

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica



TESIS

**Desarrollo de un algoritmo de fusión sensorial utilizando un
microcontrolador RP2040 para la determinación de orientación
del picosatélite Chasqui I**

Para obtener el título profesional de Ingeniero Electrónico.

Elaborado por

Miguel Angel Chicchón Apaza

 [0000-0002-2228-8557](https://orcid.org/0000-0002-2228-8557)

Asesor

MSc. José Ambrosio Machuca Mines

 [0000-0002-7069-7654](https://orcid.org/0000-0002-7069-7654)

LIMA – PERÚ

2024

| | |
|------------------------------|--|
| Citar/How to cite | Chicchón Apaza [1] |
| Referencia/Reference | [1] M. Chicchón Apaza, " <i>Desarrollo de un algoritmo de fusión sensorial utilizando un microcontrolador RP2040 para la determinación de orientación del picosatélite Chasqui I</i> " [Tesis]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2024. |
| Estilo/Style: IEEE (2020) | |

| | |
|--------------------------------|---|
| Citar/How to cite | (Chicchón, 2024) |
| Referencia/Reference | Chicchón, M. (2024). <i>Desarrollo de un algoritmo de fusión sensorial utilizando un microcontrolador RP2040 para la determinación de orientación del picosatélite Chasqui I</i> . [Tesis, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI. |
| Estilo/Style: APA (7ma ed.) | |

Dedicatoria

A mis padres

*por su amor, apoyo y comprensión que
siempre me han dado.*

Agradecimientos

A los docentes e investigadores de la UNI, CTIC-UNI, INICTEL-UNI,
por la formación profesional que me brindaron.

Resumen

El picosatélite Chasqui I, desarrollado por la Universidad Nacional de Ingeniería del Perú, necesita un Sistema de Determinación de Orientación (SDO) que estime la orientación del picosatélite con la finalidad de garantizar la realización precisa y óptima de adquisición de imágenes del territorio peruano y la comunicación con la estación terrena de telemetría.

En la presente tesis se describe el análisis, diseño, simulación e implementación de un SDO para el Chasqui I. Para este propósito es necesario realizar un modelo cinemático/dinámico del satélite, modelos matemáticos del entorno; y técnicas de fusión sensorial basadas en el Filtro de Kalman Extendido. Además, se implementa un simulador del picosatélite y su entorno en MatLab/Simulink, con la finalidad de evaluar el funcionamiento del SDO y como soporte al diseño. Finalmente, se implementan los algoritmos del SDO en un microcontrolador RP2040 y se verifica la codificación mediante la técnica de simulación de sistemas complejos conocida como Processor In the Loop (PIL). Los resultados de las simulaciones Monte Carlo y la validación experimental PIL demuestran mediante gráficos y tablas de errores RMS (Root Mean Square) que el SDO diseñado permite estimar la orientación del Chasqui I con una precisión establecida.

Palabras clave — Fusión Sensorial, Filtro de Kalman, Simulación, Microcontrolador.

Abstract

The Chasqui I picosatellite, developed by the National University of Engineering of Peru, requires an Orientation Determination System (ODS) to estimate the orientation of the picosatellite in order to guarantee the accurate and optimal acquisition of images of the Peruvian territory and communication with the telemetry ground station.

This thesis describes the analysis, design, simulation, and implementation of an ODS for the Chasqui I. For this purpose, it is necessary to perform a kinematic/dynamic model of the satellite, mathematical models of the environment; and sensor fusion techniques based on the Extended Kalman Filter. In addition, a simulator of the picosatellite and its environment is implemented in MatLab/Simulink, in order to evaluate the operation of the ODS and as support to the design. Finally, the algorithms of the ODS are implemented in an RP2040 microcontroller and the coding is verified using the complex system simulation technique known as Processor In the Loop (PIL).

The results of the Monte Carlo simulations and the PIL experimental validation demonstrate, through graphs and tables of RMS (Root Mean Square) errors, that the designed ODS allows the orientation of the Chasqui I to be estimated with a predetermined accuracy.

Keywords — Sensor Fusion, Kalman filter, simulation, microcontroller.

Tabla de Contenido

| | Pág. |
|--|------|
| Resumen | v |
| Abstract | vi |
| Introducción | xvii |
| Capítulo I. Parte introductoria del trabajo | 1 |
| 1.1 Generalidades..... | 1 |
| 1.1.1 Cubesat | 2 |
| 1.1.2 Chasqui I..... | 3 |
| 1.1.3 Sistema de Determinación y Control de Orientación (SDCO)..... | 5 |
| 1.2 Descripción del problema de investigación..... | 7 |
| 1.3 Objetivos del estudio | 7 |
| 1.3.1 Objetivo general..... | 7 |
| 1.3.2 Objetivos específicos | 7 |
| 1.4 Justificación..... | 8 |
| 1.5 Limites | 8 |
| 1.6 Antecedentes investigativos | 8 |
| 1.6.1 Antecedentes internacionales | 8 |
| 1.6.2 Antecedentes nacionales | 11 |
| 1.7 Esquema general de la Tesis | 12 |
| Capítulo II. Marcos teórico | 14 |
| 2.1 Sistemas de referencia..... | 14 |
| 2.1.1 Sistema de referencia inercial centrado en la Tierra (ECI)..... | 14 |
| 2.1.2 Sistema de referencia terrestre centrado en la Tierra (ECEF) | 16 |
| 2.1.3 Sistema de referencia orbital centrado en la Tierra (ECO) | 16 |
| 2.1.4 Sistema de referencia orbital centrado en la órbita (OCO) | 17 |

| | |
|--|----|
| 2.1.5 Sistema de referencia fijado al satélite (BCBF) | 18 |
| 2.2 Representación de orientación | 18 |
| 2.2.1 Vectores | 18 |
| 2.2.2 Matriz de rotación | 20 |
| 2.2.3 Ángulos de Euler | 21 |
| 2.2.4 Cuaterniones | 23 |
| 2.2.5 Velocidad Angular | 26 |
| 2.2.6 Razón de cambio de vectores en sistemas coordenados rotados | 27 |
| 2.3 Transformaciones entre sistemas de referencia | 28 |
| 2.3.1 ECI hacia ECEF | 28 |
| 2.3.2 ECO hacia ECI y ECF | 28 |
| 2.3.3 ECI hacia OCO | 29 |
| 2.3.4 ECI hacia BCBF | 29 |
| 2.3.5 OCO hacia BCBF | 29 |
| Capítulo III. Especificaciones de los sensores y modelos matemáticos | 30 |
| 3.1 Sensores | 30 |
| 3.1.1 Tipos de sensores | 30 |
| 3.1.2 Magnetómetro | 32 |
| 3.1.3 Sensor de Sol | 34 |
| 3.1.4 Giroscopio | 35 |
| 3.1.5 Elección de sensores para el picosatélite Chasqui I | 36 |
| 3.2 Vector campo magnético | 41 |
| 3.2.1 Modelo matemático IGRF | 43 |
| 3.3 Vector posición del Sol | 45 |
| 3.3.1 Modelo matemático del vector posición del Sol | 46 |
| 3.3.2 Celdas solares y vector posición del Sol | 47 |

| | |
|--|-----|
| 3.3.3 Albedo de la Tierra | 50 |
| 3.4 Generador de órbitas | 56 |
| 3.4.1 Teoría orbital | 56 |
| 3.4.2 Modelo matemático SGP4..... | 65 |
| 3.4.3 Modelo matemático de órbita a bordo | 67 |
| 3.5 Picosatélite..... | 70 |
| 3.5.1 Modelo matemático de la cinemática..... | 71 |
| 3.5.2 Modelo matemático de la dinámica | 72 |
| Capítulo IV. Desarrollo de técnicas de determinación de orientación para el picosatélite Chasqui I | 77 |
| 4.1 Métodos determinísticos..... | 77 |
| 4.1.1 TRIAD | 77 |
| 4.1.2 QUEST..... | 79 |
| 4.1.3 Solución analítica de dos medidas vectoriales | 81 |
| 4.2 Métodos probabilísticos..... | 82 |
| 4.2.1 Filtro de Kalman | 82 |
| 4.2.2 Filtro de Kalman Extendido Discreto..... | 85 |
| 4.3 Determinación de orientación para el picosatélite Chasqui I..... | 87 |
| 4.3.1 MEKF | 88 |
| 4.3.2 Formas iterativas del MEKF | 95 |
| 4.3.3 Sistema de determinación de orientación para el picosatélite Chasqui I..... | 98 |
| Capítulo V. Análisis y discusión de resultados | 100 |
| 5.1 Simulaciones..... | 100 |
| 5.1.1 Cinemática y dinámica del picosatélite | 101 |
| 5.1.2 Modelos del entorno..... | 104 |
| 5.1.3 Modelos de sensores | 115 |
| 5.1.4 Métodos determinísticos..... | 124 |

| | |
|--|-----|
| 5.1.5 Métodos probabilísticos..... | 126 |
| 5.2 Implementación y verificación | 136 |
| 5.2.1 Descripción del hardware | 136 |
| 5.2.2 Especificaciones del algoritmo | 137 |
| 5.2.3 Verificación del algoritmo | 141 |
| Conclusiones | 144 |
| Recomendaciones | 146 |
| Referencias bibliográficas..... | 147 |
| Anexos | 154 |

Lista de Tablas

| | Pág. |
|---|------|
| Tabla 1: Descripción de los Módulos del Chasqui I..... | 4 |
| Tabla 2: Sistemas de determinación de orientación utilizados en Proyectos CubeSat..... | 9 |
| Tabla 3: Descripción de sensores de orientación..... | 32 |
| Tabla 4: Especificaciones del magnetómetro Micromag3. | 39 |
| Tabla 5: Especificaciones del módulo sensor de Sol..... | 39 |
| Tabla 6: Especificaciones del giroscopio ADIS16265..... | 40 |
| Tabla 7: Correspondencia entre caras numeradas y ejes | 48 |
| Tabla 8: Elementos Keplerianos | 61 |
| Tabla 9: Datos de la Órbita de los picosatélites Chasqui I y Uguiso..... | 105 |
| Tabla 10: Valores RMSE de los modelos de órbita | 110 |
| Tabla 11: Valores RMSE de los modelos de campo magnético IGRF-13 en 10 días | 113 |
| Tabla 12: Comparación entre modelos de campo magnético IGRF-13 de diferentes órdenes | 113 |
| Tabla 13: Valores RMSE de los modelos de vector solar en 10 días | 115 |
| Tabla 14: Parámetros del sensor magnetómetro para simulación..... | 116 |
| Tabla 15: Parámetros del sensor de Sol para simulación | 119 |
| Tabla 16: Parámetros del sensor giroscopio para simulación | 123 |
| Tabla 17: Valores RMSE de orientación en 1000 ejecuciones Monte Carlo para 10 órbitas | 124 |
| Tabla 18: Valores RMSE de orientación y sesgo en 1000 ejecuciones Monte Carlo para 10 órbitas | 126 |
| Tabla 19: Valores RMSE de orientación y velocidad angular en 100 ejecuciones Monte Carlo en 10 órbitas del MMEKF para diferentes configuraciones de giroscopio y tiempo de muestreo | 128 |
| Tabla 20: Valores RMSE de velocidad angular en 10 órbitas utilizando diferentes configuraciones de un filtro promediador | 129 |
| Tabla 21: Valores RMSE de orientación en 100 ejecuciones Monte Carlo en 10 órbitas para el MMEKF | 129 |

| | |
|--|-----|
| Tabla 22: Valores RMSE de velocidad angular en 100 ejecuciones Monte Carlo en 10 órbitas para el MMEKF | 130 |
| Tabla 23: Valores RMSE de orientación en 100 ejecuciones Monte Carlo..... | 135 |
| Tabla 24: Valores RMSE de velocidad angular en 100 ejecuciones Monte Carlo | 135 |
| Tabla 25: Descripción de Microcontroladores | 136 |
| Tabla 26: Descripción de bibliotecas del algoritmo SDO..... | 137 |
| Tabla 27: Descripción de las funciones de la biblioteca SENSORS..... | 138 |
| Tabla 28: Descripción de las funciones de la biblioteca MATHOPER | 139 |
| Tabla 29: Descripción de las funciones de la biblioteca MODELS | 140 |
| Tabla 30: Descripción de las funciones de la biblioteca ATTDDET | 140 |
| Tabla 31: Errores en la precisión de los cálculos en lenguaje C en los microcontroladores de 32 bits | 142 |
| Tabla 32: Tiempo de ejecución y potencia consumida del algoritmo SDO en los microcontroladores de 32 bits..... | 143 |

Lista de Figuras

| | Pág. |
|---|------|
| Figura 1: CubeSat Chasqui I | 2 |
| Figura 2: Módulos del picosatélite Chasqui I | 4 |
| Figura 3: Sistema de Determinación y Control de Orientación | 6 |
| Figura 4: Esquema general de la Tesis | 13 |
| Figura 5: Sistemas de Referencia ECI y ECEF | 15 |
| Figura 6: Efecto de las fuerzas de perturbación sobre la Tierra | 16 |
| Figura 7: Sistema de referencia ECO | 17 |
| Figura 8: Sistema de referencia orbital | 17 |
| Figura 9: Sistema de referencia BCBF | 18 |
| Figura 10: Rotaciones Simples: a) Sin rotación. b) Rotación alrededor del eje X. c) Rotación alrededor del eje Y. d) Rotación alrededor del eje Z | 21 |
| Figura 11: Secuencia de Ángulos de Euler para el Satélite | 22 |
| Figura 12: Par de rotación | 24 |
| Figura 13: Tipos de Sensores para determinación de orientación | 31 |
| Figura 14: Módulo Sensor Magnético de 3 Ejes (PNI MicroMag 3) | 33 |
| Figura 15: Celda solar | 34 |
| Figura 16: Tecnología MEMS en giroscopio: a) Efecto Coriolis. b) Dos estructuras resonadoras cuando la velocidad es aplicada | 35 |
| Figura 17: Giroscopio ADIS16265 | 36 |
| Figura 18: Módulo sensor de Sol | 39 |
| Figura 19: Diagrama de bloques funcional del giroscopio digital programable ADIS16265 | 41 |
| Figura 20: Líneas del Campo Magnético de la Tierra | 42 |
| Figura 21: Intensidad del Campo en la superficie de la Tierra para el año 2020 (en nano Teslas) | 43 |
| Figura 22: Órbita de la Tierra alrededor del Sol y Vector Posición del Sol | 46 |

| | |
|---|-----|
| Figura 23: Dependencia de la corriente generada por la celda en función del ángulo de incidencia | 48 |
| Figura 24: Vista de las caras del picosatélite | 48 |
| Figura 25: Vista para calcular el vector solar | 49 |
| Figura 26: Ilustración del fenómeno del Albedo | 50 |
| Figura 27: Modelado del albedo terrestre. La irradiancia incidente desde el Sol es reflejada por la celda | 52 |
| Figura 28: Reflectividad media para el Año 2005, datos Proyecto TOMS | 53 |
| Figura 29: Proyección de los vectores medidos por las celdas solares | 53 |
| Figura 30: Cálculo del vector de Sol considerando el fenómeno del albedo | 54 |
| Figura 31: Modelo del Albedo en función del ángulo entre la dirección hacia donde apunta el sensor de Sol y el vector nadir | 55 |
| Figura 32: Cálculo del vector de Sol considerando el fenómeno del albedo | 55 |
| Figura 33: Elementos Keplerianos | 61 |
| Figura 34: Elementos de una elipse | 62 |
| Figura 35: Tipos de anomalías: (E) anomalía excéntrica, (M) anomalía media. (T) anomalía verdadera | 64 |
| Figura 36: Detalle del TLE para la Estación Espacial Internacional (ISS). | 65 |
| Figura 37: Masa puntual, i , relativa al sistema de referencia inercial, I | 73 |
| Figura 38: Variables involucradas en el proceso de estimación | 85 |
| Figura 39: MEKF para estimación de orientación | 95 |
| Figura 40: MMEKF para estimación de orientación | 96 |
| Figura 41: SMEKF para estimación de orientación | 97 |
| Figura 42: Arquitectura del sistema de determinación de orientación | 99 |
| Figura 43: Simulador del sistema de determinación de orientación en Simulink. | 100 |
| Figura 44: Modelo de la cinemática y dinámica del picosatélite en Simulink. | 101 |
| Figura 45: Modelo de los torques de perturbación en Simulink | 102 |
| Figura 46: Variación de la orientación y velocidad angular (rad/s) en 10 órbitas | 103 |

| | |
|---|-----|
| Figura 47: Variación de los torques de perturbación en Nm para 10 órbitas | 103 |
| Figura 48: Órbita del picosatélite Chasqui I en el software Satellite Tool Kit (STK). | 104 |
| Figura 49: Variación de los parámetros Keplerianos de la órbita (STK) | 105 |
| Figura 50: Modelo Orbital SGP4 en Simulink | 106 |
| Figura 51: Modelo Orbital Simplificado en Simulink | 106 |
| Figura 52: Vista 3D de la Órbita del picosatélite en los sistemas ECI y ECEF | 107 |
| Figura 53: Error entre los datos obtenidos de los modelos de órbita en Simulink y los datos obtenidos del STK para la posición en el sistema ECEF | 108 |
| Figura 54: Error entre los datos obtenidos de los modelos de órbita en Simulink y los datos obtenidos del STK para la posición en el sistema ECI | 108 |
| Figura 55: Error entre los datos obtenidos de los modelos de órbita en Simulink y los datos obtenidos del STK para la velocidad en el sistema ECI y la altitud en el sistema ECEF | 109 |
| Figura 56: Modelos del entorno en Simulink para simular señales de sensores | 110 |
| Figura 57: Modelos del entorno en Simulink para implementar en el microcontrolador | 111 |
| Figura 58: Variación del campo magnético en 10 órbitas | 111 |
| Figura 59: Error entre los datos obtenidos de los modelos de campo magnético IGRF-13 en Simulink y los datos obtenidos del STK en el sistema ECI | 112 |
| Figura 60: Variación del vector solar en 10 órbitas | 114 |
| Figura 61: Error entre los datos obtenidos de los modelos de posición del Sol en Simulink y los datos obtenidos del STK en el sistema ECI | 114 |
| Figura 62: Modelos de sensores en Simulink | 115 |
| Figura 63: Modelo de sensor magnetómetro en Simulink | 116 |
| Figura 64: Variación del campo magnético obtenido del modelo de sensor magnetómetro en Simulink | 117 |
| Figura 65: Modelo de sensor de Sol en Simulink | 118 |
| Figura 66: Modelo de celda solar en Simulink | 118 |
| Figura 67: Modelo de amplificador MAX4372 en Simulink | 119 |
| Figura 68: Variación del vector solar obtenido de los modelos de sensores de Sol en Simulink | 120 |

| | |
|---|-----|
| Figura 69: Modelo de sensor giroscopio en Simulink | 121 |
| Figura 70: Modelo de elemento sensor en Simulink | 121 |
| Figura 71: Modelos de filtros analógicos y digitales en Simulink | 122 |
| Figura 72: Modelo de Conversión Analógica-Digital en Simulink | 122 |
| Figura 73: Variación de la velocidad angular obtenido del modelo del sensor giroscopio en Simulink | 123 |
| Figura 74: Errores de determinación y límites 3σ del algoritmo TRIAD | 125 |
| Figura 75: Variación RMSE de la orientación obtenida por el algoritmo TRIAD en 10 órbitas..... | 125 |
| Figura 76: Errores de determinación y límites 3σ del algoritmo MMEKF | 127 |
| Figura 77: Variación RMSE de la orientación obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas | 127 |
| Figura 78: Variación RMSE de la orientación (q_I^B) (obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas | 130 |
| Figura 79: Variación RMSE de la orientación (q_O^B) obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas | 131 |
| Figura 80: Variación RMSE del sesgo del giroscopio obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas | 132 |
| Figura 81: Variación RMSE de la velocidad angular ($\tilde{\omega}_{ib}^b$) obtenida del giroscopio en 10 órbitas | 132 |
| Figura 82: Variación RMSE de la velocidad angular ($\hat{\omega}_{ib}^b$) obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas | 133 |
| Figura 83: Variación RMSE de la velocidad angular (ω_{ob}^b) obtenida del giroscopio en 10 órbitas | 134 |
| Figura 84: Variación RMSE de velocidad angular (ω_{ob}^b) obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas | 134 |
| Figura 85: Módulo de desarrollo para Microcontroladores | 137 |
| Figura 86: Diagrama de flujo del algoritmo del SDO | 138 |
| Figura 87: Visualización de las pruebas de verificación MIL y PIL | 141 |

Introducción

El proyecto Chasqui I inicia a fines del 2008 y culmina con el lanzamiento del satélite en agosto del 2014. Este proyecto está comprendido dentro de un plan multidisciplinario desarrollado en la Universidad Nacional de Ingeniería. El Chasqui I es un picosatélite basado en la tecnología CubeSat, lo que significa que su masa está restringida a 1 kg y su tamaño está restringido a un cubo de 10 cm de arista. El objetivo del proyecto es mejorar las capacidades de la UNI, y por ende el Perú, en tecnología satelital. El picosatélite tiene como objetivos realizar la toma de fotos del Perú y comunicarse con la estación terrena, para garantizar el cumplimiento de dichas tareas es necesario un Sistema de Determinación y Control de Orientación (SDCO) que permita orientar apropiadamente al picosatélite.

Para poder aplicar una ley de control que permita orientar el picosatélite es necesario conocer la orientación actual del mismo con respecto a un sistema de referencia. Para este propósito el presente trabajo de tesis describe el estudio, diseño, simulación e implementación de un sistema de determinación de orientación (SDO) para el picosatélite Chasqui I, cuya finalidad consiste en estimar la orientación del picosatélite con una alta precisión. El SDO forma parte del SDCO, y fue desarrollado por un equipo de investigadores en el CTIC-UNI.

La determinación de orientación comprende el cálculo de la orientación del satélite en base a la información de los sensores y al uso de algoritmos de determinación. Así, una primera etapa de la tesis comprende la selección y modelado de los diversos tipos de sensores a utilizar, entre los que se incluyen magnetómetros, sensores de sol y girómetros. Una vez seleccionados los sensores, se procede con el diseño de los algoritmos de determinación. Estos algoritmos se calculan en base a la teoría de estimación y requieren de modelos matemáticos simplificados del satélite (cinemática y dinámica) y de su entorno (órbita, campo magnético y vector solar). De la teoría de estimación se seleccionan dos tipos de estimadores: uno determinístico denominado TRIAD y otro probabilístico

denominado Filtro de Kalman Extendido (EKF). El buen funcionamiento del SDO diseñado se verifica usando el Simulador SDCO. El simulador se implementa usando Matlab/Simulink y contiene modelos matemáticos detallados del satélite y de su entorno. Los resultados obtenidos por el SDO, implementado como bloques en el Simulador SDCO, se validan experimentalmente usando un sistema de evaluación del tipo Processor In the Loop (PIL).

Las siguientes líneas son de agradecimiento a las personas e instituciones que han apoyado este trabajo.

En primer lugar, agradezco al Centro de Tecnologías de Información y Comunicaciones de la UNI, donde se desarrolló el PAET y el proyecto Chasqui I. Aquí pude interactuar con investigadores de primer nivel como la Dra. Elizabeth Villota, Dr. Mauricio Villanueva, Dr. Héctor Bedón, Dr. Eleazar Sal y Rosas, Dr. David Achancaray, Msc. José Machuca, entre otros, de los cuales aprendí mis primeras nociones en investigación.

Un agradecimiento especial a los compañeros encargados del desarrollo del módulo SDCA del Chasqui I, Sammy Carbajal, John Rojas, Klebes Arias, Antero Castro y Renato Migayusuku, que a través de sus trabajos me motivaron a continuar y finalizar esta tesis.

Finalmente, con todo mi cariño, el agradecimiento a todos mis amigos y familia.

Capítulo I. Parte introductoria del trabajo

En esta Tesis se describe el desarrollo del algoritmo del sistema de determinación de orientación como parte de un proyecto satelital realizado en la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI). El satélite, llamado Chasqui I, es un picosatélite del tipo CubeSat diseñado y construido por estudiantes de la universidad. El picosatélite Chasqui I fue puesto en órbita el 14 de agosto de 2014, después de un tiempo de desarrollo de más de 3 años. El objetivo académico de este proyecto es dar la oportunidad a estudiantes e ingenieros de experimentar con la tecnología de picosatélites.

El picosatélite está diseñado para tomar fotos del Perú desde una órbita terrestre baja, a una altura de aproximadamente 350 km. Estas fotos se transmiten hacia una estación en tierra ubicada en la UNI. Para tomar las fotos de los objetivos geográficos elegidos es necesario orientar el lente de la cámara con la suficiente precisión, esto se logra mediante el Sistema de Determinación y Control de Orientación (SDCO).

A continuación, el concepto CubeSat, el Chasqui I y el Sistema de Determinación de Orientación, se presentan para proporcionar el marco de trabajo presentado en esta tesis. Finalmente, el capítulo concluye explicando la motivación detrás de esta tesis y su esquema general.

1.1 Generalidades

Desde los inicios de la era espacial una de las partes más cruciales de los satélites es la determinación de su órbita y su orientación actual (orientación con respecto a un sistema de referencia, también conocido como "attitude" en inglés). Sin embargo, cuando se contempla su aplicación en satélites pequeños se puede decir que aún se encuentra en desarrollo, esto debido a que la producción de sensores que cumplan con restricciones en las dimensiones, peso y en el consumo de potencia recién se ha dado en los últimos años.

Clasificación de satélites pequeños, con una masa menor a 500 kg:

- Minisatélites, que tienen un límite de masa de 500 kg.

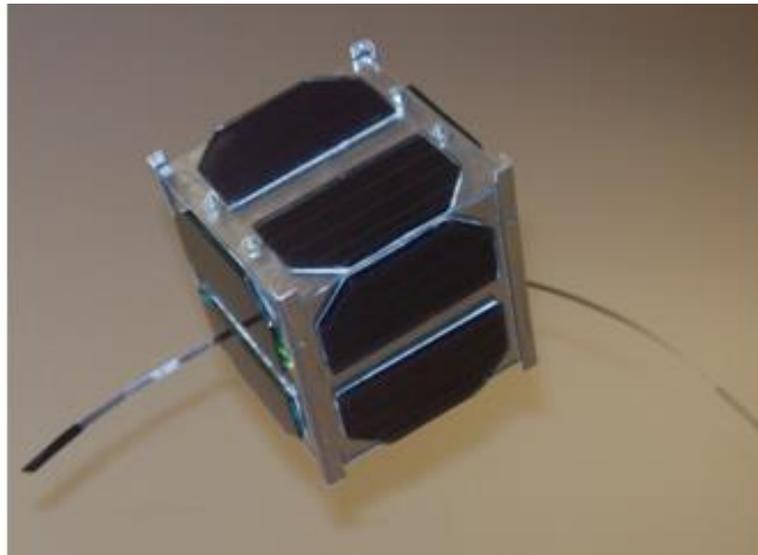
- Microsatélites, para el caso de masas menores a los 100 kg.
- Nanosatélites, que tienen un límite de masa de 10 kg.
- Picosatélites, se caracterizan por tener una masa máxima de 1 kg. El CubeSat estándar de 1 kg se encuentra en esta clasificación.
- Femtosatélites, que tienen una masa menor a los 100 g.

1.1.1 Cubesat

El primer satélite desarrollado íntegramente por estudiantes de la Universidad Nacional de Ingeniería es un CubeSat. Un CubeSat es un formato estandarizado para picosatélites, desarrollado por el profesor Bob Twiggs de la Universidad de Stanford con el fin de permitir a sus estudiantes completar un proyecto satelital durante su formación universitaria. Los requerimientos de diseño establecidos para un CubeSat consisten en tamaño y peso reducido, por lo que se define como un cubo de 10 cm de lado, y de un kilogramo de peso. En la Figura 1 se muestra el CubeSat Chasqui I.

Figura 1

CubeSat Chasqui I.



Nota: fuente archivo de imágenes del proyecto “Chasqui I” (Proyecto Chasqui I, 2012).

El CubeSat se lanza al espacio en un cohete como carga útil secundaria o terciaria. Esto se hace utilizando un sistema de despliegue estandarizado por la Universidad Estatal Politécnica de California. Este sistema de despliegue, que se conoce como un P-Pod (Poly-PicoSatellite Orbital Deployer, en inglés), se adjunta como carga adicional en un vehículo de lanzamiento y puede contener hasta tres satélites CubeSat de un kilogramo de masa. El picosatélite es lanzado al espacio desde el P-Pod mediante la fuerza de un muelle en el fondo del sistema de despliegue.

La ventaja de usar tecnología CubeSat es la posibilidad de lanzamiento a bajo costo, esto hace que el CubeSat represente una solución ideal para proyectos de satélites pequeños desarrollado por universidades. Gracias a la reducción de costos, el proyecto CubeSat viene siendo implementado en diferentes universidades alrededor del mundo.

1.1.2 Chasqui I

A finales del 2008 inicia el programa de satélites pequeños en el Centro de Tecnologías de Información y Comunicaciones (CTIC) de la Universidad Nacional de Ingeniería. El CTIC se planteó desarrollar una picosatélite, utilizando la tecnología CubeSat y lanzarlo al espacio, con el fin de demostrar la factibilidad de un programa espacial en el Perú. En su realización participaron profesores, ingenieros y estudiantes de varias facultades, con el apoyo de asesores y consultores técnicos. El objetivo principal fue permitir a estudiantes e ingenieros peruanos diseñar, construir y lanzar un CubeSat con el propósito de educar y adquirir experiencia en las tecnologías espaciales y la ingeniería de sistemas espaciales, particularmente en la tecnología de picosatélites. Su lanzamiento y la puesta en órbita se realizó el 18 de agosto del 2014 desde la Estación Espacial Internacional (EEI).

El trabajo fue dividido en equipos o módulos, cada uno con una determinada tarea y función, ver Figura 2. Así, se ha establecido que el programa Chasqui I se divide en 10 módulos, los cuales se describen en la Tabla 1 junto con su respectiva función.

Tabla 1

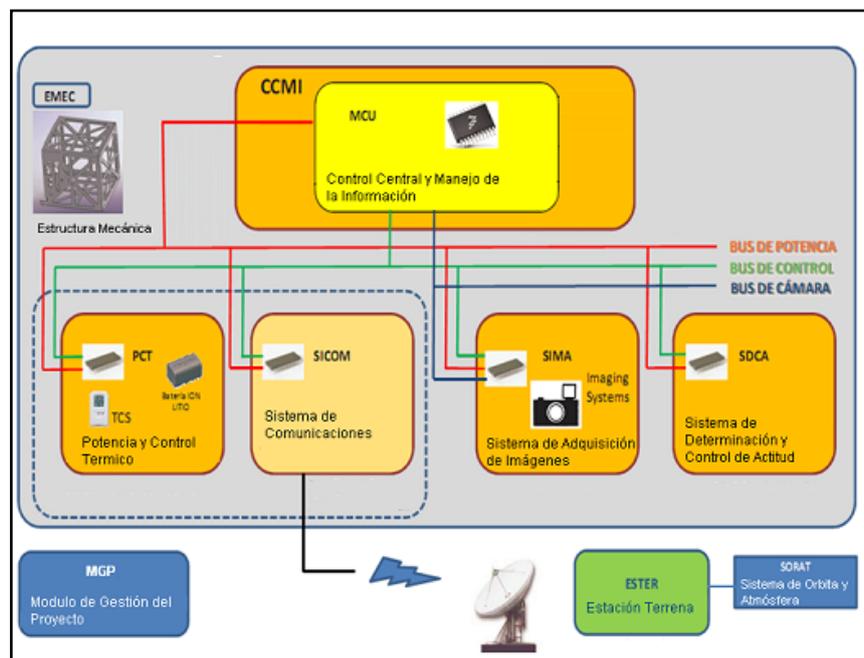
Descripción de los Módulos del Chasqui I.

| Módulo | Descripción |
|--|---|
| Control Central y Manejo de la Información (CCMI) | Controla y administra la información de los subsistemas con un bajo consumo de potencia. |
| Sistema de Adquisición de Imágenes (SIMA) | Obtiene fotos de la Tierra. |
| Potencia y Control Térmico (PCT) | Asegura el abastecimiento de energía a los otros subsistemas y mantiene la temperatura de funcionamiento de los diferentes componentes. |
| Sistema de Comunicaciones (SICOM) | Recibe los comandos desde la estación terrena y envía la información solicitada (datos de sensores o una captura de imagen). |
| Sistema de Control y Determinación de Actitud (SDCA) | Mantiene la estabilización del picosatélite y lo orienta a una dirección deseada cuando sea necesario. |
| Estructura Mecánica (EMEC) | Diseñar la estructura del satélite. |
| Estación Terrena (ESTER) | Seguimiento, telemetría y comando del Satélite. |
| Módulo de Integración y Pruebas (MIP) | Integra los subsistemas y realiza las pruebas. |
| Sistema de Órbitas y Atmósfera (SORAT) | Simula las trayectorias del Chasqui I. |

Nota: elaboración propia basado en el proyecto “Chasqui I” (Proyecto Chasqui I, 2012).

Figura 2

Módulos del picosatélite Chasqui I.



Nota: fuente archivo de imágenes del proyecto “Chasqui I” (Proyecto Chasqui I, 2012).

Las características del Chasqui I son:

- Dimensiones: 10 x 10 x 10 cm.
- Masa: 1 kg.
- Órbita: heliosincrónica a una altitud de 450-850 km (LEO).
- Tiempo de funcionamiento: 3 - 6 meses.
- Carga útil: cámara VGA y cámara NIR.
- Comunicaciones: enlace de subida UHF / enlace de bajada VHF.

1.1.3 Sistema de Determinación y Control de Orientación (SDCO)

El subsistema de determinación y control de orientación, cuyas siglas corresponden a SDCO, es el responsable de:

- Medir y controlar el movimiento angular del satélite una vez que éste se encuentre en su órbita.
- Controlar la velocidad angular del satélite para prevenir daños de la electrónica debido a giros de gran magnitud o disminución del tiempo de vida de la estructura debido a los esfuerzos desarrollados.
- Proveer la exactitud de apuntamiento necesaria para la toma de fotos (fino) y la comunicación con la estación terrena (tosco).

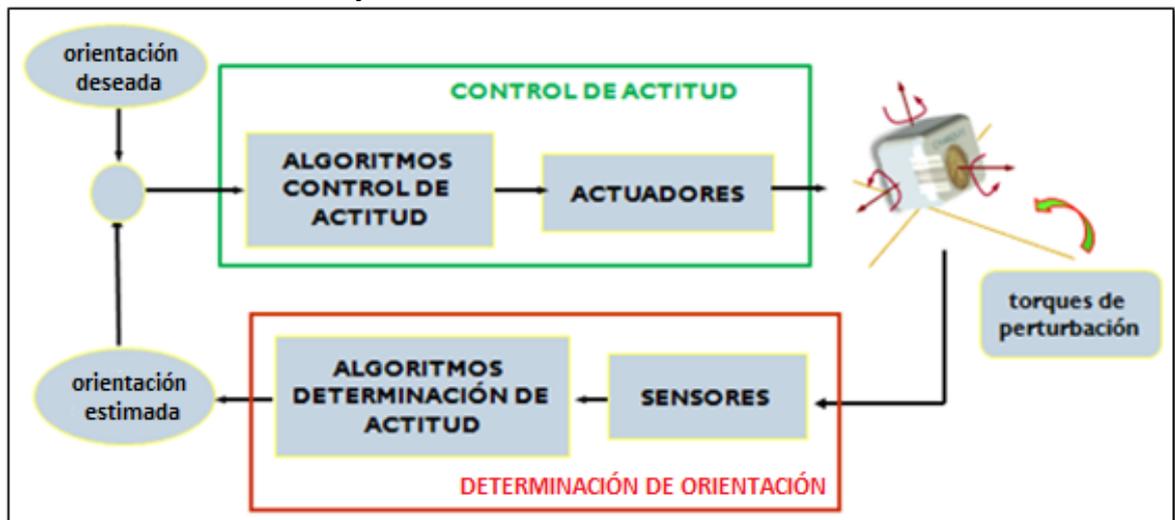
En resumen, el SDCO permite realizar las maniobras necesarias para mantener al satélite con una orientación espacial específica. El desarrollo del sistema de determinación y control de la orientación se divide en dos partes: el sistema de control de orientación (SCO), que tiene la tarea principal de mantener o cambiar la orientación del satélite, y el sistema de determinación de la orientación (SDO), cuyo propósito principal es determinar la orientación actual del satélite mediante el uso de sensores y modelos matemáticos del entorno utilizados como referencia para las mediciones. Es importante destacar que el SDCO debe cumplir todos sus objetivos dentro de sus limitadas restricciones de diseño para masa, tamaño y consumo de energía. En la Figura 3 se muestra el funcionamiento del SDCO.

El pequeño tamaño del satélite impone varias restricciones en todos los subsistemas del satélite. Para el caso del SDCO, podemos mencionar que sus principales restricciones son las siguientes:

- Masa < 150 gramos.
- Consumo de energía < 1 Watt.
- Volumen < 150 cm³.

Figura 3

Sistema de Determinación y Control de Orientación.



Nota: elaboración propia basado en el proyecto “Chasqui I” (Proyecto Chasqui I, 2012)

Aparte de estas restricciones claramente definidas, también se pueden mencionar las limitaciones de temperatura y capacidad de procesamiento. Debido a la variación de temperaturas que existe a lo largo de la órbita del satélite, de -100 0C a +40 0C, se debe considerar la inclusión de control térmico (ya sea pasivo o activo). Este control termal garantiza que el hardware del SDCO funciona dentro de sus límites de operación. Por otro lado, las restricciones de poco tamaño y energía limitada, impiden que el satélite pueda contar con una capacidad computacional similar a la de una PC, debido a esto una simplificación de los algoritmos es necesaria.

1.2 Descripción del problema de investigación

La exactitud de la determinación de la orientación espacial de un satélite es un aspecto crítico en muchas de las aplicaciones espaciales. El sistema de determinación y control de orientación, permite realizar las maniobras necesarias para mantener al satélite con una orientación espacial específica que permita proveer la exactitud de apuntamiento necesaria para la toma de fotos y la comunicación con la estación terrena. El sistema de control de orientación (SCO), que permite mantener o cambiar la orientación del satélite, basa su funcionamiento en la información relacionada con la orientación del satélite, la cual es determinada por el sistema de determinación de orientación (SDA), mediante el uso de sensores y algoritmos. Las restricciones de poco tamaño y energía limitada, impiden que el satélite pueda contar con una capacidad computacional similar a la de una PC, debido a esto una simplificación de los algoritmos es necesaria.

1.3 Objetivos del estudio

1.3.1 *Objetivo general*

Desarrollar y verificar un algoritmo de fusión sensorial basado en el filtro de Kalman extendido utilizando un microcontrolador RP2040 para la determinación de orientación del picosatélite "Chasqui I".

1.3.2 *Objetivos específicos*

Los objetivos específicos de la Tesis son:

- Elaborar y validar en Matlab/Simulink los modelos del entorno espacial del sistema de determinación de orientación del picosatélite "Chasqui I".
- Elaborar y validar en Matlab/Simulink los modelos de los sensores del sistema de determinación de orientación del picosatélite "Chasqui I".
- Elaborar y seleccionar en Matlab/Simulink los algoritmos de fusión sensorial para la determinación de la orientación del picosatélite "Chasqui I".
- Implementar y verificar los algoritmos del sistema de determinación de orientación (SDA) en el microcontrolador RP2040.

1.4 Justificación

Los picosatélites tipo CubeSat permiten desarrollar o probar nuevas tecnologías en diversas aplicaciones, como las relacionadas al monitoreo de la Tierra. Determinar la orientación actual de un picosatélite es un requisito fundamental para controlar que la cámara fotográfica abordo apunte hacia la Tierra. Esta tarea no es simple, ya que la selección de sensores y algoritmos se encuentra restringida en tamaño, peso y consumo energético. Por lo expuesto, esta tesis describe el desarrollo y verificación de un algoritmo de fusión sensorial para la determinación adecuada de orientación del picosatélite Chasqui I, bajo la restricción de funcionamiento en un microcontrolador de bajo consumo.

1.5 Limites

El desarrollo del trabajo se llevó a cabo en las instalaciones del Centro de Tecnologías de Información y Comunicaciones (CTIC-UNI) y el Instituto Nacional de Investigación y Capacitación de Telecomunicaciones del Perú (INICTEL-UNI) entre los años 2011 y 2013. Durante el año 2022 se realizaron actualizaciones y ajustes a los modelos para asegurar el correcto funcionamiento en misiones actuales del algoritmo implementado.

1.6 Antecedentes investigativos

1.6.1 Antecedentes internacionales

Respecto a las principales contribuciones en el desarrollo de sistemas de determinación de orientación, Ose (2004) en el proyecto nCube, presenta una de los primeros trabajos sobre implementación de sistemas de determinación de orientación basados en el filtro de Kalman extendido como estimador de estados utilizando sensores solares y magnetómetros en combinación con modelos de referencia. Por su parte Bhanderi (2005) pone énfasis en el estudio del fenómeno del Albedo, ya que afecta a las medidas entregadas por los sensores solares y propone un modelo que es utilizado junto al filtro de Kalman de lo desconocido (Unscented). Rohde (2007), implementa en un microcontrolador el filtro Kalman extendido mejorado con el método de Gauss-Newton.

Tabla 2*Sistemas de determinación de orientación utilizados en Proyectos CubeSat.*

| Organización | CubeSat | Lanz. | SDA |
|---|----------------|--------------|--|
| Instituto de Tecnología de Tokio | CUTE-I | 2003 | Giroscopio MEMS, acelerómetro de 2 ejes, sensor de sol CMOS |
| Universidad de Toronto | CanX-I | 2003 | Sensor de horizonte y sensor de estrella, magnetómetro y GPS. |
| Universidad Técnica, Dinamarca | DTUsat | 2003 | Sensor de sol MEMS y magnetómetro. |
| Universidad de Aalborg | AAU CubeSat | 2003 | Sensor de sol, magnetómetro. |
| Universidad de Ciencia y Tecnología Noruega | NCube 2 | 2005 | Magnetómetro. |
| Universidad de Kansas | KUTESat | 2006 | Magnetómetro y sensor de sol. |
| Universidad Cornell | ICE Cube | 2006 | Magnetómetro, receptor GPS. |
| Universidad de Nihon | SEEDS | 2006 | Giroscopio y magnetómetro. |
| Universidad Aeronáutica Hankuk | HAUSAT | 2006 | Sensor de sol y un receptor GPS. |
| Universidad de Ciencia y Tecnología Noruega | NCube 1 | 2006 | Magnetómetro |
| Instituto Politécnico de California | CP2 | 2006 | Magnetómetro |
| Instituto Politécnico de California | CP1 | 2006 | Sensor de Sol |
| Universidad Cornell | ICE Cube 2 | 2006 | Magnetómetro, receptor GPS. |
| Instituto Politécnico de California | CP4 | 2007 | Magnetómetro. |
| Instituto Politécnico de California | CP3 | 2007 | Magnetómetros. |
| Universidad Sergio Arboleda | Libertad 1 | 2007 | Receptor GPS. |
| Fachhochschule Aachen, Alemania | Compass One | 2008 | Magnetómetro, sensores de sol. |
| Universidad Nihon , Japón | SEEDS (2) | 2008 | Giroscopio y magnetómetro. |
| Universidad Estatal Politécnica de California. | CP6 | 2009 | Magnetómetros. |
| Universidad de Trieste, Italia | AtmoCube | 2010 | Magnetómetro y receptor GPS |
| Universidad de Bucharest, Rumania | Goliat | 2010 | Magnetómetro, receptor GPS |
| EPFL (Polytechnical School of Lausanne), Suiza. | SwissCube | 2010 | Sensores de Sol, magnetómetro y giroscopio. |
| Universidad de Würzburg, Alemania | UWE-3 | 2013 | Sensores de Sol, magnetómetro y giroscopio MEMS. |
| Universidad de la República, Uruguay | Antelsat | 2014 | Sensores de Sol tipo fotodiodo, magnetómetro y giroscopio MEMS. |
| Universidad de Würzburg, Alemania | UWE-4 | 2018 | Sensores de Sol basados en cámaras CMOS, magnetómetro y giroscopio MEMS. |

Nota: fuente elaboración propia basado en (Nanosats, 2023).

La Universidad de Wurzburg (Alemania), ha realizado hasta el momento 4 proyectos de picosatélites denominados UWE. Ravandor (2008) detalla el diseño, simulación e implementación del software de soporte para el Sistema de Determinación de Orientación del cubesat UWE-2, resaltando la incorporación de giroscopios electrónicos. Ghuffar (2009), describe el desarrollo del SDO del UWE-3, implementando el modelo de órbitas SGP4 en el microcontrolador y proponiendo una variante del filtro de Kalman denominada isotrópico. En el cubesat UWE-4 se agregan propulsores que permiten realizar maniobras que afectan la órbita seguida razón por la cual se implementa un estimador de órbita utilizando magnetómetros, sensores solares y parámetros orbitales (Rathinam, 2015). En la Tabla 2 se lista los sensores utilizados en SDA de anteriores proyectos CubeSat.

Investigaciones previas han demostrado que el filtro de Kalman es un método apropiado para la estimación de orientación de pequeños satélites fusionando la información de distintos sensores. Por ejemplo, Asundi et al. (2021) describió una implementación de Murrell del filtro Kalman extendido (EKF) para múltiples configuraciones de sensores de actitud (sensores solares, magnetómetro y giroscopio). Baroni (2020) presentó un método de estimación de actitud basado en un filtro Kalman unscented (UKF), utilizando paneles solares como sensor solar, magnetómetros de bajo costo y sensores giroscópicos. Los resultados del UKF fueron comparados con el EKF en simulación, mostrando un mejor desempeño, aunque con un gran incremento en el costo computacional. Otras investigaciones se centran en reducir el costo computacional conservando la precisión del estimador. Por ejemplo, Mmopelwa et al. (2022) propuso un procedimiento para calcular la orientación utilizando un método híbrido que incorporan tanto el EKF como el método algebraico SVD (Valor singular de descomposición) para reducir el tiempo de cálculo. Baroni et al. (2023) evaluó el desempeño de un filtro de Kalman de diferencia central, utilizando una interpolación polinomial para evitar calcular estas matrices jacobianas, obteniendo resultados comparables con el EKF, aunque con un mayor tiempo de procesamiento. Finalmente, Mmopelwa et al. (2023), considerando las fallas en

las medidas de los sensores, propusieron un filtro de Kalman extendido adaptativo que puede estimar dinámicamente la matriz de covarianza del error predicho y la matriz de covarianza del ruido de medición utilizando un enfoque de maximización de expectativas.

Investigaciones previas han explorado la utilización de sensores no tradicionales para la determinación de orientación de pequeños satélites. Por ejemplo, Wang et al. (2019) propusieron un enfoque que utiliza los sistemas de comunicación y conjuntos de antenas existentes en CubeSats vecinos para la determinación de orientación de estos. Más adelante, Papotti (2021) describió el desarrollo de un Sistema de Determinación de Actitud (ADS) basado en un seguidor de estrellas, utilizando hardware comercialmente disponible (COTS) y software de código abierto. Respecto a la utilización de unidades de medición inercial (IMU) comerciales, Piotrowski (2022) analizó y comparó el rendimiento de tres IMUs comerciales de bajo costo: BNO055, ICM20948 y LSM9DS1, seleccionando el BNO055 para el CubeSat MOVE-III. Finalmente, Haydon (2023) probó en simulación el algoritmo "Giroscopio virtual", reemplazando un giroscopio estándar con una serie de acelerómetros distribuidos espacialmente para una misión CubeSat de 1U, obteniendo resultados en el EKF inferiores al uso de un giroscopio real.

En los últimos años en Sudamérica, se han desarrollado proyectos CubeSat, como el Colombia I, que simula en MatLab un EKF con una aproximación de Runge-Kutta (Castellanos & Aparicio, 2014). En Uruguay, se ha desarrollado el proyecto AntelSat que consiste de un CubeSat de 2 cuerpos, implementando un filtro de Kalman Unscented (UKF) en un microcontrolador STM32F303CC (Tassano, 2015).

1.6.2 Antecedentes nacionales

En Perú, en los últimos años, se han ido desarrollando nuevos proyectos de CubeSats en las universidades, como el PUCP-Sat, UAP-Sat y el UNSAAC-Sat.

La Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), en 2013, lanzó dos pequeños satélites, el nanosatélite PUCP-Sat-1 y el femtosatélite Pocket-PUCP. El PUCP-Sat-1 se utilizó para realizar experimentos de radioastronomía, mientras que el Pocket-PUCP fue el primer satélite peruano en ser liberado en el espacio (Vilchez, 2016).

La Universidad Alas Peruanas (UAP) lanzó su primer nanosatélite, el UAP-Sat 1, en 2014. El UAP-Sat 1 se desarrolló utilizando el estándar CubeSat y tiene sensores de temperatura a bordo. Su misión principal es una actividad educativa (Roman-Gonzales & Vargas-Cuentas, 2015).

La Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco (UNSAAC) está desarrollando su primer nanosatélite. La misión tiene como objetivo identificar áreas con menor cobertura de nubes buscando áreas ideales para la instalación de paneles solares. La UNSAAC también tiene otro proyecto llamado “Estudio de la termosfera: adquisición y análisis de datos de misiones satelitales (proyecto QB50)”. Este proyecto apoya la misión QB50 para estudiar los efectos atmosféricos en la termosfera inferior (Lavilla, 2017).

La Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa (UNSA), también evidencia desarrollo de pequeños satélites. Por ejemplo, Mamani (2019) desarrolló de una plataforma de pruebas de control y determinación de actitud para pico-satélites CubeSat, y García et al. (2020) evaluaron estrategias de control no lineal para maniobras de orientación en un CubeSat con tres ruedas de reacción.

1.7 Esquema general de la Tesis

En el capítulo 1 se describe el proyecto Chasqui I y la motivación para realización de esta tesis. Por último, se describe el esquema de esta tesis, correspondiente a la descripción de la Figura 4.

En el capítulo 2 se hace referencia al marco teórico de la tesis, donde se describen la notación utilizada en el documento, los diferentes sistemas de referencia utilizados para definir los modelos matemáticos necesarios y las diversas herramientas matemáticas de la representación de orientación.

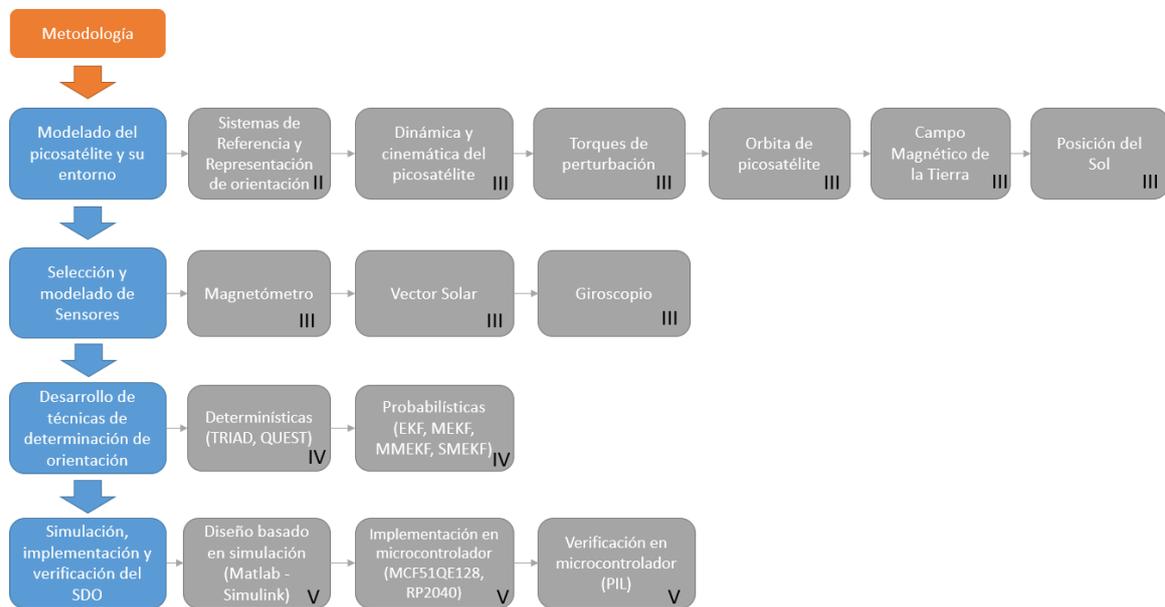
En el capítulo 3 se describen los sensores seleccionados y los modelos matemáticos del entorno del satélite (campo magnético de la Tierra, la órbita del satélite y el vector de sol). Además, se incluye el modelo matemático de la dinámica y la cinemática del satélite.

