}$$

Sumando (1.9) y (1.10) obtenemos

$$\begin{aligned} d_3\hat{\sigma}_3 y + \hat{\sigma}_2 d_3^B y &= (\sigma_{02}^1 d_{-1,3}^0 y + \sigma_{02}^0 d_{-1,3}^1 y + d_{03}^1 \sigma_{03}^0 y + d_{12}^0 \sigma_{12}^1 y) + (\sigma_{11}^2 d_{-1,3}^0 y + \sigma_{11}^1 d_{-1,3}^1 y \\ &+ \sigma_{11}^0 d_{-1,3}^2 y + d_{03}^2 \sigma_{03}^0 y + d_{12}^1 \sigma_{12}^1 y + d_{21}^0 \sigma_{21}^2 y) + (\sigma_{20}^3 d_{-1,3}^0 y + \sigma_{20}^2 d_{-1,3}^1 y \\ &+ \sigma_{20}^1 d_{-1,3}^2 y + \sigma_{20}^0 d_{-1,3}^3 y + d_{03}^3 \sigma_{03}^0 y + d_{12}^2 \sigma_{12}^1 y + d_{21}^1 \sigma_{21}^2 y + d_{30}^0 \sigma_{30}^3 y) \ ; \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} d_3\hat{\sigma}_3 y + \hat{\sigma}_2 d_3^B y &= \sum_{i=0}^{1} \sigma_{02}^{1-i} d_{-1,3}^i y + \sum_{i=0}^{1} d_{i,3-i}^{1-i} \sigma_{i,3-i}^i y \text{ para } (p,q,r) = (-1,3,1) \\ &+ \sum_{i=0}^{2} \sigma_{11}^{2-i} d_{-1,3}^i y + \sum_{i=0}^{2} d_{i,3-i}^{2-i} \sigma_{i,3-i}^i y \text{ para } (p,q,r) = (-1,3,2) \\ &+ \sum_{i=0}^{3} \sigma_{20}^{3-i} d_{-1,3}^i y + \sum_{i=0}^{3} d_{i,3-i}^{3-i} \sigma_{i,3-i}^i y \text{ para } (p,q,r) = (-1,3,3) \ . \end{aligned}$$

Por el Lema 1.4.8 $d_3\hat{\sigma}_3 y + \hat{\sigma}_2 d_3^B y = 0$. □

$$\text{Sea } \tilde{\sigma}_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} \sigma_{p+r+1,n-1-p-r}^r : A_{n-1} \to A_n \text{ un morfismo de } R\text{−módulos.} \tag{1.11}$$

Ejemplo 1.4.10. $d_3\tilde{\sigma}_3(x) + \hat{\sigma}_2\varphi_2(x) + \tilde{\sigma}_2 d_2(x) = id_{A_2}(x)$ para
$x = (x_1, x_2, x_3) \in A_2 = A_{02} \oplus A_{11} \oplus A_{20}$.

Puesto que $\tilde{\sigma}_3 x = \sigma_{12}^0 x_1 + \sigma_{21}^1 x_1 + \sigma_{30}^2 x_1 + \sigma_{21}^0 x_2 + \sigma_{30}^1 x_2 + \sigma_{30}^0 x_3$ y $d_3 = d_{03}^1 + d_{03}^2 + d_{03}^3 + d_{12}^0 + d_{12}^1 + d_{12}^2 + d_{21}^0 + d_{21}^1 + d_{30}^0$,

$$\begin{aligned} d_3\tilde{\sigma}_3 x &= d_{12}^0 \sigma_{12}^0 x_1 + d_{12}^1 \sigma_{12}^0 x_1 + d_{12}^2 \sigma_{12}^0 x_1 + d_{21}^0 \sigma_{21}^1 x_1 + d_{21}^0 \sigma_{21}^0 x_2 \\ &+ d_{21}^1 \sigma_{21}^1 x_1 + d_{21}^1 \sigma_{21}^0 x_2 + d_{30}^0 \sigma_{30}^2 x_1 + d_{30}^0 \sigma_{30}^1 x_2 + d_{30}^0 \sigma_{30}^0 x_3 \ ; \end{aligned} \tag{1.12}$$

$\hat{\sigma}_2 = \sigma_{02}^0 + \sigma_{11}^1 + \sigma_{20}^2$ y

$$\hat{\sigma}_2 \varphi_2 x = \sigma_{02}^0 \varphi_2 x + \sigma_{11}^1 \varphi_2 x + \sigma_{20}^2 \varphi_2 x \ ; \tag{1.13}$$

$\tilde{\sigma}_2 = \sigma^0_{11} + \sigma^1_{20} + \sigma^0_{20}$ y $d_2 = d^1_{02} + d^2_{02} + d^0_{11} + d^1_{11} + d^0_{20}$,

$d_2x = \underbrace{d^1_{02}x_1}_{\in A_{01}} + \underbrace{d^2_{02}x_1}_{\in A_{10}} + \underbrace{d^0_{11}x_2}_{\in A_{01}} + \underbrace{d^1_{11}x_2}_{\in A_{10}} + \underbrace{d^0_{20}x_3}_{\in A_{10}}$;

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_2 d_2 x &= \sigma^0_{11}d^1_{02}x_1 + \sigma^0_{11}d^0_{11}x_2 + \sigma^1_{20}d^1_{02}x_1 + \sigma^1_{20}d^0_{11}x_2 \\ &+ \sigma^0_{20}d^2_{02}x_1 + \sigma^0_{20}d^1_{11}x_2 + \sigma^0_{20}d^0_{20}x_3 \ ; \end{aligned} \tag{1.14}$$

sumando (1.12), (1.13) y (1.14) :

$d_3\tilde{\sigma}_3x+\hat{\sigma}_2\varphi_2x+\tilde{\sigma}_2d_2x = (\sigma^0_{02}\psi_2x_1+d^0_{12}\sigma^0_{12}x_1)+(\sigma^0_{11}d^0_{11}x_2+d^0_{21}\sigma^0_{21}x_2)+(\sigma^0_{20}d^0_{20}x_3+d^0_{30}\sigma^0_{30}x_3)+$ $(\sigma^1_{11}d^0_{02}x_1 + \sigma^0_{11}d^1_{02}x_1 + d^1_{12}\sigma^0_{12}x_1 + d^0_{21}\sigma^1_{21}x_1) + (\sigma^2_{20}d^0_{02}x_1 + \sigma^1_{20}d^1_{02}x_1 + \sigma^0_{20}d^2_{02}x_1 + d^2_{12}\sigma^0_{12}x_1 +$ $d^1_{21}\sigma^1_{21}x_1 + d^0_{30}\sigma^2_{30}x_1) + (\sigma^1_{20}d^0_{11}x_2 + \sigma^0_{20}d^1_{11}x_2 + d^1_{21}\sigma^0_{21}x_2 + d^0_{30}\sigma^1_{30}x_2)$

$$\begin{aligned} &= id_{A_2}(x) + (\sum_{i=0}^{1}\sigma^{1-i}_{11}d^i_{02} + \sum_{i=0}^{1} d^{1-i}_{i+1,2-i}\sigma^i_{i+1,2-i})(x_1) \text{ para } (p,q,r) = (0,2,1) \\ &+ (\sum_{i=0}^{2}\sigma^{2-i}_{20}d^i_{02} + \sum_{i=0}^{2} d^{2-i}_{i+1,2-i}\sigma^i_{i+1,2-i})(x_1) \text{ para } (p,q,r) = (0,2,2) \\ &+ (\sum_{i=0}^{1}\sigma^{1-i}_{20}d^i_{11} + \sum_{i=0}^{1} d^{1-i}_{2+i,1-i}\sigma^i_{2+i,1-i})(x_2) \text{ para } (p,q,r) = (1,1,1) \ . \end{aligned}$$

Por el Lema 1.4.8 $d_3\tilde{\sigma}_3x + \hat{\sigma}_2\varphi_2x + \tilde{\sigma}_2d_2x = id_{A_2}(x)$. □

Lema 1.4.11. *Si se cumplen las igualdades*

$$\sigma^0_{pq}d^0_{pq} + d^0_{p+1,q}\sigma^0_{p+1,q} = id_{A_{pq}} \quad , \quad \sum_{i=0}^{r}\sigma^{r-i}_{p+r,q-r}d^i_{pq} + \sum_{i=0}^{r} d^{r-i}_{p+i+1,q-i}\sigma^i_{p+i+1,q-i} = 0 \ (r > 0)$$

entonces

$$d_n\hat{\sigma}_n + \hat{\sigma}_{n-1}d^B_n = 0 \quad y \quad d_n\tilde{\sigma}_n + \hat{\sigma}_{n-1}\varphi_{n-1} + \tilde{\sigma}_{n-1}d_{n-1} = id_{A_{n-1}} \ . \tag{1.15}$$

Prueba. Sea $(y,x) \in (C_\varphi)_n = B_n \oplus A_{n-1}$.

Entonces procediendo como en el Ejemplo 1.4.9

$$\begin{aligned} d_n\hat{\sigma}_n y + \hat{\sigma}_{n-1}d^B_n y &= \sum_{i=0}^{1}\sigma^{1-i}_{0,n-1}d^i_{-1,n}y + \sum_{i=0}^{1} d^{1-i}_{i,n-i}\sigma^i_{i,n-i}y \text{ para } (p,q,r) = (-1,n,1) \\ &+ \sum_{i=0}^{2}\sigma^{2-i}_{1,n-2}d^i_{-1,n}y + \sum_{i=0}^{2} d^{2-i}_{i,n-i}\sigma^i_{i,n-i}y \text{ para } (p,q,r) = (-1,n,2) \\ &\ \vdots \\ &+ \sum_{i=0}^{n}\sigma^{n-i}_{n-1,0}d^i_{-1,n}y + \sum_{i=0}^{n} d^{n-i}_{i,n-i}\sigma^i_{i,n-i}y \text{ para } (p,q,r) = (-1,n,n) \ . \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis, obtenemos $d_n\hat{\sigma}_n y + \hat{\sigma}_{n-1}d_n^B y = 0$.

Por otro lado, siguiendo el Ejemplo 1.4.10 tenemos

$$
\begin{array}{ll}
 & d_n\tilde{\sigma}_n x + \hat{\sigma}_{n-1}\varphi_{n-1}x + \tilde{\sigma}_{n-1}d_{n-1}x = id_{A_{n-1}}(x) \\
+ & (\sum_{i=0}^{1} \sigma^{1-i}_{1,n-2}d^i_{0,n-1} + \sum_{i=0}^{1} d^{1-i}_{i+1,n-1-i}\sigma^i_{i+1,n-1-i})(x_1) \text{ para } (p,q,r) = (0,n-1,1) \\
\vdots & \\
+ & (\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^{n-1-i}_{n-1,0}d^i_{0,n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} d^{n-1-i}_{i+1,n-1-i}\sigma^i_{i+1,n-1-i})(x_1) \text{ para } (p,q,r) = (0,n-1,n-1) \\
+ & (\sum_{i=0}^{1} \sigma^{1-i}_{2,n-3}d^i_{1,n-2} + \sum_{i=0}^{1} d^{1-i}_{i+2,n-2-i}\sigma^i_{i+2,n-2-i})(x_2) \text{ para } (p,q,r) = (1,n-2,1) \\
\vdots & \\
+ & (\sum_{i=0}^{n-2} \sigma^{n-2-i}_{n-1,0}d^i_{1,n-2} + \sum_{i=0}^{n-2} d^{n-2-i}_{i+2,n-2-i}\sigma^i_{i+2,n-2-i})(x_2) \text{ para } (p,q,r) = (1,n-2,n-2) \\
+ & \cdots \\
+ & (\sum_{i=0}^{1} \sigma^{1-i}_{n-2,1}d^i_{n-3,2} + \sum_{i=0}^{1} d^{1-i}_{n-2+i,2-i}\sigma^i_{n-2+i,2-i})(x_{n-2}) \text{ para } (p,q,r) = (n-3,2,1) \\
+ & (\sum_{i=0}^{2} \sigma^{2-i}_{n-1,0}d^i_{n-3,2} + \sum_{i=0}^{2} d^{2-i}_{n-2+i,2-i}\sigma^i_{n-2+i,2-i})(x_{n-2}) \text{ para } (p,q,r) = (n-3,2,2) \\
+ & (\sum_{i=0}^{1} \sigma^{1-i}_{n-1,0}d^i_{n-2,1} + \sum_{i=0}^{1} d^{1-i}_{n-1+i,1-i}\sigma^i_{n-1+i,1-i})(x_{n-1}) \text{ para } (p,q,r) = (n-2,1,1) \ ,
\end{array}
$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in A_{n-1} = A_{0,n-1} \oplus \cdots \oplus A_{n-2,1} \oplus A_{n-1,0}$.

Por hipótesis, $d_n\tilde{\sigma}_n x + \hat{\sigma}_{n-1}\varphi_{n-1}x + \tilde{\sigma}_{n-1}d_{n-1}x = id_{A_{n-1}}(x)$. □

Considerando la Figura 1.2 vemos que

$\sigma_1 : (C_\varphi)_0 = B_0 \oplus \{0\} \to (C_\varphi)_1 = B_1 \oplus A_0$ es dado por $\sigma_1 = -\sigma^0_{00}$;

$\sigma_2 : (C_\varphi)_1 \to (C_\varphi)_2 = B_2 \oplus A_1$ es dado por

$$\sigma_2 = (-\sigma^0_{01} - \sigma^1_{10}) + (-\sigma^0_{10}) \ ;$$

$\sigma_3 : (C_\varphi)_2 \to (C_\varphi)_3 = B_3 \oplus A_2$ es dado por $\sigma_3 = (-\sigma^0_{02} - \sigma^1_{11} - \sigma^2_{20}) + (-\sigma^0_{11} - \sigma^1_{20}) + (-\sigma^0_{20})$.

Luego, $\quad \sigma_3 = \sigma_{2+1} = -\sum_{p=-1}^{2-1}\sum_{r=0}^{2-1-p} \sigma^r_{p+r+1,2-1-p-r}$.

En general, para cada $n \geq 0$, $\sigma_{n+1} : (C_\varphi)_n \to (C_\varphi)_{n+1}$ es dado por

$$\sigma_{n+1} = -\sum_{p=-1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1-p} \sigma^r_{p+r+1,n-1-p-r} \ .$$

Recordando el concepto de homotopía de contracción dada en la Definición 1.1.1, con las dos identidades (1.15) del lema anterior se puede demostrar el siguiente resultado. Para ello, recordemos que el cono de mapeo de φ, se define por

$(C_\varphi)_q = B_q \oplus A_{q-1}$ y $d_q^{C_\varphi} : (C_\varphi)_q \to (C_\varphi)_{q-1}$ mediante

$$d_q^{C_\varphi}(y,x) = (-d_q^B y - \varphi_{q-1}x, -d_{q-1}x) \ . \tag{1.16}$$

Teorema 1.4.12. [1, Theo. A.1] *La familia de morfismos en* $\mathfrak{m}_R^\ell$,

$\{\sigma_{n+1} : (C_\varphi)_n \to (C_\varphi)_{n+1}\}_{n\geq 0}$, *definidos por*

$$\sigma_{n+1} = -\sum_{p=-1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1-p} \sigma^r_{p+r+1,n-1-p-r} \ , \tag{1.17}$$

es una homotopía de contracción de cadenas de C_φ.

Prueba. Sean $\hat{\sigma}_n = \sum_{r=0}^{n} \sigma^r_{r,n-r}$ y $\tilde{\sigma}_n = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1-p} \sigma^r_{p+r+1,n-1-p-r}$, entonces

$\sigma_{n+1} = -\hat{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_n$.

Sea $C_\varphi :\ (C_\varphi)_0 \underset{\sigma_1}{\overset{d_1^{C_\varphi}}{\rightleftarrows}} (C_\varphi)_1 \underset{h_2}{\overset{d_2^{C_\varphi}}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\sigma_n}{\overset{d_n^{C_\varphi}}{\rightleftarrows}} (C_\varphi)_n \underset{\sigma_{n+1}}{\overset{d_{n+1}^{C_\varphi}}{\rightleftarrows}} \cdots$

Se verifica que $d_1^{C_\varphi}\sigma_1 = id_{(C_\varphi)_0}$.

En efecto, para $(y,0) \in (C_\varphi)_0 = B_0 \oplus \{0\} :\ \sigma_1(y,0) = -\hat{\sigma}_0(y)$,

$$\begin{aligned}
d_1^{C_\varphi}\sigma_1(y,0) = d_1^{C_\varphi}\big(-\hat{\sigma}_0(y)\big) &= \Big(-d_1^B(0) - \varphi_0\big(-\hat{\sigma}_0(y)\big), -d_0\big(-\hat{\sigma}_0(y)\big)\Big)\\
&= \big(\varphi_0\hat{\sigma}_0(y), d_0\hat{\sigma}_0(y)\big) \quad ; \quad d_0 = 0\ ,\ \varphi_0 = \psi_0\\
&= \big(\psi_0\hat{\sigma}_0(y), 0\big) \quad ; \quad \hat{\sigma}_0 = \sigma^0_{00} \text{ y } f_0(D) \text{ es contráctil}\\
&= \big(id_{B_0}(y), 0\big) = (y,0) = id_{(C_\varphi)_0}(y,0).
\end{aligned}$$

En general, $d_{n+1}^{C_\varphi}\sigma_{n+1} + \sigma_n d_n^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_n}$ $(n \geq 0)$.

En efecto, se verifica por inducción. Primero, si $n = 0$, por la verificación anterior se tiene que $d_1^{C_\varphi}\sigma_1 + \sigma_0 d_0^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_0}$. Como hipótesis inductiva se tiene que

$$d_{k+1}^{C_\varphi}\sigma_{k+1} + \sigma_k d_k^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_k}\ , \text{ para } 0 \leq k < n,$$

entonces $d_{n+1}^{C_\varphi}\sigma_{n+1} + \sigma_n d_n^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_n}$.

En efecto, para $(y,x) \in (C_\varphi)_n = B_n \oplus A_{n-1}$ se tiene $\sigma_{n+1}(y,x) = -\hat{\sigma}_n(y) - \tilde{\sigma}_n(x)$,

$$\begin{aligned}
d_{n+1}^{C_\varphi}\sigma_{n+1}(y,x) &= d_{n+1}^{C_\varphi}\big(-\hat{\sigma}_n(y) - \tilde{\sigma}_n(x)\big)\\
&= \big(\varphi_n\hat{\sigma}_n(y) + \varphi_n\tilde{\sigma}_n(x), d_n\hat{\sigma}_n(y) + d_n\tilde{\sigma}_n(x)\big); \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_n^{C_\varphi}(y,x) &= \big(-d_n^B(y)-\varphi_{n-1}x,-d_{n-1}x\big),\\
\sigma_n d_n^{C_\varphi}(y,x) &= \hat{\sigma}_{n-1}d_n^B(y)+\hat{\sigma}_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\tilde{\sigma}_{n-1}d_{n-1}(x).
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

Sumando (1.18) y (1.19):

$$
\begin{aligned}
&d_{n+1}^{C_\varphi}\sigma_{n+1}(y,x)+\sigma_n d_n^{C_\varphi}(y,x)=\big(\varphi_n\hat{\sigma}_n(y)+\varphi_n\tilde{\sigma}_n(x),\\
&d_n\hat{\sigma}_n(y)+d_n\tilde{\sigma}_n(x)+\hat{\sigma}_{n-1}d_n^B(y)+\hat{\sigma}_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\tilde{\sigma}_{n-1}d_{n-1}(x)\big).
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

Calculando

$$
\varphi_n\tilde{\sigma}_n(x)=\varphi_n\left(\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1-p}\sigma^r_{p+r+1,n-1-p-r}\right)(x)=0,
$$

pues $p+r+1>0$.

$$
\varphi_n\hat{\sigma}_n(y)=\varphi_n(\sigma^0_{0,n}+\sigma^1_{1,n-1}+\cdots+\sigma^n_{n,0})(y)=\psi_n\sigma^0_{0,n}(y),
$$

$$
\text{pues } \varphi_n(z)=\begin{cases}\psi_n(z) & ,z\in A_{0n}\\ 0 & ,z\in A_{p,n-p},p\neq 0\end{cases}
$$

$$
=id_{B_n}(y)\ \text{ porque } f_n(D) \text{ es contráctil.}
$$

Así, $\varphi_n\hat{\sigma}_n(y)+\varphi_n\tilde{\sigma}_n(x)=id_{B_n}(y)=y$. Por el Lema 1.4.11

$$
d_n\hat{\sigma}_n+\hat{\sigma}_{n-1}d_n^B=0 \qquad \text{y} \qquad d_n\tilde{\sigma}_n+\hat{\sigma}_{n-1}\varphi_{n-1}+\tilde{\sigma}_{n-1}d_{n-1}=id_{A_{n-1}}\ .
$$

Al sustituir estos valores en (1.20) obtenemos

$$
d_{n+1}^{C_\varphi}\sigma_{n+1}(y,x)+\sigma_n d_n^{C_\varphi}(y,x)=(y,x)=id_{(C_\varphi)_n}(y,x).
$$

□

El siguiente lema es una consecuencia del Lema 1.3.13.

Lema 1.4.13. *Sea $A\in|\mathfrak{m}_S^\ell|$. Si existen $\overline{A}\in|\mathfrak{m}_R^\ell|$, $s\in\mathfrak{m}_S^\ell(A,S\otimes\overline{A})$ y $t\in\mathfrak{m}_S^\ell(S\otimes\overline{A},A)$ tales que $ts=id_A$, entonces A es $\mathscr{E}'-$proyectivo.*

Recordemos que $\mathscr{E}'$ es la familia de todos los epimorfismos de $S-$módulos que se descomponen como morfismos de R-módulos (ver [10, Exer. IX.1.5]). Según el Teorema 1.3.14, la clase $\mathscr{E}'$ es proyectiva, entonces cada $S-$módulo M posee una resolución $\mathscr{E}'-$proyectiva.

Corolario 1.4.14. [1, Coro. A.2] *Sea* $M \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$.

a) *Si existe* $\tilde{\psi} \in \mathfrak{m}_S^\ell(B_0, M)$ *tal que*

$$M \xleftarrow{\tilde{\psi}} B_0 \xleftarrow{d_1^B} B_1 \xleftarrow{d_2^B} B_2 \xleftarrow{d_3^B} B_3 \xleftarrow{d_4^B} \cdots \tag{1.21}$$

es contráctil en ${}_R\mathfrak{Ch}$, *entonces*

$$M \xleftarrow{\psi} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \xleftarrow{d_3} A_3 \xleftarrow{d_4} \cdots \tag{1.22}$$

donde $\psi = \tilde{\psi}\psi_0$, *es una resolución* $\mathscr{E}'$*−proyectiva de* M.

b) *Si* $f_0 : M \to B_0,\ f_{n+1} : B_n \to B_{n+1}\ (n \geq 0)$ *es homotopía de contracción de cadenas de* (1.21)*, entonces existe una homotopía de contracción de cadenas de* (1.22)*,* $g_0 : M \to A_0,\ g_{n+1} : A_n \to A_{n+1}\ (n \geq 0)$ *definida por* $g_0 = \sigma_{00}^0 f_0$ *y*

$$g_{n+1} = -\sum_{r=0}^{n+1} \sigma_{r,n+1-r}^r f_{n+1}\varphi_n + \sum_{p=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-p} \sigma_{p+r+1,n-p-r}^r\ . \tag{1.23}$$

Prueba. b) Sean $\tilde{\sigma}_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1-p} \sigma_{p+r+1,n-1-p-r}^r$ y $\hat{\sigma}_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \sigma_{r,n-r}^r$ $(n \geq 0)$, entonces por el Teorema 1.4.12

$$\hat{\sigma}_n d_{n+1}^B = -d_{n+1}\hat{\sigma}_{n+1}. \tag{1.24}$$

En efecto, como σ_{*+1} es una homotopía de contracción de cadenas de C_φ, se tiene

$$d_{n+2}^{C_\varphi}\sigma_{n+2}(y,0) + \sigma_{n+1}d_{n+1}^{C_\varphi}(y,0) = id_{(C_\varphi)_{n+1}}(y,0) = (y,0) \in B_{n+1} \oplus A_n. \tag{1.25}$$

Se cumplen las siguientes cuatro igualdades

$$\sigma_{n+2}(y,0) = -\hat{\sigma}_{n+1}(y,0) - \tilde{\sigma}_{n+1}(y,0) = -\hat{\sigma}_{n+1}(y), \text{ pues } \tilde{\sigma}_{n+1}(y,0) = 0$$

$$d_{n+2}^{C_\varphi}\sigma_{n+2}(y,0) = \big(\varphi_{n+1}\hat{\sigma}_{n+1}(y), d_{n+1}\hat{\sigma}_{n+1}(y)\big)$$

$$d_{n+1}^{C_\varphi}(y,0) = (-d_{n+1}^B y, 0)$$

$$\sigma_{n+1}d_{n+1}^{C_\varphi}(y,0) = -\hat{\sigma}_n(-d_{n+1}^B y) - \tilde{\sigma}_n(0) = \hat{\sigma}_n d_{n+1}^B(y).$$

Reemplazando estos valores en (1.25) y luego sumando las segundas coordenadas $d_{n+1}\hat{\sigma}_{n+1}(y) + \hat{\sigma}_n d_{n+1}^B(y) = 0,\ \forall y \in B_{n+1}$. Así, $\hat{\sigma}_n d_{n+1}^B = -d_{n+1}\hat{\sigma}_{n+1}$.

Claramente, $\psi g_0 = id_M$. Además, se verifica que

$$d_1 g_1 + g_0\psi = id_{A_0} \tag{1.26}$$

como sigue:

$$\begin{aligned} g_0\psi &= \sigma^0_{00} f_0 \tilde{\psi}\psi_0, \text{ de la igualdad } f_0\tilde{\psi} = id_{B_0} - d_1^B f_1 \text{ se tiene} \\ &= \sigma^0_{00}\psi_0 - \sigma^0_{00} d_1^B f_1 \psi_0, \text{ como } \hat{\sigma}_0 = \sigma^0_{00}, \text{ si } n = 0 \text{ en (1.24), obtenemos que} \\ &= \sigma^0_{00}\psi_0 + d_1\hat{\sigma}_1 f_1 \varphi_0. \end{aligned}$$

Como $g_1 = -\hat{\sigma}_1 f_1 \varphi_0 + \sigma^0_{10}$ y $d_1 = d^1_{01} + d^0_{10}$, tenemos

$$d_1 g_1 = -d_1\hat{\sigma}_1 f_1 \varphi_0 + d^0_{10}\sigma^0_{10}.$$

Luego, $g_0\psi = (d^0_{10}\sigma^0_{10} + \sigma^0_{00}\psi_0) - d_1 g_1 = id_{A_0} - d_1 g_1$, pues $f_0(D)$ es contráctil y $A_{00} = A_0$ en (1.5) .

Afirmación 1: $d_{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1} + \hat{\sigma}_n\varphi_n + \tilde{\sigma}_n d_n = id_{A_n}$ $(n \geq 0)$.

En efecto, para $(0, x) \in B_{n+1} \oplus A_n = (C_\varphi)_{n+1}$. Por el Teorema 1.4.12, se cumple

$$d^{C_\varphi}_{n+2}\sigma_{n+2}(0, x) + \sigma_{n+1} d^{C_\varphi}_{n+1}(0, x) = (0, x). \tag{1.27}$$

$\sigma_{n+2}(0, x) = -\hat{\sigma}_{n+1}(0, x) - \tilde{\sigma}_{n+1}(0, x) = -\tilde{\sigma}_{n+1}(x)$ pues $\hat{\sigma}_{n+1}(0, x) = \hat{\sigma}_{n+1}(0) = 0$, $d^{C_\varphi}_{n+2}\sigma_{n+2}(0, x) = d^{C_\varphi}_{n+2}\big(-\tilde{\sigma}_{n+1}(x)\big)$, como la coordenada de $-\tilde{\sigma}_{n+1}(x)$ en B_{n+2} es cero, $d^{C_\varphi}_{n+2}\sigma_{n+2}(0, x) = \big(\varphi_{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(x), d_{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(x)\big)$; como $d^{C_\varphi}_{n+1}(0, x) = (-\varphi_n x, -d_n x)$,

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} d^{C_\varphi}_{n+1}(0, x) &= \sigma_{n+1}(-\varphi_n x, -d_n x) \\ &= \hat{\sigma}_n\varphi_n(x) + \tilde{\sigma}_n d_n(x). \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en (1.27) y sumando las segundas coordenadas

$$d_{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(x) + \hat{\sigma}_n\varphi_n(x) + \tilde{\sigma}_n d_n(x) = x = id_{A_n}(x).$$

Afirmación 2: $d_{n+1}g_{n+1} + g_n d_n = id_{A_n}$ $(n \geq 1)$.

En efecto, se verifica por inducción. Primero, si $n = 1$, como en (1.26) se obtiene $d_2 g_2 + g_1 d_1 = id_{A_1}$. Asumiendo como hipótesis inductiva que $d_{k+1}g_{k+1} + g_k d_k = id_{A_k}$ para $1 \leq k < n$, se demostrará que $d_{n+1}g_{n+1} + g_n d_n = id_{A_n}$. Efectuando cálculos:

$$\begin{aligned} g_n d_n &= \left(-\sum_{r=0}^{n} \sigma^r_{r,n-r} f_n \varphi_{n-1} + \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1-p} \sigma^r_{p+r+1,n-1-p-r} \right) d_n \\ &= -\hat{\sigma}_n f_n(\varphi_{n-1} d_n) + \tilde{\sigma}_n d_n. \end{aligned}$$

Puesto que $\varphi_n : (A_n, d_n) \to (B_n, -d_n^B)$ es un morfismo de complejos de cadenas, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & A_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "\varphi_n"] \\ B_{n-1} & B_n \arrow[l, "-d_n^B"] \end{tikzcd}$$

$\varphi_{n-1} d_n = -d_n^B \varphi_n$, luego $g_n d_n = \hat{\sigma}_n (f_n d_n^B) \varphi_n + \tilde{\sigma}_n d_n$.
Por hipótesis $f_n d_n^B = id_{B_n} - d_{n+1}^B f_{n+1}$, así

$$g_n d_n = \hat{\sigma}_n \varphi_n - \hat{\sigma}_n d_{n+1}^B f_{n+1} \varphi_n + \tilde{\sigma}_n d_n \ . \tag{1.28}$$

Como $g_{n+1} = -\hat{\sigma}_{n+1} f_{n+1} \varphi_n + \tilde{\sigma}_{n+1}$,

$$d_{n+1} g_{n+1} = -d_{n+1} \hat{\sigma}_{n+1} f_{n+1} \varphi_n + d_{n+1} \tilde{\sigma}_{n+1}. \tag{1.29}$$

Considerando (1.24) y la Afirmación 1, luego sumando (1.28) y (1.29) se obtiene la igualdad de la Afirmación 2.

a) Sea $\mathscr{A} : \ A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots$, entonces $\mathscr{A}$ es una resolución $\mathscr{E}'-$proyectiva de M. Esto equivale a que $\mathscr{A}$ es $\mathscr{E}'-$proyectiva, $\mathscr{E}'-$acíclico y $H_0(\mathscr{A}) \cong M$.
Primero se verifica que $\mathscr{A}$ es $\mathscr{E}'-$proyectiva; es decir, A_n es $\mathscr{E}'-$proyectivo para $n \geq 0$.
En efecto, para $n = 0$, $A_0 := A_{00}$; por la condición 2) existen $\overline{A}_{00} \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$,
$s_{00} \in \mathfrak{m}_S^\ell(A_{00}, S \otimes \overline{A}_{00})$ y $t_{00} \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes \overline{A}_{00}, A_{00})$ tales que $t_{00} s_{00} = id_{A_{00}}$. De acuerdo al Lema 1.4.13, A_0 es $\mathscr{E}'-$proyectivo.
Considerando la condición 2) del diagrama (1.5), por el Lema 1.4.13 A_{01} y A_{10} son $\mathscr{E}'-$proyectivos. Usando la Proposición 1.3.2, $A_1 = A_{01} \oplus A_{10}$ es $\mathscr{E}'-$proyectivo.
Para $n > 1$, aplicando el Lema 1.4.13 y la Proposición 1.3.2 como en el caso $n = 1$, $A_n = \bigoplus\limits_{p+q=n} A_{pq}$ es $\mathscr{E}'-$proyectivo.
Por la Definición 1.3.5, $\mathscr{A}$ es $\mathscr{E}'-$acíclico si y sólo si

$$0 \longleftarrow \mathrm{H}_0(\mathscr{A}) \quad \xleftarrow{coker(d_1)} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots$$

es $\mathscr{E}'-$ exacta.

En efecto, por la parte b), el complejo

$$M \xleftarrow{\psi} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots$$

es contráctil en ${}_R\mathfrak{Ch}$. Del hecho que $\psi d_1 = 0$ se sabe que $Ker(\psi) \supseteq Im(d_1)$.

Y recíprocamente, de (1.26) se sigue que $Ker(\psi) \subseteq Im(d_1)$.

Luego $H_0(\mathscr{A}) = \dfrac{A_0}{Im(d_1)} = \dfrac{A_0}{Ker(\psi)} \overset{TFI}{\cong} M$. De la Afirmación 2 se sigue que $Ker(d_n) \subseteq Im(d_{n+1})$ para $n \geq 1$. Así:

$$0 \longleftarrow H_0(\mathscr{A}) \xleftarrow{coker(d_1)} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots \tag{1.30}$$

es exacta.

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0(\mathscr{A}) \arrow[l] & & A_0 \arrow[ll, "coker(d_1)"'] \arrow[r, shift left, "g_1"'] \arrow[d, equal] & A_1 \arrow[l, shift left, "d_1"'] \arrow[r, shift left, "g_2"'] & \cdots \arrow[l, shift left, "d_2"'] \arrow[r, shift left, "g_n"'] & A_n \arrow[l, shift left, "d_n"'] \arrow[r, shift left, "g_{n+1}"'] & \cdots \arrow[l, shift left, "d_{n+1}"'] \\
& M \arrow[u, "\psi'"', "\cong"] \arrow[rr, shift right, "g_0"'] & & A_0 \arrow[ll, shift right, "\psi"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta que g es homotopía de contracción, se ve que $\psi g_0 = id_M$.

Haciendo $coker(d_1) = \psi'\psi$, se ve que el epimorfismo ψ tiene inverso derecho, de modo que $coker(d_1) \in \mathscr{E}'$.

Como la categoría $\mathfrak{m}_S^\ell$ es abeliana (ver [10, II.9]), se expresa el siguiente morfismo como $d_n = \nu_n \varepsilon_n$ donde ε_n es un epimorfismo y ν_n es un monomorfismo. Aquí se debe probar que $\varepsilon_n \in \mathscr{E}'$.

Se verifica que $\varepsilon_1 \in \mathscr{E}'$; pues $\varepsilon_1(g_1\nu_1) = id_{Im(\varepsilon_1)}$.

Para $n > 1$, se verifica que $\varepsilon_n \in \mathscr{E}'$; es decir $\varepsilon_n(g_n\nu_n) = id_{Im(\varepsilon_n)}$;

$$\begin{tikzcd}
A_{n-2} \arrow[r, bend right, "g_{n-1}"'] & A_{n-1} \arrow[l, bend right, "d_{n-1}"'] \arrow[rr, bend right, "g_n"'] & Im(\varepsilon_n) \arrow[l, tail, "\nu_n"] & A_n \arrow[l, two heads, "\varepsilon_n"] \arrow[ll, bend right, "d_n"']
\end{tikzcd} \tag{1.31}$$

(Es un placer agradecer a Juan José Guccione por su ayuda valiosa con este diagrama para el propósito que se está utilizando).

En efecto, del hecho que $d_{n-1}d_n = 0$ y ε_n es un epimorfismo; $d_{n-1}\nu_n = 0$, luego

$$\begin{aligned} \nu_n \varepsilon_n g_n \nu_n &= d_n g_n \nu_n \\ &= d_n g_n \nu_n + g_{n-1} d_{n-1} \nu_n, \quad \text{pues } d_{n-1}\nu_n = 0 \\ &= (d_n g_n + g_{n-1} d_{n-1})\nu_n, \ g \text{ es homotopía de contracción de (1.22):} \\ &= id_{A_{n-1}} \nu_n = \nu_n = \nu_n id_{Im(\varepsilon_n)}, \end{aligned}$$

así $\nu_n(\varepsilon_n g_n \nu_n) = \nu_n id_{Im(\varepsilon_n)}$. Pero ν_n es un monomorfismo, luego $\varepsilon_n g_n \nu_n = id_{Im(\varepsilon_n)}$; de modo que $\varepsilon_n \in \mathscr{E}'$. Así, la sucesión (1.30) es $\mathscr{E}'-$admisible. Por lo tanto, dicha sucesión es $\mathscr{E}'-$exacta. Luego, $\mathscr{A}$ es $\mathscr{E}'-$acíclico. Por consiguiente $\mathscr{A}$, o bien (1.22) es una resolución $\mathscr{E}'-$proyectiva de M.

$\square$

Capítulo 2

Álgebras y productos cruzados

En la primera sección se establece varias definiciones equivalentes de álgebra sobre un anillo conmutativo unitario (ver [8] para estas definiciones), se da ejemplos, y se muestra que el álgebra de grupo es uno de tales ejemplos.

En la segunda sección, siguiendo [9], usando módulos en lugar de sólo espacios vectoriales e introduciendo algunas notaciones de [1], damos los conceptos y propiedades necesarios de álgebras de Hopf, además mostramos que el álgebra de grupo y el dual de un álgebra de Hopf finito dimensional son ejemplos de álgebra de Hopf.

En la tercera sección, tratamos la acción de un álgebra sobre un módulo, la acción débil de un álgebra de Hopf H sobre un álgebra A, e introducimos $H-$módulo álgebra izquierdo.

Definimos el producto cruzado de Hopf como un álgebra que se deriva de un producto tensorial cuya multiplicación es expresada en términos de una acción débil y una aplicación bilineal. Caracterizamos un producto cruzado de Hopf imponiendo tres condiciones sobre la acción débil y la aplicación bilineal asociadas. Presentamos como ejemplos de productos cruzados de Hopf el producto smash, el producto torcido, el producto tensorial y el producto cruzado asociado a la acción interna y el cociclo interno.

En la cuarta sección, introducimos el álgebra de H-invariantes de un $H-$módulo álgebra izquierdo. Se define la coacción débil y la coacción de un álgebra de Hopf sobre un álgebra, y su álgebra $H-$coinvariantes. Para un álgebra de Hopf finito dimensional, se prueba detalladamente que un álgebra es un comódulo álgebra derecho sobre el álgebra de Hopf si y sólo si es un módulo álgebra izquierdo sobre el dual del álgebra de Hopf, y que los coinvariantes del álgebra respecto al álgebra de Hopf son los invariantes respecto a su dual.

En la quinta sección, se dan algunas propiedades de cociclos invertibles por convolución. Se proporciona una prueba detallada de otras dos caracterizaciones de producto cruzado con cociclo invertible: como una extensión $H-$Galois con propiedad de base normal y también como una extensión $H-$cleft derecha. Este resultado, que es una combinación de los trabajos de [4] y [14], tiene como una de sus consecuencias que las extensiones finitas de Galois de cuerpos son ejemplos de productos cruzados de Hopf. Además, se ha logrado ilustrar en el caso $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $F = \mathbb{Q}$ y $G = G(E/F)$, que E es un producto cruzado de Hopf mediante la construcción de un isomorfismo especial y utilizando la caracterización de productos cruzados de Hopf con cociclos invertibles.

2.1 Definiciones y ejemplos de álgebras

Ejemplo 2.1.1. Si $\mathbb{R}$ es el cuerpo de los números reales, entonces $\mathbb{R}^3$ es una $\mathbb{R}-$álgebra con multiplicación dada por

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Para ello verificamos las 3 condiciones de algebra para $\mathbb{R}^3$ [15, pág. 121]:

1) $\mathbb{R}^3$ es $\mathbb{R}-$espacio vectorial,

2) $(\lambda u + v) \times w = \lambda(u \times w) + v \times w$;

3) $u \times (\lambda v + w) = \lambda(u \times v) + u \times w$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Observación 2.1.2. El álgebra $\mathbb{R}^3$ no es asociativa ni unital.

En efecto, existen vectores $a = (1, 2, 1)$, $b = (3, 0, 2)$ y $c = (4, 1, 3)$ en $\mathbb{R}^3$ tales que

$$(a \times b) \times c = (9, -36, 0) \neq (7, -5, 3) = a \times (b \times c).$$

Así, el álgebra $I\!R^3$ no es asociativa.
Por otro lado, si existiera un elemento unital e en $I\!R^3$, se cumple $e \times a = a \times e = a$, $\forall a \in I\!R^3$. Por anticonmutatividad $e \times a = -a \times e$, $2(a \times e) = (0,0,0)$, luego $a \times e = (0,0,0)$. Tomando $a = (1,0,0)$ se obtiene una contradicción $(0,0,0) = (1,0,0)$.
Por lo tanto, el álgebra $I\!R^3$ no es unital.

En este trabajo, todas las álgebras serán asociativas y unitales. Las álgebras de este tipo son convenientes porque están relacionadas a diagramas conmutativos (vea la Definición 2.1.5). En realidad, el objeto materia de estudio llamado producto cruzado de Hopf es un ejemplo de álgebra asociativa y unital.
Comenzamos dando tres definiciones (de estructura) de álgebra, y probamos que son equivalentes. Sea K un anillo conmutativo unitario.

Definición 2.1.3. Un anillo A, que es un $K-$módulo es una $K-$*álgebra* si $\forall \alpha \in K$, $\forall x, y \in A$ se tiene $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Definición 2.1.4. Una $K-$*álgebra* es un par (A, η), donde A es un anillo y $\eta : K \to A$ es un morfismo de anillos tal que

$$Im(\eta) \subseteq Z(A) = \{x \in A \mid yx = xy \ , \ \forall y \in A\} \ .$$

Definición 2.1.5. Una $K-$*álgebra* es una terna (A, μ, η), donde A es $K-$módulo, $\mu : A \otimes A \to A$ dado por $\mu(x \otimes y) = xy, \eta : K \to A$ tal que $1 \mapsto \eta(1)$, son aplicaciones $K-$lineales que hacen conmutativo los dos diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
K \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes id"] \arrow[dr, "\cong", "Kan"'] & & A \otimes K \arrow[ul, "id \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\cong"', "Kan"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

Se observa que $Kan(\alpha \otimes x) = Kan(x \otimes \alpha) = \alpha x$.

Proposición 2.1.6. *Las definiciones 2.1.3 y 2.1.5 son equivalentes.*

Prueba. $\Rightarrow$) Por hipótesis, A es un anillo y a la vez un $K-$módulo tal que

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad , \quad \forall \alpha \in K \ , \ \forall x, y \in A. \tag{2.1}$$

Del hecho que A es un $K-$módulo y K es conmutativo, $A \otimes A$ es un $K-$módulo.

Puesto que $\otimes : A \times A \to A \otimes A$ es una aplicación $K-$bilineal y la multiplicación $A \times A \to A$ es una aplicación $K-$bilineal, por propiedad universal del producto tensorial existe una aplicación $K-$lineal $\mu : A \otimes A \to A$ tal que $\mu(x \otimes y) = xy$.

Se define $\eta : K \to A$ por $\eta(\alpha) = \alpha 1_A$. Luego η es $K-$lineal, ya que

$$\eta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)1_A = \alpha 1_A + \beta 1_A = \eta(\alpha) + \eta(\beta)$$

y $\qquad \eta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)1_A = \alpha(\beta 1_A) = \alpha\eta(\beta).$

Afirmación 1: El primer diagrama de la Definición 2.1.5 conmuta.

Para ello, sea $\alpha \otimes x \in K \otimes A$, de modo que

$$\begin{aligned} \mu(\eta \otimes id)(\alpha \otimes x) &= \mu\big(\eta(\alpha) \otimes x\big) = \eta(\alpha)x = (\alpha 1_A)x \ , \text{ por (2.1):} \\ &= \alpha x := Kan(\alpha \otimes x); \end{aligned}$$

para $x \otimes \alpha \in A \otimes K$, tenemos

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes \eta)(x \otimes \alpha) &= x\eta(\alpha) = x(\alpha 1_A) = \alpha x \ , \text{ por (2.1)} \\ &= x\alpha := Kan(x \otimes \alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu(\eta \otimes id) = Kan = \mu(id \otimes \eta)$.

Afirmación 2: El segundo diagrama de la Definición 2.1.5 conmuta.

En efecto, como la multiplicación en A es asociativa, $\forall x, y, z \in A : (xy)z = x(yz)$. Esto se expresa como $\mu(\mu \otimes id)(x \otimes y \otimes z) = \mu\big(id \otimes \mu(x \otimes y \otimes z)\big)$. Por lo tanto, $\mu(\mu \otimes id) = \mu(id \otimes \mu)$.

$\Leftarrow$) Por hipótesis, A es $K-$módulo. Falta mostrar que A es anillo y se cumple (2.1). Por hipótesis está definida la multiplicación en A como la aplicación $\mu : A \otimes A \to A$ dada por $\mu(x \otimes y) = xy$.

Afirmación 3: $\forall x, y$ y $z \in A$ se cumple que

$$(xy)z = x(yz) \ , \ x(y + z) = xy + xz \ , \ (x + y)z = xz + yz \ , \ \exists 1_A \in A \text{ tal que } x = 1_A x = x 1_A.$$

En efecto:

Por conmutatividad del segundo diagrama $\mu(\mu \otimes id) = \mu(id \otimes \mu) : A \otimes A \otimes A \to A$, luego para $x \otimes y \otimes z$, $\mu(\mu \otimes id)(x \otimes y \otimes z) = \mu(xy \otimes z) = (xy)z$ y $\mu(id \otimes \mu)(x \otimes y \otimes z) = x(yz)$. Así, $(xy)z = x(yz)$.

Por la bilinealidad del producto tensorial tenemos $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$ y $(x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$. Mediante la aplicación $K-$lineal μ se obtienen $x(y + z) = xy + xz$ y $(x + y)z = xz + yz$.

Por conmutatividad del primer diagrama $\mu \circ (\eta \otimes id) = Kan = \mu \circ (id \otimes \eta)$, luego

$$\mu(\eta \otimes id)(1 \otimes x) = \eta(1)x \ , \ \mu(id \otimes \eta)(x \otimes 1) = x\eta(1) \text{ y } x = 1x = Kan(1 \otimes x) = Kan(x \otimes 1).$$

Así, existe $1_A = \eta(1) \in A$ tal que $x = 1_A x = x 1_A$.

Afirmación 4: $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x, y \in A$.

Por propiedad del producto tensorial, $\alpha(x \otimes y) = (\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y)$. Con la aplicación $K-$lineal μ se obtiene que $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$. $\square$

Proposición 2.1.7. *Sean A y B, $K-$álgebras; entonces $A \otimes B$ es una $K-$álgebra.*

Prueba. Sean (A, μ_A, η_A) y (B, μ_B, η_B) las $K-$álgebras dadas. Puesto que A y B son $K-$módulos y K es anillo conmutativo, $A \otimes B$ es un $K-$módulo.

Por propiedad de producto tensorial de $K-$módulos, existe un isomorfismo $T : B \otimes A \to A \otimes B$, $y \otimes x \mapsto x \otimes y$. Se define la aplicación $\mu_{A \otimes B} : C \otimes C \to C$, $C = A \otimes B$, por $\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ S$, $S = id_A \otimes T \otimes id_B$. Como μ_A, μ_B y S son aplicaciones $K-$lineales, $\mu_{A\otimes B}$ es una aplicación $K-$lineal.

Se define $\eta_{A\otimes B} : K \to C$ mediante $\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes 1_B = 1_A \otimes \eta_B$. Puesto que η_A y η_B son aplicaciones $K-$lineales, la aplicación $\eta_{A\otimes B}$ es $K-$lineal.

Afirmación: $(A \otimes B, \mu_{A\otimes B}, \eta_{A\otimes B})$ es una $K-$álgebra.

Se verifica la conmutatividad de los dos diagramas de la Definición 2.1.5. Es decir,
$\mu_{A\otimes B}(\mu_{A\otimes B} \otimes id_C) \overset{(2.3)}{=} \mu_{A\otimes B}(id_C \otimes \mu_{A\otimes B})$ y
$\mu_{A\otimes B}(\eta_{A\otimes B} \otimes id_C) \overset{(2.4)}{=} Kan \overset{(2.5)}{=} \mu_{A\otimes B}(id_C \otimes \eta_{A\otimes B})$.

En efecto, calculando:

$$\begin{aligned}\mu_{A\otimes B}(c_1 \otimes c_2) &= \mu_{A\otimes B}(x_1 \otimes y_1 \otimes x_2 \otimes y_2) = (\mu_A \otimes \mu_B)S(x_1 \otimes y_1 \otimes x_2 \otimes y_2)\\ &= (\mu_A \otimes \mu_B)(x_1 \otimes x_2 \otimes y_1 \otimes y_2) = x_1x_2 \otimes y_1y_2.\end{aligned}$$

Tomando $c_i = x_i \otimes y_i$ para $i = 1, 2, 3$:

$$\mu_{A\otimes B}(\mu_{A\otimes B} \otimes id_C)(c_1 \otimes c_2 \otimes c_3) = \mu_{A\otimes B}\big((x_1x_2 \otimes y_1y_2) \otimes (x_3 \otimes y_3)\big)$$
$$= (x_1x_2)x_3 \otimes (y_1y_2)y_3,$$

$$\textit{como } \mu_A(\mu_A \otimes id_A) = \mu_A(id_A \otimes \mu_A), \quad \mu_B(\mu_B \otimes id_B) = \mu_B(id_B \otimes \mu_B) : \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} (x_1x_2)x_3 \otimes (y_1y_2)y_3 &= x_1(x_2x_3) \otimes y_1(y_2y_3) \\ &= \mu_{A\otimes B}(id_C \otimes \mu_{A\otimes B})(c_1 \otimes c_2 \otimes c_3). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por otro lado, $\eta_{A\otimes B}(\alpha) = \eta_A(\alpha) \otimes 1_B = (\alpha 1_A) \otimes 1_B$, luego

$$\begin{aligned} \mu_{A\otimes B}(\eta_{A\otimes B} \otimes id_C)\big(\alpha \otimes (x \otimes y)\big) &= \mu_{A\otimes B}\big([(\alpha 1_A) \otimes 1_B] \otimes (x \otimes y)\big) \\ &= (\alpha 1_A)x \otimes 1_B y = (\alpha x) \otimes y \\ &= \alpha(x \otimes y) = Kan\big(\alpha \otimes (x \otimes y)\big). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \mu_{A\otimes B}(id_C \otimes \eta_{A\otimes B})\big((x \otimes y) \otimes \alpha\big) &= \mu_{A\otimes B}\big((x \otimes y) \otimes [(\alpha 1_A) \otimes 1_B]\big) \\ &= \alpha(x \otimes y) = (x \otimes y)\alpha \\ &= Kan\big((x \otimes y) \otimes \alpha\big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

□

Proposición 2.1.8. *Las definiciones 2.1.4 y 2.1.5 son equivalentes.*

Prueba. $\Rightarrow$) Como A es un anillo y $\eta : K \to A$ es un morfismo de anillos tal que $Im(\eta) \subseteq Z(A)$, A es un grupo abeliano aditivo y la aplicación $K \times A \to A$, $(\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a = \eta(\alpha) \cdot a$ es una acción izquierda (y a la vez acción derecha pues $\eta(\alpha) \in Z(A)$) del anillo K sobre A; de modo que A es un $K-$módulo. Para todo $\alpha, \beta \in K$: $\eta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)1_A = \alpha(\beta 1_A) = \alpha\eta(\beta)$. Luego, $\eta : K \to A$ es una aplicación $K-$lineal.
Puesto que $\otimes : A \times A \to A \otimes A$ es una aplicación $K-$bilineal y la multiplicación $A \times A \to A$ es una aplicación $K-$bilineal, por propiedad universal del producto tensorial existe una aplicación $K-$lineal $\mu : A \otimes A \to A$ tal que $\mu(a \otimes b) = ab$.
Dado que $\alpha \cdot a = \eta(\alpha) \cdot a = a \cdot \eta(\alpha)$, se tiene

$$Kan(\alpha \otimes a) = \mu(\eta \otimes id)(\alpha \otimes a) = \alpha \cdot a \ , \ Kan(a \otimes \alpha) = \mu(id \otimes \eta)(a \otimes \alpha) = \alpha \cdot a,$$

para todo $\alpha \in K$ y $\forall a \in A$. Así, el primer diagrama de la Definición 2.1.5 es conmutativo. Como la multiplicación en A es asociativa, se sigue que el segundo diagrama es conmutativo. Por lo tanto, la terna (A, μ, η) es tal que A es un $K-$módulo, μ y η son aplicaciones $K-$lineales que satisfacen la conmutatividad de los dos diagramas.

$\Leftarrow$) La multiplicación en A está definida por la aplicación $K-$lineal $\mu : A \otimes A \to A$ mediante $\mu(a \otimes b) = ab$. Con esta multiplicación, como en la implicación $\Leftarrow$) de la Proposición 2.1.6, se prueba que A es un anillo.

Por la conmutatividad del primer diagrama, $\mu(\eta \otimes id) = Kan = \mu(id \otimes \eta)$, se obtiene $\eta(\alpha)a = a\eta(\alpha), \forall \alpha \in K, \forall a \in A$. Luego, $Im(\eta) \subseteq Z(A)$.

Puesto que $\eta : K \to A$ dada por $\eta(\alpha) = \alpha 1_A$ es aplicación $K-$lineal, para $\alpha, \beta \in K$ (arbitrarios), $\eta(\alpha + \beta) = \eta(\alpha) + \eta(\beta)$. Además,

$$\begin{aligned}\eta(\alpha\beta) &= \alpha\eta(\beta) = (\alpha\eta(\beta)) \cdot 1_A \text{ , como } Im(\eta) \subseteq Z(A) \\ &= (\alpha 1_A)\eta(\beta) = \eta(\alpha)\eta(\beta).\end{aligned}$$

Así, η es un morfismo de anillos. Por consiguiente, el par (A, η) es tal que A es anillo y $\eta : K \to A$ es un morfismo de anillos, con $Im(\eta) \subseteq Z(A)$. $\square$

Observación. Según las proposiciones 2.1.6 y 2.1.8, las tres definiciones 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5 de $K-$álgebra son equivalentes.

Como una consecuencia de la Definición 2.1.4 de $K-$álgebra se presentan los ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.1.9.

1. Si K es un anillo conmutativo, entonces $M_n(K)$ es una $K-$álgebra. Para comprobarlo, se define $\eta : K \to M_n(K)$ por $\eta(\alpha) = \alpha I$, donde I es la matriz unitaria $n \times n$.

2. Sea $M = M_n(K)$ y $E = End(M)$ el conjunto de endomorfismos del $K-$módulo M. Entonces definiendo el producto en E como composición de los elementos de E, se tiene que E es una $K-$álgebra.

3. Si K es un cuerpo y P es un polinomio mónico con coeficientes en K de grado t, entonces procediendo como en la prueba de la Proposición 2.1.11 se verifica que $\dfrac{K[X]}{\langle P \rangle}$ es una $K-$álgebra.

Proposición 2.1.10. *Sea G un grupo y K un anillo conmutativo. Entonces $K[G]$ es una $K-$álgebra.*

Prueba. En el conjunto $K[G]$, que consiste de sumas finitas $\sum_{\sigma \in G} r_\sigma \sigma$, $r_\sigma \in K$, están definidas las operaciones de adición y multiplicación por

$$\sum_{\sigma \in G} r_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in G} s_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G} (r_\sigma + s_\sigma)\sigma \quad , \quad \left(\sum_{\sigma \in G} r_\sigma \sigma\right)\left(\sum_{\tau \in G} s_\tau \tau\right) = \sum_{\sigma \in G, \tau \in G} r_\sigma s_\tau (\sigma\tau).$$

El hecho de que K es grupo abeliano aditivo implica que $K[G]$ es un grupo abeliano aditivo.
La asociatividad de la multiplicación de $K[G]$ se sigue de las asociatividades de la multiplicación de K y de la operación del grupo.
Las leyes distributivas en $K[G]$ se obtienen de la definición de multiplicación en $K[G]$ y las leyes distributivas en K.
El elemento unitario de $K[G]$ es $1_{K[G]} = 1e$. Por consiguiente, $K[G]$ es un anillo.
Por otro lado, se define $\eta : K \to K[G]$ por $\eta(\alpha) = \alpha e$.
Dados $\alpha, \beta \in K$, usando la definición de la adición y multiplicación en $K[G]$,

$$\eta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)e = \alpha e + \beta e = \eta(\alpha) + \eta(\beta);$$
$$\eta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)e = (\alpha e)(\beta e) = \eta(\alpha)\eta(\beta).$$

Además, $\eta(1) = 1e = 1_{K[G]}$. Luego, η es un morfismo de anillos.
Afirmación: $Im(\eta) \subseteq Z(K[G])$. Sean $\eta(\alpha) \in Im(\eta)$ y $r = \sum_{\sigma \in G} r_\sigma \sigma \in K[G]$, entonces $\eta(\alpha) r = r\eta(\alpha)$.
En efecto, $\eta(\alpha) r = (\alpha e) \sum_{\sigma \in G} r_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G} (\alpha r_\sigma)(e\sigma) = \sum_{\sigma \in G} (r_\sigma \alpha)(\sigma e) = r\eta(\alpha)$.
Así, el par $(K[G], \eta)$ satisface la Definición 2.1.4, luego $K[G]$ es una $K-$álgebra. □

Proposición 2.1.11. *Sea K un cuerpo, entonces $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$ es una $K-$álgebra.*

Prueba. Como K es un cuerpo, K es un anillo conmutativo. Luego $\langle X^2 \rangle$ es un ideal de $K[X]$.
En efecto; recordando que $\langle X^2 \rangle = \{\ X^2 f(X) :\ f(X) \in K[X]\}$.
i) $\langle X^2 \rangle$ es un subgrupo de $(K[X], +)$ pues se cumplen las dos condiciones :

(1) $0 \in \langle X^2 \rangle$ pues existe $f(X) = 0 \in K[X]$ tal que $X^2 f(X) = 0$.

(2) Si r_1 y $r_2 \in \langle X^2 \rangle$, entonces $r_1 - r_2 \in \langle X^2 \rangle$. Esto se verifica, como sigue:

r_1 y $r_2 \in \langle X^2 \rangle$ implica que existen $f(X)$ y $g(X) \in K[X]$ tales que $r_1 = X^2 f(X)$ y $r_2 = X^2 g(X)$; de modo que $r_1 - r_2 = X^2(f(X) - g(X)) = X^2 h(X) \in \langle X^2 \rangle$ pues $h(X) = f(X) - g(X) \in K[X]$.

ii) Sean $r \in K[X]$ y $a \in \langle X^2 \rangle$, entonces ra y $ar \in \langle X^2 \rangle$.

En efecto; de $r \in K[X]$ se sabe que $r = h(X)$. Por otro lado de $a \in \langle X^2 \rangle$, se sigue que existe $f(X) \in K[X]$ tal que $a = X^2 f(X)$; de modo que

$ra = h(X)[X^2 f(X)] = X^2(h(X)f(X)) \in \langle X^2 \rangle$, pues $h(X)f(X) \in K[X]$. Como $K[X]$ es anillo conmutativo, también se obtiene que $ar \in \langle X^2 \rangle$. De *i*), *ii*), resulta que $\langle X^2 \rangle$ es un ideal de $K[X]$.

Por lo tanto, existe el anillo cociente $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$.

Se define el morfismo de anillos $\eta : K \to \frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$ por

$$\eta(\lambda) = \lambda + \langle X^2 \rangle \ .$$

Puesto que $\mathrm{Im}(\eta) \subseteq Z(\dfrac{K[X]}{\langle X^2 \rangle})$, por la Definición 2.1.4 $\dfrac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$ es una K-álgebra. □

Observación 2.1.12. El álgebra $\dfrac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$ no es cuerpo pues $x = X + \langle X^2 \rangle$ no es invertible.

Como $K[X]$ es un dominio euclidiano, dado $f(X) \in K[X]$ existen únicos $q(X)$ y $r(X) \in K[X]$ tales que $f(X) = X^2 q(X) + r(X)$ donde $r(X) = a + bX$. Entonces

$$\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} = \{a + bx \mid a, b \in K\}.$$

Observación 2.1.13. Tomando $P = X^t + c_{t-1}X^{t-1} + \cdots + c_1 X + c_0$ en lugar de X^2, se ve que $\frac{K[X]}{\langle P \rangle}$ es una $K-$álgebra y que $\dfrac{K[X]}{\langle P \rangle} = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{t-1}x^{t-1} \mid a_i \in K\}$.

El álgebra de la observación anterior es el álgebra cociente de $K[X]$ por el ideal generado por P, conocido como *álgebra monogénica* en [27]. En los capítulos 4 y 5, utilizaremos las $K-$álgebras de esta forma cuando $P = X^t - a$ para $t \geq 2$, donde $c_0 = -a$.

2.2 Biálgebras y álgebras de Hopf

Morfismos de álgebras y coálgebras

Las aplicaciones $K-$lineales de la Definición 2.1.5, μ y η se llaman *multiplicación* y *unidad de A*, respectivamente.

Definición 2.2.1 (Morfismo de álgebras)**.** Sean (A, μ_A, η_A) y (B, μ_B, η_B) dos $K-$álgebras. Una aplicación $K-$lineal $f : A \to B$ es *un morfismo de $K-$álgebras* si los dos diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & K \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Esto se traduce en las condiciones $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$ *y* $f \circ \eta_A = \eta_B$.

Dada dos $K-$álgebras A y B, se denotará por $Alg_K(A, B)$ el conjunto de todos los morfismos de $K-$álgebras de A en B. De la definición dada se obtiene:

Ejemplo 2.2.2. Si $\phi_1 : A_1 \to A_2$ y $\phi_2 : A_2 \to A_3$ son morfismos de $K-$álgebras, entonces $\phi_2 \circ \phi_1$ es un morfismo de $K-$álgebras. Es decir, $\phi_2 \circ \phi_1 \in Alg_K(A_1, A_3)$.

Ejemplo 2.2.3. Alg_K es una categoría, cuyos objetos son $K-$álgebras, cuyos morfismos son morfismos de $K-$álgebras y el producto de sus morfismos es la composición de aplicaciones.

Del hecho que $\mathfrak{Ab}$ es la categoría de grupos abelianos y $Alg_K(A, B) \subseteq \mathfrak{Ab}(A, B)$, se sigue que Alg_K es una categoría.

Definición 2.2.4. Una $K-$*coálgebra* es una terna (C, Δ, ε), donde C es un $K-$módulo, $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\varepsilon : C \to K$ son aplicaciones $K-$lineales tales que los diagramas siguientes son conmutativos

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "Kan"', "\sim"] \arrow[dr, "Kan", "\sim"'] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ K \otimes C & & C \otimes K \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes id"'] & C \otimes C \otimes C. \end{tikzcd}$$

Es decir, $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = Kan = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ *y* $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$.
La conmutatividad del primer diagrama tiene sentido, debido a que Kan simboliza un isomorfismo canónico; de modo que $Kan(c) = 1 \otimes c$ y $Kan(c) = c \otimes 1$, y estos elementos se identifican con el elemento c de C.

Las aplicaciones Δ y ε son llamados *comultiplicación y counidad*, respectivamente, del coálgebra C.

Proposición 2.2.5. *Sea G un grupo y K un anillo conmutativo unitario. Entonces $K[G]$ es una $K-$coálgebra con comultiplicación Δ y counidad ε, definidas por*
$\Delta(g) = g \otimes g$ *y* $\varepsilon(g) = 1, \ \forall g \in G.$

Prueba. Según la Proposición 2.1.10, $K[G]$ es un $K-$módulo. Para cualquier
$g \in G \subseteq K[G]$ se tiene $(\varepsilon \otimes id)\Delta(g) = \varepsilon(g) \otimes id(g) = 1 \otimes g = Kan(g)$ y
$(id \otimes \varepsilon)\Delta(g) = id(g) \otimes \varepsilon(g) = g \otimes 1 = Kan(g)$. Por la identificación de elementos $g \otimes 1, \ 1 \otimes g$ y g, $(\varepsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \varepsilon)\Delta = id_G$.
Por otro lado, $(\Delta \otimes id)\Delta(g) = \Delta \otimes id(g \otimes g) = (g \otimes g) \otimes g$ y
$(id \otimes \Delta)\Delta(g) = id \otimes \Delta(g \otimes g) = g \otimes (g \otimes g)$.
Por la identificación de los elementos $(g \otimes g) \otimes g$ y $g \otimes (g \otimes g)$, $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$.
Como $K[G]$ es $K-$módulo generado por G, las extensiones lineales de Δ y ε a $K[G]$ son aplicaciones $K-$lineales. Luego, de las igualdades verificadas se sigue que
$(\varepsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \varepsilon)\Delta = id_{K[G]}$ y $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$. Por lo tanto, $(K[G], \Delta, \varepsilon)$ es un coálgebra. $\square$

Observación. Para la comultiplicación Δ de C, $\Delta(c) \in C \otimes C$ es usualmente una suma finita de tensores que será representada mediante la notación de Sweedler $\Delta(c) := c^{(1)} \otimes c^{(2)}$.

Definición 2.2.6. Una *$K-$álgebra* (A, μ, η) es *conmutativa* si el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $T : A \otimes A \to A \otimes A$ es la aplicación *flip*, definida por
$T(a \otimes b) = b \otimes a$.

Definición 2.2.7. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos $K-$coálgebras. La aplicación $K-$lineal

$g : C \to D$ es un *morfismo de $K-$coálgebras* si los diagramas siguientes son conmutativos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g\otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del primer diagrama puede ser escrito como
$g\big(c^{(1)}\big) \otimes g\big(c^{(2)}\big) = g(c)^{(1)} \otimes g(c)^{(2)}$, $\forall c \in C$.

Proposición 2.2.8. *Si $f : C \to D$ y $g : D \to E$ son morfismos de $K-$coálgebras, entonces $g \circ f$ es un morfismo de $K-$coálgebras.*

Prueba. Se sabe que $g \circ f$ es aplicación $K-$lineal y además $\forall c \in C$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(c^{(1)}) \otimes (g \circ f)(c^{(2)}) &= g \otimes g\big(f(c^{(1)}) \otimes f(c^{(2)})\big) \\ &= g \otimes g\big(f(c)^{(1)} \otimes f(c)^{(2)}\big) \\ &= g\big(f(c)^{(1)}\big) \otimes g\big(f(c)^{(2)}\big) \\ &= (g \circ f)(c)^{(1)} \otimes (g \circ f)(c)^{(2)}.\end{aligned}$$

Con el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varepsilon_D"] & E \arrow[dl, "\varepsilon_E"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

, se ve que $\varepsilon_E(g \circ f) = (\varepsilon_E g)f = \varepsilon_D f = \varepsilon_C$.

$\square$

Proposición 2.2.9. *Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos $K-$coálgebras, entonces $(C \otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$, donde $\Delta_{C\otimes D} = S \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$, $\varepsilon_{C\otimes D} = \mu_K \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$ y S es como en la Proposición 2.1.7, es una $K-$coálgebra.*

Prueba. Puesto que C y D son $K-$coálgebras, C y D son $K-$módulos; luego $C \otimes D$ es un $K-$módulo.
Para abreviar sea $Z = C \otimes D$. Entonces $\Delta_{C\otimes D} : Z \to Z \otimes Z$, $\varepsilon_{C\otimes D} : Z \to K$ están definidas por $\Delta_{C\otimes D} = S \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ y $\varepsilon_{C\otimes D} = \mu_K \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$.

Se ve que $\Delta_{C\otimes D}$ y $\varepsilon_{C\otimes D}$ son aplicaciones $K-$lineales por ser composiciones de aplicaciones $K-$lineales.

Sea $c \otimes d \in Z$, calculando se obtiene $\Delta_Z(c\otimes d) = \Delta_{C\otimes D}(c\otimes d) = (c^{(1)} \otimes d^{(1)}) \otimes (c^{(2)} \otimes d^{(2)})$ y $\varepsilon_Z(c\otimes d) = \varepsilon_{C\otimes D}(c\otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d)$.

Utilizando estas igualdades se verifica que $(\varepsilon_Z \otimes id_Z) \circ \Delta_Z = Kan = (id_Z \otimes \varepsilon_Z) \circ \Delta_Z$ *y* $(\Delta_Z \otimes id_Z) \circ \Delta_Z = (id_Z \otimes \Delta_Z) \circ \Delta_Z$. Por la Definición 2.2.4, $C \otimes D$ es una $K-$coálgebra. $\square$

Antípodas y álgebras de Hopf

Proposición 2.2.10. *Sea A un $K-$módulo tal que (A, μ_A, η_A) es una $K-$álgebra y $(A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ es una $K-$coálgebra. Entonces son equivalentes:*

(1) *Las aplicaciones μ_A y η_A son morfismos de coálgebras.*

(2) *Las aplicaciones Δ_A y ε_A son morfismos de álgebras.*

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) Esta parte se prueba con las dos afirmaciones siguientes:

Afirmación 1: Δ_A es un morfismo de álgebras.

Vamos a verificar que los diagramas siguientes son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\Delta_A \otimes \Delta_A"] \arrow[d, "\mu_A"'] & (A\otimes A)\otimes(A\otimes A) \arrow[d, "\mu_{A'}"] \\
A \arrow[r, "\Delta_A"'] & A \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\Delta_A"] & & A \otimes A \\
& K \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_{A'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis (A, μ_A, η_A) es un álgebra tal que μ_A y η_A son morfismos de coálgebras.

Para $x \otimes y \in A \otimes A$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mu_{A'} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)(x\otimes y) &= \mu_{A'}\big(\Delta_A(x) \otimes \Delta_A(y)\big) \\
&= \mu_{A'}\big((x^{(1)} \otimes x^{(2)}) \otimes (y^{(1)} \otimes y^{(2)})\big) = x^{(1)}y^{(1)} \otimes x^{(2)}y^{(2)};
\end{aligned}$$

como μ_A es un morfismo de coálgebras, $\Delta_A\mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A)\Delta_{A'}$, luego

$$\begin{aligned}
\Delta_A\mu_A(x\otimes y) &= (\mu_A \otimes \mu_A)\Delta_{A'}(x \otimes y)\ ,\ \Delta_{A'} = S \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) \\
&= (\mu_A \otimes \mu_A)(x^{(1)} \otimes y^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes y^{(2)}) \\
&= \mu_A(x^{(1)} \otimes y^{(1)}) \otimes \mu_A(x^{(2)} \otimes y^{(2)}) \\
&= x^{(1)}y^{(1)} \otimes x^{(2)}y^{(2)}.
\end{aligned}$$

Así, $\Delta_A \mu_A = \mu_{A'}(\Delta_A \otimes \Delta_A)$.

Como η_A es un morfismo de coálgebras, $\Delta_A \eta_A = (\eta_A \otimes \eta_A)\Delta_K$, luego para $\alpha \in K$:

$$\begin{aligned}\Delta_A \eta_A(\alpha) &= (\eta_A \otimes \eta_A)\Delta_K(\alpha) \text{ , por } K-\text{linealidad}\\ &= \alpha(\eta_A \otimes \eta_A)\Delta_K(1)\\ &= \alpha(\eta_A \otimes \eta_A)(1 \otimes 1)\\ &= \alpha\eta_A(1) \otimes 1_A = \eta_A(\alpha) \otimes 1_A = \eta_{A'}(\alpha).\end{aligned}$$

Así, $\Delta_A \eta_A = \eta_{A'}$.

Afirmación 2: ε_A es un morfismo de álgebras.

Los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A} & K \otimes K \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_K} \\ A & \xrightarrow[\varepsilon_A]{} & K \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon_A} & K \\ {\scriptstyle \eta_A}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle \eta_K} \\ & K & \end{array}$$

Por hipótesis (A, μ_A, η_A) es un álgebra tal que μ_A y η_A son morfismos de coálgebras.

Sea $a \otimes b \in A \otimes A$. Puesto que μ_A es un morfismo de coálgebras, $\varepsilon_A \mu_A = \varepsilon_{A'}$. De modo que

$$\varepsilon_A \mu_A(a \otimes b) = \varepsilon_{A'}(a \otimes b) := \varepsilon_A(a)\varepsilon_A(b).$$

Por otro lado, se obtiene

$$\begin{aligned}\mu_K(\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)(a \otimes b) &= \mu_K\big(\varepsilon_A(a) \otimes \varepsilon_A(b)\big)\\ &= \varepsilon_A(a)\varepsilon_A(b).\end{aligned}$$

Luego, $\varepsilon_A \mu_A = \mu_K(\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)$.

Como η_A es un morfismo de coálgebras, $\varepsilon_A \eta_A = \varepsilon_K$, para $\alpha \in K$(arbitrario),

$$\varepsilon_A \eta_A(\alpha) = \varepsilon_K(\alpha) = \alpha\varepsilon_K(1) = \alpha 1_K = \eta_K(\alpha).$$

Así, $\varepsilon_A \eta_A = \eta_K$.

(2) $\Rightarrow$ (1) La prueba de esta implicación se deja al lector. $\square$

Definición 2.2.11. Una *biálgebra* es un $K-$módulo A, dotado con dos estructuras: de $K-$álgebra (A, μ_A, η_A) y de $K-$coálgebra $(A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ tales que μ_A y η_A son morfismos de coálgebras (o equivalentemente Δ_A y ε_A son morfismos de álgebras).

Según la Proposición 2.1.10, $(K[G], \mu, \eta)$ es una $K-$álgebra, donde $\mu(g \otimes h) = gh$ y $\eta(\alpha) = \alpha e$, $\forall g, h \in G$, donde $e \in G$ es la identidad.

Por la Proposición 2.2.5, $(K[G], \Delta, \varepsilon)$ es una $K-$coálgebra, donde $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$.

Proposición 2.2.12. *$K[G]$, con sus estructuras de $K-$álgebra y de $K-$coálgebra, es una biálgebra.*

Prueba. Para que $K[G]$ sea biálgebra, debemos probar las dos afirmaciones siguientes:

Afirmación 1: η es un morfismo de coálgebras.

Es decir, $(\eta \otimes \eta)\Delta_K = \Delta\eta$ y $\varepsilon\eta = \varepsilon_K$. En efecto, para $\alpha \in K$:

$$
\begin{aligned}
(\eta \otimes \eta)\Delta_K(\alpha) &= \alpha(\eta \otimes \eta)\Delta_K(1) \\
&= \alpha\big(\eta(1) \otimes \eta(1)\big) = \alpha(e \otimes e) \ \text{ y}
\end{aligned}
$$

$$
\Delta\eta(\alpha) = \Delta(\alpha e) = \alpha\Delta(e) = \alpha(e \otimes e) \ .
$$

Además, $\varepsilon\eta(\alpha) = \varepsilon(\alpha e) = \alpha\varepsilon(e) = \alpha 1_K = \varepsilon_K(\alpha)$.

Afirmación 2: μ es un morfismo de coálgebras. Es decir, para $A' = K[G] \otimes K[G]$ se tiene

$$
(\mu \otimes \mu)\Delta_{A'} = \Delta\mu \ \text{ y } \ \varepsilon\mu = \varepsilon_{A'} \ .
$$

En efecto, para cualquier $g \otimes h \in A'$, con $g, h \in G$:

$$
\begin{aligned}
(\mu \otimes \mu)\Delta_{A'}(g \otimes h) &= (\mu \otimes \mu)\big(g^{(1)} \otimes h^{(1)} \otimes g^{(2)} \otimes h^{(2)}\big) \\
&= g^{(1)}h^{(1)} \otimes g^{(2)}h^{(2)} = gh \otimes gh \\
&= \Delta(gh) = \Delta\mu(g \otimes h).
\end{aligned}
$$

Además, $\varepsilon\mu(g \otimes h) = \varepsilon(gh) = 1 = 1 \cdot 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h) = \varepsilon_{A'}(g \otimes h)$. □

Sean (A, μ, η) una $K-$álgebra y (C, Δ, ε) una $K-$coálgebra. Puesto que K es anillo conmutativo, A y C son $K-$módulos, por lo tanto $\mathrm{Hom(C, A)} = \mathrm{Hom_K(C, A)}$ es un $K-$módulo.