En el capítulo 4 se presentan los algoritmos de fusión sensorial utilizados para la determinación de orientación basados en vectores de medición y de referencia. Se describen algoritmos determinísticos y probabilísticos, con énfasis en el Filtro de Kalman y sus variantes. Finalmente, se presenta la aplicación del Filtro de Kalman Extendido Discreto como algoritmo principal del SDO. Se describen el método de inicialización y las simplificaciones realizadas en el filtro con el propósito de su implementación en el microcontrolador.

En el capítulo 5 se presentan los resultados de la validación del simulador del entorno del picosatélite y los algoritmos del SDO en Matlab/Simulink. Finalmente, se describe la implementación y verificación de los algoritmos del SDO en el microcontrolador del Chasqui I.

Figura 4

Esquema general de la Tesis.



Nota: elaboración propia (2023).

Capítulo II. Marcos teórico

Para definir los modelos matemáticos y usar las técnicas de determinación de orientación desarrolladas en esta tesis se requiere establecer la notación apropiada y destacar las definiciones fundamentales en la representación de orientación. Incluyendo los diferentes sistemas de referencia utilizados, las transformaciones de rotación y su aplicación en las transformaciones entre sistemas de referencia.

2.1 Sistemas de referencia

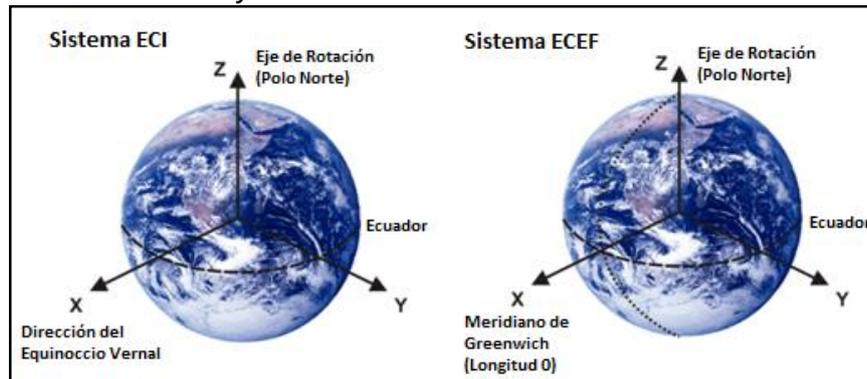
La orientación del picosatélite se describe como la relación entre dos sistemas o marcos de referencia. Además, las diferentes mediciones y modelos se establecen en distintos sistemas de referencia, luego la transformación de uno a otro debe ser única y bien definida. En esta sección se definen varios sistemas de referencia utilizados habitualmente en la navegación de satélites.

2.1.1 Sistema de referencia inercial centrado en la Tierra (ECI)

El sistema de referencia ECI (Earth-centered inertial), es un conjunto de sistemas de referencia los cuales tienen el origen en el centro de la Tierra con el eje Z apuntando hacia el Polo Norte geográfico, el eje X apuntando en dirección al Equinoccio Vernal Υ , que es el punto donde el plano de la eclíptica cruza al plano del Ecuador terrestre de Sur a Norte, y el eje Y completando el sistema coordenado Cartesiano siguiendo la regla de la mano derecha. El sistema es fijado en el espacio inercial, de forma que es no acelerado y por ende las leyes del movimiento dadas por Newton son válidas, permitiendo que las ecuaciones que describen el movimiento orbital sean simples. Además, el ECI es usado para especificar la dirección de objetos celestes (Ghuffar, 2009). En la Figura 5 se muestra la disposición de este sistema.

Figura 5

Sistemas de Referencia ECI y ECEF.



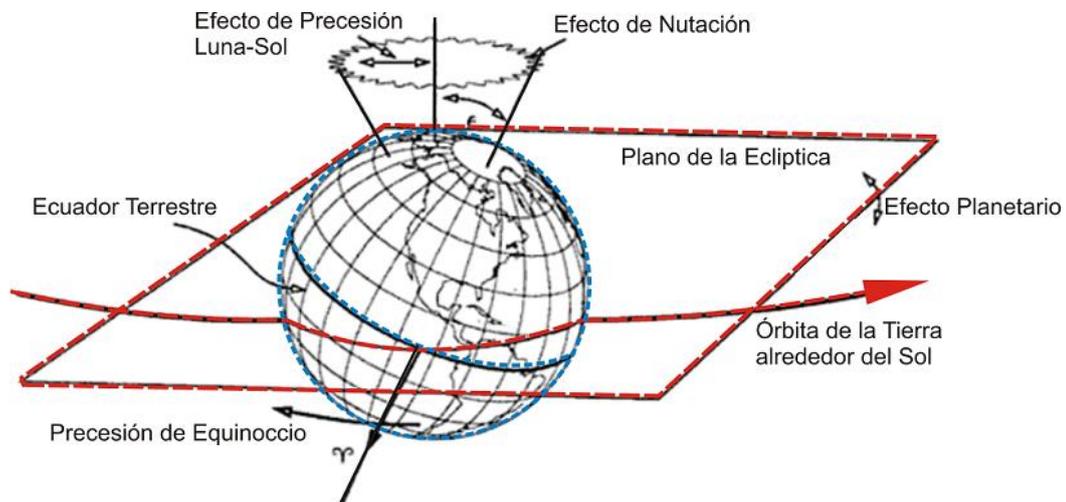
Nota: elaboración propia (2023).

La Tierra está acelerando a medida que viaja en su órbita alrededor del Sol, debido a la interacción gravitacional con otros cuerpos como la Luna, originando que la órbita sea cambiante y por ende el Equinoccio Vernal también cambia. Esta interacción también origina que la Tierra se tambalee al girar sobre su eje, causando que el plano ecuatorial terrestre no sea fijo (Ghuffar, 2009). Por lo tanto, al definir el sistema ECI se debe especificar una fecha determinada época. En esta tesis se utiliza un conjunto de sistemas ECI basados en valores verdaderos (“true”, del inglés) y promediados (“mean”, del inglés) del ecuador y el Equinoccio Vernal. El término “mean” hace referencia al promedio de las oscilaciones periódicas de corto plazo de la Tierra, es decir la precesión y la nutación (Vallado, Crawford, Hujsak & Kelso, 2006), ver Figura 6. Algunas variantes de estos marcos de referencia son:

- Sistema J2000: Es comúnmente usado como sistema ECI. Está definido usando el Ecuador promedio de la Tierra y el Equinoccio Vernal el 1 de enero 2000 a las 12:00:00.00 tiempo terrestre.
- Sistema TOD (True of Date): Es definido usando el Ecuador Verdadero y el Equinoccio en la fecha dada.
- Sistema MOD (Mean of Date): Es definido usando el ecuador promedio y el equinoccio en la fecha dada.
- Sistema TEME (True Equator Mean Equinox): Es definido usando el ecuador verdadero y el Equinoccio promedio, aunque no usa el Equinoccio promedio convencional.

Figura 6

Efecto de las fuerzas de perturbación sobre la Tierra.



Nota: adaptado de Vallado (2006).

2.1.2 Sistema de referencia terrestre centrado en la Tierra (ECEF)

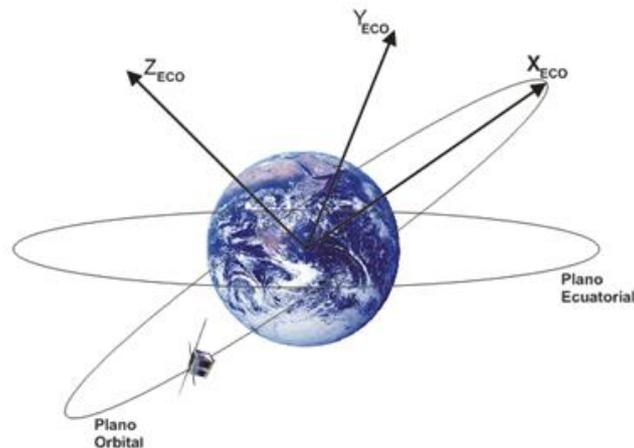
El sistema de referencia ECEF (Earth Centered Earth Fixed), tiene su origen fijado en el centro de la Tierra y los ejes X e Y giran con la Tierra sobre el eje Z en relación al sistema de referencia inercial ECI. La frecuencia de la rotación es de aproximadamente $\omega_E = 7.2921e-5$ rad/s (NIMA, 1984). El eje X apunta hacia la intersección entre el Meridiano de Greenwich y el Ecuador, que representa cero grados de longitud y cero grados de latitud, y el eje Y completa el sistema coordenado cartesiano siguiendo la regla de la mano derecha. En la Figura 5 se muestra la disposición de este sistema.

2.1.3 Sistema de referencia orbital centrado en la Tierra (ECO)

Este es el sistema en el que se describen los elementos Keplerianos. El centro del sistema coincide con el de la Tierra, con el eje X apuntado hacia el perigeo, el eje Y a lo largo del semieje menor y eje Z perpendicular al plano de la órbita. En la Figura 7 se muestra la disposición del sistema ECO (Earth-centered orbital).

Figura 7

Sistema de referencia ECO.



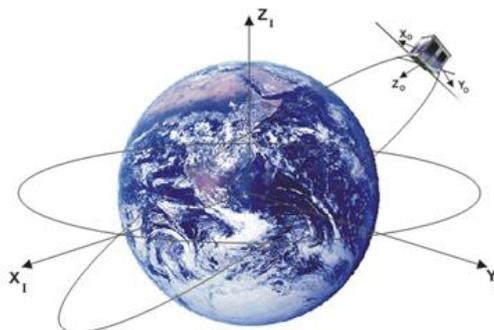
Nota: elaboración propia (2023).

2.1.4 Sistema de referencia orbital centrado en la órbita (OCO)

El sistema orbital OCO (Orbit centered orbital), tiene su origen en el centro de masa del satélite. El origen rota en relación al sistema ECI con una velocidad angular ω_o , la frecuencia orbital, dependiendo de la altitud de la órbita. El eje X apunta en la dirección del movimiento tangencial a la órbita. Nótese que, la tangente es perpendicular al radio vector sólo en el caso de una órbita circular. En órbitas elípticas, el eje X no se alinea con el vector de velocidad del satélite. El eje Z del sistema apunta hacia el centro de la Tierra, y el eje Y completa el sistema coordenado cartesiano siguiendo la regla de la mano derecha. En la Figura 8 se muestra la disposición de este sistema.

Figura 8

Sistema de referencia orbital.



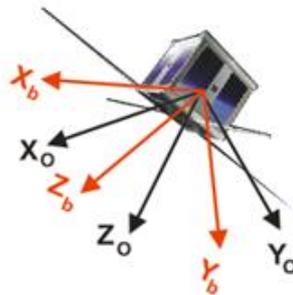
Nota: elaboración propia (2023).

2.1.5 Sistema de referencia fijado al satélite (BCBF)

El sistema fijado al satélite o BCBF (Body Centered Body Fixed), se fija con el satélite, y su origen se sitúa en el centro de masa del satélite (Vallado et al., 2006). El eje X apunta hacia adelante, el eje Z normalmente apunta hacia el nadir del satélite y el eje Y completa el sistema de coordenadas cartesianas. Para el caso de que los ejes del sistema BCBF coincidan con los ejes principales del picosatélite, la matriz de inercia se convierte en una matriz diagonal, es decir, los productos de inercia se desvanecen. En la Figura 9 se muestra la disposición de este sistema en relación con el sistema orbital.

Figura 9

Sistema de referencia BCBF.



Nota: elaboración propia (2023).

2.2 Representación de orientación

La orientación de un cuerpo rígido se refiere a la orientación relativa del sistema fijado al cuerpo respecto un sistema de referencia, como el ECI u OCO, y puede ser descrita por una rotación utilizando ángulos de Euler o cuaterniones. A continuación, se describen las diferentes formas de representar la orientación y las herramientas de conversión entre los sistemas de referencia.

2.2.1 Vectores

Los vectores, denotados por \vec{u} , son útiles para describir magnitudes físicas, ya que representan tanto magnitud, $|\vec{u}|$, como dirección (Rogers, 2003). Los vectores serán descritos en relación a un sistema coordenado Cartesiano a definido por los vectores

unitarios ortogonales \vec{a}_1 , \vec{a}_2 y \vec{a}_3 a lo largo de los ejes x_1 , x_2 y x_3 . El vector \vec{u} puede expresarse como una combinación lineal de los vectores unitarios ortogonales, así:

$$\vec{u} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3, \quad (1)$$

donde u_i es la componente de \vec{u} en el marco \mathbf{a} . Una descripción alternativa del vector, la cual será usada en esta tesis, es en la forma vector de coordenadas donde las coordenadas de los vectores se escriben como un vector columna:

$$u^{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde el superíndice \mathbf{a} denota el marco de coordenadas en que se expresa el vector.

Producto escalar. También conocido como producto interno, es una operación definida sobre un espacio vectorial cuyo resultado es una magnitud escalar. Es obtenido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = \mathbf{u}^T \mathbf{v}. \quad (3)$$

Vector producto cruz. También conocido como el vector producto vectorial \times , es obtenido por:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Matriz producto cruz. Es una matriz antisimétrica definida como:

$$S(\mathbf{u}) = [\mathbf{u} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

y tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u}) &= -S(-\mathbf{u}) = -S^T(\mathbf{u}) \\ S(\mathbf{u})\mathbf{v} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ S(\mathbf{u})\mathbf{v} &= -S(\mathbf{v})\mathbf{u} \end{aligned} \quad (6)$$

2.2.2 Matriz de rotación

En esta sección se presentan las matrices de rotación y sus propiedades. Las definiciones son obtenidas de Kuipers (1999) y Rogers (2003).

Transformación de coordenadas para vectores. Los modelos utilizados en esta tesis incorporan diferentes sistemas de referencia, y es necesario convertir un vector de un sistema hacia otro. Esto puede realizarse mediante la introducción de la transformación de coordenadas de un vector en el marco **b** hacia el marco **a**:

$$u^a = R_b^a u^b, \quad (7)$$

donde R_b^a es llamada la matriz de rotación o matriz de transformación de **b** hacia **a**. La matriz de rotación es también conocida como matriz de cosenos directores, cuyos componentes son los ángulos entre los vectores de base respectivos:

$$R_b^a = \{\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j\} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{b_1 a_1} & \cos \theta_{b_1 a_2} & \cos \theta_{b_1 a_3} \\ \cos \theta_{b_2 a_1} & \cos \theta_{b_2 a_2} & \cos \theta_{b_2 a_3} \\ \cos \theta_{b_3 a_1} & \cos \theta_{b_3 a_2} & \cos \theta_{b_3 a_3} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

Propiedades de la matriz de rotación. La matriz de rotación es ortogonal y satisface:

$$R_b^a = (R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T, \quad (9)$$

Las matrices de rotación pertenecen al conjunto de matrices denotadas por $SO(3)$ (special orthogonal group of order 3), definido por:

$$SO(3) = \{R | R \in R^{3 \times 3}, R^T R = I \wedge \det(R) = 1\}, \quad (10)$$

Una matriz de rotación también puede ser descrita como una composición de rotaciones, es decir, un producto de dos o más matrices de rotación. Para el caso de tres rotaciones tenemos:

$$R_d^a = R_b^a R_c^b R_d^c. \quad (11)$$

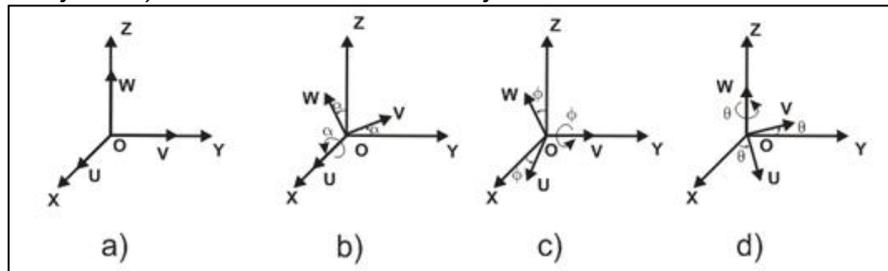
Rotaciones simples. Las rotaciones simples sirven para rotar un sistema de referencia alrededor de los ejes principales cumpliendo la regla de la mano derecha. Las tres rotaciones simples se muestran en la Figura 10 y tienen por matrices de rotación:

$$\begin{aligned}
 R(x, \alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 R(y, \phi) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \\
 R(z, \theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Estas matrices de rotación están relacionadas con las matrices que llevan un vector de un sistema hacia otro por la relación inversa.

Figura 10

Rotaciones Simples: a) Sin rotación. b) Rotación alrededor del eje X. c) Rotación alrededor del eje Y. d) Rotación alrededor del eje Z.



Nota: elaboración propia (2023).

2.2.3 Ángulos de Euler

Todo sistema fijado al cuerpo cuya orientación se quiere describir, puede definirse con respecto a un sistema de referencia mediante 3 ángulos: $[\phi \ \theta \ \psi]$, ver Figura 11, denominados ángulos de Euler (Barrientos et al., 1997). Existen diversas configuraciones de los ángulos de Euler según los ejes sobre los que se realicen los giros. En el caso de un satélite los ángulos son producto de las rotaciones alrededor de los ejes X, Y y Z llamados roll, pitch y yaw, respectivamente. Estos ángulos describen la orientación del satélite en relación con el sistema orbital. Usando estos parámetros, una matriz de rotación

que describe una rotación de sistema orbital (o) hacia el sistema fijado al satélite (b) se puede descomponer en tres rotaciones en torno a tres ejes ortogonales:

$$R_o^b = R_{z,y,x}(\psi, \theta, \phi) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi), \quad (13)$$

donde:

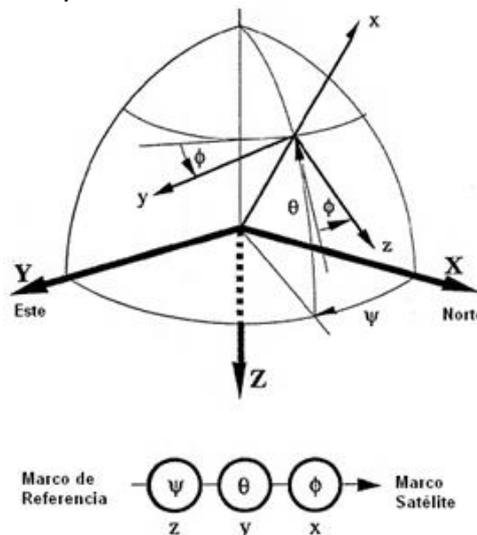
$$\begin{aligned} R_x(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ R_y(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\ R_z(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Quedando finalmente:

$$R_{z,y,x}(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \phi & +\cos \psi \cos \phi & \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \\ +\sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi & \end{bmatrix}, \quad (15)$$

Figura 11

Secuencia de Ángulos de Euler para el Satélite.



Nota: adaptado de (Kuipers, 1999).

Se puede observar que la matriz de rotación posee nueve parámetros, aunque solo son necesarios tres para obtener la orientación. También se puede observar que existe singularidades para $\theta = \mp 90^\circ$. En consecuencia, es necesario utilizar otra representación que solucione estos inconvenientes.

Cuando los ángulos de Euler son pequeños, el coseno del ángulo es aproximadamente igual a uno y el seno del ángulo es aproximadamente igual al ángulo, esto presenta un caso interesante para la matriz de orientación (Kuipers, 1999). La matriz de orientación en este caso se aproxima adecuadamente por:

$$R_{z,y,x}(\psi, \theta, \phi) \approx \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} = I_{3 \times 3} + [\alpha \times], \quad (16)$$

donde $\alpha = [\phi \ \theta \ \psi]^T$, y $I_{3 \times 3}$ es una matriz identidad de 3 x 3.

2.2.4 Cuaterniones

Un cuaternión q está constituido por cuatro componentes ($q_0, q_1, q_2, y q_3$) que representan las coordenadas del cuaternión en una base $\{\mathbf{e}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Es común denominar parte escalar o real del cuaternión a la componente en \mathbf{e} o q_0 , y parte vectorial o compleja al resto de componentes (Kuipers, 1999). La forma de representación es la siguiente:

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad (17)$$

$$q = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T = [q_0 \ \varrho^T]^T. \quad (18)$$

En el caso de ángulos pequeños, la parte vectorial del cuaternión es aproximadamente igual a la mitad de los ángulos de Euler, de modo que:

$$\varrho \approx \alpha/2, \quad q_0 \approx 1. \quad (19)$$

Las siguientes propiedades son obtenidas de Kuipers (1999) y Rogers (2003).

Producto de cuaterniones. El producto de dos cuaterniones unitarios (Chou, 1992), p y q , es un cuaternión unitario definido por:

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_0 \\ p \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ \varrho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - p^T \varrho \\ p_0 \varrho + q_0 p + S(p) \varrho \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 \\ q_0 p_1 + q_1 p_0 - q_2 p_3 + q_3 p_2 \\ q_0 p_2 + q_1 p_3 + q_2 p_0 - q_3 p_1 \\ q_0 p_3 - q_1 p_2 + q_2 p_1 + q_3 p_0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Norma, conjugada e inversa de un cuaternión. Definimos $N(q)$, q^* y q^{-1} como la norma, conjugada e inversa de un cuaternión, respectivamente (Kuipers, 1999). Cumpliéndose las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} q^* &= [q_0 \quad -q]{}^T = [q_0 \quad -q_1 \quad -q_2 \quad -q_3]{}^T, \\ N(q) &= \sqrt{q^* \otimes q}, \\ q^{-1} &= q^* / N(q), \\ q \otimes q^{-1} &= 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Cuaternión unitario. Un cuaternión unitario satisface las siguientes propiedades:

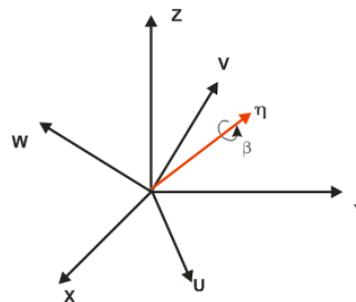
$$q^T \otimes q = q_0^2 + q^T q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (23)$$

Par de rotación. La representación de la orientación de un sistema fijado al satélite con respecto a un sistema de referencia también puede realizarse mediante la definición de un vector unitario η (η_1, η_2, η_3) y un ángulo de giro β tal que el sistema fijado al satélite corresponda al sistema de referencia girando un ángulo β sobre el eje η , ver Figura 12.

$$q = [q_0 \quad \varrho^T]{}^T = Rot(\eta, \beta) = \left[\cos \frac{\beta}{2} \quad \eta \sin \frac{\beta}{2} \right]{}^T, \quad (24)$$

Figura 12

Par de rotación.



Nota: elaboración propia (2023).

donde \mathbf{q} es un cuaternión unitario, siendo que q_0 y \mathbf{q} son conocidos como los parámetros de Euler. La parametrización de cuaterniones es preferida para la representación de orientación por aspectos computacionales. Tiene cuatro parámetros y no hay singularidades.

Rotación de sistemas coordenados. La rotación también puede ser escrita en términos de cuaterniones como:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}^b \end{bmatrix} = \mathbf{q}^* \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}^a \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}, \quad (25)$$

donde \mathbf{u}^b es un vector en el sistema \mathbf{b} y \mathbf{u}^a es el mismo vector en el sistema \mathbf{a} .

Matriz de rotación y cuaterniones. La matriz de rotación R_a^b puede ser escrita en términos de cuaterniones:

$$\mathbf{u}^b = R_a^b \mathbf{u}^a = \begin{bmatrix} (1 - 2q_2^2 - 2q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & (1 - 2q_1^2 - 2q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & (1 - 2q_1^2 - 2q_2^2) \end{bmatrix} \mathbf{u}^a, \quad (26)$$

donde \mathbf{u}^b es un vector en el sistema \mathbf{b} y \mathbf{u}^a es el mismo vector en el sistema \mathbf{a} .

Asimismo, los componentes del cuaternión puede ser obtenidos a partir de R_a^b o R utilizando cualquiera de las siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_0 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{11} + R_{22} + R_{33}} & q_1 &= \frac{1}{4q_0} (R_{23} - R_{32}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_0} (R_{31} - R_{13}) & q_3 &= \frac{1}{4q_0} (R_{12} - R_{21}) \end{aligned}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{11} - R_{22} - R_{33}} & q_2 &= \frac{1}{4q_1} (R_{12} + R_{21}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_1} (R_{13} + R_{31}) & q_0 &= \frac{1}{4q_1} (R_{23} - R_{32}) \end{aligned}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - R_{11} + R_{22} - R_{33}} & q_1 &= \frac{1}{4q_2} (R_{21} + R_{12}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_2} (R_{23} + R_{32}) & q_0 &= \frac{1}{4q_2} (R_{31} - R_{13}) \end{aligned}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} q_3 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - R_{11} - R_{22} + R_{33}} & q_1 &= \frac{1}{4q_3} (R_{31} + R_{13}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_3} (R_{32} + R_{23}) & q_0 &= \frac{1}{4q_3} (R_{12} - R_{21}) \end{aligned}. \quad (30)$$

La exactitud de los componentes dependerá del primer componente calculado. Según Shuster (1993), la solución adecuada se obtiene a partir del conjunto de ecuaciones con mayor valor dentro de la raíz cuadrada del primer componente.

Las rotaciones sucesivas pueden ser escritas como:

$$R_a^c = R_b^c R_a^b = R(p)R(q) = R(p \otimes q). \quad (31)$$

2.2.5 Velocidad Angular

El vector velocidad angular de **b** relativo a **a** obtenido en el sistema **a**, denotado por ω_{ab}^a , es la razón de cambio de la matriz de rotación R_b^a (Rogers, 2003). Partiendo de la relación de ortogonalidad ($R_b^a R_a^b = I$) y derivando respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(R_b^a R_a^b) = \dot{R}_b^a R_a^b + R_b^a \dot{R}_a^b = 0. \quad (32)$$

Usando la matriz antisimétrica se puede verificar, (Svartveit, 2003):

$$S(\omega_{ab}^a) = \dot{R}_b^a R_a^b = \dot{R}_a^b (R_b^a)^T = (R_b^a \dot{R}_a^b)^T, \quad (33)$$

$$R_b^a \dot{R}_a^b = -\dot{R}_b^a R_a^b = -S(\omega_{ab}^a) = (S(\omega_{ab}^a))^T = ((R_b^a \dot{R}_a^b)^T)^T. \quad (34)$$

Post-multiplicando por R_b^a a la Ecuación 24 y por R_a^b a la Ecuación 25:

$$\dot{R}_b^a = S(\omega_{ab}^a) R_b^a = R_b^a S(\omega_{ab}^a) \quad (35)$$

$$\dot{R}_a^b = -R_a^b S(\omega_{ab}^a) = -S(\omega_{ab}^a) R_a^b. \quad (36)$$

y por propiedad de la matriz antisimétrica se obtiene:

$$\dot{R}_b^a = \omega_{ab}^a \times R_b^a. \quad (37)$$

En general se puede denotar el vector velocidad angular ω_{ca}^b como una rotación del sistema **a** respecto al sistema **c** visto en el sistema **b**.

Las velocidades angulares se pueden sumar siempre y cuando se encuentren descritos en el mismo sistema de referencia. Por ejemplo, se cumple:

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ob}^b + \omega_{io}^b. \quad (38)$$

Cuando las velocidades angulares se encuentran en distintos sistemas de referencia, es necesario realizar rotaciones. Usando propiedades de los sistemas coordenados se verifica:

$$\omega_{ib}^b = R_o^b \omega_{ob}^o + R_i^b \omega_{io}^i. \quad (39)$$

donde la velocidad angular es mostrada en el sistema de referencia fijado al satélite. Además, se debe tener en cuenta la propiedad $\omega_{ab}^a = -\omega_{ba}^a$.

2.2.6 Razón de cambio de vectores en sistemas coordenados rotados

Esta sección desarrolla el cálculo de la derivada temporal de un vector arbitrario resuelto a lo largo de los ejes de coordenadas de un sistema derivado temporalmente en un sistema diferente (Wertz, 1978).

Sea $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ cualquier vector en un sistema coordenado de referencia y $b = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ los componentes del vector a en el sistema de coordenadas fijado al satélite. Se tiene:

$$b = R_a^b a. \quad (40)$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{db}{dt} = \dot{R}_a^b a + R_a^b \frac{da}{dt}. \quad (41)$$

Usando las propiedades de la velocidad angular, podemos escribir el primer término de la ecuación anterior como:

$$\dot{R}_b^a a = S(\omega_{ab}^a) R_b^a a = S(\omega_{ab}^a) b = \omega_{ab}^a \times b = -\omega_{ba}^a \times b. \quad (42)$$

Además $R_a^b \frac{da}{dt}$ es la componente del vector $\frac{da}{dt}$ expresado en el sistema fijado al cuerpo pero con sus derivadas temporales evaluadas en el sistema de referencia. Obteniéndose:

$$\frac{db}{dt} = -\omega_{ba}^a \times b + R_a^b \frac{da}{dt} = -\omega_{ba}^a \times b + \left(\frac{da}{dt}\right)_b. \quad (43)$$

2.3 Transformaciones entre sistemas de referencia

En esta sección presentaremos los métodos utilizados para realizar rotaciones de un vector entre los distintos sistemas utilizados en este trabajo de tesis.

2.3.1 ECI hacia ECEF

Para rotar un vector en el sistema ECI hacia el sistema ECEF es necesario una rotación alrededor de los ejes coincidentes Z_e y Z_i . Esto se hace usando la siguiente matriz de rotación:

$$R_i^e = R(z_i, -\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Donde $\alpha = GMST + \omega_{ie}t$, siendo GMST el Tiempo Sideral Medio de Greenwich, ω_{ie} la velocidad de rotación de la Tierra en rad/s, t el tiempo en segundos transcurrido desde que los sistemas ECEF y ECI estaban alineados y $\omega_{ie}t$ representa el ángulo alrededor del eje de rotación de la Tierra en que el sistemas ECEF está desplazado a sistema ECI en relación con alguna época conocida. El signo negativo del ángulo indica una rotación en sentido inverso (Wertz, 1978).

2.3.2 ECO hacia ECI y ECEF

La rotación del sistema ECO hacia los sistemas ECI y ECEF requieren tener conocimiento de la órbita del satélite. Como se mencionó en la sección 2.1.1 los elementos Keplerianos se definen en el sistema ECO, pero como las mediciones de los sensores y los modelos matemáticos se realizan en otros sistemas de referencia es necesario definir transformaciones (Wertz, 1978). Las matrices de rotación quedan definidas por:

$$R_{eco}^{eci} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega), \quad (45)$$

$$R_{eco}^{ecf} = R_z(-\Omega + \theta)R_x(-i)R_z(-\omega). \quad (46)$$

donde Ω es la ascensión recta del nodo ascendente, i es la inclinación del satélite, ω es el argumento del perigeo y θ es la ascensión del meridiano cero.

2.3.3 ECI hacia OCO

Considerando una órbita aproximadamente circular, a partir de la posición y la velocidad del satélite en el sistema ECI, se puede definir una base de vectores del sistema orbital en el sistema ECI, como:

$$\hat{O}_{3,ECI} = -\frac{\mathbf{r}_{ECI}}{|\mathbf{r}_{ECI}|}, \quad (47)$$

$$\hat{O}_{2,ECI} = \frac{(\mathbf{v}_{ECI} \times \mathbf{r}_{ECI})}{|\mathbf{v}_{ECI} \times \mathbf{r}_{ECI}|}, \quad (48)$$

$$\hat{O}_{1,ECI} = \hat{O}_{2,ECI} \times \hat{O}_{3,ECI}. \quad (49)$$

Esta base de vectores es usada para construir la matriz de rotación que lleva un vector del sistema ECI al sistema Orbital, dado por:

$$\mathbf{R}_i^o = [\hat{O}_{1,ECI} \quad \hat{O}_{2,ECI} \quad \hat{O}_{3,ECI}]. \quad (50)$$

2.3.4 ECI hacia BCBF

La matriz de rotación que lleva un vector del sistema ECI (i) hacia el sistema fijado al satélite (b) está dada por:

$$\mathbf{R}_i^b = R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$R(\mathbf{q}) = (q_0^2 - q^2)I_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0\mathbf{S}(\mathbf{q}) \quad . \quad (52)$$

Como se observa esta matriz depende de la orientación del satélite y obteniendo dicha matriz la orientación puede ser determinada (Wertz, 1978).

2.3.5 OCO hacia BCBF

La matriz de rotación que lleva un vector del sistema orbital (o) hacia el sistema fijado al satélite (b) está dada por:

$$\mathbf{R}_o^b = \mathbf{R}_i^b \mathbf{R}_o^i. \quad (53)$$

Capítulo III. Especificaciones de los sensores y modelos matemáticos

La determinación de la orientación de un picosatélite es una tarea que involucra el uso de sensores y modelos matemáticos en forma conjunta. Este capítulo presenta una breve descripción de los sensores de orientación comúnmente usados en sistemas de determinación de orientación y una descripción más detallada de los sensores seleccionados en el proyecto Chasqui I. Luego se presenta los modelos matemáticos del entorno del satélite relacionados con la elección de los sensores. Finalmente, la cinemática y dinámica del picosatélite son mostradas.

3.1 Sensores

Los sensores son dispositivos capaces de transformar magnitudes físicas en magnitudes eléctricas, entiéndase por magnitudes eléctricas a voltajes, corrientes o cambios en resistencias, inductancias u capacitancias. Los sensores son dispositivos que permiten conocer el entorno del picosatélite, luego esta información es procesada con el fin de obtener la orientación del picosatélite (Yang, 2019).

Por medición de orientación, generalmente se hace referencia a la medición de cualquier cantidad sensible a la orientación, por ejemplo: el vector campo magnético; la dirección del centro de la Tierra al Sol, una estrella o algún otro cuerpo; o la medida de ángulos o velocidades angulares dadas por giroscopios.

En la actualidad hay una amplia gama de métodos y sensores para la determinación de la orientación. Sin embargo, debido a las limitaciones de masa y potencia de los picosatélites, no todos los métodos son viables.

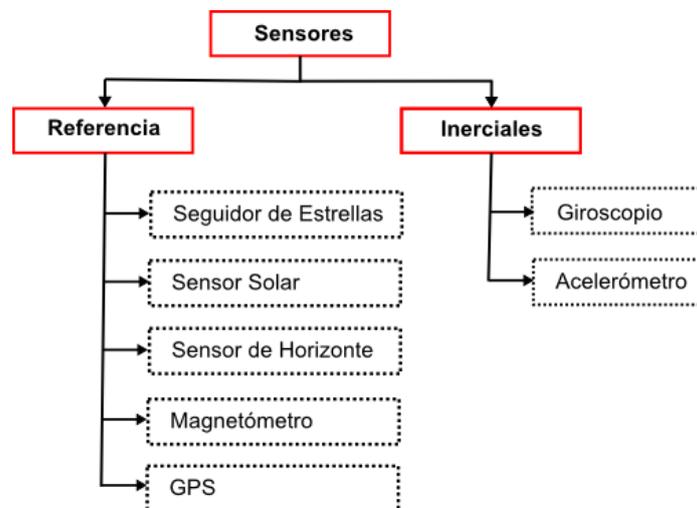
3.1.1 Tipos de sensores

Existen dos tipos de sensores comúnmente utilizados en sistemas de determinación orientación, los inerciales y los de referencia (Wertz, 1978). Los sensores de referencia miden de manera efectiva cada uno de los tres componentes de un vector con dirección

hacia una referencia como la Tierra, el Sol o las estrellas. Los sensores inerciales miden las velocidades de rotación y aceleraciones lineales respecto a un sistema de referencia inercial. En la Figura 13 se muestra la clasificación de los sensores de orientación más representativos y en la Tabla 3 se presenta una breve descripción de dichos sensores (Wertz, 1978; Bak, 1999; Kasper & Vinther, 2010).

Figura 13

Tipos de Sensores para determinación de orientación.



Nota: elaboración propia (2023).

Los sensores de referencia son más confiables y por ende se utilizan con frecuencia en proyectos de picosatélites, siendo el magnetómetro el principal sensor por cumplir los requerimientos de dichos proyectos. La información proporcionada por el magnetómetro, vector campo magnético terrestre, no es suficiente para determinar completamente la orientación y se hace necesario otro vector de referencia que no sea colineal al primero, o al menos no lo sea durante gran parte del tiempo. El sensor de Sol es generalmente utilizado para brindar esta segunda referencia. Adicionalmente, se puede utilizar como apoyo un giroscopio para obtener directamente las variaciones de la orientación y mejorar los resultados en los casos de que los vectores de referencia sean colineales o alguno no se encuentre disponible.

Tabla 3*Descripción de sensores de orientación.*

| Sensor | Descripción |
|-----------------------|---|
| Seguidor de Estrellas | Este componente captura fotos de parte del firmamento y las compara con una base de datos interna, un mapa de las estrellas, y por tanto puede determinar su orientación en relación con ellas. Estos sensores poseen la mayor precisión, pero debido a su tamaño, peso, costo, y elevado consumo de energía no son factibles para un picosatélite. Un dispositivo de este tipo pesa aproximadamente 2 kg, lo cual duplica el peso máximo del picosatélite. |
| Seguidor de Horizonte | Midiendo el cambio de luz generado por el contraste entre la oscuridad del espacio y la luz que refleja la tierra, el sensor de horizonte encuentra el horizonte terrestre y obtiene su orientación relativa con este. Su principal problema es la falta de exactitud. Su precisión es afectada por el Sol y la Luna. Poseen una exactitud entre 0.05° y 1°. |
| Magnetómetro | Mide la intensidad y dirección del campo magnético de la Tierra. Son baratos, pequeños y consumen poca energía. Tiene una precisión aproximada de 0.5° a 5°, pero solo funciona en órbitas terrestres bajas (LEO, por sus siglas en inglés), donde el campo magnético de la Tierra es mayor. Dado que el picosatélite "Chasqui I" orbitará en órbitas LEO este sensor es una buena opción. |
| Giroscopio | Recientemente se han desarrollado dispositivos pequeños y livianos basados en tecnología MEMS. El giroscopio otorga información valiosa sobre las velocidades de giro de cada eje del satélite. |
| Sensores de Sol | Son de los sensores más empleados. Poseen una exactitud de entre 0.005° y 4° y por lo general utilizan las corrientes generadas por los paneles solares del picosatélite. |
| GPS | Los receptores GPS reciben la información precisa de la hora y la posición del satélite. Uno de sus principales inconvenientes es el tamaño. Utilizando un arreglo de antenas se puede encontrar la orientación. Se necesita un receptor GPS que pueda trabajar a elevada altitud y altas velocidades. Poseen una exactitud entre 0.5° y 1°. |

Nota: elaboración propia (2023).

3.1.2 Magnetómetro

Un magnetómetro mide la intensidad del campo magnético en una dirección. Un magnetómetro de 3 ejes consta de tres magnetómetros dispuestos ortogonalmente, que miden las tres componentes del campo magnético. El magnetómetro mide el campo magnético en el sistema de coordenadas fijado al satélite (Rogers, 2003).

Al utilizar un magnetómetro a bordo del picosatélite se debe considerar que existen muchas fuentes de ruido en cualquier ubicación posible del magnetómetro. El mayor impacto es proveniente de los imanes permanentes que serán utilizados para la estabilización pasiva de orientación. Para reducir el efecto de los imanes se debe modelar su campo y observar su influencia dentro picosatélite, de tal manera que su efecto sea despreciable o en el peor de los casos pueda ser considerado como una influencia constante y medible. Este error puede ser cancelado mediante la calibración del magnetómetro y así incorporar sus efectos reales en la determinación de orientación. Un efecto menos previsible es generado por la electrónica a bordo del picosatélite, estas influencias producen un campo magnético que cambia en su comportamiento. Los errores generados por las fuentes de ruido se deben evaluar y caracterizar con el fin de reducir su influencia en los resultados.

Debido a las restricciones de tamaño, requisitos de alimentación y nivel de rendimiento, se consideró el modelo MicroMag3 de la compañía PNI, ya que proporciona un buen rango de medición y una resolución aceptable con un consumo de potencia de acuerdo a las limitaciones. El MicroMag 3 combina sensores magneto-inductivos (MI) y tecnología circuital de medición. Los sensores MI cambian el valor de su inductancia en todo el rango de medida del campo magnético (Bak, 1999). El sensor integrado a bordo se muestra en la Figura 14.

Figura 14

Módulo Sensor Magnético de 3 Ejes (PNI MicroMag 3).



Nota: fuente (Pnicorp, 2015).

3.1.3 Sensor de Sol

Los sensores de Sol miden la orientación de un satélite con la ayuda del conocimiento de la posición del Sol. Existen sensores analógicos, que utilizan el mismo material de las celdas solares o algún tipo de fotodiodo, y sensores digitales. Los sensores analógicos miden la corriente de salida de elementos electrónicos sensible a la luz; dependiendo del ángulo medido de la iluminación, se determina la posición del sol en referencia a la orientación del satélite. Por otro lado, los sensores solares digitales derivan el vector solar utilizando distintos métodos por ejemplo agujeros debajo de una máscara para que el Sol ilumine sólo un campo o franjas del sensor sensible a la luz que da información sobre la dirección del Sol en una forma digital. Una de las limitaciones de este sensor es su dependencia con la visibilidad al Sol (Wertz, 1978).

Cumpliendo con los requerimientos de tamaño se optó por utilizar un arreglo de celdas solares, en un principio se pensó aprovechar las celdas que brindan energía al Sistema de Potencia y Control Térmico del Chasqui I (PCT), pero esto fue descartado debido a la necesidad de operar las celdas en cortocircuito, lo que significaría dejar de cargar las baterías mientras funcione el SDO, por lo que se eligió utilizar un arreglo de celdas independiente. El modelo de celda elegido fue de la compañía Sundace Solar, que es una pequeña celda de cristal de silicio. Cuando se opera en la luz del sol la energía óptica activa la celda y genera una tensión en la salida (Sundancesolar, 2014). El sensor integrado a bordo se muestra en la Figura 15.

Figura 15

Celda solar.



Nota: fuente (Sundancesolar, 2014).

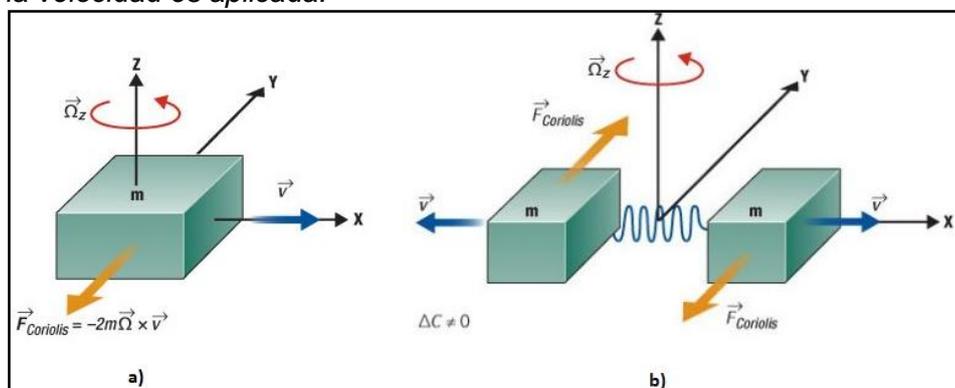
3.1.4 Giroscopio

Los giroscopios o girómetros son una parte esencial de los sistemas de determinación de orientación al proporcionan conocimiento de cambios de orientación y una medición directa de la velocidad de rotación del satélite en sus diferentes ejes utilizando el principio de la conservación de momento angular, no dependiendo de requisitos externos visibles como estrellas, el Sol o la presencia de un campo medible. Por lo tanto, ofrecen la posibilidad de proveer a su vez información de la velocidad de giro a un ritmo más rápido y con mayor fiabilidad absoluta de los sensores con o sin dependencia de más requisitos previos (Yang, 2019).

La información de orientación es relativa al depender de conocimiento de la orientación en un tiempo previo. Especialmente por esta razón, la deriva del giroscopio, causada por la dependencia de la temperatura, puede producir problemas. Los giroscopios han sido comúnmente usados en los satélites desde hace décadas, pero el tamaño, la masa y exigencias de potencia no eran en absoluto razonables para su integración en un picosatélite. Actualmente existen giroscopios pequeños basados en Sistemas Microelectromecánicos (Microelectromechanical Systems, MEMS). MEMS es la integración de elementos mecánicos, sensores, actuadores y electrónicos en un sustrato de silicio mediante la tecnología de microfabricación.

Figura 16

Tecnología MEMS en giroscopio: a) Efecto Coriolis. b) Dos estructuras resonadoras cuando la velocidad es aplicada.



Nota: fuente (Findmems, 2013).

Teniendo en cuenta las restricciones del proyecto se optó por utilizar el ADIS16265 de Analog Devices, que es un giroscopio digital programable que combina las tecnologías MEMS y el procesamiento de señales en un paquete compacto. El elemento sensor funciona según el principio de un giroscopio resonador. Dos estructuras de medición de polisilicona contienen cada uno un marco oscilante que es conducido electrostáticamente a la resonancia, produciendo el elemento de la velocidad necesaria para producir una fuerza de Coriolis durante la velocidad angular. La fuerza de Coriolis es medida por una estructura capacitiva y el resultado es procesado dando una señal de salida eléctrica (Findmems, 2013), ver Figura 16. El sensor integrado a bordo se muestra en la Figura. 17.

Figura 17

Giroscopio ADIS16265.



Nota: fuente (Analog, 2013).

3.1.5 Elección de sensores para el picosatélite Chasqui I

Los sensores para el proyecto fueron seleccionados siguiendo los siguientes criterios:

- Bajo consumo de potencia.
- Peso y tamaño reducidos.
- Bajo costo.
- Exactitud.
- De preferencia con antecedentes de uso en el espacio.

Para describir las especificaciones de los sensores se utilizarán las siguientes definiciones (Analog, 2014):

Rango de medición. Es el nivel de magnitud física soportado por las especificaciones de la señal de salida del sensor, es decir que se puede medir y representar con exactitud como una salida.

Sensibilidad. Es la proporción de cambio en la señal de entrada para cambiar la señal de salida. Se especifica en una tensión de alimentación en particular expresada en sensores analógicos de la forma: mV/ (unidades de la magnitud a medir) o en sensores digitales como LSB (unidades de la magnitud a medir). Es usualmente especificado en un rango (min, typ, max) o una figura y porcentaje de desviación (σ). También es común hacer referencia de un cambio de sensibilidad debido a la temperatura generalmente expresado como un cambio porcentual por °C.

No-linealidad. Idealmente la relación entre la tensión y la señal de entrada es lineal y es descrito por la sensibilidad del dispositivo. La no linealidad es una medida de la desviación de una sensibilidad perfectamente constante, especificado como un porcentaje con respecto a cualquier rango de escala completa (%FSR) o \mp escala completa (%FS).

Error en la alineación del paquete. Es el ángulo entre los ejes de detección del dispositivo y las características del paquete de referencia. También conocido como alineación del eje de entrada.

Error de alineación (Ortogonal). Es la variación del desplazamiento angular ideal (típicamente 90°) entre múltiples ejes del dispositivo

Sensibilidad cruzada entre ejes. Es una medida de la cantidad de salida que se ve en un eje cuando la señal de entrada se impone en un eje diferente, normalmente se especifica como un porcentaje. El acoplamiento entre dos resultados de los ejes es el resultado de una combinación de errores de alineación e interferencia del circuito.

Densidad de ruido: En (unidades de la magnitud a medir)/ $\sqrt{\text{Hz}}$ RMS, es la raíz cuadrada de la densidad espectral de potencia de la salida de ruido. Ruido total está determinado por la ecuación:

$$\text{Ruido} = \text{Densidad de Ruido} * \sqrt{BW * 1.6}, \quad (54)$$

donde BW es el ancho de banda.

Velocidad de datos de salida. En dispositivos digitales, define la velocidad a la que los datos se muestrean. El ancho de banda es la señal de frecuencia más alta que se puede muestrear sin aliasing por la velocidad de datos de salida especificada. Por el criterio de muestreo de Nyquist, el ancho de banda es la mitad de la velocidad de datos de salida.

A continuación, se describen las especificaciones de los sensores seleccionados para la implementación del SDO.

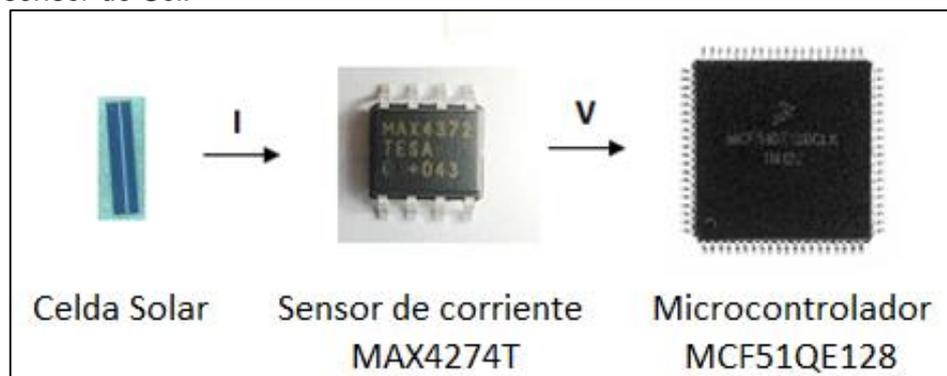
Micromag3. Las ventajas de este dispositivo incluyen la operación de 3V para la compatibilidad con nuevos sistemas de bajo consumo de energía, la inmunidad de gran ruido de la señal en todas las condiciones, y un amplio rango dinámico. Resolución y rango de medición de campo configurables por software para una variedad de aplicaciones. La medida es muy estable en la temperatura e inherentemente libre de deriva offset. En la Tabla 4 se muestran las especificaciones del sensor.

Módulo sensor de Sol. Para implementar el sensor solar se utiliza celdas solares de la empresa Sundance Solar, que se ubican en las 6 caras del picosatélite. La corriente de esta celda es percibida por el sensor de corriente MAX4372T y luego digitalizada por el microcontrolador MCF51QE128. En la Figura 18 se muestran los elementos utilizados en el módulo sensor de Sol. En la Tabla 5 se muestran las especificaciones de los elementos del módulo.

Tabla 4*Especificaciones del magnetómetro Micromag3.*

| Propiedad | |
|------------------------------|---|
| Tipo | Módulo sensor magnético de 3 ejes. |
| Rango | $\pm 1100 \mu\text{T}$ (± 11 Gauss). |
| Sensibilidad | 31.24 Counts/ μT . (Seleccionable por software). |
| No-linealidad | 0.6 % (Típico), 1% (máximo) |
| Frecuencia | 175 KHz. |
| Interface | SPI |
| Consumo de potencia | 15 mW a 3 Vdc. |
| Velocidad de datos de salida | Hasta 2000 muestras por segundo. |
| Tamaño | 25.4 x 25.4 x 19 mm. |
| Temperatura de operación | -20 °C a 70 °C. |

Nota: elaboración propia basada en Pnicorp (2015).

Figura 18*Módulo sensor de Sol.*

Nota: elaboración propia (2023).

Tabla 5*Especificaciones del módulo sensor de Sol.*

| Propiedad | |
|--------------------|--|
| Tipo | Celda Solar Sundance. |
| Tamaño | 2.5 cm x 0.5 cm. |
| Potencia de salida | 0.5 V, 25 mA. |
| Tipo | Amplificador sensor de corriente con salida de voltaje MAX4372T. |
| Ganancia | 20 V/V. |
| Tipo | Microcontrolador MCF51QE128 |
| ADC | 12 bits. |

Nota: elaboración propia basada en Sundancesolar (2014).

ADIS16265. Es un giroscopio digital programable que combina la tecnología MEMS y el procesamiento digital de señales en un solo chip. Proporciona varias funciones programables para la optimización en el sistema como un interruptor de ancho de banda del sensor, filtro FIR tipo ventana Bartlett y ajustes de la frecuencia de muestreo con el fin de proporcionar al usuario el control del nivel de ruido en función del ancho de banda seleccionado. Integra un sensor de temperatura embebido para posibilitar la calibración por temperatura (Analog, 2013). En la Figura 19 se muestra el diagrama de bloques funcional. En la Tabla 6 se muestran las especificaciones del sensor.

Tabla 6

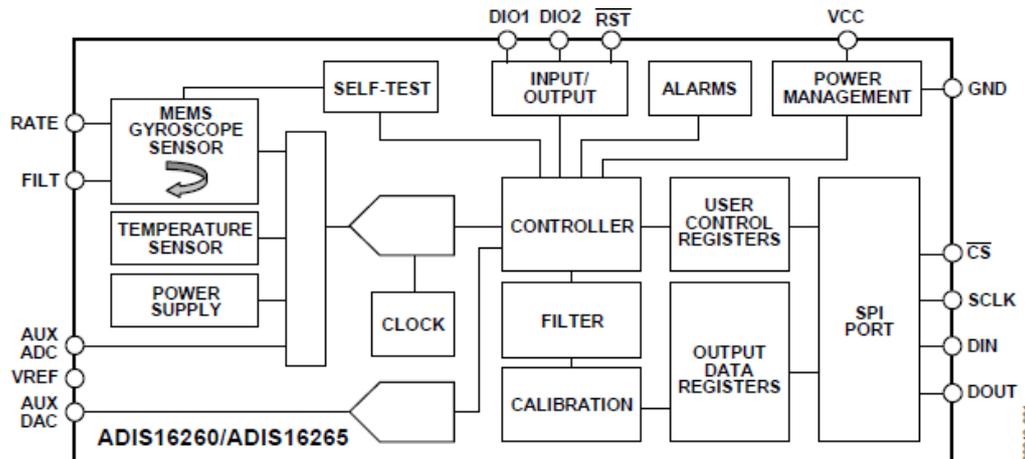
Especificaciones del giroscopio ADIS16265.

| Propiedad | |
|--------------------------|--|
| Tipo | Sensor giroscopio digital programable de 1 eje. |
| Rango | Escalable: $\pm 80^\circ/\text{seg}$, $\pm 160^\circ/\text{seg}$ y $\pm 320^\circ/\text{seg}$. |
| Sensibilidad | 0.07326 $^\circ/\text{seg}/\text{LSB}$ ($\pm 320^\circ/\text{seg}$). 0.03663 $^\circ/\text{seg}/\text{LSB}$ ($\pm 160^\circ/\text{seg}$). 0.01832 $^\circ/\text{seg}/\text{LSB}$ ($\pm 80^\circ/\text{seg}$). |
| Sesgo | 0.005 $^\circ/\text{seg}/^\circ\text{C}$ (Coeficiente de temperatura). 0.2 $^\circ/\text{seg}/\text{g}$ (Efecto de la aceleración lineal). |
| Ruido | 0.4 $^\circ/\text{seg rms}$ (25 $^\circ\text{C}$, $\pm 320^\circ/\text{seg}$, sin filtro, 50 Hz, 256 SPS). 0.9 $^\circ/\text{seg rms}$ (25 $^\circ\text{C}$, $\pm 320^\circ/\text{seg}$, sin filtro, 330 Hz, 2048 SPS). 0.2 $^\circ/\text{seg rms}$ (25 $^\circ\text{C}$, $\pm 160^\circ/\text{seg}$, filtro 4-tap, 50 Hz). 0.1 $^\circ/\text{seg rms}$ (25 $^\circ\text{C}$, $\pm 80^\circ/\text{seg}$, filtro 16-tap, 50 Hz). |
| Densidad de ruido | 0.044 $^\circ/\text{seg}/\sqrt{\text{Hz rms}}$ (25 $^\circ\text{C}$, 25 Hz, $\pm 320^\circ/\text{seg}$, sin filtro) |
| Frecuencia | 50 Hz y 330 Hz (Ancho de banda). 14KHz (Resonancia) |
| Resolución | 12 bits. (ADC) |
| Interface | SPI |
| Voltaje de operación | 4.75 V a 5.25 V. |
| Tamaño | 11 x 11.5 x 5.5 mm. |
| Temperatura de operación | -40 $^\circ\text{C}$ to +105 $^\circ\text{C}$. |

Nota: elaboración propia basada en Analog (2013).

Figura 19

Diagrama de bloques funcional del giroscopio digital programable ADIS16265.



Nota: fuente (Analog, 2013).

3.2 Vector campo magnético

El sistema de determinación de orientación del Chasqui I requiere un modelo de campo magnético abordo del satélite. El vector campo magnético obtenido en el sistema de referencia ECI en base al modelo de campo magnético se contrasta con el vector campo magnético obtenido con el magnetómetro para así poder determinar la orientación del picosatélite. Adicionalmente, el modelo de campo magnético se hace necesario para la simulación del desempeño del SDCA. Específicamente, durante la simulación del control, el control con torques magnéticos requiere del conocimiento de la densidad de flujo magnético.

Según estudios realizados (Chris, 2009), el campo magnético de la Tierra es una cantidad vectorial en función del espacio y el tiempo y está formado por una superposición de tres fuentes principales:

- El campo generado por el núcleo exterior de la Tierra (B_m , campo principal o “main field” en inglés). Este término contribuye con el 95% del total del campo.
- El campo generado por la corteza y la región superior del manto, o litosfera (B_l).
- El campo generado por las corrientes eléctricas ionosféricas y magnetosféricas (B_i).

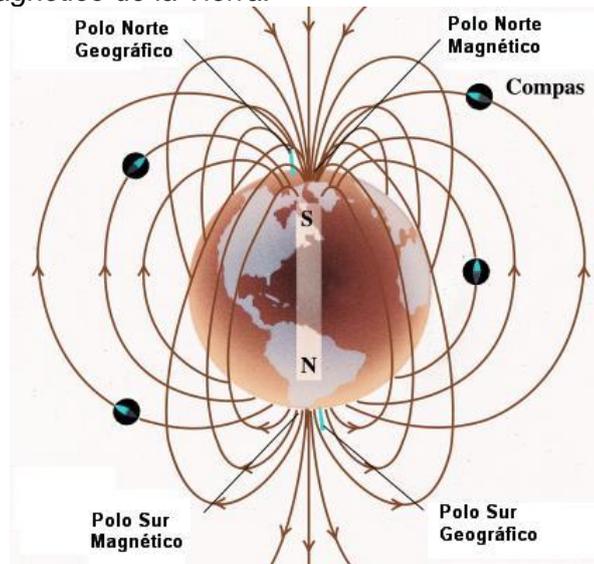
El total del campo magnético alrededor de la superficie terrestre es:

$$B(r, t) = B_m(r, t) + B_l(r, t) + B_i, \quad (55)$$

La dirección e intensidad del \mathbf{B} depende de nuestro punto de observación alrededor de la Tierra, como se muestra en la Figura 20.

Figura 20

Líneas del Campo Magnético de la Tierra.



Nota: adaptado de Chris (2009).

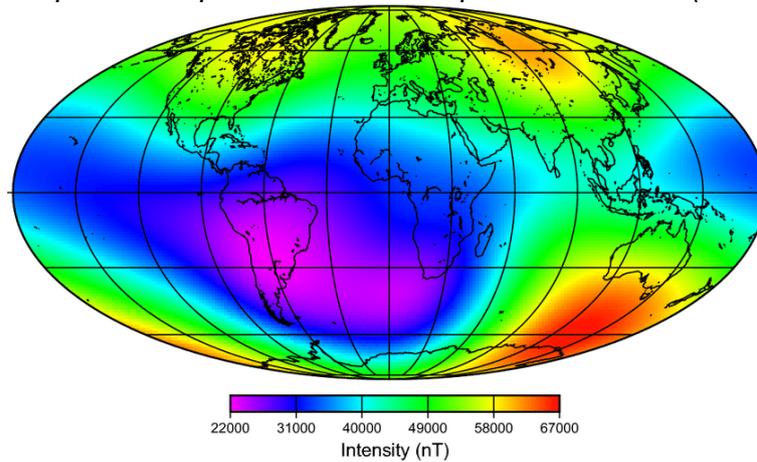
La intensidad de \mathbf{B} disminuye con la altitud. En la superficie de la Tierra la intensidad del campo varía de aproximadamente 50 μT en los polos a 30 μT en el ecuador. Por encima de 10 000 kilómetros se convierte en menos de 2 μT . El campo geomagnético se parece al campo creado por un imán colocado en el centro de la Tierra y con una inclinación de unos 10.5° respecto al eje de rotación de la Tierra, ver Figura 20. Aunque las formas de las líneas de campo son aún más irregulares y varían de manera diferente dependiendo de la ubicación en la superficie terrestre.

Los dos principales modelos son el IGRF (International Geomagnetic Reference Field) mantenida por IAGA (International Association for Geomagnetism and Aeronomy) y el WMM (World Magnetic Model) desarrollado por NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) con la colaboración de BGS (British geological Survey). El WMM es el estándar en EEUU y UK para los sistemas militares y civiles. El IGRF es

empleado en la comunidad académica y es el resultado del esfuerzo hecho por equipos de trabajo asociados al IAGA. Estos dos modelos son revisados cada cinco años y ambos son expansiones esféricas armónicas truncadas para efectos de estimación, siendo los últimos publicados el IGRF-13 de grado 13 y el WMM2020 de grado 12. En la Figura 21 se muestra la intensidad de \mathbf{B} en la superficie terrestre usando el modelo IGRF-11.

Figura 21

Intensidad del Campo en la superficie de la Tierra para el año 2020 (en nano Teslas).



Nota: fuente (Mandea & Chambodut, 2009).

3.2.1 Modelo matemático IGRF

El modelo IGRF usa la función potencial, esta función cumple con:

$$\nabla^2 V(r, \lambda, \theta, t) = 0, \quad (56)$$

donde, en coordenadas geocéntricas (esféricas geográficas), r es la distancia del centro de la Tierra hasta el punto de interés, λ es la longitud medida a partir del Meridiano de Greenwich y θ es la co-latitud. Representado $\nabla^2 V(r, \lambda, \theta, t)$ simplemente como V se tiene:

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_m^n(\cos \theta) [g_{n,m} \cos m\phi + h_{n,m} \sin m\phi], \quad (57)$$

donde se tiene que a es el radio de referencia para la Tierra (para IGRF se emplea 6371.2km), $g_{(n,m)}$ y $h_{(n,m)}$ son coeficientes que varían en el tiempo, P_m^n son las funciones asociadas de Legendre, de orden m y grado n , con seminorma Schmidt. Los coeficientes

están disponibles en (Ngdc, 2014) y son asumidos de variación lineal bajo un periodo de cinco años y por lo menos cada cinco años son revisados, los actuales coeficientes que en total son 195 para la onceava generación han sido producidos por el denominado grupo de trabajo VMOD y permiten una precisión de 0.1 nT, para determinar estos coeficientes se hace recopilaciones por años del campo magnético desde los satélites Osterd lanzado el 1999 y CHAMP lanzado el 2000.

El campo magnético principal de la Tierra es tomado como el gradiente negativo de:

$$B(r, \lambda, \theta, t) = -\nabla V(r, \lambda, \theta, t), \quad (58)$$

Determinando este gradiente, se puede calcular el campo magnético para cualquier punto fuera de la Tierra. \mathbf{B} puede ser expresado en coordenadas cartesianas GSM (Geocentric Solar Magnetospheric) o en coordenadas geocéntrica.

Según Roithmayr (2004), el vector campo magnético \mathbf{B} en un punto \mathbf{Q} sobre la superficie terrestre puede ser expresado como la suma:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^m B_{n,m}, \quad (59)$$

donde $B_{n,m}$ representa la contribución de \mathbf{B} del armónico esférico de grado n y orden m , y es dado por:

$$B_{n,m} = \frac{K_{n,m} a^{n+2}}{r^{n+m+1}} \left\{ \frac{g_{n,m} C_m + h_{n,m} S_m}{r^2} [(s_{\lambda} A_{n,m+1} + (m+n+1) A_{n,m}) \hat{r} - r A_{n,m+1} \hat{e}_3] - m A_{n,m} [(g_{n,m} C_{m-1} + h_{n,m} S_{m-1}) \hat{e}_1 + (h_{n,m} C_{m-1} + g_{n,m} S_{m-1}) \hat{e}_2] \right\}, \quad (60)$$

donde r es la magnitud de \hat{r} , que es el vector desde el centro de la Tierra al punto \mathbf{Q} ; $g_{n,m}$ y $h_{n,m}$ representan los coeficiente de Gauss de grado n y orden m . Los vectores unitarios e_1 , e_2 y e_3 son los vectores base del sistema ECEF.

Los coeficientes $K_{n,m}$ de la Ecuación 60 son obtenidos usando:

$$K_{n,0} = 1 \quad (n = 1, \dots, \infty), \quad (61)$$

cuando $m = 0$ (y también $K_{1,1} = 1$). De otra manera ellos pueden ser obtenidos por las fórmulas recursivas:

$$K_{n,m} = \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^{\frac{1}{2}} K_{n-1,m}, \quad [m = 1, \dots, \infty; n \geq (m+1)],$$

$$K_{n,m} = [(n+m)(n-m+1)]^{-\frac{1}{2}} K_{n,m-1} \quad [m = 2, \dots, \infty; n \geq m], \quad (62)$$

Los términos $A_{n,m}$ y $A_{n,m+1}$ son las derivadas de los polinomios de Legendre de grado n , y orden m y $m+1$ respectivamente. La notación $A_{n,m}(u)$ es usada para indicar que $A_{n,m}$, en general, es una función de argumento u y se calcula mediante:

$$A_{n,m}(u) = \frac{1}{n-m} [(2n-1)uA_{n-1,m}(u) - (n+m+1)A_{n-2,m}(u)],$$

$$[m = 0, \dots, \infty; n \geq (m+1)] \quad , \quad (63)$$

siendo que $A_{n,m}(u)$ se desvanece cuando $m > n$, y $A_{0,0}(u) = 1$. Cuando $n = m$ la $A_{n,n}$ puede ser calculada por una simple expresión recursiva:

$$A_{n,m} = (1)(3)(5) \dots (2n-1), \quad (n = 1, \dots, \infty),$$

$$A_{n,m} = (2n-1)A_{n-1,m-1}, \quad (n = 2, \dots, \infty). \quad (64)$$

En la Ecuación 60, para mayor claridad se ha omitido el argumento de $A_{n,m}$, siendo este sin λ , representado por s_λ , donde es la latitud geográfica de Q. $s_\lambda = (\hat{r}/r) \cdot \hat{e}_3$.

Los términos S_m y C_m se definen según:

$$S_0 = 0, \quad C_0 = 0,$$

$$S_1 = \hat{r} \cdot \hat{e}_2, \quad C_1 = \hat{r} \cdot \hat{e}_1 \quad (65)$$

Estos valores inicializan la relación recursiva:

$$S_m = S_1 C_{m-1} + C_1 S_{m-1}, \quad S_m = C_1 C_{m-1} - S_1 S_{m-1}, \quad (66)$$

3.3 Vector posición del Sol

Para la determinación de orientación, así como para el cálculo de los torques generados por la presión solar, es necesario conocer la ubicación del Sol en el sistema de referencia orbital. Es en este sentido que se debe generar un modelo para simular dicha ubicación.

Teniendo en cuenta que la distancia entre la Tierra y el Sol (142.700.000 km) es mucho mayor que el radio de la Tierra más el radio orbital (6378 km + 600km = 6978 km), se puede considerar que el vector que va del Sol a la Tierra tiene la misma orientación que

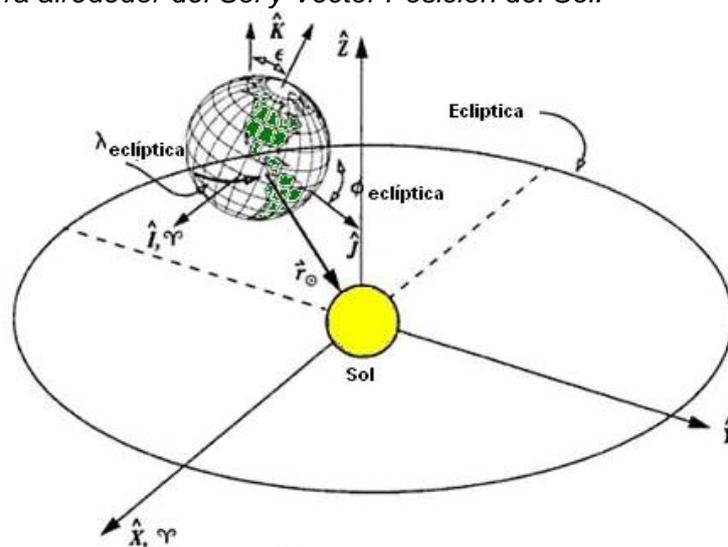
el vector que lo une con el satélite (Vallado, 2006). Este vector se puede obtener utilizando las celdas solares y teniendo en consideración el fenómeno del Albedo.

3.3.1 Modelo matemático del vector posición del Sol

Se necesita buscar el vector posición de la Tierra hacia el Sol para compararlo con el vector obtenido utilizando las celdas solares y encontrar así la orientación. Se utiliza una técnica mostrada en Vallado, trabajando en el Sistema Inercial J2000 (mean-equator, mean equinox) y obteniendo una exactitud de 0.01° , esta técnica es válida para una fecha entre los años 1850 y 2050 debido al truncamiento en la expansión (Vallado, 2006). En la Figura 22 podemos observar la geometría del problema.

Figura 22

Órbita de la Tierra alrededor del Sol y Vector Posición del Sol.



Nota: fuente (Vallado, 2006).

Luego se calcula la anomalía media del Sol, M_{\odot} , utilizando T_{TDB} para tener más exactitud, aunque es aceptable T_{UT1} debido a que es solo una fórmula de baja precisión:

$$M_{\odot} = 357.5277233^{\circ} + 35999.05034T_{TDB}, \quad (67)$$

Para simplificar cálculos se debe reducir $\lambda_{M_{\odot}}$ y M_{\odot} para el rango de 0° hasta 360° . Debido que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente circular, se puede asumir que la anomalía media está lo suficientemente cerca a la longitud de la eclíptica del

sol, $\lambda_{eclíptica}$. La latitud de la eclíptica del sol, $\phi_{eclíptica}$ nunca excede de 0.000333^0 y es a menudo establecido en 0^0 .

$$r_{\odot} = 1.000140612 - 0.016708617 \cos M_{\odot} - 0.000139589 \cos 2M_{\odot}, \quad (68)$$

Teniendo en cuenta que la longitud de la eclíptica es cero al pasar por el eje X del Sistema ECI (J2000). Y realizando las rotaciones necesarias se obtiene:

$$r_{\odot} = \begin{bmatrix} r_{\odot} \cos \lambda_{eclíptica} \\ r_{\odot} \cos \epsilon \sin \lambda_{eclíptica} \\ r_{\odot} \sin \epsilon \sin \lambda_{eclíptica} \end{bmatrix}, \quad (69)$$

3.3.2 Celdas solares y vector posición del Sol

Los Sensores analógicos solares, también llamado coseno detectores de sol, se basan en celdas solares cuya corriente de salida es proporcional al coseno del ángulo de incidencia solar y sobre otras propiedades físicas propias de la celda (Bhanderi, 2005). Con estas definiciones, la corriente de salida está dada por:

$$I(\alpha) = I(0^0) \cos \alpha = I(90^0) \sin \beta, \quad (70)$$

En el modelo efectos secundarios (por ejemplo, pérdidas de transmisión, reflexiones desde la superficie celular, etc.) son omitidos por simplicidad. En la Figura 23 se muestra estas relaciones.

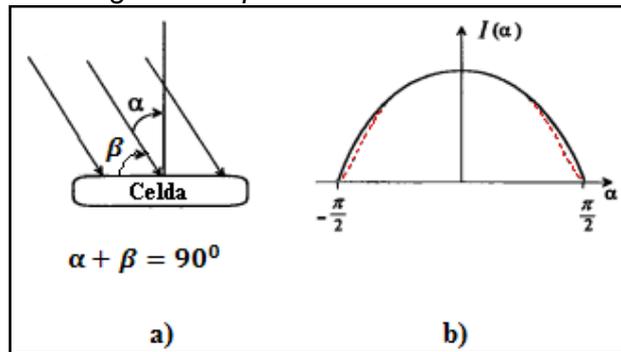
Para el cálculo del vector de Sol se usan las celdas ubicadas en las 6 caras del picosatélite. Se enumera las caras para una mejor ubicación, ver Figura 24.

Tomando en consideración que la luz solar llega en forma de líneas paralelas a la Tierra y a las caras del picosatélite, ver Figura 25, tenemos que:

$$I = I_{max} \sin \beta, \quad (71)$$

Figura 23

Dependencia de la corriente generada por la celda en función del ángulo de incidencia.



Nota: fuente (Wertz, 1978).

Tabla 7

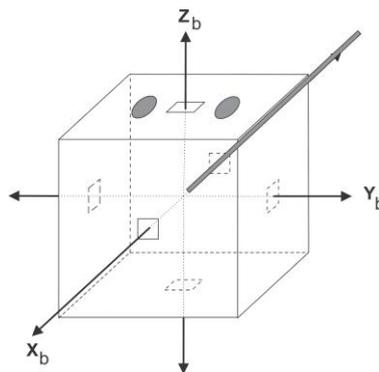
Correspondencia entre caras numeradas y ejes.

| Numeración | Eje |
|------------|-----|
| 1 | +Z |
| 2 | +X |
| 3 | +Y |
| 4 | -X |
| 5 | -Y |
| 6 | -Z |

Nota: elaboración propia (2023).

Figura 24

Vista de las caras del picosatélite.



Nota: elaboración propia (2023).

Tenemos:

$$I_2 = I_{max} \sin \beta_2, \tag{72}$$

$$I_3 = I_{max} \sin \beta_3. \quad (73)$$

Con $\beta_2 + \beta_3 = 90^\circ$ y $\sin \beta_3 = \cos \beta_2$, luego:

$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = \frac{\sin \beta_2}{\cos \beta_2} = \tan \beta_2, \quad (74)$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \frac{I_2}{I_3}. \quad (75)$$

Pero:

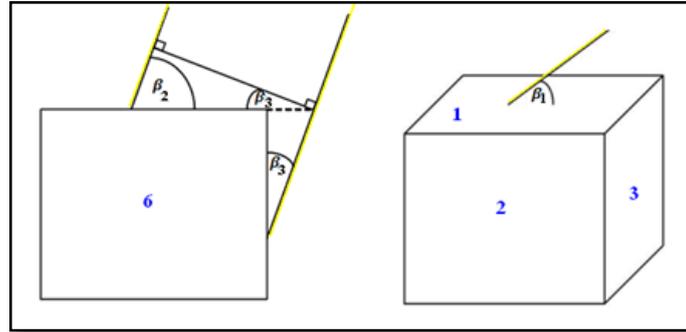
$$I_1 = I_{max} \sin \beta_1, \quad (76)$$

$$I_2 = I_{0max} \cos \beta_1 \sin \beta_2, \quad (77)$$

$$I_3 = I_{0max} \cos \beta_1 \sin \beta_3, \quad (78)$$

Figura 25

Vista para calcular el vector solar.



Nota: Elaboración propia (2023).

Dividiendo las Ecuaciones 76 y 77:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sin \beta_1}{\cos \beta_1 \sin \beta_2} = \frac{\tan \beta_1}{\sin \beta_2}, \quad (79)$$

Luego:

$$\beta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{I_1}{I_2} \sin \beta_2 \right). \quad (80)$$

Finalmente:

$$S^B = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \sin \beta_2 \\ \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_1 \end{bmatrix} \frac{1}{I_{0max}}, \quad (81)$$

Donde X, Y, Z es igual a +1 o -1 dependiendo de la localización del panel solar.

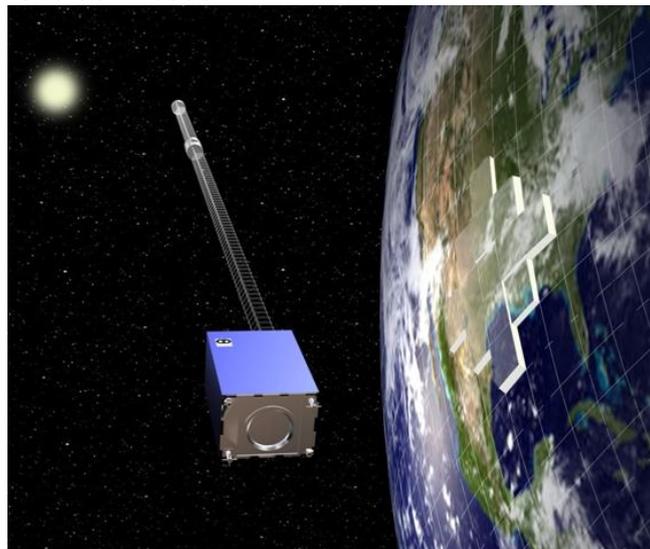
3.3.3 Albedo de la Tierra

El valor de la corriente suministrada por las celdas solares es afectado por un fenómeno denominado “albedo” (cantidad de luz reflejada por la Tierra debido a la radiación del sol), ver Figura 26. Debido a esto los sensores solares perciben una mayor cantidad de luz, pues no sólo reciben la luz del sol sino también la reflejada por la Tierra; y estas mediciones erróneas ocasionan una determinación de la orientación del satélite poco fiable, pero también puede suministrar una mayor cantidad de energía a las celdas solares, energía que puede ser utilizada para el funcionamiento de los demás componentes en el satélite.

El albedo de la Tierra generalmente es tratado como ruido en la determinación de la orientación. Debido a la geometría de la Tierra, la radiación del albedo es en todas las direcciones, a diferencia de la radiación solar que puede ser considerada paralela a la línea de visión hacia el sol, esto debido a la gran distancia a la que se encuentra el sol (Bhanderi, 2005).

Figura 26

Ilustración del fenómeno del Albedo.



Nota: fuente (Bhanderi, 2005).

En esta tesis se considera dos modelos de este fenómeno, el primero para usar en el simulador del entorno basado en (Bhanderi, 2005), y el segundo será una simplificación basada en (Krogh, & Schreder, 2002) para ser implementado a bordo.

Modelo matemático del albedo terrestre. El modelo del albedo terrestre desarrollado por Bhanderi (2005) está basado en los datos de reflectividad proporcionados por el satélite “Earth Probe” que es parte del proyecto TOMS (Total Ozone Mapping Spectrometer) desarrollado por la NASA. La irradiancia solar reflejada sobre el satélite desde la superficie de la Tierra puede ser utilizada para calcular la reflectividad.

La reflectividad es la fracción de radiación incidente reflejada por una superficie de la Tierra y varía por diversos factores como las nubes, cobertura de hielo y cambios estacionales. Para el cálculo de la reflectividad la superficie terrestre se divide en pequeñas celdas y la reflectividad total será calculada como la suma de cada reflectividad obtenida por cada celda. Como el satélite está cambiando de posición es necesario definir una reflectividad media.

La reflectividad de una celda se obtiene calculando la radiación recibida por el satélite E_{meas} :

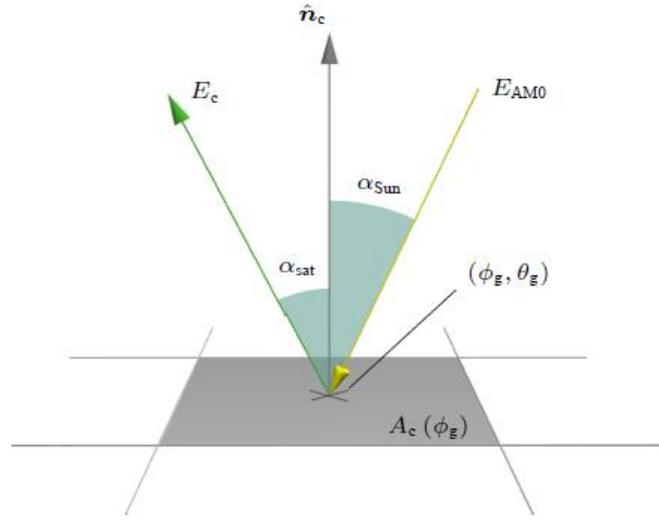
$$E_{meas} = \frac{\rho f}{1-\rho} E_{dd} + E_{dd0}, \quad (82)$$

Donde ρ es la reflectividad de una celda y f es la fracción de radiación que llega al satélite. E_{dd} es la irradiancia difusa.

Para efectos de cálculo en el modelo de radiación, el sol es considerado como un cuerpo negro, además por la ley de la inversa cuadra (la intensidad de la radiación de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia), se obtiene que la radiación solar a 1 U.A. (E_{AMO}) es de $1367W/m^2$. La cantidad del albedo terrestre no solo depende de la cantidad de radiación solar, sino también de la posición del satélite y del Sol respecto al ECEF. En la Figura 27 se muestra la radiación incidente en la atmosfera terrestres, E_{AMO} , y la radiación reflejada hacia el picosatélite, E_c .

Figura 27

Modelado del albedo terrestre. La irradiancia incidente desde el Sol es reflejada por la celda.



Nota: fuente (Bhanderi, 2005).

Se puede definir el modelo del albedo terrestre como:

$$E_c = \begin{cases} \frac{\rho(\phi_g, \theta_g) E_{AM0} A_c(\phi_g) \hat{r}_{sol}^T \hat{n}_c \hat{r}_{sat}^T \hat{n}_c}{\pi \|\hat{r}_{sat}\|^2} & \text{si } (\phi_g, \theta_g) \in V_{sol} \cap V_{sat}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (83)$$

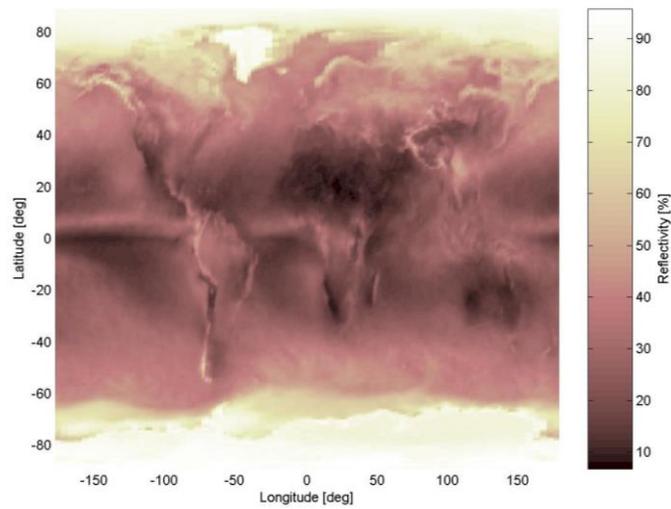
donde V_{sol} y V_{sat} son el conjunto de puntos vistos desde el Sol y el picosatélite respectivamente, luego $V_{sol} \cap V_{sat}$ sería el conjunto de puntos iluminados por el Sol vistos desde el picosatélite. Para la ubicación de la celda se tiene que ϕ_g y θ_g son la latitud y longitud respectivamente. Por lo anterior se deduce que la cantidad total de radiación reflejada por todas las celdas es:

$$E_a = \sum_{V_{sol} \cap V_{sat}} E_c(\phi_g, \theta_g), \quad (84)$$

En la Figura 28 se observa que existe un alto grado de reflexión sobre los polos, esto debido a los casquetes polares, y baja en todo el Ecuador. En los polos, la superficie de hielo garantiza alta reflectividad con independencia de la cobertura de nubes. Debido al ángulo de inclinación de la órbita del Sol, el albedo es el 33.8% sobre el Polo Sur y el 36.7% sobre el Polo Norte, durante el verano local. La información sugiere que la reflectividad de la Tierra media de 30.40 %.

Figura 28

Reflectividad media para el Año 2005, datos Proyecto TOMS.

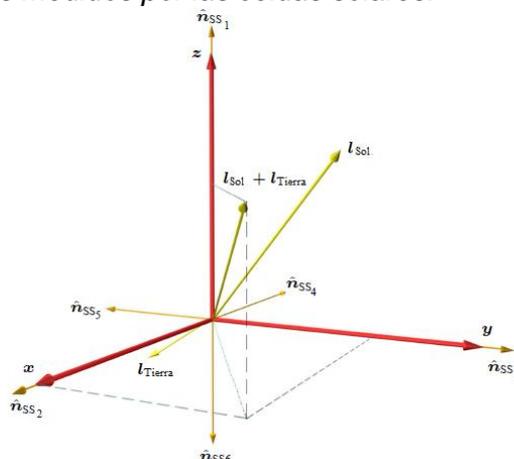


Nota: fuente (Bhanderi, 2005).

Para el simulador del SDCO se considera que el satélite es irradiado por dos fuentes, el Sol y la Tierra, siendo 1367W/m^2 la irradiancia proveniente del Sol. La irradiancia reflejada por la Tierra se calcula usando este modelo del Albedo. Luego la corriente captada por una celda será proporcional a la suma de los vectores irradiancia, I_{Sol} y I_{Tierra} , ver Figura 29. Ambos vectores están trabajados en el sistema de referencia fijado al cuerpo.

Figura 29

Proyección de los vectores medidos por las celdas solares.

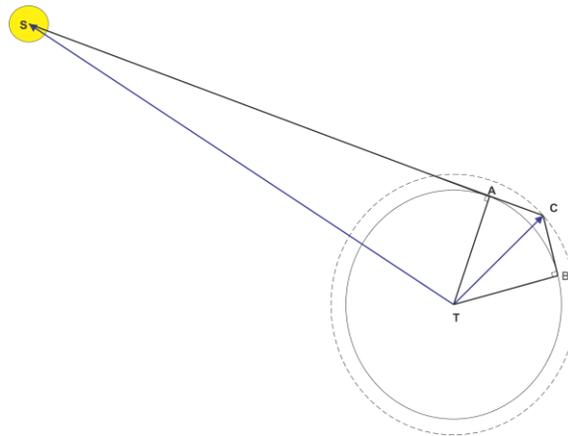


Nota: adaptado de (Bhanderi, 2005).

Modelo del Albedo a bordo. En el controlador a bordo del picosatélite se implementa un algoritmo simplificado para resolver el problema que ocasiona el Albedo en la medición de los sensores de Sol. El valor medio del albedo de la Tierra es $30\% \pm 5\%$ del flujo de radiación solar.

Figura 30

Cálculo del vector de Sol considerando el fenómeno del albedo.



Nota: elaboración propia (2023).

El campo de visión del picosatélite depende de los 392.5 km de altura orbital. El albedo de la Tierra cubre 141° del campo de visión del picosatélite, ángulo \widehat{ACB} de la Figura 30, calculado según la ecuación:

$$\widehat{ACB} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{R_{Tierra}}{R_{Tierra} + H_{Orbita}} \right) = 2 \sin^{-1} \left(\frac{6378.135 \text{ km}}{6378.135 \text{ km} + 392.5 \text{ km}} \right) = 140.79^\circ, \quad (85)$$

Estableciendo como base un algoritmo similar al propuesto por uno de los proyectos de la Universidad de Aalborg (Krogh, 2002), se desarrolla un algoritmo considerando lo siguiente:

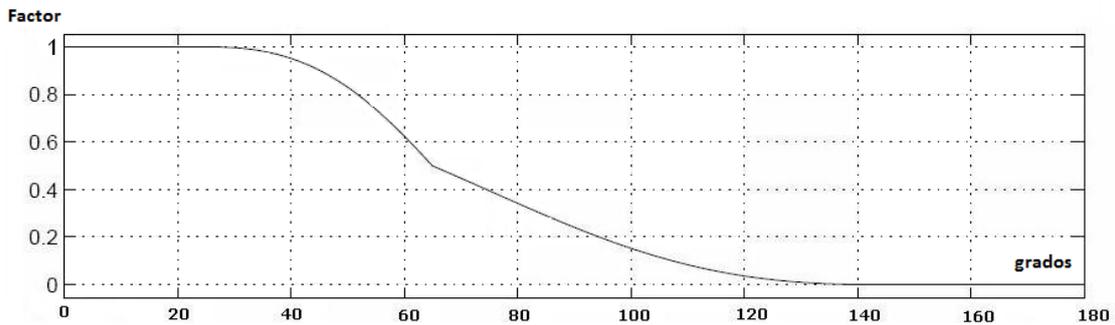
- El albedo terrestre es un factor constante del 35% de la radiación solar.
- Los sensores solares tienen un rango de 180° .
- Si el valor del ángulo entre el vector sensor solar y el vector satélite (α), es menor que 25° la superficie de alcance del sensor estará afectada por toda la superficie de la Tierra, por lo que el 100% del albedo sería medido.

- Si el valor del ángulo α es 65° , el campo de visión de los sensores solo alcanzará la mitad de la superficie iluminada, por lo que sólo un 50% del albedo es medido.
- Si el valor del ángulo α es mayor a 160.4° , la zona iluminada no sería detectada por los sensores, por lo que el albedo medido sería cero.

En la Figura 31 se muestra de forma gráfica las consideraciones del algoritmo del modelo del Albedo.

Figura 31

Modelo del Albedo en función del ángulo entre la dirección hacia donde apunta el sensor de Sol y el vector nadir.

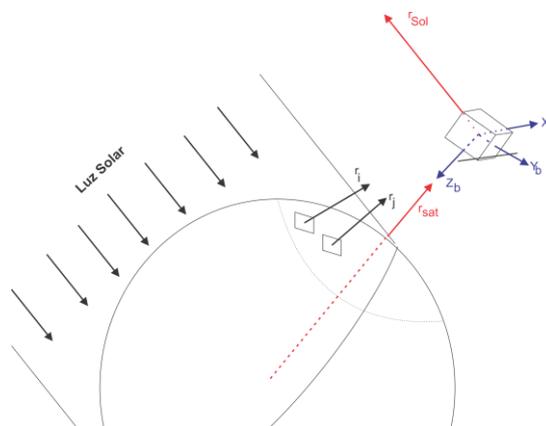


Nota: adaptado de (Krogh, 2002).

Considerar que los vectores referidos en este algoritmo no se pueden trabajar en el sistema de referencia fijado al cuerpo, ya que este no es conocido, por lo tanto, el vector de referencia con el que se trabaja es el resultado sumar el vector unitario con dirección al Sol y el vector unitario con dirección a la Tierra. En la Figura 32 se muestran las consideraciones generales para trabajar con el vector de Sol.

Figura 32

Cálculo del vector de Sol considerando el fenómeno del albedo.



Nota: elaboración propia (2023).

3.4 Generador de órbitas

Los algoritmos de determinación de orientación requieren datos de varios modelos de referencia, tales como el modelo de la órbita. El modelo de la órbita es necesario para conocer la posición del picosatélite respecto al marco inercial en un determinado instante de tiempo. La posición exacta del picosatélite sirve como entrada del Modelo de Campo Magnético que es usado para generar el vector campo magnético.

Los modelos de propagación espacial utilizan la información del estado actual de un picosatélite para predecir un estado futuro. El picosatélite, sin embargo, se encuentra con perturbaciones, a lo largo de su trayectoria, que complica su movimiento. Estas perturbaciones son causadas por la forma de la Tierra (armónicos esféricos), arrastre, la radiación y los efectos de otros cuerpos (el Sol y la Luna en general). Existen diversos propagadores de órbita, entre ellos el más simple es el propagador de dos cuerpos, el cual considera a la gravedad del cuerpo central como la única fuerza que afecta. Mientras el campo gravitacional se supone simétrico, los resultados muestran el movimiento kepleriano. También existen los propagadores J2 y J4, que considera los términos de no esfericidad del cuerpo central en el cálculo de la gravedad. Otro propagador prominente es el SGP4, Propagador General Simplificado 4, el cual es un sofisticado modelo que incluye el campo gravitatorio de la Tierra con los primeros términos de algunas perturbaciones, como la resistencia del aire y efectos de la energía del Sol y la Luna (Farahmand, 2009).

En esta tesis se utiliza el propagador orbital SGP4 para realizar la simulación del entorno del picosatélite y un propagador orbital simple basado en las leyes de Kepler para implementación a bordo (Wertz, 1978).

3.4.1 Teoría orbital

La mecánica clásica permite demostrar que una satélite gira en una trayectoria circular o elíptica alrededor de un planeta debido a las fuerzas generadas por este cuerpo central. Johannes Kepler (1571 - 1630) descubrió este fenómeno por primera vez y gracias a las observaciones celestes de alta precisión realizadas por Tycho Brahe (1546 - 1601)

escribió las leyes que gobiernan este movimiento. Más tarde, Sir Isaac Newton (1642 - 1727) proporciona las explicaciones físicas de estos resultados empíricos al descubrir que la fuerza gravitatoria del cuerpo central es el factor principal. Después de algunos siglos y con la contribución de muchos físicos, geofísicos, astrónomos y matemáticos, se ha llegado a un sofisticado modelo para el campo gravitacional de la Tierra. Además, otras fuerzas externas que afectan el movimiento de los satélites tales como la resistencia del aire, un tercer cuerpo como la Luna o el Sol, etc. han sido cuidadosamente estudiadas.

Sistemas de Referencia. Es necesario definir sistemas de referencia para propósitos de la determinación de orientación en un espacio tridimensional. En la determinación de la órbita se utiliza los sistemas de referencia centrados en la tierra: ECI, ECEF y ECO.

Tiempo. El tiempo es un parámetro importante para calcular la posición de un objeto en órbita. La unidad estándar en el SI (Sistema Internacional de Unidades) para el tiempo es el segundo (seg). El segundo es excelente para conversiones entre minutos, horas, días, semanas, pero existen inconvenientes cuando se usa en conversiones entre días, meses y años, sobre todo en el aspecto computacional. Existen diferentes sistemas de tiempo, los cuales son usados en esta tesis para describir los modelos del entorno del picosatélite.

Tiempo Solar. Basado en el movimiento aparente del Sol sobre el horizonte del lugar. El tiempo promedio de Greenwich (GMT, Greenwich Mean Time) es la medición de la hora solar del meridiano de Greenwich a 0° de longitud. Una forma de cuantificar este tiempo es a través del ángulo horario, el cual viene a ser el tiempo transcurrido desde que el objeto estuvo sobre la longitud del observador y se mide positivamente hacia el oeste. Las dos medidas comunes son el Ángulo Horario de Greenwich (GHA, por sus siglas en inglés) y el Ángulo Horario Local (LHA, por sus siglas en inglés), y se puede medir en horas o grados. El tiempo solar aparente es definido como:

$$\textit{Tiempo Solar aparente local} = LHA_{\odot} + 12h, \quad (86)$$

$$\textit{Tiempo Solar aparente de Greenwich} = GHA_{\odot} - \alpha_{\odot} + 12h. \quad (87)$$

Estos tiempos solares son definidos para el sistema Tierra - Sol, y α_{\odot} es la ascensión recta del Sol, medida positivamente hacia el este en el plano del ecuador desde la dirección del equinoccio de primavera. Debido a que el Sol no tiene un movimiento regular a lo largo del año esta no es una medida exacta (Vallado, 2006).

Tiempo Sideral. Es similar al tiempo solar; sin embargo, el tiempo sideral utiliza un conjunto definido de objetos (por ejemplo, estrellas) que están fuera de nuestro sistema solar a una distancia mucho mayor que el Sol, y, por lo tanto, los objetos tienen menos cambios en el transcurso de un año. De forma más precisa, el tiempo sideral se define como el ángulo horario del equinoccio de primavera, siendo este la intersección del ecuador de la Tierra con la órbita eclíptica, ambos en movimiento.

Tiempo Universal Coordinado. El tiempo atómico (AT, por sus siglas en inglés) es la medida del tiempo, basado en transiciones cuánticas específicas de los electrones en un átomo de Cesio-133. La transición causa fotones de una frecuencia conocida para ser emitidos y que poder ser contados. El AT es la base de la hora universal coordinada (UTC, por sus siglas en ingles), que sigue a UT1 dentro de ± 0.9 s, y se calcula como:

$$UTC = UT1 - \delta UT1, \quad (88)$$

donde UT1 se define como el tiempo solar medio en el meridiano de Greenwich considerando unas modificaciones más precisas en cuanto al movimiento polar de la Tierra, $\delta UT1$ es una corrección que incluye los segundos de salto que son añadidos por el Observatorio Naval de los EE.UU. cada par de años para dar cuenta de las variaciones en la rotación terrestre.

Fecha Juliana. La fecha juliana (JD, por sus siglas en inglés) es una escala continua de tiempo cuyo origen se fija en el 1 de enero del año 4713 a.C. a las 12h del mediodía y contando los días solares correlativamente. Por ejemplo, la fecha juliana correspondiente al 11 de mayo del 2010 a las 15:22 es 2455325.47361111. La parte entera, que precede al punto, corresponde al día en el calendario juliano. La fraccional da la hora del día desde el amanecer UT (tiempo universal) como una fracción decimal de un día en el que 0.5 sería la medianoche UT. Para calcular la fecha Juliana en un período de tiempo entre los años 1901 y 2099 (Vallado, 2006):

$$a = \text{floor} \left(\frac{7 \left[\text{año} + \text{floor} \left(\frac{\text{mes} + 9}{12} \right) \right]}{4} \right),$$

$$b = \frac{\left(\frac{\text{segundo}}{60} + \text{minuto} \right) + \text{hora}}{24},$$

$$JD = 367(\text{año}) - a + \text{floor} \left(\frac{275 * \text{mes}}{9} \right) + \text{día} + 1721013.5 + b, \quad (89)$$

donde *floor* es una función de redondeo ($\text{floor}(5.487)=5$) y el año (4 dígitos), mes, día, hora, minuto y segundo se conoce de la fecha que se desea convertir. Además, es importante especificar el sistema de tiempo utilizado para calcular la fecha.

A menudo se usa mucho el término JD2000, que hace referencia a la fecha Juliana 2451545.0 TT (Tiempo Terrestre), o primero de enero del 2000 al medio día. Esta fecha es usada ampliamente para indicar un instante en el tiempo estándar para la medición de las posiciones de los cuerpos celestes y otros eventos estelares. Además, muchas relaciones para ecuaciones astronómicas de movimiento usan el número de siglos Julianos para una época en particular. Estas relaciones requieren especificar la escala de tiempo a utilizar (TUT1, TTT, ...). La fórmula general (Vallado, 2006) para el J2000 es:

$$T_{xxx} = \frac{JD_{xxx} - 2451545.0}{36525}, \quad (90)$$

Tiempo Dinámico. Muchas de las representaciones temporales discutidas todavía no tienen en cuenta muchas variaciones de la Tierra y los marcos respectivos como la rotación de variables y los efectos relativistas. Por lo tanto, unos conjuntos de tiempos dinámicos fueron desarrollados basados en referencias más estables.

El tiempo dinámico terrestre, TDT, es independiente de las ecuaciones de movimiento y se deriva directamente del tiempo atómico internacional, TAI:

$$TAI = UTC - \delta AT, \quad (91)$$

$$TDT = TAI - 32.184s, \quad (92)$$

donde δAT es publicada por el Observatorio Naval de los EE.UU.

Tiempo Terrestre. Es una escala de tiempo uniforme basada en el TAI, corregida para hacerla equivalente al tiempo de efemérides (ET, por sus siglas en inglés), ya obsoleto, al agregarle 32.1840 segundos ($TT = TAI + 32.1840 \text{ s}$). El ET se identifica con la variable independiente del tiempo en las Tablas del Sol de Simon Newcomb, que fueron usadas como base de todos los calendarios astronómicos entre 1900 y 1983 (Kasper et al., 2010). El TAI, y por lo tanto también el TT, son estrictamente uniformes (cada segundo es igual a los demás segundos).

Elementos Keplerianos. Los elementos Keplerianos están basados en las leyes de Kepler y son usados en la estimación de la órbita de un satélite y su correspondiente posición. Los elementos Keplerianos, comúnmente llamados elementos orbitales, definen una elipse, orientada sobre la tierra, y colocan el satélite sobre la elipse en un momento determinado (Wertz, 1978), ver Figura 33. En el modelo de Kepler, los satélites orbitan en una elipse de forma y orientación constante. La Tierra está en uno de los focos de la elipse, a menos que la forma de la órbita sea un círculo perfecto y en ese caso los dos focos coinciden con el centro. Hay seis elementos Keplerianos, los cuales se pueden agrupar, como se puede ver en la Tabla 8.

Tabla 8

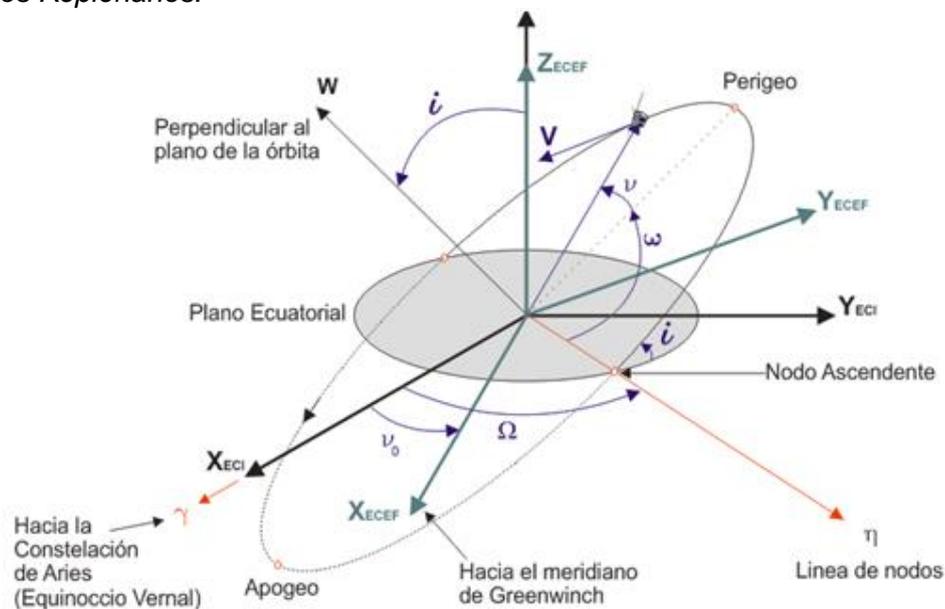
Elementos Keplerianos.

| Clasificación | Elementos Keplerianos |
|--|---|
| Parámetros que definen la forma de la órbita: | La excentricidad (e). |
| | Movimiento medio (n). |
| Parámetros que definen la posición de la órbita en relación a la Tierra. | Ascensión recta del nodo ascendente (R.A.A.N.). |
| | Inclinación de la órbita (i). |
| | Argumento del Perigeo (ω) |
| Parámetros que definen la posición del satélite en esa órbita en cada momento. | Anomalía media (M). |

Nota: elaboración propia (2023).

Figura 33

Elementos Keplerianos.



Nota: elaboración propia (2023).

Ascensión recta del nodo ascendente (R.A.A.N. - Ω). La línea de los nodos se intercepta con el plano ecuatorial en dos lugares, en uno de ellos el satélite pasa desde el sur hacia el norte, y es llamado nodo ascendente. El otro nodo en que el satélite pasa de norte a sur se llama nodo descendente. La ascensión recta del nodo ascendente es un ángulo, medido en el centro de la tierra, del equinoccio vernal hacia el nodo ascendente.

Por convención, la ascensión recta del nodo ascendente es un número entre 0 y 360 grados. Junto con la inclinación, la ascensión recta del nodo ascendente define el plano orbital en el que los satélites orbitan elípticamente.