Proposición 2.2.13. *Si definimos la multiplicación $*$ en* $\mathrm{Hom(C, A)}$ *por $(f, g) \mapsto f * g$ mediante $(f * g)(c) = f\big(c^{(1)}\big)g\big(c^{(2)}\big)$ para $c \in C$, entonces Hom(C,A) es una $K-$álgebra.*

Prueba. Sean $\alpha \in K$, y $f, g \in$ Hom(C,A), entonces $\alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$. Para cualquier $c \in C$,

$$\begin{aligned}
[(\alpha f) * g](c) &= (\alpha f)\big(c^{(1)}\big)g\big(c^{(2)}\big) \\
&= \big(\alpha f(c^{(1)})\big)g\big(c^{(2)}\big) \\
&= \alpha(f(c^{(1)})g\big(c^{(2)}\big)) = [\alpha(f * g)](c),
\end{aligned}$$

análogamente $[f * (\alpha g)](c) = [\alpha(f * g)](c)$.

Afirmación: Sean $f, g, h \in \mathrm{Hom(C, A)}$, entonces

$$(f * g) * h = f * (g * h) \ \ , \ \ f * (g + h) = f * g + f * h \ \ , \ \ (f + g) * h = f * h + g * h \ ;$$

$\eta\varepsilon \in$ Hom(C,A) es tal que $(\eta\varepsilon) * f = f * (\eta\varepsilon) = f$.

En efecto, para cualquier $c \in C$ se tiene

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(c) &= (f * g)(c^{(1)})h(c^{(2)}) \\
&= \big(f(c^{(1)})g(c^{(2)})\big)h(c^{(3)}) \\
&= f(c^{(1)})(g * h)(c^{(2)}) = [f * (g * h)](c)
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
f * (g + h)(c) &= f(c^{(1)})(g + h)(c^{(2)}) \\
&= f(c^{(1)})g(c^{(2)}) + f(c^{(1)})h(c^{(2)}) \\
&= f * g(c) + f * h(c) = (f * g + f * h)(c).
\end{aligned}$$

Análogamente, $(f + g) * h(c) = (f * h + g * h)(c)$. Por último, tenemos

$$\begin{aligned}
[(\eta\varepsilon) * f](c) &= (\eta\varepsilon)(c^{(1)})f(c^{(2)}) \\
&= \big(\varepsilon(c^{(1)})1_A\big)f(c^{(2)}) \\
&= f\big(\varepsilon(c^{(1)})c^{(2)}\big) = f(c),
\end{aligned}$$

pues C es una $K-$coálgebra; análogamente, $[f * (\eta\varepsilon)](c) = f\big(\varepsilon(c^{(2)})c^{(1)}\big) = f(c)$.

Por la Definición 2.1.3, el $K-$módulo $\mathrm{Hom}(C, A)$ es una $K-$álgebra. $\square$

La multiplicación $*$ se llama *producto de convolución.*

Definición 2.2.14. Sea B un biálgebra. Una aplicación lineal $S : B \to B$ se llama *antípoda del biálgebra B*, si S es un inverso de la aplicación identidad $id_B : B \to B$ con respecto al producto de convolución en $\mathrm{Hom}_K(B, B)$.

Definición 2.2.15. Un biálgebra H que tiene antípoda S es un *álgebra de Hopf.*

Proposición 2.2.16. *Sea $S : K[G] \to K[G]$ la aplicación dada por $S(g) = g^{-1}$ $\forall g \in G$. Entonces $K[G]$ es un álgebra de Hopf.*

Prueba. La extensión lineal de S a $K[G]$ es una aplicación $K-$lineal.
Sea $id = id_{K[G]}$, entonces $id * S = S * id = \eta\varepsilon$. En efecto, para $g \in G$:

$$\begin{aligned} id * S(g) &= id(g^{(1)})S(g^{(2)}) \\ &= g^{(1)}g^{-(2)} \quad \text{, pero } \Delta(g) = g^{(1)} \otimes g^{(2)} := g \otimes g \text{ luego} \\ &= gg^{-1} = e = \eta\varepsilon(g) \text{ pues } \varepsilon(g) = 1. \end{aligned}$$

Análogamente $S * id(g) = \eta\varepsilon(g)$.
Puesto que $id * S, S * id$ y $\eta\varepsilon$ son aplicaciones $K-$lineales:

$$id * S(r) = \eta\varepsilon(r) = S * id(r) \quad , \quad \forall r = \sum_{\sigma \in G} r_\sigma \sigma \in K[G].$$

Por la Proposición 2.2.12, $K[G]$ es un biálgebra, de modo que $K[G]$ es un biálgebra con antípoda S. Por lo tanto, $K[G]$ es un álgebra de Hopf. □

Sea K un cuerpo, $\phi : V \to W$ una aplicación K-lineal, entonces el adjunto de ϕ denotado mediante $\phi^* : W^* \to V^*$ se define por $\phi^*(f)(v) = f(\phi(v))$.
La aplicación K-lineal $\rho : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ se define por
$\rho(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$; $\psi : K^* \to K$ el isomorfismo canónico. Si V o W es finito dimensional, entonces ρ es biyectiva.

Proposición 2.2.17. [16, Sweedler 1969] *Sea H un álgebra de Hopf finito dimensional con antípoda S. Entonces el espacio vectorial dual H^* es un álgebra de Hopf con antípoda S^*.*

Prueba. Si (H, Δ, ε) es la K-coálgebra subyacente de H, entonces por la Proposición 2.2.13 sabemos que $H^* = \mathrm{Hom}_K(H, K)$ es una K-álgebra donde la multiplicación es

$\mu_{H^*}(f\otimes g)=\mu_K(f\otimes g)\Delta$ y la unidad es $\eta_{H^*}(\lambda)=\lambda\varepsilon$. Así, $(H^*,\mu_{H^*},\eta_{H^*})$ es una K-álgebra. Sea (H,μ,η) la K-álgebra subyacente de H. Puesto que H es finito dimensional, por [9, Prop. 1.3.9] sabemos que H^* es una K-coálgebra donde la comultiplicación es $\Delta_{H^*}=\rho^{-1}\mu^*$ y la counidad es $\varepsilon_{H^*}=\psi\eta^*$. Así, $(H^*,\Delta_{H^*},\varepsilon_{H^*})$ es una K-coalgebra.

Para que $(H^*,\mu_{H^*},\eta_{H^*},\Delta_{H^*},\varepsilon_{H^*})$ sea una biálgebra, se va a probar las dos afirmaciones siguientes:

Afirmación 1: Δ_{H^*} es un morfismo de álgebras. Es decir, $\Delta_{H^*}(f*g)=\Delta_{H^*}(f)\Delta_{H^*}(g)$ y $\Delta_{H^*}(1_{H^*})=1_{H^*}\otimes 1_{H^*}$. En efecto, del hecho que $\rho\Delta_{H^*}=\mu^*$ sabemos que $f(ab)=f^{(1)}(a)f^{(2)}(b)$.

Por un lado, considerando que μ_H es un morfismo de K-coálgebras :

$$\begin{aligned}\rho\Delta_{H^*}(f*g)(a\otimes b)&=(f*g)(ab)=f((ab)^{(1)})g((ab)^{(2)})\\&=f^{(1)}(a^{(1)})f^{(2)}(b^{(1)})g^{(1)}(a^{(2)})g^{(2)}(b^{(2)})\\&=[f^{(1)}(a^{(1)})g^{(1)}(a^{(2)})][f^{(2)}(b^{(1)})g^{(2)}(b^{(2)})]\\&=(f^{(1)}*g^{(1)})(a)(f^{(2)}*g^{(2)})(b),\ \text{por otro lado}\end{aligned}$$

como $\Delta_{H^*}(f)=f^{(1)}\otimes f^{(2)}$ y $\Delta_{H^*}(g)=g^{(1)}\otimes g^{(2)}$,
$\Delta_{H^*}(f)\Delta_{H^*}(g)=(f^{(1)}*g^{(1)})\otimes(f^{(2)}*g^{(2)})$, luego

$$\begin{aligned}\rho[\Delta_{H^*}(f)\Delta_{H^*}(g)](a\otimes b)&=\rho[(f^{(1)}*g^{(1)})\otimes(f^{(2)}*g^{(2)})](a\otimes b)\\&=(f^{(1)}*g^{(1)})(a)(f^{(2)}*g^{(2)})(b).\end{aligned}$$

Puesto que ρ es biyectiva, comparando estas igualdades, $\Delta_{H^*}(f*g)=\Delta_{H^*}(f)\Delta_{H^*}(g)$.
Del hecho que ε es un morfismo de algebras

$$\begin{aligned}\rho\Delta_{H^*}(\varepsilon)(a\otimes b)&=\varepsilon(ab)=\varepsilon(a)\varepsilon(b)\\&:=\rho(\varepsilon\otimes\varepsilon)(a\otimes b).\end{aligned}$$

Puesto que ρ es biyectiva, se deduce que $\Delta_{H^*}(\varepsilon)=\varepsilon\otimes\varepsilon$. Recordando que $\varepsilon=1_{H^*}$, $\Delta_{H^*}(1_{H^*})=1_{H^*}\otimes 1_{H^*}$.

Afirmación 2: ε_{H^*} es un morfismo de álgebras. Es decir, $\varepsilon_{H^*}(\phi_1*\phi_2)=\varepsilon_{H^*}(\phi_1)\varepsilon_{H^*}(\phi_2)$ y $\varepsilon_{H^*}(1_{H^*})=1$. En efecto, como Δ y ε son morfismos de K-álgebras,

$\Delta(1_H) = 1_H^{(1)} \otimes 1_H^{(2)} = 1_H \otimes 1_H$ y $\varepsilon(1_H) = 1$, de modo que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{H^*}(\phi_1 * \phi_2) &= (\phi_1 * \phi_2)(1_H) = \phi_1(1_H^{(1)})\phi_2(1_H^{(2)}) \\
&= \phi_1(1_H)\phi_2(1_H) = \varepsilon_{H^*}(\phi_1)\varepsilon_{H^*}(\phi_2).
\end{aligned}$$

Claramente $\varepsilon_{H^*}(1_{H^*}) = \varepsilon_{H^*}(\varepsilon) = \varepsilon(1_H) = 1$.

Finalmente, se prueba que S^* es la antípoda de H^*. Es decir, $id_{H^*} * S^* = S^* * id_{H^*} = \eta_{H^*}\varepsilon_{H^*}$. En efecto, dado $\phi \in H^*$ y $l \in H$; usando las igualdades $\phi(1_H) = \varepsilon_{H^*}(\phi)$ y $\varepsilon_H(l) = 1_{H^*}(l)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
[id_{H^*} * S^*](\phi)(l) &= [\phi^{(1)} * S^*(\phi^{(2)})](l) \\
&= \phi^{(1)}(l^{(1)})\phi^{(2)}(S(l^{(2)})) \\
&= \phi(l^{(1)}S(l^{(2)})) = \eta_{H^*}\varepsilon_{H^*}(\phi)(l).
\end{aligned}$$

Análogamente $[S^* * id_{H^*}](\phi)(l) = \eta_{H^*}\varepsilon_{H^*}(\phi)(l)$. □

Proposición 2.2.18. [16, Sweedler 1969] *Sea H un álgebra de Hopf con antípoda S. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $S(hg) = S(g)S(h)$; $\forall g, h \in H$.

2. $S(1) = 1$.

3. $\Delta\big(S(h)\big) = S(h^{(2)}) \otimes S(h^{(1)})$.

4. $\varepsilon\big(S(h)\big) = \varepsilon(h)$.

2.3 Productos cruzados de Hopf

Acción de un álgebra sobre un módulo y acción débil

Definición 2.3.1 (Módulo izquierdo)**.** Sea (A, μ, η) una $K-$álgebra. Un $A-$*módulo izquierdo* es un par (M, ν), donde M es $K-$módulo y $\nu : A \otimes M \to M$ es aplicación $K-$lineal, tal que los diagramas siguientes conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \nu"] \arrow[d, "\mu \otimes id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\nu"] \\
A \otimes M \arrow[r, "\nu"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes M \arrow[dd, "\nu"] \\
K \otimes M \arrow[ur, "\eta \otimes id_M"] \arrow[dr, "\underset{Kan}{\sim}"'] & \\
 & M
\end{tikzcd}
$$

Es decir, se cumplen $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ y $\alpha m = \eta(\alpha) \cdot m$.

Dualizando este concepto se obtiene la noción de comódulo derecho sobre un coálgebra.

Definición 2.3.2 (Comódulo derecho)**.** Sea (C, Δ, ε) una $K-$coálgebra. Un $C-$*comódulo derecho* es un par (M, ρ), donde M es un $K-$módulo y $\rho : M \to M \otimes C$ es una aplicación $K-$lineal, tal que los dos diagramas siguientes conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\underset{Kan=i}{\sim}"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\
 & M \otimes K \\
M \otimes C \arrow[ur, "id_M \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Sean A una $K-$álgebra y H una $K-$álgebra de Hopf.

Definición 2.3.3. Una *acción débil de H sobre A* es una aplicación $K-$lineal $\theta : H \otimes A \to A$, denotada por $\theta(h \otimes a) = a^h$, que satisface las tres condiciones siguientes:

1) $(ab)^h = a^{h^{(1)}} b^{h^{(2)}}$, $\Delta(h) = h^{(1)} \otimes h^{(2)}$.

2) $1_A^h = \varepsilon(h) 1_A$, ε es counidad de H.

3) $a^{1_H} = a$; $\forall a, b \in A$; $\forall h \in H$ (ver conmutatividad del segundo diagrama de la Definición 2.3.1)

Definición 2.3.4. Una *acción de H sobre A* es una acción débil θ de H sobre A tal que $(a^l)^h = a^{hl}$, $\forall a \in A$; $\forall h, l \in H$ (ver la conmutatividad del primer diagrama de la Definición 2.3.1). En este caso, se dice que A es $H-$*módulo álgebra izquierdo.*

Producto cruzado de Hopf y su caracterización

Sea K un anillo conmutativo unitario. Sean A una $K-$álgebra y H una $K-$álgebra de Hopf.

Definición 2.3.5. Dadas una acción débil de H sobre A, $f : H \times H \to A$ una aplicación $K-$bilineal. El $K-$módulo $A \otimes H$ provisto de multiplicación dada por

$$(a \otimes h)(b \otimes l) = ab^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(1)}) \otimes h^{(3)} l^{(2)}, \tag{2.7}$$

se llama *producto cruzado* (*de Hopf*) *de A por H*, si la multiplicación es asociativa y tiene como elemento unitario $1_A \otimes 1_H$. Este producto cruzado se denota por $A\#_f H$.
Los elementos $a \otimes h$ de $A\#_f H$ son denotados por $a\#h$ para indicar que H actúa débilmente sobre A.

Observación. En este trabajo, cuando nos referimos a un producto cruzado de un álgebra con un álgebra de Hopf, producto cruzado general o simplemente producto cruzado, estaremos hablando de un producto cruzado de Hopf, a menos que se trate de producto cruzado de un álgebra con un grupo como ocurre en los capítulos 4 y 5. Nos enfocaremos en los productos cruzados de álgebras monogénicas con grupos cíclicos finitos [27], ya que son necesarios para obtener la solución del problema y su extensión.

Ahora, damos una definición alternativa. Más adelante probamos que estas definiciones son equivalentes.
Dadas una acción débil θ de H sobre A, $f : H \times H \to A$ una aplicación $K-$bilineal.

Definición 2.3.6. Un *producto cruzado de A por H* es una terna $E = (A\#_f H, \mu, \eta)$, donde $A\#_f H = A \otimes H$ es $K-$módulo, $\mu : E \otimes E \to E$, $\eta : K \to E$ son aplicaciones $K-$lineales dadas por $\mu\big((a\#h) \otimes (b\#l)\big) = ab^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(1)}) \# h^{(3)} l^{(2)}$ y
$1 \mapsto \eta(1) = 1_A \# 1_H$, tales que los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd} & E \otimes E \arrow[dd, "\mu"] & \\ K \otimes E \arrow[ur, "\eta \otimes id"] \arrow[dr, "\sim"', "Kan"] & & E \otimes K \arrow[ul, "id \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\sim", "Kan"'] \\ & E & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \otimes E \otimes E \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & E \otimes E \arrow[d, "\mu"] \\ E \otimes E \arrow[r, "\mu"'] & E \end{tikzcd}$$

En lo que sigue, se establece condiciones necesarias y suficientes sobre f y la acción débil θ de H sobre A para que $(A \otimes H, \mu, \eta)$ sea producto cruzado, donde μ es dado en (2.7). Se denota por ε la counidad de H y por Δ la comultiplicación de H.

Definición 2.3.7. Una *aplicación* $K-$*bilineal* $f : H \times H \to A$ es *normal* si
$f(1, h) = f(h, 1) = \varepsilon(h)1_A$, $\forall h \in H$.

Lema 2.3.8. $1_A\#1_H$ *es elemento unitario de* $A\#_f H$ *si y sólo si* f *es normal.*

Prueba. $\Leftarrow$) Efectuando cálculos:

$$\begin{aligned}(1_A\#1_H)(x\#m) &= 1_A x^{1_H^{(1)}} f(1_H^{(2)}, m^{(1)})\#1_H^{(3)} m^{(2)} = xf(1, m^{(1)})\#m^{(2)} \ , \ \Delta(1) = 1 \otimes 1 \\ &= x\varepsilon(m^{(1)})1_A\#m^{(2)} \ , \text{ por hipótesis} \\ &= x\#\varepsilon(m^{(1)})m^{(2)} \ , \text{ como } H \text{ es } K-\text{coálgebra}, \ \varepsilon(m^{(1)})m^{(2)} = m, \\ &= x\#m.\end{aligned}$$

Así, $1_A\#1_H$ es elemento unitario izquierdo. Similarmente

$$\begin{aligned}(x\#m)(1_A\#1_H) &= x\varepsilon(m^{(1)})f(m^{(2)}, 1)\#m^{(3)} \\ &= x\#\varepsilon(m^{(1)}m^{(2)})m^{(3)} = x\#m.\end{aligned}$$

Así, $1_A\#1_H$ es elemento unitario derecho.
$\Rightarrow$) Como $1_A\#1_H$ es elemento unitario izquierdo,

$$\begin{aligned}1_A\#m &= (1_A\#1_H)(1_A\#m) \\ &= f(1, m^{(1)})\#m^{(2)}.\end{aligned}$$

Aplicando $id_A \otimes \varepsilon$, $1_A \otimes \varepsilon(m) = f(1, m^{(1)}) \otimes \varepsilon(m^{(2)})$.

$$\begin{aligned}\text{Luego} \quad \varepsilon(m)1_A &= \varepsilon(m^{(2)})f(1, m^{(1)}) \\ &= f\big(1, \varepsilon(m^{(2)})m^{(1)}\big) = f(1, m).\end{aligned}$$

Además, como $1_A\#1_H$ es elemento unitario derecho

$$\begin{aligned}1_A\#m &= (1_A\#m)(1_A\#1_H) \\ &= \varepsilon(m^{(1)})f(m^{(2)}, 1)\#m^{(3)}.\end{aligned}$$

Aplicando $id_A \otimes \varepsilon$, $1_A \otimes \varepsilon(m) = \varepsilon(m^{(1)})f(m^{(2)},1) \otimes \varepsilon(m^{(3)})$.

$$\begin{aligned}\text{Luego} \quad \varepsilon(m)1_A &= \varepsilon(m^{(3)})\varepsilon(m^{(1)})f(m^{(2)},1) \\ &= f\big(\varepsilon(m^{(3)}m^{(1)})m^{(2)},1\big) = f(m,1).\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.9. *Sea* $f(h,1) = \varepsilon(h)1_A$, $\forall h \in H$. *Entonces la multiplicación* (2.7) *es asociativa si y sólo si las dos condiciones siguientes se cumplen:*

(1) (*Condición de Cociclo*) $\forall h, l, m \in H$*:*

$$f(l^{(1)}, m^{(1)})^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}m^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)})f(h^{(2)}l^{(2)}, m) \ . \tag{2.8}$$

(2) (*Condición de Módulo Torcido*) $\forall h, l \in H$ *y* $\forall a \in A$*:*

$$\left(a^{l^{(1)}}\right)^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)})a^{h^{(2)}l^{(2)}} \ . \tag{2.9}$$

Prueba. Se puede ver en [3, Lemm. 4.5]. □

Teorema 2.3.10. [3, Coro. 4.6] *Sea* H *una* $K-$*álgebra de Hopf,* A *una* $K-$*álgebra,* $\theta : H \otimes A \to A$ *una acción débil dada por* $\theta(h \otimes a) = a^h$ *y* $f : H \times H \to A$ *una aplicación* $K-$*bilineal. Entonces* $(A\#_f H, \mu, \eta)$ *es un producto cruzado si y sólo si* f *es normal y se cumplen las condiciones de cociclo y de módulo torcido para* θ *y* f*.*

Prueba. $\Rightarrow$) Por la Definición 2.3.6, de la conmutatividad del primer diagrama se sabe que $1_A\#1_H$ es el elemento unitario de $A\#_f H$. Según el Lema 2.3.8, f es normal. De la conmutatividad del segundo diagrama, la multiplicación en $A\#_f H$ es asociativa. Pero f es normal, luego $f(h,1) = \varepsilon(h)1_A$, $\forall h \in H$. Por el Lema 2.3.9, se cumplen las condiciones de cociclo y módulo torcido.

$\Leftarrow$) Como A y H son $K-$álgebras, se define $A\#_f H := A \otimes H$ como $K-$módulo.

En términos de θ y f se definen μ y η por $\mu\big((a \otimes h) \otimes (b \otimes l)\big) = ab^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(1)}) \otimes h^{(3)}l^{(2)}$ y $\eta(1) = 1_A \otimes 1_H$.

Sus extensiones lineales de estas aplicaciones son aplicaciones $K-$lineales. Como f es normal, por el Lema 2.3.8 $1_A \otimes 1_H$ es elemento unitario de $A\#_f H$. Luego, el primer diagrama de la

Definición 2.3.6 conmuta.

Como las condiciones de cociclo y de módulo torcido se cumplen y f es normal, por el Lema 2.3.9 la multiplicación en $A\#_f H$ es asociativa, luego el segundo diagrama de la Definición 2.3.6 conmuta. Por lo tanto, $(A\#_f H, \mu, \eta)$ es un producto cruzado. $\square$

Proposición 2.3.11. *Las definiciones 2.3.5 y 2.3.6 son equivalentes.*

Prueba. Es análoga a la prueba de la Proposición 2.1.6 para el caso del producto cruzado de Hopf. $\square$

Clases de productos cruzados

Ejemplo 2.3.12. Sea A una $K-$álgebra y H una $K-$álgebra de Hopf, entonces $\mathrm{Hom}_K(H \otimes H, A)$ es una $K-$álgebra.

Prueba. Como H es una $K-$álgebra de Hopf, H es $K-$coálgebra. Por la Proposición 2.2.9, $H \otimes H$ es una $K-$coálgebra. Aplicando la Proposición 2.2.13 $\mathrm{Hom}_K(H \otimes H, A)$ es una $K-$álgebra. $\square$

El *cociclo* f de un producto cruzado $A\#_f H$ es *trivial* si es el elemento unidad del álgebra $\mathrm{Hom}_K(H \otimes H, A)$; es decir, $f(h,l) = \varepsilon(h)\varepsilon(l)1_A$; $\forall h, l \in H$.

Definición 2.3.13. Sea A un $H-$módulo álgebra izquierdo. El $K-$módulo $A \otimes H$ provisto de multiplicación dada por

$$(a \otimes h)(b \otimes l) = ab^{h^{(1)}} \otimes h^{(2)}l$$

se llama *producto smash de A y H*, y se denota por $A\#H$.

Proposición 2.3.14. *Sea $A\#_f H$ un producto cruzado. Si el cociclo f es trivial; i.e., $f(h,l) = \varepsilon(h)\varepsilon(l)1_A$; $\forall h, l \in H$, entonces $A\#_f H = A\#H$.*

Prueba. Como $A\#_f H$ es un producto cruzado, se cumple la condición de módulo torcido. Así, $\forall h, l \in H$ y $\forall a \in A$ se tiene

$$\left(a^{l^{(1)}}\right)^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)}) a^{h^{(2)}l^{(2)}}.$$

Afirmación: $\left(a^l\right)^h = a^{hl}$.

En efecto, como f es trivial, la condición de módulo torcido es

$$\left(a^{l^{(1)}}\right)^{h^{(1)}} \varepsilon(h^{(2)})\varepsilon(l^{(2)})1_A = \varepsilon(h^{(1)})\varepsilon(l^{(1)})1_A a^{h^{(2)}l^{(2)}}.$$

Por linealidad de la acción débil, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K$; $\forall b \in A$; $\forall h, l \in H$ se tienen

$$\gamma(b^h) = (\gamma b)^h \quad , \quad \alpha(b^l) = b^{\alpha l} \quad \text{y} \quad \beta(b^l)^h = (b^l)^{\beta h}.$$

Teniendo en cuenta que H es coálgebra $\varepsilon(l^{(2)})l^{(1)} = l = \varepsilon(l^{(1)})l^{(2)}$ y $\varepsilon(h^{(2)})h^{(1)} = h = \varepsilon(h^{(1)})h^{(2)}$, de la igualdad anterior se deduce que $\left(a^l\right)^h = a^{hl}$. Así, A es $H-$módulo álgebra izquierdo. Por otro lado, en $A\#_f H$ se tiene :

$$\begin{aligned}(a \otimes h)(b \otimes l) &= ab^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(1)}) \otimes h^{(3)}l^{(2)} \text{ , } f \text{ es trivial:}\\ &= ab^{h^{(1)}}\varepsilon(h^{(2)})\varepsilon(l^{(1)})1_A \otimes h^{(3)}l^{(2)}\\ &= ab^{h^{(1)}} \otimes \varepsilon(h^{(2)})h^{(3)}\varepsilon(l^{(1)})l^{(2)} = ab^{h^{(1)}} \otimes h^{(2)}l.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A\#_f H = A\#H$. □

Definición 2.3.15. Sea $f : H \times H \to A$ una aplicación $K-$bilineal normal con $Im(f) \subseteq Z(A)$. El $K-$módulo $A \otimes H$ provisto de multiplicación dada por

$$(a \otimes h)(b \otimes l) = abf(h^{(1)}, l^{(1)}) \otimes h^{(2)}l^{(2)},$$

se llama *producto torcido de A con H*, y se denota por $A_f[H]$, si f es tal que $f(l^{(1)}, m^{(1)})f(h, l^{(2)}m^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)})f(h^{(2)}l^{(2)}, m), \forall h, l, m \in H$.

Proposición 2.3.16. *Sea $A\#_f H$ un producto cruzado. Si la acción débil de H sobre A es trivial; i.e., $a^h = \varepsilon(h)a$ para $a \in A$ y $h \in H$, entonces $A\#_f H = A_f[H]$.*

Prueba. Como $A\#_f H$ es un producto cruzado, por la Proposición 2.3.10, $f : H \times H \to A$ es una aplicación $K-$bilineal normal. Además, se cumplen la condición de cociclo,

$$\forall h, l, m \in H : f(l^{(1)}, m^{(1)})^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}m^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)})f(h^{(2)}l^{(2)}, m), \tag{2.10}$$

y la condición de módulo torcido,

$$\forall a \in A;\ \forall h, l \in H : \left(a^{l^{(1)}}\right)^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)})a^{h^{(2)}l^{(2)}}. \tag{2.11}$$

Como la acción débil es trivial

$$\left(a^{l^{(1)}}\right)^{h^{(1)}} = \varepsilon(h^{(1)})a^{l^{(1)}} = \varepsilon(h^{(1)})\varepsilon(l^{(1)})a.$$

Por $K-$bilinealidad de f

$$\left(a^{l^{(1)}}\right)^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}) = af(h,l);$$

Similarmente, $a^{h^{(2)}l^{(2)}} = \varepsilon(h^{(2)}l^{(2)})a = \varepsilon(h^{(2)})\varepsilon(l^{(2)})a.$

Luego $f(h^{(1)}, l^{(1)})a^{h^{(2)}l^{(2)}} = f(h,l)a.$

Así, por (2.11), $af(h,l) = f(h,l)a$; de modo que $Im(f) \subseteq Z(A)$.

Por otro lado, como la acción débil es trivial:

$f(l^{(1)}, m^{(1)})^{h^{(1)}} = \varepsilon(h^{(1)})f(l^{(1)}, m^{(1)})$, de modo que

$$\begin{aligned} f(l^{(1)}, m^{(1)})^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}m^{(2)}) &= f(l^{(1)}, m^{(1)})f\big(\varepsilon(h^{(1)})h^{(2)}, l^{(2)}m^{(2)}\big) \\ &= f(l^{(1)}, m^{(1)})f(h, l^{(2)}m^{(2)}). \end{aligned}$$

Reemplazando esto en (2.10):

$$f(l^{(1)}, m^{(1)})f(h, l^{(2)}m^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)})f(h^{(2)}l^{(2)}, m).$$

En $A\#_f H$ se tiene :

$$\begin{aligned} (a \otimes h)(b \otimes l) &= ab^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(1)}) \otimes h^{(3)}l^{(2)} \text{ , como la acción es trivial:} \\ &= a\varepsilon(h^{(1)})bf(h^{(2)}, l^{(1)}) \otimes h^{(3)}l^{(2)} \text{ , como } f \text{ es } K-\text{bilineal:} \\ &= abf\big(\varepsilon(h^{(1)})h^{(2)}, l^{(1)}\big) \otimes h^{(3)}l^{(2)} \\ &= abf(h^{(1)}, l^{(1)}) \otimes h^{(2)}l^{(2)} \ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por lo tanto, $A\#_f H = A_f[H]$. □

Proposición 2.3.17. *Sea $A\#_f H$ un producto cruzado. Si la acción débil de H sobre A es trivial y el cociclo f también es trivial; i.e., $a^h = \varepsilon(h)a$, $f(h,l) = \varepsilon(h)\varepsilon(l)1_A$, entonces $A\#_f H = A \otimes H$.*

Prueba. En este caso, la condición de cociclo (2.8) se reduce a $\varepsilon(hlm)1_A = \varepsilon(hlm)1_A$; mientras que la condición de módulo torcido (2.9) se convierte en $\varepsilon(hl)a = \varepsilon(hl)a$. Como la acción débil es trivial, la multiplicación en $A\#_f H$ por (2.12) se reduce a

$$\begin{aligned}(a\otimes h)(b\otimes l) &= abf(h^{(1)},l^{(1)})\otimes h^{(2)}l^{(2)}\ , \text{ pero } f \text{ es trivial, luego}\\ &= ab\varepsilon(h^{(1)})\varepsilon(l^{(1)})1_A\otimes h^{(2)}l^{(2)}\\ &= ab\otimes\varepsilon(h^{(1)})h^{(2)}\varepsilon(l^{(1)})l^{(2)} = ab\otimes hl.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $A\#_f H = A\otimes H$. □

Definición 2.3.18. [3, Defi. 1.2] Una *acción débil* de H sobre A es *interna* si existe un elemento invertible por convolución $\gamma\in \mathrm{Hom}_K(H,A)$ tal que para $h\in H$ y $a\in A$, $a^h=\gamma(h^{(1)})a\gamma^{-1}(h^{(2)})$, donde γ^{-1} es inversa de γ por convolución.

Observación 2.3.19. La acción débil trivial de H sobre A es la acción interna implementada por el elemento unidad $\gamma=\eta_A\varepsilon_H$ del álgebra $\mathrm{Hom}_K(H,A)$.

Definición 2.3.20. Sea γ invertible por convolución en $\mathrm{Hom}_K(H,A)$. Entonces, la aplicación $f: H\times H\to A$, definida por $f(h,l)=\gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(2)}l^{(2)})$ es $K-$bilineal.

Observación 2.3.21. Se nota que $f=\mu_A\circ(\gamma\otimes\gamma)*\gamma^{-1}\circ\mu_H$, donde $\mu_A\circ(\gamma\otimes\gamma)$ y $\gamma^{-1}\circ\mu_H\in\mathrm{Hom}_K(H\otimes H,A)$, luego $f\in\mathrm{Hom}_K(H\otimes H,A)$. Por lo tanto, $f:H\times H\to A$ es una aplicación $K-$bilineal.

Proposición 2.3.22. *Dada una acción débil interna de H sobre A implementada por el invertible $\gamma\in Hom_K(H,A)$ con $\gamma(1)=1$ (Definición 2.3.18). Si $f:H\times H\to A$ es dada por $f(h,l)=\gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(2)}l^{(2)})$, entonces $A\#_f H$ es un producto cruzado.*

Prueba. Puesto que $f(h,1)=\eta\varepsilon(h)=\varepsilon(h)1_A$ y $f(1,h)=\gamma(h^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(2)})=\eta\varepsilon(h)=\varepsilon(h)1_A$, se sigue que f es normal.

Afirmación 1: f es un cociclo. En efecto, $\forall h,l,m\in H$:

$$f(l^{(1)},m^{(1)})^{h^{(1)}}f(h^{(2)},l^{(2)}m^{(2)})=\gamma(h^{(1)(1)})f(l^{(1)},m^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(1)(2)})f(h^{(2)},l^{(2)}m^{(2)}),$$

pues la acción débil es interna; de modo que

$$\begin{aligned}f(l^{(1)},m^{(1)})^{h^{(1)}}f(h^{(2)},l^{(2)}m^{(2)}) &= \gamma(h^{(1)})f(l^{(1)},m^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(2)})f(h^{(3)},l^{(2)}m^{(2)})\\ &= \gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})\gamma(m^{(1)})\gamma^{-1}(l^{(2)}m^{(2)})\gamma^{-1}(h^{(2)})\gamma(h^{(3)})\\ &\qquad\gamma(l^{(3)}m^{(3)})\gamma^{-1}(h^{(4)}l^{(4)}m^{(4)})\\ &= \gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})\gamma(m^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(2)}l^{(2)}m^{(2)}),\end{aligned}$$

efectuando cálculos resulta:

$$f(l^{(1)}, m^{(1)})^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}m^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)}) f(h^{(2)}l^{(2)}, m).$$

Afirmación 2: Para la acción débil y el cociclo f se cumple la condición de módulo torcido. En efecto, para $h, l \in H$ y $a \in A$:

$$\begin{aligned}\left(a^{l^{(1)}}\right)^{h^{(1)}} f(h^{(2)}, l^{(2)}) &= [\gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})a\gamma^{-1}(l^{(2)})\gamma^{-1}(h^{(2)})]\gamma(h^{(3)})\gamma(l^{(3)})\gamma^{-1}(h^{(4)}l^{(4)}) \\ &= \gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})a\gamma^{-1}(h^{(2)}l^{(2)}) \text{ , por cálculos :} \\ &= f(h^{(1)}, l^{(1)})a^{h^{(2)}l^{(2)}}.\end{aligned}$$

Como f es normal y se cumplen las afirmaciones 1 y 2; por el Teorema 2.3.10 $A\#_f H$ es un producto cruzado. □

2.4 Acciones y coacciones de un álgebra de Hopf

$H-$módulo álgebra izquierdo

Sea A un $H-$módulo álgebra izquierdo (Definición 2.3.4); es decir, A es una $K-$álgebra que es $H-$módulo izquierdo tal que $(ab)^h = a^{h^{(1)}}b^{h^{(2)}}$ y $1_A^h = \varepsilon(h)1_A$ $\forall a, b \in A$, $\forall h \in H$.

Proposición 2.4.1. *Sea A un $H-$módulo álgebra izquierdo, entonces* $A^H = \{x \in A \mid x^h = \varepsilon(h)x, \ \forall h \in H\}$ *es un subálgebra de A.*

Prueba. 1) Sean $x, \ y \in A^H$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha x + y \in A^H$.

En efecto, como la acción de H sobre A, $\nu : H \otimes A \to A$, es aplicación $K-$lineal:

$$\begin{aligned}(\alpha x + y)^h &= \nu(h \otimes (\alpha x + y)) \\ &= \alpha\nu(h \otimes x) + \nu(h \otimes y) \\ &= \alpha x^h + y^h = \alpha\varepsilon(h)x + \varepsilon(h)y = \varepsilon(h)(\alpha x + y), \ \forall h \in H.\end{aligned}$$

Luego, $\alpha x + y \in A^H$.

2) $x, \ y \in A^H$ implica que $xy \in A^H$.

En efecto, como $(xy)^h = x^{h^{(1)}}y^{h^{(2)}}$, se obtiene $(xy)^h = \varepsilon(h^{(1)}h^{(2)})xy = \varepsilon(h)xy$. Así,

$xy \in A^H$.

Por 1) y 2), A^H es un subálgebra de A.

$\square$

Definición 2.4.2. Sea A un $H-$módulo álgebra izquierdo. El subálgebra siguiente $A^H = \{x \in A \mid x^h = \varepsilon(h)x \ , \ \forall h \in H\}$ se llama *álgebra de $H-$invariantes de A.*

$H-$comódulo álgebra derecho

Definición 2.4.3. Sea H un álgebra de Hopf y A un álgebra. Una *coacción débil de H sobre A* es una aplicación $K-$lineal $\rho : A \to A \otimes H$, denotada por $\rho(a) = a^{(0)} \otimes a^{(1)}$, que satisface las tres siguientes condiciones:

1) $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$; i.e., $(ab)^{(0)} \otimes (ab)^{(1)} = a^{(0)}b^{(0)} \otimes a^{(1)}b^{(1)}$.

2) $\rho(1) = 1 \otimes 1$.

3) $(id \otimes \varepsilon)\rho = i$, donde $i : A \to A \otimes K, \ a \mapsto a \otimes 1$. (ver la Definición 2.3.2).

   Una *coacción de H sobre A* es una coacción débil ρ de H sobre A tal que

4) $(\rho \otimes id)\rho = (id \otimes \Delta)\rho$ (ver la Definición 2.3.2).

   En este caso, se dice que A es *$H-$comódulo álgebra derecho* con la aplicación de estructura $\rho : A \to A \otimes H$.

El elemento $\rho(a) = a^{(0)} \otimes a^{(1)}$ de $A \otimes H$ representa una suma finita de tensores en la notación de Sweedler. Esto se puede ver en el Corolario 2.5.9.

Proposición 2.4.4. *Sea A un $H-$comódulo álgebra derecho, entonces $A^{coH} = \{x \in A \mid \rho(x) = x \otimes 1\}$ es un subálgebra de A.*

Prueba. 1) Sean $x_1, x_2 \in A^{coH}$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha x_1 + x_2 \in A^{coH}$.

En efecto, como $\rho : A \to A \otimes H$ es una aplicación $K-$lineal,

$$\rho(\alpha x_1 + x_2) = \alpha\rho(x_1) + \rho(x_2) \ , \ x_1, x_2 \in A^{coH} :$$

$$= (\alpha x_1) \otimes 1 + x_2 \otimes 1 = (\alpha x_1 + x_2) \otimes 1.$$

Por consiguiente, $\alpha x_1 + x_2 \in A^{coH}$.

2) $x_1, x_2 \in A^{coH}$ implica que $x_1x_2 \in A^{coH}$.

En efecto, recordando que ρ preserva productos:

$$\rho(x_1x_2) = \rho(x_1)\rho(x_2) = (x_1x_2) \otimes 1\ . \quad \text{Así, } x_1x_2 \in A^{coH}.$$

Por 1) y 2), A^{coH} es un subálgebra de A.

□

Definición 2.4.5. Sea A un $H-$comódulo álgebra derecho. El subálgebra de A,

$$A^{coH} = \{x \in A \mid \rho(x) = x \otimes 1\},$$

se llama *álgebra de $H-$coinvariantes de A.*

Relación entre acción y coacción

Lema 2.4.6. *Sean A una $K-$álgebra y H una $K-$álgebra finito dimensional. Sea $z \in A \otimes H$ con $z \neq 0$; entonces existe $f \in H^*$ tal que $(id \otimes f)(z) \neq 0$.*

Prueba. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de H y sea $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ la base dual; i.e., $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Entonces si $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i \neq 0$, existen $x_{i_0} \neq 0$ en A y $f = e_{i_0}^*$, tales que

$$(id \otimes f)(z) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_{i_0}^*(e_i) = x_{i_0} \otimes 1 \neq 0.$$

□

Observación. Si $(id \otimes f)(z) = 0$, $\forall f \in H^*$, entonces $z = 0$.

En el caso en que H es finito dimensional, se tiene la relación siguiente entre acciones y coacciones. En lo que respecta a la notación, en lugar de u^f se escribirá $f \cdot u$ en la proposición siguiente.

Proposición 2.4.7. [18, Lemm. 1.6.4, Lemm. 1.7.2] *Sea H un álgebra de Hopf finito dimensional y A una $K-$álgebra. Entonces A es un $H-$comódulo álgebra derecho si y sólo si A es un H^*-módulo álgebra izquierdo. Además, en este caso $A^{H^*} = A^{coH}$.*

Prueba. Sean $n = dim_K(H)$, $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq H$, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\} \subseteq H^*$ bases duales; es decir, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

$\Rightarrow$) Sea A un $H-$comódulo álgebra derecho. Luego, existe $\rho : A \to A \otimes H$, coacción de H sobre A. Se define $\nu : H^* \otimes A \to A$ por $\nu(f \otimes u) = f \cdot u := u^{(0)} f(u^{(1)})$ ya que $\rho(u) = u^{(0)} \otimes u^{(1)}$. La extensión lineal de ν es una aplicación $K-$lineal.

Se cumplen las cuatro condiciones siguientes:

1)
$$\begin{aligned} f \cdot (uv) &= (uv)^{(0)} f\left((uv)^{(1)}\right) \\ &= u^{(0)} v^{(0)} f(u^{(1)} v^{(1)}), \text{ por la Proposición 2.2.17 :} \\ &= u^{(0)} v^{(0)} f^{(1)}(u^{(1)}) f^{(2)}(v^{(1)}) \\ &= u^{(0)} f^{(1)}(u^{(1)}) v^{(0)} f^{(2)}(v^{(1)}) = (f^{(1)} \cdot u)(f^{(2)} \cdot v); \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} f \cdot 1_A &= 1_A f(1_H) \text{ , pues } \rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H \\ &= \varepsilon_{H^*}(f) 1_A \text{ , } \varepsilon_{H^*} \text{ es counidad de } H^*; \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} (\eta_K \varepsilon) \cdot u &= u^{(0)} (\eta_K \varepsilon)(u^{(1)}) \\ &= u^{(0)} \varepsilon(u^{(1)}) 1_K \\ &= u^{(0)} \varepsilon(u^{(1)}) = u \text{ , pues } (id \otimes \varepsilon)\rho(u) = i(u); \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} (f * g) \cdot u &= u^{(0)} (f * g)(u^{(1)}) \text{ , } \rho(u) = u^{(0)} \otimes u^{(1)} \\ &= u^{(0)} f(u^{(1)}) g(u^{(2)}) \\ &= u^{(0)} g(u^{(2)}) f(u^{(1)}) = f \cdot \left(u^{(0)} g(u^{(2)})\right) = f \cdot (g \cdot u) \text{ .} \end{aligned}$$

Por lo tanto, ν es una acción de H^* sobre A. Es decir, A es H^*-módulo álgebra izquierdo.

$\Leftarrow$) Sea A un H^*-módulo álgebra izquierdo. Luego, está definida una acción ν de H^* sobre A, $\nu : H^* \otimes A \to A$, dada por $\nu(f \otimes u) = f \cdot u$ para $f \in H^*$ y $u \in A$. En particular, $e_i^* \cdot u \in A$ para $i = 1, \ldots, n$.

Se define $\rho : A \to A \otimes H$ por $\rho(u) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot u \otimes e_i$.

Se nota que ρ es una aplicación $K-$lineal ya que ν es una aplicación $K-$lineal. Se cumplen las cuatro condiciones siguientes:

1) Para cualquier $f \in H^*$:

$$
\begin{aligned}
(id \otimes f)\big(\rho(uv)\big) &= \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot (uv) \otimes f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^* \cdot (uv) \otimes 1 \\
&= f \cdot (uv) \otimes 1 \text{ , como } \nu \text{ es acción} \\
&= (f^{(1)} \cdot u)(f^{(2)} \cdot v) \otimes 1 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \big(f^{(1)}(e_i) e_i^* \cdot u\big)\big(f^{(2)}(e_j) e_j^* \cdot v\big) \otimes 1 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (e_i^* \cdot u)(e_j^* \cdot v) \otimes f^{(1)}(e_i) f^{(2)}(e_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (e_i^* \cdot u)(e_j^* \cdot v) \otimes f(e_i e_j) \\
&= (id \otimes f) \left(\sum_{i,j=1}^{n} (e_i^* \cdot u)(e_j^* \cdot v) \otimes e_i e_j \right) = (id \otimes f)\big(\rho(u)\rho(v)\big).
\end{aligned}
$$

Tomando $z = \rho(uv) - \rho(u)\rho(v)$, por la observación del Lema 2.4.6 se obtiene que $\rho(uv) = \rho(u)\rho(v)$.

2)
$$
\begin{aligned}
\rho(1_A) &= \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot 1_A \otimes e_i, \text{ como } \varepsilon_{H^*} \text{ es counidad de } H^*,\ e_i^* \cdot 1_A = \varepsilon_{H^*}(e_i^*) 1_A \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i^*(1_H) 1_A \otimes e_i = 1_A \otimes \sum_{i=1}^{n} [e_i^*(1_H) e_i] = 1_A \otimes 1_H;
\end{aligned}
$$

3)
$$
\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon)\rho(u) &= (id \otimes \varepsilon) \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot u \otimes e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot u \otimes \varepsilon(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(e_i) e_i^* \cdot u \otimes 1 = (\eta_K \varepsilon) \cdot u \otimes 1 = u \otimes 1 = i(u).
\end{aligned}
$$

Así, $(id \otimes \varepsilon)\rho = i$.

Puesto que $\Delta(e_k) = e_k^{(1)} \otimes e_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} e_j^* \left(e_k^{(1)}\right) e_j \otimes \sum_{i=1}^{n} e_i^* \left(e_k^{(2)}\right) e_i$,

$e_j^* * e_i^* = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j^* * e_i^*, e_k \rangle e_k^*$, por la Proposición 2.2.13 $\langle e_j^* * e_i^*, e_k \rangle = e_j^* \left(e_k^{(1)}\right) e_i^* \left(e_k^{(2)}\right)$.

Luego se sigue que

4)
$$\begin{aligned}(id\otimes\Delta)\rho(u) &= (id\otimes\Delta)\left(\sum_{k=1}^{n} e_k^*\cdot u\otimes e_k\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle e_j^* * e_i^*, e_k\rangle e_k^*\cdot u\right)\otimes e_j\otimes e_i\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(e_j^* * e_i^*)\cdot u\otimes e_j\otimes e_i\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} e_j^*\cdot(e_i^*\cdot u)\otimes e_j\otimes e_i = \sum_{i=1}^{n}\rho(e_i^*\cdot u)\otimes e_i\\ &= (\rho\otimes id)\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*\cdot u\otimes e_i\right) = (\rho\otimes id)\rho(u).\end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ es una coacción de H sobre A. Es decir, A es $H-$comódulo álgebra derecho.

Finalmente, se obtiene la igualdad $A^{coH} = A^{H^*}$, como sigue:
Sea $v \in A^{coH}$, entonces $v \in A$ y $\rho(v) = v\otimes 1_H$. Pero la acción de H^* sobre A es dada por $f\cdot u = u^{(0)}f(u^{(1)})$ cuando $\rho(u) = u^{(0)}\otimes u^{(1)}$, luego $f\cdot v = vf(1_H)$. En términos de la counidad ε_{H^*} de H^*, $f(1_H) = \varepsilon_{H^*}(f)$; de modo que $f\cdot v = \varepsilon_{H^*}(f)v$. Así, $v\in A^{H^*}$.
Recíprocamente; si $v\in A^{H^*}$, entonces $v\in A$ y $f\cdot v = \varepsilon_{H^*}(f)v$, $\forall f\in H^*$.
Como $\rho : A\to A\otimes H$ es dada por $\rho(u) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*\cdot u\otimes e_i$, haciendo cálculos
$\rho(v) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*\cdot v\otimes e_i = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{H^*}(e_i^*)v\otimes e_i = v\otimes\sum_{i=1}^{n}[e_i^*(1_H)e_i] = v\otimes 1_H$, luego $v\in A^{coH}$. $\square$

2.5 Productos cruzados de Hopf con cociclos invertibles

Dadas A una $K-$álgebra y H una $K-$álgebra de Hopf. Un *cociclo invertible* es un elemento $f\in \mathrm{Hom}_K(H\otimes H, A)$ tal que existe $f^{-1}\in\mathrm{Hom}_K(H\otimes H, A)$ satisfaciendo
$f^{-1} * f = f * f^{-1} = \eta_A\varepsilon_{H\otimes H}$. Así, para todo $(h,l)\in H\times H$:

$$f^{-1}(h^{(1)}, l^{(1)})f(h^{(2)}, l^{(2)}) = f(h^{(1)}, l^{(1)})f^{-1}(h^{(2)}, l^{(2)}) = \varepsilon(h)\varepsilon(l)1_A.$$

Ejemplo 2.5.1. Si $f(h,l) = \gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(2)}l^{(2)})$ es el cociclo del producto cruzado de la Proposición 2.3.22, entonces $f^{-1}(h,l) = \gamma(h^{(1)}l^{(1)})\gamma^{-1}(l^{(2)})\gamma^{-1}(h^{(2)})$.

Observando que $f^{-1} = \gamma\mu_H * \mu_A \circ T \circ (\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1})$ donde T es la aplicación flip, se ve que la aplicación f^{-1} es K-lineal con dominio $H \otimes H$ y K-bilineal con dominio $H \times H$. Claramente f^{-1} es un inverso por convolución de f.

Lema 2.5.2. *Sea f un cociclo invertible. Entonces para $h, l, m \in H$ se cumplen las tres afirmaciones:*

(1) $f(l,m)^h = f(h^{(1)}, l^{(1)}) f(h^{(2)} l^{(2)}, m^{(1)}) f^{-1}(h^{(3)}, l^{(3)} m^{(2)})$.

(2) $f^{-1}(l,m)^h = f(h^{(1)}, l^{(1)} m^{(1)}) f^{-1}(h^{(2)} l^{(2)}, m^{(2)}) f^{-1}(h^{(3)}, l^{(3)})$.

(3) $f^{-1}\big(S(h^{(4)}), h^{(5)}\big)^{h^{(1)}} f\big(h^{(2)}, S(h^{(3)})\big) = \varepsilon(h) 1_A$.

Prueba. Se deduce de la prueba de [14, Prop. 1.8]. □

Proposición 2.5.3. *Sea $E = A \#_f H$ un producto cruzado y f un cociclo invertible. Sea $\gamma : H \to E$ la aplicación definida por $\gamma(m) = 1 \# m$. Entonces γ es invertible por convolución y $\gamma^{-1} : H \to E$ es dada por*

$$\gamma^{-1}(m) = f^{-1}(S(m^{(2)}), m^{(3)}) \# S(m^{(1)}) \ . \tag{2.13}$$

Prueba. Claramente $\gamma \in \mathrm{Hom}_K(H, E)$. Además, podemos verificar que
$\gamma * \gamma^{-1} = \gamma^{-1} * \gamma = \eta_E \varepsilon_H$, como sigue:

$$\begin{aligned}
\gamma * \gamma^{-1}(m) &:= \gamma(m^{(1)}) \gamma^{-1}(m^{(2)}) = (1 \# m^{(1)})[f^{-1}(S(m^{(3)}), m^{(4)}) \# S(m^{(2)})], \text{ por (2.7) :} \\
&= f^{-1}\big(S(m^{(4)}), m^{(5)}\big)^{m^{(1)}} f\big(m^{(2)}, S(m^{(3)})\big) \# m^{(6)} S(m^{(7)}) \\
&= \varepsilon_H(m^{(1)}) 1_A \# m^{(2)} S(m^{(3)}) \text{ por el Lema 2.5.2 .}
\end{aligned}$$

Puesto que S es una antípoda de H, $m^{(2)} S(m^{(3)}) = \varepsilon_H(m^{(2)}) 1_H$. Utilizando este valor:

$$\gamma * \gamma^{-1}(m) = \varepsilon_H(m^{(1)}) 1_A \# \varepsilon_H(m^{(2)}) 1_H = \varepsilon_H(m)(1_A \# 1_H) = \eta_E \varepsilon_H(m).$$

Por lo tanto, $\gamma * \gamma^{-1} = \eta_E \varepsilon_H$ en $\mathrm{Hom}_K(H, E)$ (ver Proposición 2.2.13).

Aplicando la Proposición 2.2.18 se deduce que

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1} * \gamma(m) &:= \gamma^{-1}(m^{(1)})\gamma(m^{(2)}) \\
&= [f^{-1}(S(m^{(2)}), m^{(3)})\#S(m^{(1)})](1\#m^{(4)}) \\
&= f^{-1}(S(m^{(2)}), m^{(3)})\varepsilon(S(m^{(1)})^{(1)})f(S(m^{(1)})^{(2)}, m^{(4)})\#S(m^{(1)})^{(3)}m^{(5)} \\
&= f^{-1}(S(m^{(2)}), m^{(3)})f(S(m^{(1)}), m^{(4)})\#S(m^{(5)})m^{(6)} \\
&= f^{-1}(S(m^{(2)}), m^{(3)})f(S(m^{(1)}), m^{(4)})\#\varepsilon(m^{(5)})1_H \\
&= f^{-1}(S(m^{(2)}), m^{(3)})f(S(m^{(1)}), m^{(4)})\#1_H, \ f \text{ es } K\text{-bilineal} .
\end{aligned}$$

Por otro lado, $f^{-1} * f = \eta_A \varepsilon_{H\otimes H}$, entonces

$$f^{-1} * f(S(m) \otimes m) = f^{-1}(S(m^{(2)}), m^{(3)})f(S(m^{(1)}), m^{(4)}) \text{ y}$$

$$\begin{aligned}
\eta_A \varepsilon_{H\otimes H}(S(m) \otimes m) = \eta_A \varepsilon_H(S(m)m) &= \eta_A \varepsilon_H(\varepsilon_H(m)1_H) \\
&= \eta_A \varepsilon_H(m) = \varepsilon_H(m)1_A.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma^{-1} * \gamma = \eta_E \varepsilon_H$. □

A continuación, definimos $H-$ extensiones derechas, luego extensiones $H-$Galois derechas. Definiendo lo que es una extensión $H-$cleft derecha y la propiedad de base normal de una $H-$extensión derecha; se presentan otras dos caracterizaciones de productos cruzados con cociclos invertibles dadas en [17]. Se aplica este resultado para mostrar que una extensión finita de Galois de un cuerpo es un ejemplo de producto cruzado.

Definición 2.5.4. Sea B/A una $K-$álgebra, y sea H un álgebra de Hopf. Se dice que B es una *$H-$extensión derecha de A* si B es un $H-$comódulo álgebra derecho y $A = B^{coH}$.

Definición 2.5.5. Sea B un $H-$comódulo álgebra derecho con la aplicación de estructura $\rho : B \to B \otimes H$ y $B^{coH} = \{x \in B \mid \rho(x) = x \otimes 1\}$.
Se dice que la *extensión B/B^{coH}* es *$H-$Galois derecha* si la aplicación

$$\beta : B \otimes_{B^{coH}} B \to B \otimes H, x \otimes y \mapsto (x \otimes 1)\rho(y)$$

es biyectiva.

La $H-$extensión derecha de la Definición 2.5.4 se puede denotar con flechas por $0 \to A \to B$.

Definición 2.5.6. [14, Defi. 1.17] Una $H-$*extensión* derecha $0 \to A \to B$

1. es $H-$*cleft derecha* si existe un morfismo de $H-$comódulos derechos $\gamma : H \to B$ que es invertible por convolución.

2. *tiene la propiedad de base normal* si existe una biyección de $A \otimes_K H$ a B que es un morfismo de $A-$módulos izquierdos y $H-$comódulos derechos.

Lema 2.5.7. *Sea B una extensión $H-$cleft derecha de A. Sea $\gamma : H \to B$ un morfismo de $H-$comódulos derechos invertible por convolución con $\gamma(1_H) = 1_B$. Si $\theta : H \otimes A \to B$ es dada por $\theta(h \otimes x) = \gamma(h^{(1)})x\gamma^{-1}(h^{(2)})$ y $f : H \otimes H \to B$ es dada por $f = \mu_B \circ (\gamma \otimes \gamma) * \gamma^{-1} \circ \mu_H$, entonces $A\#_f H$ es un producto cruzado donde f es un cociclo invertible por convolución y $F : A \otimes_K H \to B$ tal que $F(x \otimes h) = x\gamma(h)$ es un isomorfismo de $K-$álgebras.*

Prueba. Se hace como en [4, Theo. 11]. Se comienza mostrando que $\theta(H \otimes A) \subseteq A$. Para ello, se puede tomar $h \in H$ y $x \in A$. Puesto que ρ_B preserva productos, $\rho_B \circ \gamma = (i_1 \circ \gamma) * i_2$ y $\rho_B \circ \gamma^{-1} = i_2^{-1} * (i_1 \circ \gamma^{-1})$:

$$\begin{aligned}
\rho_B(\theta(h \otimes x)) &= (\rho_B \circ \gamma)(h^{(1)})(x \otimes 1)(\rho_B \circ \gamma^{-1})(h^{(2)}) \\
&= (\gamma(h^{(1)}) \otimes h^{(2)})(x \otimes 1)i_2^{-1}(h^{(3)})(\gamma^{-1}(h^{(4)}) \otimes 1) \\
&= (\gamma(h^{(1)}) \otimes 1)(x \otimes 1)i_2(h^{(2)})i_2^{-1}(h^{(3)})(\gamma^{-1}(h^{(4)}) \otimes 1) \\
&= (\gamma(h^{(1)}) \otimes 1)(x \otimes 1)(\gamma^{-1}(h^{(2)}) \otimes 1) \\
&= (\theta(h \otimes x)) \otimes 1, \quad \text{así } \theta(h \otimes x) \text{ está en } A\ .
\end{aligned}$$

Por definición $f(h \otimes l) = \gamma(h^{(1)})\gamma(l^{(1)})\gamma^{-1}(h^{(2)}l^{(2)})$, como en el caso anterior se muestra que $f(H \otimes H) \subseteq A$ pues $\rho_B(f(h \otimes l)) = (f(h \otimes l)) \otimes 1$.

Por lo tanto, θ es una acción débil de H sobre A y $f : H \otimes H \to A$ es una aplicación $K-$lineal.

Por la Proposición 2.3.22 $A\#_f H$ es un producto cruzado.

El cociclo f es invertible por convolución pues $f^{-1} * f = f * f^{-1} = \eta_A \varepsilon_{H \otimes H}$ para $f^{-1}(h \otimes l) = \gamma(h^{(1)}l^{(1)})\gamma^{-1}(l^{(2)})\gamma^{-1}(h^{(2)})$.

F es un morfismo de $K-$álgebras pues para $\lambda \in K$, $x_1 \otimes h_1$ y $x_2 \otimes h_2 \in A \otimes_K H$:

$$F(\lambda(x_1 \otimes h_1) + x_2 \otimes h_2) = \lambda F(x_1 \otimes h_1) + F(x_2 \otimes h_2),$$

$$F(1_A \otimes 1_H) = 1_B,$$

$$\begin{aligned} F((x_1 \otimes h_1)(x_2 \otimes h_2)) &= x_1 x_2^{h_1^{(1)}} f(h_1^{(2)}, h_2^{(1)}) \gamma(h_1^{(3)} h_2^{(2)}) \\ &= x_1 \gamma(h_1^{(1)}) x_2 \gamma^{-1}(h_1^{(2)}) \gamma(h_1^{(3)}) \gamma(h_2^{(1)}) \gamma^{-1}(h_1^{(4)} h_2^{(2)}) \gamma(h_1^{(5)} h_2^{(3)}) \\ &= x_1 \gamma(h_1) x_2 \gamma(h_2) = F(x_1 \otimes h_1) F(x_2 \otimes h_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es un isomorfismo de $K-$álgebras con inversa $G : B \to A \otimes_K H$,
$y \mapsto y^{(0)} \gamma^{-1}(y^{(1)}) \otimes y^{(2)}$.
Es claro que $FG = id$. Del hecho que $\rho(x) = x \otimes 1$ y $\rho \circ \gamma = (\gamma \otimes id_H) \circ \Delta_H$, se sigue que $(id_B \otimes \Delta_H)\rho_B(x\gamma(h)) = x\gamma(h^{(1)}) \otimes h^{(2)} \otimes h^{(3)}$, luego

$$\begin{aligned} GF(x \otimes h) = G(x\gamma(h)) &= [x\gamma(h)]^{(0)} \gamma^{-1}([x\gamma(h)]^{(1)}) \otimes [x\gamma(h)]^{(2)} \\ &= x\gamma(h^{(1)}) \gamma^{-1}(h^{(2)}) \otimes h^{(3)} \\ &= x \otimes \varepsilon_H(h^{(1)}) h^{(2)} = x \otimes h. \end{aligned}$$

Así, $GF = id$. $\square$

Un morfismo de $H-$comódulos derechos $\gamma : H \to B$ que es invertible por convolución se llama sección si $\gamma(1) = 1$ (ver [5]).

Teorema 2.5.8. [17, Theo. 3.8] *Sea B/A una $H-$extensión derecha. Entonces son equivalentes:*

1. *B/A es $H-$Galois derecha y tiene la propiedad de base normal.*

2. *$B \cong A\#_f H$, producto cruzado de A con H donde f es un cociclo invertible por convolución.*

3. *La extensión B/A es $H-$cleft derecha.*

Prueba. 1. $\Rightarrow$ 2. Por hipótesis, $\beta : B \otimes_A B \to B \otimes H, x \otimes y \mapsto (x \otimes 1)\rho(y)$ es biyectiva, y existe un isomorfismo $F : A \otimes_K H \to B$ de $H-$comódulos derechos y $A-$módulos izquierdos.

Por [4, Theo. 9], como en $(iii) \Rightarrow (i)$ se ve que B es una extensión $H-$cleft derecha de A. En efecto, definiendo $\gamma : H \to B$ como $\gamma = F \circ i_2$, donde $i_2(h) = 1 \otimes h$, se ve que $\gamma(1_H) = 1_B$ y γ es un morfismo de $H-$comódulos derechos, pues

$$\begin{aligned}\rho_B\gamma(h) &= \rho_B F(1 \otimes h), \text{ como } F \text{ es un morfismo de } H-\text{comódulos derechos:}\\ &= (F \otimes id_H)\rho_{A\otimes_K H}(1 \otimes h) = F(1 \otimes h^{(1)}) \otimes h^{(2)} \quad \text{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma \otimes id_H)\Delta_H(h) &= (\gamma \otimes id_H)(h^{(1)} \otimes h^{(2)})\\ &= F(1 \otimes h^{(1)}) \otimes h^{(2)}.\end{aligned}$$

Además, $\mu_B \circ (id_A \otimes \gamma) = F$.
La biyección $\beta : B \otimes_A B \to B \otimes H$ es un morfismo de $B-$módulos izquierdos, de modo que se tiene un isomorfismo de $K-$módulos

$$\beta^* : \mathrm{Hom}_B(B \otimes_K H, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, B).$$

Por la Proposición 3.1.4 $\mathrm{Hom}_\Gamma(B \otimes_\Lambda A, C) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))$.
Luego se sigue que

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_K H, B) \cong \mathrm{Hom}_K(H, \mathrm{Hom}_B(B, B)) \cong \mathrm{Hom}_K(H, B);$$

por el mismo argumento

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, B) \cong \mathrm{Hom}_A(B, \mathrm{Hom}_B(B, B)) \cong \mathrm{Hom}_A(B, B) = End_A(B).$$

Se define el morfismo de $K-$módulos $\pi : \mathrm{Hom}_K(H, B) \to End_A(B)$ por
$\pi(f)(y) = y^{(0)} f(y^{(1)})$.
Se verifica que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_B(B \otimes_K H, B) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, B) \arrow[d, "\sim"]\\ \mathrm{Hom}_K(H, B) \arrow[u, "\sim"] \arrow[r, "\pi"'] & End_A(B)\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta los isomorfismos anteriores se sigue que π es un isomorfismo de $K-$módulos. Se verifica que γ es invertible por convolución.

Sea $G : B \to A \otimes_K H$ un inverso de F por composición, luego $F \circ G = id_B$ y $G \circ F = id_{A \otimes_K H}$. Se define $g : B \to A$ por $g = (id_A \otimes \varepsilon_H) \circ G$. Entonces g es un morfismo de $A-$módulos izquierdos y se obtiene que $(g \otimes id_H) \circ \rho_B = G$. En efecto,
puesto que G es un morfismo de $H-$comódulos derechos y $(\varepsilon_H \otimes id_H) \circ \Delta_H = id_H$:

$$\begin{aligned}
(g \otimes id_H) \circ \rho_B &= (id_A \otimes \varepsilon_H \otimes id_H) \circ (G \otimes id_H) \circ \rho_B \\
&= (id_A \otimes \varepsilon_H \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \Delta_H) \circ G \\
&= (id_A \otimes id_H) \circ G = G \ .
\end{aligned}$$

Claramente $g \in End_A(B)$. Puesto que π es biyectiva existe un único elemento $\upsilon \in \mathrm{Hom}_K(H, B)$ tal que $\pi(\upsilon) = g$. Se probará que υ es inverso de γ por convolución :

$$\begin{aligned}
\gamma * \upsilon &= \mu_B \circ (\gamma \otimes \upsilon) \circ \Delta_H \\
&= \mu_B \circ (id_B \otimes \upsilon) \circ (\gamma \otimes id_H) \circ \Delta_H \\
&= \mu_B \circ (id_B \otimes \upsilon) \circ \rho_B \circ \gamma, \quad \text{pues } \gamma \text{ es un morfismo de } H-\text{comódulos} \\
&= \pi(\upsilon) \circ \gamma, \quad \text{por definición de } \pi \\
&= (id_A \otimes \varepsilon_H) \circ G \circ F \circ i_2, \quad \text{como } G \circ F = id_{A \otimes_K H} : \\
&= (id_A \otimes \varepsilon_H) \circ i_2 = \eta_B \circ \varepsilon_H.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\pi(\upsilon * \gamma) &= \mu_B \circ (id_B \otimes \upsilon * \gamma) \circ \rho_B \\
&= \mu_B \circ (id_B \otimes \mu_B) \circ (id_B \otimes \upsilon \otimes \gamma) \circ (id_B \otimes \Delta_H) \circ \rho_B \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes id_B) \circ (id_B \otimes \upsilon \otimes \gamma) \circ (\rho_B \otimes id_H) \circ \rho_B \\
&\quad \text{pues } B \text{ es un } H-\text{comódulo algebra} \\
&= \mu_B \circ [(\mu_B \circ (id_B \otimes \upsilon) \circ \rho_B) \otimes \gamma] \circ \rho_B = \mu_B \circ (\pi(\upsilon) \otimes \gamma) \circ \rho_B \\
&= \mu_B \circ (id_A \otimes \gamma) \circ (g \otimes id_H) \circ \rho_B \\
&= F \circ G = id_B = \pi(\eta_B \circ \varepsilon_H) \ .
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\upsilon * \gamma = \eta_B \circ \varepsilon_H$.
Por el Lema 2.5.7 se deduce que $B \cong A \#_f H$ donde f es un cociclo invertible por convolución.
2. $\Rightarrow$ 3. Sea $B' = A \#_f H$ un producto cruzado con cociclo invertible. Se define la aplicación

de estructura $\rho_{B'} : B' \to B' \otimes H$ por $\rho_{B'}(x\#h) = (x\#h^{(1)}) \otimes h^{(2)}$. Por [14, Lemm. 1.5] B' es $H-$comódulo álgebra derecho y ${B'}^{coH} = A\#_f 1$. Luego $\gamma : H \to B'$ definido por $\gamma(h) = 1\#h$ es un morfismo de $H-$comódulos. Por la Proposición 2.5.3, γ es invertible por convolución. Sea $F : B' = A\#_f H \to B$ un isomorfismo de $K-$álgebras y $\widetilde{\gamma} = F\circ\gamma : H \to B$. Por definición se sabe que B es un $H-$comódulo álgebra y también B' es un $H-$comódulo álgebra, de modo que F es un morfismo de $H-$comódulos. Es decir, $\rho_B F = (F \otimes id_H)(id_A \otimes \Delta_H)$. Del hecho que γ es un morfismo de $H-$comódulos, $(id_A \otimes \Delta_H) \circ \gamma = (\gamma \otimes id_H) \circ \Delta_H$.
Luego, se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\Delta_H"] & B' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "id_A\otimes\Delta_H"] & B \arrow[d, "\rho_B"] \\
H \otimes H \arrow[r, "\gamma\otimes id_H"'] & B' \otimes H \arrow[r, "F\otimes id_H"'] & B \otimes H
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\rho_B \circ \widetilde{\gamma} = (\rho_B F)\gamma = (F \otimes id_H)(\gamma \otimes id_H)\Delta_H = (\widetilde{\gamma} \otimes id_H)\Delta_H$.
Así, $\widetilde{\gamma}$ es un morfismo de $H-$comódulos. Por otro lado, tomando $\widetilde{\gamma}^{-1} = F \circ \gamma^{-1}$ se ve que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma} * \widetilde{\gamma}^{-1}(m) &= (F \circ \gamma) * (F \circ \gamma^{-1})(m) \\
&= F(\gamma(m^{(1)}))F(\gamma^{-1}(m^{(2)})) \\
&= F(\gamma(m^{(1)})\gamma^{-1}(m^{(2)})) \\
&= F(\varepsilon_H(m)1_{B'}) = \varepsilon_H(m)1_B = \eta_B \circ \varepsilon_H(m).
\end{aligned}$$

Similarmente, $\widetilde{\gamma}^{-1} * \widetilde{\gamma}(m) = \eta_B \circ \varepsilon_H(m)$. Luego, $\widetilde{\gamma} : H \to B$ es invertible por convolución.
Por lo tanto, la extensión B/A es $H-$cleft derecha.
3. $\Rightarrow$ 1. Se obtiene de [18, Theo. 8.2.4] considerando la implicación 1) $\Rightarrow$ 2).
Sea $\gamma : H \to B$ una sección. Entonces se ve que $\alpha : B \otimes H \to B \otimes_A B$,
$y \otimes m \mapsto y\gamma^{-1}(m^{(1)}) \otimes_A \gamma(m^{(2)})$ es una inversa para β de la Definición 2.5.5:

$$\begin{aligned}
\beta\alpha(y \otimes m) &= (y\gamma^{-1}(m^{(1)}) \otimes 1)\rho(\gamma(m^{(2)})) \\
&= (y\gamma^{-1}(m^{(1)}) \otimes 1)(\gamma(m^{(2)}) \otimes m^{(3)}) \\
&= y\gamma^{-1}(m^{(1)})\gamma(m^{(2)}) \otimes m^{(3)} = y \otimes m,
\end{aligned}$$

donde $\rho(\gamma(m^{(2)})) = \gamma(m^{(2)}) \otimes m^{(3)}$ pues γ es un morfismo de $H-$comódulos. Así $\beta\alpha = id$ y

β es sobreyectiva; por otro lado

$$\begin{aligned}\alpha\beta(x \otimes y) &= \alpha(xy^{(0)} \otimes y^{(1)}) = xy^{(0)}\gamma^{-1}(y^{(1)}) \otimes_A \gamma(y^{(2)}) \\ &= x \otimes_A y^{(0)}\gamma^{-1}(y^{(1)})\gamma(y^{(2)}) = x \otimes y,\end{aligned}$$

pues $y^{(0)}\gamma^{-1}(y^{(1)}) \in A = B^{coH}$. Así $\alpha\beta = id$ y β es inyectiva. Por consiguiente, B es una extensión $H-$Galois derecha de A.

Además, como en [18, Prop. 7.2.3] uno puede ver que $\Phi : A \otimes_K H \to B$,
$x \otimes m \mapsto x\gamma(m)$ es un morfismo de $A-$módulos izquierdos y $H-$comódulos derechos, y es en realidad un isomorfismo con inversa $\Psi : B \to A \otimes_K H$, $y \mapsto y^{(0)}\gamma^{-1}(y^{(1)}) \otimes y^{(2)}$,
donde $y^{(0)} \otimes y^{(1)} \otimes y^{(2)} = (\rho_B \otimes id_H)\rho_B(y)(= (id_B \otimes \Delta_H)\rho_B(y))$.
Es claro que $\Phi\Psi = id$. Del hecho que $\rho(x) = x \otimes 1$ y $\rho \circ \gamma = (\gamma \otimes id_H) \circ \Delta_H$, $\Psi\Phi = id$. $\square$

A continuación, se da una prueba detallada de [17, Exam. 3.9].

Corolario 2.5.9. *Una extensión galoisiana finita de un cuerpo es un producto cruzado.*

Prueba. Sea E/F un cuerpo extensión finita de Galois, con grupo de Galois
$G = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de E/F. Sea $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq F[G]^*$ la base dual de $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq F[G]$. Entonces por la Proposición 2.4.7 con la acción de G sobre E, se define la coacción de $F[G]^*$ sobre E mediante $\rho_E : E \to E \otimes F[G]^*$ por $\rho_E(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(v) \otimes p_i$.
Se define la aplicación de Galois $\beta : E \otimes_F E \to E \otimes F[G]^*$ por

$$\beta(c \otimes v) = (c \otimes 1)\rho_E(v) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i(v)) \otimes p_i \ . \tag{2.14}$$

Claramente, β es una aplicación $F-$lineal por la izquierda. Se prueba que β es inyectiva, como sigue: Sea $w \in \mathrm{Ker}(\beta)$, entonces $w = 0$. Como E es $F-$libre con base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $w \in E \otimes_F E$, por [15, Prop. XVI.2.3] $w = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes v_j$; de modo que

$$\begin{aligned}0 = \beta(w) &= \sum_{i,j=1}^{n} c_j(x_i(v_j)) \otimes p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} c_j(x_i(v_j))\right] \otimes p_i \ .\end{aligned}$$

Puesto que $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es linealmente independiente, $\sum_{j=1}^{n} c_j(x_i(v_j)) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Por [15, Coro. VI.5.4] se sabe que $\det((x_i(v_j))) \neq 0$, luego $c_j = 0$ para $j = 1, \ldots, n$. Así $w = 0 \otimes v_1 + \cdots + 0 \otimes v_n = 0$.

Por [15, Coro. XVI.2.4] $E \otimes_F E$ y $E \otimes F[G]^*$ son de dimensión n^2 sobre F. Del hecho que β es inyectiva, se sigue que β es sobreyectiva; luego β es biyectiva. Por lo tanto, E es una extensión $F[G]^*-$Galois derecha de F.

Resta probar que E/F tiene la propiedad de base normal.

En efecto, como $|G| = n$ y $G = \{x_1, \ldots, x_n\}$, por [15, Theo. VI.13.1] existe $u \in E$ tal que $\{x_1(u), \ldots, x_n(u)\}$ es una base de E sobre F. Del hecho que G actúa sobre E por la izquierda, se sabe que $F[G]$ actúa sobre E por la izquierda. Tomando $H = F[G]^*$, conforme a la Proposición 2.2.17 se sabe que H es un álgebra de Hopf finito dimensional. Puesto que E es un $F[G]-$módulo álgebra izquierdo, por la Proposición 2.4.7 resulta que E es $F[G]^*-$comódulo álgebra derecho y $F = E^{H^*} = E^{coH}$. Se define

$$\Phi : F \otimes F[G]^* \to E \text{ por } \Phi(c \otimes f^*) = c(f(u)) \ . \tag{2.15}$$

Sea $\psi : F[G]^* \to F[G]$ el isomorfismo de espacios vectoriales sobre F tal que $\psi(p_{x_i}) = x_i^{-1}$ para $i = 1, \ldots, n$, donde $p_{x_i} = p_i$. Entonces para $f^* = c_1 p_{x_1} + \cdots + c_n p_{x_n}$ se obtiene $f = \psi(f^*) = c_1 x_1^{-1} + \cdots + c_n x_n^{-1}$, de modo que $f(u) = c_1 x_1^{-1}(u) + \cdots + c_n x_n^{-1}(u)$.

Claramente, Φ es un morfismo de $F-$módulos izquierdos por definición. Se prueba que Φ es inyectivo. Sea $b \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, entonces $b = 0$.

Puesto que $F[G]^*$ es $F-$libre con base $\{p_1, \ldots, p_n\}$ y $b \in F \otimes F[G]^*$, por [15, Prop. XVI.2.3] $b = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes p_i$; de modo que

$$0 = \Phi(b) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i^{-1}(u)), \text{ donde } \psi(p_{x_i}) = x_i^{-1} \ .$$

Puesto que $\{x_1^{-1}(u), \ldots, x_n^{-1}(u)\}$ es una base de E sobre F, se sigue que $c_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, $b = 0 \otimes p_1 + \cdots + 0 \otimes p_n = 0$.

Se prueba que Φ es sobreyectivo. Dado $e \in E$, existen $c_i \in F$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que $e = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i^{-1}(u))$, de modo que existe $f^* = \sum_{i=1}^{n} c_i p_{x_i} \in F[G]^*$ tal que $\Phi(1 \otimes f^*) = e$; por consiguiente, Φ es biyectivo.

Resta verificar que $\Phi : F \otimes F[G]^* \to E$ es un morfismo de $F[G]^*-$comódulos derechos. Para ello, se debe mostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} c \otimes f^* \in F \otimes_F F[G]^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "id_F \otimes \Delta_{F[G]^*}"] & E \arrow[d, "\rho_E"] \\ F \otimes_F F[G]^* \otimes F[G]^* \arrow[r, "\Phi \otimes id_{F[G]^*}"] & E \otimes F[G]^* \end{tikzcd} \tag{2.16}$$

$$\rho_E \circ \Phi(c \otimes f^*) = \rho_E(c(f(u))) = \sum_{i=1}^{n} x_i(c(f(u))) \otimes p_i \ ; \tag{2.17}$$

como

$$\rho'(c \otimes f^*) = (id_F \otimes \Delta_{K[G]^*})(c \otimes f^*) = c \otimes f^{*(1)} \otimes f^{*(2)} \ ,$$

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes id_{K[G]^*})\rho'(c \otimes f^*) &= (\Phi \otimes id_{K[G]^*})(c \otimes f^{*(1)} \otimes f^{*(2)}) \\ &= c(f^{(1)}(u)) \otimes f^{*(2)} \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Afirmación: Para $j = 1, \ldots, n$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_j^{-1}(u) \otimes p_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}(u) \otimes p_{x_i^{-1} x_j} \ . \tag{2.19}$$

En efecto, basta tomar $x_k = x_i^{-1} x_j$, ver que $x_i^{-1} = x_k x_j^{-1}$ y renombrar k por i.
Si se toma $f^* = \sum_{i=1}^{n} c_i p_{x_i} \in F[G]^*$, aplicando el hecho que ρ_E, Φ, $\Phi \otimes id_{F[G]^*}$ y ρ' son $F-$lineales por la izquierda y $\otimes = \otimes_F$, la igualdad dada en (2.19) implica que las expresiones dadas en (2.17) y (2.18) son iguales. Por el Teorema 2.5.8, E es un producto cruzado de F con H. Así, $E \cong F \#_f H$. □

Dada la trascendencia de la teoría de Galois, es conveniente ilustrar este corolario con un ejemplo concreto.
Sea $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $F = \mathbb{Q}$. Sea $G = G(E/F) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ donde
$x_1 = id_E$, $x_2 = \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$, $x_3 = \psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ y $x_4 = \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$. Entonces $\mathbb{Q}[G] = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Q}x_i$.
Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ una base de E/F. Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ una base de $\mathbb{Q}[G]^*$, dual al correspondiente base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de $\mathbb{Q}[G]$. Es decir, $p_i(x_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \ldots, 4$. Teniendo en cuenta la acción de G sobre E, se define la coacción de $\mathbb{Q}[G]^*$

sobre E mediante $\rho_E : E \to E \otimes \mathbb{Q}[G]^*$ por $\rho_E(v) = \sum_{i=1}^{4} x_i(v) \otimes p_i$.

Se define la aplicación de Galois $\beta : E \otimes_F E \to E \otimes \mathbb{Q}[G]^*$ por

$$\beta(c \otimes v) = (c \otimes 1)\rho_E(v) = \sum_{i=1}^{4} c(x_i(v)) \otimes p_i \ . \tag{2.20}$$

Afirmación: Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Sea $\{b_j\}_{j=1}^{n} \subseteq V$ arbitrario y $\{w_j\}_{j=1}^{n}$ una base de W sobre F. Entonces $\sum_{j=1}^{n} b_j \otimes w_j = 0$ implica que $b_j = 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Sean $g_1, \ldots, g_n : W \to F$ aplicaciones $F-$lineales tales que $g_i(w_j) = \delta_{ij}$.

Sean $f_1, \ldots, f_n : V \to F$ aplicaciones $F-$lineales, de modo que $G(b, w) = \sum_{i=1}^{n} f_i(b)g_i(w)$ es una aplicación $F-$bilineal. Por propiedad universal del producto tensorial existe una aplicación $F-$lineal $h : V \otimes_F W \to F$ tal que $h(b \otimes w) = G(b, w) = \sum_{i=1}^{n} f_i(b)g_i(w)$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } 0 = h(\sum_{j=1}^{n} b_j \otimes w_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_i(b_j)g_i(w_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(b_i)g_i(w_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(b_i). \end{aligned}$$

Sea $k = 1, \ldots, n$. Asumiendo que $f_i = 0$ para todo $i \neq k$, se tiene que $0 = f_k(b_k)$. Como f_k es arbitrario, $b_k = 0$. Así, $b_j = 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Volviendo a (2.20), se ve que β es una aplicación $F-$lineal por la izquierda. Se prueba que β es inyectiva. Sea $w \in \mathrm{Ker}(\beta)$, entonces $w = 0$. Como E es $F-$libre con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $w \in E \otimes_F E$, por [15, Prop. XVI.2.3] $w = \sum_{j=1}^{4} c_j \otimes v_j$; de modo que

$$\begin{aligned} 0 = \beta(w) &= \sum_{i,j=1}^{4} c_j(x_i(v_j)) \otimes p_i \\ &= \sum_{i=1}^{4} [\sum_{j=1}^{4} c_j(x_i(v_j))] \otimes p_i \ . \end{aligned}$$

Puesto que $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es linealmente independiente, por la afirmación anterior se obtiene el sistema de ecuaciones $\sum_{j=1}^{4} c_j(x_i(v_j)) = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$ en que c_1, c_2, c_3 y c_4 son las incógnitas. Se nota que

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{array} \tag{2.21}$$

Luego el sistema de 4 ecuaciones y 4 variables a ser resuelto es

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{2}c_2 + \sqrt{3}c_3 + \sqrt{6}c_4 = 0 \\ c_1 - \sqrt{2}c_2 + \sqrt{3}c_3 - \sqrt{6}c_4 = 0 \\ c_1 + \sqrt{2}c_2 - \sqrt{3}c_3 - \sqrt{6}c_4 = 0 \\ c_1 - \sqrt{2}c_2 - \sqrt{3}c_3 + \sqrt{6}c_4 = 0 \end{cases}$$

Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es no nulo pues $\det((x_i(b_j))) = 96 \neq 0$, por regla de Cramer $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ y $c_4 = 0$. Por lo tanto, $w = 0 \otimes v_1 + 0 \otimes v_2 + 0 \otimes v_3 + 0 \otimes v_4 = 0$.

Por [15, Coro. XVI.2.4] $E \otimes_F E$ y $E \otimes \mathbb{Q}[G]^*$ son de dimensión 16 sobre F. Del hecho que β es inyectiva, se sigue que β es sobreyectiva; luego β es biyectiva. Así, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ es una extensión $\mathbb{Q}[G]^*-$Galois derecha de $\mathbb{Q}$.

Para mostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ tiene la propiedad de base normal se utiliza la aplicación dada en (2.15).

Se prueba que Φ es inyectivo. Sea $b \in \operatorname{Ker}(\Phi)$, entonces $b = 0$.

Puesto que $F[G]^*$ es $F-$libre con base $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $b = \sum_{i=1}^{4} c_i \otimes p_i \in F \otimes F[G]^*$ de modo que

$$0 = \Phi(b) = \sum_{i=1}^{4} c_i(x_i^{-1}(u)), \text{ donde } \psi(p_{x_i}) = x_i^{-1} .$$

Puesto que $\{x_1^{-1}(u), x_2^{-1}(u), x_3^{-1}(u), x_4^{-1}(u)\}$ es una base de E sobre F, donde se puede tomar $u = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$; luego se sigue que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ y $c_4 = 0$. Por lo tanto, $b = 0 \otimes p_1 + 0 \otimes p_2 + 0 \otimes p_3 + 0 \otimes p_4 = 0$.

De este hecho, se sigue que Φ es biyectivo.

Resta verificar que $\Phi : F \otimes F[G]^* \to E$ es un morfismo de $F[G]^*-$comódulos derechos. Es decir, se cumple $\rho_E \circ \Phi = (\Phi \otimes id_{F[G]^*})(id_F \otimes \Delta_{F[G]^*})$ para el diagrama (2.16).

Dados $c \otimes f^* \in F \otimes F[G]^*$ y $f^* = c_1 p_{x_1} + c_2 p_{x_2} + c_3 p_{x_3} + c_4 p_{x_4}$. Se comienza haciendo los cálculos para los elementos de la base $\{p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}, p_{x_4}\}$ de $F[G]^*$ con la tabla del grupo G obtenida de (2.21):

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \tag{2.22}$$

A partir de (2.17) y (2.18) se obtienen:

$$\begin{aligned} \rho_E \circ \Phi(c \otimes p_{x_1}) &= \rho_E(c(x_1^{-1}(u))) = \sum_{i=1}^{4} x_i(c(x_1^{-1}(u))) \otimes p_i \\ &= c\sum_{i=1}^{4} x_i x_1^{-1}(u) \otimes p_i \\ &= c(x_1(u) \otimes p_1 + x_2(u) \otimes p_2 + x_3(u) \otimes p_3 + x_4(u) \otimes p_4) \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho'(c \otimes p_{x_1}) &= (id_F \otimes \Delta_{F[G]^*})(c \otimes p_{x_1}), \text{ por [18, (1.3.7)]:} \\ &= c \otimes \sum_{i=1}^{4} p_{x_i} \otimes p_{x_i^{-1}x_1} \ , \\ (\Phi \otimes id_{F[G]^*})\rho'(c \otimes p_{x_1}) &= \sum_{i=1}^{4} c(x_i^{-1}(u)) \otimes p_{x_i^{-1}x_1} \\ &= c(x_1(u) \otimes p_1 + x_2(u) \otimes p_2 + x_3(u) \otimes p_3 + x_4(u) \otimes p_4) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_E \circ \Phi(c \otimes p_{x_2}) &= \rho_E(c(x_2^{-1}(u))) = \sum_{i=1}^{4} x_i(c(x_2^{-1}(u))) \otimes p_i \\ &= c\sum_{i=1}^{4} x_i x_2^{-1}(u) \otimes p_i \\ &= c(x_2(u) \otimes p_1 + x_1(u) \otimes p_2 + x_4(u) \otimes p_3 + x_3(u) \otimes p_4) \ ; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rho'(c\otimes p_{x_2}) &= (id_F\otimes\Delta_{F[G]^*})(c\otimes p_{x_2}),\ \text{por [18, (1.3.7)]:}\\
&= c\otimes\sum_{i=1}^{4} p_{x_i}\otimes p_{x_i^{-1}x_2}\ ,\\
(\Phi\otimes id_{F[G]^*})\rho'(c\otimes p_{x_2}) &= \sum_{i=1}^{4} c(x_i^{-1}(u))\otimes p_{x_i^{-1}x_2}\\
&= c(x_1(u)\otimes p_2+x_2(u)\otimes p_1+x_3(u)\otimes p_4+x_4(u)\otimes p_3)\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_E\circ\Phi(c\otimes p_{x_3}) = \rho_E(c(x_3^{-1}(u))) &= \sum_{i=1}^{4} x_i(c(x_3^{-1}(u)))\otimes p_i\\
&= c\sum_{i=1}^{4} x_i x_3^{-1}(u)\otimes p_i\\
&= c(x_3(u)\otimes p_1+x_4(u)\otimes p_2+x_1(u)\otimes p_3+x_2(u)\otimes p_4)\ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho'(c\otimes p_{x_3}) &= (id_F\otimes\Delta_{F[G]^*})(c\otimes p_{x_3}) = c\otimes\sum_{i=1}^{4} p_{x_i}\otimes p_{x_i^{-1}x_3}\ ,\\
(\Phi\otimes id_{F[G]^*})\rho'(c\otimes p_{x_3}) &= \sum_{i=1}^{4} c(x_i^{-1}(u))\otimes p_{x_i^{-1}x_3}\\
&= c(x_1(u)\otimes p_3+x_2(u)\otimes p_4+x_3(u)\otimes p_1+x_4(u)\otimes p_2)\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_E\circ\Phi(c\otimes p_{x_4}) = \rho_E(c(x_4^{-1}(u))) &= \sum_{i=1}^{4} x_i(c(x_4^{-1}(u)))\otimes p_i\\
&= c\sum_{i=1}^{4} x_i x_4^{-1}(u)\otimes p_i\\
&= c(x_4(u)\otimes p_1+x_3(u)\otimes p_2+x_2(u)\otimes p_3+x_1(u)\otimes p_4)\ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho'(c\otimes p_{x_4}) &= (id_F\otimes\Delta_{F[G]^*})(c\otimes p_{x_4}) = c\otimes\sum_{i=1}^{4} p_{x_i}\otimes p_{x_i^{-1}x_4}\ ,\\
(\Phi\otimes id_{F[G]^*})\rho'(c\otimes p_{x_4}) &= \sum_{i=1}^{4} c(x_i^{-1}(u))\otimes p_{x_i^{-1}x_4}\\
&= c(x_1(u)\otimes p_4+x_2(u)\otimes p_3+x_3(u)\otimes p_2+x_4(u)\otimes p_1)\ .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\rho_E\circ\Phi(c\otimes p_{x_i}) = (\Phi\otimes id_{F[G]^*})\rho'(c\otimes p_{x_i})$ para $i=1,2,3$ y 4. Tomando $c=1$, estas igualdades se traducen en las igualdades dadas en (2.19) para $n=4$.

Puesto que $f^* = c_1p_{x_1} + c_2p_{x_2} + c_3p_{x_3} + c_4p_{x_4} \in F[G]^*$ y $\otimes = \otimes_F$, de la $F-$linealidad por la izquierda de las aplicaciones ρ_E, Φ, $\Phi \otimes id_{F[G]^*}$ y ρ':

$$\begin{aligned}
\rho_E \circ \Phi(c \otimes f^*) &= \rho_E \circ \Phi(c \otimes \sum_{i=1}^{4} c_i p_{x_i}) = \sum_{i=1}^{4} a_i \rho_E \circ \Phi(c \otimes p_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{4} c_i (\Phi \otimes id_{F[G]^*})\rho'(c \otimes p_{x_i}) \\
&= (\Phi \otimes id_{F[G]^*})\rho'(c \otimes \sum_{i=1}^{4} c_i p_{x_i}) \\
&= (\Phi \otimes id_{F[G]^*})(id_F \otimes \Delta_{F[G]^*})(c \otimes f^*). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho_E \circ \Phi = (\Phi \otimes id_{F[G]^*})(id_F \otimes \Delta_{F[G]^*})$.
Sea $\gamma : \mathbb{Q}[G]^* \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ definida por $\gamma(f^*) = \frac{1}{4}\Phi(1 \otimes f^*)$.
En consecuencia, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}\#_f\mathbb{Q}[G]^*$, donde f es un cociclo interno implementado por γ como en la Proposición 2.3.22.

De esta ilustración se sabe que la sección de $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ es dada por $\gamma(p_i) = \frac{1}{4}x_i^{-1}(u)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y $u = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$. Recordando que $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{Q}[G]^*$ y $G = G(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$, usando la Proposición 2.2.13 se puede deducir que la inversa por convolución de γ es dada por $\gamma^{-1}(p_1) = \frac{1}{4\sqrt{6}}x_1^{-1}(u)$, $\gamma^{-1}(p_2) = -\frac{1}{4\sqrt{6}}x_2^{-1}(u)$, $\gamma^{-1}(p_3) = -\frac{1}{4\sqrt{6}}x_3^{-1}(u)$ y $\gamma^{-1}(p_4) = \frac{1}{4\sqrt{6}}x_4^{-1}(u)$.

El Teorema 2.5.8 proporciona una clase de productos cruzados de Hopf con cociclos invertibles dada por las $H-$extensiones derechas de cleft. El artículo [1] exhibe para este tipo de productos cruzados tres sucesiones espectrales llamadas sucesiones espectrales de Hochschild-Serre, Cartan-Leray y de Grothendieck. Como materia de una futura investigación queda abierta el estudio de la aplicabilidad de las sucesiones espectrales referidas en geometría diferencial.
En este capítulo se han introducido nociones de la teoría dual de productos cruzados [30] y la teoría de extensiones de Galois Hopf [14], analizar en detalle estas teorías podría ser materia de futuras investigaciones, pero queda fuera del alcance de la tesis.

Capítulo 3

Resoluciones para un producto cruzado de Hopf

En la primera sección, se comienza definiendo bimódulo con respecto a un par de anillos, y se demuestra que las aplicaciones $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ y $(-)\otimes_R(-)$ llevan un par de bimódulos a un bimódulo. Utilizando estos resultados, se demuestra que el funtor producto tensorial $A\otimes_\Lambda(-)$ es adjunto izquierdo del funtor $\mathrm{Hom}_\Gamma(A,-)$. Para una $K-$álgebra E, se definen el álgebra opuesta E^{op} y el álgebra envolvente E^e. Se establece que un $E-$bimódulo es un E^e-módulo izquierdo, y que esto se cumple en ambas direcciones. Además, se demuestra que las aplicaciones $\mathrm{Hom}_{E^e}(-,-)$ y $(-)\otimes_{E^e}(-)$ llevan un par de bimódulos a un bimódulo. Se define la aplicación de $E-$bimódulos y se demuestra que estas aplicaciones son morfismos de E^e-módulos izquierdos, y viceversa. Para $n\geq 0$, se demuestra que $E\otimes\overline{E}^{\otimes^n}\otimes E$ es un $E-$bimódulo.

En la segunda sección, se introducen los conceptos de borde de Hochschild y complejo de Hochschild de un álgebra con coeficientes en un bimódulo sobre el álgebra. Utilizando estos conceptos, se estudia la homología de Hochschild de un álgebra con coeficientes en un bimódulo sobre el álgebra. Para una $K-$álgebra E, se establece la existencia de su resolución barra, denotada por $(C_*^{bar}(E),b')$. Se aplica esta resolución para demostrar que la homología de $(M\otimes_{E^e}C_*^{bar}(E),id_M\otimes_{E^e}(b'))$ es la homología de Hochschild de E con coeficientes en un

$E-$bimódulo M.

En la tercera sección, dado un anillo conmutativo K, se define el $K-$módulo cociente $\overline{A} = A/N = \mathrm{Coker}(\eta_A)$ como el conúcleo de la unidad de una $K-$álgebra A. Para cada $n \geq 0$ y una $K-$álgebra E, se define el $E-$bimódulo $B_n(E) = E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ y una aplicación de $E-$bimódulos $b'_n : B_n(E) \to B_{n-1}(E)$. Se prueba que b'_n llevando clases en clases está bien definida,y que $b'_n b'_{n+1} = 0$. Esta última igualdad se obtiene fácilmente con un nuevo procedimiento que consiste en asociar una matriz auxiliar a la expresión $b'_n b'_{n+1}(r)$. Por supuesto, se observa que este procedimiento es aplicable al Lema 3.3.2, Lema 3.2.1 y Lema 3.4.7. Luego, se demuestra que $(B_*(E), b')$ es una resolución del E^e-módulo izquierdo E, llamada resolución barra normalizada de E.

Se construye un subcomplejo contráctil D_* de $C_*^{bar}(E)$, se da una aplicación de complejos de cadenas $\pi : C_*^{bar}(E) \to B_*(E)$. Se enuncia y demuestra que los complejos de cadenas de E^e-módulos izquierdos $C_*^{bar}(E)/D_*$ y $B_*(E)$ son isomorfos. Se demuestra que la homología de $M \otimes_{E^e} B_*(E)$ es $H_*(E, M)$, y este hecho se aplicará en la quinta sección.

En la cuarta sección, comprobamos la existencia de una variante de la resolución proyectiva relativa de un producto cruzado general dada en el Teorema [1, Theo. 1.1.1], que es más pequeña que la resolución barra normalizada correspondiente.

En la quinta sección, se determina el método para hallar la homología de Hochschild de un producto cruzado de Hopf E con coeficientes en un $E-$bimódulo M. Para ello, se utiliza la resolución proyectiva relativa obtenida en la sección anterior.

3.1 Bimódulos y módulos sobre el álgebra envolvente

Definición 3.1.1. [19] Sean R y S anillos. Un $(R, S)-$*bimódulo* es un grupo abeliano A, que es $R-$módulo izquierdo, $S-$módulo derecho satisfaciendo la condición de compatibilidad

$$(rx)s = r(xs), \ r \in R, \ x \in A \text{ y } s \in S.$$

Proposición 3.1.2. *Si A es $(R, S)-$bimódulo y B es $(R, T)-$bimódulo, entonces* $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ *es un $(S, T)-$bimódulo.*

Prueba. Como $\mathrm{Hom}_R(A,B) = \{f : A \to B \mid f$ es un morfismo de $R-$módulos izquierdos$\}$ es un grupo abeliano bajo la adición $+$, definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

se dota a $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ la estructura de un $(S,T)-$bimódulo como sigue:
Dado $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ se definen para $x \in A, s \in S, t \in T$

$$(sf)(x) = f(xs) \tag{3.1}$$

$$(ft)(x) = f(x)t \tag{3.2}$$

Es claro que sf y $ft \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$.
Se cumplen para (3.1) las 4 condiciones siguientes:

$$(s_1+s_2)f = s_1f + s_2f, \quad (s_1s_2)f = s_1(s_2f), \quad 1f = f \text{ y}$$
$$s(f_1+f_2) = sf_1 + sf_2 \text{ para todo } s_1, s_2, s \in S \text{ y todo } f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(A,B).$$

Se cumplen para (3.2) las 4 condiciones siguientes:

$$f(t_1+t_2) = ft_1 + ft_2, \quad f(t_1t_2) = (ft_1)t_2, \quad f1 = f \text{ y}$$
$$(f_1+f_2)t = f_1t + f_2t \text{ para todo } t_1, t_2, t \in T \text{ y todo } f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(A,B).$$

En seguida, se verifican las 4 últimas condiciones M_1, M_2, M_3 y M_4 ya que las 4 condiciones anteriores son análogas.

M_1 :
$$\begin{aligned} f(t_1+t_2)(x) &:= f(x)(t_1+t_2) = f(x)t_1 + f(x)t_2 \\ &:= (ft_1)(x) + (ft_2)(x) = (ft_1 + ft_2)(x). \end{aligned}$$

M_2 :
$$\begin{aligned} f(t_1t_2)(x) &= f(x)(t_1t_2) = (f(x)t_1)t_2 \\ &= (ft_1)(x)t_2, \text{ como } ft_1 \in \mathrm{Hom}_R(A,B) : \\ &= ((ft_1)t_2)(x). \end{aligned}$$

M_3 : $f1(x) = f(x)1 = f(x)$.

M_4 :
$$\begin{aligned} (f_1+f_2)t(x) &= (f_1+f_2)(x)t = (f_1x + f_2x)t \\ &= (f_1x)t + (f_2x)t = (f_1t)(x) + (f_2t)(x) \\ &= (f_1t + f_2t)(x) \text{ , para todo } x \in A \text{ .} \end{aligned}$$

Finalmente, se prueba la condición de compatibilidad de (3.1) y (3.2). Dados $s \in S$, $t \in T$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ se cumple $(sf)t = s(ft)$ pues para $x \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}(sf)t(x) &= (sf)(x)t = f(xs)t \\ &= (ft)(xs), \text{ como } ft \in \mathrm{Hom}_R(A,B): \\ &= s(ft)(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ es un $(S,T)-$bimódulo. □

Proposición 3.1.3. *Si A es $(S,R)-$bimódulo y B es $(R,T)-$bimódulo, entonces $A \otimes_R B$ es un $(S,T)-$bimódulo.*

Prueba. Como A es $R-$módulo derecho y B es $R-$módulo izquierdo, $A \otimes_R B$ es un grupo aditivo abeliano.
Ahora, se dota a $A \otimes_R B$ la estructura de un $(S,T)-$bimódulo como sigue.

Dados $x \otimes y \in A \otimes_R B,\ s \in S, t \in T$ se definen:

$$s(x \otimes y) = (sx) \otimes y \tag{3.3}$$

$$(x \otimes y)t = x \otimes (yt) \tag{3.4}$$

Se cumplen para (3.3) las 4 condiciones siguientes

$$(s_1 + s_2)(x \otimes y) = s_1(x \otimes y) + s_2(x \otimes y),$$

$$(s_1 s_2)(x \otimes y) = s_1(s_2(x \otimes y)),$$

$$1(x \otimes y) = x \otimes y,$$

$$s(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2) = s(x_1 \otimes y_1) + s(x_2 \otimes y_2),$$

para todo $s_1, s_2, s \in S$ y todo $x \otimes y, x_1 \otimes y_1$ y $x_2 \otimes y_2 \in A \otimes_R B$.
Se cumplen para (3.4) las 4 condiciones siguientes
$(x \otimes y)(t_1 + t_2) = (x \otimes y)t_1 + (x \otimes y)t_2,\ (x \otimes y)(t_1 t_2) = ((x \otimes y)t_1)t_2,\ (x \otimes y)1 = x \otimes y$ y $(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2)t = (x_1 \otimes y_1)t + (x_2 \otimes y_2)t$ para todo $t_1, t_2, t \in T$ y todo $x \otimes y, x_1 \otimes y_1$ y $x_2 \otimes y_2 \in A \otimes_R B$. Luego, sólo se verifican las 4 últimas condiciones M_1, M_2, M_3 y M_4 ya que las 4 condiciones anteriores son análogas.

$$M_1: \qquad (x\otimes y)(t_1+t_2) := x\otimes[y(t_1+t_2)]$$
$$= x\otimes(yt_1)+x\otimes(yt_2) := (x\otimes y)t_1+(x\otimes y)t_2.$$

$$M_2: \qquad (x\otimes y)(t_1t_2) = x\otimes[y(t_1t_2)] = x\otimes[(yt_1)t_2]$$
$$:= (x\otimes(yt_1))t_2 = ((x\otimes y)t_1)t_2.$$

$M_3:$ $(x\otimes y)(1) = x\otimes(y1) = x\otimes y$.

$$M_4: \qquad (x_1\otimes y_1+x_2\otimes y_2)t := x_1\otimes(y_1t)+x_2\otimes(y_2t)$$
$$= (x_1\otimes y_1)t+(x_2\otimes y_2)t.$$

Finalmente, se prueba la condición de compatibilidad de (3.3) y (3.4). Dados $s\in S$, $t\in T$ y $x\otimes y\in A\otimes_R B$ se cumple $(s(x\otimes y))t = s((x\otimes y)t)$ ya que

$$(s(x\otimes y))t = ((sx)\otimes y)t = (sx)\otimes(yt)$$
$$= s(x\otimes(yt)) = s((x\otimes y)t).$$

Por consiguiente, $A\otimes_R B$ es un $(S,T)-$bimódulo. □

Proposición 3.1.4. *Sean A un $(\Gamma,\Lambda)-$bimódulo, B un $\Lambda-$módulo izquierdo y C un $\Gamma-$módulo izquierdo. Entonces $A\otimes_\Lambda B$ es un $\Gamma-$módulo izquierdo, $Hom_\Gamma(A,C)$ es un $\Lambda-$módulo izquierdo y*

$$\eta : Hom_\Gamma(A\otimes_\Lambda B, C) \xrightarrow{\sim} Hom_\Lambda\big(B, Hom_\Gamma(A,C)\big)\ . \tag{3.5}$$

Prueba. Se realiza con los tres items:

i) Ya que A es un $(\Gamma,\Lambda)-$bimódulo y B es un $(\Lambda,\mathbb{Z})-$bimódulo, por la Proposición 3.1.3, $A\otimes_\Lambda B$ es un $\Gamma-$módulo izquierdo.

ii) Ya que A es un $(\Gamma,\Lambda)-$bimódulo y C es un $(\Gamma,\mathbb{Z})-$bimódulo, por la Proposición 3.1.2, $\mathrm{Hom}_\Gamma(A,C)$ es un $\Lambda-$módulo izquierdo.

iii) Dado $\varphi : A\otimes_\Lambda B\to C$ se define $\eta(\varphi)$ mediante $(\eta(\varphi)(y))(x) = \varphi(x\otimes y)$.
Sea $\widetilde{\eta} : \mathrm{Hom}_\Lambda\big(B,\mathrm{Hom}_\Gamma(A,C)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Gamma(A\otimes_\Lambda B, C)$.
Dado $\psi : B\to \mathrm{Hom}_\Gamma(A,C)$ se define $\widetilde{\eta}(\psi)$ mediante $\widetilde{\eta}(\psi)(x\otimes y) = (\psi(y))(x)$.

De acuerdo a las definiciones anteriores :

$\widetilde{\eta}(\eta(\varphi))(x \otimes y) = (\eta(\varphi)(y))(x) = \varphi(x \otimes y)$;

$(\eta(\widetilde{\eta}(\psi))(y))(x) = \widetilde{\eta}(\psi)(x \otimes y) = (\psi(y))(x)$. Luego $\widetilde{\eta}\eta = id$ y $\eta\widetilde{\eta} = id$. Es decir, η es una biyección.

□

Definición 3.1.5. Sea E una $K-$álgebra. Se define *$K-$álgebra E^{op}* como el álgebra con la misma estructura de $K-$módulo que E pero la multiplicación en E^{op} es dada por $r \cdot s := sr$.

Definición 3.1.6. Sea K un anillo conmutativo y E una $K-$álgebra. Se define *el álgebra envolvente* de E como $E^e := E \otimes E^{op}$ (vea la Proposición 2.1.7).

Proposición 3.1.7. *Si M es un $E-$bimódulo, entonces:*

1. *M es un E^e-módulo izquierdo.*

2. *M es un E^e-módulo derecho.*

Prueba. 1. Como M es $E-$bimódulo, M es un grupo aditivo abeliano. Luego, se define la multiplicación por un escalar mediante

$$(r \otimes s) \cdot x = rxs \text{ para } r \in E, s \in E \text{ y } r \otimes s \in E \otimes E^{op} = E^e \ .$$

Se cumplen los 4 axiomas de módulo izquierdo:

$$(r_1 \otimes s_1 + r_2 \otimes s_2) \cdot x = (r_1 \otimes s_1) \cdot x + (r_2 \otimes s_2) \cdot x,$$
$$((r_1 \otimes s_1)(r_2 \otimes s_2)) \cdot x = (r_1 \otimes s_1) \cdot ((r_2 \otimes s_2) \cdot x),$$
$$(1 \otimes 1) \cdot x = x,$$
$$(r \otimes s) \cdot (x_1 + x_2) = (r \otimes s) \cdot x_1 + (r \otimes s) \cdot x_2 \ .$$

En efecto:

Definiendo $\left(\sum_{i \in I(\text{finito})} r_i \otimes s_i \right) \cdot x := \sum_{i \in I} r_i x s_i$, se obtiene la primera igualdad.

Son inmediatas las igualdades tercera y cuarta.

La segunda igualdad se verifica, como sigue:

$$\begin{aligned}(r_1 \otimes s_1) \cdot ((r_2 \otimes s_2) \cdot x) &= (r_1 \otimes s_1) \cdot (r_2 x s_2) \\ &= r_1 r_2 x s_2 s_1 = (r_1 r_2 \otimes s_2 s_1) \cdot x \\ &= (r_1 r_2 \otimes s_1 \cdot s_2) \cdot x = ((r_1 \otimes s_1)(r_2 \otimes s_2)) \cdot x.\end{aligned}$$

Por consiguiente, M es un E^e-módulo izquierdo.

2. Como M es $E-$bimódulo, M es un grupo aditivo abeliano. Luego, se define la multiplicación por un escalar mediante $x \cdot (r \otimes s) = sxr$ para $r \in E, s \in E$ y $r \otimes s \in E \otimes E^{op}$. Se cumplen los 4 axiomas de módulo derecho:

$$\begin{aligned}x \cdot (r_1 \otimes s_1 + r_2 \otimes s_2) &= x \cdot (r_1 \otimes s_1) + x \cdot (r_2 \otimes s_2), \\ x \cdot ((r_1 \otimes s_1)(r_2 \otimes s_2)) &= (x \cdot (r_1 \otimes s_1)) \cdot (r_2 \otimes s_2), \quad x \cdot (1 \otimes 1) = x \\ \text{y} \quad (x_1 + x_2) \cdot (r \otimes s) &= x_1 \cdot (r \otimes s) + x_2 \cdot (r \otimes s).\end{aligned}$$

La verificación de estos axiomas se hace como en el primer item, luego M es un E^e-módulo derecho.

□

Proposición 3.1.8. *Sea E una $K-$álgebra.*

1. *Si M es un E^e-módulo izquierdo, entonces M es un $E-$bimódulo.*

2. *Si M es un E^e-módulo derecho, entonces M es un $E-$bimódulo.*

Prueba. 1. Como M es un E^e-módulo izquierdo, M es un grupo aditivo abeliano.

Definiendo las multiplicaciones por escalares mediante $rx := (r \otimes 1)x$ y $xs := (1 \otimes s)x$, se verifican:

$(r_1 + r_2)x = r_1 x + r_2 x$, $(r_1 r_2)x = r_1(r_2 x)$, $1x = x$ y $r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2$;

$x(s_1 + s_2) = xs_1 + xs_2$, $x(s_1 s_2) = (xs_1)s_2$, $x1 = x$ y $(x_1 + x_2)s = x_1 s + x_2 s$.

Basta verificar $x(s_1 s_2) = (xs_1)s_2$, como sigue:

$$\begin{aligned}x(s_1 s_2) &= (1 \otimes (s_1 s_2))x = (1 \otimes (s_2 \cdot s_1))x \\ &= ((1 \otimes s_2)(1 \otimes s_1))x \\ &= (1 \otimes s_2)((1 \otimes s_1)x) = (xs_1)s_2.\end{aligned}$$

De modo que M es un $E-$módulo izquierdo y M es un $E-$módulo derecho.

Las dos estructuras son compatibles : $(rx)s = r(xs)$, calculando

$(rx)s = (1 \otimes s)(rx) = (1 \otimes s)(r \otimes 1)x = (r \otimes 1)(1 \otimes s)x = (r \otimes 1)(xs) = r(xs)$.

Por lo tanto, M es $E-$bimódulo.

2. Como M es E^e-módulo derecho, M es un grupo aditivo abeliano. Definiendo $rx := x(1 \otimes r)$ y $xs := x(s \otimes 1)$, se deduce que M es un $E-$módulo izquierdo y M es un $E-$módulo derecho. Se verifica como en el caso anterior, la condición de compatibilidad $(rx)s = r(xs)$. Por lo tanto, M es un $E-$bimódulo.

$\square$

Proposición 3.1.9. *Si M y N son $E-$bimódulos, entonces $\mathrm{Hom}_{E^e}(M, N)$ y $M \otimes_{E^e} N$ son $E-$bimódulos.*

Prueba. 1. Como M y N son $E-$bimódulos, por la Proposición 3.1.7, M y N son E^e-módulos izquierdos; de modo que

$\mathrm{Hom}_{E^e}(M, N) = \{f : M \to N \mid f$ es un morfismo de E^e-módulos izquierdos$\}$ es un grupo abeliano bajo la adición $+$, definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ .$$

Luego, se dota a $\mathrm{Hom}_{E^e}(M, N)$ la estructura de un $E-$bimódulo como sigue:

Dado $f \in \mathrm{Hom}_{E^e}(M, N)$ se definen para $x \in M\ ;\ s,\ t \in E$

$$(sf)(x) = f(xs) \tag{3.6}$$

$$(ft)(x) = f(x)t \tag{3.7}$$

Es claro que sf y $ft \in \mathrm{Hom}_{E^e}(M, N)$.

Se cumplen para (3.6) las 4 condiciones siguientes:

$$(s_1 + s_2)f = s_1 f + s_2 f, \quad (s_1 s_2)f = s_1(s_2 f), \quad 1f = f \text{ y}$$

$$s(f_1 + f_2) = sf_1 + sf_2 \text{ para todo } s_1, s_2, s \in E \text{ y todo } f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{E^e}(M, N).$$

Se cumplen para (3.7) las 4 condiciones siguientes:

$$f(t_1 + t_2) = ft_1 + ft_2, \quad f(t_1 t_2) = (ft_1)t_2, \quad f1 = f \text{ y}$$

$$(f_1 + f_2)t = f_1 t + f_2 t \text{ para todo } t_1, t_2, t \in E \text{ y todo } f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{E^e}(M, N).$$

En seguida, se verifican las 4 últimas condiciones M_1, M_2, M_3 y M_4 ya que las 4 condiciones anteriores son análogas.

M_1 :
$$\begin{aligned} f(t_1+t_2)(x) &:= f(x)(t_1+t_2) = f(x)t_1 + f(x)t_2 \\ &:= (ft_1)(x) + (ft_2)(x) = (ft_1+ft_2)(x). \end{aligned}$$

M_2 :
$$\begin{aligned} f(t_1t_2)(x) &= f(x)(t_1t_2) = (f(x)t_1)t_2 \\ &= (ft_1)(x)t_2, \text{ como } ft_1 \in \mathrm{Hom}_{E^e}(M,N): \\ &= ((ft_1)t_2)(x). \end{aligned}$$

M_3 : $f1(x) = f(x)1 = f(x)$.

M_4 :
$$\begin{aligned} (f_1+f_2)t(x) &= (f_1+f_2)(x)t = (f_1(x)+f_2(x))t \\ &= (f_1x))t + (f_2(x))t = (f_1t)(x) + (f_2t)(x) \\ &= (f_1t+f_2t)(x)\ , \text{ para todo } x \in M\ . \end{aligned}$$

Finalmente, se prueba la condición de compatibilidad de (3.6) y (3.7). Dados $s \in E$, $t \in E$ y $f \in \mathrm{Hom}_{E^e}(M,N)$ se cumple $(sf)t = s(ft)$ pues para $x \in M$ se tiene

$$\begin{aligned} (sf)t(x) = (sf)(x)t &= f(xs)t \\ &= (ft)(xs), \text{ como } ft \in \mathrm{Hom}_{E^e}(M,N): \\ &= s(ft)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{E^e}(M,N)$ es un $E-$bimódulo.

2. Como M y N son $E-$bimódulos, por la Proposición 3.1.7 M es E^e-módulo derecho y N es E^e-módulo izquierdo. Luego, $M \otimes_{E^e} N$ es un grupo abeliano aditivo.
Ahora, se dota a $M \otimes_{E^e} N$ la estructura de un $E-$bimódulo como sigue.

Dados $x \otimes y \in M \otimes_{E^e} N$; s y $t \in E$ se definen:

$$s(x \otimes y) = (sx) \otimes y \tag{3.8}$$

$$(x \otimes y)t = x \otimes (yt) \tag{3.9}$$

Se cumplen para (3.8) las 4 condiciones siguientes

$(s_1+s_2)(x \otimes y) = s_1(x \otimes y) + s_2(x \otimes y)$, $(s_1s_2)(x \otimes y) = s_1(s_2(x \otimes y))$,

$1(x \otimes y) = x \otimes y$ y $s(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2) = s(x_1 \otimes y_1) + s(x_2 \otimes y_2)$ para todo $s_1, s_2, s \in S$ y todo $x \otimes y, x_1 \otimes y_1$ y $x_2 \otimes y_2 \in M \otimes_{E^e} N$.

Se cumplen para (3.9) las 4 condiciones siguientes

$(x \otimes y)(t_1 + t_2) = (x \otimes y)t_1 + (x \otimes y)t_2,\ (x \otimes y)(t_1 t_2) = ((x \otimes y)t_1)t_2,$

$(x \otimes y)1 = x \otimes y$ y $(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2)t = (x_1 \otimes y_1)t + (x_2 \otimes y_2)t$ para todo $t_1, t_2, t \in E$ y todo $x \otimes y, x_1 \otimes y_1$ y $x_2 \otimes y_2 \in M \otimes_{E^e} N$.

La verificación se hace como en la prueba de la Proposición 3.1.3. Por consiguiente, $M \otimes_{E^e} N$ es un $E-$bimódulo.

$\square$

Sean K un anillo conmutativo, E una $K-$álgebra.

Definición 3.1.10. Sean M y N, $E-$bimódulos. Una aplicación $f : M \to N$ es un *morfismo de $E-$bimódulos* si es un morfismo de $E-$módulos izquierdos y un morfismo de $E-$módulos derechos. Es decir, si se cumplen

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), f(rx) = rf(x) \text{ y } f(xs) = f(x)s$$

para todo $x_1,\ x_2, x \in M$ y $r,\ s \in E$.

Proposición 3.1.11. *Si M y N son $E-$bimódulos, entonces $f : M \to N$ es un morfismo de E^e-módulos izquierdos implica que f es un morfismo de $E-$bimódulos, y la recíproca es verdadera.*

Prueba. $\Rightarrow$) Como $f : M \to N$ es un morfismo de E^e-módulos izquierdos, se cumplen $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ y $f((r_1 \otimes r_2)x) = (r_1 \otimes r_2)f(x)$ para $x_1,\ x_2, x \in M$ y $(r_1 \otimes r_2) \in E^e$.
Ahora, sean $x \in M$, r y $s \in E$, entonces $f(rx) = rf(x)$ y $f(xs) = f(x)s$. En efecto,
$f(rx) = f(rx1) = f((r \otimes 1)x) = (r \otimes 1)f(x) = r(f(x))1 = rf(x);$
$f(xs) = f(1xs) = f((1 \otimes s)x) = (1 \otimes s)f(x) = f(x)s.$
$\Leftarrow$) Puesto que $f : M \to N$ es un morfismo de $E-$bimódulos; $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $f(rx) = rf(x)$ y $f(xs) = f(x)s$ para todo $x_1,\ x_2, x \in M$ y $r,\ s \in E$.
Si $x \in M$, $(r \otimes s) \in E^e$, entonces $f((r \otimes s)x) = (r \otimes s)f(x)$. Calculando,
$f((r \otimes s)x) = f(rxs) = f((rx)s) = f(rx)s = [rf(x)]s = rf(x)s = (r \otimes s)f(x)$. Por lo tanto, f es un morfismo de E^e-módulos izquierdos. $\square$

Proposición 3.1.12. *Sean K un anillo conmutativo, A una $K-$álgebra con elemento unitario 1_A y $N = \{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$. Entonces N es un $K-$submódulo de A.*

Prueba. Por definición, N es un subconjunto no vacío de A ya que $1_A \in N$. Sean n_1 y $n_2 \in N$ y $\lambda \in K$, entonces $\lambda n_1 + n_2 \in N$.
Para verificar esto, sean $n_1 = \lambda_1 1_A$, $n_2 = \lambda_2 1_A$, luego

$$\begin{aligned} \lambda n_1 + n_2 &= \lambda(\lambda_1 1_A) + \lambda_2 1_A \\ &= (\lambda\lambda_1 + \lambda_2)1_A. \end{aligned}$$

Notando que $\lambda\lambda_1 + \lambda_2 \in K$, se ve que $\lambda n_1 + n_2 \in N$. □

Notación 3.1.13. El $K-$módulo cociente

$$A/N = \{a + N \mid a \in A\} = \{a + K1_A \mid a \in A\}$$

será denotado por $\overline{A}$ y su elemento $a + K1_A$ por $\overline{a}$.

Para una $K-$álgebra E, vemos que $\overline{E}$ es un $K-$módulo cociente y $\overline{E} := \mathrm{Coker}(\eta_E)$. Dado $n \geq 0$, $\overline{E}^{\otimes^n} = K$ si $n = 0$ y $\overline{E}^{\otimes^n} = \underbrace{\overline{E} \otimes \cdots \otimes \overline{E}}_{n\text{-veces}}$ si $n > 0$.

Proposición 3.1.14. *Sea E una $K-$álgebra y $n \geq 0$, entonces $E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ es un $E-$bimódulo.*

Prueba. Como producto tensorial de $K-$módulos, $E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ es un grupo abeliano aditivo. Luego, se dota a $E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ la estructura de un $(E, E)-$bimódulo como sigue. Dados $x \otimes z \otimes y \in E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E,\ s \in E,\ t \in E$ se definen:

$$s(x \otimes z \otimes y) = (sx) \otimes z \otimes y\ , \tag{3.10}$$

$$(x \otimes z \otimes y)t = x \otimes z \otimes (yt)\ . \tag{3.11}$$

Se cumplen para (3.10) las 4 condiciones siguientes

$$(s_1 + s_2)(x \otimes z \otimes y) = s_1(x \otimes z \otimes y) + s_2(x \otimes z \otimes y),$$

$$(s_1 s_2)(x \otimes z \otimes y) = s_1(s_2(x \otimes z \otimes y)),$$

$$1(x \otimes z \otimes y) = x \otimes z \otimes y,$$

$$s(x_1 \otimes z_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes z_2 \otimes y_2) = s(x_1 \otimes z_1 \otimes y_1) + s(x_2 \otimes z_2 \otimes y_2)$$

para todo $s_1, s_2, s \in E$ y todo $x \otimes z \otimes y, x_1 \otimes z_1 \otimes y_1$ y $x_2 \otimes z_2 \otimes y_2 \in E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$.
Se cumplen para (3.11) las 4 condiciones siguientes
$(x \otimes z \otimes y)(t_1 + t_2) = (x \otimes z \otimes y)t_1 + (x \otimes z \otimes y)t_2,\ (x \otimes z \otimes y)(t_1 t_2) = ((x \otimes z \otimes y)t_1)t_2,$
$(x \otimes z \otimes y)1 = x \otimes z \otimes y$ y $(x_1 \otimes z_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes z_2 \otimes y_2)t = (x_1 \otimes z_1 \otimes y_1)t + (x_2 \otimes z_2 \otimes y_2)t$ para todo $t_1, t_2, t \in E$ y todo $x \otimes z \otimes y, x_1 \otimes z_1 \otimes y_1$ y $x_2 \otimes z_2 \otimes y_2 \in E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$. Luego, sólo se verifican las 4 condiciones siguientes M_1, M_2, M_3 y M_4 ya que las 4 condiciones anteriores son análogas.

$$\begin{aligned} M_1: \qquad (x \otimes z \otimes y)(t_1 + t_2) &= x \otimes z \otimes [y(t_1 + t_2)] = x \otimes z \otimes (yt_1 + yt_2) \\ &= x \otimes z \otimes (yt_1) + x \otimes z \otimes (yt_2) \\ &= (x \otimes z \otimes y)t_1 + (x \otimes z \otimes y)t_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2: \qquad (x \otimes z \otimes y)(t_1 t_2) &= x \otimes z \otimes [y(t_1 t_2)] \\ &= x \otimes z \otimes [(yt_1)t_2] = (x \otimes z \otimes (yt_1))t_2 \\ &= ((x \otimes z \otimes y)t_1)t_2; \end{aligned}$$

$$M_3: \qquad (x \otimes z \otimes y)1_E = x \otimes z \otimes (y \cdot 1_E) = x \otimes z \otimes y;$$

$$\begin{aligned} M_4: \qquad (x_1 \otimes z_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes z_2 \otimes y_2)t &:= x_1 \otimes z_1 \otimes (y_1 t) + x_2 \otimes z_2 \otimes (y_2 t) \\ &= (x_1 \otimes z_1 \otimes y_1)t + (x_2 \otimes z_2 \otimes y_2)t. \end{aligned}$$

Finalmente, se prueba la condición de compatibilidad de (3.10) y (3.11). Dados $s \in E$, $t \in E$ y $x \otimes z \otimes y \in E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ se cumple $(s(x \otimes z \otimes y))t = s((x \otimes z \otimes y)t)$ ya que

$$\begin{aligned} (s(x \otimes z \otimes y))t = ((sx) \otimes z \otimes y)t &= (sx) \otimes z \otimes (yt) \\ &= s(x \otimes z \otimes (yt)) = s((x \otimes z \otimes y)t) \ . \end{aligned}$$

Por consiguiente, $E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ es un $E-$bimódulo. $\square$

3.2 Homología de Hochschild de un álgebra

Usando la resolución barra de un álgebra y la envolvente correspondiente, se obtiene la homología de Hochschild de un álgebra (Teorema 3.2.13). Este hecho motiva la revisión del complejo de Hochschild de un álgebra con coeficientes en un bimódulo.

Sea K un anillo conmutativo, E una $K-$álgebra y M un $E-$bimódulo.
Dado $n \geq 0$, $E^{\otimes^n} = K$ si $n = 0$ y $E^{\otimes^n} = \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{n\text{-veces}}$ si $n > 0$.
Se adopta las notaciones $C_n(E, M) = M \otimes_K E^{\otimes^n}$, $\otimes = \otimes_K$.
Para $n \geq 1$ se define el mapa $b_n : M \otimes E^{\otimes^n} \to M \otimes E^{\otimes^{n-1}}$ de E^e- módulos izquierdos por

$$\begin{aligned} b_n(r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n \\ &+ (-1)^n r_n r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} \ ; \end{aligned} \tag{3.12}$$

$b_1(r_0 \otimes r_1) = r_0 r_1 - r_1 r_0$.
Luego se obtiene

$$C_*(E, M) \ : \ 0 \leftarrow C_0(E, M) \overset{b_1}{\leftarrow} C_1(E, M) \overset{b_2}{\leftarrow} \cdots \overset{b_n}{\leftarrow} C_n(E, M) \overset{b_{n+1}}{\leftarrow} \cdots \tag{3.13}$$

Lema 3.2.1. $b_n b_{n+1} = 0$ *para* $n \geq 1$.

Prueba. Para $n = 1$, $b_1 b_2 = 0$ pues $b_2 : M \otimes E^{\otimes^2} \to M \otimes E$ es dada por
$b_2(r_0 \otimes r_1 \otimes r_2) = r_0 r_1 \otimes r_2 - r_0 \otimes r_1 r_2 + r_2 r_0 \otimes r_1$, de modo que

$$\begin{aligned} b_1 b_2(r_0 \otimes r_1 \otimes r_2) &= (r_0 r_1) r_2 - r_2 (r_0 r_1) \\ &- r_0 (r_1 r_2) + (r_1 r_2) r_0 \\ &+ (r_2 r_0) r_1 - r_1 (r_2 r_0) = 0 \ . \end{aligned}$$

En general, para $r = r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \in M \otimes E^{\otimes^{n+1}}$. Se prueba como en el Lema 3.3.2 que $b_n b_{n+1}(r) = 0$ para $n \geq 1$. □

Definición 3.2.2. [20] El complejo de cadenas de grupos abelianos (o $K-$módulos), $(C_*(E, M), b)$ dado en (3.13), se llama *complejo de Hochschild de E con coeficientes en M*. El mapa b es conocido como el *borde de Hochschild*.

Cuando $M = E$, $C_*(E) = (C_*(E,E), b)$ es llamado *complejo de Hochschild de* E.

Definición 3.2.3. *La homología de Hochschild de* E *con coeficientes en* M se define como $H_*(E,M) = \{H_n(E,M)\}$, donde $H_n(E,M)$ es la homología de Hochschild de grado n de E con coeficientes en M dada por

$$\begin{aligned} H_n(E,M) &:= H_n(C_*(E,M), b) \\ &= \frac{\operatorname{Ker}(b_n)}{\operatorname{Im}(b_{n+1})} \text{ para } n \geq 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Si $M = E$, entonces se escribe $HH_n(E) = H_n(E,E)$. En este caso, $HH_*(E) = \{HH_n(E)\}$ es llamada homología de Hochschild de E.

Lema 3.2.4. *Sea* $[M,E] = \{mr - rm \mid m \in M, r \in E\}$*, entonces* $H_0(E,M) = \dfrac{M}{[M,E]} = M_E$.

Prueba. Tomando el complejo de cadenas dado en (3.13), $M \otimes E \xrightarrow{b_1} M$ y $H_0(E,M) = \dfrac{M}{\operatorname{Im}(b_1)}$; luego $\operatorname{Im}(b_1)$ está formado por los elementos de la forma $b_1(m \otimes r) = mr - rm$. Así, $H_0(E,M) = \dfrac{M}{[M,E]}$. □

Corolario 3.2.5. *Si* $M = E$*,* $Im(b_1) = [E,E]$*, entonces* $HH_0(E) = \dfrac{E}{[E,E]}$*, donde* $[E,E] = \{mr - rm \mid m \in E, r \in E\}$.

Si E es conmutativo, $HH_0(E) = E$.

Si $M = E = K$, por definición $HH_n(K) = \begin{cases} K \ , \text{ si } n = 0 \\ 0 \ , \text{ si } n > 0 \ . \end{cases}$

Sea E una $K-$álgebra conmutativa. El $E-$módulo $\Omega^1_{E/K}$ de las diferenciales de Kähler es definido como el $E-$módulo generado por los símbolos da para $a \in E$, con $da = 0$ si $a \in K$. Para cada $a, b \in E$ se cumplen las dos relaciones:

$$d(a+b) = da + db \text{ y } d(ab) = a(db) + b(da).$$

Un $E-$bimódulo M es simétrico si $am = ma$ para todo $a \in E$ y $m \in M$.

Proposición 3.2.6. [20, Prop. 1.1.10] *Sea* K *un anillo conmutativo,* E *una* $K-$*álgebra conmutativa y* M *un* $E-$*bimódulo simétrico. Entonces* $H_1(E,M) \cong M \otimes_E \Omega^1_{E/K}$*. En particular,* $HH_1(E) \cong \Omega^1_{E/K}$.

Prueba. Para calcular $H_1(E,M)$, se necesita conocer $\mathrm{Ker}(b_1)$ e $\mathrm{Im}(b_2)$. Puesto que $mr = rm$, $b_1(m\otimes r) = mr - rm = 0$, de modo que $\mathrm{Ker}(b_1) = M\otimes E$.
En el cociente $H_1(E,M) = (M\otimes E)/\mathrm{Im}(b_2)$ se tiene

$$0 = \overline{b_2(m\otimes r_1\otimes r_2)} \quad = \quad \overline{mr_1\otimes r_2} - \overline{m\otimes r_1r_2} + \overline{r_2m\otimes r_1},$$

luego existe una aplicación bien definida

$$H_1(E,M) \longrightarrow M\otimes_E \Omega^1_{E/K}, \quad \overline{m\otimes r} \mapsto m\otimes_E dr,$$

pues en $M\otimes_E \Omega^1_{E/K}$ se tiene

$$\begin{aligned} & mr_1\otimes_E dr_2 - m\otimes_E d(r_1r_2) + r_2m\otimes_E dr_1 \\ = \quad & m\otimes_E r_1(dr_2) - m\otimes_E r_1(dr_2) - m\otimes_E r_2(dr_1) + m\otimes_E r_2(dr_1) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, del hecho que E es una $K-$álgebra conmutativa se sabe que $M\otimes E^{\otimes^n}$ es un $E-$módulo via $r\cdot(m\otimes r_1\otimes\cdots) = (rm\otimes r_1\otimes\cdots)$, luego se tiene una aplicación E-bilineal $M\times\Omega^1_{E/K} \longrightarrow H_1(E,M)$, $(m, r_1dr_2)\mapsto \overline{mr_1\otimes r_2}$, pues
$(rm, r_1dr_2)\mapsto \overline{rmr_1\otimes r_2} = r\overline{(mr_1\otimes r_2)}$ y
$(m, rr_1dr_2)\mapsto \overline{mrr_1\otimes r_2} = \overline{rmr_1\otimes r_2} = r\overline{(mr_1\otimes r_2)}$.
Por propiedad universal del producto tensorial, se tiene una aplicación E-lineal
$M\otimes_E\Omega^1_{E/K} \longrightarrow H_1(E,M)$, $m\otimes_E r_1dr_2\mapsto \overline{mr_1\otimes r_2}$.
Estas aplicaciones son una inversa de la otra :

$$\overline{m\otimes r}\mapsto m\otimes_E dr\mapsto \overline{m\otimes r},$$

$$m\otimes_E r_1dr_2\mapsto \overline{mr_1\otimes r_2}\mapsto mr_1\otimes_E dr_2 = m\otimes_E r_1dr_2.$$

Por lo tanto, $H_1(E,M)\cong M\otimes_E\Omega^1_{E/K}$. □

El $E-$módulo $\Omega^n_{E/K}$ de $n-$formas diferenciales se define como el producto exterior $\bigwedge^n_E \Omega^1_{E/K}$ (ver [20, 1.3.11]).
Así, $\Omega^n_{E/K}$ es generado por los elementos $a_0da_1\wedge\ldots\wedge da_n$, para $a_i\in E$, que usualmente son denotados por $a_0da_1\ldots da_n$.

Proposición 3.2.7. [20, Prop. 1.3.16] *Sea K un anillo conmutativo, E una $K-$álgebra conmutativa y M un $E-$bimódulo. Si K contiene $\mathbb{Q}$, entonces $M\otimes_E\Omega^n_{E/K}$ es un sumando directo de $H_n(E,M)$. En particular, $\Omega^n_{E/K}$ es un sumando directo de $HH_n(E)$.*

Estas dos últimas proposiciones indican que la homología de Hochschild tiene aplicación en geometría diferencial en el caso de álgebras conmutativas.

Funtorialidad

Sea $f : M \to M'$ un morfismo de bimódulos. Entonces f induce un morfismo de complejos de cadenas $C_*(E, M) \to C_*(E, M')$

$$\begin{tikzcd} M \otimes_K E^{\otimes^n} \arrow[r, "f\otimes id_{E^{\otimes^n}}"] \arrow[d, equal] & M' \otimes_K E^{\otimes^n} \arrow[d, equal] \\ C_n(E, M) & C_n(E, M') \end{tikzcd}$$

Así, se obtiene un morfismo de grupos $f_* : H_n(E, M) \to H_n(E, M')$.
Más generalmente, sea $g : E \to E'$ un morfismo de $K-$álgebras. Sea M' un $E'-$bimódulo. Entonces f y g inducen $C_n(E, M) = M \otimes E^{\otimes^n} \to M' \otimes E'^{\otimes^n} = C_n(E', M')$,
$m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \mapsto f(m) \otimes g(r_1) \otimes \cdots \otimes g(r_n)$.
Así, se tiene un morfismo de complejos de cadenas $C_*(E, M) \to C_*(E', M')$. Luego, se obtiene un morfismo de grupos

$$(f, g)_* : H_n(E, M) \to H_n(E', M').$$

Para detalles se puede ver [20].

En particular, si $M = E$, $M' = E'$ y $f = g$, entonces f induce un morfismo $K-$módulos

$$f_* : HH_n(E) \to HH_n(E').$$

Puesto que Alg_K es la categoría de $K-$álgebras, el funtor $HH_n(-) : \mathrm{Alg}_K \to \mathfrak{m}^l_K$, definido por $E \mapsto HH_n(E)$, es covariante para todo $n \geq 0$.

Resolución barra de un álgebra

Sean K un anillo conmutativo, E una $K-$álgebra. Para cada $n \geq 0$, sea
$C^{bar}_n(E) = E \otimes E^{\otimes^n} \otimes E$ con estructura de $E-$bimódulo dada por
$\alpha(r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1}) = (\alpha r_0) \otimes \cdots \otimes r_{n+1}$ y $(r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1})\beta = r_0 \otimes \cdots \otimes (r_{n+1}\beta)$.

Luego $C_n^{bar}(E)$ posee una estructura de E^e-módulo izquierdo mediante
$(\alpha \otimes \beta)(r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1}) = (\alpha r_0) \otimes \cdots \otimes (r_{n+1}\beta)$.
Se define la aplicación $b'_n : C_n^{bar}(E) \to C_{n-1}^{bar}(E)$ de E^e-módulos izquierdos por

$$b'_n(r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_{n+1}. \tag{3.15}$$

Lema 3.2.8. $b'_n b'_{n+1} = 0$ *para* $n \geq 1$.

Prueba. Para $n = 1$, $b'_1 b'_2 = 0$. En efecto, tomando $r = r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \in C_2^{bar}(E)$,
$b'_2(r) = r_0 r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 - r_0 \otimes r_1 r_2 \otimes r_3 + r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 r_3$, luego

$$\begin{aligned} b'_1 b'_2(r) &= (r_0 r_1) r_2 \otimes r_3 - r_0 r_1 \otimes r_2 r_3 \\ &- r_0(r_1 r_2) \otimes r_3 + r_0 \otimes (r_1 r_2) r_3 \\ &+ r_0 r_1 \otimes r_2 r_3 - r_0 \otimes r_1(r_2 r_3) = 0\ . \end{aligned}$$

En general, para $r = r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n+2} \in E \otimes E^{\otimes^{n+1}} \otimes E$. Se prueba como en el Lema 3.3.2 que $b'_n b'_{n+1}(r) = 0$ para $n \geq 1$. $\square$

Así, se obtiene el complejo barra de E:

$$(C_*^{bar}(E), b') \ : \ 0 \leftarrow C_0^{bar}(E) \overset{b'_1}{\leftarrow} \cdots \overset{b'_n}{\leftarrow} C_n^{bar}(E) \overset{b'_{n+1}}{\leftarrow} \cdots \tag{3.16}$$

Considerando la multiplicación $\mu : E \otimes E = C_0^{bar}(E) \to E$, $r \otimes s \mapsto rs$ se ve que

$$\begin{tikzcd} E & E^{\otimes^2} \arrow[l, "\mu"'] & E^{\otimes^3} \arrow[l, "b'_1"'] \arrow[ll, bend left, "0"] \end{tikzcd}$$

ya que $\mu b'_1(r \otimes s \otimes t) = \mu((rs) \otimes t - r \otimes (st)) = (rs)t - r(st) = 0$.
Luego, se obtiene un complejo aumentado de $C_*^{bar}(E)$ denotado por

$$\overline{C_*^{bar}(E)} \ : \ 0 \leftarrow E \overset{\mu}{\leftarrow} E \otimes E \overset{b'_1}{\leftarrow} \cdots \overset{b'_n}{\leftarrow} E^{\otimes^{n+2}} \overset{b'_{n+1}}{\leftarrow} \cdots . \tag{3.17}$$

Se observa que E es un E^e-módulo izquierdo.

Teorema 3.2.9. *Sea E una $K-$álgebra. Entonces el complejo $(C_*^{bar}(E), b')$ es una resolución del E^e-módulo izquierdo E.*

Prueba. Para ver que $(C_*^{bar}(E), b')$ es una resolución del E^e-módulo izquierdo E, se muestra que $\overline{C_*^{bar}(E)}$ es contráctil.

Para ello se define, una homotopía de contracción de cadenas

$\zeta_0 : E \to E \otimes E$, $r \mapsto r \otimes 1$; para $n \geq 1$, $\zeta_n : E \otimes E^{\otimes^{n-1}} \otimes E \to E \otimes E^{\otimes^n} \otimes E$,

$r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} \otimes r_n \mapsto (-1)^n r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} \otimes r_n \otimes 1$.

En efecto : $\mu\zeta_0 = id_E$ pues para $r \in E$ se tiene $\mu\zeta_0(r) = \mu(r \otimes 1) = r = id_E(r)$;

$b'_1\zeta_1 + \zeta_0\mu = id_{C_0^{bar}(E)}$ pues para $r_0 \otimes r_1 \in E \otimes E = B_0(E)$ se tiene $\zeta_0\mu(r_0 \otimes r_1) = r_0r_1 \otimes 1$ y

$b'_1\zeta_1(r_0 \otimes r_1) = -r_0r_1 \otimes 1 + r_0 \otimes r_1$, de modo que

$(b'_1\zeta_1 + \zeta_0\mu)(r_0 \otimes r_1) = id_{C_0^{bar}(E)}(r_0 \otimes r_1)$. En general, para $n \geq 1$ como en el Teorema 3.3.3 se deduce que $b'_{n+1}\zeta_{n+1} + \zeta_n b'_n = id_{C_n^{bar}(E)}$. □

Definición 3.2.10. El complejo $C_*^{bar}(E)$ es llamado *la resolución barra de Hochschild de E.*

Lema 3.2.11. *Para cada $n \geq 0$, $M \otimes_K E^{\otimes^n}$ y $M \otimes_{E^e} (E \otimes E^{\otimes^n} \otimes E)$ son E^e-módulos izquierdos bajo las acciones :*

$(r \otimes s)(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) = rms \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)$ *y*

$(r \otimes s)(m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1})) = rms \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1})$, *respectivamente.*

Prueba. 1) Se cumplen las 4 condiciones de E^e-módulo izquierdo para $M \otimes_K E^{\otimes^n}$:

a)
$$\begin{aligned}(r \otimes s + r' \otimes s')(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) &= (rms + r'ms') \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)\\ &= rms \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) + r'ms' \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)\\ &= (r \otimes s)(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) + (r' \otimes s')(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n));\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}[(r \otimes s)(r' \otimes s')](m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) &= (rr' \otimes s \cdot s')(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n))\\ &= r(r'ms')s \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)\\ &= (r \otimes s)[(r'ms') \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)]\\ &= (r \otimes s)[(r' \otimes s')(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n))]\ ;\end{aligned}$$

c) $(1 \otimes 1)(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) = 1m1 \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) = m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)$;

d) $(r \otimes s)[m_1 \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) + m_2 \otimes (s_1 \otimes \cdots \otimes s_n)]$
$$\begin{aligned}&= rm_1s \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) + rm_2s \otimes (s_1 \otimes \cdots \otimes s_n)\\ &= (r \otimes s)(m_1 \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) + (r \otimes s)(m_2 \otimes (s_1 \otimes \cdots \otimes s_n)).\end{aligned}$$

2) Análogamente, se verifica que se cumplen las 4 condiciones de E^e-módulo izquierdo para $M \otimes_{E^e} (E \otimes E^{\otimes^n} \otimes E)$. $\square$

Teorema 3.2.12. *Los complejos de E^e-módulos izquierdos $(M \otimes_K E^{\otimes^*}, b)$ y $(M \otimes_{E^e} C_*^{bar}(E), id_M \otimes_{E^e} (b'))$ son isomorfos, donde b es definido en* (3.12) *y b' es definido en* (3.15) *.*

Prueba. 1) Sean $\varphi : M \otimes E^{\otimes^n} \to M \otimes_{E^e} (E \otimes E^{\otimes^n} \otimes E)$,
$m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) \mapsto m \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1)$; $\psi : M \otimes_{E^e} (E \otimes E^{\otimes^n} \otimes E) \to M \otimes E^{\otimes^n}$, $m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}) \mapsto r_{n+1} m r_0 \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)$ entonces φ y ψ son morfismos de E^e-módulos izquierdos tales que $\psi\varphi = id$ y $\varphi\psi = id$.
En efecto:
Se sabe que φ y ψ se extienden linealmente sobre $K-$módulos.
AF. Las aplicaciones φ y ψ son E^e-lineales. Para $r \otimes s \in E^e$:

$$\begin{aligned}
\varphi[(r \otimes s)(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n))] &= \varphi[rms \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)] \\
&= rms \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1) \\
&= (r \otimes s)(m \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1)) \\
&= (r \otimes s)\varphi[m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)] \ ;
\end{aligned}$$

recordemos que $r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1} = (r_0 \otimes r_{n+1})(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1)$ para $r_0 \otimes r_{n+1} \in E^e$, luego $m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}) = r_{n+1} m r_0 \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1)$; de modo que $(r \otimes s)(m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1})) = r(r_{n+1} m r_0)s \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1)$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\psi[(r \otimes s)(m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}))] = r(r_{n+1} m r_0)s \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) \\
= \ &(r \otimes s)[(r_{n+1} m r_0) \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)] = (r \otimes s)\psi(m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1})) \ .
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\psi\varphi(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) &= \psi(m \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1)) \\
&= m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) \\
&= id(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\psi(m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1})) &= \varphi(r_{n+1} m r_0 \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) \\
&= r_{n+1} m r_0 \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1) \\
&= m(r_0 \otimes r_{n+1}) \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1) \\
&= m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_{n+1})(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1) \\
&= m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}) \\
&= id(m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}))\ .
\end{aligned}$$

2) φ es una aplicación de cadenas; i.e., el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \otimes E^{\otimes^n} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "b_n"'] & M \otimes_{E^e} (E \otimes E^{\otimes^n} \otimes E) \arrow[d, "id_M \otimes_{E^e} b'_n"] \\
M \otimes E^{\otimes^{n-1}} \arrow[r, "\varphi"] & M \otimes_{E^e} (E \otimes E^{\otimes^{n-1}} \otimes E)
\end{tikzcd}$$

En efecto, haciendo $r_{1n} = r_1 \otimes \cdots \otimes r_n$, tomando $r_0 = r_{n+1} = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
(id_M \otimes_{E^e} b'_n)\varphi(m \otimes (r_{1n})) &:= (id_M \otimes_{E^e} b'_n)(m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_{1n} \otimes r_{n+1})) \\
&= id_M(m) \otimes_{E^e} b'_n(r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}),\ \text{por (3.15) :} \\
&= m \otimes_{E^e} (r_0 r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_{n+1}) \\
&+ (-1)^n m \otimes_{E^e} (r_0 \otimes r_{1,n-1} \otimes r_n r_{n+1}) \\
&= m \otimes_{E^e} (r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes_{E^e} (1 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes 1) \\
&+ (-1)^n m \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} \otimes r_n)\ ;
\end{aligned}$$

por otro lado, según (3.12):

$$\begin{aligned}
\varphi b_n(m \otimes (r_1 \otimes \cdots \otimes r_n)) &= \varphi(mr_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n \\
&+ (-1)^n r_n m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1}) \\
&= m \otimes_{E^e} (r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m \otimes_{E^e} (1 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes 1) \\
&+ (-1)^n m \otimes_{E^e} (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} \otimes r_n) \; .
\end{aligned}$$

En consecuencia, $(id_M \otimes_{E^e} b'_n)\varphi = \varphi b_n$. Así, $\varphi : M \otimes E^{\otimes^*} \to M \otimes_{E^e} B_*(E)$ es un isomorfismo de complejos de E^e-módulos izquierdos. □

Teorema 3.2.13. *La homología del complejo $M \otimes_{E^e} C_*^{bar}(E)$ proporciona la homología de Hochschild de E con coeficientes en M.*

Prueba. Aplicando la $n-$ésima homología a las igualdades $\psi\varphi = id$ y $\varphi\psi = id$ que aparecen en la prueba del Teorema 3.2.12 se obtiene $H_n(\psi)H_n(\varphi) = id$ y
$H_n(\varphi)H_n(\psi) = id$. Así, $H_n(\varphi) : H_n(E, M) \to H_n(M \otimes_{E^e} C_*^{bar}(E))$ es un isomorfismo; i.e., $H_n(E, M) \cong H_n(M \otimes_{E^e} C_*^{bar}(E))$. Por lo tanto, la homología del complejo $M \otimes_{E^e} C_*^{bar}(E)$ proporciona la homología de Hochschild de E con coeficientes en M. □

3.3 Resolución barra normalizada de un álgebra

La resolución barra normalizada de un álgebra es una herramienta fundamental en la construcción de la resolución del producto cruzado general. El propósito de esta sección es tratar la resolución barra normalizada de una $K-$álgebra y mostrar su utilidad en la homología de Hochschild de una $K-$álgebra con coeficientes en un bimódulo correspondiente mediante la resolución barra del álgebra.

Para cada $K-$álgebra E y cada $n \geq 0$, sea $B_n(E) = E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ con estructura de $E-$bimódulo dada por las multiplicaciones escalares

$$\alpha(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) = (\alpha r_0) \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1} \tag{3.18}$$

$$\text{y } (r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1})\beta = r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes (r_{n+1}\beta) \tag{3.19}$$

Luego $B_n(E)$ posee una estructura de E^e-módulo izquierdo mediante

$$(\alpha \otimes \beta)(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) = (\alpha r_0) \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes (r_{n+1}\beta). \tag{3.20}$$

Se define la aplicación $b'_n : B_n(E) \to B_{n-1}(E)$ de E^e-módulos izquierdos por

$$\begin{aligned} b'_n(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) &= r_0 r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes \overline{r_i r_{i+1}} \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \\ &+ (-1)^n r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n-1}} \otimes r_n r_{n+1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ejemplo 3.3.1. [21, Exer. 8.6.4] Para cada $n \geq 1$, b'_n dada en (3.21) está bien definida.

A continuación, se muestra la validez de este ejemplo comenzando con los casos $n = 1$, $n = 2$ y llegando al caso general, como sigue :
Para $n = 1$, $b'_1 : B_1(E) \to B_0(E)$ dada por
$b'_1(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes r_2) = r_0 r_1 \otimes r_2 - r_0 \otimes r_1 r_2$ está bien definida .
En efecto; sean r y $s \in \overline{r_1}$, entonces $\overline{r} = \overline{s} = \overline{r_1}$ y $r - s = \lambda 1_E$ para un $\lambda \in K$.
Haciendo cálculos $b'_1(r_0 \otimes \overline{r} \otimes r_2) = b'_1(r_0 \otimes \overline{s} \otimes r_2)$.

Para $n = 2$, $b'_2 : B_2(E) \to B_1(E)$ dada por

$$b'_2(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2} \otimes r_3) = r_0 r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes r_3 - r_0 \otimes \overline{r_1 r_2} \otimes r_3 + r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes r_2 r_3$$

está bien definida. Para ello, sean $\overline{r_1} = \overline{s_1}$ y $\overline{r_2} = \overline{s_2}$; entonces
$b'_2(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2} \otimes r_3) = b'_2(r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \overline{s_2} \otimes r_3)$.

En efecto, sean $r_i = s_i + \lambda_i 1_E$ para $\lambda_i \in K$, $i = 1, 2$. Multiplicando,

$r_1r_2 = s_1s_2 + \lambda_1 s_2 + \lambda_2 s_1 + \lambda_1\lambda_2 1_E$. Efectuando cálculos

$$
\begin{aligned}
& b_2'(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2} \otimes r_3) = r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes r_3 - r_0 \otimes \overline{r_1r_2} \otimes r_3 + r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes r_2r_3 \\
= \;& r_0(s_1+\lambda_1 1_E) \otimes \overline{(s_2+\lambda_2 1_E)} \otimes r_3 - r_0 \otimes \overline{(s_1+\lambda_1 1_E)(s_2+\lambda_2 1_E)} \otimes r_3 \\
+ \;& r_0 \otimes \overline{(s_1+\lambda_1 1_E)} \otimes (s_2+\lambda_2 1_E)r_3, \text{ como } \overline{\lambda_i 1_E} = 0 : \\
= \;& r_0(s_1+\lambda_1 1_E) \otimes \overline{s_2} \otimes r_3 - r_0 \otimes \overline{(s_1+\lambda_1 1_E)(s_2+\lambda_2 1_E)} \otimes r_3 \\
+ \;& r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes (s_2+\lambda_2 1_E)r_3 \\
= \;& b_2'(r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \overline{s_2} \otimes r_3) + \lambda_1 r_0 \otimes \overline{s_2} \otimes r_3 - r_0 \otimes \lambda_1\overline{s_2} \otimes r_3 - r_0 \otimes \lambda_2\overline{s_1} \otimes r_3 \\
+ \;& r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \lambda_2 r_3 = b_2'(r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \overline{s_2} \otimes r_3) \text{ por bilinealidad de } \otimes_K \ .
\end{aligned}
$$

En general, $b_n' : B_n(E) \to B_{n-1}(E)$ dada en (3.21) está bien definida.
Para ello, sean $\overline{r_i} = \overline{s_i}$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces
$b_n'(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) = b_n'(r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1})$.
En efecto, si $r_i = s_i + \lambda_i 1_E$ para $\lambda_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$ se obtiene
$r_ir_{i+1} = s_is_{i+1} + \lambda_i s_{i+1} + \lambda_{i+1}s_i + (\lambda_i\lambda_{i+1})1_E$. Pero $\overline{\lambda_i 1_E} = 0$, luego
$\overline{r_ir_{i+1}} = \overline{s_is_{i+1}} + \lambda_i\overline{s_{i+1}} + \lambda_{i+1}\overline{s_i}$. Reemplazando estos valores en (3.21):

$$
\begin{aligned}
& b_n'(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) = r_0(s_1+\lambda_1 1_E) \otimes \overline{s_2} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1} \\
+ \;& \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes (\overline{s_is_{i+1}} + \lambda_i\overline{s_{i+1}} + \lambda_{i+1}\overline{s_i}) \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \\
+ \;& (-1)^n r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \cdots \otimes \overline{s_{n-1}} \otimes (s_n+\lambda_n 1_E)r_{n+1} \\
= \;& b_n'(r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1}) + \lambda_1 r_0 \otimes \overline{s_2} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1} \\
- \;& r_0 \otimes \lambda_1\overline{s_2} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1} - r_0 \otimes \lambda_2\overline{s_1} \otimes \overline{s_3} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1} \\
+ \;& r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \lambda_2\overline{s_3} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1} + \cdots + (-1)^{n-1} r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_n\overline{s_{n-1}} \otimes r_{n+1} \\
+ \;& (-1)^n r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \cdots \otimes \overline{s_{n-1}} \otimes \lambda_n r_{n+1} = b_n'(r_0 \otimes \overline{s_1} \otimes \cdots \otimes \overline{s_n} \otimes r_{n+1}) \ ,
\end{aligned}
$$

ya que la suma de los términos consecutivos anteriores restantes es cero por la bilinealidad de $\otimes_K$.