Argumento del perigeo (ω). El perigeo es el punto en la elipse más cercano a la tierra. El punto en la elipse más alejada de la tierra se llama el apogeo. El ángulo entre la línea que va desde perigeo pasando por el centro de la tierra hasta el apogeo, y la línea de los nodos es el argumento de perigeo. Para aclarar las ambigüedades el argumento del perigeo se define como el ángulo del nodo ascendente respecto del perigeo. Por convención, el argumento de perigeo es un número entre 0 y 360 grados.

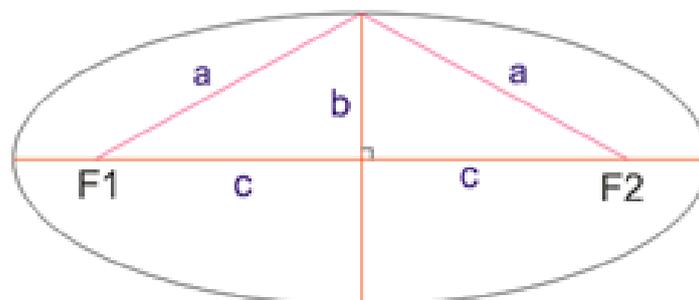
Excentricidad (e). Es un valor que oscila entre 0 y 1, y viene dado por el cociente entre la semidistancia entre los dos focos de la elipse (c) y el semieje mayor (a) como se observa en la Figura 34. La fórmula para hallar la excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (93)$$

para una elipse e se encuentra entre 0 y 1. Para un círculo perfecto $a = b$ y entonces $e = 0$. Una órbita con $e = 0$ corresponde a los satélites de baja altura LEO.

Figura 34

Elementos de una elipse.



Nota: elaboración propia (2023).

Movimiento medio (n). El movimiento medio es el promedio angular de la velocidad, número de revoluciones por día. El movimiento medio (rad/seg), y el semieje mayor están relacionado a través de la tercera ley de Kepler, por:

$$n^2 a^3 = \mu_e, \quad (94)$$

donde $\mu_e = GM_e$ es la constante gravitacional de Tierra. Debido a esta relación, el movimiento medio a veces es sustituido por el semieje mayor. Se puede obtener el número de órbitas realizado por un satélite conociendo un punto de referencia en un instante determinado, multiplicando el número de horas transcurridas desde el punto de referencia por el valor del movimiento medio para saber exactamente el número de órbitas realizadas y determinar así la posición actual del satélite en su órbita.

Anomalía Media (M). La anomalía media define la posición del picosatélite en la elipse. La anomalía media es un ángulo que avanza de manera uniforme en el tiempo de 0 a 360 grados durante una revolución, es decir, es una fracción del período orbital expresada como ángulo. Se define como 0° en el perigeo, y por lo tanto es de 180° en su apogeo. Es importante señalar que en una elipse no circular, este punto no da la dirección hacia el satélite, excepto en el perigeo y apogeo. Esto es porque el satélite no tiene una velocidad angular constante. Las diferentes anomalías utilizadas se muestran en la Figura 35, donde la anomalía verdadera, ν , es la dirección desde el centro de la Tierra hacia el satélite, y la anomalía excéntrica, E , es la dirección desde el centro de la elipse hacia el punto en un círculo concéntrico con la elipse orbital, con un radio igual al semieje mayor, donde una línea perpendicular al semieje mayor por la posición de los satélites, cruza el círculo. La relación entre la anomalía verdadera y excéntrica es dada por:

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (95)$$

$$\sin \nu = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (96)$$

y la relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica es dada por:

$$M = E - \sin E, \quad (97)$$

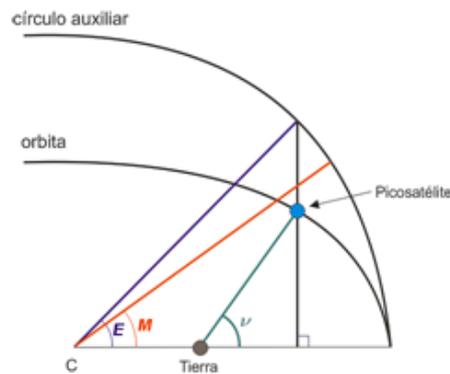
Para una órbita circular, $e = 0$, se ve que las anomalías media, excéntrica, y verdadera coinciden. Si t_0 es el instante de paso del satélite por el perigeo, la anomalía media en un instante t es:

$$M = n(t - t_0), \quad (98)$$

donde n es el movimiento medio.

Figura 35

Tipos de anomalías: (E) anomalía excéntrica, (M) anomalía media. (T) anomalía verdadera.



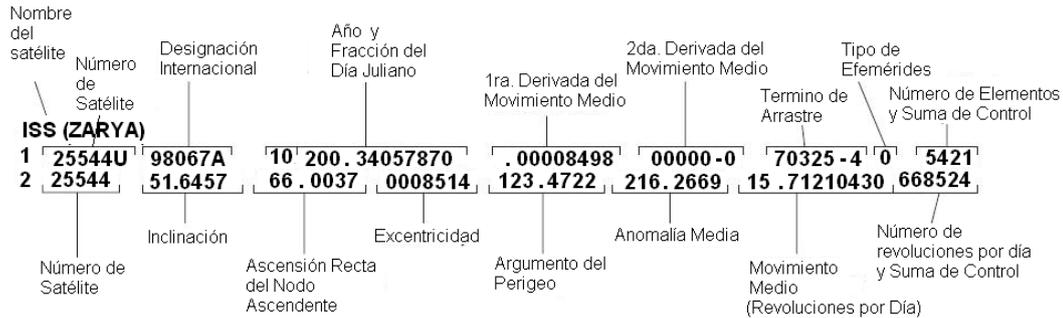
Nota: elaboración propia (2023).

TLE. El TLE (Two-Line Element) es un conjunto de elementos orbitales que describen la órbita de un satélite terrestre. Puede ser utilizado por un modelo orbital implementado en un procesador para calcular la posición exacta de un satélite en un momento determinado. El TLE es un formato especificado por el NORAD y utilizada por la NASA. Un TLE consiste en una línea de título seguido de dos líneas de texto con formato. Los primeros términos se asignan para la identificación de los objetos, seguidos por una secuencia de parámetros que caracteriza la forma, tamaño y orientación de la órbita. Todos los objetos espaciales están clasificados por el NORAD como cercanos a la Tierra (período de menos de 225 minutos) o en el espacio profundo (período igual o mayor que 225 minutos). Dependiendo del periodo, los conjuntos de elementos NORAD se generan automáticamente como cercanos a la Tierra o del espacio profundo y se distribuyen

gratuitamente en Internet en forma de TLE. T.S. Kelso gestiona la publicación de datos TLE para una amplia gama de satélites y objetos espaciales (Celestrak, 2012). En la Figura 36 se describe el TLE para la Estación Espacial Internacional (ISS). Una descripción más detallada de estos elementos se da en el Apéndice A.

Figura 36

Detalle del TLE para la Estación Espacial Internacional (ISS).



Nota: elaboración propia (2023)

3.4.2 Modelo matemático SGP4

El modelo SGP4 fue introducido por primera vez públicamente en 1980 en el Informe Spacetrack # 3 (Hoots & Roehrich, 1980). La importancia del modelo SPG4 es que por primera vez un modelo propuesto para la determinación de la órbita dio resultados consistentes con los datos generados por el Comando de Defensa Aeroespacial de América del Norte (NORAD).

En el informe Spacetrack Nro. 3 se propusieron cinco modelos matemáticos para la predicción de la posición y la velocidad del satélite. El primero de ellos, el SGP, fue desarrollado por Hilton y Kuhlman (1966) en base a una simplificación del modelo de gravitación de Kozai (1959) y se utiliza para los satélites cercanos a la Tierra.

El segundo modelo, SGP4, fue desarrollado por Ken Cranford en 1970 y es la simplificación de un modelo más general que posee dos aspectos, primero del tipo gravitacional puro, que es la “teoría de la solución del problema del satélite artificial sin efecto aerodinámico” presentado por Brouwere en 1959 y el segundo de resistencia

aerodinámica, que consiste en la representación de la densidad del aire por funciones exponenciales en las ecuaciones de desaceleración del satélite.

El siguiente modelo, SDP4, es una extensión del SGP4 que se utiliza para los satélites en el espacio profundo. El modelo SGP8 se utiliza para los satélites cercanos a la Tierra. Por último, el modelo SDP8 es una extensión de SGP8 que se utiliza para los satélites en el espacio profundo.

Después del lanzamiento del informe, el código "oficial" fue mantenido en secreto por el gobierno estadounidense y posteriormente fue puesto a disposición de los organismos a través de un programa ejecutable llamado SATRAK. Las agencias que no estaban enteradas de esto, o que necesitaban personalizar el código para sus proyectos se vieron obligadas a manipular el código original, dando lugar a una amplia variedad de códigos de propagación basado en el mismo modelo. David Vallado dio a conocer un documento de la AIAA en 2004 (Vallado, 2006), que trataba de conciliar los muchos códigos en un código estandarizado.

Vallado reestructuró el código original y lo hizo computacionalmente más eficiente, le dio una capacidad de procesar múltiples satélites a la vez, y liberó código fuente disponible en varios lenguajes de programación (Celestrak, 2012). Además, incluyó estudios Geodésicos Mundiales (wgs72, wgs72old y wgs84) en el modelo gravitatorio de la Tierra. Para cada uno de estos modelos de la gravedad, se incluye las propiedades de la Tierra tales como el radio, la constante de gravedad (μ), etc., así como los términos zonales (J_2 , J_3 , J_4). Por otra parte, en el código de Vallado se utiliza unos parámetros para la determinación de órbita cercanas a la Tierra y del Espacio Profundo, los cuales se mantienen en una estructura llamada "Satrec". Los intervalos de tiempo se establecen en términos de minutos de la época. La salida del código (posición y velocidad) se da en el sistema de coordenadas del TEME.

3.4.3 Modelo matemático de órbita a bordo

El propagador orbital SGP4 es demandante computacionalmente y su implementación requiere un procesador de altas prestaciones. Por esa razón un propagador orbital simplificado es necesario. Este propagador se basará en los elementos Keplerianos de la órbita y considerará los efectos de perturbaciones como la forma de la Tierra, el sol, la luna, resistencia atmosférica y radiación solar sobre estos elementos.

Modelo del propagador orbital. Tomando como base el propagador orbital descrito por Svartveit (2003). Se comienza con un modelo simple y luego se agregan los efectos de las perturbaciones. Partiendo del conocimiento de los elementos Keplerianos de un punto dentro de la órbita de un satélite en un determinado instante de tiempo, es posible estimar su posición en el futuro. La anomalía media se incrementa de manera uniforme en el tiempo y su predicción en el futuro es dada por:

$$M(t_0 + t) = M(t_0) + n \cdot t, \quad (99)$$

Para transformar la estimación en coordenadas ECEF, es necesario resolver la ecuación de Kepler:

$$E(t) = M(t) + e \sin E(t), \quad (100)$$

Perturbaciones en la Órbita. Como los supuestos en que se basan las leyes de Kepler no son exactos, el modelo es mejorado teniendo en cuenta las irregularidades conocidas. La fuente más grande de error se debe a que la Tierra no es perfectamente esférica. La deformación es a menudo parametrizada por la función geopotencial que se describe en (Wertz, 1978), que utiliza los coeficientes de deformación J_i para las deformaciones de i -ésimo orden. Las fuerzas gravitacionales del Sol y la Luna, las mareas de los océanos hacia Tierra, y diferentes radiaciones electromagnéticas, también tienen una influencia en las perturbaciones de la órbita de los satélites. Las perturbaciones son usualmente divididas en secular, de período corto, y período largo. Las perturbaciones de período corto tienen un período más corto que el período orbital del satélite, mientras que

las perturbaciones de periodo largo tienen un período más largo que el satélite. En este trabajo solo se considera las perturbaciones seculares.

Perturbaciones debidas a que la Tierra no es esférica. La tierra tiene una protuberancia en el Ecuador, es aplanada en los polos y es ligeramente en forma de pera. Esto da lugar a perturbaciones en todos elementos Keplerianos. La deformación de segundo orden de la Tierra considera que el hecho de que es ligeramente aplanada, y conduce a la más grande de las perturbaciones en los elementos Keplerianos.

De acuerdo con las ecuaciones planetarias de Lagrange con un factor de aplanamiento, J_2 , los resultados en las derivadas temporales de la ascensión recta del nodo ascendente, y el argumento de perigeo resultan:

$$\dot{\Omega}_{J_2} = -\frac{3}{2}na_e^2 \frac{\cos i}{a^2(1-e^2)^2} J_2, \quad (101)$$

$$\dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{4}na_e^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{a^2(1-e^2)^2} J_2, \quad (102)$$

donde a_e es el radio de la Tierra.

Perturbaciones debidas al Sol y la Luna. El Sol y la Luna causan variaciones periódicas en todos los elementos Keplerianos, pero solo en el caso de la ascensión recta del nodo ascendente y argumento de perigeo, causan perturbaciones seculares. Para órbitas circulares cercanas a la Tierra, una aproximación sugerida por Larson y Wertz (1992):

$$\dot{\Omega}_{Luna} = -0.00338 \frac{\cos i}{n}, \quad (103)$$

$$\dot{\Omega}_{Sol} = -0.00154 \frac{\cos i}{n}, \quad (104)$$

$$\dot{\omega}_{Luna} = 0.00169 \frac{5 \cos^2 i - 1}{n}, \quad (105)$$

$$\dot{\omega}_{Sol} = 0.00077 \frac{5 \cos^2 i - 1}{n}, \quad (106)$$

donde n es el número de revoluciones por día, y $\dot{\Omega}$ y $\dot{\omega}$ se dan en grados/día. Esta perturbación afecta en mayor grado a satélites de órbitas altas.

Perturbaciones debidas a la resistencia atmosférica. La resistencia de la atmósfera es una fuerza que crea una aceleración, a_D , en dirección opuesta de la velocidad del satélite. La magnitud de esta aceleración depende de la densidad de la atmósfera, r , el área de sección transversal, A , y la masa, m , del satélite y la magnitud de la velocidad, V , y está dada por:

$$a_D = -\frac{1}{2}\rho \frac{C_D A}{m} V^2, \quad (107)$$

donde C_D es el coeficiente de arrastre. El coeficiente de arrastre es más detallado en (Larson & Wertz, 1992), donde se propone aproximar C_D a un valor de 2.2. El arrastre atmosférico es una fuerza de ruptura y por tanto elimina la energía de los satélites en órbita. Esto conduce a una disminución en la altura orbital, pero a tasas muy bajas, por lo que no está incluido en el estimador de la órbita.

Perturbaciones debidas a la radiación solar. La aceleración causada por la radiación solar tiene una magnitud dada por:

$$a_R = -4.5 \times 10^{-6} (1 + r) \frac{A}{m}, \quad (108)$$

donde r es un factor de reflexión entre 1 y 0. Las perturbaciones debidas a la radiación solar están en la misma magnitud que las perturbaciones de arrastre atmosférico para altitudes de 800 km, y menos para las órbitas inferiores, (Larson & Wertz, 1992). Las perturbaciones de la radiación solar no se implementan en el estimador de órbita.

La ecuación de Kepler relaciona la anomalía excéntrica y la anomalía media con una solución única, pero por ser una ecuación trascendente, es decir para un E dado no se puede obtener directamente un M , se utiliza el método de Newton para resolverla:

$$E_{i+1} = E_i + \frac{M + e \sin E_i - E_i}{1 - e \cos E_i}, \quad (109)$$

Teniendo en cuenta la anomalía excéntrica, el vector desde el centro de la Tierra al picosatélite en el sistema ECO es dada por:

$$r_{OC} = a \begin{bmatrix} \cos E - e \\ (\sqrt{1 - e^2}) \sin E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (110)$$

Transformando r a los marcos ECI y ECEF se obtiene:

$$R_I = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)r_{OC}, \quad (111)$$

$$R_E = R_z(-\Omega + \theta)R_x(-i)R_z(-\omega)r_{OC}, \quad (112)$$

donde θ es la ascensión del meridiano cero o el ángulo desde el equinoccio de primavera al meridiano cero, y R_z y R_x son matrices de rotación.

Finalmente, como todas las perturbaciones incluidas son derivadas de primer orden en el tiempo de los elementos Keplerianos y estas son lineales, la posición en un futuro determinado, t , en el tiempo es fácil de predecir a partir de los elementos Keplerianos iniciales en t_0 . La posición con los efectos de las perturbaciones en los marcos de referencia ECI y ECEF quedan:

$$R_I = R_z\left(-(\dot{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_p t)\right)R_x(-i)R_z\left(-(\dot{\omega}_0 + \dot{\omega}_p t)\right)r_{OC}, \quad (113)$$

$$R_E = R_z\left(-(\dot{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_p t) + \theta_0 + \omega_e t\right)R_x(-i)R_z\left(-(\dot{\omega}_0 + \dot{\omega}_p t)\right)r_{OC}, \quad (114)$$

donde:

$$\dot{\Omega}_p = \dot{\Omega}_{J2} + \dot{\Omega}_{Luns} + \dot{\Omega}_{Sol}, \quad (115)$$

$$\dot{\omega}_p = \dot{\omega}_{J2} + \dot{\omega}_{Luns} + \dot{\omega}_{Sol}, \quad (116)$$

3.5 Picosatélite

En esta sección se presenta el sistema de ecuaciones que rigen la orientación de un satélite. La orientación de un satélite puede ser dividida en dos partes, la cinemática y dinámica. La cinemática, trata exclusivamente del cambio en la orientación de los satélites, independientemente de las fuerzas que actúan sobre el satélite y la dinámica, donde los

parámetros dependientes del tiempo son una función de las fuerzas externas que actúan sobre el satélite.

3.5.1 Modelo matemático de la cinemática

Si la orientación de un satélite está cambiando con el tiempo, entonces el cuaternión en el tiempo $t+\Delta t$, $\mathbf{q}(t+\Delta t)$, diferirá del cuaternión en el tiempo t , $\mathbf{q}(t)$, en el cuaternión diferencia $\Delta\mathbf{q}(t)$, cumpliéndose la relación:

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \Delta\mathbf{q}(t)\mathbf{q}(t), \quad (117)$$

Escribiendo $\Delta\mathbf{q}(t)$ en términos de un ángulo de rotación $\Delta\beta$ alrededor del vector $\eta(t)$ en el tiempo Δt , se obtiene:

$$\Delta\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \\ \eta_1(t) \sin\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \\ \eta_2(t) \sin\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \\ \eta_3(t) \sin\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (118)$$

Asumiendo que $\eta(t)$ y $\Delta\beta$ son constantes durante el tiempo Δt y usando la definición del producto de cuaterniones, se obtiene:

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \left(\cos\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) I_{4 \times 4} + \sin\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & -\eta_1(t) & -\eta_2(t) & -\eta_3(t) \\ \eta_1(t) & 0 & \eta_3(t) & -\eta_2(t) \\ \eta_2(t) & -\eta_3(t) & 0 & \eta_1(t) \\ \eta_3(t) & \eta_2(t) & -\eta_1(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{q}(t), \quad (119)$$

Donde I es la matriz identidad de 4×4 . Esta ecuación es válida si el eje de rotación no cambia durante el intervalo de tiempo Δt .

Si Δt es infinitesimal y $\Delta\beta = \omega\Delta t$, donde ω es la magnitud de la velocidad angular instantánea del satélite. Usando las aproximaciones trigonométricas para pequeños ángulos, se tiene:

$$\cos\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \approx 1, \quad \sin\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\omega\Delta t, \quad (120)$$

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) \approx [I_{4 \times 4} + \frac{1}{2}\Omega\Delta t]\mathbf{q}(t), \quad (121)$$

Donde Ω es la matriz antisimétrica de 4x4:

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1(t) & -\omega_2(t) & -\omega_3(t) \\ \omega_1(t) & 0 & \omega_3(t) & -\omega_2(t) \\ \omega_2(t) & -\omega_3(t) & 0 & \omega_1(t) \\ \omega_3(t) & \omega_2(t) & -\omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -S(\omega) \end{bmatrix}. \quad (122)$$

Y $\omega = \omega\eta$ es el vector velocidad angular. La ecuación diferencial de $\mathbf{q}(t)$ es definida como:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\mathbf{q}(t+\Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t}, \quad (123)$$

Sustituyendo los valores obtenidos, la ecuación diferencial cinemática está dada por:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2}\Omega(\omega(t))\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}(t) = \frac{1}{2}\Xi(\mathbf{q}(t))\omega(t), \quad (124)$$

Donde Ξ es la matriz de 4x3:

$$\Xi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q^T \\ q_0 I_{3 \times 3} - S(q) \end{bmatrix}, \quad (125)$$

Finalmente, una representación alternativa de la ecuación diferencial cinemática es dada por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}q^T\omega \\ \frac{1}{2}[q_0 I_{3 \times 3} - S(q)]\omega \end{bmatrix}. \quad (126)$$

3.5.2 Modelo matemático de la dinámica

La cantidad fundamental en la mecánica de rotación es el momento angular (Wertz, 1978). Para una colección de n puntos, el momento angular está dado por:

$$\mathbf{L}_{total} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (127)$$

Donde r_i , m_i y v_i son la masa, posición y velocidad respectivamente de la masa puntual i-ésima en un sistema de referencia inercial. Diferenciando y utilizando la segunda

ley de Newton con $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ y reemplazando la cantidad de movimiento $\mathbf{p} = m \times \mathbf{v}$, tenemos:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n (m\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m\mathbf{a}_i), \quad (128)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \boldsymbol{\tau}, \quad (129)$$

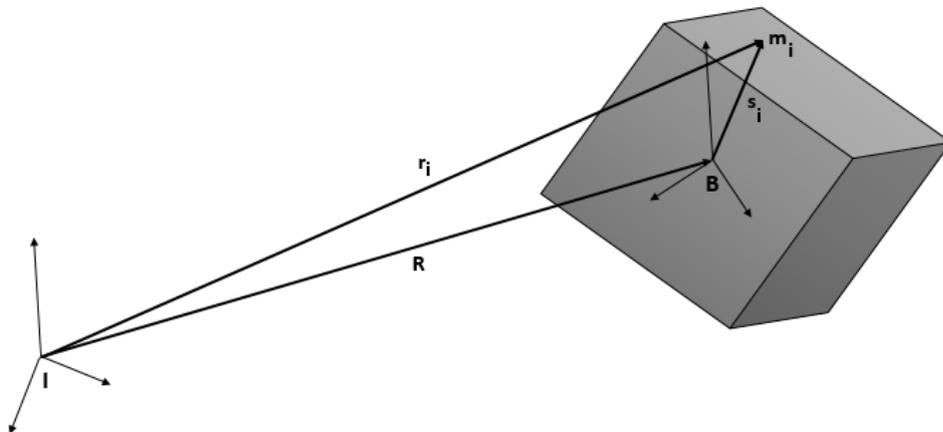
$$\frac{dL^i}{dt} = \tau^i, \quad (130)$$

Donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de los torques aplicados en el picosatélite visto desde el sistema inercial **I**.

Si definimos un nuevo sistema de referencia ubicado en el centro de masa del satélite, **B**, y redefinimos la posición y velocidad de la masa puntual *i*-ésima en el sistema de referencia ligado al satélite. En la Figura 37 se observa que la posición de la masa puntual, *i*, relativa al sistema de referencia inercial, **I**, es el vector suma de su posición relativa al sistema de referencia fijado al satélite, \mathbf{s}_i y el vector **R**, que une los centros de ambos sistemas de referencia. Luego el vector posición del satélite en el sistema inercial se puede representar como:

Figura 37

*Masa puntual, *i*, relativa al sistema de referencia inercial, **I**.*



Nota: elaboración propia (2023).

$$r_i = R + s_i, \quad (131)$$

y diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$v_i = V + \frac{ds_i}{dt}, \quad (132)$$

donde V es la velocidad de B en el sistema inercial.

Reemplazando las Ecuaciones 130 y 131 en 126 y teniendo en cuenta que B es el centro de masa del satélite (Wertz, 1978), tenemos:

$$\mathbf{L}_{total} = MR \times V + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{s}_i \times \frac{ds_i}{dt}, \quad (133)$$

$$\mathbf{L}_{total} = MR \times V + L, \quad (134)$$

Donde M es la masa total del satélite, R es la ubicación del centro de masa del satélite respecto al sistema de referencia inercial y V es la velocidad de O' respecto a dicho sistema. El primer término de la Ecuación 130 representa el momento angular de la masa total considerada como un punto ubicado en el centro de masa del satélite, y el segundo término es la contribución del movimiento de las n masas puntuales relativo al centro de masa del satélite

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\omega_{ib}^b, \quad (135)$$

donde I es el momento de inercia, que caracteriza la distribución de la masa del satélite, y ω_{ib}^b es la velocidad angular del satélite respecto al sistema de referencia inercial.

Todo esto definido en el marco inercial. La ecuación de momentos de Euler en el marco inercial queda definida como:

$$\frac{d\mathbf{L}^i}{dt} = \frac{d(\mathbf{I}\omega_{ib}^b)}{dt} = \boldsymbol{\tau}^i, \quad (136)$$

Usando los resultados del capítulo 2 esta ecuación es transformada al marco fijado al satélite, obteniéndose:

$$\frac{d\mathbf{L}^b}{dt} = -\omega_{ib}^b \times \mathbf{L}^b + \left(\frac{d\mathbf{L}^i}{dt}\right)^b = -\omega_{ib}^b \times \mathbf{L}^b + \boldsymbol{\tau}^b, \quad (137)$$

o, equivalentemente:

$$\frac{d\mathbf{I}\omega_{ib}^b}{dt} = -\omega_{ib}^b \times (\mathbf{I}\omega_{ib}^b) + \boldsymbol{\tau}^b, \quad (138)$$

Siendo la Ecuación 132 la forma más conocida de la ecuación de momentos de Euler. La ecuación dinámica del movimiento se puede reordenar para obtener la ecuación diferencial no lineal:

$$\dot{\omega}_{ib}^b(t) = \mathbf{I}^{-1} \left(\boldsymbol{\tau}^b(t) - \omega_{ib}^b(t) \times (\mathbf{I}\omega_{ib}^b(t)) \right), \quad (139)$$

Donde $\boldsymbol{\tau}^b$ es el torque externo, expresado como la suma de los torques de perturbación y el torque de control.

$$\boldsymbol{\tau}^b(t) = \boldsymbol{\tau}_{pert}^b(t) + \boldsymbol{\tau}_{ctrl}^b(t). \quad (140)$$

La velocidad angular del satélite respecto al sistema de referencia inercial se expresa respecto al sistema orbital por:

$$\omega_{ib}^b = \omega_{io}^b + \omega_{ob}^b = \mathbf{R}_o^b \omega_{io}^o + \omega_{ob}^b, \quad (141)$$

donde ω_{io}^o es la velocidad angular del sistema de referencia orbital con respecto al sistema de referencia inercial medido en el orbital:

$$\omega_{io}^o = [0 \quad -\omega_o \quad 0]^T, \quad (142)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (143)$$

donde ω_o es la frecuencia orbital para satélites de órbita circular, la constante GM es usualmente escrita como el parámetro gravitacional μ , r el vector posición desde el centro de masa del satélite

Los torques de perturbación que modifican la orientación del picosatélite en el espacio son principalmente:

Gradiente de Gravedad. Debido a la aceleración de la gravedad se genera una fuerza sobre el picosatélite y dependiendo de su geometría se genera un torque que afecta su movimiento:

$$\tau_g^b(t) = 3\omega_o O_3 \times IO_3, \quad (144)$$

donde ω_o es la velocidad angular del satélite, O_3 es la tercera columna de la matriz de rotación del sistema fijado al cuerpo al fijo en la órbita.

Arrastre Aerodinámico. Los torques aerodinámicos son debidos a la resistencia atmosférica que actúa sobre el picosatélite. Estos torques disminuyen con la altitud y están dados por:

$$\tau_a^b(t) = r \times \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \right), \quad (145)$$

donde ρ es la densidad del fluido, V es la velocidad orbital, S es el área de referencia, C_D es el coeficiente de resistencia y r es la distancia del centro de masa al centro de presión.

Presión Solar. Las fuerzas generadas por el Sol se deben a las radiaciones electromagnéticas y las partículas solares de alta energía que escapan de su superficie. El torque es definido como:

$$\tau_{ps}^b(t) = r \times \left(\frac{E_e}{c} A C_p \right), \quad (146)$$

donde r es la posición del centro de masa del satélite con respecto al centro geométrico del área proyectada A , c es la velocidad de la luz y C_p una constante entre 1 y 2, donde 1 es para un cuerpo negro y 2 para un cuerpo blanco.

Capítulo IV. Desarrollo de técnicas de determinación de orientación para el picosatélite Chasqui I

Los métodos de determinación de orientación se pueden clasificar en determinísticos y probabilísticos (Wertz, 1978). Los métodos determinísticos requieren de un mismo número de observaciones similar al número de variables de interés para poder obtener soluciones de orientación. Por otro lado, los métodos probabilísticos, como los de estimación de estados, corrigen la estimación de los parámetros de orientación en forma sucesiva. Actualmente los métodos de estimación de estados son los más utilizados.

Los métodos para determinar la orientación del picosatélite consisten en utilizar los datos recogidos por los sensores de sol, magnetómetro, giroscopio y la salida de los modelos de a bordo que describen el campo magnético y la dirección hacia el sol en referencia a la posición de los satélites. Para poder utilizar de manera eficaz todos los sensores disponibles y así conseguir una mejor estimación de la orientación, es necesario utilizar un método de fusión de datos de sensores. La mayoría de los actuales métodos de fusión de datos emplean descripciones probabilísticas de las observaciones y de los procesos, utilizando alguna regla para combinar esta información (Durrant-Whyte & Henderson, 2016). Entre los métodos de fusión de datos más utilizados tenemos: el filtro Bayesiano, las redes probabilísticas, el filtro de Kalman y el método secuencial Monte Carlo.

4.1 Métodos determinísticos

4.1.1 TRIAD

El método de determinación de actitud triaxial (TRIAD, Triaxial Attitude Determination method) es un algoritmo simple muy conocido que genera la matriz de orientación entre dos sistemas de referencia utilizando un vector representado en ambos sistemas (Shuster & Oh, 1981). El proceso de encontrar la matriz mediante TRIAD se detalla a continuación.

Sean W_1 y W_2 dos vectores unitarios y columna cuyos elementos son, respectivamente, los componentes de los vectores de referencia dados en el sistema de referencia centrado en el cuerpo, y V_1 y V_2 denotan los vectores unitarios y columna cuyo elementos son, respectivamente, los componentes de los vectores de observación dados en el otro sistema de referencia.

Es necesario encontrar una matriz ortogonal R_V^W que cumpla las condiciones de transformación entre sistemas de referencia:

$$R_V^W V_1 = W_1, \quad (147)$$

$$R_V^W V_2 = W_2. \quad (148)$$

Utilizando los vectores de referencia y observación se puede obtener dos triadas ortonormales de vectores de referencia y observación:

$$r_1 = V_1 \quad (149)$$

$$r_2 = (r_1 \times V_2) / |r_1 \times V_2|, \quad (150)$$

$$r_3 = r_1 \times r_2. \quad (151)$$

$$s_1 = W_1, \quad (152)$$

$$s_2 = (s_1 \times W_2) / |s_1 \times W_2|, \quad (153)$$

$$s_3 = s_1 \times s_2. \quad (154)$$

Entonces la matriz que transforma del sistema en el cuerpo al sistema de coordenadas de referencia se calcula a continuación. Existe una única matriz ortogonal que cumple:

$$R_V^W r_i = s_i, \quad (155)$$

Esta matriz de orientación está dada por:

$$R_V^W = \sum_{i=1}^3 s_i r_i^T = M_{obs} M_{ref}^T, \quad (156)$$

donde $M_{obs} = [r_1 \ r_2 \ r_3]$ y $M_{ref} = [s_1 \ s_2 \ s_3]$.

Según Shuster & Oh (1981), la matriz de covarianza de orientación se define como la matriz de covarianza de un conjunto de ángulos de Euler que parametrizan la orientación, $P_{\phi\phi}$. Aunque, por lo general es aproximada como la matriz de covarianza de un conjunto de ángulos que están referenciados a los ejes del cuerpo, $P_{\theta\theta}$.

$$P_{\theta\theta} = \sigma_1^2 I_{3 \times 3} + \frac{1}{|W_1 + W_2|^2} [(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)W_1W_1^T + \sigma_1^2(W_1 \cdot W_2)(W_1W_2^T + W_2W_1^T)], \quad (157)$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_{V_1}^2 + \sigma_{W_1}^2 \quad \sigma_2^2 = \sigma_{V_2}^2 + \sigma_{W_2}^2, \quad (158)$$

La Ecuación 158 combina las varianzas de error de los vectores V y W en varianzas de medición totales.

4.1.2 QUEST

Este método resuelve el famoso problema de Wahba, en el que se propone que la orientación de un satélite se encuentra como una estimación de mínimos cuadrados de la matriz de rotación, que lleva un vector del marco de referencia conocido al marco de referencia fijo al satélite.

Se tiene:

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum a_i |b_i - Ar_i|^2, \quad (159)$$

donde A es una matriz ortogonal, la cual rota un vector unitario de un marco de referencia r_i a un marco de referencia fijo al satélite b_i . Entonces lo que se busca es reducir al mínimo la función de pérdida L(A).

Los pesos no negativos a_i se utilizan para la ponderación de los pares de vectores y su suma es igual a 1. La función de pérdida de Wahba puede ser escrita de la siguiente forma:

$$L(A) = \sum a_i - \text{tr}(AB^T), \quad (160)$$

donde B es obtenido usando:

$$B = \sum a_i b_i r_i^T, \quad (161)$$

Basado en la Ecuación 159, la función de pérdida $L(A)$ es minimizada por la maximización de $tr(AB^T)$.

Existen diferentes métodos para resolver el problema de Wahba, sobresaliendo el Estimador de Cuaternión (QUEST). En este método la matriz de rotación A se determina a partir del cálculo de la matriz simétrica K :

$$K = \begin{bmatrix} S - I * tr(B) & z \\ z^T & tr(B) \end{bmatrix}, \quad (162)$$

$$z = \begin{bmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{12} - B_{21} \end{bmatrix}, \quad (163)$$

$$S = B + B^T. \quad (164)$$

El vector propio de K con valor propio más grande será el escogido para obtener el cuaternión óptimo que representa la rotación:

$$Kq_{opt} = \lambda_{max}q_{opt}. \quad (165)$$

La parte principal de este algoritmo consiste en encontrar el vector propio λ_{max} . Shuster & Oh (1981), demuestran que el valor propio de observación para el caso de dos vectores de observación puede ser definido como:

$$\lambda_{max} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2[(b_1 \cdot b_2)(r_1 \cdot r_2) + |b_1 \times b_2||r_1 \times r_2|]}, \quad (166)$$

Luego el cuaternión óptimo es obtenido por la siguiente ecuación:

$$q_{opt} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \begin{bmatrix} x \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad (167)$$

donde:

$$\gamma = \left(\lambda_{max}^2 - (tr(B))^2 + tr(adj(S)) \right) (\lambda_{max} + tr(B)) - \det(S), \quad (168)$$

$$x = \left[\left(\lambda_{max}^2 - (tr(B))^2 + tr(adj(S)) \right) I + (\lambda_{max} + tr(B))S + S^2 \right] z. \quad (169)$$

La matriz de covarianza del cuaternión es definida como:

$$P_{QQ} = 1/4 P_{\theta\theta} = \frac{1}{4} \sigma_{tot}^2 [I_{3x3} - \sum_{i=1}^n a_i b_i b_i^T]. \quad (170)$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_{r_i}^2 + \sigma_{b_i}^2. \quad (171)$$

$$a_i = \sigma_{tot}^2 / \sigma_i^2. \quad (172)$$

$$(\sigma_{tot}^2)^{-1} = \sum_{i=1}^n (\sigma_i^2)^{-1}. \quad (173)$$

Para el caso especial donde solo hay dos vectores de observación, la Ecuación 173 puede simplificarse a:

$$P_{QQ} = 0.25 \left\{ \sigma_{tot}^2 I_{3x3} + \frac{1}{|W_1 + W_2|^2} [(\sigma_2^2 - \sigma_{tot}^2) b_1 b_1^T + (\sigma_1^2 - \sigma_{tot}^2) b_2 b_2^T + \sigma_{tot}^2 (b_1 \cdot b_2) (b_1 b_2^T + b_2 b_1^T)] \right\}. \quad (174)$$

4.1.3 Solución analítica de dos medidas vectoriales

Yang (2019) describe un método más simple que es una solución analítica, si la determinación de la orientación se basa en solo dos mediciones vectoriales.

Dado los vectores r_1 y b_1 , la rotación más general que los relaciona está dada por:

$$\bar{q}_1 = \bar{q}(r_1, \varphi_r) \otimes \bar{q}(b_1, \varphi_b). \quad (175)$$

donde φ_b y φ_r son ángulos arbitrarios de rotación alrededor de b_1 y r_1 , respectivamente. Si se considera $\varphi = \varphi_b + \varphi_r$ y realiza operaciones trigonométricas se puede obtener:

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+b_1 \cdot r_1)}} \left((1 + b_1 \cdot r_1) \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (b_1 \times r_1) \cos \frac{\varphi}{2} + (b_1 + r_1) \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (176)$$

Si se considera un segundo par de vectores r_2 y b_2 , de la misma forma la rotación que mapea r_2 y b_2 está dada por:

$$\bar{q}_2 = \bar{q}(r_2, \Psi_r) \otimes \bar{q}(b_2, \Psi_b). \quad (177)$$

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+b_2 \cdot r_2)}} \left((1 + b_2 \cdot r_2) \cos \frac{\Psi}{2}, \quad (b_2 \times r_2) \cos \frac{\Psi}{2} + (b_2 + r_2) \sin \frac{\Psi}{2} \right). \quad (178)$$

donde $\psi = \psi_b + \psi_r$. Finalmente, se necesita encontrar un cuaternión \bar{q} que esté en ambas familias, \bar{q}_1 y \bar{q}_2 , para que pueda asignar r_1 a b_1 y r_2 a b_2 simultáneamente. Este cuaternión de orientación está definido de manera única y se obtiene igualando las Ecuaciones 175 y 177, según:

$$\bar{q} = \frac{(b_2 \cdot r_1 - b_1 \cdot r_2, (b_1 - r_1) \times (b_2 - r_2))}{\sqrt{(b_2 \cdot r_1 - b_1 \cdot r_2)^2 + \|(b_1 - r_1) \times (b_2 - r_2)\|^2}} \quad (179)$$

4.2 Métodos probabilísticos

4.2.1 Filtro de Kalman

Estimación de estados. Para cualquier variable o parámetro de estimación, hay tres cantidades de interés: el valor verdadero, el valor medido y el valor estimado.

Sea el modelo del sistema dinámico lineal en tiempo discreto:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k, \quad (180)$$

$$y_k = H x_k. \quad (181)$$

donde Φ es la matriz de transición de estados, x_k es el vector de estados de la iteración k y H_k es la matriz de medición.

El modelo de medición viene dado por:

$$\tilde{y}_k = H x_k + v_k, \quad (182)$$

donde v es el ruido de medición.

El estimador en tiempo discreto proporcionar una estimación actual mediante la medición actual, y es definido por dos ecuaciones acopladas:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi \hat{x}_k^+ + \Gamma u_k, \quad (183)$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K[\tilde{y}_k - H \hat{x}_k^-], \quad (184)$$

donde las Ecuaciones 180 y 181 son conocidas como la ecuación de predicción o propagación y la ecuación de corrección o actualización, respectivamente.

Filtro de Kalman lineal discreto. El filtro de Kalman es un estimador usado para solucionar el “problema de estimación lineal cuadrático”, que consiste en estimar el estado instantáneo de un sistema lineal dinámico por medio de medidas relacionadas con el estado y adicionando ruido blanco. El estimador resultante es estadísticamente óptimo con respecto a cualquier función cuadrática de estimación del error.

Considerando un sistema dinámico lineal en tiempo discreto, con x_k como vector de estados en el instante de muestreo k . Siendo, x_k el conjunto de datos mínimos suficientes para describir el comportamiento dinámico del sistema. Normalmente, x_k es desconocido y se estima a partir de un conjunto de datos medidos, representados por y_k .

La ecuación del sistema dinámico lineal con ruido agregado está dada por:

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k u_k + Y_k w_k, \quad (185)$$

donde Φ_k es la matriz de transición de estados de la iteración k a la $k+1$, x_k es el vector de estados de la iteración k , Γ_k es la matriz de entrada de la iteración k , Y_k es la matriz de ponderación del ruido de la iteración k y w_k representa el vector de ruido del proceso de tipo gaussiano con media cero.

Se define la matriz de covarianza del ruido del proceso como:

$$E\{w_k w_j^T\} = \begin{cases} Q_k, & \text{para } k = j \\ 0, & \text{para } k \neq j \end{cases} \quad (186)$$

La ecuación de salida del proceso lineal con ruido agregado es:

$$\tilde{y}_k = H_k x_k + v_k, \quad (187)$$

donde H_k es la matriz de medición y v_k representa el vector del ruido de medición de tipo gaussiano con media cero.

Se define la matriz de covarianza del ruido de la medición como:

$$E\{v_k v_j^T\} = \begin{cases} R_k, & \text{para } k = j \\ 0, & \text{para } k \neq j \end{cases} \quad (188)$$

Se considera que el ruido de medición no está correlacionado con el ruido del proceso, es decir:

$$E\{w_k v_j^T\} = 0, \text{ para todo } k. \quad (189)$$

El vector de estados x_k puede ser estimado a partir de las siguientes ecuaciones del filtro de Kalman.

Propagación del estado estimado:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{x}_k^+ + \Gamma_k u_k. \quad (190)$$

Propagación de la covarianza del error:

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + \Upsilon_k Q_k \Upsilon_k^T. \quad (191)$$

Obtención de la ganancia de Kalman:

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}. \quad (192)$$

Actualización del Estado Estimado:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [\tilde{y}_k - H_k \hat{x}_k^-]. \quad (193)$$

Actualización de la covarianza del error:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-. \quad (194)$$

En la inicialización, cuando $k=0$, se tiene:

$$\hat{x}_{(t_0)} = \hat{x}_0. \quad (195)$$

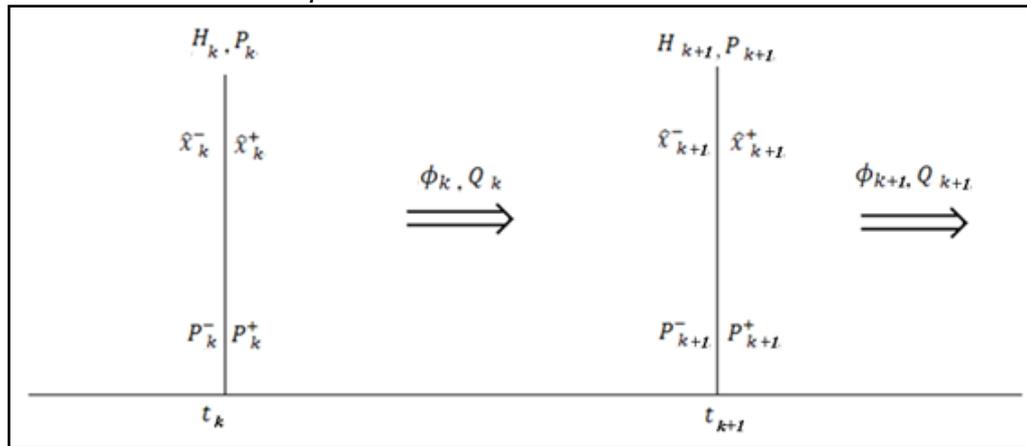
$$P_0 = E\{\tilde{x}_0 \tilde{x}_0^T\} = E\{(x_0 - E\{x_0\})(x_0 - E\{x_0\})^T\}. \quad (196)$$

La derivación de estas ecuaciones se puede encontrar en Crassidis & Junkins (2011). En resumen, la estructura del filtro de Kalman en tiempo discreto tiene la misma forma que un estimador discreto, pero la ganancia en el filtro de Kalman se ha derivado de un enfoque probabilístico óptimo, es decir, un enfoque de mínima varianza del error de estimación. La etapa de propagación del filtro de Kalman da una actualización de tiempo a través de una predicción de \hat{x}^- y una covarianza \hat{P}^- . La etapa de actualización de la medición del filtro de Kalman da una corrección basada en la medición para obtener una

nueva estimación a posteriori \hat{x}^+ y una covarianza \hat{P}^+ . En conjunto, estas ecuaciones forman el predictor-corrector de la forma del filtro de Kalman. En la Figura 38 se muestra las variables involucradas y sus relaciones en el proceso de estimación.

Figura 38

Variables involucradas en el proceso de estimación.



Nota: elaboración propia (2023).

4.2.2 Filtro de Kalman Extendido Discreto

La dinámica del picosatélite es no lineal. Para poder utilizar el filtro de Kalman como es descrito en la sección anterior, se necesita hacer una extensión del método para incluir un proceso de linealización, el estimador resultante se conoce como Filtro de Kalman Extendido (más conocido como EKF por sus siglas en inglés).

Considerando un sistema dinámico no lineal en tiempo continuo:

$$\dot{x}_{(t)} = f(x_{(t)}, u_{(t)}, t), \quad (197)$$

con ecuación de medición en tiempo discreto:

$$\tilde{y}_k = h(x_k, k) + v_k, \quad (198)$$

donde w_k y v_k son ruidos gaussianos independientes, con matrices de covarianza Q_k y R_k respectivamente. $f(x_{(t)}, u_{(t)}, t)$ es la función matricial no lineal de transición de estados variante en el tiempo y $h(x_k, k)$ denota la función matricial no lineal de medición que también puede variar en el tiempo.

La idea básica del filtro de Kalman extendido es linealizar el modelo de espacio de estado no lineal en cada instante de tiempo alrededor del último estado conocido, una vez conocido el modelo lineal, se aplican las ecuaciones del filtro de Kalman. El concepto fundamental de este filtro es que el estado verdadero está lo suficientemente cerca al estado estimado. La dinámica del error puede ser representada de forma muy aproximada por una linealización usando la expansión de series de Taylor de primer orden. Considerando la expansión de primer orden de $f(x_k, u_k, k)$ alrededor de algún estado nominal \bar{x}_k :

$$f(x_{(t)}, u_{(t)}, t) \cong f(\bar{x}_{(t)}, u_{(t)}, t) + \left. \frac{\partial f(x_{(t)})}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_{(t)}} [x_{(t)} - \bar{x}_{(t)}], \quad (199)$$

donde $x_{(t)}$ es cercano a $\bar{x}_{(t)}$. Además, la ecuación de medición puede ser expandida usando:

$$h(x_k, k) \cong h(\bar{x}_k, k) + \left. \frac{\partial h(x_k, k)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_k} [x_k - \bar{x}_k], \quad (200)$$

Se define:

$$F_{(t)} \cong \left. \frac{\partial f(x_{(t)})}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{(t)}}, \quad (201)$$

$$H_k \cong \left. \frac{\partial h(x_k, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k}, \quad (202)$$

Discretizando la Ecuación 199 se tiene:

$$\Phi_k = I + F_{(t)} T_s, \quad (203)$$

donde T_s es el paso de discretización y debe ser mucho menor que 1. La derivación de las siguientes ecuaciones se puede encontrar en Crassidis (2011).

Para $k = 0$:

$$\hat{x}_{(t_0)} = \hat{x}_0 = E\{x_0\}, \quad (204)$$

$$P_0 = E\{\tilde{x}_0 \tilde{x}_0^T\} = E\{(x_0 - E\{x_0\})(x_0 - E\{x_0\})^T\}, \quad (205)$$

para $k = 1, 2, \dots$

Usando el método de integración de Euler, se definen las siguientes ecuaciones.

Propagación del estado estimado:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_k^+ + f(\hat{x}_k^+, u_k, k)T_s. \quad (206)$$

Propagación de la covarianza del error:

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + Y_k Q_k Y_k^T. \quad (207)$$

Matriz de la ganancia de Kalman:

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}. \quad (208)$$

Actualización del Estado Estimado:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [\tilde{y}_k - h(\hat{x}_k^-, k)]. \quad (209)$$

Actualización de la covarianza del error:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-. \quad (210)$$

4.3 Determinación de orientación para el picosatélite Chasqui I

La investigación sobre la determinación de orientación de picosatélites se centra principalmente en dos aspectos: la parametrización de orientación y los algoritmos de determinación. La parametrización de orientación mediante cuaterniones es una opción muy popular debido a su eficiencia computacional y evasión de singularidades. Sin embargo, siempre se debe considerar la restricción de la norma unitaria (Markley, 2003). En cuanto a los algoritmos de determinación, sobresalen los de tipo probabilísticos, ya que mejoran su rendimiento utilizando valores pasados para influir en la estimación del estado actual.

El filtro de Kalman extendido (EKF) es ideal para proyectos de picosatélites debido a su facilidad de implementación y modesto costo computacional. Sin embargo, cuando la estimación del cuaternión está sesgada o no cumple la restricción de norma unitaria, la representación aditiva da como resultado una matriz de covarianza de errores mal

condicionada. Por lo que una versión multiplicativa de la etapa de propagación del cuaternión es necesaria para eludir este inconveniente, dando origen al filtro de Kalman extendido multiplicativo o MEKF (Markley y Crassidis, 2014). Adicionalmente, la ganancia de Kalman requiere la inversa de una matriz de tamaño proporcional al número de observaciones vectoriales, implicando un cálculo engorroso para aplicaciones en sistemas embebidos. Por las razones expuestas, en este capítulo se exploran dos variaciones del MEKF que calculan la ganancia de Kalman en forma iterativa, conocidas como la variación de Murrell del MEKF (MMEKF) y la variación secuencial del MEKF (SMEKF).

4.3.1 MEKF

Para preservar la restricción de la norma del cuaternión, en el MEKF se utiliza el cuaternión en la etapa de propagación de orientación, mientras que para la etapa de actualización se utilizan parámetros tridimensionales sin restricciones como los ángulos de Euler. Específicamente, se utiliza un error de multiplicación para el cuaternión, donde el cuaternión de cuatro componentes se reemplaza efectivamente por un vector de error de tres componentes. Aunque los datos de los giroscopios pueden incorporarse teóricamente como medidas, esto por lo general funciona mal en la práctica (Markley y Crassidis, 2014). Obteniéndose mejores resultados al utilizar la información del giróscopo directamente en el modelo dinámico (Markley y Crassidis, 2016). En la implementación del MEKF, se puede realizar una calibración completa del giróscopo o se puede realizar una estimación de sesgo simple directamente en las lecturas (Murrell, 1978).