Lema 3.3.2. $b_n'b_{n+1}' = 0$ *para* $n \geq 1$.

Prueba. Para $n = 1$, $b_1'b_2' = 0$. En efecto, tomando $r = r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2} \otimes r_3 \in B_2(E)$,

$b_2'(r) = r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes r_3 - r_0 \otimes \overline{r_1r_2} \otimes r_3 + r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes r_2r_3$, luego

$$\begin{aligned}
b_1'b_2'(r) &= (r_0r_1)r_2 \otimes r_3 - r_0r_1 \otimes r_2r_3 \\
&- r_0(r_1r_2) \otimes r_3 + r_0 \otimes (r_1r_2)r_3 \\
&+ r_0r_1 \otimes r_2r_3 - r_0 \otimes r_1(r_2r_3) = 0\ .
\end{aligned}$$

Para $n = 2$, $b_2'b_3' = 0$. En efecto, tomando $r = r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2} \otimes \overline{r_3} \otimes r_4 \in B_3(E)$,

$$\begin{aligned}
b_3'(r) &= r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \overline{r_3} \otimes r_4 - r_0 \otimes \overline{r_1r_2} \otimes \overline{r_3} \otimes r_4 + r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2r_3} \otimes r_4 \\
&- r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2} \otimes r_3r_4, \text{luego} \\
b_2'b_3'(r) &= (r_0r_1)r_2 \otimes \overline{r_3} \otimes r_4 - r_0r_1 \otimes \overline{r_2r_3} \otimes r_4 + r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes r_3r_4 \qquad (3.22) \\
&- r_0(r_1r_2) \otimes \overline{r_3} \otimes r_4 + r_0 \otimes \overline{(r_1r_2)r_3} \otimes r_4 - r_0 \otimes \overline{r_1r_2} \otimes r_3r_4 \\
&+ r_0r_1 \otimes \overline{r_2r_3} \otimes r_4 - r_0 \otimes \overline{r_1(r_2r_3)} \otimes r_4 + r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes (r_2r_3)r_4 \\
&- r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes r_3r_4 + r_0 \otimes \overline{r_1r_2} \otimes r_3r_4 - r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes r_2(r_3r_4).
\end{aligned}$$

A partir de este arreglo rectangular, se puede asociar a $b_2'b_3'(r)$ la matriz auxiliar $A_{4\times 3} = (a_{ij})$, con $a_{11} = (r_0r_1)r_2 \otimes \overline{r_3} \otimes r_4$, $a_{12} = -r_0r_1 \otimes \overline{r_2r_3} \otimes r_4$, ..., $a_{43} = -r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes r_2(r_3r_4)$. Entonces $b_2'b_3'(r) = V_1 + V_2 + V_3 = 0$ pues

$$\begin{aligned}
V_1 &= \sum_{i=0}^{3} a_{4-i,1} + \sum_{i=2}^{3} a_{1,i} = 0, \\
V_2 &= \sum_{i=0}^{2} a_{4-i,2} + \sum_{i=3}^{3} a_{2,i} = [a_{42} + (a_{32} + a_{22}) + a_{23}] = 0 \text{ por } (3.22), \\
V_3 &= \sum_{i=0}^{1} a_{4-i,3} + \sum_{i=4}^{3} a_{3,i} = 0;
\end{aligned}$$

$$\text{en forma abreviada, } V_j = \sum_{i=0}^{4-j} a_{4-i,j} + \sum_{i=j+1}^{3} a_{ji} = 0 \text{ para } j = 1, 2, 3. \qquad (3.23)$$

En general, para $r = r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n+1}} \otimes r_{n+2} \in B_{n+1}(E)$ se tiene

$$\begin{aligned}
b_{n+1}'(r) &= r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n+1}} \otimes r_{n+2} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes \overline{r_ir_{i+1}} \otimes \cdots \otimes r_{n+2} \\
&+ (-1)^{n+1} r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}r_{n+2}\ , \text{ luego}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b'_n b'_{n+1}(r) &= (r_0r_1)r_2\otimes\overline{r_{3,n+1}}\otimes r_{n+2}+\cdots+(-1)^n r_0r_1\otimes\overline{r_{2,n}}\otimes r_{n+1}r_{n+2}\\
&+ (-1)^1 r_0(r_1r_2)\otimes\overline{r_{3,n+1}}\otimes r_{n+2}+\cdots\\
&\vdots\\
&+ \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{2n} r_0\otimes\overline{r_{1,n-1}}\otimes r_n(r_{n+1}r_{n+2})\\
&+ (-1)^{n+1} r_0r_1\otimes\overline{r_{2,n}}\otimes r_{n+1}r_{n+2}+\cdots+(-1)^{2n+1} r_0\otimes\overline{r_{1,n-1}}\otimes r_n(r_{n+1}r_{n+2}),
\end{aligned}$$

donde $\overline{r_{3,n+1}}=\overline{r_3}\otimes\cdots\otimes\overline{r_{n+1}}$. Con el argumento anterior, asociando a $b'_n b'_{n+1}(r)$ la matriz $A_{(n+2)\times(n+1)}=(a_{ij})$, donde $a_{11}=(r_0r_1)r_2\otimes\overline{r_{3,n+1}}\otimes r_{n+2},\ \ldots,$
$a_{n+2,n+1}=(-1)^{2n+1}r_0\otimes\overline{r_{1,n-1}}\otimes r_n(r_{n+1}r_{n+2})$, se deduce que $b'_n b'_{n+1}(r)=\sum_{k=1}^{n+1}V_k=0$ pues $V_j=\sum_{i=0}^{n+2-j}a_{n+2-i,j}+\sum_{i=j+1}^{n+1}a_{ji}=0$ para $j=1,\ldots,n+1$ [ver (3.23)]. $\square$

Así, se obtiene el complejo barra normalizado de E:

$$(B_*(E),b')\ :\ B_0(E)\overset{b'_1}{\leftarrow}\cdots\overset{b'_n}{\leftarrow}B_n(E)\overset{b'_{n+1}}{\leftarrow}\cdots \tag{3.24}$$

Considerando la multiplicación $\mu: E\otimes E=B_0(E)\to E$, $r\otimes s\mapsto rs$ se ve que

$$\begin{tikzcd}
E\otimes\overline{E}\otimes E \arrow[r, "b'_1"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & E\otimes E \arrow[r, "\mu"] & E
\end{tikzcd}$$

ya que $\mu b'_1(r\otimes\overline{s}\otimes t)=\mu((rs)\otimes t-r\otimes(st))=(rs)t-r(st)=0$.
Luego, se obtiene un complejo aumentado de $B_*(E)$ denotado por

$$\overline{B_*(E)}\ :\ E\overset{\mu}{\leftarrow}E\otimes E\overset{b'_1}{\leftarrow}\cdots\overset{b'_n}{\leftarrow}E\otimes\overline{E}^{\otimes^n}\otimes E\overset{b'_{n+1}}{\leftarrow}\cdots. \tag{3.25}$$

Teorema 3.3.3. *Sea E una $K-$álgebra. Entonces el complejo $(B_*(E),b')$ es una resolución del E^e-módulo izquierdo E.*

Prueba. Para ver que $(B_*(E),b')$ es la resolución del E^e-módulo izquierdo E, se muestra que $\overline{B_*(E)}$ es contráctil.
Para ello se define, una homotopía de contracción de cadenas
$\xi_0: E\to E\otimes E$, $r\mapsto r\otimes 1$; para $n\geq 1$, $\xi_n: E\otimes\overline{E}^{\otimes^{n-1}}\otimes E\to E\otimes\overline{E}^{\otimes^n}\otimes E$,
$r_0\otimes\overline{r_1}\otimes\cdots\otimes\overline{r_{n-1}}\otimes r_n\mapsto(-1)^n r_0\otimes\overline{r_1}\otimes\cdots\otimes\overline{r_{n-1}}\otimes\overline{r_n}\otimes 1$.
En efecto : $\mu\xi_0=id_E$ pues para $r\in E$ se tiene $\mu\xi_0(r)=\mu(r\otimes 1)=r=id_E(r)$;

$b'_1\xi_1 + \xi_0\mu = id_{B_0(E)}$ pues para $r_0 \otimes r_1 \in E \otimes E = B_0(E)$ se tiene $\xi_0\mu(r_0 \otimes r_1) = r_0r_1 \otimes 1$ y $b'_1\xi_1(r_0 \otimes r_1) = -r_0r_1 \otimes 1 + r_0 \otimes r_1$, de modo que $(b'_1\xi_1 + \xi_0\mu)(r_0 \otimes r_1) = id_{B_0(E)}(r_0 \otimes r_1)$. En general, para $n \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
& (b'_{n+1}\xi_{n+1} + \xi_n b'_n)(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) \\
= \; & b'_{n+1}((-1)^{n+1} r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes \overline{r_{n+1}} \otimes 1) \\
+ \; & \xi_n[r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes \overline{r_ir_{i+1}} \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \\
+ \; & (-1)^n r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n-1}} \otimes r_nr_{n+1}] = (-1)^{n+1}[r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n+1}} \otimes 1 \\
+ \; & \sum_{j=1}^{n}(-1)^j r_0 \otimes \cdots \otimes \overline{r_ir_{i+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n+1}} \otimes 1 \\
+ \; & (-1)^{n+1} r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}] + (-1)^n[r_0r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n+1}} \otimes 1 \\
+ \; & \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes \overline{r_ir_{i+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n+1}} \otimes 1 \\
+ \; & (-1)^n r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_nr_{n+1}} \otimes 1] = id_{B_n(E)}(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}).
\end{aligned}$$

□

El complejo $B_*(E)$ se llama *resolución barra normalizada de* E.

A continuación, si M es un $E-$bimódulo, se desea establecer que la homología de Hochschild de E con coeficientes en M es la homología de $M \otimes_{E^e} B_*(E)$.

Definición 3.3.4. Dado $n \geq 0$, se define $D_n \subseteq C_n^{bar}(E)$ como *el* $K-$*submódulo generado por tensores elementales* $r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}$ *tal que existe al menos un índice* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *para el cual* $r_i = 1$. Es decir,

$$D_n = \langle r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1} \in E^{\otimes^{n+2}} \mid \#(i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } r_i = 1) \geq 1 \rangle.$$

Ejemplo 3.3.5. $b'_4(D_4) \subseteq D_3$, *donde la diferencial* b' *de* $C_*^{bar}(E)$ *es dada en* (3.15).

Sea $r = r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes r_4 \otimes r_5 \in D_4$ tal que $r_i = 1$ para algún $1 \leq i \leq 4$. Entonces

$b'_4(r) \in D_3$. Se consideran 4 casos :

$$\begin{aligned}
\text{Para } i=1,\ b'_4(r) &= r_0 \cdot 1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes r_4 \otimes r_5 - r_0 \otimes 1 \cdot r_2 \otimes r_3 \otimes r_4 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes 1 \otimes r_2 r_3 \otimes r_4 \otimes r_5 - r_0 \otimes 1 \otimes r_2 \otimes r_3 r_4 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes 1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes r_4 r_5 \in D_3 \ ; \\
\text{Para } i=2,\ b'_4(r) &= r_0 r_1 \otimes 1 \otimes r_3 \otimes r_4 \otimes r_5 - r_0 \otimes r_1 \cdot 1 \otimes r_3 \otimes r_4 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes r_1 \otimes 1 \cdot r_3 \otimes r_4 \otimes r_5 - r_0 \otimes r_1 \otimes 1 \otimes r_3 r_4 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes r_1 \otimes 1 \otimes r_3 \otimes r_4 r_5 \in D_3 \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } i=3,\ b'_4(r) &= r_0 r_1 \otimes r_2 \otimes 1 \otimes r_4 \otimes r_5 - r_0 \otimes r_1 r_2 \otimes 1 \otimes r_4 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 \cdot 1 \otimes r_4 \otimes r_5 - r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes 1 \cdot r_4 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes 1 \otimes r_4 r_5 \in D_3 \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } i=4,\ b'_4(r) &= r_0 r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes 1 \otimes r_5 - r_0 \otimes r_1 r_2 \otimes r_3 \otimes 1 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 r_3 \otimes 1 \otimes r_5 - r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \cdot 1 \otimes r_5 \\
&+ r_0 \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes 1 \cdot r_5 \in D_3 \ .
\end{aligned}$$

En resumen, $b'_4(r)$ puede ser expresado en la forma

$$b'_4(r) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin \{i, i-1\}}}^{4} (-1)^j r_0 \otimes \cdots \otimes r_j r_{j+1} \otimes \cdots \otimes r_5 \in D_3 \ , \ \forall\ 1 \leq i \leq 4$$

pues 1 aparece al menos una vez en cada tensor elemental.

Por construcción D_4 es E^e-submódulo de $C_4^{bar}(E)$. En general, D_n es E^e-submódulo de $C_n^{bar}(E)$.

Lema 3.3.6. *Sea* $D_* = \{D_n\}_{n \geq 0}$. *Entonces* (D_*, b') *es un subcomplejo de* $(C_*^{bar}(E), b')$.

Prueba. Para $n = 1$, $b'_1(D_1) \subseteq D_0$. Sea N el $K-$submódulo de E de la Proposición 3.1.12. Entonces, se nota que $D_0 = \{0\}$ y $b'_1 : D_1 = E \otimes N \otimes E \to D_0$ pues para $r = r_0 \otimes \lambda \otimes r_2 \in D_1$, $b'_1(r) = r_0 \cdot \lambda \otimes r_2 - r_0 \otimes \lambda \cdot r_2 = 0$.

Para $n \geq 2$, $b'_n(D_n) \subseteq D_{n-1}$.

En efecto, sea $r = r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1} \in D_n$ tal que $r_i = 1$ para algún $1 \leq i \leq n$. Como en el Ejemplo 3.3.5, $b'_n(r)$ se expresa en la forma

$$b'_n(r) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin \{i, i-1\}}}^{n} (-1)^j r_0 \otimes \cdots \otimes r_j r_{j+1} \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \in D_{n-1} \ , \ \forall\, 1 \leq i \leq n$$

pues 1 aparece al menos una vez en cada tensor elemental. □

Lema 3.3.7. *Sea E una $K-$álgebra. Entonces el complejo de E^e-módulos izquierdos (D_*, b') es contráctil.*

Prueba. Según la definición cada D_n es E^e-módulo izquierdo. Por ello, basta verificar que la homotopía de contracción ζ del Teorema 3.2.9 se induce al complejo (D_*, b'). Es decir, ζ tiene la propiedad $\zeta_{n+1}(D_n) \subseteq D_{n+1}$ para $n \geq 0$.

Para $n = 0$, $\zeta_1(D_0) \subseteq D_1$. Se nota que $D_0 = \{0\}$ y $\zeta_1 : D_0 \subseteq E \otimes E \to D_1$ pues para $0 = 1 \otimes 0 \in D_0$, $\zeta_1(1 \otimes 0) = -1 \otimes 0 \otimes 1 = 0$.

Para $n \geq 1$, $\zeta_{n+1}(D_n) \subseteq D_{n+1}$.

En efecto, sea $r = r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1} \in D_n$ tal que $r_i = 1$ para algún $1 \leq i \leq n$.

Puesto que $\zeta_{n+1}(r) = (-1)^{n+1} r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1} \otimes 1 \in E^{\otimes^{n+3}}$ con $r_i = 1$ para algún $1 \leq i \leq n+1$, $\zeta_{n+1}(r) \in D_{n+1}$.

Por el Teorema 3.2.9 para todo $n \geq 0$, $r \in C_n^{bar}(E)$ se tiene

$b'_{n+1}\zeta_{n+1}(r) + \zeta_n b'_n(r) = id_{C_n^{bar}(E)}(r)$. En particular, para $r \in D_n \subseteq C_n^{bar}(E)$, por el Lema 3.3.6 y el hecho que $\zeta_{n+1}(D_n) \subseteq D_{n+1}$ para $n \geq 0$, se deduce que

$$b'_{n+1}\zeta_{n+1}(r) + \zeta_n b'_n(r) = id_{D_n}(r) \text{ para } n \geq 0. \tag{3.26}$$

Por lo tanto $(D_*, b') \ : \ D_0 \overset{b'_1}{\leftarrow} \cdots \overset{b'_n}{\leftarrow} D_n \overset{b'_{n+1}}{\leftarrow} \cdots$ es un complejo contráctil en ${}_E\mathfrak{Ch}$. □

Lema 3.3.8. *Para cada $n \geq 0$, sea $\pi_n : E^{\otimes^{n+2}} \to E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$ dada por $r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1} \mapsto r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}$, donde $\pi_0 = id_{E \otimes E}$.*

Entonces $\pi : C_*^{bar}(E) \to B_*(E)$ es un morfismo de complejos de cadenas de E^e-módulos izquierdos.

Prueba. La aplicación π_n está definida sobre tensores elementales, luego admite una extensión $K-$lineal. Así, π_n preserva la adición.

Sea $\lambda \otimes \mu \in E^e$, entonces $\pi_n((\lambda \otimes \mu)(r)) = (\lambda \otimes \mu)\pi_n(r)$ para $r = r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\text{En efecto, } \pi_n((\lambda \otimes \mu)(r)) &= \pi_n((\lambda r_0) \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes (r_{n+1}\mu)) \\
&= (\lambda r_0) \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes (r_{n+1}\mu) \\
&= (\lambda \otimes \mu)(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) \\
&= (\lambda \otimes \mu)\pi_n(r)\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, π_n es un morfismo de E^e-módulos izquierdos. Para cada $n \geq 1$, el diagrama siguiente conmuta :

$$\begin{tikzcd}
E^{\otimes^{n+2}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "b'"'] & E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E \arrow[d, "b'"] \\
E^{\otimes^{n+1}} \arrow[r, "\pi"'] & E \otimes \overline{E}^{\otimes^{n-1}} \otimes E
\end{tikzcd}$$

Si $n = 1$, se ve que el diagrama conmuta pues $\pi_0 = id_{E \otimes E}$.

Si $n \geq 2$, para $r = r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1} \in E^{\otimes^{n+2}}$, usando (3.15) se obtiene

$$\begin{aligned}
\pi b'(r) &= r_0 r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes \overline{r_i r_{i+1}} \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \\
&+ (-1)^n r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n-1}} \otimes r_n r_{n+1} \\
&= b'(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes r_{n+1}) \\
&= b'\pi(r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_{n+1}) = b'\pi(r)\ .
\end{aligned}$$

Así, π es un morfismo de complejos de cadenas de E^e-módulos izquierdos. $\square$

Proposición 3.3.9. [22, Prop. 1.4.2] *Sean $f : L \to M$, $g : L \to N$ morfismos de $K-$módulos izquierdos, con g sobreyectivo. Entonces existe un único morfismo $h : N \to M$ de $K-$módulos izquierdos, tal que $f = h \circ g$ si y sólo si $Ker(g) \subseteq Ker(f)$*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & M \\
& N \arrow[ur, dotted, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 3.3.10. [23, Exer. B-5.10 pág.572] *Sean M y P, $K-$módulos sobre un anillo conmutativo K, $L \subseteq M$, $Q \subseteq P$ submódulos.*

Si $L \otimes P + M \otimes Q := \langle l \otimes p, m \otimes q \mid l \in L, p \in P, m \in M, q \in Q \rangle$ *es* $K-$*submódulo generado de* $M \otimes P$ *, entonces* $(M/L) \otimes (P/Q) \cong (M \otimes P)/(L \otimes P + M \otimes Q)$ *.*
En particular, si $Q = \{0\}$*,* $(M/L) \otimes P \cong \dfrac{M \otimes P}{L \otimes P}$*;* $L = \{0\}$*,* $M \otimes (P/Q) \cong \dfrac{M \otimes P}{M \otimes Q}$*.*

Prueba. Como $L \otimes P + M \otimes Q$ es submódulo de $M \otimes P$, se define la aplicación bilineal $\psi : M \times P \to (M \otimes P)/(L \otimes P + M \otimes Q)$ por $\psi(m,p) = \overline{m \otimes p}$.
La idea de la prueba es dada con el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
(m,p) \in M \times P \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & M \otimes P \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[ddl, "f"] & (M \otimes P)/(L \otimes P + M \otimes Q) \arrow[ddll, dotted, bend left, "h"] \\
(\overline{m}, \overline{p}) \in (M/L) \times (P/Q) \arrow[d, "\otimes"] \arrow[urr, "\Psi"] & & \\
\overline{m} \otimes \overline{p} \in (M/L) \otimes (P/Q) \arrow[uurr, dotted, "\cong", "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si $(\overline{m}, \overline{p}) = (\overline{m'}, \overline{p'})$, entonces $m = m' + l$ y $p = p' + q$; de modo que

$$\begin{aligned}
\psi(m,p) &= \psi(m' + l, p' + q) \\
&= \psi(m', p') + \psi(m', q) + \psi(l, p') + \psi(l, q) \\
&= \psi(m', p') + \overline{m' \otimes q} + \overline{l \otimes p'} + \overline{l \otimes q} \\
&= \psi(m', p').
\end{aligned}$$

El valor de ψ no depende de representantes, luego está definida la aplicación bilineal $\Psi : M/L \times P/Q \to (M \otimes P)/(L \otimes P + M \otimes Q)$ por $\Psi(\overline{m}, \overline{p}) = \psi(m,p) = \overline{m \otimes p}$.
Según la propiedad universal de $\otimes = \otimes_K$, existe una única aplicación $K-$lineal $\varphi : M/L \otimes P/Q \to (M \otimes P)/(L \otimes P + M \otimes Q)$ tal que $\Psi = \varphi \circ \otimes$.
Por otro lado, se definen aplicaciones $K-$lineales $f : M \otimes P \to M/N \otimes P/Q$, $m \otimes p \mapsto \overline{m} \otimes \overline{p}$; $g : M \otimes P \to (M \otimes P)/(L \otimes P + M \otimes Q)$, $m \otimes p \mapsto \overline{m \otimes p}$ tales que $Ker(g) \subseteq Ker(f)$. Por la Proposición 3.3.9 existe una única aplicación $K-$lineal $h : (M \otimes P)/(L \otimes P + M \otimes Q) \to M/N \otimes P/Q$ tal que $f = h \circ g$.

Por otro lado, $\varphi \circ h = id_{(M\otimes P)/(L\otimes P+M\otimes Q)}$ pues

$$\begin{aligned} \varphi \circ h(\overline{m \otimes p}) &= \varphi \circ h \circ g(m \otimes p) \\ &= \varphi \circ f(m \otimes p) \\ &= \varphi(\overline{m} \otimes \overline{p}) \\ &= \varphi \circ \otimes(\overline{m}, \overline{p}) = \Psi(\overline{m}, \overline{p}) = \overline{m \otimes p}. \end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $h \circ \varphi = id_{M/L\otimes P/Q}$. Por lo tanto, φ es isomorfismo de $K-$módulos. $\square$

Proposición 3.3.11. *El morfismo π de complejos del Lema 3.3.8, induce un isomorfismo entre los complejos de cadenas de E^e-módulos izquierdos $C_*^{bar}(E)/D_*$ y $B_*(E)$.*

Prueba. Para $n = 0$, $B_0(E) = E \otimes \overline{E}^{\otimes^0} \otimes E \cong E \otimes E$. Así, $B_0(E) \cong \dfrac{E \otimes E}{\{0\}} = \dfrac{C_0^{bar}(E)}{D_0}$.
Para $n = 1$, $B_1(E) = E \otimes \overline{E} \otimes E = E \otimes \dfrac{E}{N} \otimes E$ por la Proposición 3.1.12.
En el Lema 3.3.10 tomando $M = E$ y $P = E$, $L = N$; $\dfrac{E}{N} \otimes E \cong \dfrac{E \otimes E}{N \otimes E}$. Por un argumento análogo, $E \otimes (\dfrac{E}{N} \otimes E) \cong \dfrac{E^{\otimes^3}}{E \otimes N \otimes E}$. Así, $B_1(E) \cong \dfrac{C_1^{bar}(E)}{D_1}$, donde $D_1 = E \otimes N \otimes E$.
Para $n = 2$, haciendo $M = P = E$ y $L = Q = N$ en el Lema 3.3.10,

$$\overline{E}^{\otimes^2} = \frac{E}{N} \otimes \frac{E}{N} \cong (E \otimes E)/(N \otimes E + E \otimes N). \tag{3.27}$$

Aplicando el Lema 3.3.10,
$E \otimes \overline{E}^{\otimes^2} \otimes E \cong E^{\otimes^4}/(E \otimes N \otimes E^{\otimes^2} + E^{\otimes^2} \otimes N \otimes E)$. Así, $B_2(E) \cong \dfrac{C_2^{bar}(E)}{D_2}$, donde $D_2 = E \otimes N \otimes E^{\otimes^2} + E^{\otimes^2} \otimes N \otimes E$.

$$\begin{aligned} \text{Con el Lema 3.3.10 : } \overline{E}^{\otimes^3} &= (\frac{E}{N} \otimes \frac{E}{N}) \otimes \frac{E}{N} \\ &\cong E^{\otimes^3}/[(N \otimes E^{\otimes^2} + E \otimes N \otimes E) + E^{\otimes^2} \otimes N]. \end{aligned}$$

Así, $B_3(E) \cong \dfrac{C_3^{bar}(E)}{D_3}$, donde $D_3 = E \otimes N \otimes E^{\otimes^3} + E^{\otimes^2} \otimes N \otimes E^{\otimes^2} + E^{\otimes^3} \otimes N \otimes E$.
Para $n \geq 2$, asumiendo como hipótesis de inducción que

$$\overline{E}^{\otimes^n} \cong E^{\otimes^n}/(N \otimes E^{\otimes^{n-1}} + E \otimes N \otimes E^{\otimes^{n-2}} + \cdots + E^{\otimes^{n-1}} \otimes N) \tag{3.28}$$

y que $B_n(E) \cong \dfrac{C_n^{bar}(E)}{D_n}$, donde $D_n = \sum_{i=1}^{n} E \otimes \cdots \otimes N_i \otimes \cdots \otimes E$ y $N_i = N$ para $i = 1, \ldots, n$.
Aplicando el Lema 3.3.10 como en el cálculo de $B_2(E)$, se deduce que $B_{n+1}(E) \cong \dfrac{C_{n+1}^{bar}(E)}{D_{n+1}}$,

donde $D_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} E \otimes \cdots \otimes N_i \otimes \cdots \otimes E$ y $N_i = N$ para $i = 1, \ldots, n+1$.

Por otro lado, para cada $n \geq 0$, consideremos que $\alpha : D_n \to \mathrm{Ker}(\pi_n)$ es una inclusión debido a que un elemento de D_n es llevado por π_n a cero. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de E^e-módulos izquierdos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D_n \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha"] & E^{\otimes^{n+2}} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"] & (E^{\otimes^{n+2}})/D_n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\pi_n) \arrow[r] & E^{\otimes^{n+2}} \arrow[r, "\pi_n"] & E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La inclusión α es un isomorfismo gracias al lema de los 5. Por lo tanto, $D_n = \mathrm{Ker}(\pi_n)$. Como $\mathrm{Im}(\pi_n) = B_n(E)$, por el teorema fundamental del isomorfismo de módulos, se concluye que $\dfrac{C_n^{bar}(E)}{D_n} \cong B_n(E)$. $\square$

Teorema 3.3.12. *La homología del complejo $M \otimes_{E^e} B_*(E)$ proporciona la homología de Hochschild de E con coeficientes en M.*

Prueba. Por la versión normalizada del Teorema 3.2.12, los complejos de cadenas de E^e-módulos izquierdos $(M \otimes_K \overline{E}^{\otimes^*}, b)$ y $(M \otimes_{E^e} B_*(E), id_M \otimes_{E^e} (b'))$ son isomorfos.
Por la Proposición [20, Prop. 1.1.15] los complejos de cadenas de E^e-módulos izquierdos $(M \otimes_K E^{\otimes^*}, b)$ y $(M \otimes_K \overline{E}^{\otimes^*}, b)$ son casi-isomorfos. Recordando que $H_*(E, M)$ es la homología del complejo de cadenas $(M \otimes_K E^{\otimes^*}, b)$, puesto que la composición de casi-isomorfismos de complejos de cadenas es un casi-isomorfismo de complejos de cadenas, deducimos que la homología del complejo $M \otimes_{E^e} B_*(E)$ proporciona la homología de Hochschild de E con coeficientes en M. $\square$

3.4 Resolución del producto cruzado general

El método de construcción de una resolución proyectiva relativa de un producto cruzado general fue introducido en [1]. En esta sección, el propósito es proporcionar más detalles sobre la exposición descrita, introduciendo algunos ejemplos, lemas y proposiciones.
Sea K un anillo conmutativo y se consideran todas las álgebras sobre K. Sea C un álgebra

y H un álgebra de Hopf. Sea $E = C\#_f H$ un producto cruzado de Hopf.

Se va a obtener una resolución $(\mathscr{A}_*, d)$ del producto cruzado E, que es más pequeña que la resolución barra normalizada $(B_*(E), b')$ de E. Esta comparación se sigue del hecho de que $(\mathscr{A}_*, d)$ es un retracto por deformación de $(B_*(E), b')$. Este hecho significa que existe una terna de aplicaciones $\phi : \mathscr{A}_* \to B_*(E)$, $\psi : B_*(E) \to \mathscr{A}_*$ y $\omega_{+1} : B_*(E) \to B_{*+1}(E)$, tales que $\psi\phi = id$ y $\omega_{+1} : \phi\psi \simeq id$.

Inmersión en un producto cruzado para bimódulos

Proposición 3.4.1. [9, Prop. 6.1.10] *La aplicación $x \overset{\varpi}{\mapsto} x\#1_H$, de A en $A\#_f H$, es un morfismo inyectivo de $K-$álgebras.*

Prueba. 1) Se verifica que ϖ es un morfismo de $K-$álgebras :

Sean $x, y \in A$ y $\lambda \in K$, entonces $\varpi(\lambda x + y) = \lambda\varpi(x) + \varpi(y)$, pues

$$\begin{aligned} \varpi(\lambda x + y) = (\lambda x + y) \otimes 1_H &= \lambda(x \otimes 1_H) + y \otimes 1_H \\ &= \lambda\varpi(x) + \varpi(y) \ ; \end{aligned}$$

además $\varpi(xy) = \varpi(x)\varpi(y)$ ya que $\varpi(xy) = (xy) \otimes 1_H$ y

$$\begin{aligned} \varpi(x)\varpi(y) &= (x \otimes 1_H)(y \otimes 1_H), \text{ por (2.7):} \\ &= xy^{1_H^{(1)}} f(1_H^{(2)}, 1_H^{(1)}) \otimes 1_H^{(3)} 1_H^{(2)}, \text{como } 1_H^{(1)} = 1_H^{(2)} = 1_H^{(3)} = 1_H : \\ &= xy^{1_H} f(1_H, 1_H) \otimes 1_H 1_H \\ &= xy\varepsilon_H(1_H)1_A \otimes 1_H, \text{donde } \varepsilon_H \text{ counidad de } H \\ &= (xy) \otimes 1_H \ . \end{aligned}$$

2) ϖ es inyectivo. Sea $x \in \operatorname{Ker}(\varpi)$, entonces $x = 0$.

Por definición $\varpi(x) = x \otimes 1_H = 0$. Sea ε_H la counidad del álgebra de Hopf H.

Puesto que K es un anillo conmutativo, se nota que $A \otimes K \xrightarrow[\beta]{\sim} A$, $x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$.

Claramente $\beta \circ (id \otimes \varepsilon_H)$ es una aplicación $K-$lineal, luego $[\beta \circ (id \otimes \varepsilon_H)](0) = 0$.

Por lo tanto, $0 = \beta[id \otimes \varepsilon_H(x \otimes 1_H)] = \beta(x \otimes 1) = x$.

□

Lema 3.4.2. *El producto cruzado $E = A\#_f H$ tiene una estructura de $A-$módulo izquierdo dada por $c \cdot m = \varpi(c)m$.*

Prueba. Puesto que A es una $K-$álgebra, para $\lambda \in K$ y $m \in E$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \lambda m &= \lambda(1_E m) = (\lambda 1_E)m = (\lambda 1_A \# 1_H)m \\ &= \varpi(\lambda 1_A)m = \varpi(\eta_A(\lambda))m = \eta_A(\lambda) \cdot m. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Por la Definición 2.3.1, para que E sea un $A-$módulo izquierdo, resta verificar que se cumplen las 4 condiciones siguientes :

$(c_1+c_2)\cdot m = c_1 \cdot m + c_2 \cdot m$, $(c_1c_2)\cdot m = c_1 \cdot (c_2 \cdot m)$, $1 \cdot m = m$ y $c\cdot(m_1+m_2) = c\cdot m_1 + c\cdot m_2$ para todo $c_1, c_2, c \in A$ y todo m, m_1 y $m_2 \in E$.

Sólo se verifica el segundo axioma, $(c_1c_2)\cdot m = c_1 \cdot (c_2 \cdot m)$, como sigue :

$$\begin{aligned} (c_1c_2)\cdot m &= \varpi(c_1c_2)m = (c_1c_2\#1_H)(a\#h) \\ &= c_1c_2a^{1_H^{(1)}} f(1_H^{(2)}, h^{(1)})\#1_H^{(3)}h^{(2)} = (c_1c_2)af(1_H, h^{(1)})\#h^{(2)} \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 \cdot (c_2 \cdot m) &= \varpi(c_1)(\varpi(c_2)m), \text{donde } m = a\#h \\ &= (c_1\#1_H)(c_2af(1_H, h^{(1)})\#h^{(2)}) \\ &= (c_1\#1_H)(c_2a\varepsilon(h^{(1)})1_A\#h^{(2)}) \\ &= (c_1\#1_H)(c_2a\#h) = c_1(c_2a)f(1_H, h^{(1)})\#h^{(2)}. \end{aligned}$$

□

Análogamente, multiplicando por la derecha, se puede definir una estructura de $A-$módulo derecho para E.

Proposición 3.4.3. *Sea $E/A := E/Im(\varpi)$, entonces E/A es un $A-$módulo izquierdo dado por $c \cdot \overline{m} = \varpi(c)\overline{m}$.*

Prueba. Se define $\nu : A \otimes E/A \to E/A$ por $\nu(c \otimes \overline{m}) = \varpi(c)\overline{m}$. Se nota que ν es una aplicación $K-$lineal. Además, se verifica que

$$\begin{aligned} [\nu \circ (id_A \otimes \nu)](a \otimes b \otimes \overline{m}) &= \nu(a \otimes \varpi(b)\overline{m}) \\ &= \overline{\varpi(a)\varpi(b)m} = \overline{\varpi(ab)m} \\ &= \varpi(ab)\overline{m} = [\nu \circ (\mu_A \otimes id_{E/A})](a \otimes b \otimes \overline{m}); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\nu \circ (\eta_A \otimes id_{E/A})](\lambda \otimes \overline{m}) &= \nu(\eta_A(\lambda) \otimes \overline{m}) \\
&= \varpi(\eta_A(\lambda))\overline{m} \\
&= \overline{\varpi(\eta_A(\lambda))m} = \overline{\eta_A(\lambda) \cdot m} = \lambda\overline{m} \text{ por } (3.29).
\end{aligned}
$$

Por la Definición 2.3.1, E/A es un $A-$módulo izquierdo. □

Análogamente, se puede definir una estructura de $A-$módulo derecho para E/A.
Del lema anterior y la proposición anterior, por asociatividad de la multiplicación del producto cruzado $E = A\#_f H$, se sigue que E y E/A son $A-$bimódulos. Estos hechos son importantes para la construcción del diagrama (3.36).

Para cada $n \geq 0$, sea $P_n(E) = E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^n} \otimes_A E$ con estructura de $E-$bimódulo dada por las multiplicaciones por escalares

$$
\alpha(r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A r_{n+1}) = (\alpha r_0) \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A r_{n+1} \tag{3.30}
$$

$$
\text{y } (r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A r_{n+1})\beta = r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A (r_{n+1}\beta) \tag{3.31}
$$

Luego $P_n(E)$ posee una estructura de E^e-módulo izquierdo mediante

$$
(\alpha \otimes \beta)(r) = (\alpha r_0) \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A (r_{n+1}\beta), \tag{3.32}
$$

donde $r = r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A r_{n+1}$.
Se define el morfismo $b'_n : P_n(E) \to P_{n-1}(E)$ de E^e-módulos izquierdos por

$$
\begin{aligned}
b'_n(r) &= r_0 r_1 \otimes_A \overline{r_2} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A r_{n+1} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i r_0 \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_i r_{i+1}} \otimes_A \cdots \otimes_A r_{n+1} \\
&+ (-1)^n r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_{n-1}} \otimes_A r_n r_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

donde $r = r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \cdots \otimes_A \overline{r_n} \otimes_A r_{n+1}$.
Según el Ejemplo 3.3.1 para $n \geq 1$, b'_n está bien definida. Por el Lema 3.3.2 $b'_n b'_{n+1} = 0$ para $n \geq 1$. Así, se obtiene el complejo barra normalizado de $A \subseteq E$:

$$
(P_*(E), b') \ : \ P_0(E) \overset{b'_1}{\leftarrow} \cdots \overset{b'_n}{\leftarrow} P_n(E) \overset{b'_{n+1}}{\leftarrow} \cdots ; \tag{3.34}
$$

de modo que el complejo aumentado de $P_*(E)$ es denotado por

$$
\overline{P_*(E)} \ : \ E \overset{\widetilde{\mu}}{\leftarrow} E \otimes_A E \overset{b'_1}{\leftarrow} \cdots \overset{b'_n}{\leftarrow} E \otimes_A (E/A)^{(\otimes)^n_A} \otimes_A E \overset{b'_{n+1}}{\leftarrow} \cdots . \tag{3.35}
$$

Lema 3.4.4. *Sea* $E = A\#_f H$ *un producto cruzado,* $\otimes = \otimes_A$, $\overline{E} = E/A$ *y* $P_n(E) = E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes E$. *Entonces* $\overline{P_*(E)}$ *visto como complejo de* $E-$*módulos izquierdos es contráctil con homotopía de contracción* $\varsigma_0 : E \to E \otimes E$, $\varsigma_n : P_{n-1}(E) \to P_n(E)$ $(n \geq 1)$ *dada por* $\varsigma_0(r_0) = (-1)^0 r_0 \otimes 1$, $\varsigma_n(r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_{n-1}} \otimes r_n) = (-1)^n r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \cdots \otimes \overline{r_n} \otimes 1$.

Prueba. Se hace como en la prueba del Teorema 3.3.3. □

Corolario 3.4.5. *Sea* $E = A\#_f H$ *un producto cruzado. Entonces el complejo* $(P_*(E), b')$ *es una resolución del* E^e-*módulo izquierdo* E.

Prueba. Puesto que E es una $K-$álgebra, tomando $(P_*(E), b')$ en lugar de $(B_*(E), b')$ en el Teorema 3.3.3, por el lema anterior se sabe que $\overline{P_*(E)}$ es contráctil. Por lo tanto, $(P_*(E), b')$ es una resolución del E^e-módulo izquierdo E. □

La resolución proyectiva relativa $(\mathscr{A}_*, d)$

En esta parte se obtiene una resolución $(\mathscr{A}_*, d)$ de un producto cruzado $E = A\#_f H$ como un E^e-módulo izquierdo. Para ello, fijamos algunas notaciones que serán utilizados en (3.37) y en (3.38):

1. Para cada álgebra A, recordemos la Notación 3.1.13 de $\overline{A}$. Dado $c \in A$, también lo denotaremos con c, la clase de c en $\overline{A}$, a menos que sea necesario destacar.

2. Para cada $K-$módulo M se escribe $M^{\otimes^p} = M \otimes \cdots \otimes M$ ($p-$veces).
   Dado $m = m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \in M^{\otimes^p}$ y $1 \leq i < j \leq p$, se escribe $m_{i,j} = m_i \otimes \cdots \otimes m_j$.

Sean $B_q = E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes_A E$ $(q \geq 0)$ y $\mathscr{A}_{pq} = E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^p} \otimes E$ $(p, q \geq 0)$. Entonces se considera el diagrama de E^e-módulos izquierdos y morfismos de E^e-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d_2^B"'] & & & \\
B_1 \arrow[d, "d_1^B"'] & \mathscr{A}_{01} \arrow[l, "\rho_1"'] & \mathscr{A}_{11} \arrow[l, "d_{11}^0"'] & \cdots \arrow[l, "d_{21}^0"'] \\
B_0 & \mathscr{A}_{00} \arrow[l, "\rho_0"'] & \mathscr{A}_{10} \arrow[l, "d_{10}^0"'] & \cdots \arrow[l, "d_{20}^0"']
\end{tikzcd} \tag{3.36}$$

donde la primera columna (B_*, d^B) es $(P_*(E), b')$, la resolución normalizada de Hochschild de la inclusión de álgebras $A \subseteq E$, en el sentido relativo, introducido en [24, pág. 56, (1.2)]; para cada $q \geq 0$, el complejo $(\mathscr{A}_{*q}, d^0_{*q})$ es la resolución barra normalizada de A, tensorizado por la izquierda sobre A con $E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q}$, por la derecha sobre A con E; y para cada $q \geq 0$, la aplicación ρ_q es la proyección canónica.

Para cada $q \geq 0$ y $p \geq 1$ se puede definir el morfismo de E^e-módulos izquierdos $\mathscr{A}_{p-1,q} \xleftarrow{d^0_{pq}} \mathscr{A}_{p,q}$ por

$$\begin{aligned} d^0_{pq}(y) &= x_0 \otimes_A \cdots \otimes_A x_q c_1 \otimes \cdots \otimes c_p \otimes x_{q+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i x_{0,q} \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_i c_{i+1} \otimes \cdots \otimes c_p \otimes x_{q+1} \\ &+ (-1)^p x_{0,q} \otimes c_{1,p-1} \otimes c_p x_{q+1}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde $y = x_0 \otimes_A \cdots \otimes_A x_q \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_p \otimes x_{q+1} \in E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^p} \otimes E$.

Ejemplo 3.4.6. Se verifica que $\rho_1 d^0_{11} = 0$ y $d^0_{11} d^0_{21} = 0$.

Puesto que $B_1 = E \otimes_A (E/A) \otimes_A E \xleftarrow{\rho_1} \mathscr{A}_{01} \xleftarrow{d^0_{11}} \mathscr{A}_{11} = E \otimes_A (E/A) \otimes \overline{A} \otimes E$ para $x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2 \in \mathscr{A}_{11}$ se tiene $d^0_{11}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2) = x_0 \otimes_A x_1 c \otimes x_2 - x_0 \otimes_A x_1 \otimes c x_2$,

$$\begin{aligned} \rho_1 d^0_{11}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2) &= \rho_1(x_0 \otimes_A x_1 c \otimes x_2) - \rho_1(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c x_2) \\ &= x_0 \otimes_A x_1 c \otimes_A x_2 - x_0 \otimes_A x_1 \otimes_A c x_2 \\ &= 0 \text{ pues } x_1 \otimes_A c x_2 = x_1 c \otimes_A x_2 \,. \end{aligned}$$

Como $\mathscr{A}_{01} \xleftarrow{d^0_{11}} \mathscr{A}_{11} \xleftarrow{d^0_{21}} \mathscr{A}_{21} = E \otimes_A (E/A) \otimes \overline{A}^{\otimes^2} \otimes E$, se obtiene $d^0_{21}(y) = x_0 \otimes_A x_1 c_1 \otimes c_2 \otimes x_2 - x_0 \otimes_A x_1 \otimes c_1 c_2 \otimes x_2 + x_0 \otimes_A x_1 \otimes c_1 \otimes c_2 x_2$ para $y = x_0 \otimes_A x_1 \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes x_2$, luego

$$\begin{aligned} d^0_{11} d^0_{21}(y) &= x_0 \otimes_A x_1 c_1 c_2 \otimes x_2 - x_0 \otimes_A x_1 c_1 \otimes c_2 x_2 \\ &- x_0 \otimes_A x_1 c_1 c_2 \otimes x_2 + x_0 \otimes_A x_1 \otimes c_1 c_2 x_2 \\ &+ x_0 \otimes_A x_1 c_1 \otimes c_2 x_2 - x_0 \otimes_A x_1 \otimes c_1 c_2 x_2 = 0 \,. \end{aligned}$$

El siguiente lema afirma que la fila $q-$ésima del diagrama (3.36) es un complejo de cadenas de E^e-módulos izquierdos.

Lema 3.4.7. *Para cada $q \geq 0$, la aplicación $\mathscr{A}_{*-1,q} \xleftarrow{d^0_{*q}} \mathscr{A}_{*,q}$ dada en (3.37) está bien definida, además $d^0_{pq}d^0_{p+1,q} = 0$ para $p \geq 1$ y $\rho_q d^0_{1q} = 0$.*

Prueba. Se sigue del Ejemplo 3.3.1, el Lema 3.3.2 y del ejemplo anterior. □

Para que las filas del diagrama (3.36) sean contráctiles como complejos de $E-$módulos izquierdos, se definen las aplicaciones $h^0_{0q} : B_q \to \mathscr{A}_{0q}$ y $h^0_{p+1,q} : \mathscr{A}_{pq} \to \mathscr{A}_{p+1,q}$ para cada fila q, por $h^0_{0q}(x \otimes_A a\#h) = x_{0,q-1} \otimes_A x_q a \otimes 1\#h$,

$$h^0_{p+1,q}(x \otimes c \otimes a\#h) = (-1)^{p+1} x \otimes c \otimes a \otimes 1\#h, \tag{3.38}$$

donde $x = x_0 \otimes_A \cdots \otimes_A x_q \in E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q}$ y $c = c_1 \otimes \cdots \otimes c_p \in \overline{A}^{\otimes p}$.

Ejemplo 3.4.8. Para $(p,q) = (1,1)$ se tiene $d^0_{21}h^0_{21} + h^0_{11}d^0_{11} = id_{\mathscr{A}_{11}}$.
Además $\rho_1 h^0_{01} = id_{B_1}$.

Puesto que $\mathscr{A}_{11} = E \otimes_A (E/A) \otimes \overline{A} \otimes E$, $\mathscr{A}_{01} \underset{h^0_{11}}{\overset{d^0_{11}}{\leftrightarrows}} \mathscr{A}_{11} \underset{h^0_{21}}{\overset{d^0_{21}}{\leftrightarrows}} \mathscr{A}_{21}$, tomando $x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2 \in \mathscr{A}_{11}$ y $x_2 = a_2\#h_2$, se obtiene

$$\begin{aligned}
h^0_{21}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2) &= (-1)^2 x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes a_2 \otimes (1\#h_2);\\
d^0_{21}h^0_{21}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2) &= d^0_{21}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes a_2 \otimes (1\#h_2))\\
&= x_0 \otimes_A x_1 c \otimes a_2 \otimes (1\#h_2)\\
&- x_0 \otimes_A x_1 \otimes c a_2 \otimes (1\#h_2) + x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes (a_2\#h_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^0_{11}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2) &= (x_0 \otimes_A x_1)c \otimes x_2 - x_0 \otimes_A x_1 \otimes c x_2\\
&= x_0 \otimes_A x_1 c \otimes x_2 - x_0 \otimes_A x_1 \otimes c x_2;
\end{aligned}$$

se observa que $cx_2 = ca_2\#h_2$, de modo que

$$\begin{aligned}
h^0_{11}d^0_{11}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c \otimes x_2) &= h^0_{11}(x_0 \otimes_A x_1 c \otimes x_2) - h^0_{11}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c x_2)\\
&= (-1)(x_0 \otimes_A x_1 c \otimes a_2 \otimes (1\#h_2)\\
&- (-1)(x_0 \otimes_A x_1 \otimes c a_2 \otimes (1\#h_2).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $d^0_{21}h^0_{21} + h^0_{11}d^0_{11} = id_{\mathscr{A}_{11}}$.
Tomando $x_2 = a\#h$, $\rho_1 h^0_{01}(x_0 \otimes_A x_1 \otimes_A x_2) = \rho_1(x_0 \otimes_A x_1 a \otimes (1\#h)) = x_0 \otimes_A x_1 \otimes_A x_2$.

El siguiente lema afirma que la fila $q-$ésima del diagrama (3.36) es contráctil como complejo de cadenas de $E-$módulos izquierdos. La prueba de este resultado es análoga a la prueba del Teorema 3.3.3.

Lema 3.4.9. *Para cada $q \geq 0$, $h^0_{*+1,q}$ es una homotopía de contracción de*

$$B_q \xleftarrow{\rho_q} \mathscr{A}_{0q} \xleftarrow{d^0_{1q}} \mathscr{A}_{1q} \xleftarrow{d^0_{2q}} \cdots \xleftarrow{d^0_{pq}} \mathscr{A}_{pq} \xleftarrow{d^0_{p+1,q}} \cdots$$

en ${}_E\mathfrak{Ch}$.

Prueba. Usando (3.37), (3.38); procediendo como en el ejemplo anterior se verifican las igualdades $\rho_q h^0_{0q} = id_{B_q}$, $d^0_{1,q}h^0_{1,q} + h^0_{0q}\rho_q = id_{\mathscr{A}_{0q}}$ y $d^0_{p+1,q}h^0_{p+1,q} + h^0_{pq}d^0_{pq} = id_{\mathscr{A}_{pq}}$ para $p \geq 1$. Observando (3.38) se ve que h^0_{0q}, $h^0_{p+1,q}$ preservan la $E-$linealidad izquierda. Así, queda establecido el enunciado del lema. $\square$

Lema 3.4.10. *Los $E-$bimódulos $\mathscr{A}_{pq} = E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^p} \otimes E$ y $E \otimes \overline{H}^{\otimes^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^p} \otimes E$ son isomorfos .*

Prueba. Es suficiente mostrar que dichos objetos son isomorfos como $K-$módulos .

$$\begin{aligned}
\text{Por la Proposición 3.4.3 } E/A &:= E/\mathrm{Im}(\varpi) = A\#_f H/\langle a\#1_H \mid a \in A\rangle \\
&= \frac{A \otimes_K H}{A \otimes_K K1_H} \\
&\cong A \otimes_K \frac{H}{K1_H} \text{ por el Lema 3.3.10} \\
&= A \otimes_K \overline{H}. \text{ Así, } E/A \cong A \otimes_K \overline{H} \ .
\end{aligned}$$

Por asociatividad $E \otimes_A E/A \cong E \otimes_A (A \otimes_K \overline{H}) \cong E \otimes_K \overline{H}$.
Por hipótesis inductiva, $E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^{q-1}} \cong E \otimes \overline{H}^{\otimes^{q-1}}$ para $q - 1 \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Entonces } E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} &= E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^{q-1}} \otimes_A (E/A) \\
&\cong E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^{q-1}} \otimes_A (A \otimes_K \overline{H}) \text{ por asociatividad:} \\
&\cong E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^{q-1}} \otimes_K \overline{H}) \text{ por hipótesis inductiva:} \\
&= (E \otimes \overline{H}^{\otimes^{q-1}}) \otimes_K \overline{H} = E \otimes \overline{H}^{\otimes^q}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{A}_{pq} \cong (E \otimes \overline{H}^{\otimes^q}) \otimes \overline{A}^{\otimes^p} \otimes E = E \otimes \overline{H}^{\otimes^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^p} \otimes E$. $\square$

Lema 3.4.11. *Si N es un $E-$módulo izquierdo, entonces $E \otimes N \otimes E \cong E^e \otimes_E N$ como E^e-módulo izquierdo.*

Prueba. Tomando $R = E$ y $S = E^e$ en la Proposición 1.2.1 $E^e \otimes_E N$ es un E^e-módulo izquierdo bajo $(\alpha' \otimes \beta')[(\alpha \otimes \beta) \otimes_E n] = (\alpha'\alpha \otimes \beta' \cdot \beta) \otimes_E n$.
Sea $\varphi : E^e \otimes_E N \to E \otimes N \otimes E$ dada por $\varphi((\alpha \otimes \beta) \otimes_E n) = \alpha \otimes n \otimes \beta$,
$\psi : E \otimes N \otimes E \to E^e \otimes_E N$ dada por $\psi(\alpha \otimes n \otimes \beta) = (\alpha \otimes \beta) \otimes_E n$. Entonces $\psi\varphi = id$, $\varphi\psi = id$.
Recordando la estructura de E^e-módulo izquierdo de $E \otimes N \otimes E$,
$(\alpha' \otimes \beta')(\alpha \otimes n \otimes \beta) = (\alpha'\alpha) \otimes n \otimes (\beta\beta')$, se sigue que :

$$\begin{aligned}
\varphi((\alpha' \otimes \beta')[(\alpha \otimes \beta) \otimes_E n]) &= \varphi((\alpha'\alpha \otimes \beta' \cdot \beta) \otimes_E n) \\
&= (\alpha'\alpha) \otimes n \otimes (\beta\beta') \\
&= (\alpha' \otimes \beta')(\alpha \otimes n \otimes \beta) = (\alpha' \otimes \beta')\varphi((\alpha \otimes \beta) \otimes_E n) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi((\alpha' \otimes \beta')(\alpha \otimes n \otimes \beta)) &= \psi((\alpha'\alpha) \otimes n \otimes (\beta\beta')) = (\alpha'\alpha \otimes \beta\beta') \otimes_E n \\
&= (\alpha'\alpha \otimes \beta' \cdot \beta) \otimes_E n = (\alpha' \otimes \beta')[(\alpha \otimes \beta) \otimes_E n] \\
&= (\alpha' \otimes \beta')\psi(\alpha \otimes n \otimes \beta) \ .
\end{aligned}$$

Así, ψ es un isomorfismo de E^e-módulos izquierdos. Es decir, $E \otimes N \otimes E \cong E^e \otimes_E N$. □

Por lo tanto, el diagrama (3.36) satisface las tres condiciones siguientes:

1) El complejo barra normalizado $(P_*(E), b')$ de $A \subseteq E$ dado en (3.34) es un complejo de E^e-módulos izquierdos, luego la primera columna del diagrama es un complejo de E^e-módulos izquierdos. Por el Lema 3.4.7, las filas del diagrama son complejos de E^e-módulos izquierdos.

2) Dados $p,\ q \geq 0$, tomando en el Lema 3.4.10 $\overline{\mathscr{A}_{pq}} = \overline{H}^{\otimes q} \otimes \overline{A}^{\otimes p}$ como $K-$módulo con estructura de $E-$módulo izquierdo trivial, por el Lema 3.4.11 se sigue que existen $\overline{\mathscr{A}_{pq}} \in |\mathfrak{m}^l_E|$, morfismos $s_{pq} \in \mathfrak{m}^l_{E^e}(\mathscr{A}_{pq}, E^e \otimes_E \overline{\mathscr{A}_{pq}})$ y $t_{pq} \in \mathfrak{m}^l_{E^e}(E^e \otimes_E \overline{\mathscr{A}_{pq}}, \mathscr{A}_{pq})$ tales que $t_{pq}s_{pq} = id_{\mathscr{A}_{pq}}$.

3) Por el Lema 3.4.9 cada fila del diagrama es contráctil como complejo de $E-$módulos izquierdos. Luego, para cada $q \geq 0$, la fila q de diagrama (3.36) es contráctil en ${}_E\mathfrak{Ch}$ con una homotopía de contracción $h^0_{0q} : B_q \to \mathscr{A}_{0q}$ y $h^0_{p+1,q} : \mathscr{A}_{pq} \to \mathscr{A}_{p+1,q}$ $(p \geq 0)$.

Así, este diagrama se encuentra en la situación considerada en (1.5) donde $R = E$ y $S = E^e$. Entonces se definen como en la Definición 1.4.1 las aplicaciones de E^e-módulos izquierdos $d^r_{pq} : \mathscr{A}_{pq} \to \mathscr{A}_{p+r-1,q-r}$ $(p \geq 0,\ 1 \leq r \leq q)$ recursivamente, por

$$d^r_{pq}(x) = \begin{cases} -h^0_{0,q-1} d^B_q \rho_q(x) & \text{si } p = 0 \text{ y } r = 1, \\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} h^0_{r-1,q-r} d^{r-k}_{k-1,q-k} d^k_{0q}(x) & \text{si } p = 0 \text{ y } 1 < r \leq q, \\ -\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} h^0_{p+r-1,q-r} d^{r-k}_{p+k-1,q-k} d^k_{pq}(x) & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

para $x \in E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^p} \otimes K$.

Teorema 3.4.12. [1, Theo. 1.1.1] *Existe una resolución $\mathscr{E}'-$proyectiva de E*

$$E \xleftarrow{\mu} \mathscr{A}_0 \xleftarrow{d_1} \mathscr{A}_1 \xleftarrow{d_2} \mathscr{A}_2 \xleftarrow{d_3} \mathscr{A}_3 \xleftarrow{d_4} \cdots, \tag{3.39}$$

donde $\mu : \mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_{00} \to E$ es la aplicación multiplicación, $\mathscr{A}_n = \bigoplus_{p+q=n} \mathscr{A}_{pq}$ y

$$d_n = \sum_{r=1}^{n} d^r_{0n} + \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=0}^{n-p} d^r_{p,n-p}\ .$$

Prueba. Del hecho que la multiplicación en E es asociativa, se deduce que $\widetilde{\mu} : B_0 = E \otimes_A E \to E$, $a \otimes_A b \mapsto ab$, es un morfismo de E^e-módulos izquierdos. Entonces el complejo de E^e-módulos izquierdos

$$E \xleftarrow{\widetilde{\mu}} B_0 \xleftarrow{d^B_1} B_1 \xleftarrow{d^B_2} B_2 \xleftarrow{d^B_3} B_3 \xleftarrow{d^B_4} \cdots, \tag{3.40}$$

es dado en (3.35), el cual es contráctil como complejo de $E-$módulos izquierdos, pues según el Lema 3.4.4 la familia de morfismos de $E-$módulos izquierdos $f_0 : E \to B_0$ y $f_{q+1} : B_q \to B_{q+1}$, dada por $f_{q+1}(x) = (-1)^{q+1} x \otimes_A 1_E$ para $q \geq -1$, es una homotopía de contracción de cadenas. Puesto que existe $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{m}^l_{E^e}(B_0, E)$ tal que el complejo (3.40) es contráctil como complejo de $E-$módulos izquierdos, por el Corolario 1.4.14 el complejo (3.39), donde $\mu = \widetilde{\mu}\rho_0$, es una resolución $\mathscr{E}'-$proyectiva de E. $\square$

Observación 3.4.13. Sean $h^r_{r,q-r} : B_q \to \mathscr{A}_{r,q-r}$ y $h^r_{p+r+1,q-r} : \mathscr{A}_{pq} \to \mathscr{A}_{p+r+1,q-r}$ aplicaciones definidas como en la Definición 1.4.6 recursivamente por

$$h^r_{p+r+1,q-r} = -\sum_{i=0}^{r-1} h^0_{p+r+1,q-r} d^{r-i}_{p+i+1,q-i} h^i_{p+i+1,q-i} \quad (0 < r \leq q,\ p \geq -1). \tag{3.41}$$

Se prueba como en el Corolario 1.4.14, que la familia $g_0 : E \to \mathscr{A}_0$ y $g_{n+1} : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_{n+1}$, definida por $g_0 = h^0_{00} f_0$ y

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= -\sum_{r=0}^{n+1} h^r_{r,n+1-r} f_{n+1} \rho_n + \sum_{p=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-p} h^r_{p+r+1,n-p-r} \qquad (n \geq 0), \\ &= -\widehat{h}_{n+1} f_{n+1} \rho_n + \widetilde{h}_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

es una homotopía de contracción de la resolución (3.39) introducida en el Teorema 3.4.12.

Comparación de $(\mathscr{A}_*, d)$ con la resolución barra normalizada $(B_*(E), b')$

Recuerde que $(B_*(E), b')$ es la resolución barra normalizada de E. Teniendo en cuenta la prueba del Teorema 3.3.3 se sabe que el complejo

$$E \xleftarrow{\mu} B_0(E) \xleftarrow{b'_1} B_1(E) \xleftarrow{b'_2} B_2(E) \xleftarrow{b'_3} \cdots$$

es contráctil como un complejo de $E-$módulos izquierdos, con homotopía de contracción $\xi_n(x) = (-1)^n x \otimes 1_E$. Sea g la homotopía de contracción de (3.39) introducida en la Observación 3.4.13.

Lema 3.4.14. *Se cumple* $g_{n+2}\Big(E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1-q}} \otimes K\Big) = 0$ *para* $0 \leq q \leq n+1$.

Prueba. Para $n = 0$, $g_2 : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ es tal que $g_2\Big(E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{1-q}} \otimes K\Big) = 0$ para $0 \leq q \leq 1$. En efecto, si $q = 0$, $a = r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes 1 \in E \otimes \overline{A} \otimes K$, por (3.42):

$$\begin{aligned} g_2(a) = g_2(0,a) &= -\widehat{h}_2 f_2 \varrho_1(0,a) + \widetilde{h}_2(0,a) \\ &= -\widehat{h}_2 f_2 \rho_1(0) + (h^0_{11} + h^1_{20})(0) + h^0_{20}(a) \\ &= h^0_{20}(a) = (-1)^2 r_0 \otimes \overline{r_1} \otimes \overline{1} \otimes 1 = 0 \text{ por (3.38)}\ ; \end{aligned}$$

Si $q=1$, $a = r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes 1 \in E \otimes_A (E/A) \otimes K$:

$$\begin{aligned} g_2(a) = g_2(a,0) &= -\widehat{h}_2 f_2 \varrho_1(a,0) + \widetilde{h}_2(a,0) \\ &= -\widehat{h}_2 f_2 \rho_1(a) + h^0_{11} a + h^1_{20} a + h^0_{20}(0), \text{ por (3.41):} \\ &= -\widehat{h}_2 f_2 (r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A 1) + h^0_{11} a - h^0_{20} d^1_{11} h^0_{11} a, \; h^0_{11} a = 0 : \\ &= -\widehat{h}_2((-1)^2 r_0 \otimes_A \overline{r_1} \otimes_A \overline{1} \otimes_A 1) + 0 = -\widehat{h}_2(0) = 0. \end{aligned}$$

En general, $g_{n+2} : \mathscr{A}_{n+1} \to \mathscr{A}_{n+2}$,
$E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1-q}} \otimes K \subseteq E \otimes_A (E/A^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1-q}} \otimes E \subseteq \mathscr{A}_{n+1}$ para $0 \leq q \leq n+1$. Siguiendo el procedimiento para el caso $n=0$, usando el Lema 3.4.4, (3.38) y (3.41) se prueba la afirmación. □

Sean $\phi : (\mathscr{A}_*, d) \to (B_*(E), b')$ y $\psi : (B_*(E), b') \to (\mathscr{A}_*, d)$ los morfismos de complejos de $E-$bimódulos, recursivamente definidos por $\phi_0 = id$, $\psi_0 = id$;
$\phi_{n+1}(x \otimes 1) = \xi_{n+1} \phi_n d_{n+1}(x \otimes 1)$ y $\psi_{n+1}(y \otimes 1) = g_{n+1} \psi_n b'_{n+1}(y \otimes 1)$.

Proposición 3.4.15. [1, P 1.2.1] *Se tiene $\psi\phi = id$ y $\phi\psi$ es homotópica a la aplicación identidad. La homotopía $\phi\psi \overset{\omega_{+1}}{\to} id$ es recursivamente definida por $\omega_1 = 0$ y*
$\omega_{n+1}(x) = \xi_{n+1}(\phi_n \psi_n - id - \omega_n b'_n)(x)$, para $x \in E \otimes \overline{E}^{\otimes^n} \otimes K$.

Prueba. Se prueban ambas afirmaciones por inducción:

1) Se prueba que $\psi\phi = id$.
   Por definición $\psi_0\phi_0 = id_0$. Se asume como hipótesis inductiva que $\psi_n\phi_n = id_n$.
   Entonces $\psi_{n+1}\phi_{n+1} = id_{n+1}$ sobre $E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1-q}} \otimes K$.
   En efecto, puesto que $b'_n \phi_n d_{n+1} = b'_n b'_{n+1} \phi_{n+1} = 0$ y

$$\phi_{n+1}(E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1-q}} \otimes K) \subseteq E \otimes \overline{E}^{\otimes^{n+1}} \otimes K,$$

   sobre $E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1-q}} \otimes K$ se tiene que,

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}\phi_{n+1} &= g_{n+1} \psi_n b'_{n+1} \phi_{n+1} \\ &= g_{n+1} \psi_n (b'_{n+1} \xi_{n+1}) \phi_n d_{n+1}, \quad b'_{n+1} \xi_{n+1} = id_n - \xi_n b'_n \\ &= g_{n+1} \psi_n \phi_n d_{n+1} - g_{n+1} \psi_n \xi_n (b'_n \phi_n d_{n+1}) \\ &= g_{n+1} d_{n+1} = id_{n+1} - d_{n+2} g_{n+2}. \end{aligned}$$

Según el Lema 3.4.14, se sabe que $g_{n+2}(E \otimes_A (E/A)^{(\otimes_A)^q} \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1-q}} \otimes K) = 0$. Así, $\psi_{n+1}\phi_{n+1} = id_{n+1}$.

2) ω_{+1} es una homotopía entre $\phi\psi$ e id.

Claramente, $b'_1\omega_1 + \omega_0 b'_0 = 0 = \phi_0\psi_0 - id_0$ ya que $\omega_1 = 0$ y $b'_0 = 0$.

Sean $\varphi_n = \phi_n\psi_n - id_n$ y $\vartheta_n = \varphi_n - \omega_n b'_n$, entonces $\omega_{n+1} := \xi_{n+1}\vartheta_n$. Se asume como hipótesis inductiva que $b'_{n+1}\omega_{n+1} + \omega_n b'_n = \varphi_n$ para $n \geq 0$

$$
\begin{tikzcd}
B_{n-1}(E) \arrow[drr, "\omega_n"'] & & B_n(E) \arrow[ll, "b'_n"'] \arrow[d, shift right, "\phi_n\psi_n"'] \arrow[d, shift left, "id_n"] \arrow[drr, "\omega_{n+1}"'] & & B_{n+1}(E) \arrow[ll, "b'_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "\phi_{n+1}\psi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "id_{n+1}"] \arrow[drr, "\omega_{n+2}"] & & \\
& & B_n(E) \arrow[rr, shift left, "\xi_{n+1}"] & & B_{n+1}(E) \arrow[ll, shift left, "b'_{n+1}"] \arrow[rr, shift left, "\xi_{n+2}"] & & B_{n+2}(E) \arrow[ll, shift left, "b'_{n+2}"]
\end{tikzcd}
$$

Luego, se obtiene sobre $E \otimes \overline{E}^{\otimes^{n+1}} \otimes K$ que

$$
\begin{aligned}
b'_{n+2}\omega_{n+2} + \omega_{n+1}b'_{n+1} &:= (b'_{n+2}\xi_{n+2})\vartheta_{n+1} + \omega_{n+1}b'_{n+1}, \quad b'_{n+2}\xi_{n+2} = id_{n+1} - \xi_{n+1}b'_{n+1} : \\
&= \vartheta_{n+1} - \xi_{n+1}b'_{n+1}\vartheta_{n+1} + \omega_{n+1}b'_{n+1} \\
&= -\xi_{n+1}b'_{n+1}\varphi_{n+1} + \xi_{n+1}(b'_{n+1}\omega_{n+1})b'_{n+1} + \varphi_{n+1}, \text{ hip. inductiva:} \\
&= -\xi_{n+1}b'_{n+1}\varphi_{n+1} + \xi_{n+1}\varphi_n b'_{n+1} - \xi_{n+1}\omega_n b'_n b'_{n+1} + \varphi_{n+1} \\
&= \varphi_{n+1} \text{ pues } b'_{n+1}\varphi_{n+1} = \varphi_n b'_{n+1} \text{ y } b'_n b'_{n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $b'_{n+2}\omega_{n+2} + \omega_{n+1}b'_{n+1} = \varphi_{n+1} = \phi_{n+1}\psi_{n+1} - id_{n+1}$ sobre $B_{n+1}(E)$. $\square$

Observación 3.4.16. La igualdad $\psi\phi = id$ implica que ϕ es inyectiva. Como $\mathrm{Im}(\phi_n) = \phi_n(\mathscr{A}_n) \subseteq B_n(E)$, $\forall n \geq 0$, $(B_*(E), b')$ contiene una copia isomorfa de $(\mathscr{A}_*, d)$. Por lo tanto, la resolución proyectiva relativa de un producto cruzado E es más pequeña que la resolución barra normalizada de E.

3.5 Homología de Hochschild de un producto cruzado de Hopf

Para desarrollar esta sección, se han tomado como referencias principales [1], [6] y [7]. Dado un producto cruzado de Hopf $E = C\#_f H$ y un $E-$bimódulo M, se prueba que $M \otimes_{E^e} (\cdot)$ es un funtor covariante aditivo sobre $\mathfrak{m}^l_{E^e}$. Además, se comprueba que la homología de Hochschild de E con coeficientes en M es la homología de $M \otimes_{E^e} (\mathscr{A}_*, d)$. A partir de esto, se deduce que la homología de Hochschild de E con coeficientes en M es el valor del funtor derivado relativo izquierdo de $M \otimes_{E^e} (\cdot)$ en E.

Lema 3.5.1. *Para cada $E-$bimódulo M fijo,*

$$M \otimes_{E^e} (\cdot) : \mathfrak{m}^l_{E^e} \to \mathfrak{m}^l_{E^e}$$

es un funtor covariante aditivo.

Prueba. Se sigue de [10, Prop. III.7.1] que el funtor $M \otimes_{E^e} (\cdot) : \mathfrak{m}^l_{E^e} \to \mathfrak{Ab}$ es covariante.
Por otro lado, para cada $B \in |\mathfrak{m}^l_{E^e}|$, B es un $E-$bimódulo. Por las Proposiciones 3.1.9 y 3.1.7, se sigue que $M \otimes_{E^e} B \in |\mathfrak{m}^l_{E^e}|$.
Dado $g \in \mathrm{Hom}_{E^e}(B, B') = \mathfrak{m}^l_{E^e}(B, B')$, se define $(M \otimes_{E^e} g)$ por:

$$(M \otimes_{E^e} g)(m \otimes_{E^e} b) = m \otimes_{E^e} g(b), \text{ para } m \otimes_{E^e} b \in M \otimes_{E^e} B \ . \tag{3.43}$$

Afirmación : $(M \otimes_{E^e} g) \in \mathfrak{m}^l_{E^e}(M \otimes_{E^e} B, M \otimes_{E^e} B')$.
En efecto, se observa que $(M \otimes_{E^e} g)$ es un morfismo de $K-$módulos, luego preserva la suma. Por ello es suficiente, si $m \otimes_{E^e} b \in M \otimes_{E^e} B$ y $(s \otimes t) \in E^e$, verificar que

$$(M \otimes_{E^e} g)((s \otimes t)(m \otimes_{E^e} b)) = (s \otimes t)((M \otimes_{E^e} g)(m \otimes_{E^e} b)) \ .$$

En efecto, por la Proposición 3.1.9 se obtiene

$$\begin{aligned}
(M \otimes_{E^e} g)((s \otimes t)(m \otimes_{E^e} b)) &= (M \otimes_{E^e} g)(sm \otimes_{E^e} bt) \\
&= (sm) \otimes_{E^e} g(bt), \ g \text{ es un morfismo de bimódulos y } t \in E: \\
&= (sm) \otimes_{E^e} [g(b)t] \\
&= (s \otimes t)((M \otimes_{E^e} g)(m \otimes_{E^e} b)) \ .
\end{aligned}$$

Usando (3.43) y tomando $g_1,\, g_2 \in \mathrm{Hom}_{E^e}(B, B')$ se obtiene
$M \otimes_{E^e} (g_1 + g_2) = (M \otimes_{E^e} g_1) + (M \otimes_{E^e} g_2)$. Por lo tanto, el funtor $M \otimes_{E^e} (\cdot)$ es aditivo. $\square$

Sea $A_*(E) = (\mathscr{A}_*, d)$ y $B_*(E) = (B_*(E), b')$. En la prueba del resultado siguiente utilizaremos abreviaturas ϕ *e.h.* para indicar que ϕ es una equivalencia homotópica; *r.p.r* para resolución proyectiva relativa de E; y *r.b.n* para resolución barra normalizada de E.

Teorema 3.5.2. *La homología de Hochschild de E con coeficientes en M es la homología de $M \otimes_{E^e} (\mathscr{A}_*, d)$, donde $E^e = E \otimes E^{op}$.*

Prueba. Como $E = C\#_f H$, sabemos que E es una $K-$álgebra. Con el siguiente diagrama hacemos la prueba, como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
A_*(E) \arrow[rr, bend left, "\text{P 3.4.15}", "\phi\ e.h." '] & E \arrow[l, "r.p.r." '] \arrow[r, "r.b.n" '] & B_*(E) & \cdots \arrow[d, Rightarrow, "M\otimes_{E^e}(\cdot)" ', "\text{L 3.5.1}"] \\
M \otimes_{E^e} A_*(E) \arrow[rr, "M\otimes_{E^e}\phi", "e.h." '] & & M \otimes_{E^e} B_*(E) & \cdots \arrow[d, Rightarrow, "H_*(\cdot)" '] \\
H_*\left(M \otimes_{E^e} A_*(E)\right) \arrow[rr, "H_*(M\otimes_{E^e}\phi)", "\sim" '] \arrow[dr, dotted, "\sim" '] & & H_*\left(M \otimes_{E^e} B_*(E)\right) \arrow[dl, "\text{T 3.3.12}" ', "\sim"] & {} \\
& H_*(E, M) & &
\end{tikzcd}
$$

Puesto que la composición de isomorfismos es un isomorfismo, queda probado el teorema. $\square$

Puesto que $E = A\#_f H$ es un producto cruzado de Hopf, E es una K-álgebra y existe un morfismo de anillos unitarios $\varrho : E \to E^e$.
Sea $\mathscr{E}'$ la clase proyectiva de epimorfismos de E^e-módulos izquierdos que se descomponen como morfismos de E-módulos izquierdos (Teorema 1.3.14).
Para un $E-$bimódulo M, se sabe que $M \otimes_{E^e} (-) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}') \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor aditivo entre categorías abelianas, entonces se definen los funtores $\mathscr{E}'$-derivados izquierdos de $M \otimes_{E^e} (-)$ como $Tor^{\varrho}_n(M, -) := L^{\mathscr{E}'}_n(M \otimes_{E^e} (-)),\ n = 0, 1, 2, \ldots$.
El funtor $Tor^{\varrho}_n(M, -)$ puede ser denotado por $\mathrm{Tor}^{(E^e,E)}_n(M, -)$ como en [10, pág. 319].

Corolario 3.5.3. *Sea K un anillo conmutativo, E un producto cruzado y M un $E-$bimódulo. Entonces $H_n(E,M) = Tor_n^{(E^e,E)}(M,E)$.*

Prueba. Por el teorema anterior $H_n(E,M) = H_n(M \otimes_{E^e} (\mathscr{A}_*, d)) = \mathrm{Tor}_n^{(E^e,E)}(M,E)$. □

Se sabe que la homología de Hochschild de un producto cruzado E es dada por $HH_*(E) = H_*(E,E)$ (ver Definición 3.2.3). Puesto que E es un $E-$bimódulo, tomando en el corolario anterior $M = E$ se obtiene

Corolario 3.5.4. *Sea K un anillo conmutativo, E un producto cruzado. Entonces $HH_n(E) = Tor_n^{(E^e,E)}(E,E)$.*

Definición 3.5.5. Sea E un producto cruzado. *El $n-$ésimo funtor de homología de Hochschild de E* denotado por $H_n(-,E) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}') \to \mathfrak{Ab}$ se define como

$$H_n(-,E) := L_n^{\mathscr{E}'}(E \otimes_{E^e} (-)),\ n = 0,1,2,\dots\ .$$

La familia de estos funtores se denota por $H_*(-,E) = \{H_n(-,E)\}$.

Usando Lema de Herradura se prueba que los funtores $H_n(-,E)$ son aditivos.

Capítulo 4

Homología de Hochschild de un producto cruzado $\dfrac{K[X]}{\langle X^t\rangle} \rtimes_f C_t$

Este capítulo está destinado al estudio de los objetos de la forma $\frac{K[X]}{\langle P\rangle} \rtimes_f C_t$, donde $P = X^t + c_{t-1}X^{t-1} + \cdots + c_1X + c_0$ es un polinomio mónico de grado t y C_t es un grupo cíclico de orden t. El propósito es aplicar la teoría desarrollada de homología de Hochschild de productos cruzados de Hopf a estos objetos.

El método utilizado para hallar las homologías de Hochschild en este capítulo ha sido adaptado de la comunicación privada [27]. Se determina que el cálculo de homología de Hochschild de un producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t\rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 2$ se reduce al cálculo de homologías de complejos totales de t complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado bajo condiciones adecuadas sobre K y sobre f.

En la primera sección, con la Proposición 4.1.5 aseguramos que el $2-$cociclo de un producto cruzado de una $K-$álgebra con un grupo cíclico finito es necesariamente de la forma dada en (4.34). En particular, esto es válido para el $2-$cociclo del producto cruzado mencionado en la Observación 4.1.9.

A pesar de que el Teorema 4.2.6 y el Teorema 4.3.6 tienen esencialmente la misma prueba, los cálculos de la prueba del primer teorema se simplifican enormemente, lo que permite comprender mejor la prueba del segundo teorema que es más complicada. Por lo tanto, es recomendable concentrarse en las pruebas inductivas sobre las columnas de dichos resultados, ya que los morfismos d_{rs}^{ℓ} de los Teoremas 4.2.5 y 4.3.5 son establecidos explícitamente mediante cinco fórmulas, para luego ser transformados en los correspondientes morfismos $\overline{d}_{rs}^{\ell}$. Estos últimos, en este capítulo, proporcionan las diferenciales horizontales y verticales de complejos dobles de cadenas asociados a productos cruzados $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 2$. En el último capítulo, veremos que estas diferenciales horizontales y verticales serán útiles en el cálculo de las homologías de Hochschild de los productos cruzados mencionados anteriormente.

4.1 Un método para las resoluciones de productos cruzados

Productos cruzados con acciones de grupos de automorfismos de álgebras

Sea G un grupo, K un anillo conmutativo unitario, A una $K-$álgebra y A^* el grupo de unidades de A. Sea $\sigma : G \to Aut_K(A)$ una aplicación definida por, $g \mapsto \sigma(g)(a) = a^g$ para todo $a \in A$, y dada otra aplicación $f : G \times G \to A^*$, $(g, h) \mapsto f(g, h)$.

Definición 4.1.1. [25] Un *producto cruzado*, $A \rtimes_f G$, *de una $K-$álgebra A con un grupo G*, es un $K-$módulo $\bigoplus_{g \in G} A\omega_g = A \otimes K[G]$ dotado de la multiplicación

$$(a\omega_g)(b\omega_h) = ab^g f(g, h)\omega_{gh}$$

satisfaciendo las 3 condiciones (ver el Teorema 2.3.10):

1) $f(1, g) = f(g, 1) = 1$,

2) $f(g_1, g_2)^{g_0} f(g_0, g_1 g_2) = f(g_0, g_1) f(g_0 g_1, g_2)$,

3) $(a^{g_1})^{g_0} f(g_0, g_1) = f(g_0, g_1) a^{g_0 g_1}$.

La condición 1) es la condición de normalidad, 2) es la condición de cociclo y 3) es la condición de módulo torcido.

En este caso, σ es llamado *acción débil* y f es llamado $2-$*cociclo*. En el caso en que σ es un homomorfismo de grupos σ se llama *acción*.

Observación 4.1.2. $E = A \rtimes_f G$ es un producto cruzado de Hopf de A por H.

En efecto, por la Proposición 2.2.16 $H = K[G]$ es una $K-$álgebra de Hopf, donde la comultiplicación Δ y la counidad ε, son dadas por $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$.
Por definición, $A \rtimes_f G$ es el $K-$módulo $A \otimes K[G]$ con multiplicación dada por $(a\omega_g)(b\omega_h) = ab^g f(g,h)\omega_{gh}$ satisfaciendo las condiciones de normalidad, de cociclo y módulo torcido. En términos de producto tensorial $\otimes = \otimes_K$,

$$\begin{aligned}(a \otimes g)(b \otimes h) &= ab^g f(g,h) \otimes gh, \text{ como } \Delta(g) = g \otimes g : \\ &= ab^{g^{(1)}} f(g^{(2)}, h^{(1)}) \otimes g^{(3)} h^{(2)} \ .\end{aligned}$$

Puesto que $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$ se cumplen las 3 condiciones :

1) $f(1,g) = f(g,1) = \varepsilon(g)1_A$,

2) $f({g_1}^{(1)}, {g_2}^{(1)})^{{g_0}^{(1)}} f({g_0}^{(2)}, {g_1}^{(2)}{g_2}^{(2)}) = f({g_0}^{(1)}, {g_1}^{(1)}) f({g_0}^{(2)}{g_1}^{(2)}, g_2)$

3) $(a^{{g_1}^{(1)}})^{{g_0}^{(1)}} f({g_0}^{(2)}, {g_1}^{(2)}) = f({g_0}^{(1)}, {g_1}^{(1)}) a^{{g_0}^{(2)}{g_1}^{(2)}}$.

Se observa que la acción σ de G sobre A, induce una acción débil θ de $K[G]$ sobre A mediante $\theta(g \otimes a) = \sigma(g)(a)$ para $g \in G$; mientras que la aplicación $f : G \times G \to A^*$ induce una aplicación $K-$bilineal $f : K[G] \times K[G] \to A$.
Por lo tanto, $E = A\#_f K[G]$ por el Teorema 2.3.10; i.e., E es un producto cruzado de Hopf de A por $K[G]$.

Observación. Para un grupo conmutativo G y una álgebra A, la acción de un elemento de g de G sobre un elemento de a de A se suele denotar por $g \cdot a$ en lugar de a^g, tal como sucede en el caso en que G es un grupo cíclico C_t para $t \geq 2$.

En el problema propuesto, en que se pide calcular la homología de Hochschild del producto cruzado $E = \frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$. El primer paso es determinar el $2-$cociclo f de E.
La siguiente definición, las siguientes dos proposiciones determinan que el $2-$cociclo f de un producto cruzado de una $K-$álgebra con un grupo cíclico finito de orden t, $A \rtimes_f C_t$, es necesariamente de la forma dada en (4.34).
Considerando la acción débil σ y el $2-$cociclo f en la Definición 4.1.1, denotaremos el producto

cruzado A con G por $A \rtimes_{\sigma,f} G$ para especificar la acción débil y el $2-$cociclo.
La siguiente definición y proposición están relacionadas con [18, Theo. 7.3.4]. Ver [31] para más detalles.

Definición 4.1.3. Sean $f, f' : G \times G \to A^* = \{$elementos invertibles de $A\}$.
Los $2-$cociclos f y f' de los *productos cruzados* $A \rtimes_{\sigma,f} G$ y $A \rtimes_{\sigma',f'} G$ son *equivalentes* si existe $\tau : G \to A^*$ tal que:

1) $\tau(e) = 1_A$,

2) $\tau(g)\sigma(g)(\tau(h)) f(g,h) = f'(g,h)\tau(gh)$,

3) $\sigma'(g)(a) = \tau(g)\sigma(g)(a)(\tau(g))^{-1}$.

También decimos que f y f' son equivalentes si existe τ satisfaciendo 1) y 2) pues se puede definir σ' que cumpla 3).

Proposición 4.1.4. [3, Prop. 1.19] *Si f es equivalente a f', entonces $\varphi : A \rtimes_{\sigma',f'} G \to A \rtimes_{\sigma,f} G$ definido por $\varphi(a\omega_g) = a\tau(g)\omega_g$ es un isomorfismo.*

Prueba. Si definimos $\psi : A \rtimes_{\sigma,f} G \to A \rtimes_{\sigma',f'} G$ por $\psi(a\omega_g) = a(\tau(g))^{-1}\omega_g$, deducimos que φ es una aplicación biyectiva.
Definiendo $\varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_{g_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\tau(g_i)\omega_{g_i}$, vemos que φ preserva la adición. Además, φ preserva el unitario pues $\tau(e) = 1_A$.
Sea $\lambda \in K$, entonces $\varphi(\lambda(a\omega_g)) = \varphi((\lambda a)\omega_g) = \lambda\varphi(a\omega_g)$.
Además $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. En efecto:
$x = a\omega_g$, $y = b\omega_h$ implica que $xy = a\sigma'(g)(b)f'(g,h)\omega_{gh}$.
Puesto que $\sigma'(g)(b) = \tau(g)\sigma(g)(b)(\tau(g))^{-1}$, $\tau(g)\sigma(g)(\tau(h)) f(g,h) = f'(g,h)\tau(gh)$

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= a\tau(g)\sigma(g)(b)(\tau(g))^{-1} f'(g,h)\tau(gh)\omega_{gh} \\
&= a\tau(g)\sigma(g)(b)\sigma(g)(\tau(h)) f(g,h)\omega_{gh} \\
&= a\tau(g)\sigma(g)(b\tau(h)) f(g,h)\omega_{gh} \\
&= [a\tau(g)\omega_g][b\tau(h)\omega_h] = \varphi(x)\varphi(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es un isomorfismo de $K-$álgebras. □

Proposición 4.1.5. [26, Prop. 1.2] *Sea $G = \{1, g, \ldots, g^{t-1}\}$ un grupo cíclico de orden t y $f : G \times G \to A^*$ un $2-$cociclo normal. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1) *f es equivalente al $2-$cociclo $f' : G \times G \to A^*$ definido por*

$$f'(g^i, g^j) = \begin{cases} 1 & si\ i + j < t \\ f(g, g)f(g^2, g) \cdots f(g^{t-1}, g) & si\ i + j \geq t. \end{cases}$$

2) *El $2-$cociclo f', definido en el item 1), es $G-$invariante (esto es $f'(G \times G) \subseteq A^G$).*

3) *$A \rtimes_{\sigma,f} G$ es isomorfo a $A \rtimes_{\sigma',f'} G$ donde*
$\sigma'(g^i)(a) = f(g, g) \cdots f(g^{i-1}, g)\sigma(g^i)(a) \left[f(g, g) \cdots f(g^{i-1}, g)\right]^{-1}$.

Prueba. 1) Se define $\tau : G \to A^*$ por

$$\tau(g^i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ f(g, g) \cdots f(g^{i-1}, g) & \text{si } 1 < i \leq t - 1. \end{cases}$$

Para probar la afirmación del item 1), debemos verificar la siguiente.

Afirmación:

$$\tau(g^i)\tau(g^j)^{g^i} f(g^i, g^j) = f'(g^i, g^j)\tau(g^{i+j}) \text{ para } 0 \leq i, j < t.$$

Para $i = 0$ se tiene $\tau(g^j) = \tau(g^j)$, para $j = 0$ se tiene $\tau(g^i) = \tau(g^i)$. Resta verificar que se cumple la afirmación para $0 < i < t,\ 0 < j < t$.

Por inducción vamos a probar que $\tau(g^j)^{g^i} f(g^i, g^j) = f(g^i, g)f(g^{i+1}, g) \cdots f(g^{i+j-1}, g)$ para $1 \leq j < t$.

Para $j = 1$, obtenemos que $\tau(g)^{g^i} f(g^i, g) = f(g^i, g)$ pues $\tau(g) = 1$.

Por hipótesis inductiva para $1 \leq j - 1$

$$\tau(g^{j-1})^{g^i} f(g^i, g^{j-1}) = f(g^i, g)f(g^{i+1}, g) \cdots f(g^{i+j-2}, g).$$

Por definición de τ y la condición de cociclo

$$\begin{aligned} \tau(g^j)^{g^i} f(g^i, g^j) &= \tau(g^{j-1})^{g^i} f(g^{j-1}, g)^{g^i} f(g^i, g^j) \\ &= \tau(g^{j-1})^{g^i} f(g^i, g^{j-1})f(g^{i+j-1}, g) \\ &= f(g^i, g) \cdots f(g^{i+j-2}, g)f(g^{i+j-1}, g). \end{aligned}$$

A continuación, vamos a utilizar las siguientes notaciones multiplicativas:

$$\begin{aligned}
\tau(g^i) &= \prod_{j=1}^{i-1} f(g^j, g) \text{ para } 0 \leq i < t; \\
R_\eta &= \prod_{u=1}^{\eta-1} f(g^u, g) \text{ para } 0 \leq \eta < 2t.
\end{aligned}$$

Premultiplicando por $\tau(g^i)$ a la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
\tau(g^i)\tau(g^j)^{g^i} f(g^i, g^j) &= f(g,g)\cdots f(g^{i-1},g)f(g^i,g)f(g^{i+1},g)\cdots f(g^{i+j-1},g) \\
&= R_{i+j}.
\end{aligned}$$

$$\text{Si } i+j < t,\ R_{i+j} = \tau(g^{i+j}). \tag{4.1}$$

Supongamos que $i+j=t$, entonces por el hecho que $g^t = g^0 = 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
R_{i+j} &= f(g,g)\cdots f(g^{t-1},g) = f(g,g)\cdots f(g^{t-1},g)1_A \\
&= f(g,g)\cdots f(g^{t-1},g)\tau(g^t) = f(g,g)\cdots f(g^{t-1},g)\tau(g^{i+j}).
\end{aligned}$$

Sea $t \leq i+j < 2t$, como $i+j = t+k$ $(0 \leq k < t)$, obtenemos que $\tau(g^{i+j}) = \tau(g^k)$. En este caso podemos expresar R_{i+j}, como sigue:

$$\begin{aligned}
R_{t+k} &= f(g,g)\cdots f(g^{t-1},g)f(1,g)f(g,g)\cdots f(g^{k-1},g) \\
&= f(g,g)\cdots f(g^{t-1},g)\tau(g^k) = R_t R_k \\
&= R_t \tau(g^{i+j}). \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Utilizando (4.1) y (4.2) si $i+j < t$, deducimos que

$$\tau(g^i)\tau(g^j)^{g^i} f(g^i,g^j) = R_{i+j} = \tau(g^{i+j}) = f'(g^i,g^j)\tau(g^{i+j});$$

en el caso $i+j \geq t$, deducimos que

$$\tau(g^i)\tau(g^j)^{g^i} f(g^i,g^j) = R_{i+j} = R_t R_k = R_t \tau(g^{i+j}) = f'(g^i,g^j)\tau(g^{i+j}).$$

2) Por la condición de cociclo

$$\sigma(g)\left(f(g^i,g)\right) f(g,g^{i+1}) = f(g,g^i)f(g^{1+i},g), \text{ para } 1 \leq i \leq t-1. \tag{4.3}$$

Procediendo recursivamente para $1 \leq i \leq t-1$ obtenemos que
$f(g,g)\cdots f(g^i,g)f(g^{i+1},g) = f(g,g)^g \cdots f(g^i,g)^g f(g,g^{i+1})$.
Pero $g^t = 1$, luego

$$\begin{aligned} f(g,g)f(g^2,g)\cdots f(g^{t-1},g) &= f(g,g)^g f(g^2,g)^g \cdots f(g^{t-2},g)^g f(g^{t-1},g)^g \\ &= \left[f(g,g)f(g^2,g)\cdots f(g^{t-1},g)\right]^g. \end{aligned}$$

Así, $f'(g^i,g^j)^g = f'(g^i,g^j)$. En otras palabras, $\mathrm{Im}(f') \subseteq (A^*)^G$.
3) Considerando la definición de $\tau(g^i)$ dada en la prueba del item 1),
$\sigma'(g^i)(a) = \tau(g^i)\sigma(g^i)(a)\left(\tau(g^i)\right)^{-1}$ para $0 \leq i < t$, por la Definición 4.1.3 sabemos que f es equivalente a f'. Por la Proposición 4.1.4, deducimos que $A \rtimes_{\sigma,f} G$ es isomorfo a $A \rtimes_{\sigma',f'} G$. $\square$

Observación 4.1.6. Sean $B' = A \rtimes_{\sigma',f'} G$ y $B = A \rtimes_{\sigma,f} G$. El producto cruzado B' es el $K-$módulo $A \otimes K[G]$, dotado de la multiplicación dada por

$$(a \otimes h)(b \otimes l) = a\sigma'(h)(b)f'(h,l) \otimes hl.$$

El producto cruzado B es el $K-$módulo $A \otimes K[G]$, dotado de la multiplicación dada por

$$(a \otimes h)(b \otimes l) = a\sigma(h)(b)f(h,l) \otimes hl.$$

En este caso, $H = K[G]$ es el $K-$álgebra de Hopf conocido como álgebra de grupo. Entonces B' y B son $A-$módulos izquierdos y $H-$comódulos derechos, donde $\rho_{B'}$ y ρ_B son las aplicaciones de estructura.
Por otro lado; se nota que $\varphi(\lambda(a\omega_g)) = \lambda\varphi(a\omega_g)$ para $\lambda \in A$, luego la aplicación φ de la Proposición 4.1.4, y del item 3) de la Proposición 4.1.5 es un morfismo de $A-$módulos izquierdos. Como en la prueba de la implicación 1. $\Rightarrow$ 2. del Teorema 2.5.8, se prueba que φ es un morfismo de $H-$comódulos derechos, pues $\rho_B\varphi(a\omega_g) = (\varphi \otimes id_H)\,\rho_{B'}(a\omega_g)$.
Por lo tanto, conforme a [18, Defi. 7.3.6], los productos cruzados $A \rtimes_{\sigma',f'} G$ y $A \rtimes_{\sigma,f} G$ son equivalentes.

Dados K un cuerpo, $t \geq 2$, $\mu_t(K)$ el conjunto de las raíces primitivas t-ésimas de la unidad en K y $C_t = \langle g \rangle = \{1, g, \ldots, g^{t-1}\}$ un grupo cíclico de orden t.

Proposición 4.1.7. *Sean* $A = \frac{K[X]}{\langle X^t \rangle}$, $x = X + \langle X^t \rangle$. *Si* $\lambda \in \mu_t(K)$, *entonces* $g \cdot x = \lambda x$ *define una acción de* C_t *sobre* A.

Prueba. El homomorfismo de grupos $\sigma : C_t \to Aut(A)$, $g^i \mapsto \sigma(g^i) : A \to A$ definido por $\sigma(g^i)(a) = (a)^{g^i}$ para $0 \leq i \leq t-1$, es una acción de C_t sobre A.
Para ello es suficiente ver que $\sigma(g)$ es un automorfismo del $K-$álgebra A.
Para cualquier $a \in A$, se tiene que $\sigma(g)(a) = a^g = (a_1 + a_2\lambda x + \cdots + a_t\lambda^{t-1}x^{t-1})$.
Claramente para a y $a' \in A$, y $\mu \in K$ se cumplen

$$\sigma(g)(a + a') = \sigma(g)(a) + \sigma(g)(a');$$

$$\sigma(g)(\mu a) = \mu\sigma(g)(a);$$

$$\sigma(g)(aa') = \sigma(g)(a)\sigma(g)(a').$$

La inversa de $\sigma(g)$ es $[\sigma(g)]^{-1} = \sigma(g^{-1})$, de modo que

$$[\sigma(g)]^{-1}(a) = (a_1 + a_2\lambda^{-1}x + \cdots + a_t\lambda^{-(t-1)}x^{t-1}).$$

Fácilmente se verifican las afirmaciones hechas para $t = 3$ (ver Ejemplo 4.3.9). $\square$

Sea A^* el grupo multiplicativo de las unidades de A.

Proposición 4.1.8. *Sea $t \geq 2$ un número natural, K un cuerpo con $\lambda \in \mu_t(K)$ y $\alpha \in A^*$. Entonces la aplicación $f_\alpha : C_t \times C_t \to A^*$ definida por*

$$f_\alpha(g^i, g^j) = \begin{cases} 1 & si\ i + j < t \\ \alpha & si\ i + j \geq t\ , \end{cases}$$

donde $0 \leq i, j < t$, es un 2-cociclo para el producto cruzado $A \rtimes_{f_\alpha} C_t$. Además, $\alpha \in K^*$.

Prueba. Basta imponer que se cumplen las 3 condiciones de la Definición 4.1.1.
Puesto que A es una K-álgebra conmutativa y σ es una acción de C_t sobre A se cumple la condición de módulo torcido,

$$((\sum_{i=0}^{t-1} b_i x^i)^{g^j})^{g^i} f(g^i, g^j) = f(g^i, g^j)(\sum_{i=0}^{t-1} b_i x^i)^{g^{i+j}},$$

donde $\sum_{i=0}^{t-1} b_i x^i \in A$.
Así, f_α es un 2-cociclo para el producto cruzado $A \rtimes_{f_\alpha} C_t$ si es posible hallar alguna solución del sistema de ecuaciones $f_\alpha(g^j, g^k)^{g^i} f_\alpha(g^i, g^{j+k}) = f_\alpha(g^i, g^j) f_\alpha(g^{i+j}, g^k)$ para $0 \leq i, j, k < t$ usando las condiciones de normalidad y de cociclo. Por definición de f_α, esto se traduce en lo que sigue:

- $\alpha^g = f_\alpha(g, g^{t-1})^g f_\alpha(g, 1) = f_\alpha(g, g) f_\alpha(g^2, g^{t-1}) = \alpha$,
- $\alpha^{g^2} = f_\alpha(g, g^{t-1})^{g^2} f_\alpha(g^2, 1) = f_\alpha(g^2, g) f_\alpha(g^3, g^{t-1}) = \alpha$,
- $\alpha^{g^2}\alpha = f_\alpha(g^{t-1}, g^{t-1})^{g^2} f_\alpha(g^2, g^{2t-2}) = f_\alpha(g^2, g^{t-1}) f_\alpha(g, g^{t-1}) = \alpha^2$,
- $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,
- $\alpha^{g^{t-1}} = f_\alpha(g, g^{t-1})^{g^{t-1}} f_\alpha(g^{t-1}, 1) = f_\alpha(g^{t-1}, g) f_\alpha(1, g^{t-1}) = \alpha$,
- $\alpha^{g^{t-1}}\alpha = f_\alpha(g^{t-1}, g^{t-1})^{g^{t-1}} f_\alpha(g^{t-1}, g^{2t-2}) = f_\alpha(g^{t-1}, g^{t-1}) f_\alpha(g^{2t-2}, g^{t-1}) = \alpha^2$,

donde $\alpha = \sum_{i=0}^{t-1} a_i x^i$, $\alpha^g = (a_0 + a_1\lambda x + \cdots + a_{t-1}\lambda^{t-1}x^{t-1})$,
$\alpha^{g^2} = (a_0 + a_1\lambda^2 x + \cdots + a_{t-1}\lambda^{(t-1)2}x^{t-1}), \ldots, \alpha^{g^{t-1}} = (a_0 + a_1\lambda^{t-1}x + \cdots + a_{t-1}\lambda^{(t-1)(t-1)}x^{t-1})$.
Como vale la propiedad cancelativa en A^*, en el siguiente sistema de ecuaciones se aprecia que α es un elemento C_t-invariante del grupo multiplicativo A^* de las unidades de A. Esto significa que para todo $0 \leq i \leq t-1$ se tiene que $\alpha^{g^i} = \alpha$.
Para probar la segunda afirmación de esta proposición, podemos tomar en cuenta todas las deducciones hechas para el caso $t = 3$ en el Ejemplo 4.3.9).
Así, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha^g = \alpha \\ \alpha^{g^2} = \alpha \\ \alpha^{g^2}\alpha = \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{g^{t-1}} = \alpha \\ \alpha^{g^{t-1}}\alpha = \alpha^2 , \end{cases}$$

tiene como solución $\alpha = a_0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{t-1} = a_0$. Por lo tanto $\alpha = a_0 \in K^*$. $\square$

Observación 4.1.9. Para cada cuerpo K con $\lambda \in \mu_t(K)$, cada $\alpha \in K^*$ y cada $t \geq 2$ está definido el producto cruzado $A \rtimes_{f_\alpha} C_t$. En el resto de este capítulo, este objeto se denotará por $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$.

Resolución proyectiva relativa de un bimódulo

Sea E una $K-$álgebra. En esta sección se va a introducir un resultado que se deriva del método dado en [1, Coro. A.2], que se utilizará en las secciones siguientes. Sea

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\partial_3"] & & & & \\
Y_2 \arrow[d, "\partial_2"] & X_{02} \arrow[l, "\mu_2"'] & X_{12} \arrow[l, "d^0_{12}"'] & X_{22} \arrow[l, "d^0_{22}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{32}"'] \\
Y_1 \arrow[d, "\partial_1"] & X_{01} \arrow[l, "\mu_1"'] & X_{11} \arrow[l, "d^0_{11}"'] & X_{21} \arrow[l, "d^0_{21}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{31}"'] \\
Y_0 & X_{00} \arrow[l, "\mu_0"'] & X_{10} \arrow[l, "d^0_{10}"'] & X_{20} \arrow[l, "d^0_{20}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{30}"']
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

un diagrama de $E-$bimódulos y morfismos de $E-$bimódulos sujeto a las tres condiciones iniciales :

1) La columna y las filas son complejos de cadenas de $E-$bimódulos,
2) cada X_{rs} es isomorfo a un $E-$bimódulo $E \otimes \overline{X}_{rs} \otimes E$,
3) cada fila es contráctil como un complejo de $E-$módulos izquierdos, con una homotopía de contracción de cadenas $\sigma^0_{0s} : Y_s \to X_{0s}$ y $\sigma^0_{r+1,s} : X_{rs} \to X_{r+1,s}$ $(r \geq 0)$.

Entonces, se definen morfismos de $E-$bimódulos

$$d^\ell_{rs} : X_{rs} \to X_{r+\ell-1,s-\ell} \ (r \geq 0 \text{ y } 1 \leq \ell \leq s)$$

recursivamente por

$$d^\ell_{rs}(x) = \begin{cases} -\sigma^0_{0,s-1} \circ \partial_s \circ \mu_s(x) & \text{si } r = 0 \text{ y } \ell = 1 \ , \\ -\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell-1} \sigma^0_{\ell-1,s-\ell} \circ d^{\ell-j}_{j-1,s-j} \circ d^j_{0s}(x) & \text{si } r = 0 \text{ y } 1 < \ell \leq s \ , \\ -\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell-1} \sigma^0_{r+\ell-1,s-\ell} \circ d^{\ell-j}_{r+j-1,s-j} \circ d^j_{rs}(x) & \text{si } r > 0 \ , \end{cases} \tag{4.5}$$

para cada $x = 1 \otimes \overline{x} \otimes 1 \in E \otimes \overline{X}_{rs} \otimes E$.

Teorema 4.1.10. [27, Theo. 1.1] *Sea $\widetilde{\mu}: Y_0 \to E$ un morfismo de $E-$bimódulos tal que*

$$E \xleftarrow{\widetilde{\mu}} Y_0 \xleftarrow{\partial_1} Y_1 \xleftarrow{\partial_2} Y_2 \xleftarrow{\partial_3} \cdots \tag{4.6}$$

es un complejo contráctil como un complejo de $E-$módulos izquierdos. Entonces

$$E \xleftarrow{\mu} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} X_2 \xleftarrow{d_3} \cdots \tag{4.7}$$

donde $\mu = \widetilde{\mu}\mu_0$, $X_n = \bigoplus_{r+s=n} X_{rs}$ y $d_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{s} d_{rs}^{\ell}$,
es una resolución proyectiva relativa de E como un $E-$bimódulo.

Prueba. Tomando los anillos $R = E$, $S = E^e$, por propiedad del producto tensorial se ve que $\varrho : E \to E^e$, definido por $\varrho(r) = r \otimes 1$, es un morfismo de anillos unitarios.
Puesto que por las Proposiciones 3.1.7 y 3.1.11 cada $E-$bimódulo es un E^e-módulo izquierdo y cada morfismo de $E-$bimódulos es un morfismo de E^e-módulos izquierdos, por la condición 1) se sabe que la columna y las filas de (4.4) son complejos de cadenas de E^e-módulos izquierdos.
La condición 2) : $X_{rs} \cong E \otimes \overline{X}_{rs} \otimes E$ se transforma en $X_{rs} \cong E^e \otimes_E \overline{X}_{rs}$.
Por hipótesis $\widetilde{\mu} : Y_0 \to E$ es un morfismo de $E-$bimódulos; i.e. $\widetilde{\mu}(\lambda_1 m \lambda_2) = \lambda_1 \widetilde{\mu}(m)\lambda_2$ para λ_1, $\lambda_2 \in E$ y $m \in Y_0$. Esto ocurre si y sólo si $\widetilde{\mu}((\lambda_1 \otimes \lambda_2)m) = (\lambda_1 \otimes \lambda_2)\widetilde{\mu}(m)$ para $\lambda_1 \otimes \lambda_2 \in E^e$ y $m \in Y_0$. Luego $\widetilde{\mu} : Y_0 \to E$ es un morfismo de E^e-módulos izquierdos. Así, la hipótesis del teorema se convierte en que $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{m}^l_{E^e}(Y_0, E)$ tal que

$$E \xleftarrow{\widetilde{\mu}} Y_0 \xleftarrow{\partial_1} Y_1 \xleftarrow{\partial_2} Y_2 \xleftarrow{\partial_3} \cdots$$

es un complejo de cadenas que es contráctil como un complejo de $E-$módulos izquierdos. Del hecho que $X_{rs} \cong E^e \otimes_E \overline{X}_{rs}$, se sabe que X_{rs} es un retracto de $E^e \otimes_E \overline{X}_{rs}$. Entonces, por el Corolario 1.4.14, el complejo (4.7) es una resolución proyectiva relativa de E como E^e-módulo izquierdo. Pero se nota que E es un $E-$bimódulo bajo $\lambda_1 m = (\lambda_1 \otimes 1)m$, $m\lambda_2 = (1 \otimes \lambda_2)m$ para λ_1, $\lambda_2 \in E$ y $m \in E$, luego el complejo (4.7) es una resolución proyectiva relativa de E como $E-$bimódulo. $\square$

4.2 Homología de Hochschild de $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$

Dados K un cuerpo, $C_2 = \{1, g\}$ un grupo cíclico de orden 2, una acción de C_2 sobre $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$ dada por $g \cdot x = -x$ y $g \cdot 1 = 1$. El propósito es estudiar el objeto $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$ y hallar su homología Hochschild.

En esta sección $E = A \rtimes_f C_2$ es un producto cruzado, donde $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^2 \rangle}$ y $C_2 = \langle g \rangle$ es un grupo cíclico de orden 2. Se denota por x la clase de X en A.

Gracias a la Proposición 4.1.5, se asume que el $2-$cociclo $f : C_2 \times C_2 \to A^*$ tiene la forma

$$f(g^i, g^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j < 2 \\ \alpha & \text{si } i + j \geq 2 \ , \end{cases}$$

donde $0 \leq i, j < 2$ y α es un elemento C_2-invariante del grupo multiplicativo A^* de las unidades de A.

En esta sección, se aplica el Teorema 4.1.10 para obtener una resolución proyectiva relativa de $E = A \rtimes_f C_2$ como un $E-$bimódulo. Luego, se desea mostrar que esta resolución no solamente da la información de la existencia de la homología de Hochschild del producto cruzado mediante el Corolario 3.5.4, sino que también proporciona un complejo de cadenas auxiliar para obtener su homología de Hochschild (Teorema 4.2.7). Después, este complejo auxiliar sirve para expresar la homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$ en términos de homologías de complejos totales de 2 complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado (Corolario 4.2.8).

La resolución (X_*, d_*) de $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$.

Esta sección corresponde a una adaptación de [27, § 2] al caso en que el grado del polinomio mónico P es 2, cuyos coeficientes c_1 y c_0 son ceros; y el orden del grupo cíclico es 2.

Sean $Y_s = E \otimes K[C_2]$ $(s \geq 0)$ y $X_{rs} = E \otimes E$ $(r, s \geq 0)$. Los grupos X_{rs} son $E-$bimódulos de manera obvia y los grupos Y_s son $E-$bimódulos via la acción canónica izquierda y la acción derecha siguiente $(a\omega_{g^i} \otimes g^j)b\omega_{g^h} = ab^{g^{i+j+\underline{s}}} f(g^j, g^h)\omega_{g^i} \otimes g^{j+h}$, donde

$$\underline{s} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \text{ es par} \\ 1 & \text{si } s \text{ es impar ;} \end{cases}$$

Proposición 4.2.1. *Para* $(r, s \geq 0)$, $X_{rs} = E \otimes E$ *y* $Y_s = E \otimes K[C_2]$ *son* $E-$*bimódulos.*

Prueba. Se hace de manera análoga a la prueba de la Proposición 4.3.1. $\square$

Dados $0 \leq i, j < 2$, se definen :

para $(r, s \geq 0)$, y para los $E-$bimódulos $X_{rs} = E \otimes E$ y $Y_s = E \otimes K[C_2]$;

los morfismos de $E-$bimódulos $\mu_s : X_{0s} \to Y_s$ $(s \geq 0)$, $\partial_s : Y_s \to Y_{s-1}$ $(s \geq 1)$ y $d^0_{rs} : X_{rs} \to X_{r-1,s}$ $(r \geq 1)$, por

$$\begin{aligned}
&\mu_s(a\omega_{g^i} \otimes b\omega_{g^j}) = a(g^{i+\underline{s}} \cdot b)\omega_{g^i} \otimes g^j,\\
&\partial_{2s-1}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = af(g, g^j)\omega_{g^i} \otimes g^{j+1} - af(g^i, g)\omega_{g^{i+1}} \otimes g^j,\\
&\partial_{2s}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = \sum_{h=0}^{1} af(g^i, g^h)\alpha^{-1}f(g^{-h-1}, g^j)\omega_{g^{i+h}} \otimes g^{j-h-1},\\
&d^0_{2r-1,s}(a\omega_{g^i} \otimes b\omega_{g^j}) = a\omega_{g^i} \otimes xb\omega_{g^j} - a(g^{i+\underline{s}} \cdot x)\omega_{g^i} \otimes b\omega_{g^j},\\
&d^0_{2r,s}(a\omega_{g^i} \otimes b\omega_{g^j}) = \sum_{h=0}^{1} a(g^{i+\underline{s}} \cdot x^h)\omega_{g^i} \otimes x^{1-h}b\omega_{g^j};
\end{aligned}$$

los morfismos de $E-$módulos izquierdos $\sigma^0_{0s} : Y_s \to X_{0s}$ y

$\sigma^0_{r+1,s} : X_{rs} \to X_{r+1,s}$, por

$$\begin{aligned}
&\sigma^0_{0s}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = a\omega_{g^i} \otimes \omega_{g^j},\\
&\sigma^0_{2r-1,s}(a\omega_{g^i} \otimes x^m\omega_{g^j}) = \sum_{h=0}^{m-1} a(g^{i+\underline{s}} \cdot x^h)\omega_{g^i} \otimes x^{m-h-1}\omega_{g^j} \text{ para } 0 \leq m \leq 1,\\
&\sigma^0_{2r,s}(a\omega_{g^i} \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ a\omega_{g^i} \otimes \omega_{g^j} & \text{si } m = 1\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

El elemento $a\omega_{g^i} \otimes g^j$ de $E \otimes K[C_2]$ se puede descomponer en la forma

$a\omega_{g^i} \otimes g^j = a\omega_{g^i}(\omega_1 \otimes 1)\omega_{g^j}$. Es necesario recordar que

$\partial_{2s}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = \sum_{h=0}^{1} af(g^i, g^h)\alpha^{-1}f(g^{-h-1}, g^j)\omega_{g^{i+h}} \otimes g^{j-h-1}$.

Lema 4.2.2. (Y_*, ∂_*) *es un complejo de cadenas de* $E-$*bimódulos.*

Prueba. Para $s = 1$, $\partial_1\partial_2 = 0$. En efecto, tomando $\omega_1 \otimes 1 \in E \otimes K[C_2]$,

$\partial_2(\omega_1 \otimes 1) = \alpha^{-1}\omega_1 \otimes g + \alpha^{-1}\omega_g \otimes 1$.

Como $\partial_1(a\omega_{g^i}\otimes g^j)=af(g,g^j)\omega_{g^i}\otimes g^{j+1}-af(g^i,g)\omega_{g^{i+1}}\otimes g^j$;

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_2(\omega_1\otimes 1) &= \omega_1\otimes 1-\alpha^{-1}\omega_g\otimes g\\ &+ \alpha^{-1}\omega_g\otimes g-\omega_1\otimes 1=0\ .\end{aligned}$$

Para $s=2$, $\partial_2\partial_3=0$. Puesto que $\partial_3(\omega_1\otimes 1)=\omega_1\otimes g-\omega_g\otimes 1$,

$$\begin{aligned}\partial_2\partial_3(\omega_1\otimes 1) &= \omega_1\otimes 1+\alpha^{-1}\omega_g\otimes g\\ &- \alpha^{-1}\omega_g\otimes g-\omega_1\otimes 1=0\ .\end{aligned}$$

Como $Y_s=E\otimes K[C_2]$ no depende de s, se deduce que $\partial_s\partial_{s+1}=0$. □

El elemento $a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}$ de $E\otimes E$ se puede descomponer en la forma $a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}=a\omega_{g^i}(\omega_1\otimes\omega_1)b\omega_{g^j}$.

Lema 4.2.3. $Y_s \xleftarrow{\mu_s} (X_{*,s},d^0_{*,s})$ *es un complejo de cadenas de* $E-$*bimódulos.*

Prueba. Se verifica que $\mu_s d^0_{1s}=0$. En efecto, tomando $\omega_1\otimes\omega_1\in X_{1s}=E\otimes E$, $d^0_{1s}(\omega_1\otimes\omega_1)=\omega_1\otimes x\omega_1-(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_1\otimes\omega_1$; pero $\mu_s(a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j})=ab^{g^{i+\underline{s}}}\omega_{g^i}\otimes g^j$, luego $\mu_s d^0_{1s}(\omega_1\otimes\omega_1)=(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_{g^0}\otimes g^0-(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_{g^0}\otimes g^0=0$.
Para $r=1$, $d^0_{1s}d^0_{2s}=0$. En efecto, tomando $\omega_1\otimes\omega_1\in X_{2s}=E\otimes E$, por $d^0_{2r,s}(a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j})=\sum_{h=0}^{1}a(g^{i+\underline{s}}\cdot x^h)\omega_{g^i}\otimes x^{1-h}b\omega_{g^j}$ se tiene
$d^0_{2s}(\omega_1\otimes\omega_1)=\omega_1\otimes x\omega_1+(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_1\otimes\omega_1$.
Usando $d^0_{2r-1,s}(a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j})=a\omega_{g^i}\otimes xb\omega_{g^j}-a(g^{i+\underline{s}}\cdot x)\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}$:

$$\begin{aligned}d^0_{1s}d^0_{2s}(\omega_1\otimes\omega_1) &= \omega_1\otimes x^2\omega_1-(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_1\otimes x\omega_1\\ &+ (g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_1\otimes x\omega_1-(g^{\underline{s}}\cdot x^2)\omega_1\otimes\omega_1=0\end{aligned}$$

pues $x^2=0=g^{\underline{s}}\cdot x^2$.
Para $r=2$, $d^0_{2s}d^0_{3s}=0$. De nuevo tomando $\omega_1\otimes\omega_1\in X_{3s}=E\otimes E$, $d^0_{3s}(\omega_1\otimes\omega_1)=\omega_1\otimes x\omega_1-(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_1\otimes\omega_1$.
Aplicando $d^0_{2,s}(a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j})=\sum_{h=0}^{1}a(g^{i+\underline{s}}\cdot x^h)\omega_{g^i}\otimes x^{1-h}b\omega_{g^j}$:

$$d^0_{2s}d^0_{3s}(\omega_1\otimes\omega_1)=(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_1\otimes x\omega_1-(g^{\underline{s}}\cdot x)\omega_1\otimes x\omega_1=0\ .$$

En general, como $X_{rs}=E\otimes E$ no depende de r se deduce que $d^0_{rs}d^0_{r+1,s}=0$. □

Observación. Se pueden descomponer como elementos de $E-$módulos izquierdos : $a\omega_{g^i} \otimes g^j = a\omega_{g^i}(\omega_1 \otimes g^j)$; $a\omega_{g^i} \otimes b\omega_{g^j} = a\omega_{g^i}(\omega_1 \otimes b\omega_{g^j})$.

Lema 4.2.4. *σ^0 es una homotopía de contracción en ${}_E\mathfrak{Ch}$.*

Prueba. Se verifican las igualdades $\mu_s\sigma^0_{0s} = id_{Y_s}$, $d^0_{1s}\sigma^0_{1s} + \sigma^0_{0s}\mu_s = id_{X_{0s}}$, $d^0_{2r,s}\sigma^0_{2r,s} + \sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s} = id_{X_{2r-1,s}}$ y $d^0_{2r+1,s}\sigma^0_{2r+1,s} + \sigma^0_{2r,s}d^0_{2r,s} = id_{X_{2r,s}}$ $(r \geq 1)$.

Esto se hace con las 6 igualdades siguientes :

(1) $\mu_s\sigma^0_{0s}(\omega_1 \otimes g^j) = \omega_1 \otimes g^j$,

(2) $\sigma^0_{0s}\mu_s(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = (g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes \omega_{g^j}$ para $0 \leq m \leq 1$,

(3) $\sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} \omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j} & \text{si } \ 0 \leq m < 1 \\ \omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j} - T & \text{si } \ m = 1 \end{cases}$

donde $T = \displaystyle\sum_{h=0}^{1}(g^{\underline{s}} \cdot x^h)\omega_1 \otimes x^{1-h}\omega_{g^j}$,

(4) $d^0_{2r,s}\sigma^0_{2r,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq m < 1 \\ T & \text{si } \ m = 1 \end{cases}$,

(5) $\sigma^0_{2r,s}d^0_{2r,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = (g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes \omega_{g^j}$ para $0 \leq m \leq 1$,

(6) $d^0_{2r+1,s}\sigma^0_{2r+1,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ m = 0 \\ \omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j} - (g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes \omega_{g^j} & \text{si } \ 0 < m \leq 1 \end{cases}$.

En efecto :

Las dos primeras igualdades se siguen inmediatamente de las definiciones.

(3) para $0 \leq m < 1$

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_{g^j}) &= \sigma^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes x\omega_{g^j} - (g^{\underline{s}} \cdot x)\omega_1 \otimes \omega_{g^j}) \\ &= \sum_{h=0}^{0}(g^{\underline{s}} \cdot x^h)\omega_1 \otimes x^{-h}\omega_{g^j} = \omega_1 \otimes \omega_{g^j} \ , \end{aligned}$$

(3) para $m = 1$

$$\begin{aligned} d^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes x\omega_{g^j}) &= \omega_1 \otimes x^2\omega_{g^j} - g^{\underline{s}} \cdot x\omega_1 \otimes x\omega_{g^j} \\ &= -g^{\underline{s}} \cdot x\omega_1 \otimes x\omega_{g^j} \text{ pues } x^2 = 0 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s}(\omega_1\otimes x\omega_{g^j}) &= -\sigma^0_{2r-1,s}(g^{\underline{s}}\cdot x\omega_1\otimes x\omega_{g^j})\\
&= -\sum_{h=0}^{0} g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{-h}\omega_{g^j} = -g^{\underline{s}}\cdot x\omega_1\otimes\omega_{g^j}\\
&= \omega_1\otimes x\omega_{g^j} - \sum_{h=0}^{1} g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{1-h}\omega_{g^j}\ ;
\end{aligned}$$

(4) puesto que $\sigma^0_{2r,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le m<1\\ \omega_1\otimes\omega_{g^j} & \text{si } m=1\ ,\end{cases}$

$d^0_{2r,s}(\omega_1\otimes\omega_{g^j}) = \sum_{h=0}^{1} g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{1-h}\omega_{g^j}$,

$d^0_{2r,s}\sigma^0_{2r,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le m<1\\ T & \text{si } m=1\ ;\end{cases}$

(5) para $0\le m\le 1$

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{2r,s}d^0_{2r,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) &= \sigma^0_{2r,s}(\sum_{h=0}^{1} g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{1-h+m}\omega_{g^j})\\
&= \sigma^0_{2r,s}(g^{\underline{s}}\cdot x^m\omega_1\otimes x\omega_{g^j}) \text{ para } h=m\\
&= g^{\underline{s}}\cdot x^m\omega_1\otimes\omega_{g^j}\ ;
\end{aligned}$$

(6) como $\sigma^0_{2r+1,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0\\ \omega_1\otimes\omega_{g^j} & \text{si } 0<m\le 1\end{cases}$,

para $0<m\le 1$ se tiene

$$d^0_{2r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_{g^j}) = \omega_1\otimes x\omega_{g^j} - g^{\underline{s}}\cdot x\omega_1\otimes\omega_{g^j}\ .$$

Por lo tanto,

$d^0_{2r+1,s}\sigma^0_{2r+1,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0\\ \omega_1\otimes x^m\omega_{g^j} - (g^{\underline{s}}\cdot\ x^m)\omega_1\otimes\omega_{g^j} & \text{si } 0<m\le 1\end{cases}$. $\square$

Las tres condiciones iniciales sobre el diagrama (4.4) de $E-$bimódulos y morfismos de $E-$bimódulo se cumplen. Esto se debe a que: La columna del diagrama es un complejo de cadenas de $E-$bimódulos, según el Lema 4.2.2; y las filas del diagrama son complejos de cadenas de $E-$bimódulos, según el Lema 4.2.3. Debido a que se tiene el isomorfismo $X_{rs}\cong E\otimes K\otimes E$ y las filas del diagrama son contráctiles como complejos de $E-$módulos izquierdos, según el Lema 4.2.4.

Teorema 4.2.5. *Sean los morfismos de $E-$bimódulos, d^{ℓ}_{rs}, construidos con ∂_{s+1}, μ_s, σ^0_{0s} $(s \geq 0)$; $d^0_{r+1,s}$ y $\sigma^0_{r+1,s}$ $(r, s \geq 0)$ como en (4.5). Entonces el complejo*

$$E \xleftarrow{\mu} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} X_2 \xleftarrow{d_3} \cdots$$

donde $\mu(a\omega_{g^i} \otimes b\omega_{g^j}) = ab^{g^i} f(g^i, g^j)\omega_{g^{i+j}}$, $X_n = \bigoplus\limits_{r+s=n} X_{rs}$ *y* $d_n = \sum\limits_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum\limits_{\ell=0}^{s} d^{\ell}_{rs}$,

es una resolución proyectiva relativa del $E-$bimódulo $\frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$.

Prueba. Sea $\widetilde{\mu} : Y_0 \to E$ el morfismo de $E-$bimódulos definido por $\widetilde{\mu}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = af(g^i, g^j)\omega_{g^{i+j}}$. Como se cumplen las 3 condiciones iniciales del diagrama (4.4) en la categoría de $E-$bimódulos, entonces por el Teorema 4.1.10 se debe verificar que

$$E \xleftarrow{\widetilde{\mu}} Y_0 \xleftarrow{\partial_1} Y_1 \xleftarrow{\partial_2} Y_2 \xleftarrow{\partial_3} \cdots ,$$

es contráctil como un complejo de $E-$módulos izquierdos, cuya homotopía de contracción $\sigma_0^{-1} : E \to Y_0$ y $\sigma^{-1}_{s+1} : Y_s \to Y_{s+1}$ $(s \geq 0)$, es dada por

$$\begin{aligned}
\sigma_0^{-1}(a\omega_{g^i}) &= a\omega_{g^i} \otimes 1, \\
\sigma^{-1}_{2s-1}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) &= \sum_{h=0}^{j-1} af(g^i, g^h)\omega_{g^{i+h}} \otimes g^{j-h-1}, \\
\sigma^{-1}_{2s}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq j < 1 \\ a\alpha\omega_{g^i} \otimes 1 & \text{si } \ j = 1 \ . \end{cases}
\end{aligned}$$

Esto significa que se cumplen las igualdades siguientes $\widetilde{\mu}\sigma_0^{-1} = id_E$, $\partial_1\sigma_1^{-1} + \sigma_0^{-1}\widetilde{\mu} = id_{Y_0}$, $\partial_{2s}\sigma^{-1}_{2s} + \sigma^{-1}_{2s-1}\partial_{2s-1} = id_{Y_{2s-1}}$ y $\partial_{2s+1}\sigma^{-1}_{2s+1} + \sigma^{-1}_{2s}\partial_{2s} = id_{Y_{2s}}$ $(s \geq 1)$.

En efecto, por $E-$linealidad izquierda de las aplicaciones que aparecen en las igualdades anteriores se debe probar que se cumplen las 6 igualdades :

(1) $\widetilde{\mu}\sigma_0^{-1}(\omega_1) = \omega_1$,

(2) $\sigma_0^{-1}\widetilde{\mu}(\omega_1 \otimes g^j) = \omega_{g^j} \otimes 1$ para $0 \leq j \leq 1$,

(3) $\sigma^{-1}_{2s-1}\partial_{2s-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} \omega_1 \otimes g^j & \text{si } \ 0 \leq j < 1 \\ \omega_1 \otimes g^j - \sum\limits_{h=0}^{1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} & \text{si } \ j = 1 \end{cases}$,

(4) $\partial_{2s}\sigma^{-1}_{2s}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq j < 1 \\ \sum\limits_{h=0}^{1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} & \text{si } \ j = 1 \end{cases}$,

(5) $\sigma_{2s}^{-1}\partial_{2s}(\omega_1 \otimes g^j) = \omega_{g^j} \otimes 1$ para $0 \leq j \leq 1$,

(6) $\partial_{2s+1}\sigma_{2s+1}^{-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j = 0 \\ \omega_1 \otimes g^j - \omega_{g^j} \otimes 1 & \text{si } \ 0 < j \leq 1 \end{cases}$.

Se observa que (1), (2) y (4) se siguen inmediatamente de las definiciones de los morfismos.

(3) para $0 \leq j < 1$ usando las propiedades del 2-cociclo f se obtiene que :

$$\begin{aligned} \sigma_{2s-1}^{-1}\partial_{2s-1}(\omega_1 \otimes g^0) &= \sigma_{2s-1}^{-1}(f(g,1)\omega_1 \otimes g - f(1,g)\omega_g \otimes 1) \\ &= \omega_1 \otimes g^0 \ , \end{aligned}$$

(3) para $j = 1$ se tiene que :

$$\begin{aligned} \sigma_{2s-1}^{-1}\partial_{2s-1}(\omega_1 \otimes g) &= -\sigma_{2s-1}^{-1}(\omega_g \otimes g) \text{ pues orden del grupo cíclico es 2} \\ &= -\omega_g \otimes 1 = \omega_1 \otimes g - \sum_{h=0}^{1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} \ ; \end{aligned}$$

(5) para $0 \leq j \leq 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{2s}^{-1}\partial_{2s}(\omega_1 \otimes g^j) &= \sigma_{2s}^{-1}(\sum_{h=0}^{1} \alpha^{-1} f(g^{-h-1}, g^j)\omega_{g^h} \otimes g^{j-h-1}), \text{ para } h = j : \\ &= \sigma_{2s}^{-1}(\alpha^{-1} f(g^{-j-1}, g^j)\omega_{g^j} \otimes g) = \omega_{g^j} \otimes 1 \ ; \end{aligned}$$

(6) como $\sigma_{2s+1}^{-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j = 0 \\ \omega_1 \otimes 1 & \text{si } \ 0 < j \leq 1 \end{cases}$,

y $\partial_{2s+1}(\omega_1 \otimes 1) = \omega_1 \otimes g - \omega_g \otimes 1$, resulta que

$\partial_{2s+1}\sigma_{2s+1}^{-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j = 0 \\ \omega_1 \otimes g^j - \omega_{g^j} \otimes 1 & \text{si } \ 0 < j \leq 1 \end{cases}$. $\square$

Fórmulas para los morfismos d_{rs}^{ℓ} .

El siguiente teorema presenta las fórmulas para los morfismos d_{rs}^{ℓ} que aparecen en la resolución proyectiva relativa de E, obtenida en el Teorema 4.2.5. La prueba inductiva de este teorema sobre las columnas se basa en la bilinealidad de d_{rs}^{ℓ} y la definición de σ_{rs}^{0}. Este resultado se adapta de [27, Theo. 2.2].

Teorema 4.2.6. *Sean $g \cdot x = \lambda x$ donde $\lambda \in K$ y $\alpha = \sum_{u=0}^{1} \gamma_u x^u$. Entonces :*

$$d^1_{r,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^r \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^r \lambda^r \omega_1 \otimes \omega_g,$$

$$d^1_{r,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)r} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}},$$

$$d^2_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0,$$

$$d^2_{2r,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1 \omega_1 \otimes \omega_1,$$

$$d^\ell_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0, \ \forall\, \ell > 2.$$

Prueba. (1) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^1_{r,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^r \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^r \lambda^r \omega_1 \otimes \omega_g \tag{4.8}$$

para $s \geq 1$.

En efecto :

Para $r = 0$, $d^1_{0,2s-1} = -\sigma^0_{0,2s-2}\partial_{2s-1}\mu_{2s-1}$, luego $\mu_{2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes 1$,

$$\begin{aligned} \partial_{2s-1}(\omega_1 \otimes 1) &= f(g,1)\omega_1 \otimes g - f(1,g)\omega_g \otimes 1 \\ &= \omega_1 \otimes g - \omega_g \otimes 1, \end{aligned}$$

$\sigma^0_{0,2s-2}(\omega_1 \otimes g - \omega_g \otimes 1) = \omega_1 \otimes \omega_g - \omega_g \otimes \omega_1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d^1_{0,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sigma^0_{0,2s-2}\partial_{2s-1}\mu_{2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= \omega_g \otimes \omega_1 - \omega_1 \otimes \omega_g = (-1)^0 \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^0 \lambda^0 \omega_1 \otimes \omega_g \ . \end{aligned}$$

Para $r = 2n-1$ ($n \geq 1$) por hipótesis inductiva se cumple (4.8). Se va a demostrar que

$$d^1_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+1} \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^{r+1} \lambda^{r+1} \omega_1 \otimes \omega_g \ . \tag{4.9}$$

Puesto que $d^1_{r+1,2s-1} = -\sigma^0_{r+1,2s-2} d^1_{r,2s-1} d^0_{r+1,2s-1}$;

$$d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{1} g \cdot x^h \omega_1 \otimes x^{1-h}\omega_1 \ ,$$

$$d^1_{r,2s-1} d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{1} g \cdot x^h \omega_1 d^1_{r,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) x^{1-h} \omega_1 \ ,$$

recordando que $d^1_{r,2s-1}(\omega_1\otimes\omega_1)=(-1)^r\omega_g\otimes\omega_1-(-1)^r\lambda^r\omega_1\otimes\omega_g$ se calcula

$(g\cdot x^h\omega_1)(\omega_g)=g\cdot x^h\omega_g$, $(\omega_1)(x^{1-h}\omega_1)=x^{1-h}\omega_1$,

$(g\cdot x^h\omega_1)(\lambda^r\omega_1)=g\cdot x^h\lambda^r\omega_1$; a partir de $g\cdot x=\lambda x$ se sigue que

$$(\omega_g)(x^{1-h}\omega_1) \;=\; g\cdot x^{1-h}\omega_g=\lambda^{1-h}x^{1-h}\omega_g.$$

Reemplazando estos valores

$$\begin{aligned} d^1_{r,2s-1}d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1\otimes\omega_1) &= (-1)^r\sum_{h=0}^{1} g\cdot x^h\omega_g\otimes x^{1-h}\omega_1\\ &- (-1)^r\sum_{h=0}^{1} g\cdot x^h\lambda^r\omega_1\otimes\lambda^{1-h}x^{1-h}\omega_g\ . \end{aligned}$$

Aplicando la definición de $\sigma^0_{r+1,2s-2}$ para $h=0$:

$$\begin{aligned} \sigma^0_{r+1,2s-2}d^1_{r,2s-1}d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1\otimes\omega_1) &= (-1)^r\sigma^0_{r+1,2s-2}(\omega_g\otimes x^1\omega_1)\\ &- (-1)^r\sigma^0_{r+1,2s-2}(\lambda^r\omega_1\otimes\lambda^1x^1\omega_g)\\ &= (-1)^r\omega_g\otimes\omega_1-(-1)^r\lambda^{r+1}\omega_1\otimes\omega_g\ . \end{aligned}$$

Así, se obtiene la igualdad (4.9) .

Para $r=2n$ $(n\geq 1)$ por hipótesis inductiva se cumple (4.8). En este caso, similarmente se demuestra (4.9) .

(2) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^1_{r,2s}(\omega_1\otimes\omega_1)=(-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{1}\lambda^{(-h-1)r}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{1-h}} \tag{4.10}$$

para $s\geq 1$.

En efecto :

Para $r=0$, $d^1_{0,2s}=-\sigma^0_{0,2s-1}\partial_{2s}\mu_{2s}$, luego $\mu_{2s}(\omega_1\otimes\omega_1)=\omega_1\otimes 1$,

$\partial_{2s}(\omega_1\otimes 1)=\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes g^{-h-1}$, $\sigma^0_{0,2s-1}(\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes g^{-h-1})=\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{-h-1}}$.

Como $g^2=1$, resulta que

$$\begin{aligned} d^1_{0,2s}(\omega_1\otimes\omega_1) &= -\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{1-h}}\\ &= (-1)^{0+1}\sum_{h=0}^{1}\lambda^{(-h-1)(0)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{1-h}}. \end{aligned}$$

Para $r = 2n-1$ $(n \geq 1)$ por hipótesis inductiva se cumple (4.10). Se va a probar que

$$d^1_{r+1,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+2} \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)(r+1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}} \; . \tag{4.11}$$

Puesto que $d^1_{r+1,2s} = -\sigma^0_{r+1,2s-1} d^1_{r,2s} d^0_{r+1,2s}$; $d^0_{r+1,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{k=0}^{1} x^k \omega_1 \otimes x^{1-k} \omega_1$,

$$d^1_{r,2s} d^0_{r+1,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{k=0}^{1} x^k \omega_1 d^1_{r,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) x^{1-k} \omega_1 \text{ , donde}$$

$$\begin{aligned}
& x^k \omega_1 d^1_{r,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) x^{1-k} \omega_1 \\
= \; & x^k \omega_1 [(-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)r} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}] x^{1-k} \omega_1 \\
= \; & (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{1} x^k \lambda^{(-h-1)r} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} \cdot x^{1-k} \omega_{g^{1-h}}, \\
= \; & (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{1} x^k \lambda^{(-h-1)r} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes (\lambda^{-h-1} x)^{1-k} \omega_{g^{1-h}} \; .
\end{aligned}$$

Como $r+1$ es par, subsisten algunos términos para $k = 0$:

$$\begin{aligned}
& \sigma^0_{r+1,2s-1} d^1_{r,2s} d^0_{r+1,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\
= \; & (-1)^{r+1} \sigma^0_{r+1,2s-1} (\sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)r} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \lambda^{-h-1} x \omega_{g^{1-h}}) \\
:= \; & (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)(r+1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}.
\end{aligned}$$

Por definición de $d^1_{r+1,2s}$, se obtiene la igualdad (4.11) .

Para $r = 2n$ $(n \geq 1)$ por hipótesis inductiva se cumple (4.10). En este caso, similarmente se prueba (4.11) .

(3) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^2_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0 \tag{4.12}$$

para $s \geq 2$ y $r \geq 1$.

En efecto :

Para $r = 1$, $d^2_{1s} = -\sigma^0_{2,s-2} d^2_{0s} d^0_{1s} - \sigma^0_{2,s-2} d^1_{1,s-1} d^1_{1s}$.

En el caso $s = 2n$ para $n \geq 1$; $d^0_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes x\omega_1 - x\omega_1 \otimes \omega_1$,

$$\begin{aligned} d^2_{0,2n} d^0_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - x\omega_1 d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= (-\alpha^{-1}\gamma_1 \omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - x\omega_1(-\alpha^{-1}\gamma_1 \omega_1 \otimes \omega_1) \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{2,2n-2}$

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2,2n-2} d^2_{0,2n} d^0_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{2,2n-2}(-\gamma_1 \alpha^{-1} \omega_1 \otimes x\omega_1) \\ &= -\gamma_1 \alpha^{-1} \omega_1 \otimes \omega_1 \ . \end{aligned}$$

Recordando que $d^1_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}$,
$d^1_{1,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\omega_g \otimes \omega_1 + \lambda \omega_1 \otimes \omega_g$:

$$\begin{aligned} d^1_{1,2n-1} d^1_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} d^1_{1,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) \omega_{g^{1-h}} \\ &= -\sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1} f(g^h, g) \omega_{g^{h+1}} \otimes \omega_{g^{1-h}} \\ &+ \sum_{h=0}^{1} \lambda^{-h} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes f(g, g^{1-h}) \omega_{g^{2-h}} \ . \end{aligned}$$

Por definición de $\sigma^0_{2,2n-2}$ subsiste un término

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2,2n-2} d^1_{1,2n-1} d^1_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{2,2n-2}(\alpha^{-1} \omega_1 \otimes \alpha \omega_1) \\ &= \sigma^0_{2,2n-2}\left(\sum_{u=0}^{1} \gamma_u \alpha^{-1} \omega_1 \otimes x^u \omega_1\right) = \gamma_1 \alpha^{-1} \omega_1 \otimes \omega_1 \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d^2_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sigma^0_{2,2n-2} d^2_{0,2n} d^0_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) - \sigma^0_{2,2n-2} d^1_{1,2n-1} d^1_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= \gamma_1 \alpha^{-1} \omega_1 \otimes \omega_1 - \gamma_1 \alpha^{-1} \omega_1 \otimes \omega_1 = 0 \ . \end{aligned}$$

En el caso $s = 2n + 1$ para $n \geq 1$, otra vez se obtiene (4.12) si $r = 1$.

Para $r \geq 1$ por hipótesis inductiva se cumple (4.12). Se va a probar que

$$d^2_{2(r+1)-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0. \tag{4.13}$$

Asumiendo que $s = 2n$ para $n \geq 1$, se debe obtener la igualdad anterior.
Puesto que $d^2_{2r+1,2n} = -\sigma^0_{2r+2,2n-2} d^2_{2r,2n} d^0_{2r+1,2n} - \sigma^0_{2r+2,2n-2} d^1_{2r+1,2n-1} d^1_{2r+1,2n}$;
del hecho que $d^0_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes x\omega_1 - x\omega_1 \otimes \omega_1$,

$$\begin{aligned} d^2_{2r,2n} d^0_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= d^2_{2r,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - x\omega_1 d^2_{2r,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= (-\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - x\omega_1(-\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1) \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{2r+2,2n-2}$ subsiste un término

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2r+2,2n-2} d^2_{2r,2n} d^0_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{2r+2,2n-2}(-\gamma_1\alpha^{-1}\omega_1 \otimes x\omega_1) \\ &= -\gamma_1\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \omega_1 \ ; \end{aligned} \tag{4.14}$$

como $\lambda^2 = 1$, se tiene $d^1_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{1} \lambda^{-h-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}$,
$d^1_{2r+1,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\omega_g \otimes \omega_1 + \lambda\omega_1 \otimes \omega_g$, luego

$$\begin{aligned} d^1_{2r+1,2n-1} d^1_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sum_{h=0}^{1} \lambda^{-h-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h} d^1_{2r+1,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1)\omega_{g^{1-h}} \\ &= -\sum_{h=0}^{1} \lambda^{-h-1}\alpha^{-1} f(g^h, g)\omega_{g^{h+1}} \otimes \omega_{g^{1-h}} \\ &+ \sum_{h=0}^{1} \lambda^{-h}\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes f(g, g^{1-h})\omega_{g^{2-h}} \end{aligned} \tag{4.15}$$

según la definición de $\sigma^0_{2r+2,2n-2}$ subsiste un término

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2r+2,2n-2} d^1_{2r+1,2n-1} d^1_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{2r+2,2n-2}(\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \alpha\omega_1) \\ &= \sigma^0_{2r+2,2n-2}(\sum_{u=0}^{1} \gamma_u\alpha^{-1}\omega_1 \otimes x^u\omega_1) \\ &= \gamma_1\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \omega_1 \ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

De (4.14) y (4.16), se obtiene la igualdad (4.13) .

Tomando $s = 2n + 1$ para $n \geq 1$; como en el caso anterior se prueba (4.13) .

(4) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^2_{2r,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1 \tag{4.17}$$

para $s \geq 2$.

En efecto :

Para $r = 0$, $d^2_{0s} = -\sigma^0_{1,s-2} d^1_{0,s-1} d^1_{0s}$.

En el caso $s = 2n$ para $n \geq 1$; $d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\sum_{h=0}^{1} \alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}$,

$$\begin{aligned} d^1_{0,2n-1} d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sum_{h=0}^{1} \alpha^{-1}\omega_{g^h} d^1_{0,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1)\omega_{g^{1-h}} \\ &= -\sum_{h=0}^{1} \alpha^{-1}\omega_{g^h}(\omega_g \otimes \omega_1 - \omega_1 \otimes \omega_g)\omega_{g^{1-h}}, \\ &= \sum_{h=0}^{1} [\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes f(g, g^{1-h})\omega_{g^{2-h}} - \alpha^{-1} f(g^h, g)\omega_{g^{h+1}} \otimes \omega_{g^{1-h}}] \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{1,2n-2}$ subsiste un sumando

$$\begin{aligned} \sigma^0_{1,2n-2} d^1_{0,2n-1} d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{1,2n-2}(\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \alpha\omega_1) \\ &= \sigma^0_{1,2n-2}(\sum_{u=0}^{1} \gamma_u \alpha^{-1}\omega_1 \otimes x^u\omega_1) = \gamma_1\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \omega_1 \ . \end{aligned}$$

Luego $d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1$.

En el caso $s = 2n + 1$ para $n \geq 1$; otra vez se obtiene $d^2_{0s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1$.

Para $r \geq 0$ por hipótesis inductiva se cumple (4.17). Se va a probar que

$$d^2_{2(r+1),s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1 \ . \tag{4.18}$$

Tomando $s = 2n$ para $n \geq 1$, se debe obtener la igualdad anterior .

Puesto que $d^2_{2(r+1),2n} = -\sigma^0_{2r+3,2n-2} d^2_{2r+1,2n} d^0_{2(r+1),2n} - \sigma^0_{2r+3,2n-2} d^1_{2(r+1),2n-1} d^1_{2(r+1),2n}$;

$$d^0_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{1} x^h\omega_1 \otimes x^{1-h}\omega_1 \ ,$$

$$d^2_{2r+1,2n} d^0_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{1} x^h\omega_1 d^2_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1)x^{1-h}\omega_1 \ ,$$

donde $d^2_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$. Así, $-\sigma^0_{2r+3,2n-2}d^2_{2r+1,2n}d^0_{2(r+1),2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

Por otro lado, como $\lambda^2=1$, por (4.10)

$$d^1_{2(r+1),2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{1-h}}\ ,$$

$$d^1_{2(r+1),2n-1}d^1_{2(r+1),2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^1_{2(r+1),2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{1-h}}\text{ donde },$$

$d^1_{2(r+1),2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)=\omega_g\otimes\omega_1-\omega_1\otimes\omega_g$. Luego,

$$\begin{aligned} d^1_{2(r+1),2n-1}d^1_{2(r+1),2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= -\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}f(g^h,g)\omega_{g^{h+1}}\otimes\omega_{g^{1-h}} \\ &+ \sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes f(g,g^{1-h})\omega_{g^{2-h}}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

se observa que para $h=0$, $f(g,g^{1-h})=\alpha$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d^2_{2(r+1),2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= -\sigma^0_{2r+3,2n-2}(\alpha^{-1}\omega_1\otimes\alpha\omega_1) \\ &= -\sigma^0_{2r+3,2n-2}(\sum_{u=0}^{1}\gamma_u\alpha^{-1}\omega_1\otimes x^u\omega_1)=-\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1\otimes\omega_1\ . \end{aligned}$$

Tomando $s=2n+1$ para $n\geq 1$, como en el caso anterior se obtiene (4.18) .

(5) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^3_{rs}(\omega_1\otimes\omega_1)=0 \tag{4.20}$$

para $s\geq 3$.

En efecto :

Para $r=0$, $d^3_{0s}=-\sigma^0_{2,s-3}d^2_{0,s-1}d^1_{0s}-\sigma^0_{2,s-3}d^1_{1,s-2}d^2_{0s}$.

En el caso $s=2n$ para $n\geq 2$; $d^1_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{1-h}}$,

$$\begin{aligned} d^2_{0,2n-1}d^1_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= -\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^2_{0,2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{1-h}} \\ &= -\sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}(-\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{1-h}} \\ &= \sum_{h=0}^{1}\alpha^{-1}g^h\cdot(\alpha^{-1}\gamma_1)\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{1-h}} \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{2,2n-3}$ se deduce que $\sigma^0_{2,2n-3}d^2_{0,2n-1}d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Por otro lado, $d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1$,

$d^1_{1,2n-2}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum\limits_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}$, luego

$$\begin{aligned} d^1_{1,2n-2}d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 d^1_{1,2n-2}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= -\sum_{h=0}^{1}(\alpha^{-1}\gamma_1\lambda^{(-h-1)}\alpha^{-1})\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}} \ , \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{2,2n-3}$ se deduce que $\sigma^0_{2,2n-3}d^1_{1,2n-2}d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Por consiguiente, $d^3_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Tomando $s = 2n + 1$ para $n \geq 1$, como en el caso anterior se obtiene (4.20) para $r = 0$.

Para $r \geq 0$ por hipótesis inductiva se cumple (4.20). Entonces, considerando la paridad de r y también la paridad de s se prueba que

$$d^3_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0 \ . \tag{4.21}$$

En efecto :

En el caso en que r es impar y s es par; $r + 1$ es par y

$d^3_{r+1,s} = -\sigma^0_{r+3,s-3}d^3_{rs}d^0_{r+1,s} - \sigma^0_{r+3,s-3}d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s} - \sigma^0_{r+3,s-3}d^1_{r+2,s-2}d^2_{r+1,s}$.

Puesto que $d^3_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$, se sigue que $\sigma^0_{r+3,s-3}d^3_{rs}d^0_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$;

$d^1_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\sum\limits_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)(r+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}$, $d^2_{r+1,s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1$,

$$\begin{aligned} d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)(r+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h} d^2_{r+1,s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1)\omega_{g^{1-h}} \\ &= -\sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)(r+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}(-\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1)\omega_{g^{1-h}} \\ &= \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)(r+1)}\alpha^{-1}g^h \cdot (\alpha^{-1}\gamma_1)\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}} \ . \end{aligned}$$

Por definición de $\sigma^0_{r+3,s-3}$ se deduce que $\sigma^0_{r+3,s-3}d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Por otro lado, $d^2_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 \otimes \omega_1$,

$d^1_{r+2,s-2}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)(r+2)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}}$, luego

$$\begin{aligned} d^1_{r+2,s-2} d^2_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\alpha^{-1}\gamma_1 \omega_1 d^1_{r+2,s-2}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= -\sum_{h=0}^{1} (\alpha^{-1}\gamma_1 \lambda^{(-h-1)(r+2)} \alpha^{-1}) \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{1-h}} \ , \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{r+3,s-3}$ se deduce que $\sigma^0_{r+3,s-3} d^1_{r+2,s-2} d^2_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$. Por consiguiente, $d^3_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Considerando los otros casos de paridad de r y de s, también se obtiene (4.21) .

(6) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^4_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0 \tag{4.22}$$

para $s \geq 4$. En efecto :

Para $r = 0$, $d^4_{0s} = -\sigma^0_{3,s-4} d^3_{0,s-1} d^1_{0s} - \sigma^0_{3,s-4} d^2_{1,s-2} d^2_{0s} - \sigma^0_{3,s-4} d^1_{2,s-3} d^3_{0s}$.

En el caso $s = 2n$ para $n \geq 2$; se sabe que $d^3_{0,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0 = d^3_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1)$, luego basta observar que $d^2_{1,2n-2} d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 d^2_{1,2n-2}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$ para ver que $d^4_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

En el caso $s = 2n+1$ para $n \geq 2$; se sabe que $d^3_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0 = d^3_{0,2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1)$, luego basta observar que $d^2_{1,2n-1} d^2_{0,2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\gamma_1\omega_1 d^2_{1,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$ para ver que $d^4_{0,2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Para $r \geq 0$ por hipótesis inductiva se cumple (4.22). Entonces, considerando las paridades de r y s se prueba que $d^4_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Observando (4.20), (4.22) y (4.5), se concluye que $d^\ell_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$ para $\ell \geq 5$. □

Homología de Hochschild

Sea $E = A \rtimes_f C_2$ con A, C_2 y f como en el inicio de la sección 4.2 y M un $E-$bimódulo. Se asume que las hipótesis del Teorema 4.2.6 se cumplen. Sea $\alpha = \sum_{u=0}^{1} \gamma_u x^u$. Como en la Proposición 4.3.10, se puede hallar los morfismos de $E-$bimódulos

$$\overline{d}^\ell_{rs} : M \to M \ (r, s \geq 0;\ 0 \leq \ell \leq \min(2, s) \text{ y } r + \ell > 0),$$

que están dados por las siguientes fórmulas:

$$\overline{d}^0_{2r-1,s}(m) = xm - mx \ , \tag{4.23}$$

$$\overline{d}^0_{2r,s}(m) = \sum_{h=0}^{1} x^{1-h} m x^h \ , \tag{4.24}$$

$$\overline{d}^1_{r,2s-1}(m) = (-1)^r (m - \lambda^r \omega_g m \omega_g^{-1}) \ , \tag{4.25}$$

$$\overline{d}^1_{r,2s}(m) = (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{1} \lambda^{(-h-1)r} \omega_g^{-h-1} \alpha m \alpha^{-1} \omega_g^{h+1} \ , \tag{4.26}$$

$$\overline{d}^2_{2r-1,s}(m) = 0 \ , \tag{4.27}$$

$$\overline{d}^2_{2r,s}(m) = -\gamma_1 m \alpha^{-1} \ . \tag{4.28}$$

Tensorizando M sobre E^e con el complejo (X_*, d_*) del Teorema 4.2.5 y usando las identificaciones $\vartheta_{rs} : M \to M \otimes_{E^e} X_{rs}$, dadas por
$\vartheta_{r,2s}(m) = m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$ y $\vartheta_{r,2s+1}(m) = m\omega_g^{-1} \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$, se obtiene el complejo

$$\overline{X}_*(E, M) \ : \ \overline{X}_0 \xleftarrow{\overline{d}_1} \overline{X}_1 \xleftarrow{\overline{d}_2} \overline{X}_2 \xleftarrow{\overline{d}_3} \overline{X}_3 \xleftarrow{\overline{d}_4} \cdots \ ,$$

donde $\overline{X}_n = \bigoplus_{r+s=n} M_{rs}$ y $\overline{d}_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{\min(2,s)} \overline{d}^\ell_{rs}$, donde cada M_{rs} es una copia de M.

Una prueba más detallada del resultado siguiente se puede ver en el Teorema 4.3.11.

Teorema 4.2.7. *La homología de Hochschild $H_*(E, M)$ de E con coeficientes en M se expresa como la homología de $\overline{X}_*(E, M)$.*

Prueba. Los complejos de $E-$bimódulos $M \otimes_{E^e} (X_*, d_*)$ y $\overline{X}_*(E, M)$ son isomorfos. Entonces, $H_n(M \otimes_{E^e} (X_*, d_*)) \cong H_n(\overline{X}_*(E, M))$, $\forall n \geq 0$.
Por el Corolario 3.5.3 la homología de $\overline{X}_*(E, M)$ es la homología de Hochschild de E con coeficientes en M. $\square$

Sea $\omega_g x = -x\omega_g$, $\omega_g^2 = \alpha$ y $g \cdot x = -x$. Se observa que

$$\omega_g^\imath = \begin{cases} \omega_{g^\imath} & \text{si } 0 \leq \imath \leq 1 \\ \alpha & \text{si } \imath = 2 \ , \end{cases}$$

pues $\omega_g^2 = \omega_g\omega_g = f(g,g)\omega_{g^2} = \alpha\omega_1 = \alpha$.