Debido a las restricciones de procesamiento, se realizó una estimación del sesgo del giróscopo en cada eje (β) y del cuaternión (q). Siendo q , el cuaternión que lleva un vector del sistema inercial (i) hacia el sistema fijado al satélite (b), también descrito por q_i^b . Finalmente, se consideró como vector de estados:

$$x = [q \ \beta]^T. \quad (211)$$

Siendo las condiciones iniciales:

$$\hat{q}_{k=0} = \hat{q}_0, \hat{\beta}_{k=0} = \hat{\beta}_0, \quad (212)$$

$$P_{k=0} = P_0.$$

Etapas de propagación. La propagación del estado estimado para el cuaternión generalmente se basa en la ecuación de la cinemática del picosatélite. Sin embargo, este enfoque de corrección aditiva puede destruir la normalización del cuaternión. Por lo que un enfoque multiplicativo del error de cuaternión es preferible, según:

$$\delta q = q \otimes \hat{q}^{-1}, \quad (213)$$

donde $\delta q = [\delta q_0 \ \delta q]^T$. Derivando la Ecuación 213 y la relación $\hat{q} \otimes \hat{q}^{-1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ se obtienen:

$$\delta \dot{q} = \dot{q} \otimes \hat{q}^{-1} + q \otimes \dot{\hat{q}}^{-1}, \quad (214)$$

$$\dot{\hat{q}} \otimes \hat{q}^{-1} + \hat{q} \otimes \dot{\hat{q}}^{-1} = 0. \quad (215)$$

Sustituyendo la Ecuación 126 en la Ecuación 216, y usando la definición de $\Omega(\omega)$ dada por la Ecuación 123 junto a 125 reemplazada en la Ecuación 213, se tiene:

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \otimes \delta q - \delta q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \right\} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \omega \end{bmatrix} \otimes \delta q, \quad (216)$$

Reordenando la Ecuación 217 se obtiene una relación cinemática exacta o no lineal dada por:

$$\delta \dot{q} = - \begin{bmatrix} 0 \\ [\hat{\omega} \times] \delta q \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \omega \end{bmatrix} \otimes \delta q, \quad (217)$$

El término no lineal está presente solo en el último término en el lado derecho de la Ecuación 217, que al ser reemplazado por su aproximación de primer orden conduce al siguiente modelo linealizado:

$$\delta \dot{q}_0 = 0, \quad (218)$$

$$\delta \dot{q} = -[\hat{\omega} \times] \delta q + \frac{1}{2} \delta \omega. \quad (219)$$

La aproximación de primer orden, que supone que el cuaternión verdadero está "cerca" del cuaternión estimado, da $\delta q_0 \approx 1$. Esto reduce el orden del sistema en el EKF

en un estado. Además, la linealización usando la Ecuación 213 mantiene la normalización del cuaternión dentro de primer orden si el cuaternión estimado está "cerca" del cuaternión verdadero, que está dentro de la aproximación de primer orden en el EKF (Markley y Crassidis, 2014).

Para la propagación del sesgo del giroscopio, se parte del modelo del proceso de Markov de primer orden propuesto por Markley & Reynolds (2000), dada por:

$$\omega = \tilde{\omega} - \beta - \eta_v, \quad (220)$$

$$\dot{\beta} = \eta_u. \quad (221)$$

donde $\tilde{\omega}$ es la velocidad angular medida por el giroscopio, β es un vector de sesgo, η_v y η_u son procesos gaussianos de ruido blanco de media cero con densidades espectrales generalmente dado por $\sigma_v^2 I_{3 \times 3}$ y $\sigma_u^2 I_{3 \times 3}$, respectivamente. La velocidad angular estimada viene dada por:

$$\hat{\omega} = \tilde{\omega} - \beta, \quad (222)$$

La ecuación diferencial del sesgo estimado, finalmente es:

$$\dot{\beta} = 0. \quad (223)$$

Al sustituir las Ecuaciones 220 y 223 en $\delta\omega = \omega - \hat{\omega}$ se obtiene:

$$\delta\omega = -(\Delta\beta + \eta_v), \quad (224)$$

donde $\Delta\beta = \beta - \hat{\beta}$. Sustituyendo la Ecuación 224 en la Ecuación 219 da:

$$\delta\dot{q} = -[\hat{\omega} \times] \delta q - \frac{1}{2} (\Delta\beta + \eta_v), \quad (225)$$

Considerando la aproximación de ángulo pequeño, se sustituye la Ecuación 19 en la Ecuación 225, obteniéndose una versión simplificada con componentes de ángulos de Euler dada por:

$$\delta\dot{\alpha} = -[\hat{\omega} \times] \delta\alpha - (\Delta\beta + \eta_v), \quad (226)$$

Con lo que el modelo de error del EKF queda:

$$\Delta\hat{x}(t) = F(t)\Delta\tilde{x}(t) + G(t)w(t), \quad (227)$$

Con:

$$\Delta \tilde{x}(t) = [\delta \alpha^T(t) \quad \Delta \beta^T(t)]^T, \quad (228)$$

$$w(t) = [\eta_v^T(t) \quad \eta_u^T(t)]^T, \quad (229)$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega}(t) \times] & -I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (230)$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (231)$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \sigma_u^2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (232)$$

Para la discretización de la ecuación de propagación del cuaternión, se optó por una forma discreta de la cinemática (Markley y Crassidis, 2014), derivada de un enfoque de serie de potencia:

$$\hat{q}_{k+1}^- = \bar{\Omega}_{(\hat{\omega}_k^+)} \hat{q}_k^+, \quad (233)$$

con:

$$\bar{\Omega}_{(\hat{\omega}_k^+)} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\|\hat{\omega}_k^+\|\Delta t\right) I_{3 \times 3} - [\hat{\psi}_k^+ \times] & \hat{\psi}_k^+ \\ -\hat{\psi}_k^{+T} & \cos\left(\frac{1}{2}\|\hat{\omega}_k^+\|\Delta t\right) \end{bmatrix}, \quad (234)$$

donde:

$$\hat{\psi}_k^+ = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\|\hat{\omega}_k^+\|\Delta t\right)\hat{\omega}_k^+}{\|\hat{\omega}_k^+\|}, \quad (235)$$

Siendo $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ el intervalo de muestreo. El sesgo propagado del giroscopio está dado por:

$$\hat{\beta}_{k+1}^- = \hat{\beta}_k^+, \quad (236)$$

y la velocidad angular posterior por:

$$\hat{\omega}_k^+ = \tilde{\omega}_k - \hat{\beta}_k^+, \quad (237)$$

La propagación discreta de la ecuación de covarianza viene dada por la Ecuación 204, donde Υ_k viene dada por:

$$\Upsilon_k = \begin{bmatrix} -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (238)$$

La matriz de transición discreta de estado de error también se deriva utilizando un enfoque de serie de potencia en Markley y Crassidis (2014), quedando:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad (239)$$

$$\Phi_{11} = I_{3 \times 3} - [\hat{\omega}_k^+ \times] \frac{\sin(\|\hat{\omega}_k^+\| \Delta t)}{\|\hat{\omega}_k^+\|} + [\hat{\omega}_k^+ \times]^2 \frac{\{1 - \cos(\|\hat{\omega}_k^+\| \Delta t)\}}{\|\hat{\omega}_k^+\|^2}, \quad (240)$$

$$\Phi_{12} = [\hat{\omega}_k^+ \times] \frac{\{1 - \cos(\|\hat{\omega}_k^+\| \Delta t)\}}{\|\hat{\omega}_k^+\|^2} - I_{3 \times 3} \Delta t - [\hat{\omega}_k^+ \times]^2 \frac{\{\|\hat{\omega}_k^+\| \Delta t - \sin(\|\hat{\omega}_k^+\| \Delta t)\}}{\|\hat{\omega}_k^+\|^3}, \quad (241)$$

$$\Phi_{21} = 0_{3 \times 3}, \quad (242)$$

$$\Phi_{22} = I_{3 \times 3}, \quad (243)$$

Cuando $F(\hat{x}(t), t)$ viene dada por:

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (244)$$

Es decir, no se consideran los efectos de acoplamiento de la matriz de productos cruzados. Entonces una aproximación de la covarianza discreta del ruido del proceso es:

$$Q_k = \begin{bmatrix} \left(\sigma_v^2 \Delta t + \frac{1}{3} \sigma_u^2 \Delta t^3 \right) I_{3 \times 3} & \left(\frac{1}{2} \sigma_u^2 \Delta t^2 \right) I_{3 \times 3} \\ \left(\frac{1}{2} \sigma_u^2 \Delta t^2 \right) I_{3 \times 3} & \left(\sigma_u^2 \Delta t \right) I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (245)$$

Esta aproximación es válida si la frecuencia de muestreo está por debajo del límite de Nyquist. Por ejemplo:

$$\|\hat{\omega}(t)\| \Delta t < \frac{\pi}{10}, \quad (246)$$

Etapas de actualización. La actualización de las variables de estado \hat{q}_k^+ y $\hat{\beta}_k^+$ depende del cálculo de la matriz de ganancia de Kalman dada por la Ecuación 209. Esto a su vez implica el cálculo de la matriz de medición $H_k(\hat{x}_k^-)$.

Las observaciones de orientación de tiempo discreto para un solo sensor están dadas por:

$$\tilde{b}_j = Ar_j + v_j, \quad v_j^T Ar_j = 0 \quad (247)$$

donde \tilde{b}_j es la medida de un sensor como el magnetómetro o el sensor solar, con error v_j aproximadamente Gaussiano que satisface:

$$E\{v_j\} = 0, \quad (248)$$

$$E\{v_j v_j^T\} = \sigma_j^2 [I_{3 \times 3} - (Ar_j)(Ar_j)^T], \quad (249)$$

Se pueden concatenar múltiples mediciones de vectores. En nuestro caso considerando dos sensores, la ecuación de medición dada por la Ecuación 198 queda:

$$\tilde{y}_k = \begin{bmatrix} A(q)r_1 \\ A(q)r_2 \end{bmatrix} \Big|_{t_k} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Big|_{t_k} = h_k(\tilde{x}_k) + v_k, \quad (250)$$

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \sigma_2^2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (251)$$

La matriz de orientación, $A(q)$, está relacionada con la orientación propagada, $A(\delta q)$, a través de:

$$A(q) = A(\delta q)A(\hat{q}^-), \quad (252)$$

La aproximación de primer orden de la matriz de error de orientación para ángulos pequeños ($\delta\alpha$), viene dada por la Ecuación 16 y queda:

$$A(\delta q) \approx I_{3 \times 3} - [\delta\alpha \times], \quad (253)$$

Para un solo sensor, los vectores verdaderos y estimados en el cuerpo del picosatélite, se relacionan por:

$$\Delta b = b - \hat{b}^- = A(q)r - A(\hat{q}^-)r, \quad (254)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 253 y 254 en la Ecuación 255 se obtiene:

$$\Delta b = [A(\hat{q}^-)r \times] \delta\alpha, \quad (255)$$

La matriz de medición para los sensores de orientación viene dada por:

$$H_k(\hat{x}_k^-) = \begin{bmatrix} [A(\hat{q}^-)r_1 \times] & 0_{3 \times 3} \\ [A(\hat{q}^-)r_2 \times] & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \Big|_{t_k}, \quad (256)$$

ya que:

$$\Delta \tilde{y}_k = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{bmatrix} = H_k(\hat{x}_k^-) \Delta \hat{x}_k^- = \begin{bmatrix} [A(\hat{q}^-)r_1 \times] & 0_{3 \times 3} \\ [A(\hat{q}^-)r_2 \times] & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \Big|_{t_k} \begin{bmatrix} \delta \hat{\alpha}_k^- \\ \Delta \hat{\beta}_k^- \end{bmatrix}, \quad (257)$$

La actualización del estado de error obedece a la Ecuación 209, dada por:

$$\Delta \hat{x}_k^+ = K_k [\tilde{y}_k - h_k(\hat{x}_k^-)], \quad (258)$$

donde $[\Delta \hat{x}_k^+ = [\delta \hat{\alpha}_k^{+T} \quad \Delta \hat{\beta}_k^{+T}]^T$, \tilde{y}_k es la salida de medición, $h_k(\hat{x}_k^-)$ es la salida

estimada, que obedece a:

$$h_k(\hat{x}_k^-) = \begin{bmatrix} A(\hat{q}^-)r_1 \\ A(\hat{q}^-)r_2 \end{bmatrix} \Big|_{t_k}, \quad (259)$$

La actualización del sesgo del giroscopio viene dada por:

$$\hat{\beta}_k^+ = \hat{\beta}_k^- + \Delta \hat{\beta}_k^+, \quad (260)$$

Para la actualización del cuaternión, utilizando una aproximación de primer orden y la aproximación de ángulo pequeño para definir la parte vectorial del error de cuaternión se obtiene:

$$\hat{q}_k^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \hat{\alpha}_k^+ \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_k^-, \quad (261)$$

Usar la regla de multiplicación de cuaterniones de la Ecuación 125 en la Ecuación 261 da:

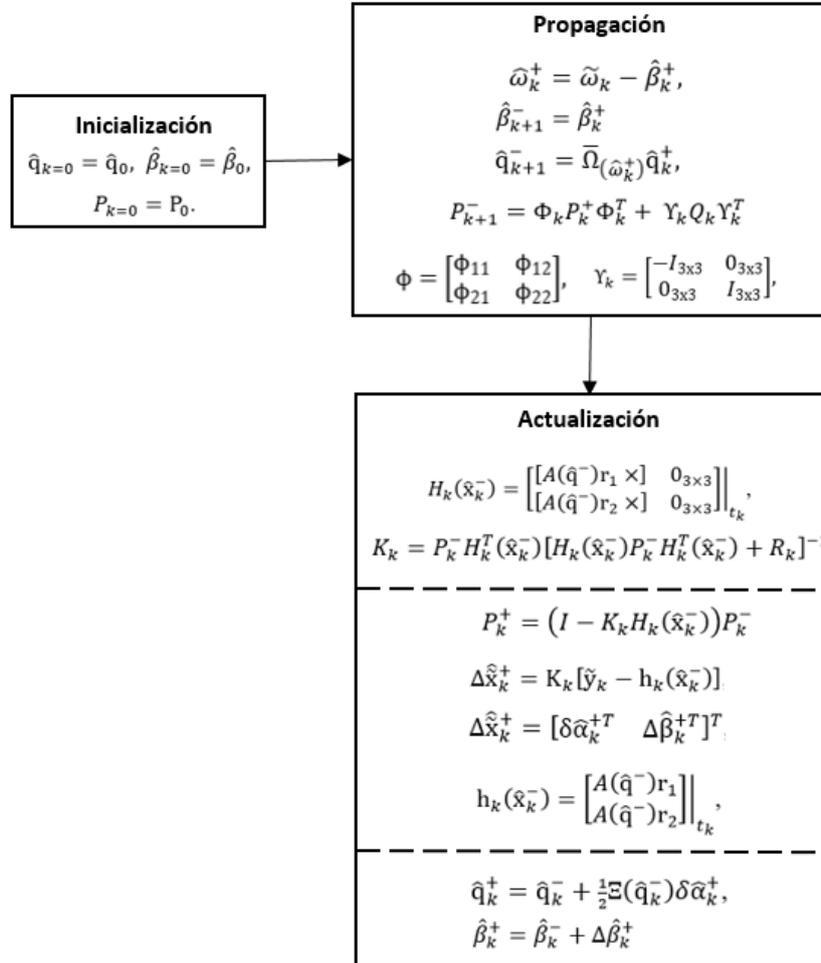
$$\hat{q}_k^+ = \hat{q}_k^- + \frac{1}{2} \Xi(\hat{q}_k^-) \delta \hat{\alpha}_k^+, \quad (262)$$

Aunque el cuaternión actualizado es un vector unitario dentro de primer orden; se debe realizar una normalización de fuerza bruta para asegurar $\hat{q}_k^{+T} \hat{q}_k^+ = 1$.

En la Figura 39 se resume el algoritmo de estimación de orientación MEKF.

Figura 39

MEKF para estimación de orientación.



Nota: elaboración propia (2023).

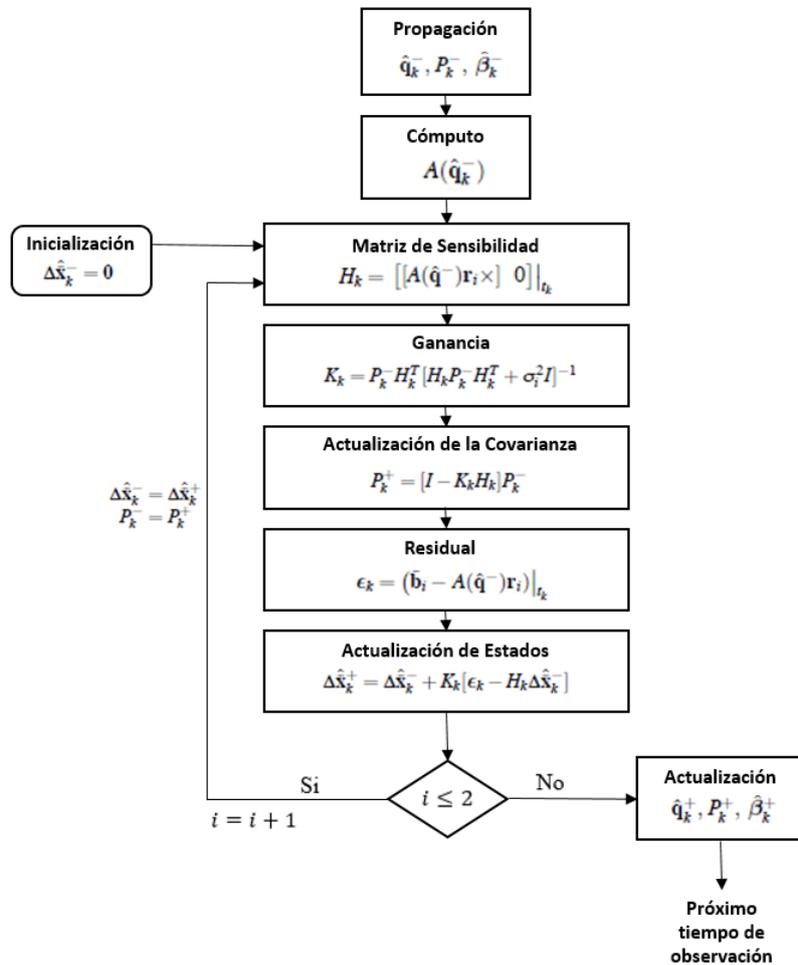
4.3.2 Formas iterativas del MEKF

Para aplicaciones con necesidades de tiempo real y limitaciones computacionales, el cálculo de la ganancia de Kalman representa una elevada carga computacional, ya que requiere una inversión de una matriz de $3n \times 3n$ donde n denota el número de observaciones vectoriales. La variación de Murrell del MEKF (MMEKF) evita este costoso cálculo mediante un esquema de procesamiento secuencial de las mediciones obtenidas simultáneamente (Crassidis y Junkins, 2011). El MMEKF no mejora el rendimiento de exactitud del MEKF, por lo que aparecieron propuestas como la del SMEKF donde se aprovecha la estrategia secuencial para mejorar el rendimiento del filtrado (Qin et al., 2018).

MMEKF. La etapa de actualización en el EKF aún es de tipo lineal. Por lo que se puede aplicar el principio de superposición para procesar una observación vectorial 3×1 a la vez. Esto reduce la toma de la inversa de una matriz de $3n \times 3n$ a la toma de la inversa de una matriz de 3×3 , aunque, se agregan algunas otras ecuaciones. En la Figura 40 se resume el algoritmo de estimación de orientación MMEKF.

Figura 40

MMEKF para estimación de orientación.



Nota: adaptado de (Crassidis y Junkins, 2011).

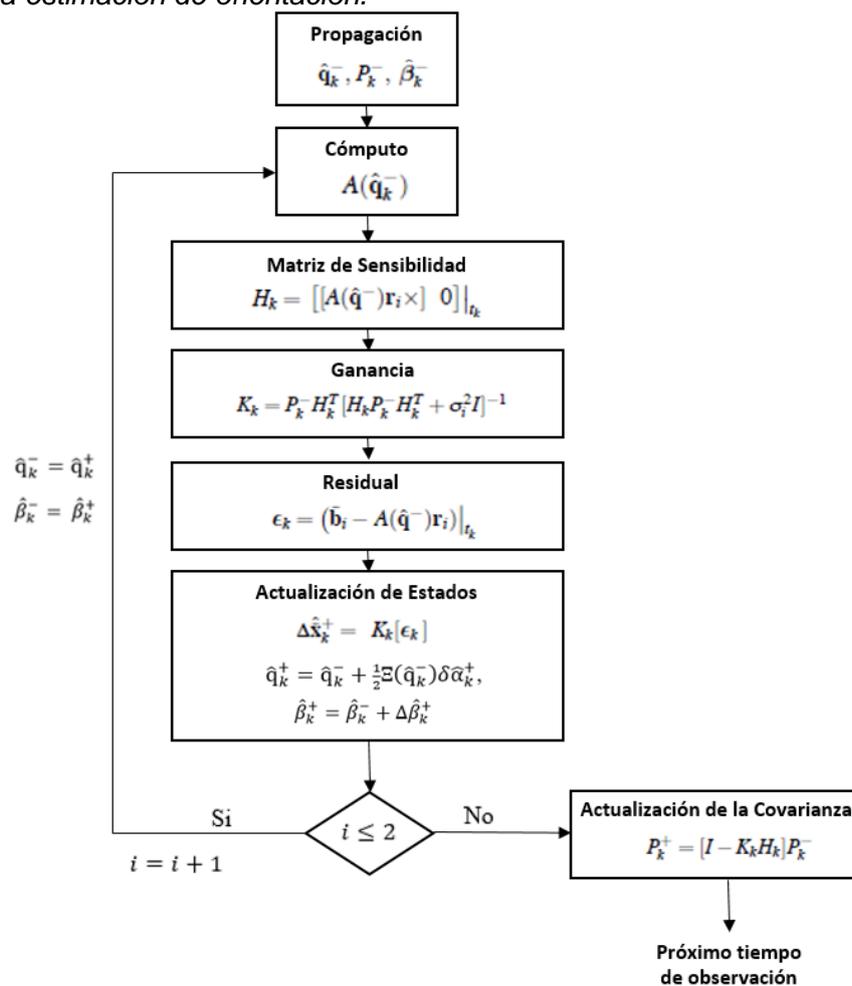
El procedimiento de Murrell del MEKF (MMEKF) inicia propagando el cuaternión, el sesgo giroscópico y la covarianza de error al tiempo de observación actual. A continuación, se calcula la matriz de orientación y el vector de estado propagado se inicializa a cero. Luego, la covarianza de error y las cantidades de estado se actualizan utilizando una

observación vectorial simple, hasta que se procesen todas las observaciones del vector. Finalmente, los valores actualizados se utilizan para propagar la covarianza de error y las cantidades de estado al siguiente tiempo de observación.

SMEKF. En el MEKF secuencial (SMEKF), la etapa de propagación es la misma que la del MEKF. Mientras que, la actualización de la medición y la actualización de la orientación se fusionan en el ciclo de procesamiento secuencial. Es decir, el modelo de observación de vector único se vuelve a linealizar con respecto a la estimación del estado actualizado cuando se ha procesado la última observación de vector único. En la Figura 41 se resume el algoritmo de estimación de orientación SMEKF.

Figura 41

SMEKF para estimación de orientación.



Nota: elaboración propia (2023).

Dado que la estimación del estado posteriori es más exacta que la estimación anterior, se espera que el SMEKF sea más exacto que el MEKF y el MMEKF. En el procesamiento secuencial de las observaciones vectoriales, la covarianza no cambia debido a la operación especial de reinicio del MEKF. Esta operación no aumenta ni disminuye el contenido de información total de la estimación y sólo mueve esta información de una parte de la representación de la orientación a otra (Qin et al., 2018).

4.3.3 Sistema de determinación de orientación para el picosatélite Chasqui I

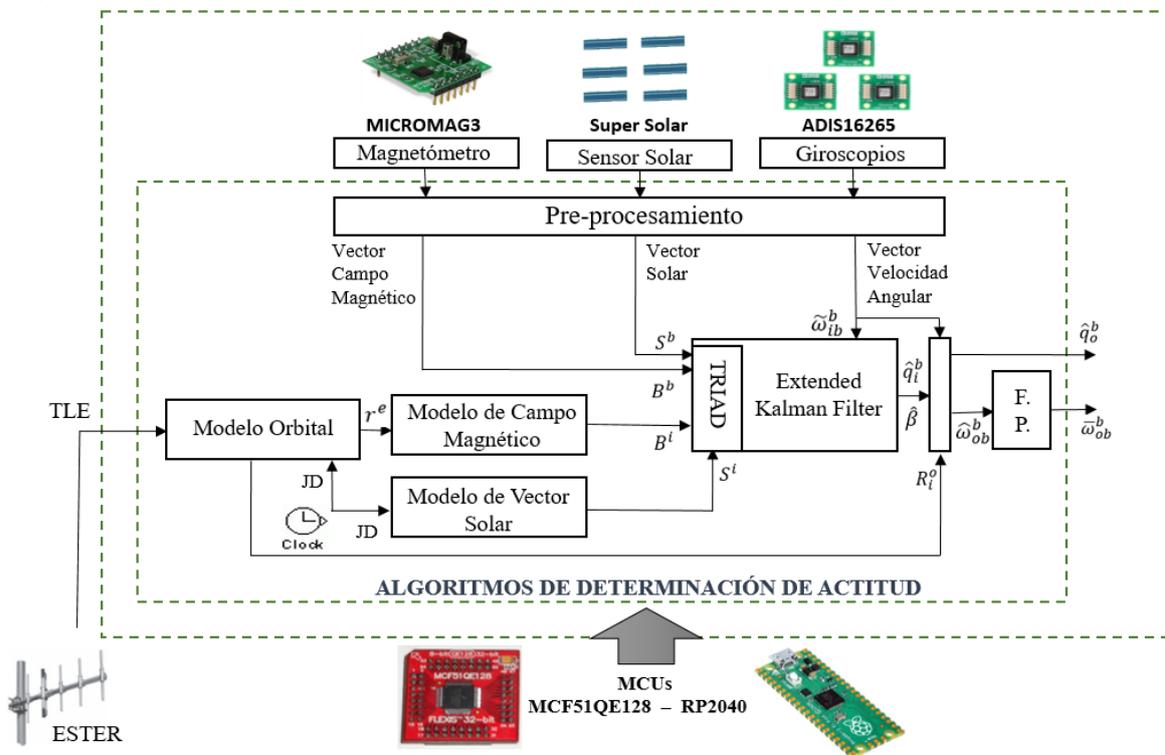
Un cuaternión q está constituido En la Figura 42 se muestra la arquitectura del SDA. Las mediciones de los sensores pasan por una etapa de pre-procesamiento que consiste en la conversión de unidades digitales (LSB) a unidades físicas y calibración. El proceso de calibración y los factores obtenidos son descritos en Rojas (2015). Los datos procesados de los sensores, tomados en el sistema de referencia fijado al satélite o BCBF, se relacionan con los datos generados por modelos matemáticos en el sistema de referencia inercial o ECI. El modelo de campo magnético requiere información de posición en el sistema ECEF, la cual es generado por un modelo orbital simplificado. Tanto el modelo de campo Magnético como el modelo de Vector Solar requieren información temporal precisa, la cual es dada por temporizador del microcontrolador a bordo y actualizada periódicamente por datos enviados desde la estación terrena en formato TLE. Además, estos datos brindan la posición del cubesat en un instante determinado, permitiendo la propagación de los modelos matemáticos desde este punto inicial.

El algoritmo principal para la determinación de orientación se basa en una variante iterativa del filtro de Kalman extendido. Para la inicialización se utiliza un método determinístico como el TRIAD, obteniéndose un cuaternión y una covarianza del error inicial a partir de los datos de campo magnético y vector solar en los sistemas inercial y fijado al satélite. La variante del EKF estima la orientación del picosatélite representado como un cuaternión que relaciona el sistema ECI con el sistema BCBF. Además, se estima el sesgo del giroscopio para corregir la velocidad angular del sistema de referencia ECI

respecto al sistema BCBF. En el proyecto Chasqui I, la orientación deseada está dada por el cuaternión $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, pero es referida a la coincidencia de los sistemas de referencia orbital (OCO) y BCBF. Por esta razón, es necesario convertir los estados estimados utilizando la matriz de rotación de inercial a orbital generada por el modelo orbital. Adicionalmente, la velocidad angular corregida pasa por un filtro promediador para reducir el ruido aun presente en la medición del giroscopio.

Figura 42

Arquitectura del sistema de determinación de orientación.



Nota: elaboración propia (2023).

Capítulo V. Análisis y discusión de resultados

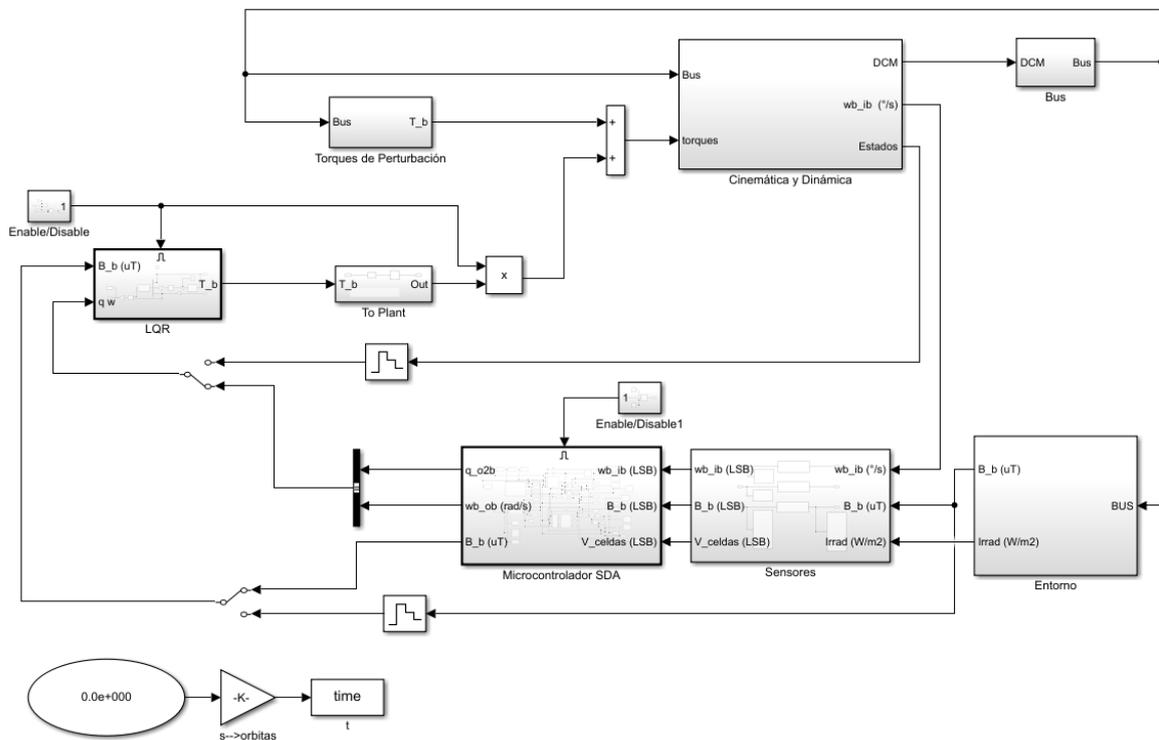
5.1 Simulaciones

En esta sección se muestran y analizan los resultados de las simulaciones que permitirán verificar los modelos matemáticos del entorno tanto completos como simplificados, los modelos de los sensores y los algoritmos de estimación de orientación descritos en los capítulos anteriores. Los modelos y algoritmos son simulados en el entorno Simulink/Matlab. Los resultados de la simulación en Matlab son comparados con los datos generados por el software Satellite Tool Kit (STK) como punto de referencia.

El simulador SDO mostrado en la Figura 43 está constituido por los bloques: cinemática y dinámica, torques de perturbación, entorno, sensores y microcontrolador SDO (Algoritmos de determinación de orientación).

Figura 43

Simulador del sistema de determinación de orientación en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

La comparación entre dos modelos se mide mediante el error cuadrático medio (RMSE, root mean square error) según:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_1 - y_2)^2}. \quad (263)$$

En el caso de la medida de error entre dos cuaterniones se utiliza la siguiente variante:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\delta q_i)^2}. \quad (264)$$

$$\delta q = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta q / 2 \end{bmatrix} = q_1 \otimes q_2^*. \quad (265)$$

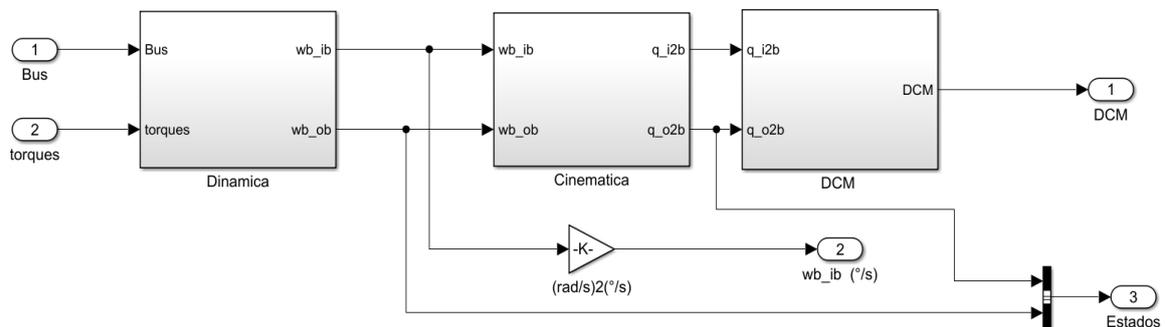
Siendo n la cantidad de muestras a comparar entre modelos.

5.1.1 Cinemática y dinámica del picosatélite

La implementación en Simulink de la cinemática y dinámica del picosatélite se muestran en la Figura 44 y corresponden a las Ecuaciones 126 y 140, respectivamente. Estos bloques generan los cuaterniones y velocidades angulares relacionados con las transformaciones de ECI hacia BCBF (I2B) y OCO hacia BCBF (O2B). La dinámica del picosatélite requiere como entrada los torques de perturbación y torques de control.

Figura 44

Modelo de la cinemática y dinámica del picosatélite en Simulink.

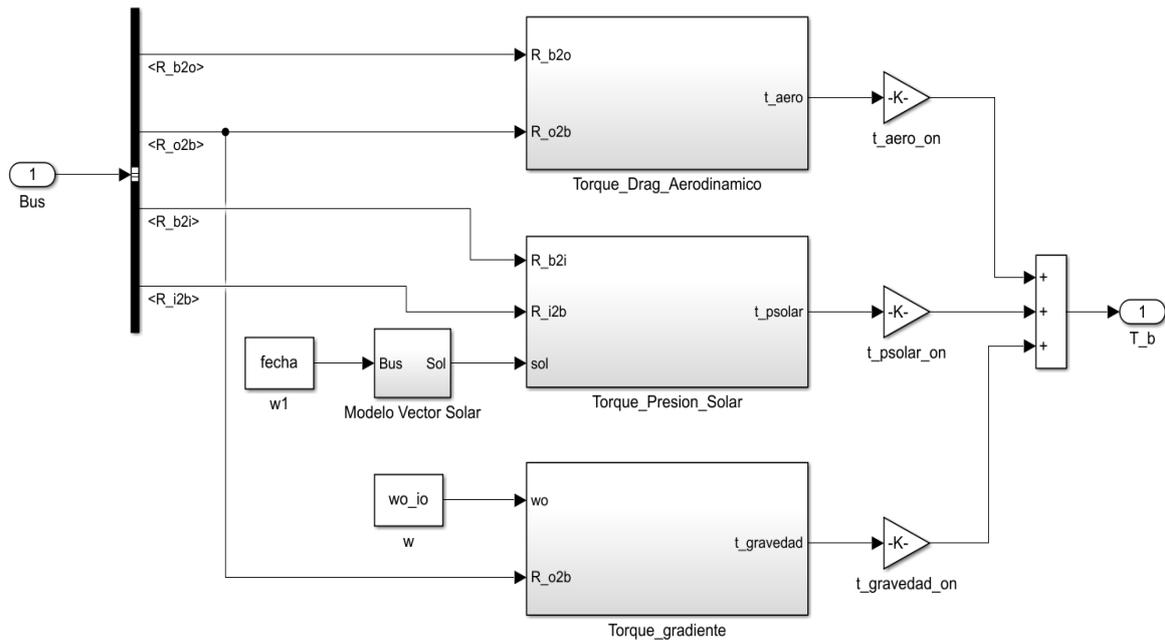


Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 45 se muestra la implementación en Simulink de los torques de perturbación del gradiente de gravedad, arrastre aerodinámico y la presión solar, correspondientes a las Ecuaciones 144, 145 y 146, respectivamente.

Figura 45

Modelo de los torques de perturbación en Simulink.

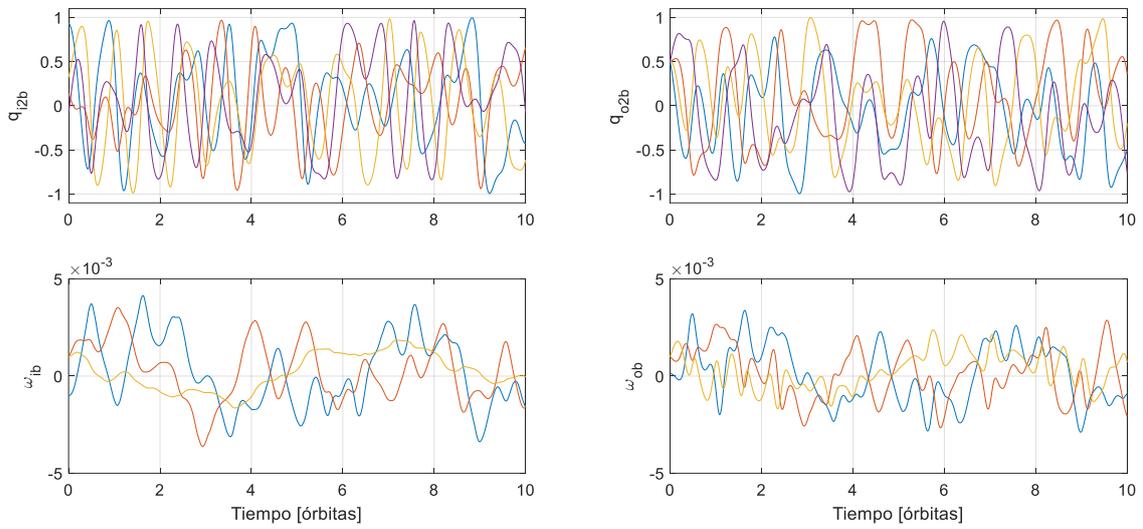


Nota: adaptado de (Miyagusuku, 2013).

En la Figura 46 se muestran los resultados de simulación durante 10 órbitas para un picosatélite con momentos de inercia principales de 0.0030, 0.0033 y 0.0028 kg/m² para I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} , respectivamente, con una orientación (q_{o2b}) inicial de [0.5 0.5 0.5 0.5] y con una velocidad rotacional (ω_{ib}^b) inicial de [-0.001 0.001 0.001] rad/seg. En la Figura 47 se muestra la variación de los valores de los torques de perturbación aplicados sobre el picosatélite, con valores del orden de 10^{-9} Nm.

Figura 46

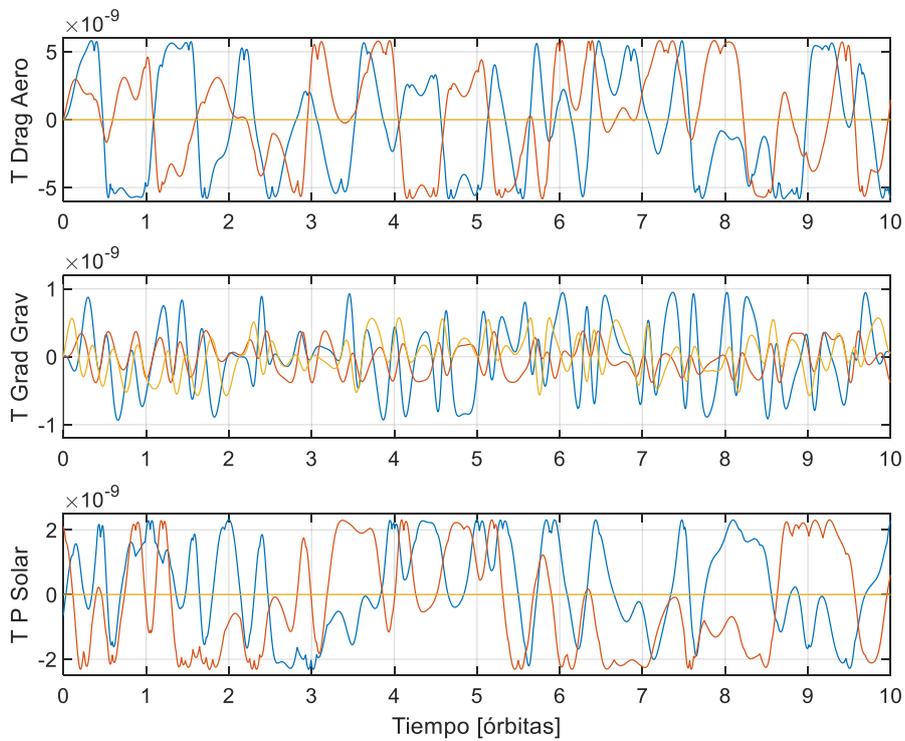
Variación de la orientación y velocidad angular (rad/s) en 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 47

Variación de los torques de perturbación en Nm para 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

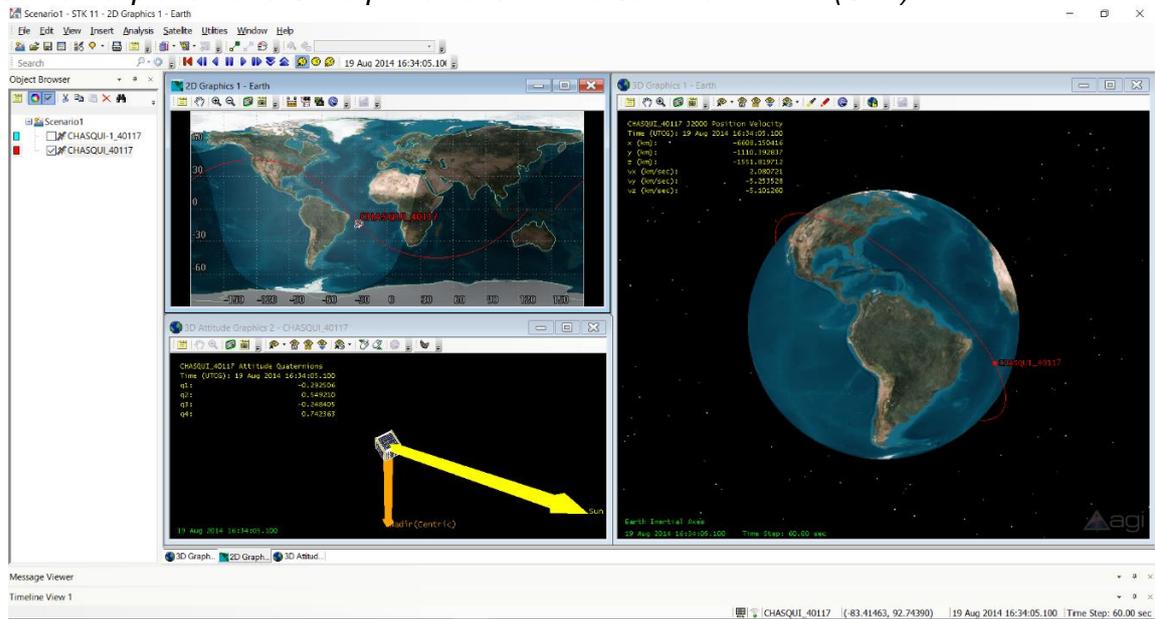
5.1.2 Modelos del entorno

En esta sección se mostrará la implementación en Simulink de los modelos del entorno y su verificación con los datos generados por STK.

STK es un paquete de software basado en física desarrollado por Analytical Graphics, Inc., que permite a los ingenieros y científicos realizar un análisis complejo de la tierra, el mar, el aire y los recursos espaciales y compartir los resultados en una solución integrada. Es utilizado en el ámbito aeroespacial por diversas empresas incluyendo agencias espaciales como la NASA y la ESA. Sus resultados se basan en modelos matemáticos desarrollados en el ámbito científico como el SGP4, IGRF entre otros. En la Figura 48 se muestran resultados gráficos de la órbita del picosatélite Chasqui I en dos y tres dimensiones.

Figura 48

Órbita del picosatélite Chasqui I en el software Satellite Tool Kit (STK).



Nota: fuente (AGI, 2015).

Modelo de Órbitas. Para inicializar el modelo de órbitas se utiliza datos extraídos del TLE de los picosatélites Chasqui I y Uguiso, obtenidos de Celestrak (Celestrak, 2012).

La información necesaria de la órbita y el tiempo se muestran en la Tabla 9. Ambos picosatélites fueron lanzados desde la ISS.

Tabla 9

Datos de la Órbita de los picosatélites Chasqui I y Uguiso.

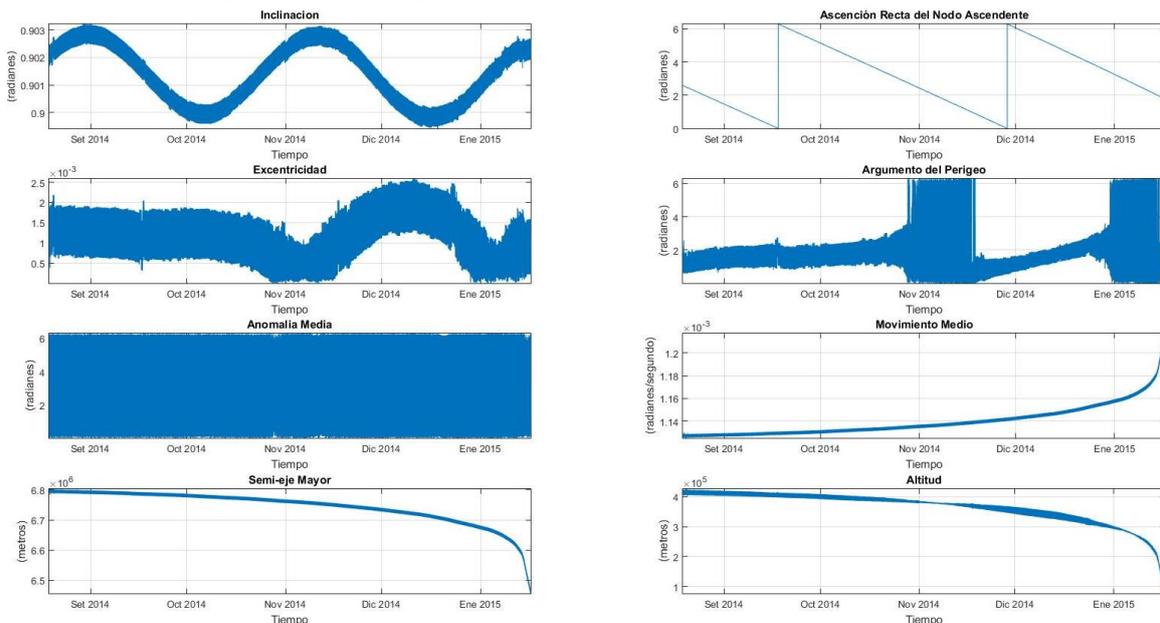
| Parámetro | Chasqui I | Uguiso |
|---|----------------------------|----------------------------|
| Inclinación (°) | 51.6429 | 51.6443 |
| Ascensión Recta del Nodo Ascendente (°) | 148.2128 | 265.744 |
| Excentricidad | 0.000814 | 0.0005014 |
| Argumento del Perigeo (°) | 136.0064 | 245.279 |
| Anomalía media (°) | 224.2088 | 99.5753 |
| Movimiento medio (rev/día) | 15.498878 | 15.49152 |
| Tiempo inicial (JD) | 2456888.497976 | 2458888.889444440 |
| Tiempo inicial (UTCG) | 18 Aug 2014 - 23:57:05.100 | 09 Feb 2020 - 09:20:48.000 |

Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 49 se muestra información sobre la variación de los parámetros Keplerianos de la órbita del picosatélite Chasqui I en 5 meses, obtenidos del software STK.

Figura 49

Variación de los parámetros Keplerianos de la órbita (STK).

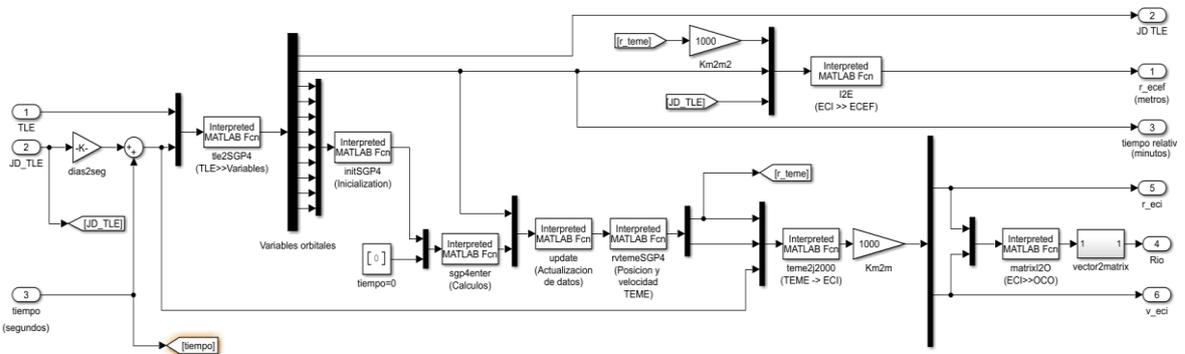


Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 50 se muestra la implementación en Simulink del modelo de órbitas SGP4 a usarse en el simulador, dicho modelo fue validado usando el software STK y brindará la posición del picosatélite. Como se mencionó en el capítulo 3 es necesario considerar un modelo orbital a bordo del picosatélite, el cual deberá ser simplificado por las limitaciones del microprocesador. En la Figura 51 se muestra el modelo desarrollado en Simulink.

Figura 50

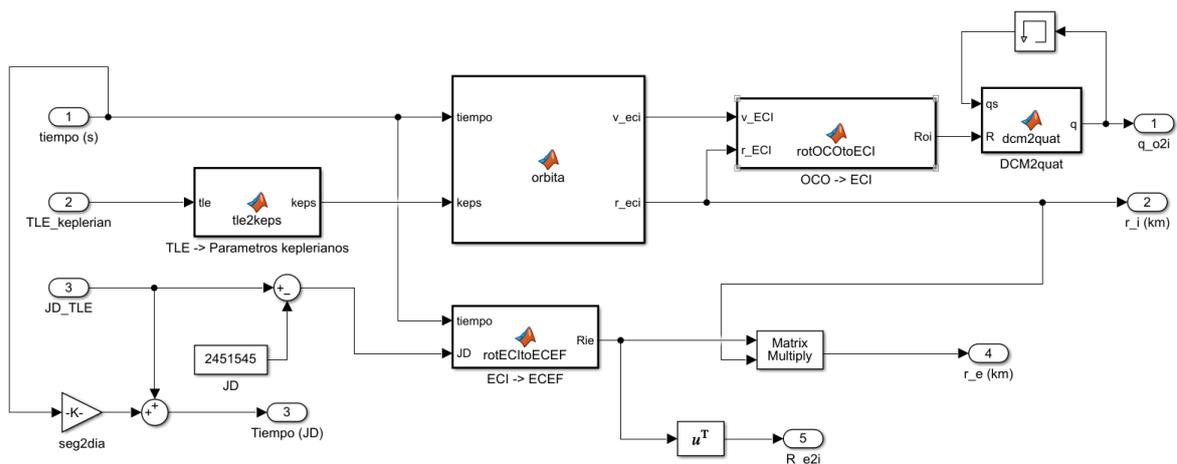
Modelo Orbital SGP4 en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 51

Modelo Orbital Simplificado en Simulink.