Pero

$$\omega_{g^2}x = \omega_1 x \quad = \quad x\omega_1; \text{ luego } \omega_{g^\imath}x = \lambda^\imath x\omega_{g^\imath},$$

donde $\lambda = -1$.

Ahora, tomando $m = x^\jmath\omega_{g^\imath}$ en (4.23) :

$$\begin{aligned} d^0_{2r-1,s}(x^\jmath\omega_{g^\imath}) &= x(x^\jmath\omega_{g^\imath}) - (x^\jmath\omega_{g^\imath})x \\ &= x^{\jmath+1}\omega_{g^\imath} - x^\jmath(\omega_{g^\imath}x) \\ &= x^{\jmath+1}\omega_{g^\imath} - x^\jmath(\lambda^\imath x\omega_{g^\imath}) = (1-\lambda^\imath)x^{\jmath+1}\omega_{g^\imath} \ . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Se observa que para $h,\imath = 0,1$ se tiene $\omega_{g^\imath}x^h = \lambda^{h\imath}x^h\omega_{g^\imath}$.

Sustituyendo m por $x^\jmath\omega_{g^\imath}$ en la expresión (4.24) :

$$\begin{aligned} d^0_{2r,s}(x^\jmath\omega_{g^\imath}) = \sum_{h=0}^{1} x^{1-h}(x^\jmath\omega_{g^\imath})x^h &= \sum_{h=0}^{1} x^{1+\jmath-h}(\omega_{g^\imath}x^h) \\ &= \sum_{h=0}^{1} x^{1+\jmath-h}(\lambda^{h\imath}x^h\omega_{g^\imath}) = \sum_{h=0}^{1}\lambda^{h\imath}x^{1+\jmath}\omega_{g^\imath} \ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Considerando $m = x^\jmath\omega_{g^\imath}$ en (4.25) :

$$d^1_{r,2s-1}(x^\jmath\omega_{g^\imath}) \quad = \quad (-1)^r(x^\jmath\omega_{g^\imath} - \lambda^r\omega_g(x^\jmath\omega_{g^\imath})\omega_g^{-1});$$

donde $\omega_g x^\jmath = (\omega_g x^{\jmath-1})x = (\lambda^{\jmath-1}x^{\jmath-1}\omega_g)x = \lambda^\jmath x^\jmath\omega_g$;

$\omega_{g^\imath}\omega_g^{-1} = \omega_g^\imath\omega_g^{-1} = \omega_g^{\imath-1} = \omega_{g^{\imath-1}}$, asociando :

$$\begin{aligned} \omega_g(x^\jmath\omega_{g^\imath})\omega_g^{-1} = (\omega_g x^\jmath)(\omega_{g^\imath}\omega_g^{-1}) &= (\lambda^\jmath x^\jmath\omega_g)(\omega_{g^{\imath-1}}) \\ &= \lambda^\jmath x^\jmath f(g,g^{\imath-1})\omega_{g^\imath}, \ f(g,g^{\imath-1}) = 1 : \\ &= \lambda^\jmath x^\jmath\omega_{g^\imath} \ . \end{aligned}$$

Luego $\lambda^r\omega_g(x^\jmath\omega_{g^\imath})\omega_g^{-1} = \lambda^{\jmath+r}x^\jmath\omega_{g^\imath}$. Así,

$$d^1_{r,2s-1}(x^\jmath\omega_{g^\imath}) = (-1)^r(1-\lambda^{\jmath+r})x^\jmath\omega_{g^\imath} \ . \tag{4.31}$$

Reemplazando m por $x^\jmath\omega_{g^\imath}$ en la igualdad (4.26) :

$$d^1_{r,2s}(x^\jmath\omega_{g^\imath}) \quad = \quad (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{1}\lambda^{(-h-1)r}\omega_g^{-h-1}\alpha(x^\jmath\omega_{g^\imath})\alpha^{-1}\omega_g^{h+1};$$

donde $\omega_g^{-h-1}\alpha = \omega_g^{-h-1}\omega_g^2 = \omega_g^{1-h}$, $\alpha^{-1}\omega_g^{h+1} = (\omega_g^{1-h})^{-1} = \omega_g^{h-1}$;

$$\begin{aligned}
(\omega_g^{-h-1}\alpha)x^{\jmath} &= \omega_g^{1-h}x^{\jmath} \\
&= \omega_{g^{1-h}}x^{\jmath} = \lambda^{\jmath(1-h)}x^{\jmath}\omega_{g^{1-h}} \ ; \\
\omega_{g^{\imath}}(\alpha^{-1}\omega_g^{h+1}) &= \omega_{g^{\imath}}\omega_{g^{h-1}} = f(g^{\imath}, g^{h-1})\omega_{g^{\imath+h-1}} \ ,
\end{aligned}$$

como $0 \leq \imath \leq 1$ y $0 \leq h \leq 1$, se deduce que $\imath + h \leq 2$, $\imath + h - 1 \leq 2 - 1 < 2$ y $f(g^{\imath}, g^{h-1}) = 1$. Así, $\omega_{g^{\imath}}(\alpha^{-1}\omega_g^{h+1}) = \omega_{g^{\imath+h-1}}$.

Asociando

$$\begin{aligned}
\omega_g^{-h-1}\alpha(x^{\jmath}\omega_{g^{\imath}})\alpha^{-1}\omega_g^{h+1} &= [\omega_g^{-h-1}\alpha x^{\jmath}][\omega_{g^{\imath}}\alpha^{-1}\omega_g^{h+1}] \\
&= (\lambda^{(1-h)\jmath}x^{\jmath}\omega_{g^{1-h}})(\omega_{g^{\imath+h-1}}) \\
&= \lambda^{(1-h)j}x^{\jmath}f(g^{1-h}, g^{\imath+h-1})\omega_{g^{\imath}} \\
&= \lambda^{(1-h)\jmath}x^{\jmath}\omega_{g^{\imath}} = \lambda^{(-h-1)\jmath}x^{\jmath}\omega_{g^{\imath}} \text{ pues } \lambda^2 = 1 \ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d^1_{r,2s}(x^{\jmath}\omega_{g^{\imath}}) = (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{1}\lambda^{(-h-1)(\jmath+r)}x^{\jmath}\omega_{g^{\imath}} \ .$$

Del hecho que $\displaystyle\sum_{h=0}^{1}\lambda^{(-h-1)(\jmath+r-2[\frac{r}{2}])} = \sum_{h=0}^{1}\lambda^{h(\jmath+r-2[\frac{r}{2}])}$; se deduce que

$$d^1_{r,2s}(x^{\jmath}\omega_{g^{\imath}}) = (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{1}\lambda^{h(\jmath+r)}x^{\jmath}\omega_{g^{\imath}} \ . \tag{4.32}$$

Es necesario recordar que la homología de Hochschild de un producto cruzado E denotada por $HH_*(E)$, es la homología de Hochschild de E con coeficientes en E, entonces $HH_n(E) = H_n(E, E)$ para $n \geq 0$ (ver el Corolario 3.5.4). Recordando que $E = A \rtimes_f C_2$ es el producto cruzado de A con C_2, donde $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^2\rangle}$ y $C_2 = \langle g\rangle = \{1, g\}$, se obtiene el siguiente

Corolario 4.2.8. *Si K es un cuerpo de característica diferente de 2, entonces*

$$HH_n(E) = H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) \oplus H_n(\overline{X}_*(A\omega_g)),$$

donde $E = A\omega_1 \oplus A\omega_g$.

Prueba. Es análoga a la prueba del Corolario 4.3.12. □

Se asume que α es un elemento invertible del cuerpo K. Se sabe que $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} = K \oplus Kx$ es una $K-$álgebra, donde x denota la clase de X en A. El grupo cíclico $C_2 = \langle g \rangle$ de orden 2 actúa sobre A via $g \cdot x = -x$. Puesto que E es el producto cruzado

$$E = A\omega_1 \oplus A\omega_g \ ,$$

de A con C_2, definido por $\omega_g x = -x\omega_g$ y $\omega_g^2 = \alpha$,
se calcula la homología de Hochschild de $E = \frac{K[X]}{\langle X^2 \rangle} \rtimes_f C_2$ mediante

$$H_n(E,E) = H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) \oplus H_n(\overline{X}_*(A\omega_g)) \ .$$

Por lo tanto, se debe calcular la homología de $\overline{X}_*(A\omega_{g^\imath})$ $(0 \le \imath \le 1)$. Se observa que $\overline{X}_*(A\omega_{g^\imath})$ es el complejo total del complejo doble

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle d^1_{03}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{13}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{23}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{33}} & & \\
A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{12}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{22}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{32}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{42}} & \cdots \\
\big\downarrow{\scriptstyle d^1_{02}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{12}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{22}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{32}} & & \\
A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{11}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{21}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{31}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{41}} & \cdots \\
\big\downarrow{\scriptstyle d^1_{01}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{11}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{21}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d^1_{31}} & & \\
A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{10}} & A\omega_{g^i} & \xleftarrow{d^0_{20}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{30}} & A\omega_{g^\imath} & \xleftarrow{d^0_{40}} & \cdots
\end{array} \tag{4.33}$$

donde las diferenciales horizontales y verticales son dadas por:

$$\begin{aligned}
&d^0_{2r-1,s}(x^\jmath \omega_{g^\imath}) = (1-\lambda^\imath)x^{\jmath+1}\omega_{g^\imath}, \\
&d^0_{2r,s}(x^\jmath \omega_{g^\imath}) = \sum_{h=0}^{1} \lambda^{h\imath} x^{1+\jmath}\omega_{g^\imath}, \\
&d^1_{r,2s-1}(x^\jmath \omega_{g^\imath}) = (-1)^r(1-\lambda^{\jmath+r})x^\jmath \omega_{g^\imath}, \\
&d^1_{r,2s}(x^\jmath \omega_{g^\imath}) = (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{1} \lambda^{h(\jmath+r)} x^\jmath \omega_{g^\imath} \ .
\end{aligned}$$

Estas igualdades fueron obtenidas en (4.29), (4.30), (4.31) y (4.32), respectivamente.

Proposición 4.2.9. *Los morfismos horizontales y verticales de* (4.33) *satisfacen las identidades* $d^0d^0 = 0$, $d^1d^1 = 0$ *y* $d^1d^0 = -d^0d^1$.

Prueba. Se deduce de la prueba de la Proposición 4.3.13. $\square$

4.3 Homología de Hochschild de $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 3$

En esta sección se muestra la utilidad de aplicaciones (bi)lineales sobre productos cruzados, y se expresa la homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$ en términos de homologías de complejos totales de t complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado.

Sea K un cuerpo. Entonces, el anillo $K[X]$ de polinomios en la indeterminada X con coeficientes en K es un dominio euclidiano. En esta sección $E = A \rtimes_f C_t$ es un producto cruzado (ver la Observación 4.1.9), donde $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^t \rangle}$ y $C_t = \langle g \rangle = \{1, g, \ldots, g^{t-1}\}$ es un grupo cíclico de orden t. Se denota por x la clase de X en A.
Por la Proposición 4.1.5, se asume que el $2-$cociclo $f : C_t \times C_t \to A^*$ tiene la forma

$$f(g^i, g^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j < t \\ \alpha & \text{si } i + j \geq t \ , \end{cases} \tag{4.34}$$

donde $0 \leq i, j < t$ y α es un elemento C_t-invariante del grupo multiplicativo A^* de las unidades de A.

En esta sección, se aplica el Teorema 4.1.10 para obtener una resolución proyectiva relativa de $E = A \rtimes_f C_t$ como un $E-$bimódulo. Luego, se desea mostrar que este complejo no solamente da la información de la existencia de la homología de Hochschild del producto cruzado mediante el Corolario 3.5.4, sino también proporciona un complejo de cadenas auxiliar para obtener su homología de Hochschild (Teorema 4.3.11).

La resolución (X_*, d_*) de $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$.

Sean $Y_s = E \otimes K[C_t]$ $(s \geq 0)$ y $X_{rs} = E \otimes E$ $(r, s \geq 0)$. Los grupos X_{rs} son $E-$bimódulos de manera obvia y los grupos Y_s son $E-$bimódulos via la acción canónica izquierda y la acción derecha siguiente $(a\omega_{g^i} \otimes g^j)b\omega_{g^h} = ab^{g^{i+j+s}} f(g^j, g^h)\omega_{g^i} \otimes g^{j+h}$.

Proposición 4.3.1. *Para $(r, s \geq 0)$, $X_{rs} = E \otimes E$ y $Y_s = E \otimes K[C_t]$ son $E-$bimódulos.*

Prueba. 1) $E \otimes E$ es un $E-$bimódulo.
En efecto, como producto tensorial de $K-$módulos, $E \otimes E$ es un grupo abeliano aditivo.

Ahora, como en la prueba de la Proposición 3.1.14 se dota a $E \otimes E$ la estructura de un $(E, E)-$bimódulo mediante

$$\lambda \cdot (a \otimes b) = (\lambda a) \otimes b,\ (a \otimes b) \cdot \lambda' = a \otimes (b\lambda') \text{ para } a \otimes b \in E \otimes E,\ \lambda \in E \text{ y } \lambda' \in E.$$

Como E es una $K-$álgebra, se sigue que $E \otimes E$ es un $E-$bimódulo.

2) $E \otimes K[C_t]$ es un $E-$bimódulo.

En efecto, como producto tensorial de $K-$módulos, $E \otimes K[C_t]$ es un grupo abeliano aditivo.

Se le dota a $E \otimes K[C_t]$ la estructura de un $(E, E)-$bimódulo como sigue.

Dados $c \otimes x$ y $a\omega_{g^i} \otimes g^j \in E \otimes K[C_t]$, $\lambda \in E$ y $b\omega_{g^h} \in E$ se definen:

$$\lambda(c \otimes x) = (\lambda c) \otimes x\ , \tag{4.35}$$

$$(a\omega_{g^i} \otimes g^j)b\omega_{g^h} = ab^{g^{i+j+\underline{s}}} f(g^j, g^h)\omega_{g^i} \otimes g^{j+h}\ . \tag{4.36}$$

Es claro que, se cumplen para (4.35) las 4 condiciones siguientes

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(c \otimes x) = \lambda_1(c \otimes x) + \lambda_2(c \otimes x),$$

$$(\lambda_1\lambda_2)(c \otimes x) = \lambda_1(\lambda_2(c \otimes x)),$$

$$1(c \otimes x) = c \otimes x,$$

$$\lambda(c_1 \otimes x_1 + c_2 \otimes x_2) = \lambda(c_1 \otimes x_1) + \lambda(c_2 \otimes x_2)$$

para todo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in E$ y todo $c \otimes x$, $c_1 \otimes x_1$ y $c_2 \otimes x_2 \in E \otimes K[C_t]$.

Se cumplen para (4.36) las 4 condiciones siguientes

M_1: $(a\omega_{g^i} \otimes g^j)(b_1\omega_{g^h} + b_2\omega_{g^k}) = (a\omega_{g^i} \otimes g^j)b_1\omega_{g^h} + (a\omega_{g^i} \otimes g^j)b_2\omega_{g^k}$,

M_2: $(a\omega_{g^i} \otimes g^j)(b_1\omega_{g^h} b_2\omega_{g^k}) = ((a\omega_{g^i} \otimes g^j)b_1\omega_{g^h})b_2\omega_{g^k}$,

M_3: $(a\omega_{g^i} \otimes g^j)\omega_1 = a\omega_{g^i} \otimes g^j$,

M_4: $(a\omega_{g^i} \otimes g^j + b\omega_{g^h} \otimes g^k)c\omega_{g^\ell} = (a\omega_{g^i} \otimes g^j)c\omega_{g^\ell} + (b\omega_{g^h} \otimes g^k)c\omega_{g^\ell}$ para todo $b_1\omega_{g^h}, b_2\omega_{g^k}$, $c\omega_{g^\ell} \in E$ y todo $a\omega_{g^i} \otimes g^j$ y $b\omega_{g^h} \otimes g^k \in E \otimes K[C_t]$.

En efecto, sólo se verifica la condición M_2 ya que las otras condiciones son inmediatas:

$$\begin{aligned} M_2\colon (a\omega_{g^i} \otimes g^j)(b_1\omega_{g^h} b_2\omega_{g^k}) &= (a\omega_{g^i} \otimes g^j)(b_1 b_2{}^{g^h} f(g^h, g^k)\omega_{g^{h+k}}) \\ &= a(b_1 b_2{}^{g^h} f(g^h, g^k))^{g^{i+j+\underline{s}}} f(g^j, g^{h+k})\omega_{g^i} \otimes g^{j+h+k}; \quad (1) \end{aligned}$$

como $(a\omega_{g^i}\otimes g^j)b_1\omega_{g^h} = ab_1{}^{g^{i+j+\underline{s}}}f(g^j,g^h)\omega_{g^i}\otimes g^{j+h}$,

$$\begin{aligned} M_2\colon ((a\omega_{g^i}\otimes g^j)b_1\omega_{g^h})b_2\omega_{g^k} &= (ab_1{}^{g^{i+j+\underline{s}}}f(g^j,g^h)\omega_{g^i}\otimes g^{j+h})b_2\omega_{g^k} \\ &= ab_1{}^{g^{i+j+\underline{s}}}f(g^j,g^h)b_2{}^{g^{i+j+h+\underline{s}}}f(g^{j+h},g^k)\omega_{g^i}\otimes g^{j+h+k}; \quad (2) \end{aligned}$$

puesto que $f(g^i,g^j)$ es C_t-invariante, $f(g^h,g^k)^{g^j}f(g^j,g^{h+k}) = f(g^j,g^h)f(g^{j+h},g^k)$, considerando que $f(g^j,g^h)\in Z(A)$, de (1) y (2) se tiene que

$(a\omega_{g^i}\otimes g^j)(b_1\omega_{g^h}b_2\omega_{g^k}) = ((a\omega_{g^i}\otimes g^j)b_1\omega_{g^h})b_2\omega_{g^k}$.

Finalmente, dado $\lambda = c\omega_{g^\ell}\in E$ para ver la compatibilidad de (4.35) y (4.36), se calculan (3) y (4):

$$\begin{aligned} [\lambda(a\omega_{g^i}\otimes g^j)]b\omega_{g^h} &= [(c\omega_{g^\ell}a\omega_{g^i})\otimes g^j]b\omega_{g^h} \\ &= [ca^{g^\ell}f(g^\ell,g^i)\omega_{g^{\ell+i}}\otimes g^j]b\omega_{g^h} \\ &= ca^{g^\ell}f(g^\ell,g^i)b^{g^{\ell+i+j+\underline{s}}}f(g^j,g^h)\omega_{g^{\ell+i}}\otimes g^{j+h}; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda[(a\omega_{g^i}\otimes g^j)b\omega_{g^h}] &= \lambda(ab^{g^{i+j+\underline{s}}}f(g^j,g^h)\omega_{g^i}\otimes g^{j+h}) \\ &= (c\omega_{g^\ell})(ab^{g^{i+j+\underline{s}}}f(g^j,g^h)\omega_{g^i}\otimes g^{j+h}) \\ &= c(ab^{g^{i+j+\underline{s}}}f(g^j,g^h))^{g^\ell}f(g^\ell,g^i)\omega_{g^{\ell+i}}\otimes g^{j+h}. \quad (4) \end{aligned}$$

Comparando (3) y (4), $[\lambda(a\omega_{g^i}\otimes g^j)]b\omega_{g^h} = \lambda[(a\omega_{g^i}\otimes g^j)b\omega_{g^h}]$. □

Se definen :

para $(r,s\geq 0)$, y para los $E-$bimódulos $X_{rs} = E\otimes E$ y $Y_s = E\otimes K[C_t]$, donde las acciones izquierdas y derechas de Y_s y X_{rs} son dadas en la prueba de la Proposición 4.3.1 ;

los morfismos de $E-$bimódulos $\mu_s : X_{0s}\to Y_s$ $(s\geq 0)$, $\partial_s : Y_s\to Y_{s-1}$ $(s\geq 1)$ y $d^0_{rs} : X_{rs}\to X_{r-1,s}$ $(r\geq 1)$, por

$$\begin{aligned} &\mu_s(a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}) = a(g^{i+\underline{s}}\cdot b)\omega_{g^i}\otimes g^j, \\ &\partial_{2s-1}(a\omega_{g^i}\otimes g^j) = af(g,g^j)\omega_{g^i}\otimes g^{j+1} - af(g^i,g)\omega_{g^{i+1}}\otimes g^j, \\ &\partial_{2s}(a\omega_{g^i}\otimes g^j) = \sum_{h=0}^{t-1} af(g^i,g^h)\alpha^{-1}f(g^{-h-1},g^j)\omega_{g^{i+h}}\otimes g^{j-h-1}, \\ &d^0_{2r-1,s}(a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}) = a\omega_{g^i}\otimes xb\omega_{g^j} - a(g^{i+\underline{s}}\cdot x)\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}, \\ &d^0_{2r,s}(a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}) = \sum_{h=0}^{t-1} a(g^{i+\underline{s}}\cdot x^h)\omega_{g^i}\otimes x^{t-h-1}b\omega_{g^j}; \end{aligned}$$

los morfismos de $E-$módulos izquierdos $\sigma^0_{0s} : Y_s \to X_{0s}$ y

$\sigma^0_{r+1,s} : X_{rs} \to X_{r+1,s}$, por

$$\sigma^0_{0s}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = a\omega_{g^i} \otimes \omega_{g^j},$$

$$\sigma^0_{2r-1,s}(a\omega_{g^i} \otimes x^m\omega_{g^j}) = \sum_{h=0}^{m-1} a(g^{i+\underline{s}} \cdot x^h)\omega_{g^i} \otimes x^{m-h-1}\omega_{g^j},$$

$$\sigma^0_{2r,s}(a\omega_{g^i} \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < t-1 \\ a\omega_{g^i} \otimes \omega_{g^j} & \text{si } m = t-1 \ . \end{cases}$$

El elemento $a\omega_{g^i} \otimes g^j$ de $E \otimes K[C_t]$ se puede descomponer en la forma

$a\omega_{g^i} \otimes g^j = a\omega_{g^i}(\omega_1 \otimes 1)\omega_{g^j}$.

Se observa que

$$\begin{aligned} \partial_{s-1}\partial_s(\omega_1 \otimes 1) &= \partial_s\partial_{s+1}(\omega_1 \otimes 1) \\ &= \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} f(g, g^{-h-1})\omega_{g^h} \otimes g^{-h} - \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} f(g^h, g)\omega_{g^{h+1}} \otimes g^{-h-1}. \end{aligned}$$

Lema 4.3.2. *Se cumple la igualdad*

$$\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} f(g, g^{-h-1})\omega_{g^h} \otimes g^{-h} = \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} f(g^h, g)\omega_{g^{h+1}} \otimes g^{-h-1}.$$

Prueba. Se hace asociando apropiadamente, cambiando una variable y teniendo en cuenta que $f(g^{-h-1}, g^h) = 1 = f(g^{-h-2}, g^{h+1})$ para $0 \leq h \leq t-2$.

En efecto, a partir de $0 \leq h \leq t-2$ se obtiene que $0 \leq t-(h+2) \leq t-2 < t$ y

$1 \leq t-(h+1) \leq t-1 < t$, luego $f(g^{-h-1}, g^h) = f(g^{t-h-1}, g^h) = 1$ ya que $(t-h-1)+h < t$

y $f(g^{-h-2}, g^{h+1}) = f(g^{t-h-2}, g^{h+1}) = 1$ ya que $(t-h-2)+(h+1) < t$.

Por otro lado, haciendo cambio de variable $h' = h-1$ y renombrando ésta por h :

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} f(g, g^{-h-1})\omega_{g^h} \otimes g^{-h} &= \omega_1 \otimes 1 + \sum_{h=1}^{t-1} \alpha^{-1} f(g, g^{-h-1})\omega_{g^h} \otimes g^{-h} \\ &= \sum_{h=0}^{t-2} \alpha^{-1} f(g, g^{-h-2})\omega_{g^{h+1}} \otimes g^{-h-1} + \omega_1 \otimes 1 \ . \end{aligned}$$

Aplicando la condición de cociclo y C_t-invarianza de $f(g^i, g^j)$:

$$\begin{aligned} f(g, g^{-h-2}) &= f(g^{-h-2}, g) = f(g^{-h-2}, g)f(g^{-h-1}, g^h) \\ &= f(g, g^h)^{g^{-h-2}} f(g^{-h-2}, g^{h+1}) \\ &= f(g, g^h) = f(g^h, g), \text{luego} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}f(g,g^{-h-1})\omega_{g^h}\otimes g^{-h} &= \sum_{h=0}^{t-2}\alpha^{-1}f(g^h,g)\omega_{g^{h+1}}\otimes g^{-h-1}+\omega_1\otimes 1\\ &= \sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}f(g^h,g)\omega_{g^{h+1}}\otimes g^{-h-1}.\end{aligned}$$

□

El elemento $a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}$ de $E\otimes E$ se puede descomponer en la forma

$a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}=a\omega_{g^i}(\omega_1\otimes\omega_1)b\omega_{g^j}$.

Se observa que

$$\begin{aligned}d^0_{2r-1,s}d^0_{2r,s}(\omega_1\otimes\omega_1) &= d^0_{2r,s}d^0_{2r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)\\ &= \sum_{h=0}^{t-1}g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{t-h}\omega_1-\sum_{h=0}^{t-1}g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_1\ .\end{aligned}$$

Lema 4.3.3. *Se cumple la igualdad*

$$\sum_{h=0}^{t-1}g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{t-h}\omega_1=\sum_{h=0}^{t-1}g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_1\ .$$

Prueba. Sea $P(X)=X^t$ para $t\geq 3$, $x=X+\langle X^t\rangle$. Entonces

$P(x)=P(X)+\langle X^t\rangle=0$ en A. Aplicando el automorfismo $g^{\underline{s}}$ del $K-$álgebra A, se obtiene

$g^{\underline{s}}P(x)=0$. Se sigue que $x^t=0$, $g^{\underline{s}}\cdot x^t=0$.

Por lo tanto $\omega_1\otimes x^t\omega_1=g^{\underline{s}}\cdot x^t\omega_1\otimes\omega_1=0$.

Asociando apropiadamente y cambiando variable $h=h'+1$ en una sumatoria

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{t-1}g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{t-h}\omega_1 &= \omega_1\otimes x^t\omega_1+\sum_{h=1}^{t-1}g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{t-h}\omega_1\\ &= \sum_{h=0}^{t-2}g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_1+g^{\underline{s}}\cdot x^t\omega_1\otimes\omega_1\\ &= \sum_{h=0}^{t-1}g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_1.\end{aligned}$$

□

Observación. Se pueden descomponer como elementos de $E-$módulos izquierdos:

$a\omega_{g^i}\otimes g^j=a\omega_{g^i}(\omega_1\otimes g^j)$; $a\omega_{g^i}\otimes b\omega_{g^j}=a\omega_{g^i}(\omega_1\otimes b\omega_{g^j})$.

Lema 4.3.4. σ^0 *es una homotopía de contracción en* ${}_E\mathfrak{Ch}$.

Prueba. Se verifican las igualdades $\mu_s\sigma^0_{0s} = id_{Y_s}$, $d^0_{1s}\sigma^0_{1s} + \sigma^0_{0s}\mu_s = id_{X_{0s}}$,
$d^0_{2r,s}\sigma^0_{2r,s} + \sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s} = id_{X_{2r-1,s}}$ y $d^0_{2r+1,s}\sigma^0_{2r+1,s} + \sigma^0_{2r,s}d^0_{2r,s} = id_{X_{2r,s}}$ $(r \geq 1)$.
Esto se hace con las 6 igualdades siguientes :

(1) $\mu_s\sigma^0_{0s}(\omega_1 \otimes g^j) = \omega_1 \otimes g^j$,

(2) $\sigma^0_{0s}\mu_s(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = (g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes \omega_{g^j}$ para $0 \leq m \leq t-1$,

(3) $\sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} \omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j} & \text{si } 0 \leq m < t-1 \\ \omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j} - T & \text{si } m = t-1 \end{cases}$

donde $T = \sum_{h=0}^{t-1}(g^{\underline{s}} \cdot x^h)\omega_1 \otimes x^{t-h-1}\omega_{g^j}$,

(4) $d^0_{2r,s}\sigma^0_{2r,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq m < t-1 \\ T & \text{si } m = t-1 \end{cases}$,

(5) $\sigma^0_{2r,s}d^0_{2r,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = (g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes \omega_{g^j}$ para $0 \leq m \leq t-1$,

(6) $d^0_{2r+1,s}\sigma^0_{2r+1,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ \omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j} - (g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes \omega_{g^j} & \text{si } 0 < m \leq t-1 \end{cases}$.

En efecto :

(1) $\mu_s\sigma^0_{0s}(\omega_1 \otimes g^j) = \mu_s(\omega_1 \otimes \omega_{g^j}) = \omega_1 \otimes g^j$;

(2) para $0 \leq m \leq t-1$

$$\begin{aligned} \sigma^0_{0s}\mu_s(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) &= \sigma^0_{0s}((g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes g^j) \\ &= (g^{\underline{s}} \cdot\ x^m)\omega_1 \otimes \omega_{g^j}; \end{aligned}$$

(3) para $0 \leq m < t-1$

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) &= \sigma^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes x^{m+1}\omega_{g^j} - (g^{\underline{s}} \cdot x)\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) \\ &= \sum_{h=0}^{m}(g^{\underline{s}} \cdot x^h)\omega_1 \otimes x^{m-h}\omega_{g^j} \\ &- \sum_{h=0}^{m-1}(g^{\underline{s}} \cdot x^{h+1})\omega_1 \otimes x^{m-h-1}\omega_{g^j} = \omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}\ , \end{aligned}$$

(3) para $m = t-1$

$$\begin{aligned} d^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes x^m\omega_{g^j}) &= \omega_1 \otimes x^t\omega_{g^j} - g^{\underline{s}} \cdot x\omega_1 \otimes x^{t-1}\omega_{g^j} \\ &= -g^{\underline{s}} \cdot x\omega_1 \otimes x^{t-1}\omega_{g^j} \text{ pues } x^t = 0\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{2r-1,s}d^0_{2r-1,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) &= -\sigma^0_{2r-1,s}(g^{\underline{s}}\cdot x\omega_1\otimes x^{t-1}\omega_{g^j})\\
&= -\sum_{h=0}^{t-2} g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{t-h-2}\omega_{g^j}\\
&= -\sum_{h=1}^{t-1} g^{\underline{s}}\cdot x^{h}\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_{g^j}\\
&= \omega_1\otimes x^{t-1}\omega_{g^j} - \sum_{h=0}^{t-1} g^{\underline{s}}\cdot x^{h}\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_{g^j}\ ;
\end{aligned}$$

(4) puesto que $\sigma^0_{2r,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le m< t-1\\ \omega_1\otimes\omega_{g^j} & \text{si } m=t-1\ , \end{cases}$

$d^0_{2r,s}(\omega_1\otimes\omega_{g^j}) = \sum_{h=0}^{t-1} g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_{g^j}$,

$d^0_{2r,s}\sigma^0_{2r,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le m< t-1\\ T & \text{si } m=t-1\ ; \end{cases}$

(5) para $0\le m\le t-1$

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{2r,s}d^0_{2r,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) &= \sigma^0_{2r,s}(\sum_{h=0}^{t-1} g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{t-h-1+m}\omega_{g^j})\\
&= \sigma^0_{2r,s}(g^{\underline{s}}\cdot x^m\omega_1\otimes x^{t-1}\omega_{g^j}) \text{ para } h=m\\
&= g^{\underline{s}}\cdot x^m\omega_1\otimes\omega_{g^j}\ ;
\end{aligned}$$

(6) como $\sigma^0_{2r+1,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0\\ \sum_{h=0}^{m-1} g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{m-h-1}\omega_{g^j} & \text{si } 0<m\le t-1 \end{cases}$,

para $0<m\le t-1$ se tiene

$$d^0_{2r+1,s}[g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{m-h-1}\omega_{g^j}] = g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{m-h}\omega_{g^j} - g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{m-h-1}\omega_{g^j}.$$

Solamente subsisten los términos extremos en la suma del segundo miembro

$$\begin{aligned}
d^0_{2r+1,s}\sigma^0_{2r+1,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) &= \sum_{h=0}^{m-1}[g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{m-h}\omega_{g^j} - g^{\underline{s}}\cdot x^{h+1}\omega_1\otimes x^{m-h-1}\omega_{g^j}]\\
&= \omega_1\otimes x^m\omega_{g^j} - g^{\underline{s}}\cdot x^m\omega_1\otimes\omega_{g^j}\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d^0_{2r+1,s}\sigma^0_{2r+1,s}(\omega_1\otimes x^m\omega_{g^j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0\\ \omega_1\otimes x^m\omega_{g^j} - (g^{\underline{s}}\cdot\ x^m)\omega_1\otimes\omega_{g^j} & \text{si } 0<m\le t-1 \end{cases}. \qquad \square$$

Las tres condiciones iniciales sobre el diagrama (4.4) de $E-$bimódulos y morfismos de $E-$bimódulo se cumplen. Esto se debe a que: La columna del diagrama es un complejo de cadenas de $E-$bimódulos, según el Lema 4.3.2; y las filas del diagrama son complejos de cadenas de $E-$bimódulos, según el Lema 4.3.3 y la igualdad $\mu_s d^0_{1s} = 0$. Debido a que se tiene el isomorfismo $X_{rs} \cong E \otimes K \otimes E$ y las filas del diagrama son contráctiles como complejos de $E-$módulos izquierdos, según el Lema 4.3.4.

Teorema 4.3.5. [27, Theo. 2.1.1] *Sean los morfismos de $E-$bimódulos, d^ℓ_{rs}, construidos con ∂_{s+1}, μ_s, σ^0_{0s} $(s \geq 0)$; $d^0_{r+1,s}$ y $\sigma^0_{r+1,s}$ $(r, s \geq 0)$ como en (4.5). Entonces el complejo*

$$E \xleftarrow{\mu} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} X_2 \xleftarrow{d_3} \cdots$$

donde $\mu(a\omega_{g^i} \otimes b\omega_{g^j}) = ab^{g^i} f(g^i, g^j)\omega_{g^{i+j}}$, $X_n = \bigoplus_{r+s=n} X_{rs}$ *y* $d_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{s} d^\ell_{rs}$,
es una resolución proyectiva relativa del $E-$bimódulo $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$.

Prueba. Sea $\widetilde{\mu} : Y_0 \to E$ el morfismo de $E-$bimódulos definido por
$\widetilde{\mu}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = af(g^i, g^j)\omega_{g^{i+j}}$. Como se cumplen las 3 condiciones iniciales del diagrama (4.4) en la categoría de $E-$bimódulos, entonces por el Teorema 4.1.10 se debe verificar que

$$E \xleftarrow{\widetilde{\mu}} Y_0 \xleftarrow{\partial_1} Y_1 \xleftarrow{\partial_2} Y_2 \xleftarrow{\partial_3} \cdots ,$$

es contráctil como un complejo de $E-$módulos izquierdos, cuya homotopía de contracción $\sigma_0^{-1} : E \to Y_0$ y $\sigma^{-1}_{s+1} : Y_s \to Y_{s+1}$ $(s \geq 0)$, es dada por

$$\begin{aligned}
&\sigma_0^{-1}(a\omega_{g^i}) = a\omega_{g^i} \otimes 1 \ , \\
&\sigma^{-1}_{2s-1}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = \sum_{h=0}^{j-1} af(g^i, g^h)\omega_{g^{i+h}} \otimes g^{j-h-1}, \\
&\sigma^{-1}_{2s}(a\omega_{g^i} \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq j < t-1 \\ a\alpha\omega_{g^i} \otimes 1 & \text{si } \ j = t-1 \ . \end{cases}
\end{aligned}$$

Esto significa que se cumplen las igualdades siguientes $\widetilde{\mu}\sigma_0^{-1} = id_E$, $\partial_1\sigma_1^{-1} + \sigma_0^{-1}\widetilde{\mu} = id_{Y_0}$, $\partial_{2s}\sigma^{-1}_{2s} + \sigma^{-1}_{2s-1}\partial_{2s-1} = id_{Y_{2s-1}}$ y $\partial_{2s+1}\sigma^{-1}_{2s+1} + \sigma^{-1}_{2s}\partial_{2s} = id_{Y_{2s}}$ $(s \geq 1)$.
En efecto, por $E-$linealidad izquierda de las aplicaciones que aparecen en las igualdades anteriores se debe probar que se cumplen las 6 igualdades :

(1) $\widetilde{\mu}\sigma_0^{-1}(\omega_1) = \omega_1$,

(2) $\sigma_0^{-1}\widetilde{\mu}(\omega_1 \otimes g^j) = \omega_{g^j} \otimes 1$ para $0 \leq j \leq t-1$,

(3) $\sigma_{2s-1}^{-1}\partial_{2s-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} \omega_1 \otimes g^j & \text{si } \ 0 \leq j < t-1 \\ \omega_1 \otimes g^j - \sum\limits_{h=0}^{t-1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} & \text{si } \ j = t-1 \end{cases}$,

(4) $\partial_{2s}\sigma_{2s}^{-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq j < t-1 \\ \sum\limits_{h=0}^{t-1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} & \text{si } \ j = t-1 \end{cases}$,

(5) $\sigma_{2s}^{-1}\partial_{2s}(\omega_1 \otimes g^j) = \omega_{g^j} \otimes 1$ para $0 \leq j \leq t-1$,

(6) $\partial_{2s+1}\sigma_{2s+1}^{-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j = 0 \\ \omega_1 \otimes g^j - \omega_{g^j} \otimes 1 & \text{si } \ 0 < j \leq t-1 \end{cases}$.

Se observa que (1), (2) y (4) se siguen inmediatamente de las definiciones de los morfismos.

(3) para $0 \leq j < t-1$ usando las propiedades del 2-cociclo f se obtiene que :

$$\begin{aligned} \sigma_{2s-1}^{-1}\partial_{2s-1}(\omega_1 \otimes g^j) &= \sigma_{2s-1}^{-1}(f(g, g^j)\omega_1 \otimes g^{j+1} - f(g^0, g)\omega_g \otimes g^j) \\ &= \sum_{h=0}^{j} f(g^0, g^h)\omega_{g^h} \otimes g^{j-h} - \sum_{h=0}^{j-1} f(g, g^h)\omega_{g^{h+1}} \otimes g^{j-h-1} \\ &= \omega_1 \otimes g^j \ , \end{aligned}$$

(3) para $j = t-1$ se tiene que :

$$\begin{aligned} \sigma_{2s-1}^{-1}\partial_{2s-1}(\omega_1 \otimes g^j) &= -\sigma_{2s-1}^{-1}(\omega_g \otimes g^j) \text{ pues orden del grupo cíclico es } t \\ &= -\sum_{h=0}^{t-2} f(g, g^h)\omega_{g^{h+1}} \otimes g^{-h-2} \\ &= -\sum_{h=1}^{t-1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} = \omega_1 \otimes g^j - \sum_{h=0}^{t-1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} \ ; \end{aligned}$$

(5) para $0 \leq j \leq t-1$ se tiene que :

$$\begin{aligned} \sigma_{2s}^{-1}\partial_{2s}(\omega_1 \otimes g^j) &= \sigma_{2s}^{-1}(\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} f(g^{-h-1}, g^j)\omega_{g^h} \otimes g^{j-h-1}), \text{ para } h = j : \\ &= \sigma_{2s}^{-1}(\alpha^{-1} f(g^{-j-1}, g^j)\omega_{g^j} \otimes g^{t-1}) \\ &= \omega_{g^j} \otimes 1 \ ; \end{aligned}$$

(6) del hecho que $\sigma_{2s+1}^{-1}(\omega_1 \otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j = 0 \\ \sum\limits_{h=0}^{j-1} \omega_{g^h} \otimes g^{j-h-1} & \text{si } \ 0 < j \leq t-1 \end{cases}$,

y para $0 < j \leq t-1$

$$\begin{aligned}\partial_{2s+1}(\sum_{h=0}^{j-1}\omega_{g^h}\otimes g^{j-h-1}) &= \sum_{h=0}^{j-1}[f(g,g^{j-h-1})\omega_{g^h}\otimes g^{j-h} - f(g^h,g)\omega_{g^{h+1}}\otimes g^{j-h-1}] \\ &= f(g,g^{j-1})\omega_1\otimes g^j - f(g^{j-1},g)\omega_{g^j}\otimes 1 \\ &= \omega_1\otimes g^j - \omega_{g^j}\otimes 1\end{aligned}$$

resulta que $\partial_{2s+1}\sigma_{2s+1}^{-1}(\omega_1\otimes g^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j=0 \\ \omega_1\otimes g^j - \omega_{g^j}\otimes 1 & \text{si } \ 0<j\leq t-1\end{cases}$. □

Fórmulas para los morfismos d^{ℓ}_{rs}.

El siguiente teorema proporciona las fórmulas para los morfismos d^{ℓ}_{rs} que aparecen en la resolución proyectiva relativa de E, obtenida en el Teorema 4.3.5. La prueba inductiva del teorema se realiza sobre las columnas, basándose en la bilinealidad de d^{ℓ}_{rs} y la definición de σ^0_{rs}.

Teorema 4.3.6. [27, Theo. 2.2] *Sean $g\cdot x = \lambda x$ donde $\lambda\in K$ y $\alpha = \sum_{u=0}^{t-1}\gamma_u x^u$. Entonces :*

$$d^1_{r,2s-1}(\omega_1\otimes\omega_1) = (-1)^r\omega_g\otimes\omega_1 - (-1)^r\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_1\otimes\omega_g,$$

$$d^1_{r,2s}(\omega_1\otimes\omega_1) = (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}},$$

$$d^2_{2r-1,s}(\omega_1\otimes\omega_1) = 0,$$

$$d^2_{2r,s}(\omega_1\otimes\omega_1) = -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1}\gamma_u g^{\underline{s}}\cdot x^h\omega_1\otimes x^{u-h-1}\omega_1,$$

$d^{\ell}_{rs}(\omega_1\otimes\omega_1) = 0$, $\forall\,\ell > 2$, *donde* $[\frac{r}{2}]$ *denota la parte entera de* $\frac{r}{2}$.

Prueba. (1) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^1_{r,2s-1}(\omega_1\otimes\omega_1) = (-1)^r\omega_g\otimes\omega_1 - (-1)^r\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_1\otimes\omega_g \tag{4.37}$$

para $s\geq 1$.

En efecto :

Para $r=0$, $d^1_{0,2s-1} = -\sigma^0_{0,2s-2}\partial_{2s-1}\mu_{2s-1}$, luego $\mu_{2s-1}(\omega_1\otimes\omega_1) = \omega_1\otimes 1$,

$$\begin{aligned}\partial_{2s-1}(\omega_1\otimes 1) &= f(g,1)\omega_1\otimes g - f(1,g)\omega_g\otimes 1 \\ &= \omega_1\otimes g - \omega_g\otimes 1,\end{aligned}$$

$\sigma^0_{0,2s-2}(\omega_1 \otimes g - \omega_g \otimes 1) = \omega_1 \otimes \omega_g - \omega_g \otimes \omega_1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
d^1_{0,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sigma^0_{0,2s-2}\partial_{2s-1}\mu_{2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\
&= \omega_g \otimes \omega_1 - \omega_1 \otimes \omega_g \\
&= (-1)^0\omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^0\lambda^{(t-2)[\frac{0}{2}]+0}\omega_1 \otimes \omega_g \ . \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Para $r = 2n-1$ $(n \geq 1)$ por hipótesis inductiva se cumple (4.37). Se va a demostrar que

$$d^1_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+1}\omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^{r+1}\lambda^{(t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1)}\omega_1 \otimes \omega_g \ .$$

Puesto que $d^1_{r+1,2s-1} = -\sigma^0_{r+1,2s-2}d^1_{r,2s-1}d^0_{r+1,2s-1}$;

$$d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{t-1} g \cdot x^h\omega_1 \otimes x^{t-h-1}\omega_1 \ ,$$

$$d^1_{r,2s-1}d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{t-1} g \cdot x^h\omega_1 d^1_{r,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1)x^{t-h-1}\omega_1 \ ,$$

recordando que $d^1_{r,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^r\omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^r\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_1 \otimes \omega_g$ se calcula
$(g \cdot x^h\omega_1)(\omega_g) = g \cdot x^h\omega_g$, $(\omega_1)(x^{t-h-1}\omega_1) = x^{t-h-1}\omega_1$,
$(g \cdot x^h\omega_1)(\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_1) = g \cdot x^h\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_1$;

$$\begin{aligned}
(\omega_g)(x^{t-h-1}\omega_1) &= g \cdot x^{t-h-1}\omega_g, \quad g \cdot x = \lambda x \ : \\
&= \lambda^{t-h-1}x^{t-h-1}\omega_g \ .
\end{aligned}$$

Reemplazando estos valores

$$\begin{aligned}
d^1_{r,2s-1}d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= (-1)^r\sum_{h=0}^{t-1} g \cdot x^h\omega_g \otimes x^{t-h-1}\omega_1 \\
&- (-1)^r\sum_{h=0}^{t-1} g \cdot x^h\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_1 \otimes \lambda^{t-h-1}x^{t-h-1}\omega_g \ .
\end{aligned}$$

Aplicando la definición de $\sigma^0_{r+1,2s-2}$ para $h = 0$:

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{r+1,2s-2}d^1_{r,2s-1}d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= (-1)^r\sigma^0_{r+1,2s-2}(\omega_g \otimes x^{t-1}\omega_1) \\
&- (-1)^r\sigma^0_{r+1,2s-2}(\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_1 \otimes \lambda^{t-1}x^{t-1}\omega_g) \\
&= (-1)^r\omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^r\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r+t-1}\omega_1 \otimes \omega_g;
\end{aligned}$$

Como $r = 2n-1$ para $n \geq 1$, $[\frac{r}{2}] = [\frac{2n-1}{2}] = n-1$. Operando en la exponente

$$\begin{aligned}(t-2)[\frac{r}{2}] + r + t - 1 &= (t-2)(n-1) + (2n-1) + t - 1 \\ &= (t-2)n + 2n = (t-2)[\frac{r+1}{2}] + (r+1);\end{aligned}$$

de modo que

$$\sigma^0_{r+1,2s-2} d^1_{r,2s-1} d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^r \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^r \lambda^{(t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1)} \omega_1 \otimes \omega_g \ .$$

Por lo tanto

$$d^1_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+1} \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^{r+1} \lambda^{(t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1)} \omega_1 \otimes \omega_g \ .$$

Para $r = 2n$ ($n \geq 1$) por hipótesis inductiva se cumple (4.37). Se va a probar que

$$d^1_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+1} \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^{r+1} \lambda^{(t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1)} \omega_1 \otimes \omega_g \ .$$

Puesto que $d^1_{r+1,2s-1} = -\sigma^0_{r+1,2s-2} d^1_{r,2s-1} d^0_{r+1,2s-1}$;

$$d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes x\omega_1 - g \cdot x\omega_1 \otimes \omega_1 \ ,$$

$$\begin{aligned} d^1_{r,2s-1} d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= d^1_{r,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - g \cdot x\omega_1 d^1_{r,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= (-1)^r \omega_g \otimes x\omega_1 - (-1)^r \lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r} \omega_1 \otimes g \cdot x\omega_g \\ &+ (-1)^{r+1} g \cdot x\omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^{r+1} \lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r} g \cdot x\omega_1 \otimes \omega_g \ . \end{aligned}$$

Se observa que $r+1$ es impar, $g \cdot x = \lambda x$, entonces
$\sigma^0_{r+1,2s-2}((-1)^{r+1} g \cdot x\omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^{r+1} \lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r} g \cdot x\omega_1 \otimes \omega_g) = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} \sigma^0_{r+1,2s-2} d^1_{r,2s-1} d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{r+1,2s-2}((-1)^r \omega_g \otimes x\omega_1) \\ &- \sigma^0_{r+1,2s-2}((-1)^r \lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r} \omega_1 \otimes \lambda x\omega_g) \\ &= (-1)^r \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^r \lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r+1} \omega_1 \otimes \omega_g; \end{aligned}$$

como $r = 2n$ para $n \geq 1$, $[\frac{r}{2}] = [\frac{2n}{2}] = n$. Se nota que $[\frac{r+1}{2}] = [\frac{2n+1}{2}] = n$.
Operando en la exponente

$$\begin{aligned}(t-2)[\frac{r}{2}] + r + 1 &= (t-2)n + (2n+1) \\ &= (t-2)[\frac{r+1}{2}] + (r+1);\end{aligned}$$

de modo que

$$\sigma^0_{r+1,2s-2} d^1_{r,2s-1} d^0_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^r \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^r \lambda^{(t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1)} \omega_1 \otimes \omega_g \ .$$

Por lo tanto

$$d^1_{r+1,2s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+1} \omega_g \otimes \omega_1 - (-1)^{r+1} \lambda^{(t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1)} \omega_1 \otimes \omega_g \ .$$

(2) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^1_{r,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \tag{4.39}$$

para $s \geq 1$.

En efecto :

Para $r = 0$, $d^1_{0,2s} = -\sigma^0_{0,2s-1} \partial_{2s} \mu_{2s}$, luego $\mu_{2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes 1$,

$$\partial_{2s}(\omega_1 \otimes 1) \ = \ \sum_{h=0}^{t-1} f(1, g^h) \alpha^{-1} f(g^{-h-1}, 1) \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1} = \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1},$$

$\sigma^0_{0,2s-1}(\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes g^{-h-1}) = \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{-h-1}}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d^1_{0,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sigma^0_{0,2s-1} \partial_{2s} \mu_{2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= -\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{-h-1}} \\ &= (-1)^{0+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{0}{2}]+0)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Para $r = 2n - 1$ $(n \geq 1)$ por hipótesis inductiva se cumple (4.39). Se va a probar que

$$d^1_{r+1,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = (-1)^{r+2} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1))} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}.$$

Puesto que $d^1_{r+1,2s} = -\sigma^0_{r+1,2s-1} d^1_{r,2s} d^0_{r+1,2s}$;

$$d^0_{r+1,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{k=0}^{t-1} x^k \omega_1 \otimes x^{t-k-1} \omega_1 \ ,$$

$$d^1_{r,2s} d^0_{r+1,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{k=0}^{t-1} x^k \omega_1 d^1_{r,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1) x^{t-k-1} \omega_1 \ , \text{ donde}$$

$$
\begin{aligned}
& x^k\omega_1 d^1_{r,2s}(\omega_1\otimes\omega_1)x^{t-k-1}\omega_1\\
= \;& x^k\omega_1[(-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}]x^{t-k-1}\omega_1\\
= \;& (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}x^k\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes g^{t-h-1}\cdot x^{t-k-1}\omega_{g^{t-h-1}},\\
= \;& (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}x^k\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes(\lambda^{-h-1}x)^{t-k-1}\omega_{g^{t-h-1}}\ .
\end{aligned}
$$

Como $r+1$ es par, subsisten algunos términos para $k=0$:

$$
\begin{aligned}
& \sigma^0_{r+1,2s-1}d^1_{r,2s}d^0_{r+1,2s}(\omega_1\otimes\omega_1)\\
= \;& (-1)^{r+1}\sigma^0_{r+1,2s-1}(\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes(\lambda^{-h-1}x)^{t-1}\omega_{g^{t-h-1}})\\
:= \;& (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)+(-h-1)(t-1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}.
\end{aligned}
$$

Como $r=2n-1$ para $n\geq 1$, $[\dfrac{r+1}{2}]=[\dfrac{2n}{2}]=n$. Operando en la exponente

$$
\begin{aligned}
(-h-1)((t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1)) &= (-h-1)((t-2)n+2n)\\
&= (-h-1)(tn);
\end{aligned}
$$

por otro lado,

$$
\begin{aligned}
& (-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)+(-h-1)(t-1)\\
= \;& (-h-1)((t-2)(n-1)+2n-1)+(-h-1)(t-1)=(-h-1)(tn);
\end{aligned}
$$

$$
\sigma^0_{r+1,2s-1}d^1_{r,2s}d^0_{r+1,2s}(\omega_1\otimes\omega_1)=(-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1))}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}.
$$

Por lo tanto

$$
d^1_{r+1,2s}(\omega_1\otimes\omega_1)=(-1)^{r+2}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1))}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}.
$$

Tomando $r=2n$ para $n\geq 1$, luego procediendo por inducción como en el caso anterior se prueba que

$$
d^1_{r+1,2s}(\omega_1\otimes\omega_1)=(-1)^{r+2}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r+1}{2}]+(r+1))}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}.
$$

(3) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^2_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0 \tag{4.41}$$

para $s \geq 2$ y $r \geq 1$.

En efecto :

Para $r = 1$, $d^2_{1s} = -\sigma^0_{2,s-2} d^2_{0s} d^0_{1s} - \sigma^0_{2,s-2} d^1_{1,s-1} d^1_{1s}$.

En el caso $s = 2n$ para $n \geq 1$; $d^0_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes x\omega_1 - x\omega_1 \otimes \omega_1$,

$$\begin{aligned} d^2_{0,2n} d^0_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - x\omega_1 d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= (-\alpha^{-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u x^h \omega_1 \otimes x^{u-h-1} \omega_1) x\omega_1 \\ &- x\omega_1(-\alpha^{-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u x^h \omega_1 \otimes x^{u-h-1} \omega_1) \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{2,2n-2}$ subsiste un término

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2,2n-2} d^2_{0,2n} d^0_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{2,2n-2}(-\gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1 \otimes x^{t-1}\omega_1) \\ &= -\gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \omega_1 \ . \end{aligned}$$

Recordando que $d^1_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \displaystyle\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}$,
$d^1_{1,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\omega_g \otimes \omega_1 + \lambda\omega_1 \otimes \omega_g$:

$$\begin{aligned} d^1_{1,2n-1} d^1_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} d^1_{1,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) \omega_{g^{t-h-1}} \\ &= -\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1} f(g^h, g) \omega_{g^{h+1}} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \\ &+ \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{-h} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes f(g, g^{t-h-1}) \omega_{g^{t-h}} \ . \end{aligned}$$

Por definición de $\sigma^0_{2,2n-2}$ subsiste un término

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2,2n-2} d^1_{1,2n-1} d^1_{1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{2,2n-2}(\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \alpha\omega_1) \\ &= \sigma^0_{2,2n-2}(\sum_{u=0}^{t-1} \gamma_u \alpha^{-1} \omega_1 \otimes x^u \omega_1) \\ &= \gamma_{t-1} \alpha^{-1} \omega_1 \otimes \omega_1 \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d^2_{1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= -\sigma^0_{2,2n-2}d^2_{0,2n}d^0_{1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)-\sigma^0_{2,2n-2}d^1_{1,2n-1}d^1_{1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)\\ &= \gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1\otimes\omega_1-\gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1\otimes\omega_1=0\ . \end{aligned}$$

Tomando $s=2n+1$ para $n\geq 1$, luego procediendo como en el caso anterior se obtiene $d^2_{1,2n+1}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

Para $r\geq 1$ por hipótesis inductiva se cumple (4.41). Se va a probar que

$$d^2_{2(r+1)-1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0.$$

Tomando $s=2n$ para $n\geq 1$, se debe obtener $d^2_{2(r+1)-1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$. Puesto que $d^2_{2r+1,2n}=-\sigma^0_{2r+2,2n-2}d^2_{2r,2n}d^0_{2r+1,2n}-\sigma^0_{2r+2,2n-2}d^1_{2r+1,2n-1}d^1_{2r+1,2n}$; del hecho que $d^0_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=\omega_1\otimes x\omega_1-x\omega_1\otimes\omega_1$,

$$\begin{aligned} d^2_{2r,2n}d^0_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= d^2_{2r,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)x\omega_1-x\omega_1 d^2_{2r,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)\\ &= (-\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1}\gamma_u x^h\omega_1\otimes x^{u-h-1}\omega_1)x\omega_1\\ &- x\omega_1(-\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1}\gamma_u x^h\omega_1\otimes x^{u-h-1}\omega_1) \end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{2r+2,2n-2}$ subsiste un término

$$\begin{aligned} \sigma^0_{2r+2,2n-2}d^2_{2r,2n}d^0_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= \sigma^0_{2r+2,2n-2}(-\gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1\otimes x^{t-1}\omega_1)\\ &= -\gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1\otimes\omega_1\ ; \end{aligned}$$

como $d^1_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(tr+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}$,
$d^1_{2r+1,2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\omega_g\otimes\omega_1+\lambda^{(tr+1)}\omega_1\otimes\omega_g$:

$$\begin{aligned} d^1_{2r+1,2n-1}d^1_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(tr+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^1_{2r+1,2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{t-h-1}}\\ &= -\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(tr+1)}\alpha^{-1}f(g^h,g)\omega_{g^{h+1}}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}\\ &+ \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{-h(tr+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes f(g,g^{t-h-1})\omega_{g^{t-h}} \end{aligned} \tag{4.42}$$

según la definición de $\sigma^0_{2r+2,2n-2}$ subsiste un término

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{2r+2,2n-2}d^1_{2r+1,2n-1}d^1_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= \sigma^0_{2r+2,2n-2}(\alpha^{-1}\omega_1\otimes\alpha\omega_1)\\
&= \sigma^0_{2r+2,2n-2}(\sum_{u=0}^{t-1}\gamma_u\alpha^{-1}\omega_1\otimes x^u\omega_1)\\
&= \gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1\otimes\omega_1\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
d^2_{2(r+1)-1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= -\sigma^0_{2r+2,2n-2}d^2_{2r,2n}d^0_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)\\
&- \sigma^0_{2r+2,2n-2}d^1_{2r+1,2n-1}d^1_{2r+1,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)\\
&= \gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1\otimes\omega_1-\gamma_{t-1}\alpha^{-1}\omega_1\otimes\omega_1=0\ .
\end{aligned}$$

Tomando $s=2n+1$ para $n\geq 1$, procediendo como en el caso anterior se obtiene $d^2_{2(r+1)-1,2n+1}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

(4) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^2_{2r,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1}\gamma_u(g^{\underline{s}}\cdot x^h)\omega_1\otimes x^{u-h-1}\omega_1 \tag{4.43}$$

para $s\geq 2$.

En efecto :

Para $r=0$, $d^2_{0s}=-\sigma^0_{1,s-2}d^1_{0,s-1}d^1_{0s}$.

En el caso $s=2n$ para $n\geq 1$; $d^1_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}$,

$$\begin{aligned}
d^1_{0,2n-1}d^1_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1) &= -\sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^1_{0,2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{t-h-1}} \text{ por (4.38)},\\
&= -\sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}(\omega_g\otimes\omega_1-\omega_1\otimes\omega_g)\omega_{g^{t-h-1}},\\
&= \sum_{h=0}^{t-1}[\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes f(g,g^{t-h-1})\omega_{g^{t-h}}-\alpha^{-1}f(g^h,g)\omega_{g^{h+1}}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}]
\end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{1,2n-2}$ subsiste un sumando

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{1,2n-2}d^1_{0,2n-1}d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sigma^0_{1,2n-2}(\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \alpha\omega_1) \\
&= \sigma^0_{1,2n-2}(\sum_{u=0}^{t-1} \gamma_u \alpha^{-1}\omega_1 \otimes x^u\omega_1) \\
&= \sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u \alpha^{-1} x^h \omega_1 \otimes x^{u-h-1}\omega_1 \ .
\end{aligned}$$

Como $\underline{s} = \underline{2n} = 0$, $d^2_{0s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u(g^{\underline{s}} \cdot x^h)\omega_1 \otimes x^{u-h-1}\omega_1$.
En el caso $s = 2n+1$ para $n \geq 1$; $d^1_{0,2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_g \otimes \omega_1 - \omega_1 \otimes \omega_g$,

$$\begin{aligned}
d^1_{0,2n}d^1_{0,2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \omega_g d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) - d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1)\omega_g \text{ por (4.40)} \\
&= \omega_g(-\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}) - (-\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}})\omega_g \\
&= \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes f(g^{t-h-1}, g)\omega_{g^{t-h}} \\
&- \sum_{h=0}^{t-1} g \cdot (\alpha^{-1}) f(g, g^h)\omega_{g^{h+1}} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}
\end{aligned}$$

por definición de $\sigma^0_{1,2n-1}$ subsiste un término

$$\begin{aligned}
d^2_{0,2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\sigma^0_{1,2n-1}(\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \alpha\omega_1) &= -\sigma^0_{1,2n-1}(\sum_{u=0}^{t-1} \gamma_u \alpha^{-1}\omega_1 \otimes x^u\omega_1) \\
&= -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u g \cdot x^h \omega_1 \otimes x^{u-h-1}\omega_1 \ .
\end{aligned}$$

Como $\underline{s} = \underline{2n+1} = 1$, $d^2_{0s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u(g^{\underline{s}} \cdot x^h)\omega_1 \otimes x^{u-h-1}\omega_1$.

Para $r \geq 0$ por hipótesis inductiva se cumple (4.43). Se va a probar que

$$d^2_{2(r+1),s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u(g^{\underline{s}} \cdot x^h)\omega_1 \otimes x^{u-h-1}\omega_1.$$

Tomando $s = 2n$ para $n \geq 1$, se debe obtener

$$d^2_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u x^h \omega_1 \otimes x^{u-h-1}\omega_1.$$

Puesto que $d^2_{2(r+1),2n} = -\sigma^0_{2r+3,2n-2} d^2_{2r+1,2n} d^0_{2(r+1),2n} - \sigma^0_{2r+3,2n-2} d^1_{2(r+1),2n-1} d^1_{2(r+1),2n}$, calculando

$$d^0_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{t-1} x^h\omega_1 \otimes x^{t-h-1}\omega_1 \ ,$$

$$d^2_{2r+1,2n} d^0_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{t-1} x^h\omega_1 d^2_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) x^{t-h-1}\omega_1 \ ,$$

donde $d^2_{2r+1,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$. Así, $-\sigma^0_{2r+3,2n-2} d^2_{2r+1,2n} d^0_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$. Por otro lado

$$d^1_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)t(r+1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \ ,$$

$$d^1_{2(r+1),2n-1} d^1_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)t(r+1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} d^1_{2(r+1),2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) \omega_{g^{t-h-1}} \text{ donde} \ ,$$

$d^1_{2(r+1),2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_g \otimes \omega_1 - \lambda^{t(r+1)} \omega_1 \otimes \omega_g$. Luego,

$$\begin{aligned} d^1_{2(r+1),2n-1} d^1_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)t(r+1)} \alpha^{-1} f(g^h, g) \omega_{g^{h+1}} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \\ &+ \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{-ht(r+1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes f(g, g^{t-h-1}) \omega_{g^{t-h}}, \end{aligned} \tag{4.44}$$

se observa que para $h = 0$, $f(g, g^{t-h-1}) = \alpha$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d^2_{2(r+1),2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sigma^0_{2r+3,2n-2}(\alpha^{-1}\omega_1 \otimes \alpha\omega_1) \\ &= -\sigma^0_{2r+3,2n-2}\Big(\sum_{u=0}^{t-1} \gamma_u \alpha^{-1} \omega_1 \otimes x^u \omega_1\Big) \\ &= -\alpha^{-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u x^h \omega_1 \otimes x^{u-h-1} \omega_1 \ . \end{aligned}$$

Similarmente, se obtiene

$$d^2_{2(r+1),2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u g \cdot x^h \omega_1 \otimes x^{u-h-1} \omega_1.$$

(5) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^3_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0 \tag{4.45}$$

para $s \geq 3$.

En efecto :

Para $r = 0$, $d^3_{0s} = -\sigma^0_{2,s-3} d^2_{0,s-1} d^1_{0s} - \sigma^0_{2,s-3} d^1_{1,s-2} d^2_{0s}$.

En el caso $s = 2n$ para $n \geq 2$; $d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}$,

$$\begin{aligned} d^2_{0,2n-1} d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} d^2_{0,2n-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) \omega_{g^{t-h-1}} \\ &= -\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} (-\alpha^{-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{k=0}^{u-1} \gamma_u g \cdot x^k \omega_1 \otimes x^{u-k-1} \omega_1) \omega_{g^{t-h-1}} \\ &= \sum_{h=0}^{t-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{k=0}^{u-1} \alpha^{-1} g^h \cdot (\alpha^{-1} \gamma_u g \cdot x^k) \omega_{g^h} \otimes x^{u-k-1} \omega_{g^{t-h-1}} \ . \end{aligned}$$

El hecho que $1 \leq u \leq t-1$ y $0 \leq k \leq u-1$ implica que $0 \leq u-k-1 \leq t-2$, por definición de $\sigma^0_{2,2n-3}$ se deduce que $\sigma^0_{2,2n-3} d^2_{0,2n-1} d^1_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Por otro lado, $d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = -\alpha^{-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{k=0}^{u-1} \gamma_u x^k \omega_1 \otimes x^{u-k-1} \omega_1$,

$d^1_{1,2n-2}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}$, luego

$$\begin{aligned} & d^1_{1,2n-2} d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ = \ & -\alpha^{-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{k=0}^{u-1} \gamma_u x^k \omega_1 d^1_{1,2n-2}(\omega_1 \otimes \omega_1) x^{u-k-1} \omega_1 \\ = \ & -\sum_{h=0}^{t-1} \sum_{u=1}^{t-1} \sum_{k=0}^{u-1} (\alpha^{-1} \gamma_u x^k \lambda^{(-h-1)} \alpha^{-1}) \omega_{g^h} \otimes g^{t-h-1} \cdot x^{u-k-1} \omega_{g^{t-h-1}} \ , \end{aligned}$$

donde $g^{t-h-1} \cdot x^{u-k-1} = (\lambda^{-h-1})^{u-k-1} x^{u-k-1}$.

Como $0 \leq u-k-1 \leq t-2$, por definición de $\sigma^0_{2,2n-3}$ se deduce que $\sigma^0_{2,2n-3} d^1_{1,2n-2} d^2_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$. Por consiguiente, $d^3_{0,2n}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Similarmente, se obtiene $d^3_{0,2n+1}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Para $r \geq 0$ por hipótesis inductiva se cumple (4.45). Entonces, considerando la paridad de r y también la paridad de s se prueba que $d^3_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$. En efecto :

En el caso en que r es par y s es par; $d^0_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes x\omega_1 - x\omega_1 \otimes \omega_1$, por hipótesis inductiva $d^3_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$, entonces

$d^3_{rs} d^0_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = d^3_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - x\omega_1 d^3_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) \omega_1 = 0$.

Así, $\sigma^0_{r+3,s-3} d^3_{rs} d^0_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.

Como $d^1_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+1}{2}]+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}$, $d^2_{r+1,s-1}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$:

$$\begin{aligned} d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1) &= \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+1}{2}]+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^2_{r+1,s-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{t-h-1}} \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

Luego, $\sigma^0_{r+3,s-3}d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

Por otro lado, $d^2_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$ pues $r+1$ es impar; de modo que

$\sigma^0_{r+3,s-3}d^1_{r+2,s-2}d^2_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$. Por consiguiente, $d^3_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

En el caso en que r es par y s es impar, también se obtiene la misma igualdad.

En el caso en que r es impar y s es par; $r+1$ es par y

$d^3_{r+1,s}=-\sigma^0_{r+3,s-3}d^3_{rs}d^0_{r+1,s}-\sigma^0_{r+3,s-3}d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s}-\sigma^0_{r+3,s-3}d^1_{r+2,s-2}d^2_{r+1,s}$.

Puesto que $d^0_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=\sum_{h=0}^{t-1}x^h\omega_1\otimes x^{t-h-1}\omega_1$, $d^3_{rs}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$, se sigue que

$d^3_{rs}d^0_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=\sum_{h=0}^{t-1}x^h\omega_1 d^3_{rs}(\omega_1\otimes\omega_1)x^{t-h-1}\omega_1$ y $\sigma^0_{r+3,s-3}d^3_{rs}d^0_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$;

$d^1_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+1}{2}])}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}$,

$d^2_{r+1,s-1}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}\gamma_u g\cdot x^k\omega_1\otimes x^{u-k-1}\omega_1$,

$$\begin{aligned} & d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1) \\ =\ & -\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+1}{2}])}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^2_{r+1,s-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{t-h-1}} \\ =\ & -\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+1}{2}])}\alpha^{-1}\omega_{g^h}(-\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}\gamma_u g\cdot x^k\omega_1\otimes x^{u-k-1}\omega_1)\omega_{g^{t-h-1}} \\ =\ & \sum_{h=0}^{t-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+1}{2}])}\alpha^{-1}g^h\cdot(\alpha^{-1}\gamma_u g\cdot x^k)\omega_{g^h}\otimes x^{u-k-1}\omega_{g^{t-h-1}}\ . \end{aligned}$$

El hecho que $1\le u\le t-1$ y $0\le k\le u-1$ implica que $0\le u-k-1\le t-2$,

por definición de $\sigma^0_{r+3,s-3}$ se deduce que $\sigma^0_{r+3,s-3}d^2_{r+1,s-1}d^1_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

Por otro lado, $d^2_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}\gamma_u x^k\omega_1\otimes x^{u-k-1}\omega_1$,

$$d^1_{r+2,s-2}(\omega_1\otimes\omega_1)=\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+2}{2}]+1)}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}, \text{ luego}$$

$$\begin{aligned}
& d^1_{r+2,s-2}d^2_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)\\
= \;& -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}\gamma_u x^k\omega_1 d^1_{r+2,s-2}(\omega_1\otimes\omega_1)x^{u-k-1}\omega_1\\
= \;& -\sum_{h=0}^{t-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}(\alpha^{-1}\gamma_u x^k\lambda^{(-h-1)(t[\frac{r+2}{2}]+1)}\alpha^{-1})\omega_{g^h}\otimes g^{t-h-1}\cdot x^{u-k-1}\omega_{g^{t-h-1}}\ ,
\end{aligned}$$

donde $g^{t-h-1}\cdot x^{u-k-1}=(\lambda^{-h-1})^{u-k-1}x^{u-k-1}$.

Como $0\le u-k-1\le t-2$, por definición de $\sigma^0_{r+3,s-3}$ se deduce que

$\sigma^0_{r+3,s-3}d^1_{r+2,s-2}d^2_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$. Por consiguiente, $d^3_{r+1,s}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

En el caso en que r es impar y s es impar, también se obtiene la misma igualdad.

(6) Se prueba por inducción sobre r que

$$d^4_{rs}(\omega_1\otimes\omega_1)=0 \tag{4.46}$$

para $s\ge 4$. En efecto :

Para $r=0$, $d^4_{0s}=-\sigma^0_{3,s-4}d^3_{0,s-1}d^1_{0s}-\sigma^0_{3,s-4}d^2_{1,s-2}d^2_{0s}-\sigma^0_{3,s-4}d^1_{2,s-3}d^3_{0s}$.

En el caso $s=2n$ para $n\ge 2$; $d^1_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}}$,

$$d^3_{0,2n-1}d^1_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)\ =\ -\sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^3_{0,2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{t-h-1}}\ .$$

Del hecho que $d^3_{0,2n-1}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$, se deduce que $\sigma^0_{3,2n-4}d^3_{0,2n-1}d^1_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

Por otro lado, $d^2_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=-\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}\gamma_u x^k\omega_1\otimes x^{u-k-1}\omega_1$,

$d^2_{1,2n-2}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$, luego

$$d^2_{1,2n-2}d^2_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)\ =\ -\alpha^{-1}\sum_{u=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{u-1}\gamma_u x^k\omega_1 d^2_{1,2n-2}(\omega_1\otimes\omega_1)x^{u-k-1}\omega_1=0\ .$$

Así, $\sigma^0_{3,2n-4}d^2_{1,2n-2}d^2_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

Teniendo en cuenta que $d^3_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$, $\sigma^0_{3,2n-4}d^1_{2,2n-3}d^3_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

En consecuencia, $d^4_{0,2n}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$. Similarmente, se obtiene $d^4_{0,2n+1}(\omega_1\otimes\omega_1)=0$.

Para $r \geq 0$ por hipótesis inductiva se cumple (4.46). Entonces, considerando la paridad de r y también la de s se prueba que $d^4_{r+1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$.
Observando (4.45), (4.46) y (4.5), se concluye que $d^\ell_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = 0$ para $\ell \geq 5$. □

Proposición 4.3.7. *Asuma que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.6. Si $\alpha = \gamma_0 \in K^*$, entonces :*

i) $d^1 d^1 = 0$.

ii) $d^1_{r-1,s} d^0_{rs} = -d^0_{r,s-1} d^1_{rs}$ $(r \geq 1,\ s \geq 1)$.

Prueba. *i)* De (4.42) y (4.44) se sigue que $d^1 d^1 = 0$.
En el caso $t = 2$, esto se sigue de (4.15) y (4.19).
ii) En el caso en que r es impar y s es par, se tiene que $d^0_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_1 \otimes x\omega_1 - x\omega_1 \otimes \omega_1$,

$$\begin{aligned} d^1_{r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= -\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)t[\frac{r-1}{2}]} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \\ &= -\sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \text{ pues } \lambda^t = 1; \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} d^1_{r-1,s} d^0_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= d^1_{r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) x\omega_1 - x\omega_1 d^1_{r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1) \\ &= -\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{-h-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes x\omega_{g^{t-h-1}} + \sum_{h=0}^{t-1} \alpha^{-1} x\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \ . \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} d^1_{rs}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)(t[\frac{r}{2}]+1)} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \\ &= \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{-h-1} \alpha^{-1} \omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}} \text{ pues } \lambda^t = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^0_{r,s-1}(\omega_1 \otimes \omega_1) &= \omega_1 \otimes x\omega_1 - g \cdot x\omega_1 \otimes \omega_1 \\ &= \omega_1 \otimes x\omega_1 - \lambda x\omega_1 \otimes \omega_1; \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $(\omega_{g^h})(\lambda x\omega_1) = \lambda^{h+1}x\omega_{g^h}$, se obtiene

$$\begin{aligned} d^0_{r,s-1}d^1_{rs}(\omega_1\otimes\omega_1) &= \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{-h-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}d^0_{r,s-1}(\omega_1\otimes\omega_1)\omega_{g^{t-h-1}} \\ &= \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{-h-1}\alpha^{-1}\omega_{g^h}\otimes x\omega_{g^{t-h-1}} - \sum_{h=0}^{t-1}\alpha^{-1}x\omega_{g^h}\otimes\omega_{g^{t-h-1}} \ . \end{aligned}$$

Así, $d^1_{r-1,s}d^0_{rs} = -d^0_{r,s-1}d^1_{rs}$.

Similarmente, se obtiene esta igualdad en los tres casos restantes. □

Los valores del $2-$cociclo están en K en el caso $t \geq 3$

Un elemento λ_t de $\overline{K}$ se dice que es una *raíz primitiva $t-$ésima de la unidad* si $\lambda_t^t = 1$ y $\lambda_t^m \neq 1$ para $0 < m < t$. Sea λ_3 una raíz primitiva cúbica de la unidad, K un cuerpo conteniendo λ_3.

Sea $E = A \rtimes_f C_3 = \dfrac{K[X]}{\langle X^3\rangle} \rtimes_f C_3$. Puesto que $A = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in K\}$, $\{1, x, x^2\}$ es una base de A sobre K. Entonces es posible definir $C_3 = \{1, g, g^2\}$ como el grupo de automorfismos de A sobre K, dado por la tabla

	1	g	g^2
1	1	1	1
x	x	$\lambda_3 x$	$\lambda_3^2 x$
x^2	x^2	$\lambda_3^2 x^2$	$\lambda_3 x^2$

(4.47)

donde $x = X + \langle X^3\rangle$, $g(1) = 1$, $g(x) = \lambda_3 x$, $g(x^2) = \lambda_3^2 x^2$.

Ejemplo 4.3.8. Si $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^3\rangle} = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in K\}$, entonces $A^* = \{a + bx + cx^2 \mid a \in K^*;\ b, c \in K\}$.

Si $a + bx + cx^2 \in A^*$, entonces existe $a' + b'x + c'x^2 \in A$ tal que $(a + bx + cx^2)(a' + b'x + c'x^2) = 1$. Multiplicando, obtenemos $aa' + (ab' + ba')x + (ac' + bb' + ca')x^2 = 1$. Esto ocurre si $aa' = 1$, $ab' + ba' = 0$ y $ac' + bb' + ca' = 0$. Así $a' = a^{-1}$, $b' = -a^{-2}b$ y $c' = a^{-3}(b^2 - ac)$. Por lo tanto $a + bx + cx^2 \in A^*$ si $a \neq 0$; $b, c \in K$.

Conforme al ejemplo anterior, $(a + bx + cx^2)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}bx + a^{-3}(b^2 - ac)x^2$.