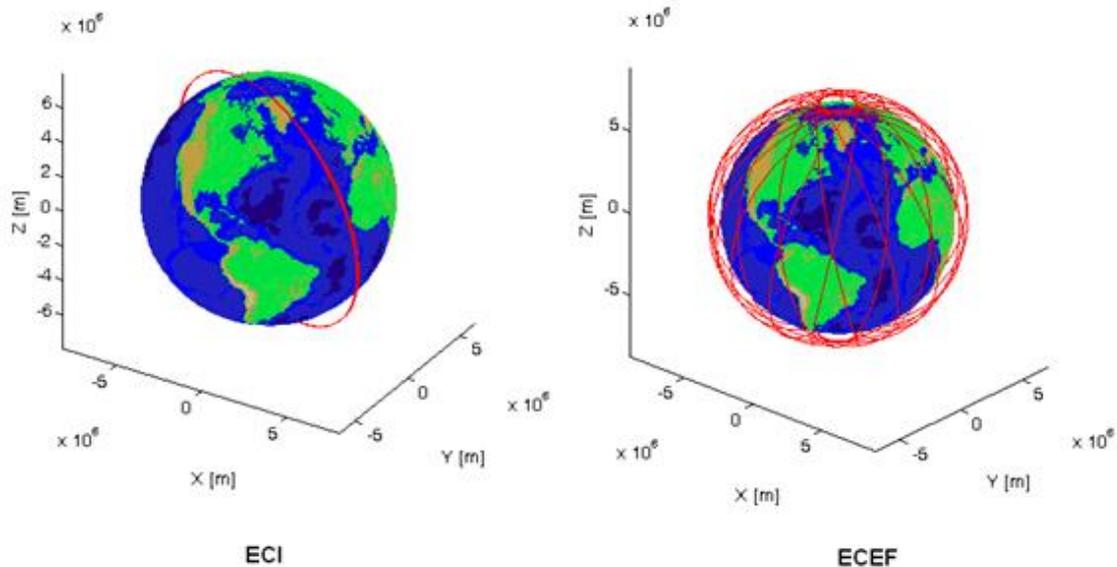


Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 52 se muestra la forma de la órbita en el espacio respecto a los sistemas de referencia ECI y ECEF. En el sistema ECI se observa que el picosatélite tiene una órbita estática, esto debido al giro aparente de la tierra. En el sistema ECEF se observa que la tierra está aparentemente estática y la órbita del picosatélite gira alrededor de ella.

Figura 52

Vista 3D de la Órbita del picosatélite en los sistemas ECI y ECEF.



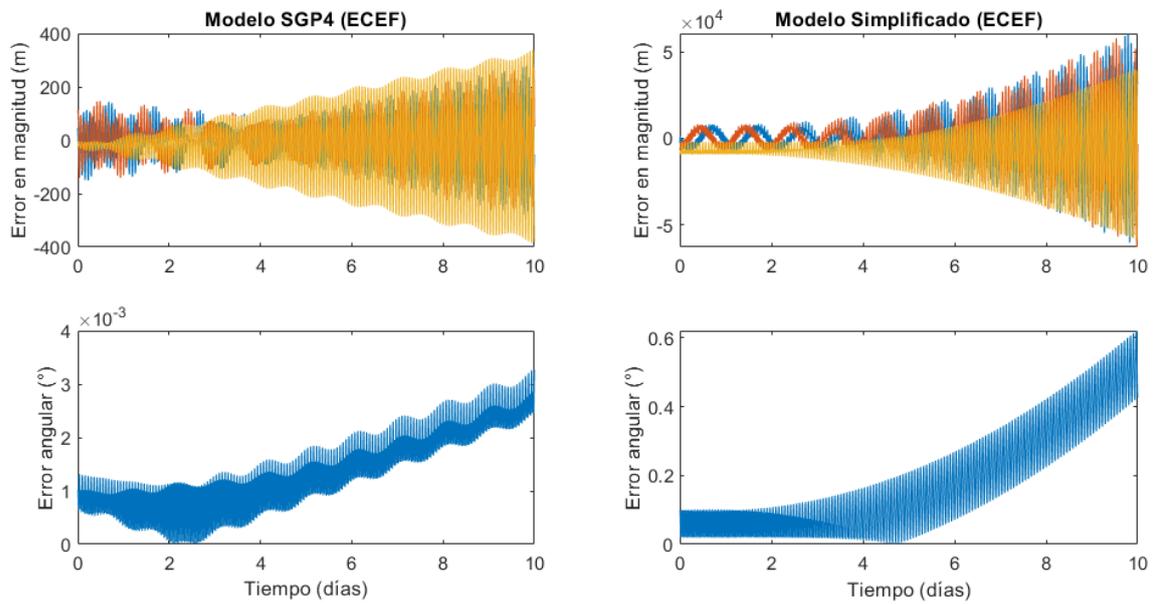
Nota: elaboración propia (2023).

La verificación del modelo orbital incluye las pruebas del modelo implementado en el microcontrolador de abordaje del picosatélite basado en las leyes de Kepler y el modelo complejo utilizado en la simulación del sistema basado en el SGP4. Los modelos se inicializan con los datos obtenidos del TLE y los resultados se comparan con los obtenidos del software STK para 10 días.

En la Figura 53 se muestra el error absoluto (parte superior en metros) y el error angular (parte inferior en grados sexagesimales) de la posición del picosatélite en el sistema ECEF, obtenidos de los modelos SGP4 (izquierda) y Simplificado (derecha) en Simulink respecto a los valores obtenidos del STK. En la Figura 54 se muestran las mismas variables, pero en el sistema ECI.

Figura 53

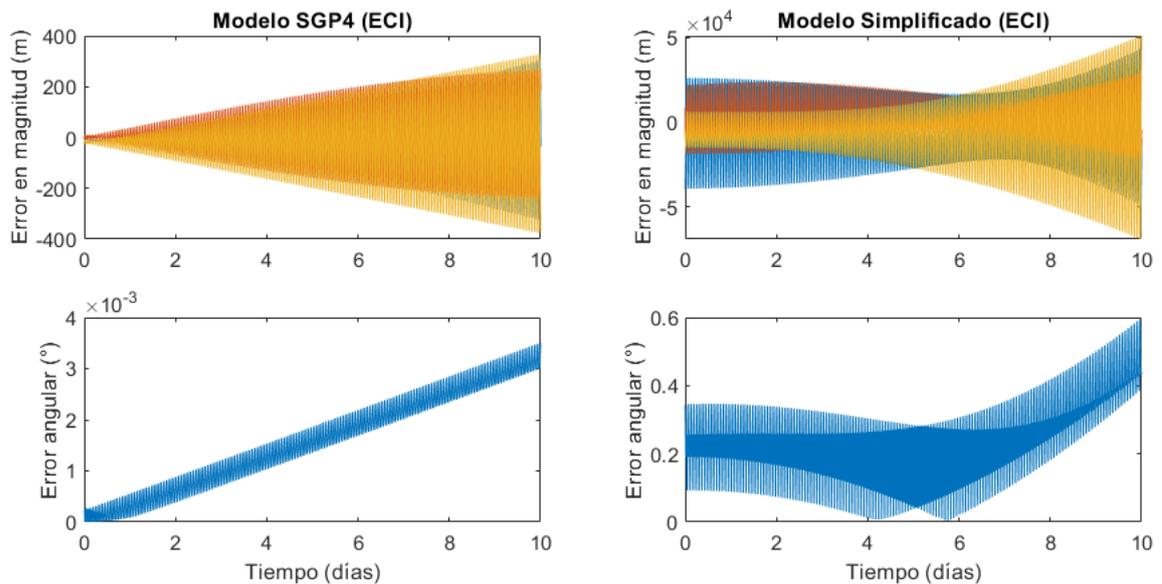
Error entre los datos obtenidos de los modelos de órbita en Simulink y los datos obtenidos del STK para la posición en el sistema ECEF.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 54

Error entre los datos obtenidos de los modelos de órbita en Simulink y los datos obtenidos del STK para la posición en el sistema ECI.

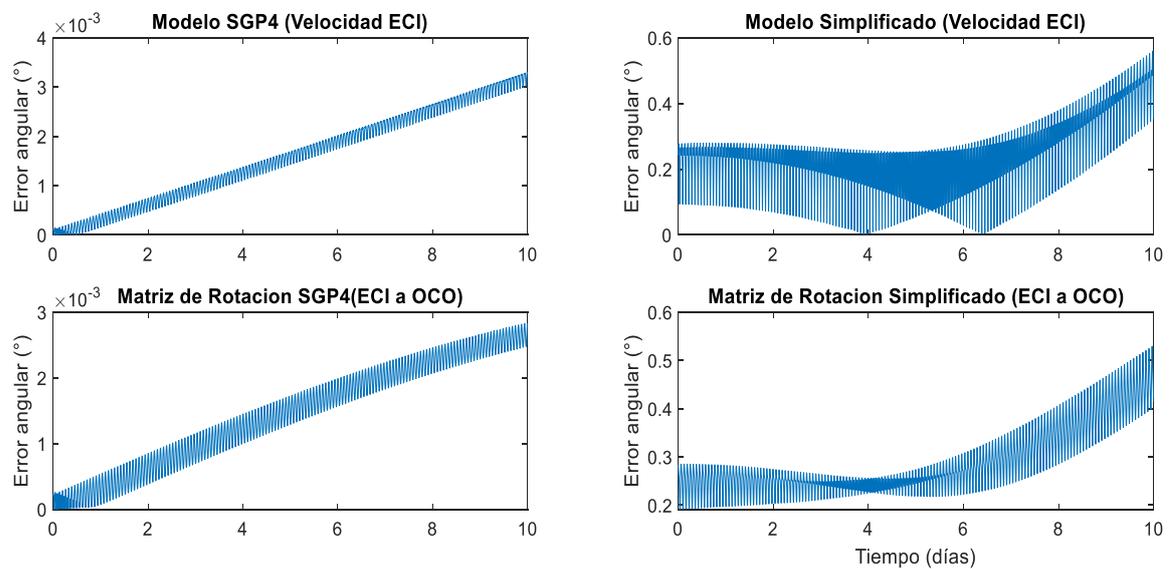


Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 55 se muestra la diferencia de altitud entre el modelo SGP4 en Simulink y los datos obtenidos del STK (arriba), la diferencia entre las velocidades obtenidas del STK y los modelos SGP4 (medio) y Simplificado (abajo) en el sistema ECI. De las figuras anteriores, se observa que el error en la posición aumenta rápidamente por lo que se hace necesario reiniciar el propagador orbital con los datos de un nuevo TLE.

Figura 55

Error entre los datos obtenidos de los modelos de orbita en Simulink y los datos obtenidos del STK para la velocidad en el sistema ECI y la altitud en el sistema ECEF.



Nota: elaboración propia (2023).

La información de la velocidad en el sistema ECI es utilizada para obtener la matriz de rotación de ECI a OCO. En la Figura 54 se muestra el incremento del error angular en el tiempo al comparar los resultados de rotar un vector con las matrices generadas con los modelos SGP4 y simplificado en Simulink. El error angular generado al usar la matriz de rotación de ECI a OCO con los modelos simplificados llega hasta 0.55 grados sexagesimales en 10 días.

En la Tabla 10 se muestra el error RMS diario de los modelos de orbita implementados en Simulink. Se puede observar que los errores RMS de los valores generados por el modelo SGP4 son pequeños y por lo tanto válidos para ser usados como

referencia en simulación. La validez en días del modelo de órbita simplificado dependerá de la matriz R_{i2o} y el error del modelo de campo Magnético que a su vez depende de r_{ecef_u} .

Tabla 10

Valores RMSE de los modelos de órbita.

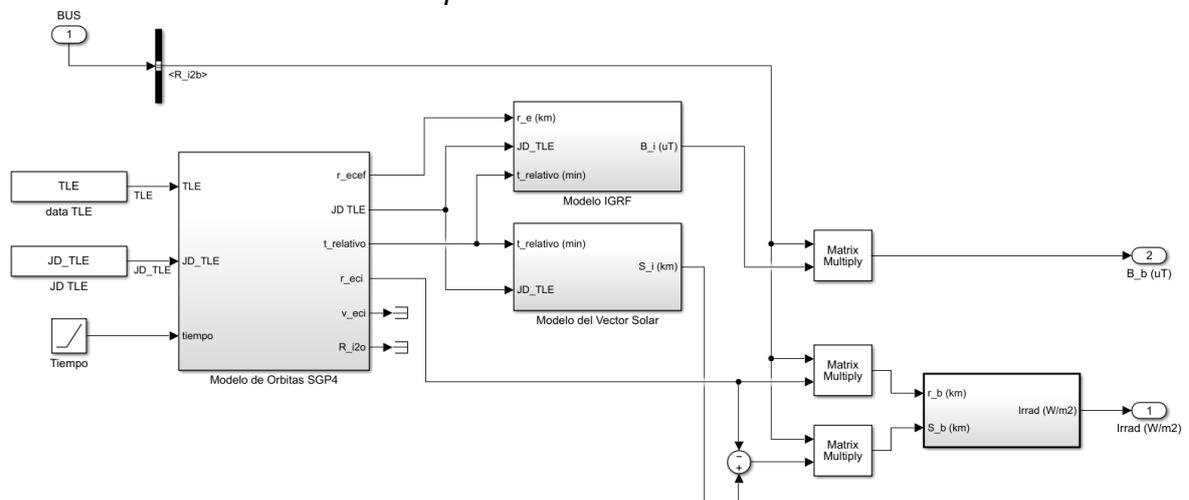
| Parámetro | Día 1 | Día 2 | Día 3 | Día 4 | Día 5 | Día 6 | Día 7 | Día 8 | Día 9 | Día 10 |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| r_{eci_sgp4} (km) | 0.0177 | 0.0338 | 0.0539 | 0.0748 | 0.0969 | 0.1189 | 0.1414 | 0.1636 | 0.1858 | 0.2074 |
| r_{ecef_sgp4} (km) | 0.0564 | 0.0535 | 0.0551 | 0.0618 | 0.0739 | 0.0899 | 0.1084 | 0.1280 | 0.1486 | 0.1695 |
| R_{i2o_sgp4} (°) | 0.0002 | 0.0005 | 0.0008 | 0.0011 | 0.0014 | 0.0017 | 0.0019 | 0.0022 | 0.0024 | 0.0026 |
| r_{eci_u} (km) | 15.833 | 15.590 | 15.123 | 14.422 | 13.859 | 13.759 | 14.734 | 17.539 | 22.147 | 28.213 |
| r_{ecef_u} (km) | 5.2828 | 5.3009 | 5.4513 | 6.2769 | 8.0610 | 11.077 | 15.039 | 20.087 | 25.940 | 32.786 |
| R_{i2o_u} (°) | 0.2488 | 0.2471 | 0.2435 | 0.2407 | 0.2441 | 0.2583 | 0.2853 | 0.3261 | 0.3770 | 0.4362 |

Nota: elaboración propia (2023).

Modelo del Campo Magnético. En la Figura 56 se muestra el modelo de campo magnético IGRF-13 implementado en Simulink para simular la señal del magnetómetro en el sistema BCBF.

Figura 56

Modelos del entorno en Simulink para simular señales de sensores.

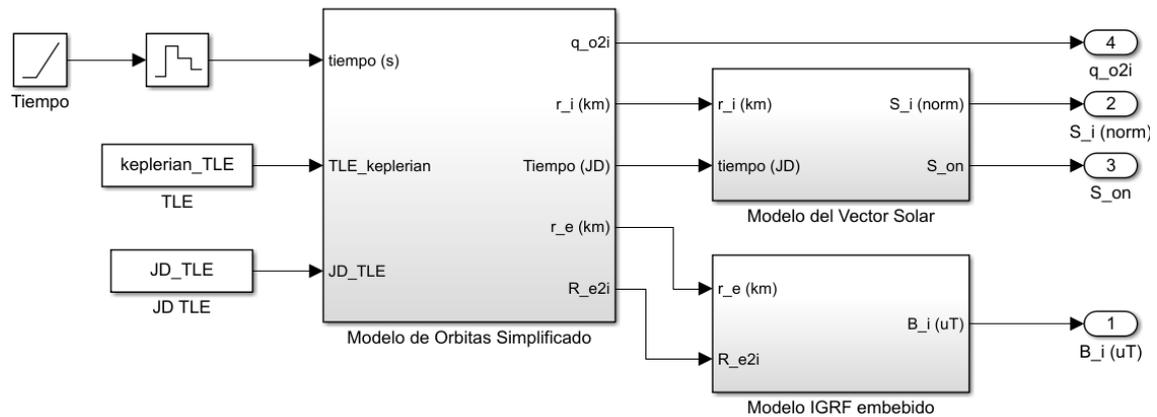


Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 57, se observa el modelo a implementar en el microcontrolador con datos en el sistema ECI. En la Figura 58 se muestra la variación del campo magnético en los sistemas ECI, ECEF y BCBF para 10 órbitas, donde se observan valores entre ± 50 uT.

Figura 57

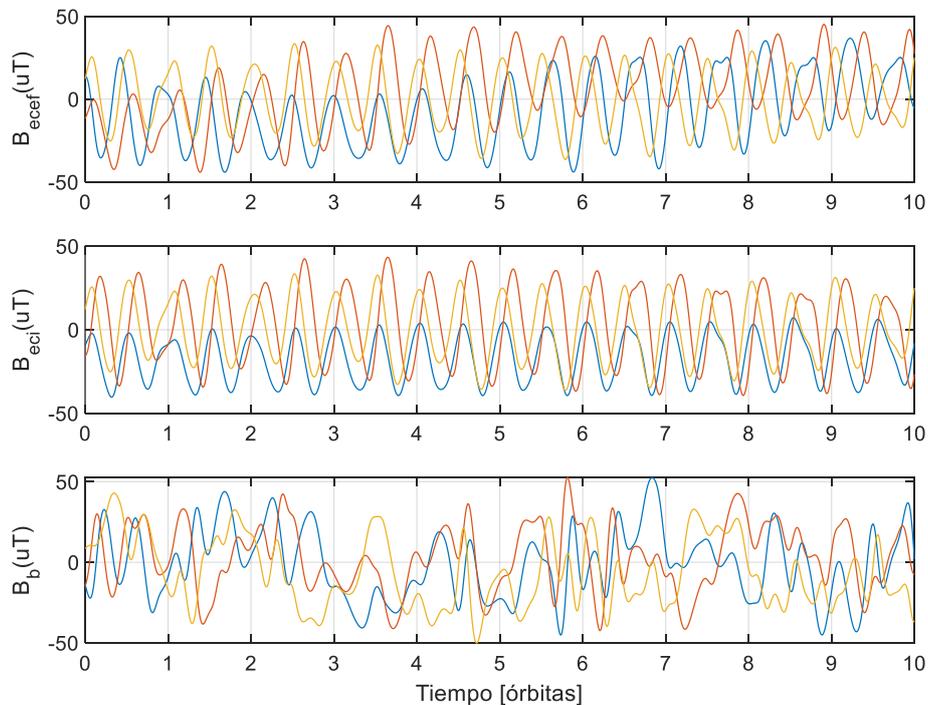
Modelos del entorno en Simulink para implementar en el microcontrolador.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 58

Variación del campo magnético en 10 órbitas.



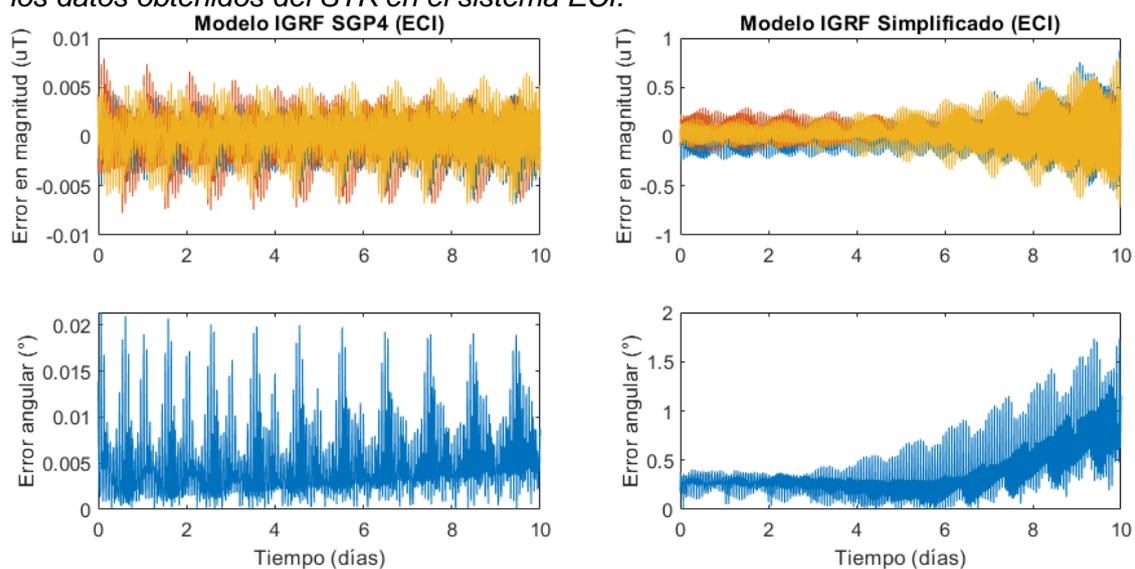
Nota: elaboración propia (2023).

Para la verificación de los Modelos IGRF se usaron datos obtenidos del software STK. En la Figura 59 se muestran los gráficos de los errores de los campos magnéticos generados por los modelos IGRF-13 y el software STK en el sistema ECI. Los modelos IGRF-13 con posición orbital dada por el modelo SGP4 tiene un error de magnitud de menos de 0.01 uT, mientras que cuando la posición orbital es dada por el modelo simplificado, el error puede llegar hasta 0.5 uT en 8 días y un error angular mayor a 0.5° a los 4 días.

Modelos IGRF de diferentes órdenes se verificaron usando datos de posición del picosatélite junto con mediciones del campo magnético en los sistemas ECEF y ECI. En la Tabla 11 se presentan el error RMS diario de los modelos IGRF-13. B_igrf corresponde al error de campo magnético solo del modelo IGRF-13 y B_sgp4 corresponde al error de campo magnético con posición orbital dado por el modelo SGP4. Ambos errores son pequeños y comparables hasta el día 4. B_u corresponde al error de campo magnético con posición orbital dada por un modelo simplificado, donde se observa que el error aumenta en el sistema ECI.

Figura 59

Error entre los datos obtenidos de los modelos de campo magnético IGRF-13 en Simulink y los datos obtenidos del STK en el sistema ECI.



Nota: elaboración propia (2023).

En la Tabla 12, los modelos IGRF-13 con órdenes desde el 5 hasta el 13 son comparados con los datos obtenidos del STK para el 09 de febrero del 2020. Se observa un error RMS de hasta 0.2493 uT para el orden 5. Respecto al tiempo de procesamiento se observa una duplicación del tiempo entre orden 8 y 13.

Tabla 11

Valores RMSE de los modelos de campo magnético IGRF-13 en 10 días.

| Parámetro | Día 1 | Día 2 | Día 3 | Día 4 | Día 5 | Día 6 | Día 7 | Día 8 | Día 9 | Día 10 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (uT) | | | | | | | | | | |
| B_ecef_igrf | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0014 |
| B_eci_igrf | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0014 |
| B_ecef_sgp4 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0022 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0025 |
| B_eci_sgp4 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0022 | 0.0023 | 0.0025 |
| B_ecef_u | 0.0611 | 0.0600 | 0.0614 | 0.0667 | 0.0815 | 0.1074 | 0.1434 | 0.1901 | 0.2438 | 0.3090 |
| B_eci_u | 0.1063 | 0.1040 | 0.1019 | 0.0992 | 0.1029 | 0.1154 | 0.1416 | 0.1812 | 0.2309 | 0.2928 |

Nota: elaboración propia (2023).

Tabla 12

Comparación entre modelos de campo magnético IGRF-13 de diferentes órdenes.

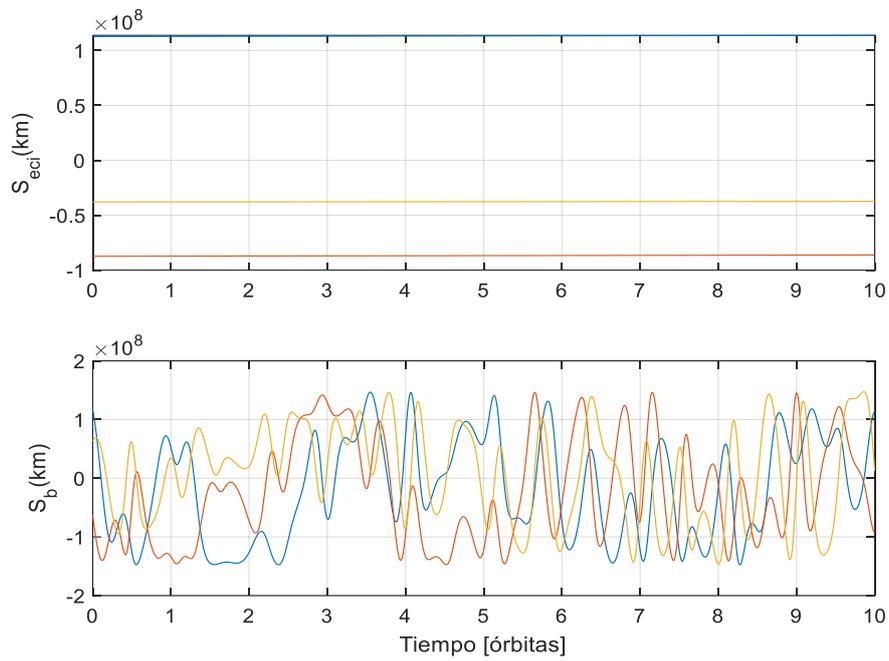
| Parámetro | m,n | | | | | | | | | |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
| B_i rmse (uT) | 0.2493 | 0.1378 | 0.0549 | 0.0361 | 0.0156 | 0.0082 | 0.0042 | 0.0023 | 0.0000 | |
| Tiempo (us) | 14.746 | 17.993 | 20.851 | 22.664 | 25.024 | 30.915 | 34.739 | 39.936 | 46.667 | |

Nota: elaboración propia (2023).

Modelo del Vector Solar. En la Figura 60 se muestra la variación del vector solar en los sistemas ECI y BCBF durante 10 orbitas. Se observa que el valor del vector en el sistema ECI permanece casi constante al menos durante las orbitas, mientras los valores del vector en el sistema BCBF oscilan entre $\pm 2 \times 10^8$ km, esto debido a la rotación del picosatélite. La variación del error entre el modelo simulado y el obtenido del software STK es mostrado en la Figura 61, observándose un error en magnitud del orden de 10^5 km y de máximo 0.284 grados sexagesimales en error angular. Además, se calculó la variación diaria del error RMS del modelo de vector solar, observándose en la Tabla 13 valores alrededor de 3.5×10^5 km durante los 10 días.

Figura 60

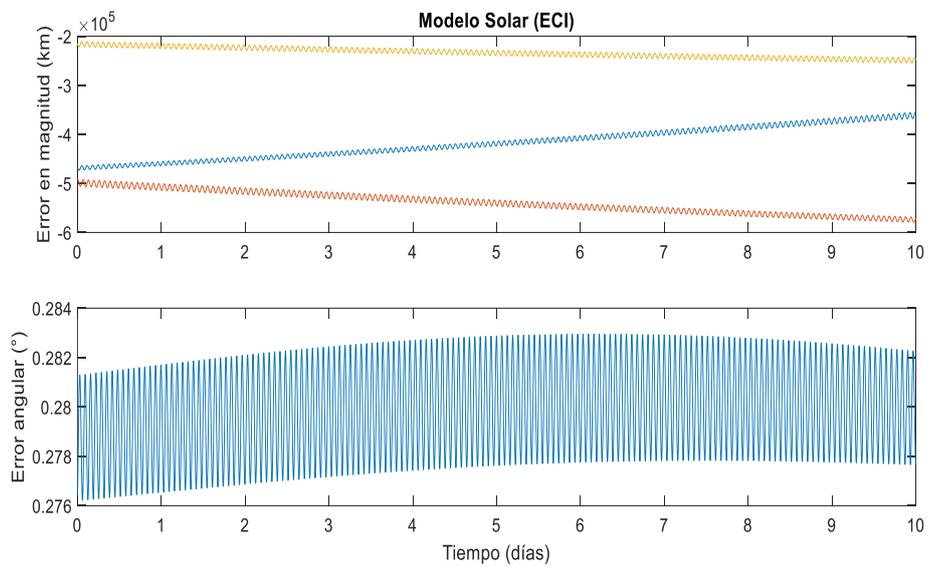
Variación del vector solar en 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 61

Error entre los datos obtenidos de los modelos de posición del Sol en Simulink y los datos obtenidos del STK en el sistema ECI.



Nota: elaboración propia (2023).

Tabla 13

Valores RMSE de los modelos de vector solar en 10 días.

| Parámetro | Día 1 | Día 2 | Día 3 | Día 4 | Día 5 | Día 6 | Día 7 | Día 8 | Día 9 | Día 10 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| S_eci_sun/u | 0.3953 | 0.3961 | 0.3969 | 0.3974 | 0.3977 | 0.3977 | 0.3975 | 0.3970 | 0.3963 | 0.3953 |

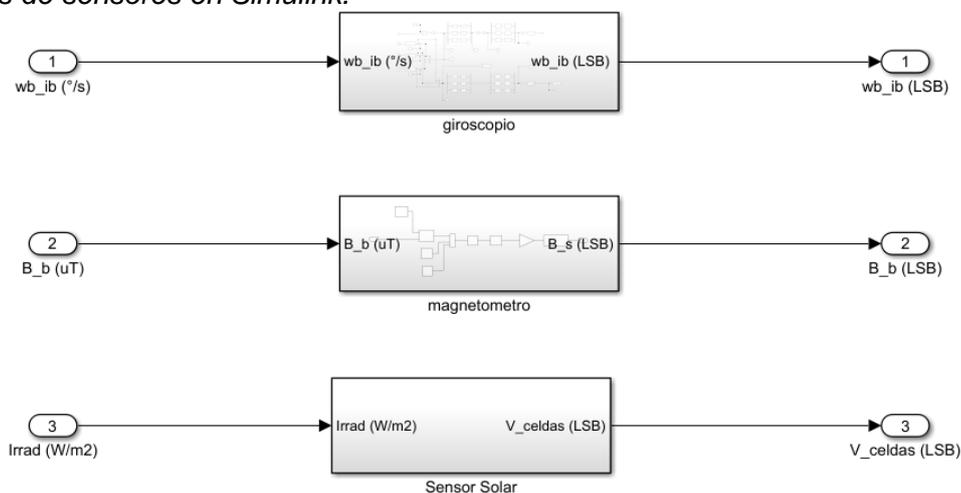
Nota: elaboración propia (2023).

5.1.3 Modelos de sensores

En la Figura 62 se muestran los bloques de los modelos de sensores implementados en Simulink. Las señales de referencia son generadas por los modelos de la Figura 55, siendo estas la velocidad angular del giroscopio en grados sexagesimales por segundo, el campo magnético del magnetómetro en microtesla y la irradiancia del sensor solar en vatios por metros al cuadrado. Las salidas de los sensores se encuentran en unidades digitales LSB. Los modelos están compuestos por parámetros relacionados a la calibración, incertidumbre en la medición, y etapas electrónicas.

Figura 62

Modelos de sensores en Simulink.



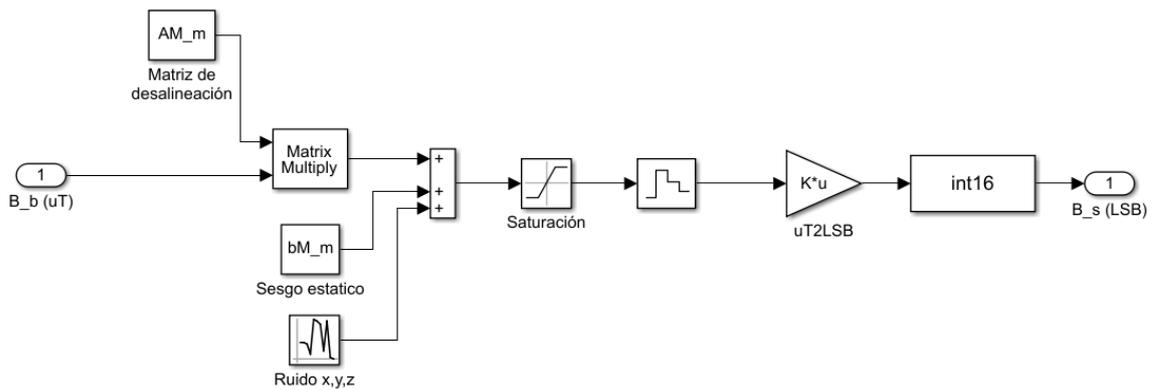
Nota: elaboración propia (2023).

Magnetómetro. En la Figura 63 se muestra el modelo de magnetómetro de 3 ejes en Simulink. El desarrollo del modelo toma como base los trabajos de Tuthill (2009), Bezold (2013) y Rondão (2016). La medición del vector de campo magnético está sujeto a errores de tipo determinísticos como factores de escala, factores de alineación y sesgo estático,

además de errores de tipo aleatorios modelados como un proceso de ruido blanco gaussiano de media cero con una desviación estándar dada. Las lecturas del magnetómetro también están sujetas a errores en el proceso de digitalización como cuantificación y muestreo. Para modelar el magnetómetro de tres ejes Micromag3, se utilizaron los valores de los parámetros dados por el fabricante y presentados previamente en la Tabla 4. Algunos parámetros son obtenidos experimentalmente a partir del trabajo realizado por Rojas (2015), y se describen en la Tabla 14. La matriz de desalineación también contiene el efecto de perturbaciones magnéticas de los componentes presentes en el picosatélite.

Figura 63

Modelo de sensor magnetómetro en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Tabla 14

Parámetros del sensor magnetómetro para simulación.

| Parámetros | Valores utilizados |
|-------------------------|---|
| Matriz de desalineación | $\begin{bmatrix} -1.0987 & -0.0033 & -0.0139 \\ 0.0030 & 1.1703 & 0.0059 \\ -0.0128 & -0.0059 & 1.0021 \end{bmatrix}$ |
| Sesgo Estático (uT) | $[0.2898 \quad -1.4247 \quad 0.4575]^T$ |
| Ruido (uT) | $[0.12 \quad 0.10 \quad 0.16]^T$ |

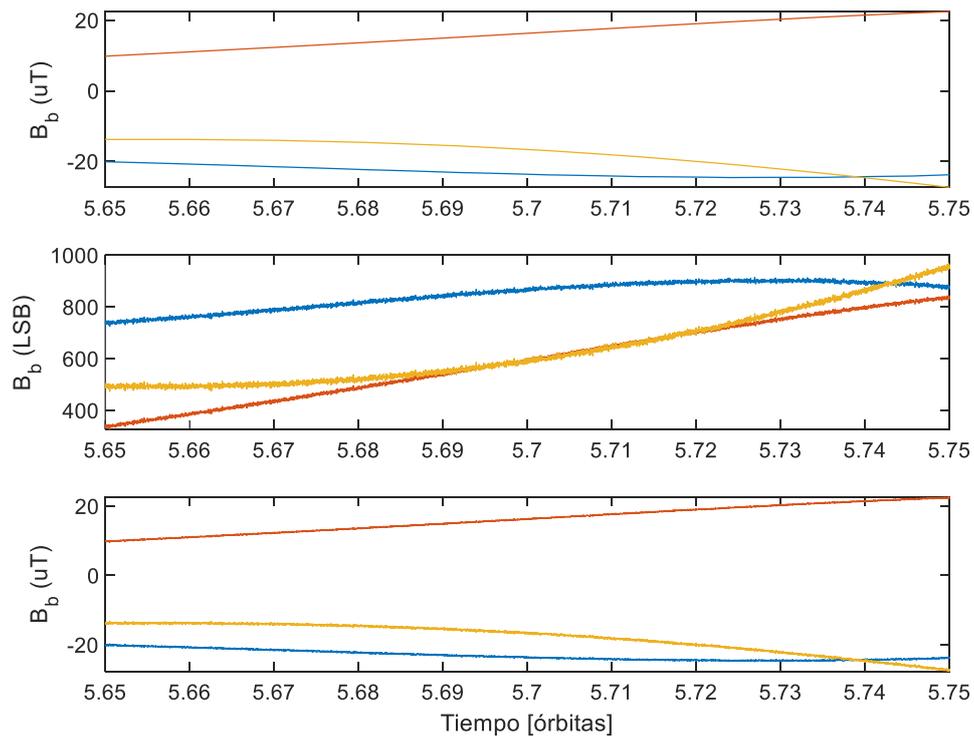
Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 64 se muestra en la parte superior a la variación de campo magnético medido en uT con los colores azul, naranja y amarillo para los ejes X, Y, Z respectivamente.

En el medio se muestra la variación del campo magnético a la salida del sensor en unidades digitales LSB de 16 bits, mientras que en la parte inferior se muestra la variación del campo magnético luego de pasar por la etapa de preprocesamiento en el microcontrolador.

Figura 64

Variación del campo magnético obtenido del modelo de sensor magnetómetro en Simulink.



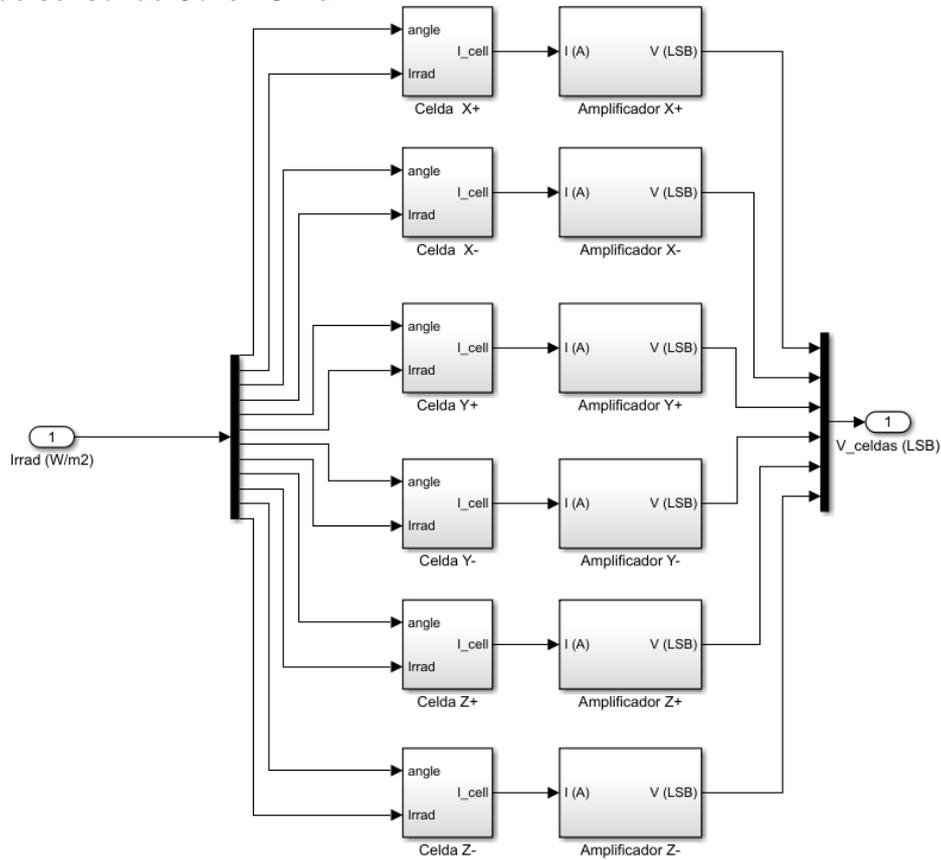
Nota: elaboración propia (2023).

Sensor de Sol. En la Figura 65 se muestra el modelo del sensor solar en Simulink. El modelo está compuesto de 6 celdas solares, colocadas en cada cara del cubesat, y sus respectivas etapas de amplificación. La entrada del modelo consiste en una representación vectorial (magnitud y ángulo) de la irradiancia incidente para cada celda solar, considerando la cara del picosatélite, la posición del sol, la tierra y el fenómeno de albedo. En la Figura 66 se muestra el modelo de la celda solar, consistiendo de una función que relaciona la irradiancia de entrada y la corriente generada por la celda (Rojas, 2015), además de errores de tipo aleatorios modelados como un proceso de ruido blanco gaussiano de media cero con una desviación estándar dada. En la Figura 67 se muestra el modelo del

amplificador basado en los datos del integrado MAX4372, con una salida de voltaje en unidades digitales de 32 bits.

Figura 65

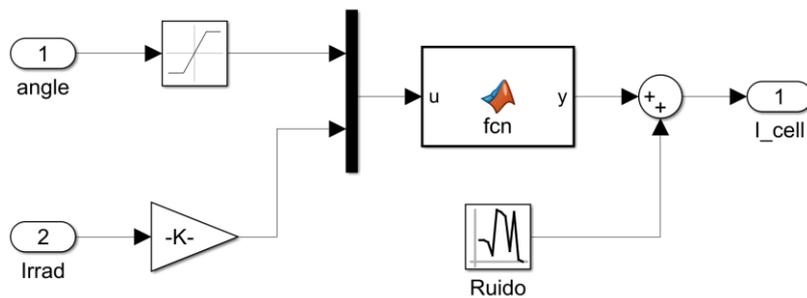
Modelo de sensor de Sol en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 66

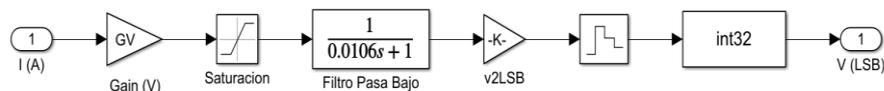
Modelo de celda solar en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 67

Modelo de amplificador MAX4372 en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

En la Tabla 15 se muestra los parámetros de los modelos de las celdas solares y su respectiva desviación estándar. El modelo de cada celda solar corresponde a una ecuación del tipo:

$$I_{celda} = A * \|Irrad\| \cos(B\theta_{Irrad}) + C. \quad (266)$$

donde $\|Irrad\|$ es el módulo de la irradiancia y θ_{Irrad} es el ángulo de incidencia de la irradiancia en grados sexagesimales.

Tabla 15

Parámetros del sensor de Sol para simulación.

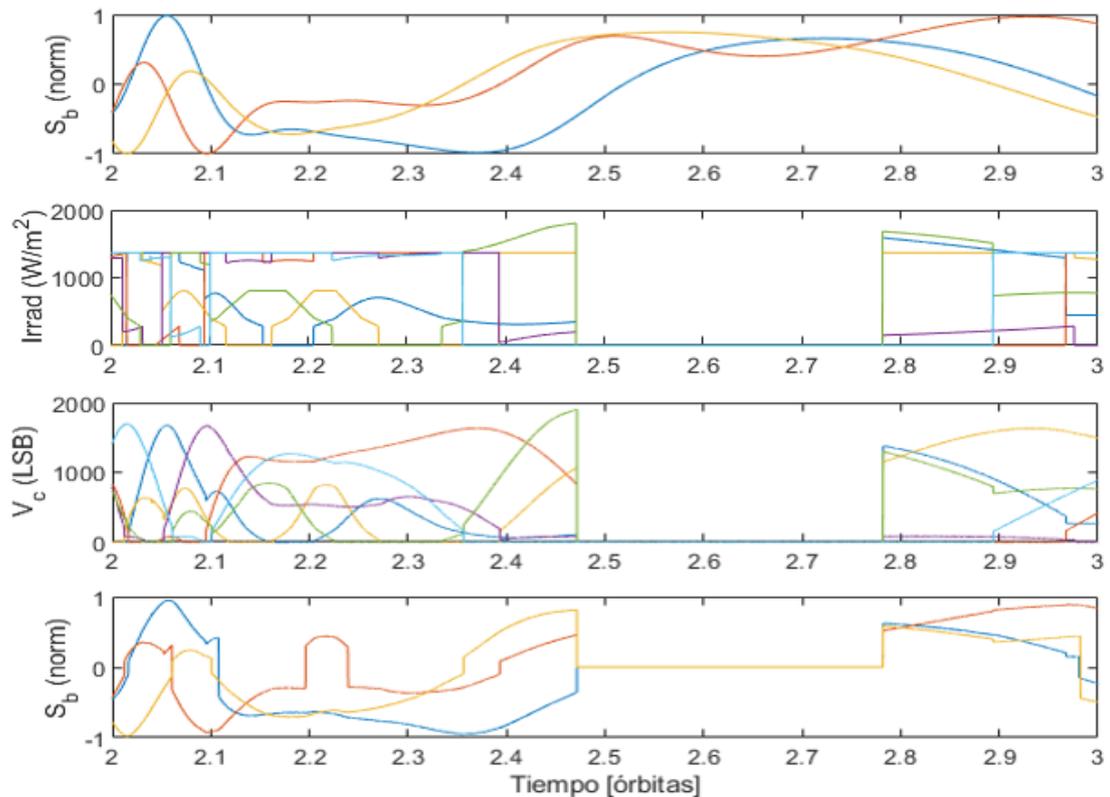
| Parámetros | Valores | |
|--|-----------------------|-----------------------|
| Ecuaciones de celdas solares (A, B, C) | (1.002, 0.926, 1.467) | (0.996, 0.885, 4.904) |
| | (1.002, 0.915, 0.998) | (0.992, 0.897, 3.997) |
| | (0.997, 0.906, 3.164) | (1.004, 0.932, 0.947) |
| Ruido en celdas solares (Amp) | 4.50×10^{-5} | 4.55×10^{-5} |
| | 4.45×10^{-5} | 4.52×10^{-5} |
| | 4.48×10^{-5} | 4.50×10^{-5} |

Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 68 se muestra en la parte superior a la variación de vector solar con valores normalizados con los colores azul, naranja y amarillo para los ejes X, Y, Z respectivamente. Luego se muestra la variación del módulo de la irradiancia para cada una de las celdas solares en W/m^2 . En el medio se muestra la variación del voltaje a la salida del sensor en unidades digitales LSB de 32 bits, mientras que en la parte inferior se muestra la variación del vector solar luego de pasar por la etapa de preprocesamiento en el microcontrolador, observándose el efecto del albedo y de las noches en la reconstrucción del vector.

Figura 68

Variación del vector solar obtenido de los modelos de sensores de Sol en Simulink.

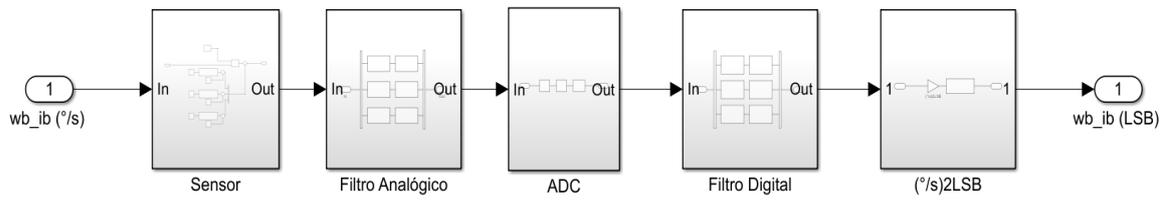


Nota: elaboración propia (2023).

Giroscopio. En la Figura 69 se muestran las 5 etapas del modelo del sensor giroscopio en Simulink. El desarrollo del modelo toma como base los trabajos de Jensen et al. (2010), Crassidis et al. (2011), y Pupo (2016). En la Figura 70 se muestra la primera etapa que consiste de los factores de escala y alineamiento, seguido del modelo estocástico representado por las Ecuaciones 220 y 221. Las etapas de filtrado analógico y digital se muestran en la Figura 71, y corresponden a dos filtros analógicos pasa bajos con frecuencias de corte de 50Hz y 740Hz. Los filtros digitales corresponden a filtros FIR con ventana de Bartlett. En la Figura 72 se muestran las etapas de conversión análogo-digital.

Figura 69

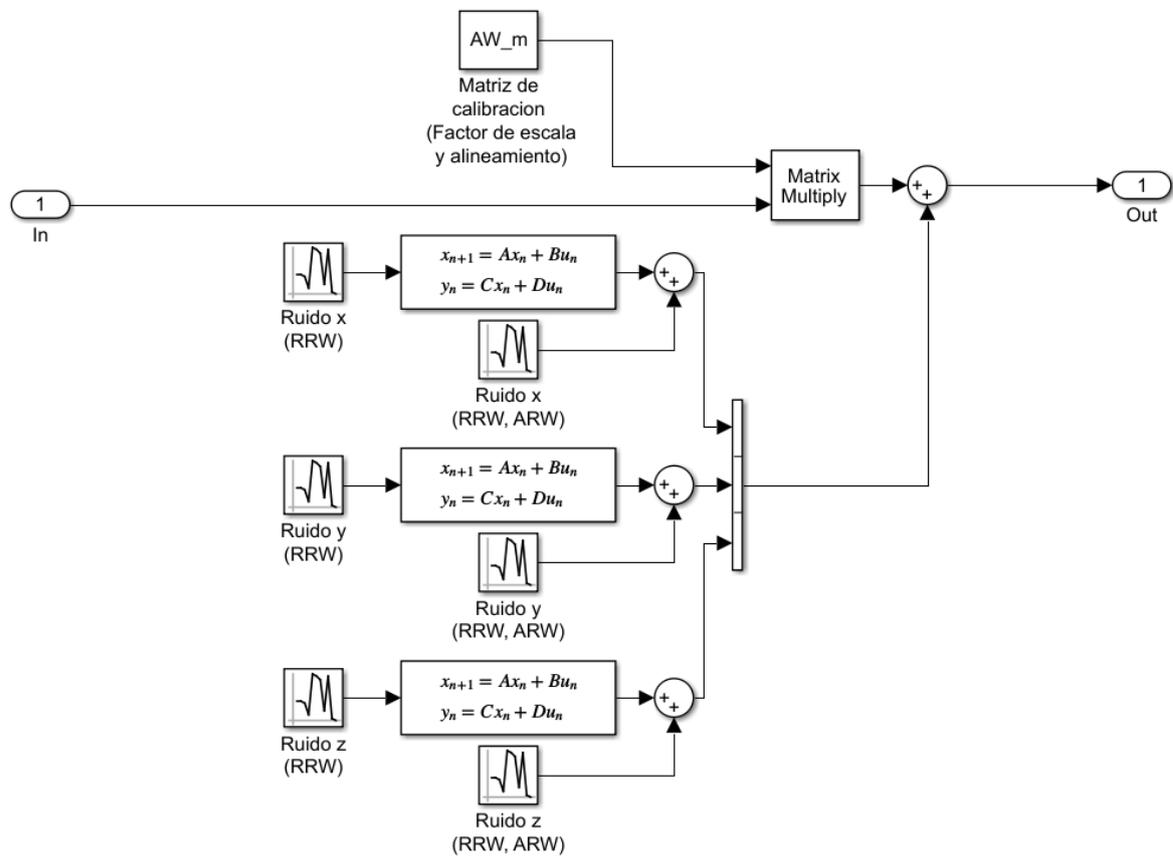
Modelo de sensor giroscopio en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 70

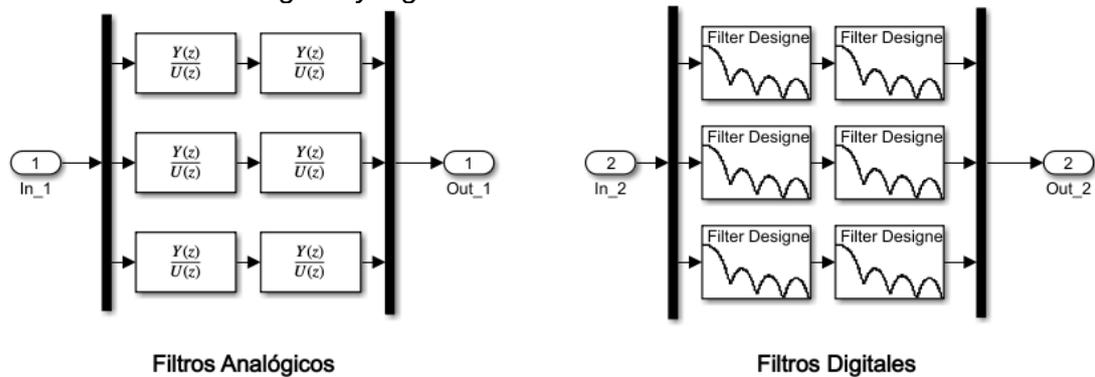
Modelo de elemento sensor en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 71

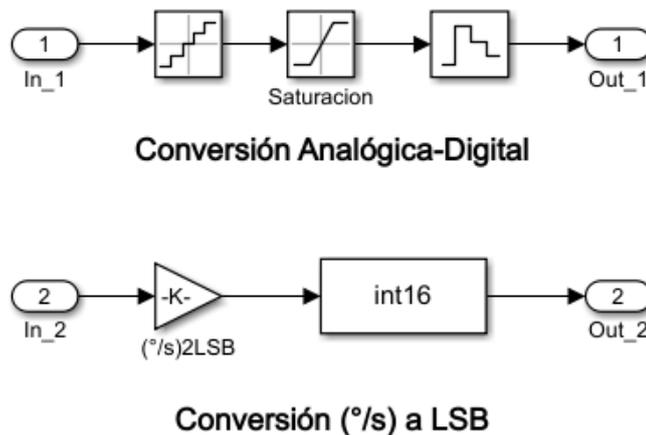
Modelos de filtros analógicos y digitales en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 72

Modelo de Conversión Analógica-Digital en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

Para modelar el giroscopio de tres ejes ADIS16265, se utilizaron los valores de los parámetros dados por el fabricante y presentados previamente en la Tabla 6. Los parámetros son obtenidos experimentalmente a partir de los trabajos realizado por Rojas (2015) y Pupo (2016), y se describen en la Tabla 16.

En la Figura 73 se muestra en la parte superior a la variación de la velocidad angular medida en $^{\circ}/s$ con los colores azul, naranja y amarillo para los ejes X, Y, Z respectivamente.

Tabla 16

Parámetros del sensor giroscopio para simulación.

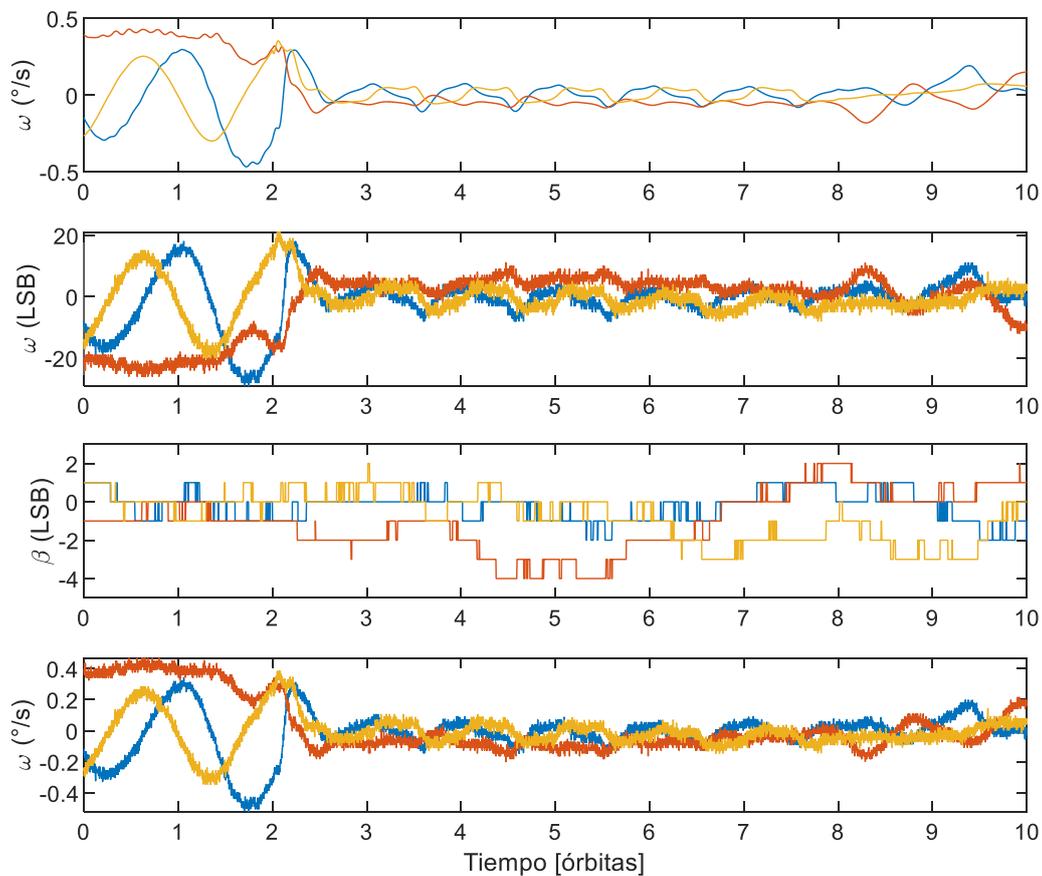
| Parámetros | Valores utilizados |
|--|---|
| Factor de escala y alineación | $\begin{bmatrix} 1.0202 & -0.0315 & 0.0562 \\ 0.0030 & -1.0172 & -0.0067 \\ -0.0090 & -0.0346 & 1.0218 \end{bmatrix}$ |
| Sesgo Estable (°/s) | $[0.00613 \quad 0.00629 \quad 0.00746]^T$ |
| Angular random walk ARW (°/sec ^{1/2}) | $[0.06587 \quad 0.07032 \quad 0.07874]^T$ |
| Rate random walk RRW (°/sec ^{3/2}) | $[0.00029 \quad 0.00028 \quad 0.00039]^T$ |

Nota: elaboración propia (2023).

En la parte media de la Figura 73 se muestra la variación de la velocidad angular a la salida del sensor en unidades digitales (LSB) de 16 bits, y a continuación se muestra la variación del sesgo del giroscopio en LSB. En la parte inferior se muestra la variación de la velocidad angular luego de pasar por la etapa de preprocesamiento en el microcontrolador.

Figura 73

Variación de la velocidad angular obtenido del modelo del sensor giroscopio en Simulink.



Nota: elaboración propia (2023).

5.1.4 Métodos determinísticos

En esta sección se realiza una comparación de los métodos de determinación de orientación presentados en el capítulo IV. Los vectores de entrada para los métodos evaluados son el vector de campo magnético y el vector solar, considerándose además que siempre es posible obtener este último. Las pruebas se realizan en base a la simulación Monte Carlo, utilizando una semilla aleatoria diferente en cada ejecución del simulador. En la Tabla 17 se muestra el error RMS promedio de los métodos para cada ángulo de Euler, colocando entre paréntesis la desviación estándar.

Se han realizado 1000 ejecuciones Monte Carlo para una simulación de 10 órbitas. La diferencia entre QUEST 1 y QUEST 2, es que en el primero se utiliza la Ecuación 166 mientras que el segundo se resuelve numéricamente. Se observa que los métodos TRIAD y QUEST 2 obtienen valores similares de error RMS, aunque el método TRIAD se ejecuta en menor tiempo. En la Figura 74 se muestra una gráfica de los errores reales para cada ejecución y los límites de 3σ asociados en el caso del método TRIAD. Se observa que los límites calculados de 3σ proporcionan límites precisos para los errores determinados. En la Figura 75 se muestra la variación del error RMS de una simulación del método TRIAD con sus límites 3σ , observándose valores de más de 50 grados sexagesimales en algunos instantes de tiempo.

Tabla 17

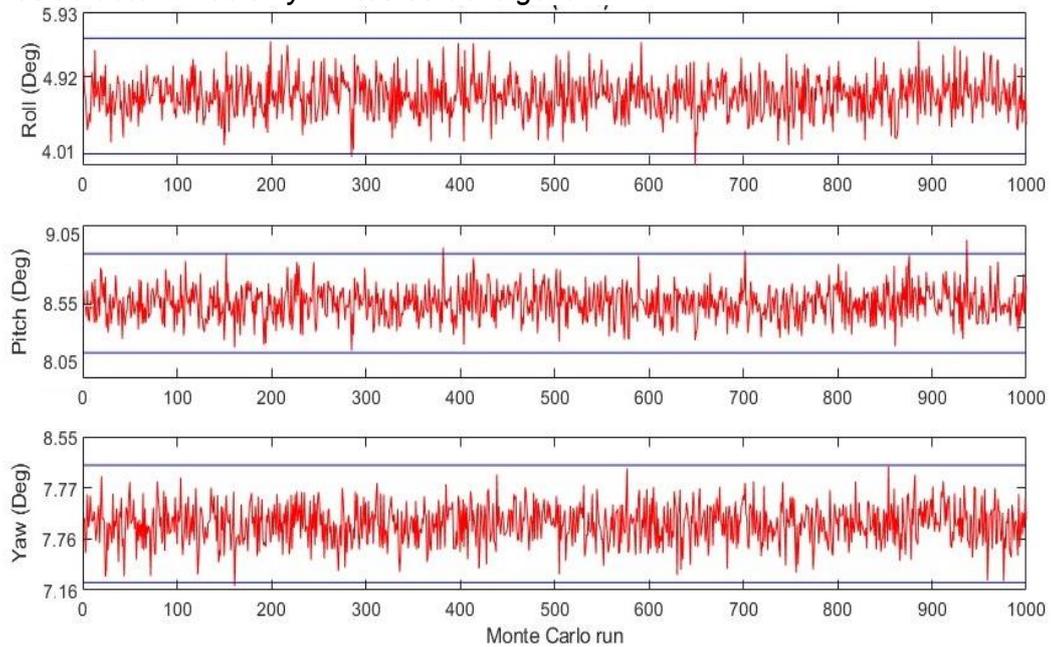
Valores RMSE de orientación en 1000 ejecuciones Monte Carlo para 10 órbitas.

| Estado | TRIAD | QUEST 1 | QUEST 2 | Two Vector |
|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| Roll (°) | 4.9170 (0.3015) | 5.6340 (0.2212) | 4.9141 (0.3098) | 16.6108 (0.4850) |
| Pitch (°) | 8.5574 (0.1625) | 8.7384 (0.1882) | 8.5544 (0.1614) | 19.1947 (0.5730) |
| Yaw (°) | 7.7665 (0.1956) | 7.9196 (0.1512) | 7.7716 (0.1922) | 13.3038 (0.3220) |
| Total (°) | 7.0802 (0.2244) | 7.4307 (0.1269) | 7.0800 (0.2275) | 16.3698 (0.4670) |
| Tiempo (us) | 12.9370 | 23.6489 | 23.0393 | 14.2931 |

Nota: elaboración propia (2023).

Figura 74

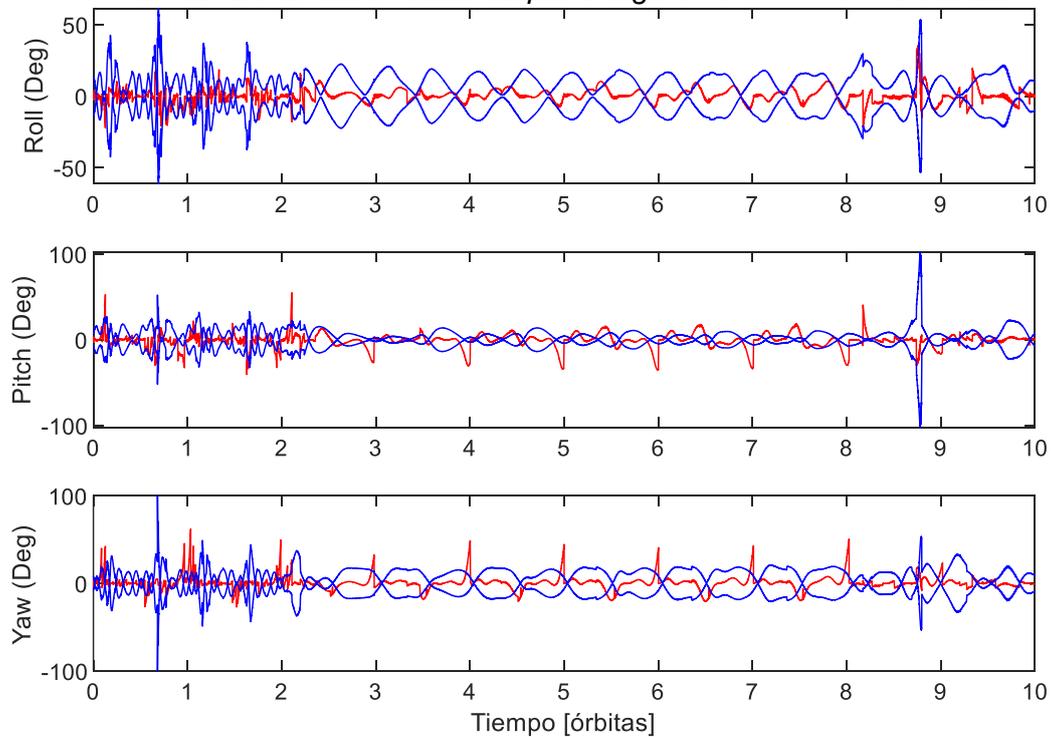
Errores de determinación y límites 3σ del algoritmo TRIAD.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 75

Variación RMSE de la orientación obtenida por el algoritmo TRIAD en 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

5.1.5 Métodos probabilísticos

En esta sección se realiza una comparación de los métodos probabilísticos de determinación de orientación presentados en el capítulo IV. Las pruebas se realizan en base a la simulación Monte Carlo, utilizando una semilla aleatoria diferente en cada ejecución del simulador.

En la Tabla 18 se muestra el error RMS promedio de los métodos para cada ángulo de Euler y el sesgo del giroscopio, colocando entre paréntesis la desviación estándar. Se han realizado 1000 ejecuciones Monte Carlo para una simulación de 10 órbitas. Se observa que los métodos MEKF y MMEKF obtienen valores similares de error RMS, aunque el método MMEKF se ejecuta en menor tiempo. En la Figura 76 se muestra una gráfica de los errores reales para cada ejecución y los límites de 3σ asociados en el caso del método MMEKF. Se observa que los límites calculados de 3σ proporcionan límites precisos para los errores determinados. En la Figura 77 se muestra la variación del error RMS de una simulación del método MMEKF con sus límites 3σ , observándose valores de más de 10 grados sexagesimales en algunos instantes de tiempo.

Tabla 18

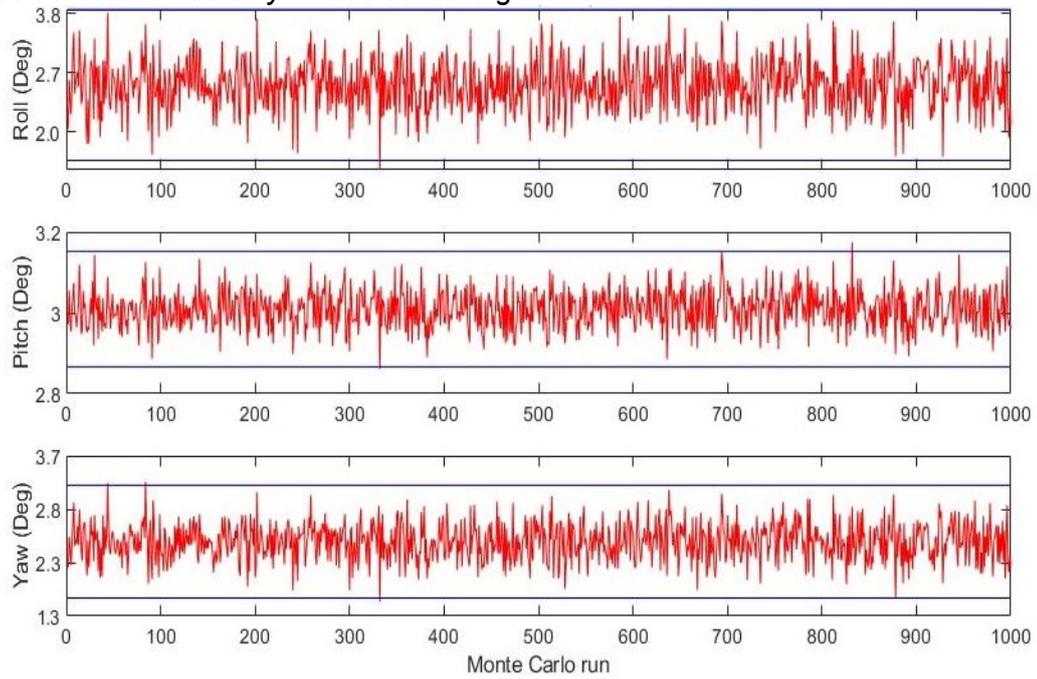
Valores RMSE de orientación y sesgo en 1000 ejecuciones Monte Carlo para 10 órbitas.

| Estado | MEKF | MMEKF | SMEKF |
|--------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Roll (°) | 2.6785 (0.4373) | 2.6792 (0.4232) | 3.2199 (0.3594) |
| Pitch (°) | 3.0078 (0.4934) | 3.0093 (0.4776) | 4.4374 (0.3754) |
| Yaw (°) | 2.5396 (0.3705) | 2.5394 (0.3524) | 4.5669 (0.2158) |
| Euler Total (°) | 2.7420 (0.4334) | 2.7426 (0.4173) | 4.0747 (0.3164) |
| Sesgo x (1e-3 rad/s) | 0.2644 (0.0121) | 0.2645 (0.0123) | 0.3141 (0.0116) |
| Sesgo y (1e-3 rad/s) | 0.3292 (0.0064) | 0.3292 (0.0061) | 0.3567 (0.0062) |
| Sesgo z (1e-3 rad/s) | 0.3234 (0.0177) | 0.3233 (0.0165) | 0.3806 (0.0137) |
| Sesgo Total (1e-3 rad/s) | 0.3056 (0.0121) | 0.3057 (0.0118) | 0.3505 (0.0105) |
| Tiempo (us) | 60.3039 | 57.2006 | 57.2855 |

Nota: elaboración propia (2023).

Figura 76

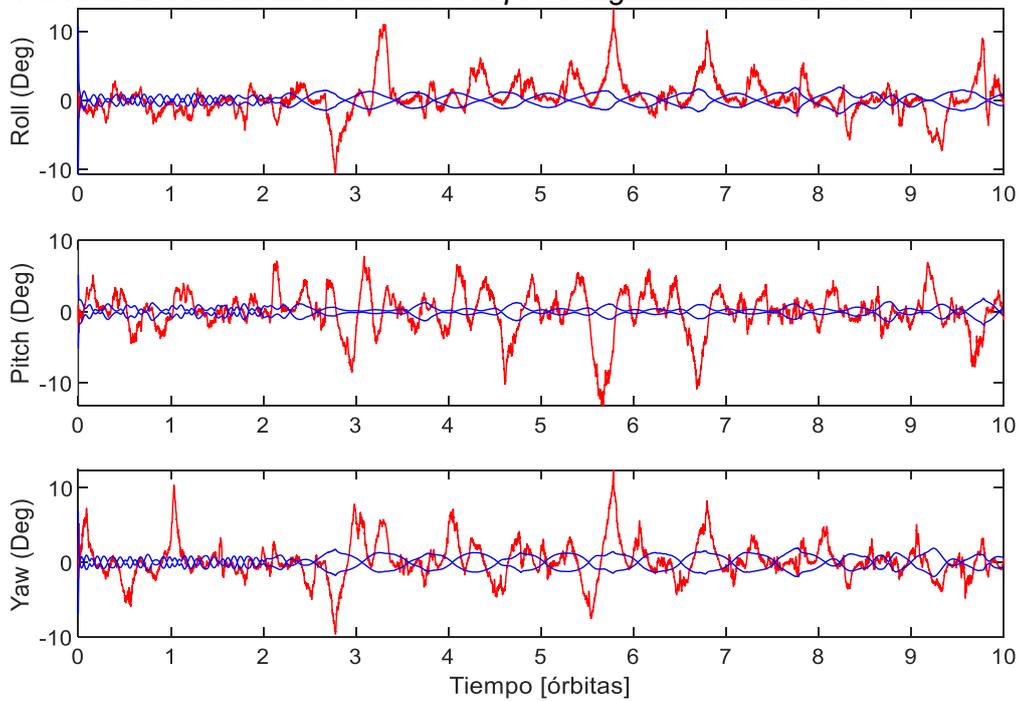
Errores de determinación y límites 3σ del algoritmo MMEKF.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 77

Variación RMSE de la orientación obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

El rendimiento del método MMEKF depende principalmente del nivel de ruido del giroscopio. En la Tabla 19 se muestran los resultados de determinación para diferentes configuraciones de tiempo de muestreo del MMEKF (T_s), el orden del filtro digital (N) y la frecuencia de muestreo del giroscopio (f_g). Se observan los mejores resultados para la configuración de $f_g=2$, $N=16$ y $T_s= 0.50$, obteniéndose un error RMS del promedio de los ángulos de Euler de 2.3916 grados sexagesimales y un error RMS del promedio de la velocidad angular de 0.4468×10^{-3} radianes por segundo. Para eliminar el ruido aún presente en la velocidad angular se ha probado filtros promediadores de diferentes órdenes, observándose los resultados en la Tabla 20. Se observa que un error RMS de 0.4617×10^{-3} rad/s puede reducirse a 0.1834×10^{-3} rad/s con un filtro promediador de orden 200.

Tabla 19

Valores RMSE de orientación y velocidad angular en 100 ejecuciones Monte Carlo en 10 órbitas del MMEKF para diferentes configuraciones de giroscopio y tiempo de muestreo.

| Casos | Angulo de Euler IB (°) | | | | Velocidad Angular IB (1e-3 rad/s) | | | |
|-------------------------------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | Roll | Pitch | Yaw | Total | X | Y | Z | Total |
| $f_g=256$, $N=64$, $T_s= 0.25$ | 2.3885 (0.3814) | 2.8988 (0.3033) | 2.3387 (0.2529) | 2.5420 (0.3515) | 2.2453 (0.0008) | 2.4095 (0.0037) | 2.5849 (0.0041) | 2.4132 (0.0029) |
| $f_g=4$, $N=16$, $T_s= 0.25$ | 2.2534 (0.3605) | 2.7386 (0.3220) | 2.2225 (0.1904) | 2.4049 (0.2910) | 0.5263 (0.0033) | 0.6171 (0.0037) | 0.6732 (0.0049) | 0.6055 (0.0040) |
| $f_g=4$, $N=64$, $T_s= 0.25$ | 2.3496 (0.2646) | 2.7013 (0.3218) | 2.1882 (0.1569) | 2.4130 (0.2478) | 0.3143 (0.0032) | 0.3270 (0.0034) | 0.3626 (0.0057) | 0.3647 (0.0041) |
| $f_g=4$, $N=128$, $T_s= 0.25$ | 2.3982 (0.2824) | 2.8649 (0.3399) | 2.1682 (0.2190) | 2.4771 (0.2805) | 0.2350 (0.0049) | 0.2478 (0.0037) | 0.2787 (0.0060) | 0.2538 (0.0049) |
| $f_g=2$, $N=16$, $T_s= 0.50$ | 2.2407 (0.4018) | 2.7322 (0.3574) | 2.2019 (0.2778) | 2.3916 (0.3457) | 0.3916 (0.0039) | 0.4518 (0.0038) | 0.4971 (0.0055) | 0.4468 (0.0044) |
| $f_g=2$, $N=64$, $T_s= 0.50$ | 2.5274 (0.3412) | 2.9072 (0.3443) | 2.2116 (0.2332) | 2.5487 (0.3062) | 0.2519 (0.0046) | 0.2516 (0.0040) | 0.2863 (0.0069) | 0.2633 (0.0052) |
| $f_g=2$, $N=128$, $T_s= 0.50$ | 2.7739 (0.3494) | 3.2734 (0.3617) | 2.5330 (0.2373) | 2.8001 (0.3161) | 0.2246 (0.0063) | 0.2052 (0.0048) | 0.2376 (0.0085) | 0.2225 (0.0066) |

Nota: elaboración propia (2023).

En la Tabla 21 se muestran los resultados de la aplicación del MMEKF después de un determinado número de días desde la actualización de la posición inicial del modelo de órbita simplificado.

Tabla 20

Valores RMSE de velocidad angular en 10 órbitas utilizando diferentes configuraciones de un filtro promediador.

| Casos | S. F. P. | Con Filtro Promediador (1e-3 rad/s) | | | | |
|--|--------------|-------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| | (1e-3 rad/s) | N=50 | N=100 | N=200 | N=500 | N=1000 |
| W_{gyro} (fg=256 , N=64, Ts= 0.25) | 2.4611 | 0.6176 | 0.5655 | 0.5408 | 0.5413 | 0.5820 |
| W_{ekt} (fg=256 , N=64, Ts= 0.25) | 2.4117 | 0.3752 | 0.2787 | 0.2168 | 0.1923 | 0.2527 |
| W_{gyro} (fg=2, N=16, Ts= 0.50) | 0.6371 | 0.5148 | 0.4946 | 0.4956 | 0.5526 | 0.5920 |
| W_{ekt} (fg=2, N=16, Ts= 0.50) | 0.4617 | 0.2598 | 0.2056 | 0.1834 | 0.2522 | 0.2986 |
| W_{gyro} (fg=2, N=128, Ts= 0.50) | 0.4980 | 0.5012 | 0.5064 | 0.5408 | 0.5975 | 0.6348 |
| W_{ekt} (fg=2, N=128, Ts= 0.50) | 0.2225 | 0.2135 | 0.2083 | 0.2119 | 0.2906 | 0.3242 |

Nota: elaboración propia (2023).

En la Tabla 21 se observa un incremento diario del error RMS para los ángulos de Euler de ECI a BCBF, así como para los ángulos de Euler de OCO a BCBF. En el caso de las velocidades angulares el incremento se da en menor medida, como se observa en la Tabla 22.

Tabla 21

Valores RMSE de orientación en 100 ejecuciones Monte Carlo en 10 órbitas para el MMEKF.

| Caso: | Angulo de Euler IB (°) | | | | Angulo de Euler OB (°) | | | |
|-----------------------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | Roll | Pitch | Yaw | Total | Roll | Pitch | Yaw | Total |
| fg=2, N=16, Ts= 0.50 | | | | | | | | |
| Día 1 (Orbita 2) | 2.0582 (0.3154) | 2.5873 (0.3022) | 2.2090 (0.3237) | 2.2849 (0.3138) | 1.9145 (0.2259) | 1.7251 (0.3088) | 3.0123 (0.3827) | 2.2173 (0.3058) |
| Día 3 (Orbita 33) | 2.4836 (0.3605) | 2.9601 (0.3790) | 2.3680 (0.2873) | 2.6039 (0.3363) | 2.0667 (0.2438) | 2.0271 (0.2421) | 3.4700 (0.4434) | 2.5213 (0.3098) |
| Día 5 (Orbita 65) | 2.6465 (0.4249) | 3.1353 (0.6027) | 2.4076 (0.3763) | 2.7298 (0.4680) | 2.0833 (0.3027) | 2.1563 (0.3411) | 3.6880 (0.6817) | 2.6426 (0.4418) |

Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 78 se muestra la variación de cada componente del cuaternión de orientación que representa la orientación de ECI a BCBF durante 10 órbitas en el primer día. La curva en azul corresponde al valor real y en rojo al valor estimado.

Tabla 22

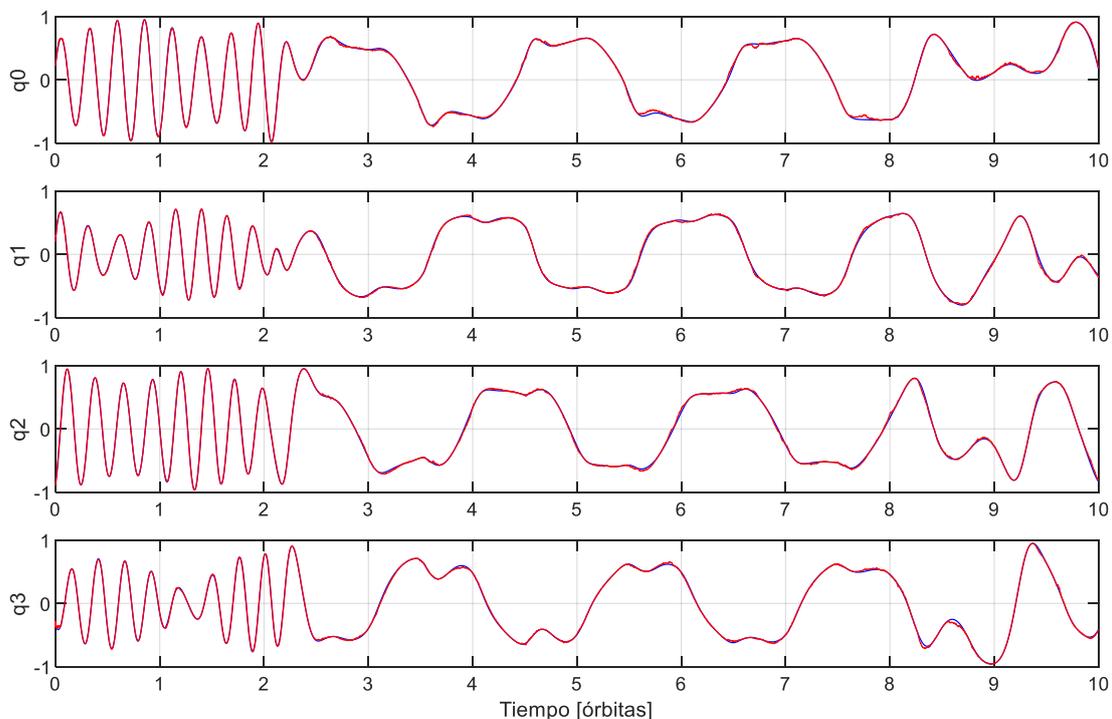
Valores RMSE de velocidad angular en 100 ejecuciones Monte Carlo en 10 órbitas para el MMEKF.

| Caso: fg=2, N=16, Ts= 0.50 | Velocidad Angular IB (1e-3 rad/s) | | | | Velocidad Angular OB (1e-3 rad/s) | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | X | Y | Z | Total | X | Y | Z | Total |
| Día 1 (Orbita 2) | 0.3912 (0.0037) | 0.4517 (0.0038) | 0.4949 (0.0049) | 0.4459 (0.0041) | 0.3909 (0.0037) | 0.4504 (0.0036) | 0.4883 (0.0039) | 0.4432 (0.0037) |
| Día 3 (Orbita 33) | 0.3926 (0.0036) | 0.4548 (0.0043) | 0.4963 (0.0055) | 0.4479 (0.0044) | 0.3932 (0.0039) | 0.4536 (0.0042) | 0.4890 (0.0048) | 0.4453 (0.0043) |
| Día 5 (Orbita 65) | 0.3930 (0.0040) | 0.4545 (0.0039) | 0.4973 (0.0067) | 0.4482 (0.0049) | 0.3939 (0.0045) | 0.4529 (0.0041) | 0.4902 (0.0058) | 0.4457 (0.0048) |
| Día 1 (Orbita 2) | 0.1896 (0.0063) | 0.1877 (0.0053) | 0.2205 (0.0080) | 0.1992 (0.0066) | 0.1936 (0.0056) | 0.1889 (0.0048) | 0.2140 (0.0041) | 0.1988 (0.0048) |
| Con filtro prom. | | | | | | | | |
| Día 3 (Orbita 33) | 0.1917 (0.0054) | 0.1965 (0.0067) | 0.2257 (0.0096) | 0.2046 (0.0073) | 0.1976 (0.0042) | 0.1960 (0.0050) | 0.2163 (0.0057) | 0.2033 (0.0050) |
| Con filtro prom. | | | | | | | | |
| Día 5 (Orbita 65) | 0.1909 (0.0070) | 0.1968 (0.0060) | 0.2286 (0.0124) | 0.2054 (0.0085) | 0.1981 (0.0063) | 0.1947 (0.0064) | 0.2194 (0.0082) | 0.2041 (0.0070) |
| Con filtro prom. | | | | | | | | |

Nota: Elaboración propia (2023).

Figura 78

Variación RMSE de la orientación (q_I^B) obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas.

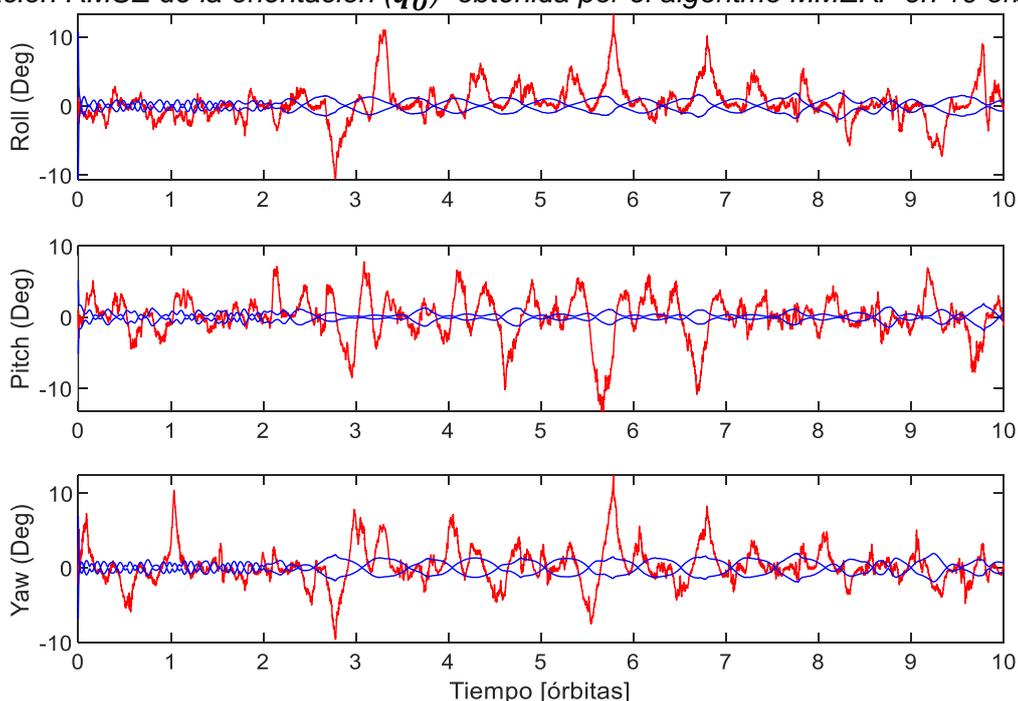


Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 79 se muestra la variación cada componente del cuaternión de orientación que representa la orientación de OCO a BCBF. En esta última figura se puede observar el efecto del controlador de orientación, aplicado durante la segunda y octava órbita, donde el cuaternión tiende al valor $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Figura 79

Variación RMSE de la orientación (q_0^B) obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas.



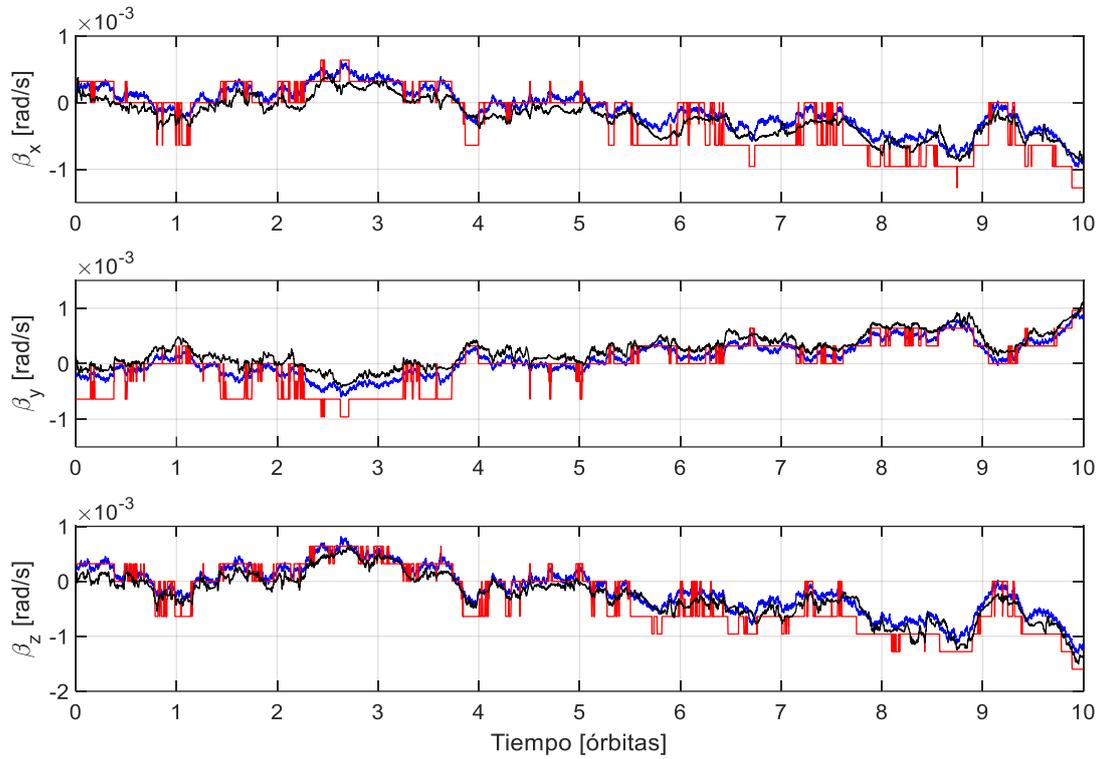
Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 80 se muestra la variación de cada componente del sesgo del giroscopio durante 10 órbitas en el primer día. En azul se muestra el valor real sin efectos de la digitalización, en rojo el valor real con efectos de la digitalización, y en negro el valor estimado por el MMEKF.

En la Figura 81 se muestra en la parte superior la variación de la velocidad angular obtenida directamente del giroscopio ($\tilde{\omega}_{ib}^b$), mientras que en la parte inferior se muestra el resultado de aplicar el filtro promediador a $\tilde{\omega}_{ib}^b$. Aquí se puede observar una reducción del ruido en la medición y el efecto del error creciente debido al sesgo.

Figura 80

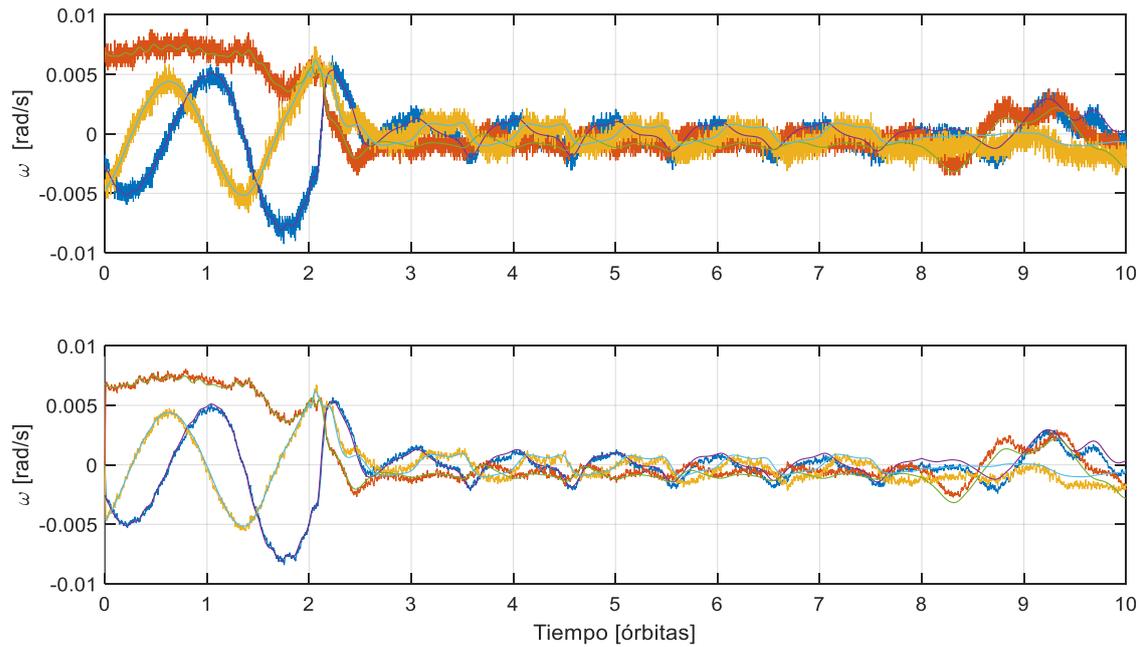
Variación RMSE del sesgo del giroscopio obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 81

Variación RMSE de la velocidad angular ($\tilde{\omega}_{ib}^b$) obtenida del giroscopio en 10 órbitas.

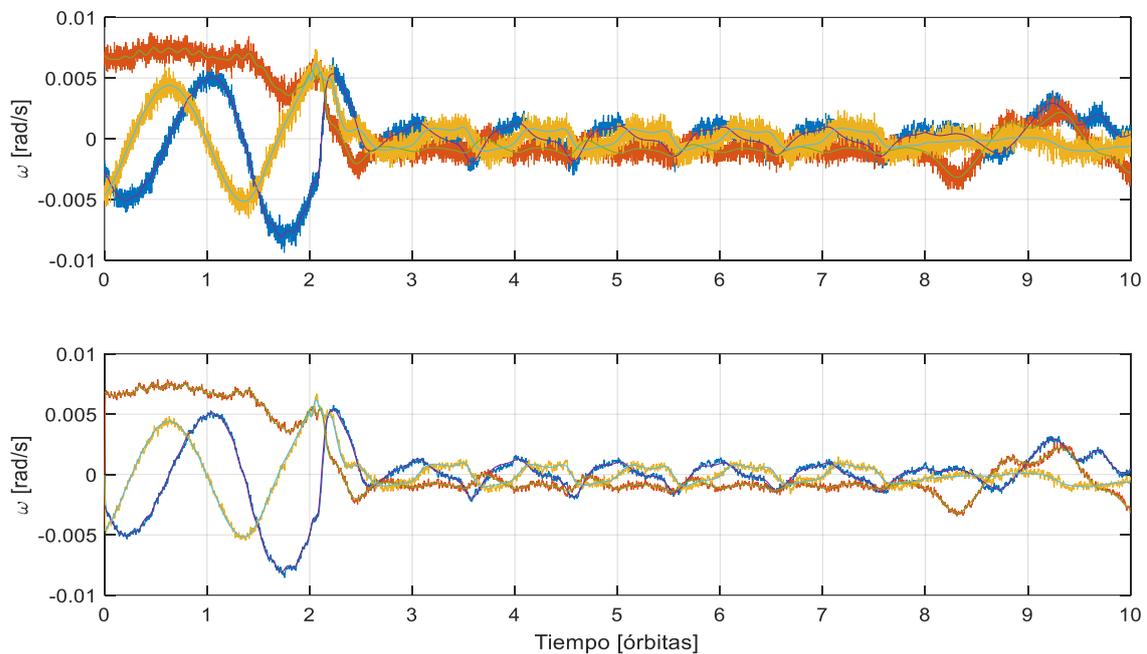


Nota: elaboración propia (2023).

En la Figura 82 se muestra en la parte superior la variación de la velocidad angular obtenida del giroscopio ($\tilde{\omega}_{ib}^b$) sin el sesgo estimado por el MMEKF, mientras que en la parte inferior se muestra el resultado de aplicar el filtro promediador a esta velocidad sin sesgo. En las Figuras 83 y 84 se muestran la variación de la velocidad angular respecto al sistema OCO (ω_{ob}^b), obtenida al aplicar la Ecuación 38.

Figura 82

Variación RMSE de la velocidad angular ($\tilde{\omega}_{ib}^b$) obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas.

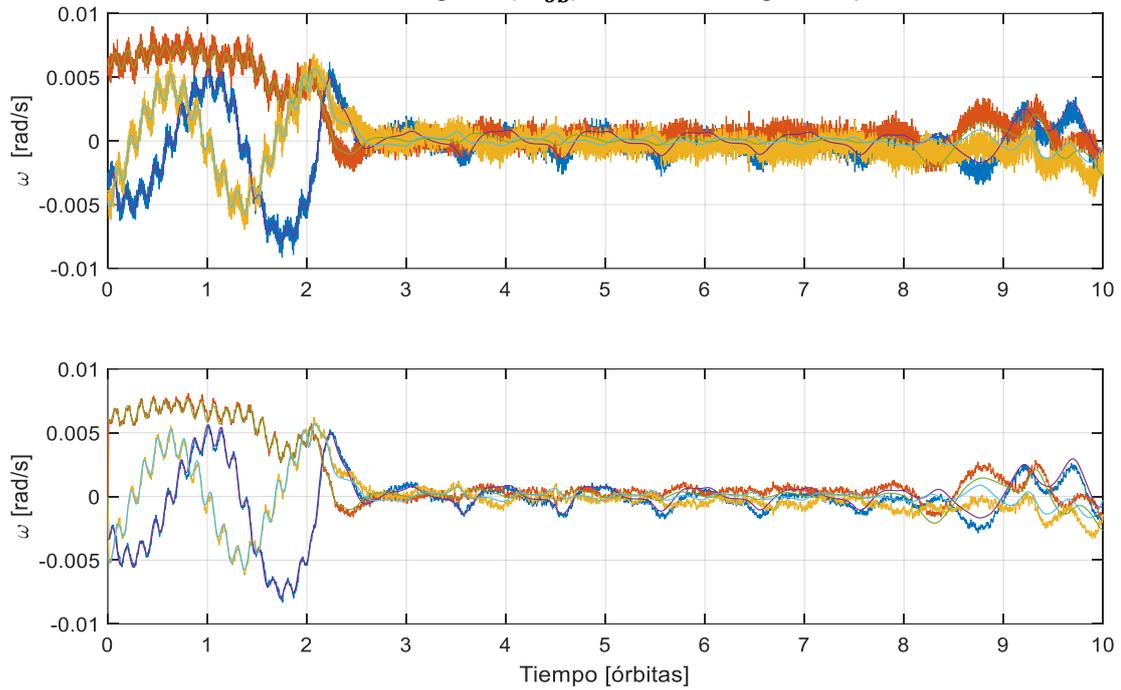


Nota: elaboración propia (2023).

Una de las limitaciones del sistema propuesto son los sensores utilizados, por lo que se realizaron simulaciones considerando sensores de mejores prestaciones. Una primera opción fue simular sensores de Sol como los basados en cámaras, ya que no son influenciados por el efecto del albedo. Una segunda opción fue simular un giroscopio con poco ruido, como el CRS09-01 con $0.001667 \text{ } ^\circ/\text{s}^{1/2}$ de ARW y $0.0000022014 \text{ } ^\circ/\text{s}^{3/2}$ de RRW. Los resultados obtenidos se muestran en las Tablas 23 y 24.

Figura 83

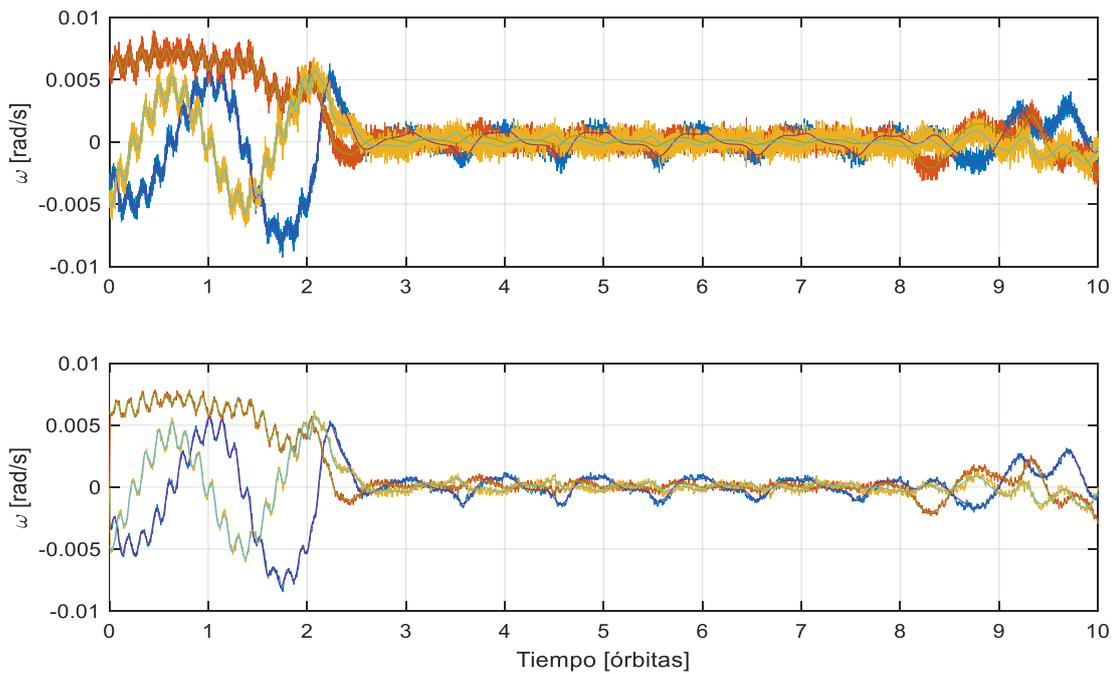
Variación RMSE de la velocidad angular (ω_{ob}^b) obtenida del giroscopio en 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

Figura 84

Variación RMSE de velocidad angular (ω_{ob}^b) obtenida por el algoritmo MMEKF en 10 órbitas.



Nota: elaboración propia (2023).

Tabla 23*Valores RMSE de orientación en 100 ejecuciones Monte Carlo.*

| Casos: $f_g=2, T_s=0.50$ | Angulo de Euler IB (°) | | | | Angulo de Euler OB (°) | | | |
|--------------------------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | Roll | Pitch | Yaw | Total | Roll | Pitch | Yaw | Total |
| MMEKF sin albedo, N=16 | 1.7409 (0.2182) | 2.3224 (0.3108) | 1.6658 (0.1394) | 1.9097 (0.2228) | 1.4298 (0.1270) | 1.0774 (0.0732) | 2.8412 (0.3761) | 1.7828 (0.1921) |
| SMEKF sin albedo, N=16 | 1.7407 (0.2091) | 2.4609 (0.3287) | 1.6740 (0.1750) | 1.9585 (0.2376) | 1.5767 (0.1447) | 1.3215 (0.0902) | 2.7258 (0.3948) | 1.8747 (0.2099) |
| MMEKF con CRS09-01 | 0.2759 (0.0098) | 0.2641 (0.0115) | 0.3477 (0.0085) | 0.2959 (0.0099) | 0.2104 (0.0088) | 0.2306 (0.0086) | 0.3193 (0.0170) | 0.2534 (0.0115) |
| MMEKF con CRS09-01 sin alb. | 0.2830 (0.0101) | 0.2335 (0.0085) | 0.3489 (0.0086) | 0.2884 (0.0091) | 0.1920 (0.0061) | 0.2060 (0.0059) | 0.3153 (0.0164) | 0.2378 (0.0095) |
| SMEKF con CRS09-01 sin alb. | 0.3671 (0.0124) | 0.3540 (0.0085) | 0.3562 (0.0063) | 0.3591 (0.0091) | 0.2327 (0.0046) | 0.2518 (0.0053) | 0.4415 (0.0159) | 0.3087 (0.0086) |

Nota: elaboración propia (2023).

Tabla 24*Valores RMSE de velocidad angular en 100 ejecuciones Monte Carlo.*

| Casos: $f_g=2, T_s=0.50$ | Velocidad Angular IB (1e-3 rad/s) | | | | Velocidad Angular OB (1e-3 rad/s) | | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | X | Y | Z | Total | X | Y | Z | Total |
| MMEKF sin albedo, N=16 | 0.3869 (0.0029) | 0.4508 (0.0033) | 0.4961 (0.0041) | 0.4440 (0.0034) | 0.3893 (0.0042) | 0.4487 (0.0038) | 0.4882 (0.0048) | 0.4421 (0.0043) |
| SMEKF sin albedo, N=16 | 0.3911 (0.0036) | 0.4559 (0.0043) | 0.5022 (0.0059) | 0.4497 (0.0046) | 0.3937 (0.0047) | 0.4547 (0.0053) | 0.4979 (0.0079) | 0.4488 (0.0060) |
| MMEKF con CRS09-01 | 0.0480 (0.0001) | 0.0492 (0.0001) | 0.0514 (0.0001) | 0.0495 (0.0001) | 0.0482 (0.0001) | 0.0492 (0.0001) | 0.0512 (0.0001) | 0.0495 (0.0001) |
| MMEKF con CRS09-01 sin alb. | 0.0480 (0.0001) | 0.0492 (0.0001) | 0.0513 (0.0001) | 0.0495 (0.0001) | 0.0481 (0.0001) | 0.0492 (0.0001) | 0.0510 (0.0001) | 0.0494 (0.0001) |
| SMEKF con CRS09-01 sin alb. | 0.0481 (0.0001) | 0.0492 (0.0001) | 0.0512 (0.0001) | 0.0495 (0.0001) | 0.0482 (0.0001) | 0.0492 (0.0001) | 0.0511 (0.0001) | 0.0495 (0.0001) |
| MMEKF sin alb., N=16 con filtro | 0.1797 (0.0044) | 0.1871 (0.0047) | 0.2192 (0.0064) | 0.1953 (0.0052) | 0.1907 (0.0048) | 0.1866 (0.0046) | 0.2164 (0.0060) | 0.1979 (0.0051) |
| SMEKF sin alb., N=16 con filtro | 0.1945 (0.0064) | 0.2029 (0.0067) | 0.2427 (0.0106) | 0.2134 (0.0079) | 0.2028 (0.0040) | 0.2036 (0.0060) | 0.2421 (0.0131) | 0.2162 (0.0077) |

Nota: elaboración propia (2023).