Ejemplo 4.3.9. Sea $f : C_3 \times C_3 \to A^*$ el $2-$cociclo de $A \rtimes_f C_3$ tal que

$$f(g^i, g^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j < 3 \\ \alpha & \text{si } i+j \geq 3 \ , \end{cases} \tag{4.48}$$

donde $0 \leq i, j < 3$; $g^i, g^j \in C_3 = \{1, g, g^2\} = \langle g \rangle$. Entonces el valor de $\alpha = a \in K^*$.

Se considera $\sigma : C_3 \to Aut(A)$, $g^i \mapsto \sigma(g^i) : A \to A$ definido por $\sigma(g^i)(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2)^{g^i}$.

La aplicación $\sigma(g)$ es un automorfismo de la $K-$álgebra A.
Si $\lambda \in K$, $a + bx + cx^2$ y $a' + b'x + c'x^2 \in A$, entonces :

1) $\sigma(g)(\lambda(a + bx + cx^2)) = \lambda\sigma(g)(a + bx + cx^2)$,

2) $\sigma(g)((a + bx + cx^2) + (a' + b'x + c'x^2))$
$= \sigma(g)(a + bx + cx^2) + \sigma(g)(a' + b'x + c'x^2)$,

3) $\sigma(g)((a + bx + cx^2)(a' + b'x + c'x^2)) = \sigma(g)(a + bx + cx^2)\sigma(g)(a' + b'x + c'x^2)$.

En efecto :

$$\begin{aligned} 1) \ \sigma(g)(\lambda(a + bx + cx^2)) &= \sigma(g)(\lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2) \\ &= (\lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2)^g, \text{ por (4.47):} \\ &= \lambda a + \lambda b\lambda_3 x + \lambda c\lambda_3^2 x^2 = \lambda(a + b\lambda_3 x + c\lambda_3^2 x^2) \\ &= \lambda\sigma(g)(a + bx + cx^2) \ . \end{aligned}$$

Similarmente, se verifican 2) y 3).

Puesto que $\alpha \in A^*$, entonces por el Ejemplo 4.3.8 $\alpha = a + bx + cx^2$ donde $a \neq 0$. Por la Definición 4.1.1 las tres condiciones siguientes deben ser satisfechas:

1) $f(1, g^i) = f(g^i, 1) = 1$,

2) $f(g^j, g^k)^{g^i} f(g^i, g^{j+k}) = f(g^i, g^j) f(g^{i+j}, g^k)$,

3) $((a' + b'x + c'x^2)^{g^j})^{g^i} f(g^i, g^j) = f(g^i, g^j)(a' + b'x + c'x^2)^{g^{i+j}}$, $(a' + b'x + c'x^2) \in A$.

Todos los elementos de $C_3 \times C_3 \times C_3 = \{1, g, g^2\} \times \{1, g, g^2\} \times \{1, g, g^2\}$ están en el arreglo siguiente:

$$\begin{array}{lll}
(1,1,1) & (g,1,1) & (g^2,1,1) \\
(1,1,g) & (g,1,g) & (g^2,1,g) \\
(1,1,g^2) & (g,1,g^2) & (g^2,1,g^2) \\
(1,g,1) & (g,g,1) & (g^2,g,1) \\
(1,g,g) & (g,g,g) & (g^2,g,g) \\
(1,g,g^2) & (g,g,g^2) & (g^2,g,g^2) \\
(1,g^2,1) & (g,g^2,1) & (g^2,g^2,1) \\
(1,g^2,g) & (g,g^2,g) & (g^2,g^2,g) \\
(1,g^2,g^2) & (g,g^2,g^2) & (g^2,g^2,g^2)\ .
\end{array} \tag{4.49}$$

La afirmación 1) para f es satisfecha por definición.
La afirmación 3) para f, $((a' + b'x + c'x^2)^{g^j})^{g^i} f(g^i, g^j) = f(g^i, g^j)(a' + b'x + c'x^2)^{g^{i+j}}$, es satisfecha debido a que la $K-$álgebra $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^3 \rangle}$ es conmutativa y
$C_3 \times A \to A$, $(g, a + bx + cx^2) \mapsto (a + bx + cx^2)^g = a + b\lambda_3 x + c\lambda_3^2 x^2$
es una acción de C_3 sobre A.
Además la afirmación 2) para f, $f(g^j, g^k)^{g^i} f(g^i, g^{j+k}) = f(g^i, g^j) f(g^{i+j}, g^k)$, es satisfecha si considerando (4.49) y haciendo 27 cálculos, se cumplen la igualdades siguientes:

(15) $\alpha^g = f(g, g^2)^g f(g, (g)(g^2)) = f(g, g) f((g)(g), g^2) = \alpha$,

(17) $\alpha^g = f(g^2, g)^g f(g, (g^2)(g)) = f(g, g^2) f((g)(g^2), g) = \alpha$,

(18) $\alpha^g = f(g^2, g^2)^g f(g, (g^2)(g^2)) = f(g, g^2) f((g)(g^2), g^2) = \alpha$,

(24) $\alpha^{g^2} = f(g, g^2)^{g^2} f(g^2, (g)(g^2)) = f(g^2, g) f((g^2)(g), g^2) = \alpha$,

(26) $\alpha^{g^2} = f(g^2, g)^{g^2} f(g^2, (g^2)(g)) = f(g^2, g^2) f((g^2)(g^2), g) = \alpha$,

(27) $\alpha^{g^2}\alpha = f(g^2, g^2)^{g^2} f(g^2, g) = f(g^2, g^2) f((g^2)(g^2), g^2) = \alpha^2$,

donde $\alpha = a + bx + cx^2$, $\alpha^g = a + b\lambda_3 x + c\lambda_3^2 x^2$, $\alpha^{g^2} = a + b\lambda_3^2 x + c\lambda_3 x^2$.
Recordando que la propiedad cancelativa vale en A^* y $\alpha \in A^*$, de las igualdades anteriores deducimos que $\alpha^g = \alpha$ y $\alpha^{g^2} = \alpha$; de modo que $\alpha = a + 0x + 0x^2 = a$. Por lo tanto $\alpha = a \in K^*$.

En general, tomando (4.34) en lugar de (4.48), también se obtiene que $\alpha = \gamma_0 \in K^*$ (vea la Proposición 4.1.8). De este hecho, la Proposición 4.3.7 y el Teorema 4.3.5, la resolución proyectiva relativa del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$ es el complejo total del complejo doble de cadenas

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d^1_{03}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{13}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{23}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{33}"] & \\
E \otimes E \arrow[d, "d^1_{02}"] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{12}"'] \arrow[d, "d^1_{12}"] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{22}"'] \arrow[d, "d^1_{22}"] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{32}"'] \arrow[d, "d^1_{32}"] & \cdots \arrow[l, "d^0_{42}"'] \\
E \otimes E \arrow[d, "d^1_{01}"] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{11}"'] \arrow[d, "d^1_{11}"] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{21}"'] \arrow[d, "d^1_{21}"] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{31}"'] \arrow[d, "d^1_{31}"] & \cdots \arrow[l, "d^0_{41}"'] \\
E \otimes E & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{10}"'] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{20}"'] & E \otimes E \arrow[l, "d^0_{30}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{40}"']
\end{tikzcd}
\tag{4.50}
$$

Homología de Hochschild

Sea $E = A \rtimes_f C_t$ con A, C_t y f como en el inicio de la sección 4.3 y M un $E-$bimódulo. Sea (X_*, d_*) la resolución proyectiva relativa de $E = \frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$ obtenida en el Teorema 4.3.5. La aplicación $\theta_{rs} : M \otimes_{E^e} X_{rs} \to M$ definida por

$$\theta_{rs}(m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)) = \begin{cases} m & \text{si } s \text{ es par} \\ m\omega_g & \text{si } s \text{ es impar} \end{cases},$$

es un isomorfismo en $\mathfrak{m}^l_{E^e}$, cuyo inverso es dado por

$$\vartheta_{rs}(m) = \begin{cases} m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1) & \text{si } s \text{ es par} \\ m\omega_g^{-1} \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1) & \text{si } s \text{ es impar.} \end{cases}$$

Proposición 4.3.10. *Asuma que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.6.*
Sean $\alpha = \sum_{u=0}^{t-1} \gamma_u x^u$ *y* $\overline{d}^\ell_{rs} = \theta_{r+\ell-1,s-\ell} \circ (M \otimes_{E^e} d^\ell_{rs}) \circ \vartheta_{rs}$. *Entonces los morfismos de* $E-$*bimódulos* $\overline{d}^\ell_{rs} : M \to M$ $(r, s \geq 0$ *y* $0 \leq \ell \leq \min(2, s)$ *y* $r + \ell > 0)$ *están dados por las*

siguientes fórmulas:

$$\overline{d}^0_{2r-1,s}(m) = xm - mx \ , \tag{4.51}$$

$$\overline{d}^0_{2r,s}(m) = \sum_{h=0}^{t-1} x^{t-h-1} m x^h \ , \tag{4.52}$$

$$\overline{d}^1_{r,2s-1}(m) = (-1)^r (m - \lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r} \omega_g m \omega_g^{-1}) \ , \tag{4.53}$$

$$\overline{d}^1_{r,2s}(m) = (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} \omega_g^{-h-1} \alpha m \alpha^{-1} \omega_g^{h+1} \ , \tag{4.54}$$

$$\overline{d}^2_{2r-1,s}(m) = 0 \ , \tag{4.55}$$

$$\overline{d}^2_{2r,s}(m) = -\sum_{u=1}^{t-1} \sum_{h=0}^{u-1} \gamma_u x^{u-h-1} m x^h \alpha^{-1} \ . \tag{4.56}$$

Prueba. Para obtener la igualdad (4.51) en el caso en que s es par, se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd}
m \in M_{2r-1,s} \arrow[r, "\vartheta_{2r-1,s}"] \arrow[d, "\overline{d}^0_{2r-1,s}"'] & M \otimes_{E^e} X_{2r-1,s} \arrow[d, "M \otimes_{E^e} d^0_{2r-1,s}"] \\
M_{2r-2,s} & M \otimes_{E^e} X_{2r-2,s} \arrow[l, "\theta_{2r-2,s}"]
\end{tikzcd}$$

Entonces $\vartheta_{2r-1,s}(m) = m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$, de modo que

$$\begin{aligned}
\overline{d}^0_{2r-1,s}(m) &= \theta_{2r-2,s} \circ M \otimes_{E^e} d^0_{2r-1,s} \circ \vartheta_{2r-1,s}(m) \\
&= \theta_{2r-2,s}(m \otimes_{E^e} d^0_{2r-1,s}(\omega_1 \otimes \omega_1)) \\
&= \theta_{2r-2,s}(m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes x\omega_1 - x\omega_1 \otimes \omega_1)).
\end{aligned}$$

Pero $m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes x\omega_1) = m(\omega_1 \otimes x\omega_1) \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1) = xm \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$,
$m \otimes_{E^e} (x\omega_1 \otimes \omega_1) = m(x\omega_1 \otimes \omega_1) \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1) = mx \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$, luego

$$\begin{aligned}
\overline{d}^0_{2r-1,s}(m) &= \theta_{2r-2,s}(xm \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)) - \theta_{2r-2,s}(mx \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)) \\
&= xm - mx.
\end{aligned}$$

Para el caso en que s es impar se obtiene la misma igualdad.

Para obtener la igualdad (4.54) se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd}
m \in M_{r,2s} \arrow[r, "\vartheta_{r,2s}"] \arrow[d, "\overline{d}^1_{r,2s}"'] & M \otimes_{E^e} X_{r,2s} \arrow[d, "M \otimes_{E^e} d^1_{r,2s}"] \\
M_{r,2s-1} & M \otimes_{E^e} X_{r,2s-1} \arrow[l, "\theta_{r,2s-1}"]
\end{tikzcd}$$

Entonces $\vartheta_{r,2s}(m) = m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$, por el Teorema 4.3.6

$$\begin{aligned}
\overline{d}^1_{r,2s}(m) &= \theta_{r,2s-1} \circ M \otimes_{E^e} d^1_{r,2s} \circ \vartheta_{r,2s}(m) \\
&= \theta_{r,2s-1}(m \otimes_{E^e} d^1_{r,2s}(\omega_1 \otimes \omega_1)) \\
&= \theta_{r,2s-1}(m \otimes_{E^e} ((-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} \alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}) \\
&= (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} \theta_{r,2s-1}(m \otimes_{E^e} (\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}})).
\end{aligned}$$

Puesto que $\omega_g^{t-h-1} = \omega_{g^{t-h-1}}$, $\omega_g^h = \omega_{g^h}$ y $\omega_g^t = \alpha$ por (4.57), se sigue que

$m \otimes_{E^e} (\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}) = m(\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes \omega_{g^{t-h-1}}) \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1) =$

$\omega_{g^{t-h-1}} m\alpha^{-1}\omega_{g^h} \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1) = \omega_g^{-h-1}\alpha m\alpha^{-1}\omega_g^h \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$.

Reemplazando este valor :

$$\begin{aligned}
\overline{d}^1_{r,2s}(m) &= (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} \theta_{r,2s-1}(\omega_g^{-h-1}\alpha m\alpha^{-1}\omega_g^h \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)) \\
&= (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} (\omega_g^{-h-1}\alpha m\alpha^{-1}\omega_g^h)\omega_g \\
&= (-1)^{r+1} \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} \omega_g^{-h-1}\alpha m\alpha^{-1}\omega_g^{h+1}.
\end{aligned}$$

Similarmente, se obtienen las otras igualdades. □

Tensorizando M sobre E^e con el complejo (X_*, d_*) del Teorema 4.3.5 y usando las identificaciones $\vartheta_{rs} : M \to M \otimes_{E^e} X_{rs}$, dadas por

$\vartheta_{r,2s}(m) = m \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$ y $\vartheta_{r,2s+1}(m) = m\omega_g^{-1} \otimes_{E^e} (\omega_1 \otimes \omega_1)$, se obtiene el complejo de cadenas de E^e-módulos izquierdos

$$\overline{X}_*(E,M) \ : \ \overline{X}_0 \xleftarrow{\overline{d}_1} \overline{X}_1 \xleftarrow{\overline{d}_2} \overline{X}_2 \xleftarrow{\overline{d}_3} \overline{X}_3 \xleftarrow{\overline{d}_4} \cdots \ ,$$

donde $\overline{X}_n = \bigoplus_{r+s=n} M_{rs}$ y $\overline{d}_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{\min(2,s)} \overline{d}^\ell_{rs}$, donde cada M_{rs} es una copia de M.

En efecto;

ya se sabe que la aplicación $\theta_{rs} : M \otimes_{E^e} X_{rs} \to M_{rs}$ es un isomorfismo en $\mathfrak{m}^l_{E^e}$, cuya inversa es $\vartheta_{rs} : M_{rs} = M \to M \otimes_{E^e} X_{rs}$. Entonces $\theta_n = \sum_{r+s=n} \theta_{rs} : M \otimes_{E^e} X_n \to \overline{X}_n$ es un isomorfismo en $\mathfrak{m}^{l}_{E^e}$, cuya inversa es ϑ_n.

Claramente $\overline{X}_n = \bigoplus_{r+s=n} M_{rs}$, donde $M_{rs} = M$, es un $E-$bimódulo.

Recordando que $\overline{d}^{\ell}_{rs} : M_{rs} \to M_{r+\ell-1,s-\ell}$ es la aplicación dada por

$\overline{d}^{\ell}_{rs} = \theta_{r+\ell-1,s-\ell} \circ (M \otimes_{E^e} d^{\ell}_{rs}) \circ \vartheta_{rs}$, y que $M \otimes_{E^e} (-)$ es un funtor aditivo, por los Teoremas 4.3.5 y 4.3.6

$$\begin{aligned}
\overline{d}^{\ell}_{n} &= \theta_{n-1} \circ (M \otimes_{E^e} d^{\ell}_{n}) \circ \vartheta_n \\
&= \theta_{n-1} \circ (M \otimes_{E^e} \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{\min(2,s)} d^{\ell}_{rs}) \circ \vartheta_n \\
&= \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{\min(2,s)} \overline{d}^{\ell}_{rs} \ .
\end{aligned}$$

Considerando el diagrama conmutativo en que los morfismos verticales son isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}_{n-1} & \overline{X}_n \arrow[l, "\overline{d}_n"'] & \overline{X}_{n+1} \arrow[l, "\overline{d}_{n+1}"'] \\
M \otimes_{E^e} X_{n-1} \arrow[u, "\theta_{n-1}"] & M \otimes_{E^e} X_n \arrow[l, "M\otimes_{E^e} d_n"'] \arrow[u, "\theta_n"] & M \otimes_{E^e} X_{n+1} \arrow[l, "M\otimes_{E^e} d_{n+1}"'] \arrow[u, "\theta_{n+1}"]
\end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta que $d_n d_{n+1} = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\overline{d}_n \overline{d}_{n+1} &= (\theta_{n-1} \circ M \otimes_{E^e} d_n \circ \vartheta_n)(\theta_n \circ M \otimes_{E^e} d_{n+1} \circ \vartheta_{n+1}) \\
&= \theta_{n-1} \circ M \otimes_{E^e} d_n d_{n+1} \circ \vartheta_{n+1} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $(\overline{X}_*(E, M), \overline{d}_*)$ es un complejo de cadenas de E^e-módulos izquierdos.

Teorema 4.3.11. [27, Theo. 3.1] *La homología de Hochschild $H_*(E, M)$ de E con coeficientes en M se expresa como la homología de $\overline{X}_*(E, M)$.*

Prueba. La conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}_n \arrow[r, "\vartheta_n"] \arrow[d, "\overline{d}_n"'] & M \otimes_{E^e} X_n \arrow[d, "M\otimes_{E^e} d_n"] \\
\overline{X}_{n-1} & M \otimes_{E^e} X_{n-1} \arrow[l, "\theta_{n-1}"]
\end{tikzcd}$$

indica que $\vartheta_* : \overline{X}_*(E,M) \to M \otimes_{E^e} (X_*, d_*)$ es un isomorfismo de complejos de cadenas de $E-$bimódulos. Entonces $H_n(\overline{X}_*(E,M)) \cong H_n(M \otimes_{E^e} (X_*, d_*))$, $\forall n \geq 0$.
De acuerdo al Corolario 1.3.15, las dos resoluciones $\mathscr{E}'-$proyectivas de $\frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_f C_t$ denotadas por $(\mathscr{A}_*, d)$ y (X_*, d_*) son homotópicamente equivalentes. Por el Lema 3.5.1 $M \otimes_{E^e} (\cdot)$ es un funtor aditivo, luego por el Teorema 3.5.2 la homología de $\overline{X}_*(E,M)$ es la homología de Hochschild de E con coeficientes en M. $\square$

Sea $\omega_g x = \lambda x \omega_g$, $\omega_g^t = \alpha$, $\lambda^t = 1$ y $g \cdot x = \lambda x$ donde $\lambda \in \mu_t(K)$. Se observa que

$$\omega_g^i = \begin{cases} \omega_{g^i} & \text{si } 0 \leq i \leq t-1 \\ \alpha & \text{si } i = t\ , \end{cases} \tag{4.57}$$

pues $\omega_g^2 = \omega_g \omega_g = f(g,g)\omega_{g^2} = \omega_{g^2}$,
$\omega_g^3 = \omega_g^2 \omega_g = \omega_{g^2}\omega_g = f(g^2, g)\omega_{g^3} = \omega_{g^3}$, en general $\omega_g^i = \omega_g^{i-1}\omega_g = \omega_{g^i}$ para $0 \leq i \leq t-1$; $\omega_g^t = \omega_g^{t-1}\omega_g = \omega_{g^{t-1}}\omega_g = f(g^{t-1}, g)\omega_{g^t} = \alpha\omega_1 = \alpha$.

Efectuando cálculos

$$\begin{aligned} \omega_{g^2} x = \omega_g(\omega_g x) &= \omega_g(\lambda x \omega_g) \\ &= \lambda(\omega_g x)\omega_g = \lambda^2 x \omega_{g^2};\ \text{luego } \omega_{g^i} x = \lambda^i x \omega_{g^i}. \end{aligned}$$

Ahora, tomando $m = x^j \omega_{g^i}$ en (4.51) :

$$\begin{aligned} d^0_{2r-1,s}(x^j \omega_{g^i}) &= x(x^j \omega_{g^i}) - (x^j \omega_{g^i})x \\ &= x^{j+1}\omega_{g^i} - x^j(\omega_{g^i} x) \\ &= x^{j+1}\omega_{g^i} - x^j(\lambda^i x \omega_{g^i}) = (1-\lambda^i)x^{j+1}\omega_{g^i}\ . \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} \text{Se observa que } \omega_{g^3} x^2 = (\omega_{g^3} x)x &= (\lambda^3 x \omega_{g^3})x \\ &= (\lambda^3 x)(\lambda^3 x \omega_{g^3}) \\ &= \lambda^{2(3)} x^2 \omega_{g^3}\ ;\text{luego } \omega_{g^i} x^h = \lambda^{hi} x^h \omega_{g^i}. \end{aligned}$$

Considerando $m = x^j\omega_{g^i}$ en (4.52):

$$\begin{aligned} d^0_{2r,s}(x^j\omega_{g^i}) &= \sum_{h=0}^{t-1} x^{t-h-1}(x^j\omega_{g^i})x^h \\ &= \sum_{h=0}^{t-1} x^{t+j-h-1}(\omega_{g^i}x^h) \\ &= \sum_{h=0}^{t-1} x^{t+j-h-1}(\lambda^{hi}x^h\omega_{g^i}) = \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hi}x^{t+j-1}\omega_{g^i}\ . \end{aligned} \tag{4.59}$$

Sustituyendo m por $x^j\omega_{g^i}$ en la expresión (4.53):

$$d^1_{r,2s-1}(x^j\omega_{g^i}) \ = \ (-1)^r(x^j\omega_{g^i} - \lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_g(x^j\omega_{g^i})\omega_g^{-1});$$

$$\text{donde} \quad \begin{aligned} \omega_g x^j &= (\omega_g x^{j-1})x \\ &= (\lambda^{j-1}x^{j-1}\omega_g)x = \lambda^j x^j\omega_g; \end{aligned}$$

$\omega_{g^i}\omega_g^{-1} = \omega_g^i\omega_g^{-1} = \omega_g^{i-1} = \omega_{g^{i-1}}$, asociando :

$$\begin{aligned} \omega_g(x^j\omega_{g^i})\omega_g^{-1} &= (\omega_g x^j)(\omega_{g^i}\omega_g^{-1}) \\ &= (\lambda^j x^j\omega_g)(\omega_{g^{i-1}}) \\ &= \lambda^j x^j f(g,g^{i-1})\omega_{g^i} = \lambda^j x^j\omega_{g^i}, \text{pues } f(g,g^{i-1}) = 1. \end{aligned}$$

Como $\lambda^t = 1$, $\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r} = \lambda^{r-2[\frac{r}{2}]}$, luego $\lambda^{(t-2)[\frac{r}{2}]+r}\omega_g(x^j\omega_{g^i})\omega_g^{-1} = \lambda^{j+r-2[\frac{r}{2}]}x^j\omega_{g^i}$. Así,

$$d^1_{r,2s-1}(x^j\omega_{g^i}) = (-1)^r(1-\lambda^{j+r-2[\frac{r}{2}]})x^j\omega_{g^i}\ . \tag{4.60}$$

Reemplazando m por $x^j\omega_{g^i}$ en la igualdad (4.54):

$$d^1_{r,2s}(x^j\omega_{g^i}) \ = \ (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)}\omega_g^{-h-1}\alpha(x^j\omega_{g^i})\alpha^{-1}\omega_g^{h+1};$$

donde $\omega_g^{-h-1}\alpha = \omega_g^{-h-1}\omega_g^t = \omega_g^{t-h-1}$, $\alpha^{-1}\omega_g^{h+1} = (\omega_g^{t-h-1})^{-1} = (\omega_{g^{t-h-1}})^{-1} = \alpha^{-1}\omega_{g^{h+1}}$;

$$\begin{aligned} (\omega_g^{-h-1}\alpha)x^j &= \omega_g^{t-h-1}x^j \\ &= \omega_{g^{t-h-1}}x^j = \lambda^{j(t-h-1)}x^j\omega_{g^{t-h-1}}\ ; \end{aligned}$$

$$\omega_{g^i}(\alpha^{-1}\omega_g^{h+1}) \quad = \quad \alpha^{-1}f(g^i, g^{h+1})\omega_{g^{i+h+1}} \ ,$$

Como $f(g^{t-h-1}, g^{i+h+1}) = f(g^{i+h+1}, g^{t-h-1})$, $f(g^{h+1}, g^{t-h-1}) = \alpha$ y $g^t = 1$; por la condición de cociclo $f(g^i, g^{h+1})f(g^{i+h+1}, g^{t-h-1}) = f(g^{h+1}, g^{t-h-1})^{g^i} f(g^i, g^t)$, se deduce que $f(g^i, g^{h+1})f(g^{t-h-1}, g^{i+h+1}) = \alpha$.

Asociando

$$\begin{aligned}
\omega_g^{-h-1}\alpha(x^j\omega_{g^i})\alpha^{-1}\omega_g^{h+1} &= [\omega_g^{-h-1}\alpha x^j][\omega_{g^i}\alpha^{-1}\omega_g^{h+1}] \\
&= (\lambda^{j(t-h-1)}x^j\omega_{g^{t-h-1}})(\alpha^{-1}f(g^i, g^{h+1})\omega_{g^{i+h+1}}) \\
&= \lambda^{j(t-h-1)}x^j\alpha^{-1}f(g^i, g^{h+1})f(g^{t-h-1}, g^{i+h+1})\omega_{g^{t+i}} \\
&= \lambda^{j(t-h-1)}x^j\omega_{g^i} = \lambda^{j(-h-1)}x^j\omega_{g^i} \text{ ya que } \lambda^t = 1 \ .
\end{aligned}$$

Puesto que $\lambda^{(-h-1)((t-2)[\frac{r}{2}]+r)} = \lambda^{(-h-1)(r-2[\frac{r}{2}])}$, resulta que

$$d^1_{r,2s}(x^j\omega_{g^i}) = (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(j+r-2[\frac{r}{2}])}x^j\omega_{g^i} \ .$$

Del hecho que $\lambda^t = 1$ y $\lambda^{-h-1} = \lambda^{t-h-1}$, se deduce que $\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{(-h-1)(j+r-2[\frac{r}{2}])} = \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{h(j+r-2[\frac{r}{2}])}$; luego

$$d^1_{r,2s}(x^j\omega_{g^i}) = (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{h(j+r-2[\frac{r}{2}])}x^j\omega_{g^i} \ . \tag{4.61}$$

Es necesario recordar que la homología de Hochschild de un producto cruzado E es dada por $HH_*(E) = H_*(E, E)$ (ver el Corolario 3.5.4).

Sea K un cuerpo y $\mu_t(K)$ el conjunto de las raíces primitivas t-ésimas de la unidad en K. Recordando que $E = A \rtimes_f C_t$ es el producto cruzado de A con C_t, donde $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^t\rangle}$ y $C_t = \langle g\rangle = \{1, g, \ldots, g^{t-1}\}$, se obtiene el siguiente resultado, que expresa la homología de Hochschild de grado n de E en términos de homologías de grado n de los complejos totales de los complejos dobles asociados a E como en [27, Exam. 3.3]

Corolario 4.3.12. *Si* $\lambda \in \mu_t(K)$, *entonces* $HH_n(E) = \bigoplus_{i=0}^{t-1} H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^i}))$

donde $E = \bigoplus_{i=0}^{t-1} A\omega_{g^i}$.

Prueba. Por la Observación 4.1.9 $E = \frac{K[X]}{\langle X^t \rangle} \rtimes_{f_\alpha} C_t$ donde $\alpha \in K^*$. Aplicando la Proposición 4.3.7 y el Lema 4.3.3, se ve que el diagrama (4.50) es un complejo doble de cadenas. Considerando la definición de $\overline{d}_{rs}^{\ell}$ dada en la Proposición 4.3.10, este complejo doble de cadenas, mediante el funtor $M \otimes_{E^e} (-)$ se transforma en el complejo doble de cadenas siguiente

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\overline{d}_{03}^1"] & \vdots \arrow[d, "\overline{d}_{13}^1"] & \vdots \arrow[d, "\overline{d}_{23}^1"] & \vdots \arrow[d, "\overline{d}_{33}^1"] & \\
E \arrow[d, "\overline{d}_{02}^1"] & E \arrow[l, "\overline{d}_{12}^0"'] \arrow[d, "\overline{d}_{12}^1"] & E \arrow[l, "\overline{d}_{22}^0"'] \arrow[d, "\overline{d}_{22}^1"] & E \arrow[l, "\overline{d}_{32}^0"'] \arrow[d, "\overline{d}_{32}^1"] & \cdots \arrow[l, "\overline{d}_{42}^0"'] \\
E \arrow[d, "\overline{d}_{01}^1"] & E \arrow[l, "\overline{d}_{11}^0"'] \arrow[d, "\overline{d}_{11}^1"] & E \arrow[l, "\overline{d}_{21}^0"'] \arrow[d, "\overline{d}_{21}^1"] & E \arrow[l, "\overline{d}_{31}^0"'] \arrow[d, "\overline{d}_{31}^1"] & \cdots \arrow[l, "\overline{d}_{41}^0"'] \\
E & E \arrow[l, "\overline{d}_{10}^0"'] & E \arrow[l, "\overline{d}_{20}^0"'] & E \arrow[l, "\overline{d}_{30}^0"'] & \cdots \arrow[l, "\overline{d}_{40}^0"']
\end{tikzcd}
\tag{4.62}
$$

Tomando $M = E$ en el Teorema 4.3.11, se sabe que la homología de Hochschild de E es la homología del complejo de cadenas $(\overline{X}_*(E, E), \overline{d}_*)$, donde $\overline{X}_n = \bigoplus_{r+s=n} E_{rs}$ y

$\overline{d}_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r+\ell>0}} \sum_{\ell=0}^{\min(1,s)} \overline{d}_{rs}^{\ell}$, $E_{rs} = E$.

Puesto que $E = \bigoplus_{i=0}^{t-1} A\omega_{g^i}$, se obtienen los morfismos inducidos

$d_{rs}^{\ell} = \overline{d}_{rs}^{\ell}|_{A\omega_{g^i}} : A\omega_{g^i} \to A\omega_{g^i}$ que aparecen en (4.63) para $\ell = 0, 1$. Luego, la estructura de complejo doble de cadenas 4.62 se hereda a (4.63).

Para cada $i = 0, \ldots, t-1$ sea $\overline{X}_*(A\omega_{g^i})$ el complejo total del complejo doble de cadenas (4.63), entonces $\overline{X}_*(E) = \overline{X}_*(A\omega_1) \oplus \overline{X}_*(A\omega_g) \oplus \cdots \oplus \overline{X}_*(A\omega_{g^{t-1}})$. Del hecho que el funtor de homología es aditivo, se sigue que

$$
\begin{aligned}
HH_n(E) = H_n(\overline{X}_*(E)) &= H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) \oplus H_n(\overline{X}_*(A\omega_g)) \oplus \cdots \oplus H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^{t-1}})) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{t-1} H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})).
\end{aligned}
$$

$\square$

Se considera una $K-$álgebra $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^t \rangle} = \bigoplus_{i=0}^{t-1} Kx^i$, donde x denota la clase de X en A. El grupo cíclico $C_t = \langle g \rangle$ de orden t actúa sobre A via $g \cdot x = \lambda x$. Entonces el producto cruzado del corolario anterior

$$E = \bigoplus_{i=0}^{t-1} A\omega_{g^i} \ ,$$

de A con C_t es definido por $\omega_g x = \lambda x \omega_g$ y $\omega_g^t = \alpha$.

En consecuencia, la homología de Hochschild de E se reduce a las homologías de los complejos de cadenas $\overline{X}_*(A\omega_{g^i})$ $(0 \le i \le t-1)$, donde cada $\overline{X}_*(A\omega_{g^i})$ es el complejo total del complejo doble de cadenas:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d^1_{03}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{13}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{23}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{33}"] & \\
A\omega_{g^i} \arrow[d, "d^1_{02}"] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{12}"'] \arrow[d, "d^1_{12}"] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{22}"'] \arrow[d, "d^1_{22}"] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{32}"'] \arrow[d, "d^1_{32}"] & \cdots \arrow[l, "d^0_{42}"'] \\
A\omega_{g^i} \arrow[d, "d^1_{01}"] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{11}"'] \arrow[d, "d^1_{11}"] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{21}"'] \arrow[d, "d^1_{21}"] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{31}"'] \arrow[d, "d^1_{31}"] & \cdots \arrow[l, "d^0_{41}"'] \\
A\omega_{g^i} & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{10}"'] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{20}"'] & A\omega_{g^i} \arrow[l, "d^0_{30}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{40}"']
\end{tikzcd} \tag{4.63}$$

donde las diferenciales horizontales y verticales son dadas por:

$$\begin{aligned}
d^0_{2r-1,s}(x^j\omega_{g^i}) &= (1-\lambda^i)x^{j+1}\omega_{g^i},\\
d^0_{2r,s}(x^j\omega_{g^i}) &= \sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{hi} x^{t+j-1}\omega_{g^i},\\
d^1_{r,2s-1}(x^j\omega_{g^i}) &= (-1)^r(1-\lambda^{j+r-2[\frac{r}{2}]})x^j\omega_{g^i},\\
d^1_{r,2s}(x^j\omega_{g^i}) &= (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1} \lambda^{h(j+r-2[\frac{r}{2}])}x^j\omega_{g^i} \ .
\end{aligned}$$

Estas igualdades fueron obtenidos en (4.58), (4.59), (4.60) y (4.61), respectivamente.

Proposición 4.3.13. *Los morfismos horizontales y verticales de* (4.63) *satisfacen las identidades $d^0d^0 = 0$, $d^1d^1 = 0$ y $d^1d^0 = -d^0d^1$.*

Prueba. Se debe verificar las tres afirmaciones siguientes:

i) $d^0d^0 = 0$. Sea $x^j\omega_{g^i} \in A\omega_{g^i}$ y r impar.

$$\begin{aligned} d^0_{r-1,s}d^0_{rs}(x^j\omega_{g^i}) &= (1-\lambda^i)d^0_{r-1,s}(x^{j+1}\omega_{g^i}) \\ &= (1-\lambda^i)\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hi}x^{j+t}\omega_{g^i} = 0 \text{ ya que } \lambda^t = 1; \\ \text{Sea } r \text{ par, } d^0_{r-1,s}d^0_{rs}(x^j\omega_{g^i}) &= \sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hi}d^0_{r-1,s}(x^{j+t-1}\omega_{g^i}) = 0. \end{aligned}$$

ii) $d^1d^1 = 0$. Sea $x^j\omega_{g^i} \in A\omega_{g^i}$ y s par. Puesto que $r - 2[\frac{r}{2}] = \begin{cases} 0, & r \text{ par} \\ 1, & r \text{ impar} \end{cases}$

$$\begin{aligned} d^1_{r,s-1}d^1_{rs}(x^j\omega_{g^i}) &= (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{h(j+r-2[\frac{r}{2}])}d^1_{r,s-1}(x^j\omega_{g^i}) \\ &= \begin{cases} -\displaystyle\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hj}(1-\lambda^j)x^j\omega_{g^i}, & r \text{ par} \\ -\displaystyle\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{h(j+1)}(1-\lambda^{(j+1)})x^j\omega_{g^i}, & r \text{ impar} \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sea s impar. De manera similar, se obtiene que $d^1_{r,s-1}d^1_{rs}(x^j\omega_{g^i}) = 0$.

iii) $d^1d^0 = -d^0d^1$. Suponga que s es par.

$$\begin{aligned} d^0_{r,s-1}d^1_{rs}(x^j\omega_{g^i}) &= (-1)^{r+1}\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{h(j+r-2[\frac{r}{2}])}d^0_{r,s-1}(x^j\omega_{g^i}) \\ &= \begin{cases} -\displaystyle\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hj}\left(\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^{ki}x^{j+t-1}\omega_{g^i}\right), & r \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{h(j+1)}(1-\lambda^i)x^{j+1}\omega_{g^i}, & r \text{ impar} \end{cases} \\ &= -d^1_{r-1,s}d^0_{rs}(x^j\omega_{g^i}); \end{aligned}$$

Suponga que s es impar.

$$\begin{aligned} d^0_{r,s-1}d^1_{rs}(x^j\omega_{g^i}) &= (-1)^r(1-\lambda^{j+r-2[\frac{r}{2}]})d^0_{r,s-1}\left(x^j\omega_{g^i}\right) \\ &= \begin{cases} (1-\lambda^j)\left(\displaystyle\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hi}x^{j+t-1}\omega_{g^i}\right), & r \text{ par} \\ -(1-\lambda^{j+1})(1-\lambda^i)x^{j+1}\omega_{g^i}, & r \text{ impar} \end{cases} \\ &= -d^1_{r-1,s}d^0_{rs}(x^j\omega_{g^i}); \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 5

Homología de Hochschild de un producto cruzado biparamétrico $\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t$

A partir del método de cálculo de homología de Hochschild de álgebras monogénicas con grupos cíclicos finitos, según se establece en [27, Theo. 3.1], y eligiendo el valor α de f en K^* (ver la Proposición 4.1.8), se desarrolla una técnica para completar el cálculo de homología de Hochschild de los productos cruzados de las secciones 4.2 y 4.3. Esta técnica se fundamenta en la nonegatividad y aciclicidad de las columnas de los complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado, así como en descomposición de sus complejos totales en la suma directa de subcomplejos de cadenas. Esta idea surgió para resolver el siguiente problema: dada la acción del grupo $C_2 = \{1, g\}$ sobre $\frac{K[X]}{\langle X^2\rangle}$ definida por $g \cdot 1 = 1$, $g \cdot x = -x$ cuando $x = X + \langle X^2\rangle$ y K es un cuerpo. Calcular la homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^2\rangle} \rtimes_f C_2$. La solución de este problema está inspirada en el cálculo de homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t$, introducido en la comunicación privada [27, Exam. 3.3]. En dicho cálculo se considera el anillo $K = \mathbb{Z}[\lambda]$, donde λ es una raíz primitiva t-ésima de la unidad, a es un elemento invertible de K y C_t es un grupo cíclico de orden t. Este cálculo es obtenido gracias a cinco fórmulas de homología provenientes de complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado.

Para determinar la homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle} \rtimes_f C_2$, donde a es un parámetro, las diferenciales horizontales y verticales de los complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado fueron traducidas al lenguaje de matrices. Esta transformación facilitó los cálculos, permetió la determinación de las propiedades de los complejos dobles y la interpretación de la homología de los complejos totales correspondientes.
Se descubrió que el problema propuesto es extendible al cálculo de la homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t\rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 3$.
Con el fin de aplicarlos o adaptarlos a las resoluciones del problema propuesto y su extensión, se establecieron resultados originales para calcular la homología de Hochschild del producto cruzado biparamétrico $\frac{K[X]}{\langle X^t-a\rangle} \rtimes_f C_t$, donde $t \geq 2$. Estos resultados son el Lema 5.2.16 y Lema 5.3.10 provistos de aquellos complementarios calculados o calculables, los calculados son dados mediante lemas y proposiciones, y los calculables se realizan en la prueba de los cinco resultados que se mencionarán en el siguiente parágrafo.
Los dos resultados principales obtenidos de la tesis son el Teorema 5.2.19 y el Teorema 5.3.12. Como resultados subyacentes, hemos obtenido el Teorema 5.2.18, el Teorema 5.2.17 y el Teorema 5.3.11, que fueron derivados considerando que la característica del cuerpo K es dos y haciendo que el parámetro a de los productos cruzados biparamétricos sea diferente de cero en el caso t dos y t es mayor o igual a tres, respectivamente.

5.1 El complejo total de un complejo doble

5.1.1 Homología de un complejo total

Sea Λ un anillo unitario y $\mathfrak{m}^l_\Lambda$ una categoría de Λ-módulos izquierdos.

Proposición 5.1.1. *Sea A un complejo doble de cadenas sobre Λ no negativo, entonces $(TotA, d_*)$, donde $(TotA)_n = \bigoplus_{r+s=n} A_{rs}$ y $d_n := d^1_{0n} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{\min(n-r,1)} d^\ell_{r,n-r}$, es un complejo de cadenas.*

Prueba. Se puede considerar A como el diagrama siguiente en $\mathfrak{m}^l_\Lambda$, donde $d^0d^0 = 0$, $d^1d^1 = 0$

y $d^1d^0 = -d^0d^1$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d^1_{03}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{13}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{23}"] & \vdots \arrow[d, "d^1_{33}"] & \\
A_{02} \arrow[d, "d^1_{02}"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{1}"] & A_{12} \arrow[l, "d^0_{12}"'] \arrow[d, "d^1_{12}"] & A_{22} \arrow[l, "d^0_{22}"'] \arrow[d, "d^1_{22}"] & A_{32} \arrow[l, "d^0_{32}"'] \arrow[d, "d^1_{32}"] & \cdots \arrow[l, "d^0_{42}"'] \\
A_{01} \arrow[d, "d^1_{01}"] & A_{11} \arrow[l, "d^0_{11}"'] \arrow[d, "d^1_{11}"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{2}"] & A_{21} \arrow[l, "d^0_{21}"'] \arrow[d, "d^1_{21}"] & A_{31} \arrow[l, "d^0_{31}"'] \arrow[d, "d^1_{31}"] & \cdots \arrow[l, "d^0_{41}"'] \\
A_{00} & A_{10} \arrow[l, "d^0_{10}"'] & A_{20} \arrow[l, "d^0_{20}"'] & A_{30} \arrow[l, "d^0_{30}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{40}"']
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Se debe probar que $d_nd_{n+1} = 0$ para $n \geq 1$.

Si $n = 1$, es claro que $d_1d_2 = 0$.

Si $n = 2$, se deduce que $d_2d_3 = 0$. En efecto, para abreviar, sea $A_n = (\mathrm{Tot}A)_n$. Puesto que $d_3 : A_3 \to A_2$ y $a = (a_1, a_2, a_3, , a_4) \in A_{03} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{30} = A_3$,
$d_3(a) = \underbrace{d^1_{03}(a_1) + d^0_{12}(a_2)}_{\in A_{02}} + \underbrace{d^1_{12}(a_2) + d^0_{21}(a_3)}_{\in A_{11}} + \underbrace{d^1_{21}(a_3) + d^0_{30}(a_4)}_{\in A_{20}}$; de modo que

$$\left.\begin{aligned}
d^1_{02}d_3(a) &= d^1_{02}d^1_{03}(a_1) + d^1_{02}d^0_{12}(a_2)\\
d^0_{11}d_3(a) &= d^0_{11}d^1_{12}(a_2) + d^0_{11}d^0_{21}(a_3)\\
d^1_{11}d_3(a) &= d^1_{11}d^1_{12}(a_2) + d^1_{11}d^0_{21}(a_3)\\
d^0_{20}d_3(a) &= d^0_{20}d^1_{21}(a_3) + d^0_{20}d^0_{30}(a_4)
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Por la semi-exactitud de las filas y las columnas de (5.1) se tiene $d^1_{02}d^1_{03} = 0$, $d^0_{11}d^0_{21} = 0$, $d^1_{11}d^1_{12} = 0$ y $d^0_{20}d^0_{30} = 0$. De la anticonmutatividad de $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$, $d^1_{02}d^0_{12} + d^0_{11}d^1_{12} = 0$ y $d^1_{11}d^0_{21} + d^0_{20}d^1_{21} = 0$. Luego, sumando miembro a miembro las igualdades de (5.2) se obtiene que $d_2d_3(a) = 0$.

Si $n \geq 3$, entonces $d_nd_{n+1} = 0$. En efecto, del hecho que
$d_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$, $a = (a_1, \ldots, a_{n+2}) \in A_{n+1}$ por definición se tiene
$d_{n+1}(a) = d^1_{0,n+1}(a_1) + \sum\limits_{\ell=0}^{1} d^\ell_{1n}(a_2) + d^0_{2,n-1}(a_3) + \cdots + \sum\limits_{r=0}^{1} d^\ell_{n1}(a_{n+1}) + d^0_{n+1,0}(a_{n+2})$; de modo

que

$$\left.\begin{aligned}
d^1_{0n}d_{n+1}(a) &= d^1_{0n}d^1_{0,n+1}(a_1) + d^1_{0n}d^0_{1n}(a_2)\\
d^0_{1,n-1}d_{n+1}(a) &= d^0_{1,n-1}d^1_{1n}(a_2) + d^0_{1,n-1}d^0_{2,n-1}(a_3)\\
d^1_{1,n-1}d_{n+1}(a) &= d^1_{1,n-1}d^1_{1n}(a_2) + d^1_{1,n-1}d^0_{2,n-1}(a_3)\\
&\vdots\\
d^1_{n-1,1}d_{n+1}(a) &= d^1_{n-1,1}d^1_{n-1,2}(a_n) + d^1_{n-1,1}d^0_{n1}(a_{n+1})\\
d^0_{n0}d_{n+1}(a) &= d^0_{n0}d^1_{n1}(a_{n+1}) + d^0_{n0}d^0_{n+1,0}(a_{n+2})
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Puesto que $d^1_{0n}d^1_{0,n+1} = 0$, $d^0_{1,n-1}d^0_{2,n-1} = 0$, $d^1_{1,n-1}d^1_{1n} = 0$, …, $d^1_{n-1,1}d^1_{n-1,2} = 0$ y $d^0_{n0}d^0_{n+1,0} = 0$; de la anticonmutatividad de $\boxed{1}$, …, $\boxed{\text{n}}$, $d^1_{0n}d^0_{1n} + d^0_{1,n-1}d^1_{1n} = 0$, …, y $d^1_{n-1,1}d^0_{n1} + d^0_{n0}d^1_{n1} = 0$. Luego, sumando miembro a miembro las igualdades de (5.3) se deduce que $d_n d_{n+1}(a) = 0$. □

Observación 5.1.2. De la proposición anterior, $\mathrm{Im}\,(d_{n+1}) \subseteq \mathrm{Ker}\,(d_n)$ para $n \geq 1$.

El complejo doble de cadenas es un objeto relevante en álgebra homológica. Para obtener nociones de este objeto con detalles adicionales, se puede consultar las referencias [20], [29] y [10].

Definición 5.1.3. Sea n un entero no negativo y $D = (\mathrm{Tot}A, d_*)$ el complejo doble de la proposición anterior. La homología de grado n del complejo total $Tot(D)$ se define como el $\Lambda-$módulo cociente

$$H_n\left(Tot(D)\right) = \frac{\mathrm{Ker}\,(d_n)}{\mathrm{Im}\,(d_{n+1})}\ .$$

5.1.2 Homología de columnas y franjas

Los resultados el Lema 5.2.16 y el Lema 5.3.10 son expresados en términos de homologías de una columna y franjas.

Complejos dobles asociados a $\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle} \rtimes_f C_2$

Teniendo en cuenta [27, Theo. 3.1] e imponiendo la condición de que el valor α del $2-$cociclo f sea un elemento invertible de K, se puede formular la siguiente definición para un producto cruzado monoparamétrico, donde a se considera parámetro.

Definición 5.1.4. Los *complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado* $\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle} \rtimes_f C_2$ son los dados en (4.33) para $i = 0, 1$.

La traducción de las diferenciales horizontales y verticales de estos complejos dobles a matrices produce los complejos dobles ${}_1D$ y ${}_gD$, dados en (5.4) y (5.7), respectivamente.

Complejos dobles asociados a $\frac{K[X]}{\langle X^t-a\rangle} \rtimes_f C_t$

Teniendo en cuenta [27, Theo. 3.1] e imponiendo la condición de que el valor α del 2−cociclo f sea un elemento invertible de K, se puede formular la siguiente definición para un producto cruzado biparamétrico, donde a y t se consideran parámetros.

Definición 5.1.5. Los *complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado* $\frac{K[X]}{\langle X^t-a\rangle} \rtimes_f C_t$ son los dados en (4.63) para $i = 0, \ldots, t-1$.

La traducción de las diferenciales horizontales y verticales de estos complejos dobles a matrices produce los complejos dobles ${}_1D$ y ${}_{g^i}D$, dados en (5.10) y (5.13), respectivamente.

5.2 Homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle} \rtimes_f C_2$

Para determinar la homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle} \rtimes_f C_2$ donde a es un parámetro, se tradujeron las diferenciales horizontales y verticales de los complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado al lenguaje de matrices, tales complejos dobles se definen en la Definición 5.1.4, donde $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^2 - a\rangle}$. El cálculo de esta homología se obtiene mediante algunos resultados de álgebra homológica, como sigue:

Sea ${}_1D$ el complejo doble de cadenas:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}"', "d^1_{04}"] & \vdots \arrow[d, "M_1"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "M_1"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "M_1"'] & \\
K^2 \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)}"', "d^1_{03}"] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"', "d"] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & \cdots \arrow[l, "M_3"'] \\
K^2 \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}"', "d^1_{02}"] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"', "d'"] \arrow[d, "M_2"', "d''"] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & \cdots \arrow[l, "M_3"'] \\
K^2 \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)}"', "d^1_{01}"] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & \cdots \arrow[l, "M_3"'] \\
K^2 & K^2 \arrow[l, "N"', "d^0_{10}"] & K^2 \arrow[l, "M_3"', "d^0_{20}"] & K^2 \arrow[l, "N"', "d^0_{30}"] & K^2 \arrow[l, "M_3"', "d^0_{40}"] & K^2 \arrow[l, "N"', "d^0_{50}"] & \cdots \arrow[l, "M_3"', "d^0_{60}"]
\end{tikzcd}
\tag{5.4}
$$

donde $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La representación matricial de $d^1_{01} : A\omega_1 \to A\omega_1$ en la base $\{\omega_1, x\omega_1\}$ de $A\omega_1$ es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $X_0 = \mathrm{Tot}({}_1D_0)$ y $X_{2j-1,2j} = \mathrm{Tot}({}_1D_{2j-1,2j})$ para $j \geq 1$.

Proposición 5.2.1. *Sea $X = \overline{X}_*(A\omega_1) = Tot({}_1D)$. Entonces*

$$X = X_0 \oplus X_{12} \oplus X_{34} \oplus \cdots \tag{5.5}$$

es una suma directa de complejos de cadenas.

Prueba. Sabemos que $\mathrm{Tot}({}_1D)$ es un complejo de cadenas, cuya $n-$ésima componente es una suma directa de $K-$espacios vectoriales, donde el operador borde

$$d_n : \mathrm{Tot}({}_1D)_n \to \mathrm{Tot}({}_1D)_{n-1} \tag{5.6}$$

es una aplicación lineal que va de una suma directa de $K-$espacios vectoriales en una suma directa de $K-$espacios vectoriales.

Observando que los morfismos horizontales que parten de la columna impar de ${}_1D$ son nulos, podemos descomponer $\mathrm{Tot}({}_1D)$ en una suma directa de complejos de cadenas, así

$$\begin{aligned}\mathrm{Tot}({}_1D) &= \mathrm{Tot}({}_1D_0) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Tot}({}_1D_{2j-1,2j}) \oplus \cdots \\ &= \mathrm{Tot}({}_1D_0) \oplus \left(\bigoplus_{j\geq 1} \mathrm{Tot}({}_1D_{2j-1,2j}) \right) .\end{aligned}$$

Haciendo $X_0 = \mathrm{Tot}({}_1D_0)$ y $X_{2j-1,2j} = \mathrm{Tot}({}_1D_{2j-1,2j})$ para $j \geq 1$, concluimos que $X = X_0 \oplus X_{12} \oplus X_{34} \oplus \cdots$. □

Sea ${}_gD$ el complejo doble de cadenas:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d^1_{04}", "{\left(\begin{smallmatrix}-2&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}"'] & \vdots \arrow[d, "M_1"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "M_1"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "N"'] & \\
K^2 \arrow[d, "d^1_{03}", "{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)}"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"', "d"] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_2"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
K^2 \arrow[d, "d^1_{02}", "{\left(\begin{smallmatrix}-2&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"', "d'"] \arrow[d, "M_1"', "d''"] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_1"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
K^2 \arrow[d, "d^1_{01}", "{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)}"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^2 \arrow[l, "M_3"'] \arrow[d, "M_2"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
K^2 & K^2 \arrow[l, "M_3"', "d^0_{10}"] & K^2 \arrow[l, "N"', "d^0_{20}"] & K^2 \arrow[l, "M_3"', "d^0_{30}"] & K^2 \arrow[l, "N"', "d^0_{40}"] & K^2 \arrow[l, "M_3"', "d^0_{50}"] & \cdots \arrow[l, "N"', "d^0_{60}"]
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

donde $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La representación matricial de $d^1_{01} : A\omega_g \to A\omega_g$ en la base $\{\omega_g, x\omega_g\}$ de $A\omega_g$ es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $X_{2j,2j+1} = \mathrm{Tot}({}_gD_{2j,2j+1})$ para $j \geq 0$.

Proposición 5.2.2. *Sea $X = \overline{X}_*(A\omega_g) = Tot({}_gD)$. Entonces*

$$X = X_{01} \oplus X_{23} \oplus X_{45} \oplus \cdots \tag{5.8}$$

es una suma directa de complejos de cadenas.

Prueba. Sabemos que $\mathrm{Tot}({}_gD)$ es un complejo de cadenas, cuya $n-$ésima componente es una suma directa de $K-$espacios vectoriales, donde el operador borde

$$d_n : \mathrm{Tot}({}_gD)_n \to \mathrm{Tot}({}_gD)_{n-1} \tag{5.9}$$

es una aplicación lineal que va de una suma directa de $K-$espacios vectoriales en una suma directa de $K-$espacios vectoriales.

Observando que los morfismos horizontales que parten de la columna par de ${}_gD$ son nulos, podemos descomponer $\mathrm{Tot}({}_gD)$ en una suma directa de complejos de cadenas, así

$$\begin{aligned}\mathrm{Tot}({}_gD) &= \mathrm{Tot}({}_gD_{01}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Tot}({}_gD_{2j,2j+1}) \oplus \cdots \\ &= \bigoplus_{j\geq 0} \mathrm{Tot}({}_gD_{2j,2j+1})\ .\end{aligned}$$

Haciendo $X_{2j,2j+1} = \mathrm{Tot}({}_gD_{2j,2j+1})$ para $j \geq 0$, concluimos que

$X = X_{01} \oplus X_{23} \oplus X_{45} \oplus \cdots$. $\square$

Proposición 5.2.3. *Sea K un cuerpo de característica diferente de 2. Las columnas de ${}_1D$ y ${}_gD$ son complejos de cadenas acíclicas.*

Prueba. Observando los complejos dobles de cadenas ${}_1D$ y ${}_gD$ dados en (5.4) y (5.7), vemos que es suficiente verificar las igualdades $\mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right)$ y $\mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right)$.

i) Teniendo en cuenta que $d^1_{01}(x_1, x_2) = (0, 2x_2)$, $d^1_{02}(y_1, y_2) = (-2y_1, 0)$; se ve que $d^1_{01}d^1_{02}(y_1, y_2) = (0, 0)$, luego $\mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right)$. Recíprocamente, si $\overline{x} \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right)$,

$$d^1_{01}(\overline{x}) = d^1_{01}(x_1, x_2) = (0, 2x_2) = (0, 0).$$

Luego $\overline{x} = (x_1, 0)$; de modo que existe $(y_1, 0) = (-\frac{1}{2}x_1, 0)$ tal que $d^1_{02}(y_1, 0) = (x_1, 0)$. Así, $\overline{x} \in \mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right)$. Por consiguiente, $\mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right)$.

ii) Recordando que $d^1_{03}(z_1, z_2) = (0, 2z_2)$, se ve que $d^1_{02}d^1_{03}(z_1, z_2) = (0, 0)$, luego $\mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right)$. Recíprocamente, si $\overline{y} \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right)$,

$$d^1_{02}(\overline{y}) = d^1_{02}(y_1, y_2) = (-2y_1, 0) = (0, 0).$$

Luego $\overline{y} = (0, y_2)$; de modo que existe $(0, z_2) = (0, \frac{1}{2}y_2)$ tal que $d^1_{03}(0, z_2) = (0, y_2)$. Así, $\overline{y} \in \mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right)$. Por consiguiente, $\mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right)$. $\square$

Esta proposición nos dice que los complejos de cadenas X_0, X_1, X_2,..., son acíclicos.

Proposición 5.2.4. *Sea K un cuerpo de característica diferente de 2 y sea $X_j = Tot({}_1D_j) = Tot({}_gD_j)$, entonces $H_n(X_j) = \delta_{n,j} H_j(X_j)$.*

Prueba. Observando que los complejos dobles de cadenas ${}_1D$ y ${}_gD$ tienen los mismos morfismos verticales, X_j es el complejo total de la $j-$ésima columna de ambos complejos dobles de cadenas para $j = 0, 1, 2, \ldots$.
Supongamos que $j = 0$. Entonces para $n = 0$, $H_0(X_0) = \dfrac{\langle e_1, e_2\rangle}{\langle 2e_2\rangle} = \langle e_1\rangle = Ke_1$.
Si $n \geq 1$, entonces $H_n(X_0) = 0$ pues X_0 es un complejo acíclico.
Sea $j = 1$. Entonces para $n = 0$, tenemos que $H_0(X_1) = 0$ pues ${}_1D$ y ${}_gD$ están en el primer cuadrante; para $n = 1$,

$$H_1(X_1) = \frac{\langle e_3, e_4\rangle}{\langle 2e_3\rangle} = \langle e_4\rangle = Ke_4.$$

Si $n \geq 2$, entonces $H_n(X_1) = 0$ pues X_1 es un complejo acíclico.
Sea $j = 2m > 0$. Para $0 \leq n < j$, $H_n(X_j) = 0$ pues ${}_1D$ y ${}_gD$ están en el primer cuadrante;

$$H_n(X_n) = \frac{\langle e_{2n+1}, e_{2(n+1)}\rangle}{\langle 2e_{2(n+1)}\rangle} = \langle e_{2n+1}\rangle = \langle e_{4m+1}\rangle.$$

Si $n \geq j+1$, entonces $H_n(X_j) = 0$ pues X_j es un complejo acíclico.
Sea $j = 2m-1 > 0$. Para $0 \leq n < j$, $H_n(X_j) = 0$ pues ${}_1D$ y ${}_gD$ están en el primer cuadrante;

$$H_n(X_n) = \frac{\langle e_{2n+1}, e_{2(n+1)}\rangle}{\langle 2e_{2n+1}\rangle} = \langle e_{2(n+1)}\rangle = \langle e_{4m}\rangle.$$

Si $n \geq j+1$, entonces $H_n(X_j) = 0$ pues X_j es un complejo acíclico. Por lo tanto, concluimos que $H_n(X_j) = \delta_{n,j} H_j(X_j)$. $\square$

Observación 5.2.5. *En particular se tiene:*

$$H_{2j}(X_{2j}) = \langle e_{4j+1}\rangle = Ke_{4j+1} \quad (j \geq 0);$$

$$H_{2j-1}(X_{2j-1}) = \langle e_{4j}\rangle = Ke_{4j} \quad (j \geq 1);$$

$$H_{2j+1}(X_{2j+1}) = H_{2(j+1)-1}(X_{2(j+1)-1}) = \langle e_{4(j+1)}\rangle = Ke_{4j+4} \quad (j \geq 0).$$

Teniendo en cuenta la Proposición 5.2.1, obtenemos la siguiente

Proposición 5.2.6. *Para la sucesión exacta corta de complejos de cadenas $X_{2j-1} \rightarrowtail X_{2j-1,2j} \twoheadrightarrow X_{2j}$, el morfismo de conección $\partial_{2j} : H_{2j}(X_{2j}) \to H_{2j-1}(X_{2j-1})$ es un isomorfismo.*

Prueba. Por la observación anterior, se define

$$\partial_2 : H_2(X_2) = Ke_5 \to H_1(X_1) = Ke_4$$

por $\partial_2(\lambda e_5) = \lambda e_4$, la cual es una aplicación $K-$lineal, cuya inversa es dada por $\partial_2^{-1}(\lambda e_4) = \lambda e_5$. Por consiguiente, ∂_2 es un isomorfismo.
En general, para $j \geq 1$ se define

$$\partial_{2j} : H_{2j}(X_{2j}) = Ke_{4j+1} \to H_{2j-1}(X_{2j-1}) = Ke_{4j}$$

por $\partial_{2j}(\lambda e_{4j+1}) = \lambda e_{4j}$.
Claramente, ∂_{2j} es una aplicación $K-$lineal, cuya inversa es dada por $\partial_{2j}^{-1}(\lambda e_{4j}) = \lambda e_{4j+1}$.
Por consiguiente, el morfismo de conección ∂_{2j} es un isomorfismo para $j \geq 1$. $\square$

Lema 5.2.7. *Para todo $j \geq 1$, se tiene que $H_n\left(X_{2j-1,2j}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2j-1, 2j\}$.*

Prueba. Para la sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$X_{2j-1} \rightarrowtail X_{2j-1,2j} \twoheadrightarrow X_{2j},$$

por [10, Theo. IV.2.1] existe la sucesión exacta larga de homologías

$$\begin{tikzcd}
H_{2j-2}(X_{2j-1}) \arrow[r] & H_{2j-2}(X_{2j-1,2j}) \arrow[r] & H_{2j-2}(X_{2j}) \arrow[r] & \cdots \\
H_{2j-1}(X_{2j}) \arrow[u] & H_{2j-1}(X_{2j-1,2j}) \arrow[l] & H_{2j-1}(X_{2j-1}) = Ke_{4j} \arrow[l] & \\
H_{2j}(X_{2j-1}) \arrow[r] & H_{2j}(X_{2j-1,2j}) \arrow[r] & H_{2j}(X_{2j}) = Ke_{4j+1} \arrow[u, "\partial_{2j}"', "\sim"] & \\
H_{2j+1}(X_{2j}) \arrow[u] & H_{2j+1}(X_{2j-1,2j}) \arrow[l] & H_{2j+1}(X_{2j-1}) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo vertical, ∂_{2j}, proviene de la Proposición 5.2.6.
Por la exactitud de esta sucesión larga de homologías y la Proposición 5.2.4, deducimos que $H_n\left(X_{2j-1,2j}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2j-1, 2j\}$. $\square$

Teniendo en cuenta la Proposición 5.2.2, obtenemos la siguiente

Proposición 5.2.8. *Para la sucesión exacta corta de complejos de cadenas*

$$X_{2j} \rightarrowtail X_{2j,2j+1} \twoheadrightarrow X_{2j+1},$$

el morfismo de conección $\partial_{2j+1} : H_{2j+1}(X_{2j+1}) \to H_{2j}(X_{2j})$ *es un isomorfismo.*

Prueba. Por la Observación 5.2.5, se define

$$\partial_1 : H_1(X_1) = Ke_4 \to H_0(X_0) = Ke_1$$

por $\partial_1(\lambda e_4) = \lambda e_1$. Claramente, ∂_1 es una aplicación $K-$lineal y su inversa es dada por $\partial_1^{-1}(\lambda e_1) = \lambda e_4$. Por consiguiente, ∂_1 es un isomorfismo.
En general, para $j \geq 0$ se define

$$\partial_{2j+1} : H_{2j+1}(X_{2j+1}) = Ke_{4j+4} \to H_{2j}(X_{2j}) = Ke_{4j+1}$$

por $\partial_{2j+1}(\lambda e_{4j+4}) = \lambda e_{4j+1}$.
Se nota que ∂_{2j+1} es una aplicación $K-$lineal y su inversa es dada por $\partial_{2j+1}^{-1}(\lambda e_{4j+1}) = \lambda e_{4j+4}$.
Por lo tanto, concluimos que el morfismo de conección ∂_{2j+1} es un isomorfismo para $j \geq 0$. $\square$

Lema 5.2.9. *Para todo* $j \geq 0$, *se tiene que* $H_n\left(X_{2j,2j+1}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2j, 2j+1\}$.

Prueba. Para la sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$X_{2j} \rightarrowtail X_{2j,2j+1} \twoheadrightarrow X_{2j+1},$$

por [10, Theo. IV.2.1] existe la sucesión exacta larga de homologías

$$\begin{tikzcd}
H_{2j-1}(X_{2j}) \arrow[r] & H_{2j-1}(X_{2j,2j+1}) \arrow[r] & H_{2j-1}(X_{2j+1}) \arrow[r] & \cdots \\
H_{2j}(X_{2j+1}) \arrow[u] & H_{2j}(X_{2j,2j+1}) \arrow[l] & H_{2j}(X_{2j}) = Ke_{4j+1} \arrow[l] & \\
H_{2j+1}(X_{2j}) \arrow[r] & H_{2j+1}(X_{2j,2j+1}) \arrow[r] & H_{2j+1}(X_{2j+1}) = Ke_{4j+4} \arrow[u, "\partial_{2j+1}"', "\sim"] & \\
H_{2j+2}(X_{2j+1}) \arrow[u] & H_{2j+2}(X_{2j,2j+1}) \arrow[l] & H_{2j+2}(X_{2j}) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo vertical, ∂_{2j+1}, proviene de la Proposición 5.2.8.

Por la exactitud de esta sucesión larga de homologías y la Proposición 5.2.4, deducimos que $H_n\left(X_{2j,2j+1}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2j, 2j+1\}$. $\square$

Sea ${}_1\mathrm{Ker}\,(d_n)$ el núcleo del operador borde dado en (5.6). Para n par *la condición de borde inferior* es $z_0 = [(z_1,z_2),(z_3,z_4)] \in \mathrm{Ker}\,(d,d')$; para n impar *la condición de borde inferior* es $z_0 = (z_1,z_2) \in \mathrm{Ker}\left(d^0_{n0}\right) = \mathrm{Ker}(0)$.

Podemos deducir que ${}_1\mathrm{Ker}\,(d_{2m}) = \langle e_2, e_4, e_6 + ae_3, \ldots, e_{4m}, e_{4m+2} + ae_{4m-1}\rangle$ y ${}_1\mathrm{Ker}\,(d_{2m+1}) = \langle e_1, e_3, e_4 - e_5, \ldots, e_{4m-1}, e_{4m} - e_{4m+1}, e_{4m+3}, e_{4m+4}\rangle$.

Proposición 5.2.10. *Para $n \geq 3$, $y \in {}_1Ker(d_n)$ si y sólo si $y_0 \in Ker\left(d^1_{0n}\right)$, $[(y_{2k-1}, y_{2k}),(y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)})] \in Ker(d,d',d'')$ y se cumple la condición de borde inferior si $y = y_0 + \sum(y_{2k-1}, y_{2k}) + z_0$.*

Prueba. *i)* Sea $n = 2m$ para $m \geq 2$.

Si $m = 2$, $y \in {}_1\mathrm{Ker}\,(d_4)$ si y sólo si $y = c_1e_2 + c_2e_4 + c_3(e_6 + ae_3) + c_4e_8 + c_5(e_{10} + ae_7)$ para algunos $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in K$; de modo que $y = (0, c_1, ac_3, c_2, 0, c_3, ac_5, c_4, 0, c_5)$.

Sean $y_0 = (0, c_1)$; $(y_1, y_2) = (ac_3, c_2)$, $(y_3, y_4) = (0, c_3)$; $(z_1, z_2) = (ac_5, c_4)$, $(z_3, z_4) = (0, c_5)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0};$$

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ac_3 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0};$$

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ac_5 \\ c_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_5 \end{pmatrix}\right] = \overline{0}.$$

Esto significa que

$$y_0 \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{04}\right);\ \ [(y_1,y_2),(y_3,y_4)] \in \mathrm{Ker}\left(d,d',d''\right) \text{ y } z_0 = [(z_1,z_2),(z_3,z_4)] \in \mathrm{Ker}\left(d,d'\right).$$

Recíprocamente, si $y = y_0 + [(y_1,y_2) + (y_3,y_4)] + (z_1,z_2) + (z_3,z_4)$, $y_0 = (b_1, c_1)$; asumiendo que se cumplen las tres condiciones : $y_0 \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{04}\right)$ implica que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $y_0 = (0, c_1)$;

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0},$$

luego $y_1 = ay_4$, $y_3 = 0$;

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_1 = az_4$, $z_3 = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= (0, c_1, ay_4, y_2, 0, y_4, az_4, z_2, 0, z_4) \\ &= c_1e_2 + y_2e_4 + y_4(e_6 + ae_3) + z_2e_8 + z_4(e_{10} + ae_7) \in {}_1\mathrm{Ker}\,(d_4). \end{aligned}$$

En general, para $m \geq 2$ se tiene $y \in {}_1\mathrm{Ker}\,(d_{2m})$ si y sólo si

$$y = c_1e_2 + c_2e_4 + c_3(e_6 + ae_3) + \cdots + c_{2m}e_{4m} + c_{2m+1}(e_{4m+2} + ae_{4m-1})$$

para algunos $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{2m}, c_{2m+1} \in K$;

de modo que $y = (0, c_1, ac_3, c_2, 0, c_3, \ldots, ac_{2m+1}, c_{2m}, 0, c_{2m+1})$.

Sean $y_0 = (0, c_1)$; $(y_1, y_2) = (ac_3, c_2)$, $(y_3, y_4) = (0, c_3)$, $(y_5, y_6) = (ac_5, c_4)$,

$(y_7, y_8) = (0, c_5)$, …, $(y_{4m-7}, y_{4m-6}) = (ac_{2m-1}, c_{2m-2}), (y_{4m-5}, y_{4m-4}) = (0, c_{2m-1})$.

Así, para $1 \leq k \leq 2(m-1)$ se tiene $(y_{2k-1}, y_{2k}) = \begin{cases} (ac_{k+2}, c_{k+1}), & k \text{ impar} \\ (0, c_{k+1}), & k \text{ par} \end{cases}$;

$(z_1, z_2) = (ac_{2m+1}, c_{2m})$, $(z_3, z_4) = (0, c_{2m+1})$. Entonces por un lado

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0}.$$

Por otro lado, considerando que k es impar, haciendo $k = 2f - 1$ se ve que

$(y_{2k-1}, y_{2k}) = (y_{4f-3}, y_{2(2f-1)}) = (ac_{2f+1}, c_{2f})$,

$(y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)}) = (y_{4f-1}, y_{2(2f)}) = (0, c_{2f+1})$ son tales que

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ac_{2f+1} \\ c_{2f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_{2f+1} \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_{2f+1} \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0}$$

para $1 \leq f \leq m - 1$;

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ac_{2m+1} \\ c_{2m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_{2m+1} \end{pmatrix}\right] = \overline{0}.$$

Esto significa que

$y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d^1_{0,2m}\right)$; $[(y_{2k-1}, y_{2k}), (y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)})] \in \operatorname{Ker}(d, d', d'')$ para k impar tal que $1 \leq k \leq 2m-3$ y $z_0 = [(z_1, z_2), (z_3, z_4)] \in \operatorname{Ker}(d, d')$.

Recíprocamente, si $y = y_0 + \sum_{k=1}^{2(m-1)} (y_{2k-1}, y_{2k}) + (z_1, z_2) + (z_3, z_4)$, $y_0 = (b_1, c_1)$; asumiendo que se cumplen las tres condiciones : $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d^1_{0,2m}\right)$ implica que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $y_0 = (0, c_1)$;

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2k-1} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0},$$

luego $y_{2k-1} = ay_{2(k+1)}$, $y_{2k+1} = 0$ para k impar tal que $1 \leq k \leq 2m-3$;

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_1 = az_4$, $z_3 = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= (0, c_1, ay_4, y_2, 0, y_4, \ldots, ay_{4m-4}, y_{4m-6}, 0, y_{4m-4}, az_4, z_2, 0, z_4) \\ &= c_1e_2 + y_2e_4 + y_4(e_6 + ae_3) + \cdots + y_{4m-6}e_{4m-4} + y_{4m-4}(e_{4m-2} + ae_{4m-5}) + z_2e_{4m} \\ &+ z_4(e_{4m+2} + ae_{4m-1}) \in {}_1\operatorname{Ker}(d_{2m}). \end{aligned}$$

ii) Sea $n = 2m+1$ para $m \geq 1$. Sabemos que $y \in {}_1\operatorname{Ker}(d_{2m+1})$ si y sólo si

$$y = b_1e_1 + b_2e_3 + c_2(e_4 - e_5) + \cdots + b_{2m}e_{4m-1} + c_{2m}(e_{4m} - e_{4m+1}) + b_{2(m+1)}e_{4m+3} + c_{2(m+1)}e_{4(m+1)}$$

para algunos $b_1, b_2, c_2, \ldots, b_{2m}, c_{2m}, b_{2m+2}, c_{2m+2} \in K$; de modo que

$$y = (b_1, 0, b_2, c_2, -c_2, 0, \ldots, b_{2m}, c_{2m}, -c_{2m}, 0, b_{2m+2}, c_{2m+2}).$$

Sean $y_0 = (b_1, 0)$; $(y_1, y_2) = (b_2, c_2)$, $(y_3, y_4) = (-c_2, 0)$, $(y_5, y_6) = (b_4, c_4)$, $(y_7, y_8) = (-c_4, 0)$, …, $(y_{4m-3}, y_{4m-2}) = (b_{2m}, c_{2m}), (y_{4m-1}, y_{4m}) = (-c_{2m}, 0)$.

Así, para $1 \leq k \leq 2m$ se tiene $(y_{2k-1}, y_{2k}) = \begin{cases} (b_{k+1}, c_{k+1}), & k \text{ impar} \\ (-c_k, 0), & k \text{ par} \end{cases}$;

$(z_1, z_2) = (b_{2m+2}, c_{2m+2})$. Entonces por un lado

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0}.$$

Por otro lado, considerando que k es impar, haciendo $k = 2f - 1$ se ve que
$(y_{2k-1}, y_{2k}) = (y_{4f-3}, y_{2(2f-1)}) = (b_{2f}, c_{2f})$,
$(y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)}) = (y_{4f-1}, y_{2(2f)}) = (-c_{2f}, 0)$ son tales que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{2f} \\ c_{2f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c_{2f} \\ 0 \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c_{2f} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0}$$

para $1 \leq f \leq m$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{2m+2} \\ c_{2m+2} \end{pmatrix} = \overline{0}.$$

Esto significa que $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d^1_{0,2m+1}\right)$; $[(y_{2k-1}, y_{2k}), (y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)})] \in \operatorname{Ker}(d, d', d'')$ para k impar tal que $1 \leq k \leq 2m - 1$, y se cumple la condición de borde inferior:
$z_0 = (z_1, z_2) \in \operatorname{Ker}\left(d^0_{2m+1,0}\right) = \operatorname{Ker}(0)$.
Recíprocamente, si $y = y_0 + \sum_{k=1}^{2m}(y_{2k-1}, y_{2k}) + (z_1, z_2)$, $y_0 = (b_1, c_1)$; asumiendo que se cumplen las tres condiciones : $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d^1_{0,2m+1}\right)$ implica que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $y_0 = (b_1, 0)$;

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2k-1} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0},$$

luego $y_{2k+1} = -y_{2k}$, $y_{2(k+1)} = 0$ para k impar tal que $1 \leq k \leq 2m - 1$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo z_1 y z_2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= (b_1, 0, y_1, y_2, -y_2, 0, \ldots, y_{4m-3}, y_{4m-2}, -y_{4m-2}, 0, z_1, z_2) \\ &= b_1 e_1 + y_1 e_3 + y_2(e_4 - e_5) + \cdots + y_{4m-3} e_{4m-1} + y_{4m-2}(e_{4m} - e_{4m+1}) + z_1 e_{4m+3} \\ &+ z_2 e_{4m+4} \in {}_1\operatorname{Ker}(d_{2m+1}). \end{aligned}$$

□

Observación 5.2.11. $y \in {}_1\operatorname{Ker}(d_1)$ si y sólo si $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d^1_{01}\right)$ y se cumple la condición de borde inferior : $z_0 = (z_1, z_2) \in \operatorname{Ker}(0)$ si $y = y_0 + z_0$.
Si $m = 0$, $y \in {}_1\operatorname{Ker}(d_1)$ si y sólo si $y = b_1 e_1 + b_2 e_3 + c_2 e_4$ para algunos $b_1, b_2, c_2 \in K$; de

modo que $y = (b_1, 0, b_2, c_2)$.

Sean $y_0 = (b_1, 0)$, $(z_1, z_2) = (b_2, c_2)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d_{01}^1\right)$ y se cumple la condición de borde inferior:

$z_0 = (z_1, z_2) \in \operatorname{Ker}\left(d_{10}^0\right) = \operatorname{Ker}(0)$.

Recíprocamente, si $y = y_0 + (z_1, z_2)$, $y_0 = (b_1, c_1)$; asumiendo que se cumplen las dos condiciones : $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d_{01}^1\right)$ implica que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $y_0 = (b_1, 0)$. La condición de borde inferior es dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo z_1 y z_2. Por lo tanto, $y = (b_1, 0, z_1, z_2) = b_1e_1 + z_1e_3 + z_2e_4 \in {}_1\operatorname{Ker}(d_1)$.

Observación 5.2.12. $y \in {}_1\operatorname{Ker}(d_2)$ si y sólo si $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d_{02}^1\right)$ y se cumple la condición de borde inferior : $z_0 = [(z_1, z_2), (z_3, z_4)] \in \operatorname{Ker}(d, d')$ si $y = y_0 + z_0$.

Si $m = 1$, $y \in {}_1\operatorname{Ker}(d_2)$ si y sólo si $y = c_1e_2 + c_2e_4 + c_3(e_6 + ae_3)$ para algunos $c_1, c_2, c_3 \in K$; de modo que $y = (0, c_1, ac_3, c_2, 0, c_3)$.

Sean $y_0 = (0, c_1)$, $(z_1, z_2) = (ac_3, c_2)$, $(z_3, z_4) = (0, c_3)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ac_3 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d_{02}^1\right)$ y se cumple la condición de borde inferior :

$z_0 = [(z_1, z_2), (z_3, z_4)] \in \operatorname{Ker}(d, d')$.

Recíprocamente, si $y = y_0 + (z_1, z_2) + (z_3, z_4)$, $y_0 = (b_1, c_1)$; asumiendo que se cumplen las dos condiciones : $y_0 \in \operatorname{Ker}\left(d_{02}^1\right)$ implica que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $y_0 = (0, c_1)$. La condición de borde inferior es dada por

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_1 = az_4$, $z_3 = 0$. Por lo tanto,

$$y = (0, c_1, az_4, z_2, 0, z_4) = c_1e_2 + z_2e_4 + z_4(e_6 + ae_3) \in {}_1\mathrm{Ker}\,(d_2).$$

Sea ${}_g\mathrm{Ker}\,(d_n)$ el núcleo del operador borde dado en (5.9). Para n par *la condición de borde inferior* es $z_0 = (z_1, z_2) \in \mathrm{Ker}\,(d^0_{n0}) = \mathrm{Ker}(0)$; para n impar *la condición de borde inferior* es $z_0 = [(z_1, z_2), (z_3, z_4)] \in \mathrm{Ker}\,(d, d')$.
Podemos deducir que ${}_g\mathrm{Ker}\,(d_{2m}) = \langle e_2, e_4 + ae_1, \ldots, e_{4m-2}, e_{4m} + ae_{4m-3}, e_{4m+1}, e_{4m+2}\rangle$; ${}_g\mathrm{Ker}\,(d_{2m+1}) = \langle e_1, e_2 - e_3, \ldots, e_{4m+1}, e_{4m+2} - e_{4m+3}, \delta_{0,a}e_{4m+4}\rangle$.

Proposición 5.2.13. *Para $n \geq 2$, $y \in {}_gKer(d_n)$ si y sólo si*

$$[(y_{2k-1}, y_{2k}), (y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)})] \in Ker\,(d, d', d'')$$

y se cumple la condición de borde inferior si $y = \sum (y_{2k-1}, y_{2k}) + z_0$.

Prueba. i) Sea $n = 2m$ para $m \geq 1$. Sabemos que $y \in {}_g\mathrm{Ker}\,(d_{2m})$ si y sólo si
$y = c_1e_2 + c_2(e_4 + ae_1) + \cdots + c_{2m-1}e_{4m-2} + c_{2m}(e_{4m} + ae_{4m-3}) + b_{2m+1}e_{4m+1} + c_{2m+1}e_{4m+2}$
para algunos $c_1, c_2, \ldots, c_{2m-1}, c_{2m}, c_{2m+1}, b_{2m+1} \in K$; de modo que

$$y = (ac_2, c_1, 0, c_2, \ldots, ac_{2m}, c_{2m-1}, 0, c_{2m}, b_{2m+1}, c_{2m+1}).$$

Sean $(y_1, y_2) = (ac_2, c_1)$, $(y_3, y_4) = (0, c_2)$, $(y_5, y_6) = (ac_4, c_3)$,
$(y_7, y_8) = (0, c_4)$, …, $(y_{4m-3}, y_{4m-2}) = (ac_{2m}, c_{2m-1}), (y_{4m-1}, y_{4m}) = (0, c_{2m})$.
Así, para $1 \leq k \leq 2m$ se tiene $(y_{2k-1}, y_{2k}) = \begin{cases} (ac_{k+1}, c_k), & k \text{ impar} \\ (0, c_k), & k \text{ par} \end{cases}$;
$(z_1, z_2) = (b_{2m+1}, c_{2m+1})$. Entonces, si k es impar, haciendo $k = 2f - 1$ se ve que
$(y_{2k-1}, y_{2k}) = (y_{4f-3}, y_{2(2f-1)}) = (ac_{2f}, c_{2f-1})$,
$(y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)}) = (y_{4f-1}, y_{2(2f)}) = (0, c_{2f})$ son tales que

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac_{2f} \\ c_{2f-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_{2f} \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_{2f} \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0}$$

para $1 \le f \le m$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{2m+1} \\ c_{2m+1} \end{pmatrix} = \overline{0}.$$

Esto significa que $[(y_{2k-1}, y_{2k}), (y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)})] \in \operatorname{Ker}(d, d', d'')$ para k impar tal que $1 \le k \le 2m-1$ y $z_0 = (z_1, z_2) \in \operatorname{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right)$.

Recíprocamente, si $y = \sum_{k=1}^{2m}(y_{2k-1}, y_{2k}) + (z_1, z_2)$; asumiendo que se cumplen las dos condiciones:

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2k-1} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0},$$

luego $y_{2k-1} = ay_{2(k+1)}$, $y_{2k+1} = 0$ para k impar tal que $1 \le k \le 2m-1$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo z_1 y z_2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= (ay_4, y_2, 0, y_4, \ldots, ay_{4m}, y_{4m-2}, 0, y_{4m}, z_1, z_2) \\ &= y_2e_2 + y_4(e_4 + ae_1) + \cdots + y_{4m-2}e_{4m-2} + y_{4m}(e_{4m} + ae_{4m-3}) \\ &+ z_1e_{4m+1} + z_2e_{4m+2} \in {}_g\operatorname{Ker}(d_{2m}). \end{aligned}$$

ii) Sea $n = 2m+1$ para $m \ge 1$. Sabemos que $y \in {}_g\operatorname{Ker}(d_{2m+1})$ si y sólo si

$$y = b_1e_1 + c_1(e_2 - e_3) + \cdots + b_{2m+1}e_{4m+1} + c_{2m+1}(e_{4m+2} - e_{4m+3}) + \delta_{0,a}c_{2m+2}e_{4m+4}$$

para algunos $b_1, c_1, \ldots, b_{2m+1}, c_{2m+1}, c_{2m+2} \in K$; de modo que

$$y = (b_1, c_1, -c_1, 0, \ldots, b_{2m+1}, c_{2m+1}, -c_{2m+1}, \delta_{0,a}c_{2m+2}).$$

Sean $(y_1, y_2) = (b_1, c_1)$; $(y_3, y_4) = (-c_1, 0)$, $(y_5, y_6) = (b_3, c_3)$, $(y_7, y_8) = (-c_3, 0)$, $\ldots$, $(y_{4m-3}, y_{4m-2}) = (b_{2m-1}, c_{2m-1}), (y_{4m-1}, y_{4m}) = (-c_{2m-1}, 0)$.

Así, para $1 \le k \le 2m$ se tiene $(y_{2k-1}, y_{2k}) = \begin{cases} (b_k, c_k), & k \text{ impar} \\ (-c_{k-1}, 0), & k \text{ par} \end{cases}$;

$(z_1, z_2) = (b_{2m+1}, c_{2m+1})$, $(z_3, z_4) = (-c_{2m+1}, \delta_{0,a}c_{2m+2})$. Entonces suponiendo que k es impar, haciendo $k = 2f-1$ se ve que $(y_{2k-1}, y_{2k}) = (y_{4f-3}, y_{2(2f-1)}) = (b_{2f-1}, c_{2f-1})$, $(y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)}) = (y_{4f-1}, y_{2(2f)}) = (-c_{2f-1}, 0)$ son tales que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{2f-1} \\ c_{2f-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c_{2f-1} \\ 0 \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c_{2f-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0}$$

para $1 \leq f \leq m$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2m+1} \\ c_{2m+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{2m+1} \\ \delta_{0,a} c_{2m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que $[(y_{2k-1}, y_{2k}), (y_{2(k+1)-1}, y_{2(k+1)})] \in \operatorname{Ker}(d, d', d'')$ para k impar tal que $1 \leq k \leq 2m-1$ y se cumple la condición de borde inferior : $z_0 = [(z_1, z_2), (z_1, z_2)] \in \operatorname{Ker}(d, d')$.

Recíprocamente, si $y = \sum_{k=1}^{2m} (y_{2k-1}, y_{2k}) + (z_1, z_2) + (z_3, z_4)$; asumiendo que se cumplen las dos condiciones:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2k-1} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2(k+1)-1} \\ y_{2(k+1)} \end{pmatrix} = \overline{0} \oplus \overline{0},$$

luego $y_{2k+1} = -y_{2k}$, $y_{2(k+1)} = 0$ para k impar tal que $1 \leq k \leq 2m-1$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_3 = -z_2$, $z_4 = \begin{cases} 0, & a \neq 0 \\ t, & a = 0 \end{cases}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, -y_2, 0, \ldots, y_{4m-3}, y_{4m-2}, -y_{4m-2}, 0, z_1, z_2, -z_2, \delta_{0,a} t) \\ &= y_1 e_1 + y_2(e_2 - e_3) + \cdots + y_{4m-3} e_{4m-3} + y_{4m-2}(e_{4m-2} - e_{4m-1}) + z_1 e_{4m+1} \\ &+ z_2(e_{4m+2} - e_{4m+3}) +, \delta_{0,a} t e_{4m+4} \in {}_g\operatorname{Ker}(d_{2m+1}). \end{aligned}$$

□

Observación 5.2.14. $y \in {}_g\operatorname{Ker}(d_1)$ si y sólo si se cumple la condición de borde inferior : $z_0 = [(z_1, z_2), (z_3, z_4)] \in \operatorname{Ker}(d, d')$ si $y = z_0$.

Si $m = 0$, $y \in {}_g\operatorname{Ker}(d_1)$ si y sólo si $y = b_1 e_1 + c_1(e_2 - e_3) + \delta_{0,a} c_2 e_4$ para algunos $b_1, c_1, c_2 \in K$; de modo que $y = (b_1, c_1, -c_1, \delta_{0,a} c_2)$.

Sean $(z_1, z_2) = (b_1, c_1)$, $(z_3, z_4) = (-c_1, \delta_{0,a} c_2)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1 \\ \delta_{0,a} c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que se cumple la condición de borde inferior:

$z_0 = [(z_1, z_2), (z_1, z_2)] \in \operatorname{Ker}(d, d')$.

Recíprocamente, si $y = (z_1, z_2) + (z_3, z_4)$, y se cumple la condición de borde inferior:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_3 = -z_2$, $z_4 = \begin{cases} 0, & a \neq 0 \\ t, & a = 0 \end{cases}$.
Por lo tanto, $y = (z_1, z_2, -z_2, \delta_{0,a}t) = z_1e_1 + z_2(e_2 - e_3) + \delta_{0,a}te_4 \in {}_g\mathrm{Ker}\,(d_1)$.

Observación 5.2.15. Por las Proposiciones 5.2.10 y 5.2.13 sabemos que las afirmaciones siguientes valen:

Sea $n \geq 3$ y (d, d', d'') una silla (ver (5.4)).

i) Si n es impar, por la parte *ii)* de la prueba de la Proposición 5.2.10 existen $\frac{n+1}{2} - 1$ sillas en la $n-$ésima franja diagonal de ${}_1D$;

ii) Si n es par, por la parte *i)* de la prueba de la Proposición 5.2.10 existen $\frac{n}{2} - 1$ sillas en la $n-$ésima franja diagonal de ${}_1D$.

Sea $n \geq 2$ y (d, d', d'') una silla (ver (5.7)).

iii) Si n es impar, por la parte *ii)* de la prueba de la Proposición 5.2.13 existen $\left(\frac{n+1}{2} - 2\right)+1$ sillas en la $n-$ésima franja diagonal de ${}_gD$;

iv) Si n es par, por la parte *i)* de la prueba de la Proposición 5.2.13 existen $\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1$ sillas en la $n-$ésima franja diagonal de ${}_gD$.

v) Considerando ${}_1D$ y n impar, con la condición de borde inferior obtenemos $H_n(X_{n,n+1}) := \frac{\mathrm{Ker}\left(d^0_{n,0}\right)}{\mathrm{Im}(d,d')}$;

vi) Considerando ${}_1D$ y n par, con la condición de borde inferior obtenemos $H_n(X_{n-1,n}) := \frac{\mathrm{Ker}(d,d')}{\mathrm{Im}(d,d',d'')}$;

vii) Considerando ${}_gD$ y n impar, con la condición de borde inferior obtenemos $H_n(X_{n-1,n}) := \frac{\mathrm{Ker}(d,d')}{\mathrm{Im}(d,d',d'')}$;

viii) Considerando ${}_gD$ y n par, con la condición de borde inferior obtenemos $H_n(X_{n,n+1}) := \frac{\mathrm{Ker}\left(d^0_{n,0}\right)}{\mathrm{Im}(d,d')}$.

Lema 5.2.16. *Se cumplen las afirmaciones siguientes:*

i) *Si n es impar, entonces*

$$H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_n(X_0) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{(\frac{n+1}{2}-1)} H_n(X_{2j-1,2j}) \right) \oplus H_n(X_{n,n+1});$$

ii) *Si n es par, entonces*

$$H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_n(X_0) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{(\frac{n}{2}-1)} H_n(X_{2j-1,2j}) \right) \oplus H_n(X_{n-1,n});$$

iii) *Si n es impar, entonces* $H_n(\overline{X}_*(A\omega_g)) = \left(\bigoplus_{j=0}^{(\frac{n+1}{2}-2)} H_n(X_{2j,2j+1}) \right) \oplus H_n(X_{n-1,n})$;

iv) *Si n es par, entonces* $H_n(\overline{X}_*(A\omega_g)) = \left(\bigoplus_{j=0}^{(\frac{n}{2}-1)} H_n(X_{2j,2j+1}) \right) \oplus H_n(X_{n,n+1})$.

Prueba. Las afirmaciones *i)*, *ii)* se siguen del hecho que el complejo doble de cadenas ${}_1D$ está en el primer cuadrante, y de las Proposiciones 5.2.1 y 5.2.10.
Las afirmaciones *iii)*, *iv)* se siguen del hecho que el complejo doble de cadenas ${}_gD$ está en el primer cuadrante, y de las Proposiciones 5.2.2 y 5.2.13. □

Teorema 5.2.17. *Sea K un cuerpo, $Car(K) \neq 2$ y $a \in K^*$, entonces*
$HH_n\left(\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle} \rtimes_f C_2\right) = \begin{cases} K\omega_1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$.

Prueba. Por la Proposición 5.2.3 y el Lema 5.2.7, de las partes *i)*, *ii)* del lema anterior $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m+1}(X_{2m+1,2m+2})$; $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m}(X_{2m-1,2m})$.
De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.10 y la Observación 5.2.11, $\operatorname{Ker}\left(d^0_{2m+1,0}\right) = K^2$.
Pero $\operatorname{Im}(d, d') = \operatorname{Im}\left(d^1_{2m+1,1} + d^0_{2m+2,0}\right) = K^2$, luego $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = 0$.
De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.10 y la Observación 5.2.12, $H_{2m}(X_{2m-1,2m}) = \frac{\operatorname{Ker}(d,d')}{\operatorname{Im}(d,d',d'')} = 0$. Para ello, basta verificar que
$z_0 = [(z_1, z_2), (z_3, z_4)] \in \operatorname{Ker}(d, d')$ implica que $z_0 \in \operatorname{Im}(d, d', d'')$.

En efecto, $(d,d')(z_0)=(0,0)$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_1=az_4$, $z_3=0$. Así, $z_0=(az_4,z_2,0,z_4)$.

Por otro lado, existe $z_0'=(0,0,\frac{1}{2}z_2,\frac{1}{2}z_4)$ tal que $z_0=(d,d',d'')(z_0')\in \mathrm{Im}\,(d,d',d'')$.

Por consiguiente, $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1))=0$.

Por el Lema 5.2.9, de las partes *iii*), *iv*) del lema anterior

$H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_g))=H_{2m+1}(X_{2m,2m+1})$; $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_g))=H_{2m}(X_{2m,2m+1})$.

De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.13 y la Observación 5.2.14, $H_{2m+1}(X_{2m,2m+1})=\frac{\mathrm{Ker}(d,d')}{\mathrm{Im}(d,d',d'')}=0$. Para ello, basta verificar que $z_0=[(z_1,z_2),(z_3,z_4)]\in \mathrm{Ker}\,(d,d')$ implica que $z_0\in \mathrm{Im}\,(d,d',d'')$.

En efecto, $(d,d')(z_0)=(0,0)$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_3=-z_2$, $z_4=0$. Así, $z_0=(z_1,z_2,-z_2,0)$.

Por otro lado, existe $z_0'=(-\frac{1}{2}z_1,0,\frac{1}{2}z_2,0)$ tal que $z_0=(d,d',d'')(z_0')\in \mathrm{Im}\,(d,d',d'')$.

Por consiguiente, $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_g))=0$.

De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.13, $\mathrm{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right)=K^2$.

Pero $\mathrm{Im}\,(d,d')=\mathrm{Im}\left(d^1_{2m,1}+d^0_{2m+1,0}\right)=K^2$, luego $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_g))=0$.

Claramente $H_0(\overline{X}_*(A\omega_1))=K\omega_1$ y $H_0(\overline{X}_*(A\omega_g))=0$. Recordando que $HH_n\left(\frac{K[X]}{\langle X^2-a\rangle}\rtimes_f C_2\right)=H_n(\overline{X}_*(A\omega_1))\oplus H_n(\overline{X}_*(A\omega_g))$, se completa la prueba. $\square$

Teorema 5.2.18. *Sea K un cuerpo, $Car(K)=2$, $\alpha\in K^*$ y $E=\frac{K[X]}{\langle X^2\rangle}\rtimes_f C_2$, entonces*

$$HH_n\,(E)=\begin{cases} E, & n=0 \\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n+1}E, & n>0 \end{cases}.$$

Prueba. Por ser $\mathrm{Car}(K)=2$, la acción de C_2 sobre $\frac{K[X]}{\langle X^2\rangle}$ dada por $g\cdot x=-x$, $g\cdot 1=1$ es trivial porque $-1=1$. Es claro que, λ puede asumir el valor 1 en el Teorema 4.2.6. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\gamma_1=0$ en (4.28) ya que $\alpha\in K^*$. Por la Definición 5.1.4, asociamos al producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^2\rangle} \rtimes_f C_2$ los complejos dobles ${}_1D$ y ${}_gD$.

Así, vamos a tomar $a = 0$ en (5.4) y (5.7) para hacer cálculos, y $A = \dfrac{K[X]}{\langle X^2\rangle}$.

Puesto que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma_1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Car}(K) = 2$,

$\mathrm{Im}\left(d^1_{01} + d^0_{10}\right) = \langle 2e_2\rangle = \{(0,0)\}$. Por (5.4), $H_0(\overline{X}_*(A\omega_1)) = \dfrac{A\omega_1}{\mathrm{Im}\left(d^1_{01} + d^0_{10}\right)} = A\omega_1$;

Puesto que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma_1 + 2b_2 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Car}(K) = 2$,

$\mathrm{Im}\left(d^1_{01} + d^0_{10}\right) = \langle 2e_2\rangle = \{(0,0)\}$. Por (5.7), $H_0(\overline{X}_*(A\omega_g)) = \dfrac{A\omega_g}{\mathrm{Im}\left(d^1_{01} + d^0_{10}\right)} = A\omega_g$.

Por lo tanto, $HH_0(E) = H_0(\overline{X}_*(A\omega_1)) \oplus H_0(\overline{X}_*(A\omega_g)) = E$.

Como en la Observación 5.2.11 $y := y_0 + (z_1, z_2) \in {}_1\mathrm{Ker}\,(d_1)$ si y sólo si $y_0 \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right)$ y $(z_1, z_2) \in \mathrm{Ker}\left(d^0_{10}\right)$; de modo que $H_1(\overline{X}_*(A\omega_1)) = \dfrac{\mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right)}{\mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right)} \oplus \dfrac{\mathrm{Ker}\left(d^0_{10}\right)}{\mathrm{Im}\left(d^1_{11} + d^0_{20}\right)}$.

Del hecho que $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right) = \langle 2e_1\rangle = \{(0,0)\}$; de

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_2 \\ 2b_3 \end{pmatrix},$$

deducimos que $\mathrm{Im}\left(d^1_{11} + d^0_{20}\right) = \langle 2e_3, 2e_4\rangle = \{(0,0)\}$. Así, $H_1(\overline{X}_*(A\omega_1)) = A\omega_1 \oplus A\omega_1$.

Como en la Observación 5.2.14 $y := (z_1, z_2) + (z_3, z_4) \in {}_g\mathrm{Ker}\,(d_1)$ si y sólo si $[(z_1, z_2), (z_3, z_4)] \in \mathrm{Ker}\,(d, d')$; de modo que $H_1(\overline{X}_*(A\omega_g)) = \dfrac{\mathrm{Ker}\,(d, d')}{\mathrm{Im}\,(d, d', d'')}$. Puesto que

$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}\right] \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 \\ 2b_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathrm{Im}\,(d, d') = \{(0,0)\}$; $\mathrm{Im}\,(d, d', d'') = \langle 2e_1, 2e_2 - 2e_3\rangle = \{(0,0), (0,0)\}$.

Así, $H_1(\overline{X}_*(A\omega_g)) = A\omega_g \oplus A\omega_g$. Por consiguiente,

$$HH_1(E) = H_1(\overline{X}_*(A\omega_1)) \oplus H_1(\overline{X}_*(A\omega_g)) = E \oplus E.$$

Usando los mismos argumentos deducimos que $HH_n\,(E) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n+1} E$ para $n \geq 2$. □

Teorema 5.2.19. *Sea K un cuerpo, $Car(K) \neq 2$ y $A = \frac{K[X]}{\langle X^2\rangle}$, entonces* $HH_n\,(A \rtimes_f C_2) = H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) \bigoplus H_n(\overline{X}_*(A\omega_g))$, *donde*

$$H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) = \begin{cases} K\omega_1, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases} \quad ; \; H_n(\overline{X}_*(A\omega_g)) = \begin{cases} K\omega_g, & n=0 \\ Ke_{4m}, & n=2m-1 \\ Ke_{4m+1}, & n=2m \end{cases}$$

Prueba. Tomando $a = 0$, por la Proposición 5.2.3 y el Lema 5.2.7, de las partes i), ii) del Lema 5.2.16 $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m+1}(X_{2m+1,2m+2})$; $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m}(X_{2m-1,2m})$.
De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.10 y la Observación 5.2.11, $\mathrm{Ker}\left(d^0_{2m+1,0}\right) = K^2$. Pero $\mathrm{Im}\,(d,d') = \mathrm{Im}\left(d^1_{2m+1,1} + d^0_{2m+2,0}\right) = K^2$, luego

$$H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = \frac{\langle e_{4m+3}, e_{4(m+1)}\rangle}{\langle e_{4m+3}, e_{4(m+1)}\rangle} = 0.$$

De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.10 y la Observación 5.2.12, $H_{2m}(X_{2m-1,2m}) = \frac{\mathrm{Ker}(d,d')}{\mathrm{Im}(d,d',d'')} = 0$. Para ello, basta verificar que
$z_0 = [(z_1,z_2),(z_3,z_4)] \in \mathrm{Ker}\,(d,d')$ implica que $z_0 \in \mathrm{Im}\,(d,d',d'')$.
En efecto, $(d,d')(z_0) = (0,0)$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_1 = 0$, $z_3 = 0$. Así, $z_0 = (0, z_2, 0, z_4)$.
Por otro lado, existe $z_0' = (0, \frac{1}{2}z_2, 0, \frac{1}{2}z_4)$ tal que $z_0 = (d,d',d'')(z_0') \in \mathrm{Im}\,(d,d',d'')$.
Por consiguiente, $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = 0$.
Por el Lema 5.2.9, de las partes iii), iv) del lema 5.2.16
$H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_g)) = H_{2m+1}(X_{2m,2m+1})$ y $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_g)) = H_{2m}(X_{2m,2m+1})$.
De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.13 y la Observación 5.2.14, $H_{2m+1}(X_{2m,2m+1}) = \frac{\mathrm{Ker}(d,d')}{\mathrm{Im}(d,d',d'')} = Ke_{4(m+1)}$. Para ello, basta verificar que
$\mathrm{Ker}\,(d,d') = \langle e_{4m+1}, e_{4m+2} - e_{4m+3}, e_{4(m+1)}\rangle$ e $\mathrm{Im}\,(d,d',d'') = \langle 2e_{4m+1}, 2e_{4m+2} - 2e_{4m+3}\rangle$.
En efecto:
Si $z_0 = [(b_{2m+1}, \gamma_{2m+1}), (b_{2m+2}, \gamma_{2m+2})] \in \mathrm{Ker}\,(d,d')$, entonces $(d,d')(z_0) = (0,0)$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{2m+1} \\ \gamma_{2m+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{2m+2} \\ \gamma_{2m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $b_{2m+2} = -\gamma_{2m+1}$. Así,

$$z_0 = (b_{2m+1}, \gamma_{2m+1}, -\gamma_{2m+1}, \gamma_{2m+2}) = b_{2m+1}e_{4m+1} + \gamma_{2m+1}(e_{4m+2} - e_{4m+3}) + \gamma_{2m+2}e_{4(m+1)}.$$

Si $z = (d, d', d'')(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{Im}\,(d, d', d'')$, entonces

$z = (-2x_1, 2x_3, -2x_3, 0) = (-x_1)(2e_{4m+1}) + x_3(2e_{4m+2} - 2e_{4m+3})$ donde $x_1,\ x_3 \in K$.

Por consiguiente, $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_g)) = Ke_{4(m+1)}$.

De la condición de borde inferior dada en la Proposición 5.2.13,

$H_{2m}(X_{2m,2m+1}) = \frac{\mathrm{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right)}{\mathrm{Im}(d,d')} = Ke_{4m+1}$. Para ello, basta verificar que

$\mathrm{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right) = \langle e_{4m+1}, e_{4m+2}\rangle$ e $\mathrm{Im}\,(d, d') = \langle 2e_{4m+2}\rangle$. En efecto:

Si $z_0 = (b_{2m+1}, \gamma_{2m+1}) \in \mathrm{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right)$, entonces $d^0_{2m,0}(z_0) = (0, 0)$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2m+1} \\ \gamma_{2m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $z_0 = (b_{2m+1}, \gamma_{2m+1}) = b_{2m+1}e_{4m+1} + \gamma_{2m+1}e_{4m+2}$.

Sea $z = (d, d')(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{Im}\,(d, d')$. Puesto que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$z = (0, 2x_2 + 2x_3) = (x_2 + x_3)(2e_{4m+2})$ donde $x_2 + x_3 \in K$. Por consiguiente,

$H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_g)) = Ke_{4m+1}$. De los diagramas (5.4) y (5.7), deducimos que

$H_0(\overline{X}_*(A\omega_1)) = K\omega_1$ y $H_0(\overline{X}_*(A\omega_g)) = K\omega_g$. $\square$

5.3 Homología de Hochschild del producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 3$

Similar al caso $t = 2$, en esta sección se traduce las diferenciales horizontales y verticales de los complejos dobles de cadenas asociados al producto cruzado $\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t$ para $t \geq 3$ donde a es un parámetro (Definición 5.1.5) al lenguaje de matrices. Se cálcula la homología de Hochschild del producto cruzado haciendo las mismas cuentas y usando resultados análogos de álgebra homológica.

Sea $\lambda \in \mu_t(K)$ y sea ${}_1D$ el complejo doble de cadenas:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "M_2"', "d^1_{04}"] & \vdots \arrow[d, "M_4"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "M_4"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "M_4"'] & \\
K^t \arrow[d, "M_1"', "d^1_{03}"] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_3"'] & K^t \arrow[l, "M_5"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_3"'] & K^t \arrow[l, "M_5"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_3"'] & \cdots \arrow[l, "M_5"'] \\
K^t \arrow[d, "M_2"', "d^1_{02}"] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_4"', "d"] & K^t \arrow[l, "M_5"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_4"'] & K^t \arrow[l, "M_5"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_4"'] & \cdots \arrow[l, "M_5"'] \\
K^t \arrow[d, "M_1"', "d^1_{01}"] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_3"'] & K^t \arrow[l, "M_5"', "d'"] \arrow[d, "M_1"', "d''"] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_3"'] & K^t \arrow[l, "M_5"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_3"'] & \cdots \arrow[l, "M_5"'] \\
K^t & K^t \arrow[l, "N"', "d^0_{10}"] & K^t \arrow[l, "M_5"', "d^0_{20}"] & K^t \arrow[l, "N"', "d^0_{30}"] & K^t \arrow[l, "M_5"', "d^0_{40}"] & K^t \arrow[l, "N"', "d^0_{50}"] & \cdots \arrow[l, "M_5"', "d^0_{60}"]
\end{tikzcd}
\tag{5.10}
$$

donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t\times t}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda^{t-1} \end{pmatrix}_{t\times t}$,

$$
M_2 = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{t\times t} ; \; M_3 = \begin{pmatrix} -(1-\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(1-\lambda^{t-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t\times t},
$$

$$
M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix}_{t\times t}, \; M_5 = \begin{pmatrix} 0 & ta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & ta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ta \\ t & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{t\times t};
$$

M_1 es la representación matricial de $d^1_{01} : A\omega_1 \to A\omega_1$ en la base $\{\omega_1, x\omega_1, \ldots, x^{t-1}\omega_1\}$ de $A\omega_1$ y $A = \frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle}$.

Sea $X_0 = \mathrm{Tot}({}_1D_0)$ y $X_{2j-1,2j} = \mathrm{Tot}({}_1D_{2j-1,2j})$ para $j \geq 1$.

Proposición 5.3.1. *Sea $X = \overline{X}_*(A\omega_1) = Tot({}_1D)$. Entonces*

$$
X = X_0 \oplus X_{12} \oplus X_{34} \oplus \cdots \tag{5.11}
$$

es una suma directa de complejos de cadenas.

Prueba. Sabemos que $\mathrm{Tot}({}_1D)$ es un complejo de cadenas, cuya $n-$ésima componente es una suma directa de $K-$espacios vectoriales, donde el operador borde

$$d_n : \mathrm{Tot}({}_1D)_n \to \mathrm{Tot}({}_1D)_{n-1} \tag{5.12}$$

es una aplicación lineal de $K-$espacios vectoriales.
Teniendo en cuenta (5.10) y observando que los morfismos horizontales que parten de la columna impar de ${}_1D$ son nulos, para que ${}_1D_{12}$ sea un subcomplejo de ${}_1D$ debemos verificar que $(d, d') \circ (d, d', d'') = 0$ y $(d, d', d'') \circ (d, d', d'') = 0$.
En efecto:
De las tres igualdades de matrices

$$M_3M_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ tx_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$M_3M_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} tax_2 \\ tax_3 \\ \vdots \\ tax_t \\ tx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ta(1-\lambda)x_2 \\ -ta(1-\lambda^2)x_3 \\ \vdots \\ -ta(1-\lambda^{t-1})x_t \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$M_5M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = M_5 \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)x_2 \\ (1-\lambda^2)x_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta(1-\lambda)x_2 \\ ta(1-\lambda^2)x_3 \\ \vdots \\ ta(1-\lambda^{t-1})x_t \\ 0 \end{pmatrix};$$

obtenemos que $(d, d') \circ (d, d', d'') = dd + dd' + d'd'' = 0$.
De las cuatro igualdades de matrices

$$M_4M_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} -(1-\lambda)x_1 \\ -(1-\lambda^2)x_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})x_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$M_4M_5\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix}=M_4\begin{pmatrix} tax_2\\ tax_3\\ \vdots\\ tax_t\\ tx_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ t^2x_1\end{pmatrix};\ M_5M_2\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix}=M_5\begin{pmatrix} -tx_1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ -t^2x_1\end{pmatrix};$$

$$M_1M_2\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix}=M_1\begin{pmatrix} -tx_1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix};$$

obtenemos que $(d,d',d'')\circ(d,d',d'')=dd+dd'+d'd''+d''d''=0$.

De este hecho se sigue que $X_{12}=\mathrm{Tot}({}_1D_{12})$ es un subcomplejo de $X=\mathrm{Tot}({}_1D)$; de modo que conseguimos descomponer $\mathrm{Tot}({}_1D)$ en una suma directa de complejos de cadenas

$$\mathrm{Tot}({}_1D)=\mathrm{Tot}({}_1D_0)\oplus\left(\bigoplus_{j\geq 1}\mathrm{Tot}({}_1D_{2j-1,2j})\right).$$

Puesto que $X_0=\mathrm{Tot}({}_1D_0)$ y $X_{2j-1,2j}=\mathrm{Tot}({}_1D_{2j-1,2j})$ para $j\geq 1$, concluimos que $X=X_0\oplus X_{12}\oplus X_{34}\oplus\cdots$. $\square$

Sea $1\leq i\leq t-1$ y sea N la representación matricial de $d^0_{2r,s}:A\omega_{g^i}\to A\omega_{g^i}$ en la base $\{\omega_{g^i},x\omega_{g^i},\ldots,x^{t-1}\omega_{g^i}\}$ de $A\omega_{g^i}$ y $A=\frac{K[X]}{\langle X^t-a\rangle}$. En este caso, $\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hi}=0$ ya que $\lambda^i\neq 1$, $\lambda^t=1$ y se cumple que $(1-\lambda^i)(\lambda^0+\lambda^i+\lambda^{2i}+\cdots+\lambda^{(t-1)i})=1-\lambda^{ti}=0$. Considerando $(4.63):\ d^0_{2r,s}(x^j\omega_{g^i})=\sum_{h=0}^{t-1}\lambda^{hi}x^{t+j-1}\omega_{g^i}=0$, para todo $j=0,\ldots,t-1$. Por lo tanto,

$$N=\begin{pmatrix} 0&0&0&\cdots&0\\ 0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0\\ 0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{t\times t}.$$

En particular, cuando t es primo y Φ_t es el $t-$ésimo polinomio ciclotómico,

$$N=\begin{pmatrix} 0&\Phi_t(\lambda)a&0&\cdots&0\\ 0&0&\Phi_t(\lambda)a&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&\Phi_t(\lambda)a\\ \Phi_t(\lambda)&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{t\times t},$$

donde $\Phi_t(\lambda) = 0$.

Sea $1 \leq i \leq t-1$, ${}_{g^i}D$ el complejo doble de cadenas:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "M_2"', "d^1_{04}"] & \vdots \arrow[d, "M_4"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "M_4"'] & \vdots \arrow[d, "M_2"'] & \vdots \arrow[d, "M_4"'] & \\
K^t \arrow[d, "M_1"', "d^1_{03}"] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_3"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_3"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_3"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
K^t \arrow[d, "M_2"', "d^1_{02}"] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_4"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"', "d"] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_4"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_2"'] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_4"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
K^t \arrow[d, "M_1"', "d^1_{01}"] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_3"'] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^t \arrow[l, "M_6"', "d'"] \arrow[d, "M_3"', "d''"] & K^t \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "M_1"'] & K^t \arrow[l, "M_6"'] \arrow[d, "M_3"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
K^t & K^t \arrow[l, "M_6"', "d^0_{10}"] & K^t \arrow[l, "N"', "d^0_{20}"] & K^t \arrow[l, "M_6"', "d^0_{30}"] & K^t \arrow[l, "N"', "d^0_{40}"] & K^t \arrow[l, "M_6"', "d^0_{50}"] & \cdots \arrow[l, "N"', "d^0_{60}"]
\end{tikzcd}
\tag{5.13}
$$

donde M_1, M_2, M_3, M_4 son las matrices dadas en (5.10) y

$$
M_6 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & (1-\lambda^i)a \\
(1-\lambda^i) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & (1-\lambda^i) & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & (1-\lambda^i) & 0
\end{pmatrix}_{t\times t};
$$

M_6 es la representación matricial de $d^0_{10} : A\omega_{g^i} \to A\omega_{g^i}$ en la base $\{\omega_{g^i}, x\omega_{g^i}, \ldots, x^{t-1}\omega_{g^i}\}$ de $A\omega_{g^i}$.

Sea $X_{2j,2j+1} = \mathrm{Tot}({}_{g^i}D_{2j,2j+1})$ para $j \geq 0$.

Proposición 5.3.2. *Sea $X = \overline{X}_*(A\omega_{g^i}) = Tot({}_{g^i}D)$. Entonces*

$$X = X_{01} \oplus X_{23} \oplus X_{45} \oplus \cdots \tag{5.14}$$

es una suma directa de complejos de cadenas.

Prueba. Sabemos que $\mathrm{Tot}({}_{g^i}D)$ es un complejo de cadenas, cuya $n-$ésima componente es una suma directa de $K-$espacios vectoriales, donde el operador borde

$$d_n : \mathrm{Tot}({}_{g^i}D)_n \to \mathrm{Tot}({}_{g^i}D)_{n-1} \tag{5.15}$$

es una aplicación lineal de $K-$espacios vectoriales.
Teniendo en cuenta (5.13) y recordando que los morfismos horizontales que parten de una columna par de ${}_{g^i}D$ son nulos ya sus representaciones matriciales son nulas, para que ${}_{g^i}D_{01}$ sea un subcomplejo de ${}_{g^i}D$ debemos verificar que $(d,d')\circ(d,d',d'')=0$ y $(d,d',d'')\circ(d,d',d'')=0$.
En efecto:
De las tres igualdades de matrices

$$M_1M_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = M_1\begin{pmatrix} -tx_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$M_1M_6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} = M_1\begin{pmatrix} (1-\lambda^i)ax_t \\ (1-\lambda^i)x_1 \\ (1-\lambda^i)x_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)x_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)(1-\lambda^i)x_1 \\ (1-\lambda^2)(1-\lambda^i)x_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})(1-\lambda^i)x_{t-1} \end{pmatrix};$$

$$M_6M_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} = M_6\begin{pmatrix} -(1-\lambda)x_1 \\ -(1-\lambda^2)x_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})x_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(1-\lambda)(1-\lambda^i)x_1 \\ -(1-\lambda^2)(1-\lambda^i)x_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})(1-\lambda^i)x_{t-1} \end{pmatrix};$$

obtenemos que $(d,d')\circ(d,d',d'')=dd+dd'+d'd''=0$.
De las cuatro igualdades de matrices

$$M_2M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = M_2\begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)x_2 \\ (1-\lambda^2)x_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$M_2M_6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} = M_2\begin{pmatrix} (1-\lambda^i)ax_t \\ (1-\lambda^i)x_1 \\ (1-\lambda^i)x_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)x_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t(1-\lambda^i)ax_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$M_6M_4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} = M_6\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ tx_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(1-\lambda^i)ax_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \; M_3M_4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} = M_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ tx_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

obtenemos que $(d,d',d'')\circ(d,d',d'')=dd+dd'+d'd''+d''d''=0$.

De este hecho se sigue que $X_{01} = \mathrm{Tot}({}_{g^i}D_{01})$ es un subcomplejo de $X = \mathrm{Tot}({}_{g^i}D)$. Luego, descomponemos $\mathrm{Tot}({}_{g^i}D)$ en una suma directa de complejos de cadenas

$$\mathrm{Tot}({}_{g^i}D) = \left(\bigoplus_{j\geq 0} \mathrm{Tot}({}_{g^i}D_{2j,2j+1}) \right) .$$

Puesto que $X_{2j,2j+1} = \mathrm{Tot}({}_{g^i}D_{2j,2j+1})$ para $j \geq 0$, concluimos que
$X = X_{01} \oplus X_{23} \oplus X_{45} \oplus \cdots$. □

Proposición 5.3.3. *Sea $\lambda \in \mu_t(K)$. Las columnas de ${}_1D$ y ${}_{g^i}D$ para $1 \leq i \leq t-1$ son complejos de cadenas acíclicos.*

Prueba. Observando los complejos dobles de cadenas ${}_1D$ y ${}_{g^i}D$ para $1 \leq i \leq t-1$ dados en (5.10) y (5.13), vemos que es suficiente verificar las igualdades
$\mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right)$, $\mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right)$, $\mathrm{Ker}\left(d^1_{11}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{12}\right)$ y $\mathrm{Ker}\left(d^1_{12}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{13}\right)$.
i) Por definición $d^1_{01}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t) = \Big(0, (1-\lambda)x_2, (1-\lambda^2)x_3, \ldots, (1-\lambda^{t-1})x_t\Big)$,
$d^1_{02}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t) = (-tx_1, 0, 0, \ldots, 0)$; luego vemos que $\mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right)$.
Recíprocamente, si $\overline{x} \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right)$, $d^1_{01}(\overline{x}) = d^1_{01}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$.
Luego $\overline{x} = (x_1, 0, 0, \ldots, 0)$. Así, existe $(y_1, 0, 0, \ldots, 0) = (-\frac{1}{t}x_1, 0, 0, \ldots, 0)$ tal que
$d^1_{02}(y_1, 0, 0, \ldots, 0) = (x_1, 0, 0, \ldots, 0)$, luego $\overline{x} \in \mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}\left(d^1_{01}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{02}\right)$.
ii) Recordando que $d^1_{03}(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_t) = (0, (1-\lambda)z_2, (1-\lambda^2)z_3, \ldots, (1-\lambda^{t-1})z_t)$, vemos que $\mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right)$. Recíprocamente, si $\overline{y} \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right)$,
$d^1_{02}(\overline{y}) = d^1_{02}(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_t) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$, luego $\overline{y} = (0, y_2, y_3, \ldots, y_t)$. Así, existe

$$(0, z_2, z_3, \ldots, z_t) = \Big(0, (1-\lambda)^{-1}y_2, (1-\lambda^2)^{-1}y_3, \ldots, (1-\lambda^{t-1})^{-1}y_t\Big)$$

tal que $d^1_{03}(0, z_2, z_3, \ldots, z_t) = (0, y_2, y_3, \ldots, y_t)$. Así, $\overline{y} \in \mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right)$.
Por consiguiente, $\mathrm{Ker}\left(d^1_{02}\right) = \mathrm{Im}\left(d^1_{03}\right)$.
iii) Dado que $d^1_{11}(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}, x_t) = \Big(-(1-\lambda)x_1, -(1-\lambda^2)x_2, \ldots, -(1-\lambda^{t-1})x_{t-1}, 0\Big)$,
$d^1_{12}(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}, x_t) = (0, 0, \ldots, 0, tx_t)$; vemos que $\mathrm{Im}\left(d^1_{12}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(d^1_{11}\right)$.
Recíprocamente, si $\overline{x} \in \mathrm{Ker}\left(d^1_{11}\right)$,

$$d^1_{11}(\overline{x}) = d^1_{11}(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}, x_t) = (0, 0, 0, \ldots, 0).$$

Luego $\overline{x} = (0, 0, \ldots, 0, x_t)$. Así, existe $(0, 0, \ldots, 0, y_t) = (0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{t}x_t)$ tal que
$d^1_{12}(0, 0, \ldots, 0, y_t) = (0, 0, \ldots, 0, x_t)$, luego $\overline{x} \in \mathrm{Im}\left(d^1_{12}\right)$.

Por consiguiente, $\operatorname{Ker}\left(d^1_{11}\right) = \operatorname{Im}\left(d^1_{12}\right)$.

iv) Recordando que

$$d^1_{13}(z_1, z_2, \ldots, z_{t-1}, z_t) = (-(1-\lambda)z_1, -(1-\lambda^2)z_2, \ldots, -(1-\lambda^{t-1})z_{t-1}, 0),$$

vemos que $\operatorname{Im}\left(d^1_{13}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(d^1_{12}\right)$.

Recíprocamente, si $\overline{y} \in \operatorname{Ker}\left(d^1_{12}\right)$, $d^1_{12}(\overline{y}) = d^1_{12}(y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}, y_t) = (0, 0, \ldots, 0, 0)$, luego $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}, 0)$. Así, existe

$$(z_1, z_2, \ldots, z_{t-1}, 0) = \Big(-(1-\lambda)^{-1}y_1, -(1-\lambda^2)^{-1}y_2, \ldots, -(1-\lambda^{t-1})^{-1}y_{t-1}, 0\Big)$$

tal que $d^1_{13}(z_1, z_2, \ldots, z_{t-1}, 0) = (y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}, 0)$, luego $\overline{y} \in \operatorname{Im}\left(d^1_{13}\right)$.

Por consiguiente, $\operatorname{Ker}\left(d^1_{12}\right) = \operatorname{Im}\left(d^1_{13}\right)$. □

Esta proposición nos dice que los complejos de cadenas X_0, X_1, X_2,..., son acíclicos.

Proposición 5.3.4. *Sea $\lambda \in \mu_t(K)$ y sea $X_j = Tot({}_1D_j) = Tot({}_{g^i}D_j)$ para $1 \leq i \leq t-1$, entonces $H_n(X_j) = \delta_{n,j} H_j(X_j)$.*

Prueba. Se deduce de la Proposición 5.3.3 y del hecho que ${}_1D$ y ${}_{g^i}D$ están en el primer cuadrante. □

Recordemos que X_j es el complejo total de la $j-$ésima columna de ambos complejos dobles de cadenas para $j = 0, 1, 2, \ldots$.

$H_0(X_0) = \dfrac{\langle e_1, e_2, e_3, \ldots, e_t\rangle}{\langle (1-\lambda)e_2, (1-\lambda^2)e_3, \ldots, (1-\lambda^{t-1})e_t\rangle} = \langle e_1\rangle = Ke_1;$

$H_1(X_1) = \dfrac{\langle e_{t+1}, e_{t+2}, \ldots, e_{2t}\rangle}{\langle (1-\lambda)e_{t+1}, (1-\lambda^2)e_{t+2}, \ldots, (1-\lambda^{t-1})e_{2t-1}\rangle} = \langle e_{2t}\rangle = Ke_{2t};$

$H_2(X_2) = \dfrac{\langle e_{2t+1}, e_{2t+2}, \ldots, e_{3t}\rangle}{\langle (1-\lambda)e_{2t+2}, (1-\lambda^2)e_{2t+3}, \ldots, (1-\lambda^{t-1})e_{3t}\rangle} = \langle e_{2t+1}\rangle = Ke_{2t+1};$

Sea $n = 2m$, entonces $H_n(X_n) = \dfrac{\langle e_{tn+1}, e_{tn+2}, \ldots, e_{tn+t}\rangle}{\langle (1-\lambda)e_{tn+2}, (1-\lambda^2)e_{tn+3}, \ldots, (1-\lambda^{t-1})e_{tn+t}\rangle}$
$= \langle e_{tn+1}\rangle = \langle e_{2tm+1}\rangle;$

Sea $n = 2m-1$, entonces

$H_n(X_n) = \dfrac{\langle e_{tn+1}, e_{tn+2}, \ldots, e_{tn+t}\rangle}{\langle (1-\lambda)e_{tn+1}, (1-\lambda^2)e_{tn+2}, \ldots, (1-\lambda^{t-1})e_{t(n+1)-1}\rangle} = \langle e_{t(n+1)}\rangle = \langle e_{2tm}\rangle;$

Observación 5.3.5. *En particular se tiene:*

$$H_{2j}(X_{2j}) = \langle e_{2tj+1}\rangle = Ke_{2tj+1} \quad (j \geq 0);$$
$$H_{2j-1}(X_{2j-1}) = \langle e_{2tj}\rangle = Ke_{2tj} \quad (j \geq 1);$$
$$H_{2j+1}(X_{2j+1}) = H_{2(j+1)-1}(X_{2(j+1)-1}) = \langle e_{2t(j+1)}\rangle = Ke_{2tj+2t} \quad (j \geq 0).$$

Teniendo en cuenta la Proposición 5.3.1, obtenemos la siguiente

Proposición 5.3.6. *Para la sucesión exacta corta de complejos de cadenas* $X_{2j-1} \rightarrowtail X_{2j-1,2j} \twoheadrightarrow X_{2j}$, *el morfismo de conección* $\partial_{2j} : H_{2j}(X_{2j}) \to H_{2j-1}(X_{2j-1})$ *es un isomorfismo.*

Prueba. Para $j \geq 1$, por la observación anterior se define

$$\partial_{2j} : H_{2j}(X_{2j}) = Ke_{2tj+1} \to H_{2j-1}(X_{2j-1}) = Ke_{2tj}$$

por $\partial_{2j}(\lambda e_{2tj+1}) = \lambda e_{2tj}$. Claramente, ∂_{2j} es una aplicación $K-$lineal, cuya inversa es dada por $\partial_{2j}^{-1}(\lambda e_{2tj}) = \lambda e_{2tj+1}$.
Por consiguiente, el morfismo de conección ∂_{2j} es un isomorfismo para $j \geq 1$. □

La prueba del lema siguiente se hace de manera similar a la prueba del Lema 5.2.7 usando la Proposición 5.3.4 y la proposición anterior.

Lema 5.3.7. *Para todo* $j \geq 1$, *se tiene que* $H_n(X_{2j-1,2j}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2j-1, 2j\}$.

Teniendo en cuenta la Proposición 5.3.2, obtenemos la siguiente

Proposición 5.3.8. *Para la sucesión exacta corta de complejos de cadenas*

$$X_{2j} \rightarrowtail X_{2j,2j+1} \twoheadrightarrow X_{2j+1},$$

el morfismo de conección $\partial_{2j+1} : H_{2j+1}(X_{2j+1}) \to H_{2j}(X_{2j})$ *es un isomorfismo.*

Prueba. Para $j \geq 0$, por la Observación 5.3.5 se define

$$\partial_{2j+1} : H_{2j+1}(X_{2j+1}) = Ke_{2tj+2t} \to H_{2j}(X_{2j}) = Ke_{2tj+1}$$

por $\partial_{2j+1}(\lambda e_{2tj+2t}) = \lambda e_{2tj+1}$.
Se nota que ∂_{2j+1} es una aplicación $K-$lineal y su inversa es dada por

$$\partial_{2j+1}^{-1}(\lambda e_{2tj+1}) = \lambda e_{2tj+2t}.$$

Por lo tanto, concluimos que el morfismo de conección ∂_{2j+1} es un isomorfismo para $j \geq 0$. $\square$

La prueba del lema siguiente se hace de manera similar a la prueba del Lema 5.2.9 usando la Proposición 5.3.4 y la proposición anterior.

Lema 5.3.9. *Para todo $j \geq 0$, se tiene que $H_n(X_{2j,2j+1}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2j, 2j+1\}$.*

Usando los aspectos geométricos y algebraicos descritos en la Observación 5.2.15 para los complejos dobles de cadenas ${}_1D$ y ${}_{g^i}D$ dados en (5.10) y (5.13) ($1 \leq i \leq t-1$), hemos obtenido el siguiente

Lema 5.3.10. *Se cumplen las afirmaciones siguientes:*

i) Si n es impar, entonces

$$H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_n(X_0) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{(\frac{n+1}{2}-1)} H_n(X_{2j-1,2j}) \right) \oplus H_n(X_{n,n+1});$$

ii) Si n es par, entonces

$$H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_n(X_0) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{(\frac{n}{2}-1)} H_n(X_{2j-1,2j}) \right) \oplus H_n(X_{n-1,n});$$

iii) Si n es impar, entonces $H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = \left(\bigoplus_{j=0}^{(\frac{n+1}{2}-2)} H_n(X_{2j,2j+1}) \right) \oplus H_n(X_{n-1,n})$
para $1 \leq i \leq t-1$;

iv) Si n es par, entonces $H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = \left(\bigoplus_{j=0}^{(\frac{n}{2}-1)} H_n(X_{2j,2j+1}) \right) \oplus H_n(X_{n,n+1})$
para $1 \leq i \leq t-1$.

Prueba. Las afirmaciones *i*), *ii*) se siguen del hecho que el complejo doble de cadenas ${}_1D$ está en el primer cuadrante, y de la Proposición 5.3.1.
Las afirmaciones *iii*), *iv*) se siguen del hecho que los complejos dobles de cadenas ${}_{g^i}D$ para $1 \leq i \leq t-1$ están en el primer cuadrante, y de la Proposición 5.3.2. $\square$

Teorema 5.3.11. *Sea K un cuerpo, $t \geq 3$, $\mu_t(K) \neq \emptyset$ y $a \in K^*$, entonces*

$$HH_n\left(\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t\right) = \begin{cases} K\omega_1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

donde $C_t = \langle g\rangle = \{1, g, \ldots, g^{t-1}\}$.

Prueba. Por la Proposición 5.3.3 y el Lema 5.3.7, de las partes i), ii) del lema anterior $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m+1}(X_{2m+1,2m+2})$ y $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m}(X_{2m-1,2m})$.

Puesto que $d^0_{2m+1,0} = 0$ y M_3, M_5 son las matrices dadas en (5.10):

$$M_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} + M_5 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\lambda)x_1 \\ -(1-\lambda^2)x_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})x_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tay_2 \\ tay_3 \\ \vdots \\ tay_t \\ ty_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\lambda)x_1 + tay_2 \\ -(1-\lambda^2)x_2 + tay_3 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})x_{t-1} + tay_t \\ ty_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego, } H_{2m+1}(X_{2m+1,2m+2}) = \frac{\operatorname{Ker}\left(d^0_{2m+1,0}\right)}{\operatorname{Im}\left(d^1_{2m+1,1} + d^0_{2m+2,0}\right)} = \frac{\langle e_{t(2m+1)+1}, e_{t(2m+1)+2}, \ldots, e_{t(2m+1)+t}\rangle}{\langle e_{t(2m+1)+1}, e_{t(2m+1)+2}, \ldots, e_{t(2m+1)+t}\rangle} = 0\ ,$$

por consiguiente $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = 0$. Por otro lado,

$$H_{2m}(X_{2m-1,2m}) = \frac{\operatorname{Ker}\left(d^1_{2m-1,1} + d^0_{2m,0}\right)}{\operatorname{Im}\left(d^1_{2m-1,2} + d^0_{2m,1} + d^1_{2m,1}\right)} = \frac{\operatorname{Ker}(d, d')}{\operatorname{Im}(d, d', d'')} = 0,$$

Para ello, basta verificar que $z_0 \in \operatorname{Ker}(d, d')$ implica que $z_0 \in \operatorname{Im}(d, d', d'')$.

En efecto, $(d, d')(z_0) = (0, 0, \ldots, 0, 0)$ si y sólo si

$$M_3 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{t-1} \\ z_t \end{pmatrix} + M_5 \begin{pmatrix} z_{t+1} \\ z_{t+2} \\ z_{t+3} \\ \vdots \\ z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -(1-\lambda)z_1 \\ -(1-\lambda^2)z_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})z_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} taz_{t+2} \\ taz_{t+3} \\ \vdots \\ taz_{2t} \\ tz_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_{t+1}=0$, $z_{t+2}=\frac{(1-\lambda)}{ta}z_1$, $z_{t+3}=\frac{(1-\lambda^2)}{ta}z_2$, …, $z_{2t}=\frac{(1-\lambda^{t-1})}{ta}z_{t-1}$. Así,
$z_0=(z_1,z_2,\ldots,z_t,0,\frac{(1-\lambda)}{ta}z_1,\frac{(1-\lambda^2)}{ta}z_2,\ldots,\frac{(1-\lambda^{t-1})}{ta}z_{t-1})$.
Por otro lado,

$$\left[M_4\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\\cdots\\y_t\end{pmatrix}+M_5\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}\right]\oplus M_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}$$

$$=\left[\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\ty_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}tax_2\\tax_3\\\vdots\\tax_t\\tx_1\end{pmatrix}\right]\oplus\begin{pmatrix}0\\(1-\lambda)x_2\\(1-\lambda^2)x_3\\\vdots\\(1-\lambda^{t-1})x_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}tax_2\\tax_3\\\vdots\\tax_t\\ty_t+tx_1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\(1-\lambda)x_2\\(1-\lambda^2)x_3\\\vdots\\(1-\lambda^{t-1})x_t\end{pmatrix}.$$

Escribiendo esta matriz en fila y comparando sus componentes con las de z_0:
$x_2=\frac{1}{ta}z_1$, $x_3=\frac{1}{ta}z_2,\ldots,x_t=\frac{1}{ta}z_{t-1}$, $x_1=\frac{1}{t}(z_t-ty_t)$. Haciendo $y_t=0$, existe
$z_0'=(0,0,0,\ldots,0,\frac{1}{t}z_t,\frac{1}{ta}z_1,\frac{1}{ta}z_2,\ldots,\frac{1}{ta}z_{t-1})$ tal que $z_0=(d,d',d'')(z_0')\in\operatorname{Im}(d,d',d'')$.
Por consiguiente, $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1))=0$.

Por el Lema 5.3.9, de las partes *iii*), *iv*) del lema anterior
$H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i}))=H_{2m+1}(X_{2m,2m+1})$ y $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i}))=H_{2m}(X_{2m,2m+1})$.
Teniendo en cuenta el diagrama (5.13) y la Proposición 5.3.2,
$H_{2m+1}(X_{2m,2m+1})=\frac{\operatorname{Ker}(d,d')}{\operatorname{Im}(d,d',d'')}=0$. Para ello, basta verificar que
$z_0\in\operatorname{Ker}(d,d')$ implica que $z_0\in\operatorname{Im}(d,d',d'')$.
En efecto, $(d,d')(z_0)=(0,0,\ldots,0,0)$ si y sólo si

$$M_1\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\\vdots\\z_t\end{pmatrix}+M_6\begin{pmatrix}z_{t+1}\\z_{t+2}\\\vdots\\z_{2t-1}\\z_{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)z_2 \\ (1-\lambda^2)z_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda^i)az_{2t} \\ (1-\lambda^i)z_{t+1} \\ (1-\lambda^i)z_{t+2} \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)z_{2t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pero $a \neq 0$, luego $z_{2t} = 0$, $z_{t+1} = -\frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^i)}z_2$, $z_{t+2} = -\frac{(1-\lambda^2)}{(1-\lambda^i)}z_3, \ldots, z_{2t-1} = -\frac{(1-\lambda^{t-1})}{(1-\lambda^i)}z_t$.
Así, $z_0 = (z_1, z_2, \ldots, z_t, -\frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^i)}z_2, -\frac{(1-\lambda^2)}{(1-\lambda^i)}z_3, \ldots, -\frac{(1-\lambda^{t-1})}{(1-\lambda^i)}z_t, 0)$.
Por otro lado,

$$\left[M_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} + M_6 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \right] \oplus M_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} -tx_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda^i)ay_t \\ (1-\lambda^i)y_1 \\ (1-\lambda^i)y_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)y_{t-1} \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} -(1-\lambda)y_1 \\ -(1-\lambda^2)y_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})y_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -tx_1 + (1-\lambda^i)ay_t \\ (1-\lambda^i)y_1 \\ (1-\lambda^i)y_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)y_{t-1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -(1-\lambda)y_1 \\ -(1-\lambda^2)y_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})y_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo esta matriz en fila y comparando sus componentes con las de z_0:
$y_t = \frac{1}{(1-\lambda^i)a}(z_1 + tx_1)$, $y_1 = \frac{1}{(1-\lambda^i)}z_2$, $y_2 = \frac{1}{(1-\lambda^i)}z_3, \ldots, y_{t-1} = \frac{1}{(1-\lambda^i)}z_t$.
Haciendo $x_1 = 0$, existe $z_0' = (0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{(1-\lambda^i)}z_2, \frac{1}{(1-\lambda^i)}z_3, \ldots, \frac{1}{(1-\lambda^i)}z_t, \frac{1}{(1-\lambda^i)a}z_1)$
tal que $z_0 = (d, d', d'')(z_0') \in \operatorname{Im}(d, d', d'')$.
Por consiguiente, $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = 0$ para $1 \leq i \leq t-1$.

Puesto que M_1 y M_6 son las matrices dadas en (5.13):

$$M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} + M_6 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{t-1} \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)x_2 \\ (1-\lambda^2)x_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})x_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda^i)ay_t \\ (1-\lambda^i)y_1 \\ (1-\lambda^i)y_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)y_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\lambda^i)ay_t \\ (1-\lambda)x_2 + (1-\lambda^i)y_1 \\ (1-\lambda^2)x_3 + (1-\lambda^i)y_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})x_t + (1-\lambda^i)y_{t-1} \end{pmatrix}$$

y $d^0_{2m,0} = 0$, considerando que $a \neq 0$ obtenemos que

$$H_{2m}(X_{2m,2m+1}) = \frac{\operatorname{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right)}{\operatorname{Im}\left(d^1_{2m,1} + d^0_{2m+1,0}\right)} = \frac{\langle e_{2tm+1}, e_{2tm+2}, \dots, e_{2tm+t}\rangle}{\langle e_{2tm+1}, e_{2tm+2}, \dots, e_{2tm+t}\rangle} = 0\ ,$$

por consiguiente $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = 0$ para $1 \leq i \leq t-1$.

Claramente $H_0(\overline{X}_*(A\omega_1)) = K\omega_1$ y $H_0(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = 0$ para $1 \leq i \leq t-1$.

Recordando que $HH_n\left(\frac{K[X]}{\langle X^t - a\rangle} \rtimes_f C_t\right) = H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{t-1} H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^i}))\right]$,

se completa la prueba. $\square$

Teorema 5.3.12. *Sea K un cuerpo, $t \geq 3$, $\mu_t(K) \neq \emptyset$ y $A = \frac{K[X]}{\langle X^t\rangle}$, entonces* $HH_n(A \rtimes_f C_t) = H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{t-1} H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^i}))\right]$, *donde*

$$H_n(\overline{X}_*(A\omega_1)) = \begin{cases} K\omega_1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases} ;\ H_n(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = \begin{cases} K\omega_{g^i}, & n = 0 \\ Ke_{2tm}, & n = 2m-1 \\ Ke_{2tm+1}, & n = 2m \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq t-1$.

Prueba. Tomando $a = 0$, por la Proposición 5.3.3 y el Lema 5.3.7, de las partes i), ii) del Lema 5.3.10 $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m+1}(X_{2m+1,2m+2})$ y $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = H_{2m}(X_{2m-1,2m})$.

Puesto que M_3 y M_5 son las matrices dadas en (5.10):

$$M_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} + M_5 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\lambda)x_1 \\ -(1-\lambda^2)x_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})x_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ty_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\lambda)x_1 \\ -(1-\lambda^2)x_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})x_{t-1} \\ ty_1 \end{pmatrix}.$$

Recordando que $d^0_{2m+1,0} = 0$, deducimos que

$$\begin{aligned} H_{2m+1}(X_{2m+1,2m+2}) &= \frac{\mathrm{Ker}\left(d^0_{2m+1,0}\right)}{\mathrm{Im}\left(d^1_{2m+1,1} + d^0_{2m+2,0}\right)} \\ &= \frac{\langle e_{t(2m+1)+1}, e_{t(2m+1)+2}, \ldots, e_{t(2m+1)+t}\rangle}{\langle e_{t(2m+1)+1}, e_{t(2m+1)+2}, \ldots, e_{t(2m+1)+t}\rangle} = 0 \ , \end{aligned}$$

por consiguiente $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} H_{2m}(X_{2m-1,2m}) &= \frac{\mathrm{Ker}\left(d^1_{2m-1,1} + d^0_{2m,0}\right)}{\mathrm{Im}\left(d^1_{2m-1,2} + d^0_{2m,1} + d^1_{2m,1}\right)} \\ &= \frac{\mathrm{Ker}(d, d')}{\mathrm{Im}(d, d', d'')} = 0 \ . \end{aligned}$$

Para ello, basta verificar que $z_0 \in \mathrm{Ker}\,(d, d')$ implica que $z_0 \in \mathrm{Im}\,(d, d', d'')$.
En efecto, $(d, d')(z_0) = (0, 0, \ldots, 0, 0)$ si y sólo si

$$M_3 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{t-1} \\ z_t \end{pmatrix} + M_5 \begin{pmatrix} z_{t+1} \\ z_{t+2} \\ z_{t+3} \\ \vdots \\ z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -(1-\lambda)z_1 \\ -(1-\lambda^2)z_2 \\ \vdots \\ -(1-\lambda^{t-1})z_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ tz_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $z_1 = 0$, $z_2 = 0, \ldots, z_{t-1} = 0$, $z_{t+1} = 0$. Así, $z_0 = (0, \ldots, 0, z_t, 0, z_{t+2}, z_{t+3}, \ldots, z_{2t})$.

Por otro lado,

$$\left[M_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} + M_5 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \right] \oplus M_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ tx_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ty_1 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)y_2 \\ (1-\lambda^2)y_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ tx_t + ty_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)y_2 \\ (1-\lambda^2)y_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})y_t \end{pmatrix}.$$

Escribiendo esta matriz en fila y comparando sus componentes con las de z_0:
$y_1 = \frac{1}{t}(z_t - tx_t)$, $y_2 = \frac{1}{(1-\lambda)}z_{t+2}, y_3 = \frac{1}{(1-\lambda^2)}z_{t+3}, \ldots$, $y_t = \frac{1}{(1-\lambda^{t-1})}z_{2t}$. Haciendo $x_t = 0$, existe $z_0' = (0, \ldots, 0, 0, \frac{1}{t}z_t, \frac{1}{(1-\lambda)}z_{t+2}, \frac{1}{(1-\lambda^2)}z_{t+3}, \ldots, \frac{1}{(1-\lambda^{t-1})}z_{2t})$ tal que
$z_0 = (d, d', d'')(z_0') \in \mathrm{Im}\,(d, d', d'')$. Por consiguiente, $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_1)) = 0$.

Por el Lema 5.3.9, de las partes *iii*), *iv*) del Lema 5.3.10
$H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = H_{2m+1}(X_{2m,2m+1})$ y $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = H_{2m}(X_{2m,2m+1})$.
Teniendo en cuenta el diagrama (5.13) y la Proposición 5.3.2,

$$H_{2m+1}(X_{2m,2m+1}) = \frac{\mathrm{Ker}\,(d, d')}{\mathrm{Im}\,(d, d', d'')} = Ke_{2t(m+1)}\ . \tag{5.16}$$

Sea $z_0 \in \mathrm{Ker}\,(d, d')$, entonces $(d, d')(z_0) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ si y sólo si

$$M_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{t-1} \\ z_t \end{pmatrix} + M_6 \begin{pmatrix} z_{t+1} \\ z_{t+2} \\ \vdots \\ z_{2t-1} \\ z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)z_2 \\ (1-\lambda^2)z_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda^i)z_{t+1} \\ (1-\lambda^i)z_{t+2} \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)z_{2t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pues $a=0$; luego $z_{t+1}=-\frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^i)}z_2$, $z_{t+2}=-\frac{(1-\lambda^2)}{(1-\lambda^i)}z_3,\ldots,z_{2t-1}=-\frac{(1-\lambda^{t-1})}{(1-\lambda^i)}z_t$. Así, $z_0=(z_1,z_2,\ldots,z_t,-\frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^i)}z_2,\ldots,-\frac{(1-\lambda^{t-1})}{(1-\lambda^i)}z_t,z_{2t})$. Visto como combinación lineal

$$
\begin{aligned}
z_0 = z_1 e_{2tm+1} + z_2\left(e_{2tm+2}-\frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^i)}e_{2tm+(t+1)}\right)+\\
\cdots + z_t\left(e_{2tm+t}-\frac{(1-\lambda^{t-1})}{(1-\lambda^i)}e_{2tm+(2t-1)}\right)+z_{2t}e_{2tm+2t}\ .
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Sea $z=(d,d',d'')\,(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_t,y_1,y_2,y_3,\ldots,y_t)$. Como $a=0$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\left[M_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}+M_6\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\\vdots\\y_t\end{pmatrix}\right]\oplus M_3\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\\vdots\\y_t\end{pmatrix}\\
&=\left[\begin{pmatrix}-tx_1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\(1-\lambda^i)y_1\\(1-\lambda^i)y_2\\\vdots\\(1-\lambda^i)y_{t-1}\end{pmatrix}\right]\oplus\begin{pmatrix}-(1-\lambda)y_1\\-(1-\lambda^2)y_2\\\vdots\\-(1-\lambda^{t-1})y_{t-1}\\0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-tx_1\\(1-\lambda^i)y_1\\(1-\lambda^i)y_2\\\vdots\\(1-\lambda^i)y_{t-1}\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}-(1-\lambda)y_1\\-(1-\lambda^2)y_2\\\vdots\\-(1-\lambda^{t-1})y_{t-1}\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Escribiendo esta matriz como combinación lineal :

$$
\begin{aligned}
z=(-tx_1)e_{2tm+1}+(1-\lambda^i)y_1\left(e_{2tm+2}-\frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^i)}e_{2tm+(t+1)}\right)+\\
\cdots+(1-\lambda^i)y_{t-1}\left(e_{2tm+t}-\frac{(1-\lambda^{t-1})}{(1-\lambda^i)}e_{2tm+2t-1}\right)\ .
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

De (5.17) y (5.18), se sigue (5.16).

Por consiguiente, $H_{2m+1}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i}))=Ke_{2t(m+1)}$ para $1\le i\le t-1$.

Teniendo en cuenta el diagrama (5.13), la Proposición 5.3.2 y $d^0_{2m,0}=0$

$$
H_{2m}(X_{2m,2m+1})=\frac{\operatorname{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right)}{\operatorname{Im}(d,d')}=Ke_{2tm+1}\ . \tag{5.19}
$$

Sea $z = (d, d')\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_t)$. Como $a = 0$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} + M_6 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)x_2 \\ (1-\lambda^2)x_3 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})x_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda^i)y_1 \\ (1-\lambda^i)y_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^i)y_{t-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\lambda)x_2 + (1-\lambda^i)y_1 \\ (1-\lambda^2)x_3 + (1-\lambda^i)y_2 \\ \vdots \\ (1-\lambda^{t-1})x_t + (1-\lambda^i)y_{t-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Escribiendo esta matriz como una combinación lineal:

$$z = [(1-\lambda)x_2 + (1-\lambda^i)y_1]e_{2tm+2} + \cdots + [(1-\lambda^{t-1})x_t + (1-\lambda^i)y_{t-1}]e_{2tm+t}\ . \tag{5.20}$$

Puesto que $\operatorname{Ker}\left(d^0_{2m,0}\right) = \langle e_{2tm+1}, e_{2tm+2}, \ldots, e_{2tm+t}\rangle$, de (5.20) se sigue (5.19).

Así, $H_{2m}(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = Ke_{2tm+1}$ para $1 \leq i \leq t-1$.

De los diagramas (5.10) y (5.13), deducimos que $H_0(\overline{X}_*(A\omega_1)) = K\omega_1$,

$H_0(\overline{X}_*(A\omega_{g^i})) = K\omega_{g^i}$ para $1 \leq i \leq t-1$. Esto completa la prueba. $\square$

Conclusiones y recomendaciones

En la presente tesis obtuvimos el cálculo de homología de Hochschild de los productos cruzados de $K[X]$ cocientado por el ideal generado por $X^t - a$ con el grupo cíclico $C_t = \langle g \rangle$ de orden $t \geq 2$, cuando K es un cuerpo y la acción de C_t sobre $\frac{K[X]}{\langle X^t - a \rangle}$ es dada por $g \cdot x = \lambda x$, $g \cdot 1 = 1$ donde λ es una raíz primitiva t-ésima de la unidad en K y $x = X + \langle X^t - a \rangle$.
El siguiente trabajo será abordar el caso cuando K es un dominio de ideales principales y λ es una raíz primitiva t-ésima de la unidad en K.
En el contexto de geometría algebraica, este problema se localiza en un cuadro más general que consiste en calcular la homología de Hochschild de un producto cruzado $E = A \rtimes_f G$ para el caso $A = \frac{K[X_1, \ldots, X_n]}{I}$, donde I es un ideal de $K[X_1, \ldots, X_n]$ y G es un grupo finito.
En esta dirección, el siguiente paso será abordar el caso $A = \frac{K[X,Y]}{\langle X^2 - Y \rangle}$, con G un grupo cíclico.

Bibliografía

[1] Guccione J.A, Guccione J.J, Hochschild (co)homology of Hopf crossed products, K-theory **25**(2) (2002) 138-169, DOI 10.1023/A:1015689030210, MR 1906670.

[2] Sweedler M.E, Cohomology of Algebras over Hopf algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968) 205-239.

[3] Blattner R.J, Cohen M. and Montgomery S., Crossed Products and Inner Actions of Hopf Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986) 671-711.

[4] Doi Y. and Takeuchi M., Cleft Comodule Algebras for a Bialgebra, Comm. in Alg. 14 (1986) 801-817.

[5] Masouka A., Mini-Course on Hopf Algebras, Hopf crossed products, arXiv:1207.1532 (2012).

[6] Carboni G., Guccione J.A, Guccione J.J, and Valqui C., Cyclic Homology of Brzezinski's Crossed Products and of Braided Hopf Crossed Products, www.imca.edu.pe, Lima (2012).

[7] Carboni G., Guccione J.A, Guccione J.J, Cyclic Homology of Hopf Crossed Products, Advances in Mathematics 223 (2010) 840-872.

[8] MacLane S., Homology, Springer-Verlag, Berlin Guttingen Heidelberg (1963).

[9] Dascalescu S., Nestasescu C. and Raianu S., Hopf Algebras an Introduction, Marcel Dekker, New York (2001).

[10] Hilton P.J, and Stammbach U., A Course in Homological Algebra, Springer-Verlag, New York (1971).

[11] Félix Y.; Tanré D., Topologie Algébrique, Dunod, Paris (1989).

[12] Eilenberg S, Moore JC., Foundations of Relative Homological Algebra, Mem. Amer. Math. Soc. 55 (1965).

[13] Spanier E.H, Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York. Inc (1966).

[14] Blattner R.J, and Montgomery S., Crossed Products and Galois Extensions of Hopf Algebras, Pacific J. Math, **137**(1) (1989) 37-54.

[15] Lang S., Algebra, Springer-Verlag, New York. Inc (2002).

[16] Sweedler M.E, Hopf Algebras, Mathematics Lecture Note Series. Vol 44, 1969.

[17] Montgomery S., Hopf Galois Theory : A Survey - Geometry and Topology, Monographs, 16 (2009) 367-400.

[18] Montgomery S., Hopf Algebras and their actions on rings, Regional Conferene Series in Math. Vol 82, Amer. Math. Soc. Providence, 1993.

[19] Hilton P. and Chiang Wu Y., A Course in Modern Algebra, John Wiley & Sons, New York (1989).

[20] Loday J.L, Cyclic Homology, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1992).

[21] Weibel C.A, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, (1994).

[22] Gentile E.R, Estructuras Algebraicas II, Secretaría General de la Organización de Estados Americanos, Washington D.C, (1971).

[23] Rotman J.J, Advanced Modern Algebra, American Mathematical Society, United States of America (2015).

[24] Gerstenhaber M. and Schack S.D, Relative Hochschild Cohomology, Rigid Algebras and the Gockstein, Journal of Pure and Applied Algebra 43 (1986) 53-74.

[25] Passman D.S, Infinite crossed products, Academic Press Inc., Boston (1989).

[26] Guccione J.A, and Guccione J.J, The (Co)homology of a Crossed Product of an Algebra by a Finite Cyclic Croup, Comunicación privada, (2000).

[27] Guccione J.A, and Guccione J.J, The (Co)homology of a Crossed Product of a Monogenic Algebra by a Finite Cyclic Croup, Comunicación privada, (2000).

[28] Jorge Alberto Guccione and Juan José Guccione, The (co)homology of crossed products over monogenic algebras, East-West J.Math. **3**(1) (2001) 49-67, MR1866643.

[29] Molina J.A, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Ingeniería (2004).

[30] Doi Y., Cohomologies over commutative Hopf algebras, J. Math. Soc. Japan, **25**(4) (1973) 680-706.

[31] Doi Y., Equivalent crossed products for a hopf algebra, Communications in Algebra, **17**(12) (1989) 3053-3085.