5.2 Implementación y verificación

En esta sección se describe la implementación en el microcontrolador. Se inicia describiendo las características de los microcontroladores seleccionados, seguido de las especificaciones del algoritmo implementado y finalizando con los resultados de la verificación del mismo.

5.2.1 Descripción del hardware

La implementación del algoritmo de determinación de orientación del picosatélite Chasqui I se realizó en un microcontrolador MCF51QE128 de la marca Freescale (comprada en 2015 por NXP Semiconductors). Las pruebas finales de la presente tesis fueron realizadas en el microcontrolador RP2040 basado en el procesador de doble núcleo ARM Cortex-M0+. En la Tabla 25 se muestran las principales características de ambos microcontroladores para propósito de comparación.

Tabla 25

Descripción de Microcontroladores.

| Parámetro | MCF51QE128 (DEMOQE) | RP2040 (Raspberry Pi Pico) |
|--------------------------|----------------------|------------------------------|
| Procesador | 32-Bit ColdFire v1.0 | Dual-core Arm Cortex M0+ |
| Frecuencia de reloj | Hasta 50.33 MHz | 133 MHz |
| Memoria RAM | 8 KB | 264 KB |
| Memoria Flash | 128 KB | 2 MB (Externa) |
| Voltaje de operación | 1.8 - 3.6 V | 1.8 - 5.5 V |
| Lenguaje de programación | ASM, C | ASM, C, Arduino, MicroPython |

Nota: elaboración propia (2023).

La programación del microcontrolador MCF51QE128 se realizó en el entorno de desarrollo integrado CodeWarrior Development Studio v10.2 utilizando el lenguaje de programación C, y las pruebas se realizaron en la tarjeta de desarrollo DEMOQE128 (NXP, 2022).

El microcontrolador RP2040 se programó en lenguaje C utilizando el entorno de desarrollo Visual Studio Code v1.75 en Windows con las librerías necesarias instaladas en una máquina virtual de Ubuntu 22.04, mientras que las pruebas se realizaron en la tarjeta de desarrollo Raspberry Pi Pico (Raspberry Pi, 2022).

Figura 85

Módulo de desarrollo para Microcontroladores.



DEMOQE128



Raspberry Pi Pico

Nota: elaboración propia (2023).

5.2.2 Especificaciones del algoritmo

Luego de la etapa de simulación descrita en la sección anterior, el algoritmo del SDO fue portado a lenguaje C para su implementación en hardware. En la Figura 86 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo del SDO. El código de la implementación fue dividido en cuatro bibliotecas que se presentan en la Tabla 26 y describen a continuación.

Tabla 26

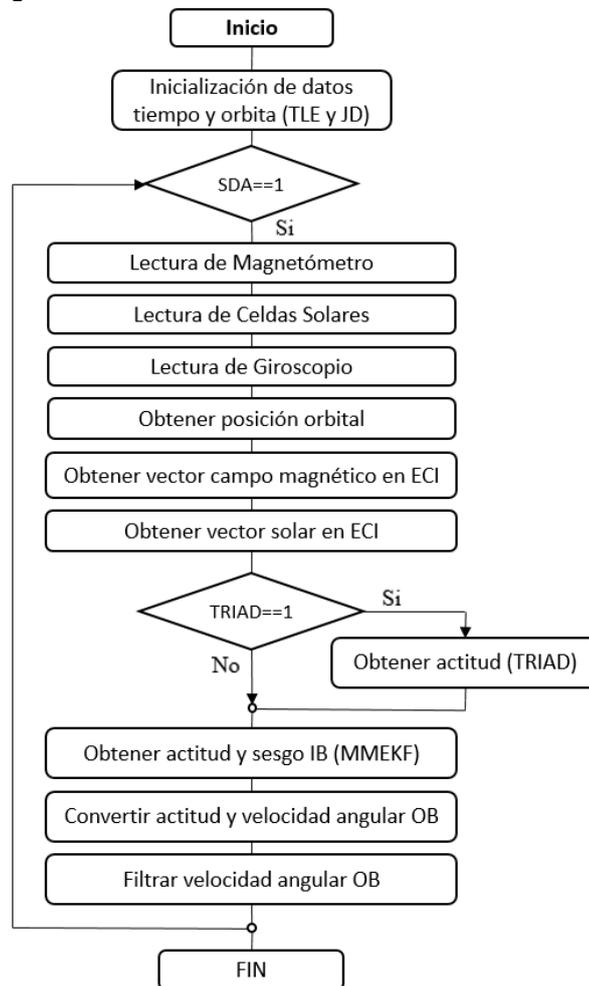
Descripción de bibliotecas del algoritmo SDO.

| Biblioteca | Descripción |
|-------------------|--|
| MATHOPER | Funciones para operaciones matriciales. |
| SENSORS | Funciones para lectura y conversión de unidades. |
| MODELS | Funciones para modelos de orbita y referencia. |
| ATTDET | Funciones para algoritmos de determinación de orientación. |

Nota: elaboración propia (2023).

Figura 86

Diagrama de flujo del algoritmo del SDO.



Nota: elaboración propia (2023).

Biblioteca SENSORS. Esta biblioteca agrupa funciones para la calibración y conversión de las lecturas de los sensores. Utiliza funciones definidas en la biblioteca MATHOPER. En la Tabla 27 se lista y describe las funciones contenidas en la biblioteca.

Tabla 27

Descripción de las funciones de la biblioteca SENSORS.

| Funciones | Descripción |
|------------------|---|
| read_mag | Función para calibrar y convertir la lecturas digitales del magnetómetro a uT. |
| read_solar | Función para convertir la lecturas digitales de voltaje de las celdas solares a vector solar. |
| read_gyro | Función para calibrar y convertir la lecturas digitales del magnetómetro a rad/s. |

Nota: elaboración propia (2023).

Biblioteca MATHOPER. Esta biblioteca agrupa funciones matemáticas para operaciones de vectores, matrices y cuaterniones, que son necesarias para el resto de bibliotecas. En la Tabla 28 se lista y describe las funciones contenidas en la biblioteca.

Tabla 28

Descripción de las funciones de la biblioteca MATHOPER.

| Funciones | Descripción |
|--------------------|---|
| add_vector | Función para sumar y restar dos vectores del mismo número de elementos. |
| add_matrix | Función para sumar y restar dos matrices del mismo número de filas y columnas. |
| prod_vector | Función para multiplicar un vector fila con un vector columna. |
| prod_vector2Matrix | Función para multiplicar un vector columna con un vector fila. |
| prod_matrix | Función para multiplicar dos matrices. El número de columnas de M1 debe ser igual al número de filas de M2. |
| prod_matrix2vector | Función para multiplicar una matriz con un vector. El número de columnas de la matriz debe ser igual al número de filas del vector. |
| prod_scalar2vector | Función para multiplicar un escalar con un vector. |
| prod_scalar2matrix | Función para multiplicar un escalar con una matriz. |
| prod_cross | Función para obtener el producto cruz de dos vectores. |
| transpose | Función para obtener la transpuesta de una matriz. |
| vector_norm | Función para obtener un vector normalizado. |
| norm_vector | Función para obtener la norma de un vector. |
| inv_matrix_3x3 | Función para obtener la inversa de una matriz de 3 x 3. |
| zero_matrix | Función para obtener una matriz de elementos iguales a 0 de un tamaño determinado. |
| eye_matrix | Función para obtener una matriz identidad de un tamaño determinado. |
| quat2dcm | Función para convertir un cuaternión a una matriz de rotación. |
| dcm2quat | Función para convertir una matriz de rotación a un cuaternión. |
| prod_quat | Función para multiplicar dos cuaterniones. |

Nota: elaboración propia (2023).

Biblioteca MODELS. Esta biblioteca agrupa funciones que implementan los modelos de órbita, campo magnético IGRF y vector solar. Utiliza funciones definidas en la biblioteca MATHOPER. En la Tabla 29 se lista y describe las funciones contenidas en la biblioteca.

Tabla 29*Descripción de las funciones de la biblioteca MODELS.*

| Funciones | Descripción |
|------------------|--|
| models_init | Función para inicializar los parámetros Keplerianos y el tiempo inicial a partir del TLE. |
| orbit_model | Función para obtener la posición orbital en el sistema ECEF, y las matrices de rotación de ECI a ECEF y de OCO a ECI. |
| anomalíaE | Función para obtener el parámetro anomalía. Esta función es utilizada por la función orbit_model. |
| rot_eco2eci | Función para obtener la matriz de rotación del sistema ECO a ECI. Esta función es utilizada por la función orbit_model. |
| rot_oco2eci | Función para obtener la matriz de rotación del sistema OCO a ECI. Esta función es utilizada por la función orbit_model. |
| rot_eci2ecef | Función para obtener la matriz de rotación del sistema ECI a ECEF. Esta función es utilizada por la función orbit_model. |
| igrf_model | Función para obtener el modelo de campo magnético IGRF en el sistema ECI. |
| recursion | Función para obtener los parámetros necesarios para el modelo IGRF. |
| bfield | Función para obtener el modelo de campo magnético IGRF en el sistema ECEF. |
| sun_model | Función para obtener el vector solar normalizado en el sistema ECI. |

Nota: elaboración propia (2023).

Biblioteca ATTDET. Esta biblioteca agrupa funciones que implementan los algoritmos de determinación de orientación. Utiliza funciones definidas en la biblioteca MATHOPER. En la Tabla 30 se lista y describe las funciones contenidas en la biblioteca.

Tabla 30*Descripción de las funciones de la biblioteca ATTDET.*

| Funciones | Descripción |
|--------------------------|---|
| triad | Función que implementa el método TRIAD. Permite obtener la orientación y covarianza inicial de orientación. |
| mmekf | Función que implementa el método MMEKF. Permite obtener la orientación y sesgo del giroscopio. |
| propQuaternion | Función que implementa la etapa de propagación del cuaternión de orientación del MMEKF. |
| computeProcessCovariance | Función para obtener la covarianza del proceso del MMEKF. |
| propStateCovariance | Función que implementa la etapa de propagación de la covarianza del MMEKF. |
| upQuaternion | Función que implementa la etapa de actualización del cuaternión de orientación del MMEKF. |
| mean_filter | Función que implementa un filtro promediador para el giroscopio. |

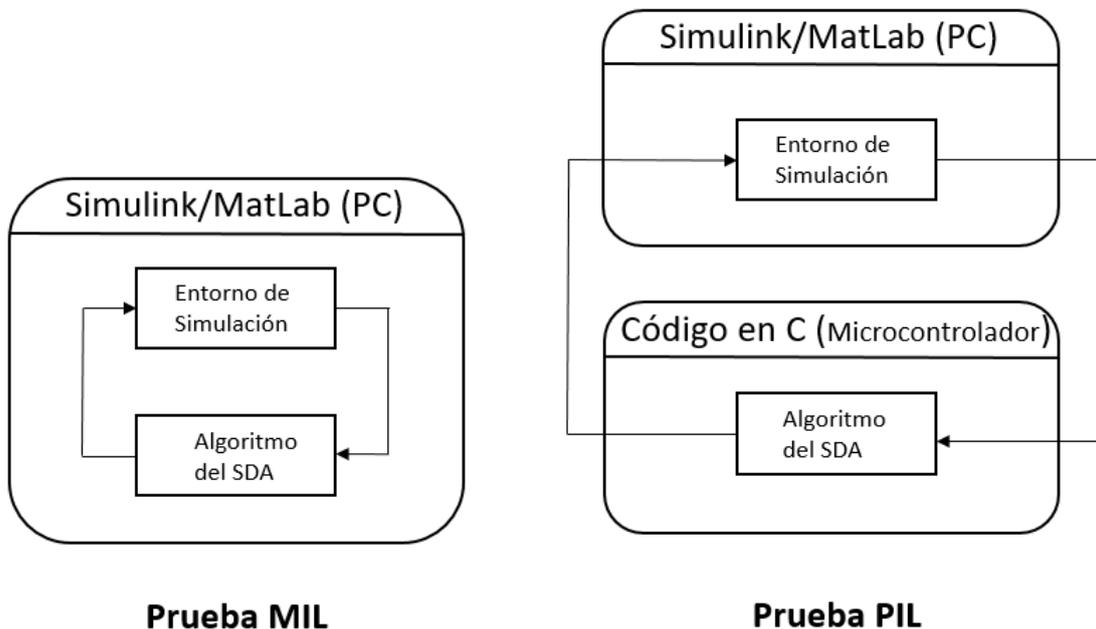
Nota: elaboración propia (2023).

5.2.3 Verificación del algoritmo

Esta sección se centrará en las pruebas el algoritmo SDO mediante una simulación de procesador en el bucle (PIL, del inglés), es decir se ejecutó el algoritmo en el procesador con la finalidad de encontrar errores en el algoritmo debido al proceso conversión de código de MatLab a lenguaje C. El enfoque de la prueba en el procesador fue demostrar si el algoritmo en el procesador produce los mismos resultados que el algoritmo en Simulink. Las pruebas del algoritmo del SDO junto al entorno en Simulink también se le conoce como modelo en el bucle (MIL, del inglés). En la Figura 87 se muestra la visualización de las pruebas de verificación MIL y PIL, que forman parte del enfoque de diseño basado en modelos (Mathworks, 2022).

Figura 87

Visualización de las pruebas de verificación MIL y PIL.



Nota: elaboración propia (2023).

Las pruebas PIL fueron realizadas para los microcontroladores MCF51QE128 y el RP2040. En la Tabla 31 se muestra el error RMS para las variables del algoritmo SDO al compararlas con la variable calculadas en Simulink para un periodo de 6 órbitas. Se debe tener en cuenta que el error se va acumulando ya que hay una dependencia entre variables. Por ejemplo, el cálculo del MMEKF depende del resto de variables previamente calculadas. En la Tabla 32 se muestran los tiempos de ejecución de cada uno de las funciones principales que componen el algoritmo del SDA. En el caso del microcontrolador MCF51QE128 se realizaron pruebas para las frecuencias de reloj de 8MHz, 16MHz y 32MHz. Observando un incremento en la potencia consumida al aumentar la frecuencia de reloj. Se observa que el microcontrolador RP2040 obtiene tiempo de ejecución menores, esto debido a su frecuencia de reloj de 133 MHz.

Tabla 31

Errores en la precisión de los cálculos en lenguaje C en los microcontroladores de 32 bits.

| Variables | MCF51QE128 | RP2040 |
|--|-------------------|---------------|
| Lecturas del magnetómetro en μT | 1,078215E-15 | 1,077412E-15 |
| Cálculo del vector solar normalizado | 6,616783E-17 | 6,517792E-17 |
| Lecturas del giroscopio en rad/s | 1,940567E-19 | 1,770348E-19 |
| Cálculo de la posición orbital en ECI (Km) | 2,864256E-12 | 2,676199E-12 |
| Cálculo de la posición orbital en ECEF (Km) | 2,961845E-12 | 2,691734E-12 |
| Cálculo del campo magnético en ECI (μT) | 5,512508E-14 | 5,103203E-14 |
| Cálculo del vector solar normalizado en ECI | 2,426515E-16 | 2,238741E-16 |
| Cálculo del cuaternión IB con TRIAD ($^{\circ}$) | 7,512385E-14 | 7,004299E-14 |
| Cálculo del cuaternión IB con MMEKF ($^{\circ}$) | 4,924569E-13 | 4,505976E-13 |
| Cálculo de la velocidad angular IB (rad/s) | 2,319658E-17 | 2,110497E-17 |
| Cálculo del cuaternión OB con MMEKF ($^{\circ}$) | 4,624578E-13 | 4,410653E-13 |
| Cálculo de la velocidad angular OB (rad/s) | 2,335812E-16 | 2,194579E-16 |
| Cálculo de la velocidad angular OB filtrada (rad/s) | 2,692589E-16 | 2,370861E-16 |

Nota: elaboración propia (2023).

Tabla 32

Tiempo de ejecución y potencia consumida del algoritmo SDO en los microcontroladores de 32 bits.

| Funciones | MCF51QE128 | | | RP2040 |
|--|------------|---------|---------|--------|
| | 8MHz | 16MHz | 32MHz | |
| Lectura y calibración de sensores (ms) | 6.0 | 3.0 | 2.0 | 0.187 |
| Modelo orbital (ms) | 36.346 | 16.372 | 9.086 | 0.701 |
| Modelo de campo magnético IGRF (ms) | 121.6 | 60.6 | 30.1 | 6.198 |
| Modelo de Vector Solar (ms) | 14.0 | 10.0 | 3.0 | 0.176 |
| TRIAD (ms) | 8.0 | 3.6 | 1.8 | 0.829 |
| MMEKF (ms) | 111.0 | 57.2 | 27.0 | 8.214 |
| Filtro promediador (ms) | 0.7 | 0.36 | 0.15 | 0.052 |
| Total (Algoritmo SDA) (ms) | 297.646 | 151.132 | 76.136 | 15.528 |
| Potencia (mW) | 62.088 | 80.088 | 105.288 | 65.00 |

Nota: elaboración propia (2023).

Conclusiones

- El simulador del entorno espacial del picosatélite implementado en MatLab/Simulink se ha validado utilizando el software STK, obteniéndose resultados que permiten su utilización en el diseño y la operación de picosatélites.
- Los bloques de simulación de los sensores seleccionados para el proyecto Chasqui I permiten evaluar una variedad de condiciones de operación para el algoritmo de determinación de orientación.
- El modelo a bordo de órbita implementado en MatLab/Simulink se ha comparado con el modelo SGP4, obteniéndose en el marco de referencia ECEF un RMSE de 8 km al cabo de 5 días y de 33 km luego de 10 días.
- El modelo de campo magnético a bordo implementado en MatLab/Simulink con entrada de órbita simplificada se ha comparado con el modelo del software STK, obteniéndose en el marco de referencia ECI un RMSE de 0.1 uT después de 5 días y de 0.3 uT luego de 10 días.
- El modelo a bordo de posición del Sol implementado en MatLab/Simulink se ha comparado con el modelo del software STK, obteniéndose en el marco de referencia ECI un error RMS casi constante menor a 0.4×10^{-6} km durante los 10 días de simulación.
- Considerando las limitaciones computacionales y de energía del picosatélite, el modelo de órbitas a bordo debe reiniciarse al menos cada 5 días actualizando los datos mediante un nuevo TLE, con la finalidad de mantener el error de los modelos del entorno a bordo en rangos aceptables.
- Los métodos de determinación determinísticos en los cuales se obtuvieron mejores resultados en las simulaciones Monte Carlo fueron el TRIAD y el QUEST2 con un RMSE de 7° en 10 órbitas, seleccionando el TRIAD para la inicialización del modelo probabilístico debido al reducido tiempo de ejecución.

- Los métodos de determinación probabilísticos en los cuales se obtuvieron mejores resultados en las simulaciones Monte Carlo fueron el MEKF y el MMEKF con errores RMS de 2.74° en 10 órbitas, seleccionado el MMEKF para la implementación en el microcontrolador debido a que reduce el costo computacional del cálculo de la matriz inversa.
- El rendimiento del MMEKF bajo diferentes parámetros de configuración del giroscopio fue simulado, obteniendo un error RMS promedio de 2.39° respecto a sistema ECI para los parámetros $f_g=2$, $N=16$ y $T_s=0.50$.
- Mediante simulación Monte Carlo del MMEKF se obtuvo un RMSE en la orientación respecto al sistema ECI de 2.73° después de 5 días, mientras que respecto al sistema OCO se obtuvo 2.64° .
- El MMEKF solo estima el sesgo de las medidas del giroscopio por lo que se ha evaluado el uso de un filtro promediador, obteniendo una reducción promedio del 50% del RMSE en la velocidad angular.
- Los algoritmos del SDO implementados en lenguaje C para la ejecución en los microcontroladores MCF51QE128 y RP2040, se han verificado mediante pruebas de tipo PIL obteniendo resultados satisfactorios con errores menores a 10^{-12} .
- Los tiempos de ejecución de los algoritmos del SDO ejecutados en los microcontroladores MCF51QE128 y RP2040 fueron de 76 ms y 16 ms, respectivamente.
- El período de muestreo seleccionado para el SDO es de 500 ms debido a las limitaciones del giroscopio, y la necesidad de esperar la disipación del efecto del campo magnético producido por el actuador activo del picosatélite, que interfiere en las medidas del magnetómetro.

Recomendaciones

- Se recomienda realizar una conexión directa entre el software STK y Matlab mediante las herramientas dadas por Mathworks, con la finalidad de trabajar con modelos del entorno del picosatélite más exactos que incluyan otros efectos del entorno espacial.
- Se recomienda realizar pruebas con diferentes modelos del ruido presente en las medidas del giroscopio, así como el estudio de nuevas técnicas que permitan encontrar los parámetros de estos modelos.
- Microcontroladores potentes de bajo consumo como el RP2040, permiten la implementación de algoritmos más complejos y con menos errores, por lo que se recomienda la implementación de modelo SGP4 directamente en el microcontrolador y evaluar una versión más potente del filtro de Kalman como el UKF (Unscented Kalman Filter).
- Para la verificación del funcionamiento de los algoritmos del SDO en el microcontrolador, se recomienda realizar pruebas integrales de tipo HIL (hardware en el bucle) que involucren el sistema de control, aspectos temporales, así como la comunicación con los otros módulos del picosatélite.
- Se recomienda la utilización de giroscopios de altas prestaciones con valores bajos de ruido y que conserven las especificaciones de tamaño y peso reducido, como el CRS09-01.
- Se recomienda la utilización de un sensor de estrellas de tamaño reducido, como el Cubestar Gen2, que permitiría mejorar el desempeño del MMEKF al brindar varias referencias en el espacio.
- Se recomienda incorporar un GPS espacial para aplicaciones LEO, como el Orion B16 para determinar la posición del picosatélite y evaluar su uso en la estimación de la orientación.

Referencias bibliográficas

- Proyecto Chasqui I (2012, junio). <http://www.chasqui.uni.edu.pe>
- Ose, S. S. (2004). *Attitude determination for the Norwegian student satellite nCube* [Tesis de maestría, Norwegian University of Science and Technology]. Repositorio institucional NTNU. <https://ntnuopen.ntnu.no>
- Bhanderi, D. D. (2005). *Spacecraft Attitude Determination with Earth Albedo Corrected Sun Sensor Measurements* [Tesis de doctorado, Norwegian University of Science and Technology]. Repositorio institucional AALBORG. <https://vbn.aau.dk/en/publications/spacecraft-attitude-determination-with-earth-albedo-corrected-sun>
- Rohde, J. (2007). *Kalman filter for attitude determination of student satellite* [Tesis de maestría, Institutt for teknisk kybernetikk]. Repositorio institucional NTNU. <https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/handle/11250/259644>
- Ravandoor, K. (2008). *Design and simulation of software based attitude determination system for the Cubesat UWE-2* [Tesis de maestría, Luleå University of Technology]. KTH Diva-Portal. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1018365>
- Ghuffar, S., (2009) Design and implementation of attitude determination algorithm for the cubesat UWE-3 [Tesis de maestría, Luleå University of Technology- University Wurzburg]. KTH Diva-Portal. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1026749>
- Rathinam, A. (2015). Design and development of UWE-4: integration of electric propulsion units, structural analysis and orbital heating analysis. [Tesis de maestría, Luleå University of Technology]. Repositorio institucional. <https://tu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1020924>
- Asundi, S., Fitz-Coy, N., & Latchman, H. A. (2021). Evaluation of Murrell's EKF-Based Attitude Estimation Algorithm for exploiting multiple attitude sensor configurations. *Sensors*, 21(19), 6450. <https://doi.org/10.3390/s21196450>

- Baroni, L. (2020). Attitude determination by unscented Kalman filter and solar panels as sun sensor. *The European Physical Journal Special Topics*, 229(8), 1501-1506.
<https://doi.org/10.1140/epjst/e2020-900158-2>
- Mmopelwa, K., Tumisang Ramodimo T., Matsebe O. & Basutli B.. Attitude determination and attitude estimation for Earth observing 1U CubeSats: a tutorial. (2022, 29 noviembre). IEEE Conference Publication | IEEE Xplore.
<https://ieeexplore.ieee.org/document/9994000>
- Baroni, L., Kuga, H. K., Garcia, R. V., Silva, W. R., Zanardi, M. C., & Pardal, P. C. (2023). Performance evaluation of a central difference Kalman filter applied to attitude determination. *The European Physical Journal Special Topics*, 1-11.
<https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-023-01015-z>
- Mmopelwa, K., Ramodimo, T. T., Matsebe, O., & Basutli, B. (2023). Attitude determination system for a cubesat experiencing eclipse. *Sensors*, 23(20), 8549.
<https://doi.org/10.3390/s23208549>
- Wang, J., Zhang, R., Yuan, J., & Luo, J. (2019). Multi-CubeSAT relative position and attitude determination based on array signal detection in formation flying. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 55(6), 3378-3393.
<https://doi.org/10.1109/taes.2019.2910362>
- Papotti, G. (2021). A Star Tracker based Attitude Determination System [Tesis de doctorado, University of Auckland]. Repositorio institucional.
<https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/56138>
- Piotrowski, N. (2022). Implementation and Characterization of Commercial Off-The-Shelf Inertial Measurement Units for the Attitude Determination System of the MOVE-III CubeSat. SMALL SATELLITE CONFERENCE.
<https://digitalcommons.usu.edu/smallsat/2022/all2022/1/>
- Haydon, K. J. (2023). Gyroless Nanosatellite Attitude Determination Using an Array of Spatially Distributed Accelerometers. [Tesis de maestría, California Polytechnic

- State University]. Repositorio institucional.
<https://digitalcommons.calpoly.edu/theses/2668/>
- Castellanos, C. A., & Aparicio Pico, L. E. (2014). Design and simulation of an attitude determination system based on the Extended Kalman Filter for Cube-Sat Colombia I. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, (70), 146-154
<https://revistas.udea.edu.co/index.php/ingenieria/article/view/18658>
- Tassano Ferrés, M. (2015). *Design and implementation of an attitude determination and control system for the AntelSat* [Tesis de maestría, Universidad de la República]. Repositorio institucional UDELAR.
<https://www.colibri.udelar.edu.uy/jspui/handle/20.500.12008/5214>
- Vilchez, N., (2016). Diseño e implementación de un dispositivo de adquisición de imágenes para el PUCP-SAT1 [Tesis, Pontificia Universidad Católica del Perú].
<http://hdl.handle.net/20.500.12404/7108>
- Roman-Gonzalez, A., & Vargas-Cuentas, N. I. (2015, October). *Aerospace technology in Peru* [Presentación oral]. 66th International Astronautical Congress-IAC 2015 (p. 6).
<https://hal.science/hal-01216785/document>
- Lavilla, Y., (2017). Diseño e implementación del sistema de control de pruebas de temperatura en vacío para la cámara térmica del nanosatélite UNSAAC SAT - I [Tesis, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco].
<http://hdl.handle.net/20.500.12918/1960>
- Mamani, H., (2019). Diseño e implementación de plataforma de pruebas para sistema de control y determinación de actitud de Pico-satélite cubesat [Tesis, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa].
<http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/11188>
- Garcia, B. E., Yanyachi, A. M., & Yanyachi, P. R. (2020). Non-Linear Control Strategies for Attitude Maneuvers in a CubeSat with Three Reaction Wheels. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 11(11).
<https://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2020.0111189>

- Nanosats (2022). NANOSATELLITE & CUBESAT DATABASE
<https://www.nanosats.eu/database>
- Vallado, D. A., Crawford, P., Hujsak, R., & Kelso, T. S. (2006, August). *Revisiting spacetrack report# 3: rev 1* [Presentación oral]. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. <https://celestak.org/publications/AIAA/2006-6753/AIAA-2006-6753-Rev1.pdf>
- Defense Mapping Agency. (1991). Department of Defense World Geodetic System 1984: its definition and relationships with local geodetic systems. Defense Technical Information Center. <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA280358>
- Barrientos, A., Peñin, L. F., Balaguer, C., & Aracil, R. (1997). *Fundamentos de robótica* (Vol. 256). Madrid: McGraw-Hill. <https://10.1109/70.127239>
- Kuipers, J. B. (1999). Quaternions and rotation sequences (Vol. 66, pp. 127-143). Princeton: Princeton university press.
- Rogers, R. M. (2003). Applied mathematics in integrated navigation systems (Vol. 1). Aiaa.
- Chou, J. C. (1992). Quaternion kinematic and dynamic differential equations. IEEE Transactions on robotics and automation, 8(1), 53-64. . <https://10.1109/70.127239>
- Shuster, M. D. (1993). A survey of attitude representations. Navigation. The Journal of Astronautical Science 8(9), 439-517.
- Svartveit, K. (2003). Attitude determination of the NCUBE satellite. NTNU, June. [Tesis de maestría, Norwegian University of Science and Technology]. Repositorio institucional NTNU. <https://ntnuopen.ntnu.no>
- Wertz, J. R. (Ed.). (1978). Spacecraft attitude determination and control (Vol. 73). Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7>
- Space mission analysis and design (No. DOE/NE/32145-T1). Torrance, CA (United States); Microcosm, Inc.. <https://link.springer.com/book/9780792359012>
- Bak, T. (1999). Spacecraft attitude determination: A magnetometer approach [Tesis de doctorado, Aalborg University]. Repositorio institucional AALBORG. <https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/316431464>

- Kasper, F. J., & Vinther, K. (2010). Attitude Determination and Control System for AAUSAT3 [Tesis de maestría, Aalborg University]. Repositorio institucional AALBORG. <https://projekter.aau.dk/projekter/files/32312420>
- Pnicorp (2015, april). <http://www.pnicorp.com/technology/papers>
- Sundancesolar (2014, jun). <http://store.sundancesolar.com/susoce025.html>
- Findmems (2013, october). <http://www.findmems.com/wikimems-learn/introduction-to-mems-gyroscopes>
- Analog Device (2013, march). <http://www.analog.com/en/mems/gyroscopes/adis16265/products/product.html>
- Analog (2014, march). http://www.analog.com/en/content/td_Accelerometer_Specifications_Definitions/fca.html
- Finlay, C., Maus, S., Lowes, F., Lesur, V., Olsen, N., Sabaka, T., ... & Chambodut, A. (2009). International geomagnetic reference field: 11th generation. In Report at Fall AGU Meeting <https://academic.oup.com/gji/article/183/3/1216/637157>
- Ngdc (2014, march). <http://www.ngdc.noaa.gov/iaga/vmod/igrf.html>
- Roithmayr, C. M. (2004). Contributions of spherical harmonics to magnetic and gravitational fields (No. NASA/TM-2004-213007) <https://ntrs.nasa.gov/citations/20040047194>
- Krogh, K., & Schreder, E. (2002). Attitude determination for aau cubesat [Tesis de maestría, Aalborg University].
- Farahmand, M. (2009). Orbital propagators for horizon simulation framework [Tesis de maestría, California Polytechnic State University]. Repositorio institucional Cal Poly <https://digitalcommons.calpoly.edu/theses/167/>
- Celestrak (2015, april). <http://celestrak.com>
- Hoots, F. R. (1980). Spacetrack report no. 3, models for propagation of norad element sets. <http://www.itc.nl/-bakker/orbit.html>
- AGI (2015, april). <http://www.agi.com>

- Durrant-Whyte, H., & Henderson, T. C. (2016). Multisensor data fusion. Springer handbook of robotics, 867-896 https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1_35
- Shuster, M. D., & Oh, S. D. (1981). Three-axis attitude determination from vector observations. Journal of guidance and Control, 4(1), 70-77 <https://doi.org/10.2514/3.19717>
- Yang, Y. (2019). Spacecraft Modeling, Attitude Determination, and Control: Quaternion-Based Approach. CRC Press. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2012.09.003>
- Crassidis, J. L., & Junkins, J. L. (2011). Optimal estimation of dynamic systems. CRC press.
- Markley, F. L. (2003). Attitude error representations for Kalman filtering. Journal of guidance, control, and dynamics, 26(2), 311-317 <https://doi.org/10.2514/2.5048>
- Markley, F. L., & Crassidis, J. L. (2014). Fundamentals of spacecraft attitude determination and control (pp. 361-364). New York, NY, USA:: Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0802-8>
- Murrell, J. (1978, August). Precision attitude determination for multimission spacecraft [Presentación oral]. Guidance and Control Conference (p. 1248). <https://doi.org/10.2514/6.1978-1248>
- Crassidis, J. L., & Markley, F. L. (2016). Three-axis attitude estimation using rate-integrating gyroscopes. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 39(7), 1513-1526 <https://doi.org/10.2514/1.G000336>
- Markley, L. & Reynolds, R. (2000) Analytic steady-state accuracy of a spacecraft attitude estimator. J GCD 23:1065–1067 <https://doi.org/10.2514/2.4648>
- Qin, F., Chang, L., Jiang, S., & Zha, F. (2018). A sequential multiplicative extended Kalman filter for attitude estimation using vector observations. Sensors, 18(5), 1414 <https://doi.org/10.3390/s18051414>
- Rojas, J. (2015). *Diseño e implementación de un sistema de adquisición embebido para su uso en la determinación de actitud del nanosatélite del proyecto Chasqui I* [Tesis, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional UNI. <http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/3597>

- Miyagusuku, R. (2013). *Control magnético de actitud para satélites bajo el estándar cubesat: Diseño, implementación y validación* [Tesis, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional UNI.
<http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/2298>
- Tuthill, J. (2009). *Design and simulation of a nano-satellite attitude determination system* [Tesis de maestría, Naval Postgraduate School Monterey Ca Dept Of Mechanical And Astronautical Engineering]. Repositorio institucional.
<https://core.ac.uk/reader/36698050>
- Bezold, M. (2013). *An Attitude Determination System with MEMS Gyroscope Drift Compensation for Small Satellite* [Tesis de maestría, University of Kentucky]. Repositorio institucional UK. https://uknowledge.uky.edu/ece_etds/29/
- Rondão, D. (2016). *Modeling and simulation of the ecosat-iii attitude determination and control system* [Tesis de maestría, Universidade de Lisboa]. Repositorio institucional ULisboa.
<https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/844820067125116/>
- Pupo, L. B. (2016). *Characterization of errors and noises in MEMS inertial sensors using Allan variance method* [Tesis de doctorado, Universitat Politècnica de Catalunya]. Repositorio institucional UPC.
<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/103849>
- NXP (2022, may). <https://www.nxp.com/part/DEMOQE128#/>
- Raspberry Pi (2022, may). <https://www.raspberrypi.com/products/raspberry-pi-pico/>
- Mathworks (2022, may). <https://www.mathworks.com/solutions/model-based-design.html>

Anexos

| | |
|---|---|
| Anexo 1: Descripción del formato TLE | 1 |
| Anexo 2: Constantes | 3 |
| Anexo 3: Programas de MatLab/Simulink | 4 |

Anexo 1. Descripción del formato TLE

En la Figura A.1 se muestra el TLE para la Estación Espacial Internacional (ISS). El significado de estos datos se muestra en las Tablas A.1, A.2 y A.3.

Figura A.1

Archivo TLE generado para el ISS.

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A 08264.51782528 -.00002182 00000-0 -11606-4 0 2927
2 25544 51.6416 247.4627 0006703 130.5360 325.0288 15.72125391563537
```

Nota: fuente (Celestrak, 2012).

Tabla A.1

Línea título del TLE.

| Campo | Columnas | Contenido | ISS |
|-------|----------|---------------------|-------------|
| 1 | 01 - 24 | Nombre del satélite | ISS (ZARYA) |

Nota: elaboración propia (2023).

Tabla A.2*Línea 1 del TLE.*

| Campo | Columna | | Contenido | ISS |
|--------------|----------------|----|---|--------------|
| 1 | 01 | 01 | Número de línea | 1 |
| 2 | 03 | 07 | Número de satélite | 25544 |
| 3 | 08 | 08 | Clasificación (U = sin clasificar) | U |
| 4 | 10 | 11 | Designación Internacional (dos últimos dígitos del año de lanzamiento) | 98 |
| 5 | 12 | 14 | Designación Internacional (Número de Lanzamiento en el año) | 067 |
| 6 | 15 | 17 | Designación Internacional (Pieza de lanzamiento) | A |
| 7 | 19 | 20 | Época del año (Dos últimos dígitos del año) | 08 |
| 8 | 21 | 32 | Época (Día del año y la parte fraccionaria del día) | 264.51782528 |
| 9 | 34 | 43 | Primera derivada temporal del movimiento medio, dividido por dos. | -.00002182 |
| 10 | 45 | 52 | Segunda derivada temporal del movimiento medio dividido por seis (se asume punto decimal) | 00000-0 |
| 11 | 54 | 61 | BSTAR termino de arrastre (se asume punto decimal) | -11606-4 |
| 12 | 63 | 63 | Tipo de efemérides | 0 |
| 13 | 65 | 68 | Número de elementos | 292 |
| 14 | 69 | 69 | Suma de control (Módulo 10) (Letras, espacios en blanco, periodos, signos más = 0; signos menos = 1). | 7 |

Nota: elaboración propia (2023).

Tabla A.3*Línea 2 del TLE.*

| Campo | Columna | | Contenido | ISS |
|--------------|----------------|----|--|-------------|
| 1 | 01 | 01 | Número de línea | 1 |
| 2 | 03 | 07 | Número de satélite | 25544 |
| 3 | 09 | 16 | Inclinación (grados sexagesimales) | 51.6416 |
| 4 | 18 | 25 | Ascensión Recta del Nodo Ascendente (grados sexagesimales) | 247.4627 |
| 5 | 27 | 33 | Excentricidad (se asume punto decimal) | 006703 |
| 6 | 35 | 42 | Argumento del Perigeo (grados sexagesimales) | 130.5360 |
| 7 | 44 | 51 | Anomalía media (grados sexagesimales) | 325.0288 |
| 8 | 53 | 63 | Movimiento medio (Revoluciones x día) | 15.72125391 |
| 9 | 64 | 68 | Número de revoluciones por día | 56353 |
| 10 | 69 | 69 | Suma de control (Módulo 10) | 7 |

Nota: elaboración propia (2023).

Anexo 2. Constantes

En la Tabla A.4 se muestran los valores de las constantes utilizadas en el desarrollo de esta tesis.

Tabla A.4

Constantes.

| Constantes | Valor |
|--|---|
| Constante de gravitación universal (G) | $6.6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ |
| Masa de la Tierra (M) | $5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$ |
| Parámetro gravitatorio estándar (μ) | $3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ |
| Velocidad de rotación de la Tierra (ω_{ie}) | $7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ |
| Factor de forma dinámica de Tierra (J_2) | 1.08263×10^{-3} |
| Radio ecuatorial de la Tierra (R_T) | $6.378140 \times 10^6 \text{ m}$ |

Nota: elaboración propia (2023).

Anexo 3. Programas de MatLab

Modelo de órbita a bordo

```
function [v_eci, r_eci] = orbita(tiempo,keps)
%t : u(1) --- tiempo
%Keps : u(2:8) --- Parametros Keplerianos
%jd : u(9) --- julian date (relativo)

t = tiempo;
a = keps(1); %semieje mayor (metros)
e = keps(2); %excentricidad

M = keps(3); %anomalia media
inc = keps(4); %inclinacion
raan = keps(5); %Ascensión recta del nodo ascendente
(R.A.A.N.)
omega = keps(6); %argumento del perigeo
n = keps(7); %movimiento medio (rad/seg)

% Propagacion
M = mod(M+n*t,2*pi);

% Resolviendo la ecuacion de Kepler E=M+e*sin(E) con el metodo de Newton
E=anomaliaE(M,e);

% Vector Posicion en el ECO
r_eco = [a*(cos(E)-e), a*(sqrt(1-e^2)*sin(E)), 0]';
v_eco=[-r_eco(2); r_eco(1); 0]; % vector velocidad ECO (direccion)

%-----Calculo Vector Posicion en el ECI-----
R_ECO_ECI = rotECOtoECI(a, e, inc, raan, omega, n, t);
r_eci = R_ECO_ECI*r_eco/1000; %km
v_eci = R_ECO_ECI*v_eco/1000; %km/s
end

function y = anomaliaE(u1,u2)
% u1 : anomalia media
% u2 : excentricidad
% y : anomalia excentrica

% Resolviendo la ecuacion de Kepler E=M+e*sin(E) con el metodo de Newton
y=u1;
eps=1;
tol=1e-9;
while max(eps.^2)>tol
    eps=(u1+u2*sin(y)-y)/(1-u2*cos(y));
    y=y+eps;
end
end

function y = rotECOtoECI(a, e, inc, raan, omega, n, ts)
% Constantes:
J2=0.00108263;
a_earth = 6.378137e6; %radio de la tierra (m)
%Conversion de grados/dia a rad/seg
```

```

deg_d2rad_sec = pi/180/(60*60*24); % (pi/180/(60*60*24))

% Las derivadas temporales de raan, omega y M

% Perturbacion debida a la no esfericidad de la tierra
raan_dot_J2=-3/2*J2*n*a_earth^2*cos(inc)/(a^2*(1-e^2)^2);
omega_dot_J2=3/4*J2*n*a_earth^2*(5*cos(inc)^2-1)/(a^2*(1-e^2)^2);

% Perturbacion debido a la luna
raan_dot_moon=-0.00338*cos(inc)/(n*24*60*60/2/pi)*deg_d2rad_sec;
omega_dot_moon=0.00169*(5*cos(inc)^2-1)/(n*24*60*60/2/pi)*deg_d2rad_sec;

% Perturbacion debido al sol
raan_dot_sun=-0.00154*cos(inc)/(n*24*60*60/2/pi)*deg_d2rad_sec;
omega_dot_sun=0.00077*(5*cos(inc)^2-1)/(n*24*60*60/2/pi)*deg_d2rad_sec;

% Perturbacion Total
raan_dot=raan_dot_J2+raan_dot_moon+raan_dot_sun;
omega_dot=omega_dot_J2+omega_dot_moon+omega_dot_sun;

% Propagacion
raan=raan +raan_dot*ts;
omega=omega+omega_dot*ts;

% Matriz de rotacion para una inclinacion alrededor del eje X
rx_inc = [1 0 0;0 cos(-inc) sin(-inc);0 -sin(-inc) cos(-inc)];
% Matriz de rotacion para argumento del perigeo alrededor del eje Z
rz_omega = [cos(-omega) sin(-omega) 0;-sin(-omega) cos(-omega) 0;0 0
1];
%Matriz de Rotacion para el raan alrededor del eje Z
rz_raan = [cos(-raan) sin(-raan) 0;-sin(-raan) cos(-raan) 0;0 0 1];
%Matriz de rotacion ECO a ECI
y = rz_raan*rx_inc*rz_omega;

```

end

```

function q = dcm2quat(qs,R)
%#codegen
q = [0 0 0 0];
max = 1;
trm = R(1,1)+R(2,2)+R(3,3);
trn = R(1,1)-R(2,2)-R(3,3);
if trn > trm
    max = 2;
    trm = trn;
end
trn = -R(1,1)+R(2,2)-R(3,3);
if trn > trm
    max = 3;
    trm = trn;
end
trn = -R(1,1)-R(2,2)+R(3,3);
if trn > trm
    max = 4;
    trm = trn;
end
if max==1

```

```

    q(1) = sign(qs(1))*sqrt(0.25*(1+trm));
    %q(1) = sqrt(0.25*(1+trm));
    q(2) = 0.25*(R(2,3)-R(3,2))/q(1);
    q(3) = 0.25*(R(3,1)-R(1,3))/q(1);
    q(4) = 0.25*(R(1,2)-R(2,1))/q(1);
elseif max == 2
    q(2) = sign(qs(2))*sqrt(0.25*(1+trm));
    %q(2) = sqrt(0.25*(1+trm));
    q(1) = 0.25*(R(2,3)-R(3,2))/q(2);
    q(3) = 0.25*(R(2,1)+R(1,2))/q(2);
    q(4) = 0.25*(R(3,1)+R(1,3))/q(2);
elseif max == 3
    q(3) = sign(qs(3))*sqrt(0.25*(1+trm));
    %q(3) = sqrt(0.25*(1+trm));
    q(1) = 0.25*(R(3,1)-R(1,3))/q(3);
    q(2) = 0.25*(R(2,1)+R(1,2))/q(3);
    q(4) = 0.25*(R(3,2)+R(2,3))/q(3);
else
    q(4) = sign(qs(4))*sqrt(0.25*(1+trm));
    %q(4) = sqrt(0.25*(1+trm));
    q(1) = 0.25*(R(1,2)-R(2,1))/q(4);
    q(2) = 0.25*(R(3,1)+R(1,3))/q(4);
    q(3) = 0.25*(R(3,2)+R(2,3))/q(4);
end

%s = qs(1)*qo(1) + qs(2)*qo(2) + qs(3)*qo(3)+ qs(4)*qo(4);
%qo = sign(s)*qo;
end

function Rie = rotECItoECEF(tiempo,JD)

ts = tiempo;

% Constantes:
%JD2000 = 2451545;
w_E_s = 7.292112515010115e-005; % Velocidad angular de la Tierra (rad/seg)
w_E_d = 6.300388099; % Velocidad angular de la Tierra (rad/dia)

%Calculo de la ascencion recta de Grenwich
thetaG_0 = 4.894960892118808; % radianes
%JDrelativo = JD - 2451545.0;
JDrelativo = JD; % entra como relativo desde simulink
theta0 = mod(thetaG_0+w_E_d*JDrelativo,2*pi); % Inicializar posicion angular.
% Propagacion
theta = mod(theta0+w_E_s*ts,2*pi);% angulo debido a la rotacion entre el ECI y
ECEF
Rie = [cos(theta) sin(theta) 0; ...
      -sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1];
end

function Roi = rotECItoOCO(v_ECI, r_ECI)
y_3 = -r_ECI/norm(r_ECI);
y_2 = cross(v_ECI,r_ECI);
y_2 = y_2/norm(y_2);
y_1 = cross(y_2,y_3);
Roi = [y_1(1) y_1(2) y_1(3); y_2(1) y_2(2) y_2(3); y_3(1) y_3(2) y_3(3)]';
End

```

```

function keps=tle2keps(tle)
%#codegen
G_const = 6.6720e-11;           %Constante Gravitacioal ( m^3/(kg.sg^2)) .
M_earth = 5.9742e24;           %Masa de la Tierra (kg).
mu = G_const*M_earth;          %Constante Gravitacional de la tierra.

%Converts NASA TLE to Keplerian Elements
i = tle(1);                     %Inclinación (radianes)
Om = tle(2);                    %Ascención Recta del Nodo Ascendente (radianes)
e = tle(3);                     %Excentricidad
om = tle(4);                    %Argumento del Perigeo (radianes)
M = tle(5);                     %Anomalia Media (radianes)
n = tle(6);                     %Movimiento Medio (rad/seg)
a = (mu/n^2)^(1/3);             %Semieje mayor de la elipse

keps = [a, e, M, i, Om, om,n]';

```

Modelo de Campo Magnético IGRF

```

function b_e = igrf(r_e, igrf_mmax, igrf_nmax, igrf_G, igrf_H, igrf_K,
igrf_R_mean)

repe = r_e';

[A, ctilde, stilde] = recursion(r_e, igrf_mmax, igrf_nmax);

G=igrf_G;
H=igrf_H;
K=igrf_K;
mmax=igrf_mmax;
nmax=igrf_nmax;
R_mean=igrf_R_mean;

r_total=R_mean;
% El número 1 se suma al grado y al orden.
% ya que MATLAB no puede tener un índice de matriz de 0.
e1=[1 0 0];
e2=[0 1 0];
e3=[0 0 1];
rmag = sqrt(repe*repe');
rhat = repe/rmag;
mu = rhat(3); % seno de latitud
bepe = [0 0 0];
% Semilla para fórmulas de recursividad

escalar = r_total*r_total/(rmag*rmag);
ttilde = zeros(igrf_mmax+1,igrf_nmax+1);
br = zeros(igrf_mmax+1,igrf_nmax+1);
b1 = zeros(igrf_mmax+1,igrf_nmax+1);
b2 = zeros(igrf_mmax+1,igrf_nmax+1);
b3 = zeros(igrf_mmax+1,igrf_nmax+1);

for n = 1:nmax
    % Formula recursión

```

```

scalar = scalar*r_total/rmag;
i=n+1;
for m = 0:n
    j=m+1;
    if m <= mmax
        ttilde(i,j) = G(i,j)*ctilde(j) + H(i,j)*stilde(j);
        % ECF 3 component {Eq. (2), Ref. [2]}
        b3(i,j) = -ttilde(i,j)*A(i,j+1);
        % rhat component {Eq. (2), Ref. [2]}
        br(i,j) = ttilde(i,j)*(mu*A(i,j+1) + (n+m+1)*A(i,j));
        % Contribución del armónico zonal de grado n al campo magnético
        % scalar*K(i,j)*(b3(i,j)*e3 + br(i,j)*rhat);
        bepe = bepe + scalar*K(i,j)*(b3(i,j)*e3 + br(i,j)*rhat);
    end
    if ((m > 0) && (m <= mmax))
        % ECF 1
        b1(i,j) = -m*A(i,j)*(G(i,j)*ctilde(j-1) + H(i,j)*stilde(j-1));
        % ECF 2
        b2(i,j) = -m*A(i,j)*(H(i,j)*ctilde(j-1) - G(i,j)*stilde(j-1));
        % Contribución del armónico teseral de grado n y orden m al campo
        % magnético.
        bepe = bepe + scalar*K(i,j)*(b1(i,j)*e1 + b2(i,j)*e2);
    end
end
end
b_e = bepe';

end

function [A, ctilde, stilde] = recursion(r_e, mmax, nmax)
repe = r_e';
R_m = sqrt(repe*repe');
rhat = repe/R_m;
mu = rhat(3); % sen de latitud

A=zeros(nmax+3,nmax+3); % A(n,m) = 0, for m > n
A(1,1)=1; % "derivada" polinomios de Legendre
A(2,1)=mu;
A(2,2)=1;

ctilde = zeros(1,mmax+1);
stilde = zeros(1,nmax+1);
ctilde(1) = 1; ctilde(2) = rhat(1);
stilde(1) = 0; stilde(2) = rhat(2);

for n = 2:nmax
    i=n+1;
    % Calcule los polinomios derivados de Legendre y las letras "tilde"
    % necesarias para los campos gravitacionales y magnéticos.
    A(i,i) = prod(1:2:(2*n - 1));
    A(i,(i-1))= mu*A(i,i);
    if n <= mmax
        ctilde(i) = ctilde(2) * ctilde(i-1) - stilde(2) * stilde(i-1);
        stilde(i) = stilde(2) * ctilde(i-1) + ctilde(2) * stilde(i-1);
    end
    for m = 0:n
        j=m+1;
        if (m < (n-1)) && (m <= (mmax+1))

```

```

        A(i,j)=((2*n - 1)*mu*A((i-1),j) - (n+m-1)*A((i-2),j))/(n-m);
    end
end
end
end

```

Modelo de Vector Solar

```

function S_i = sunB(JD)
JD2000 = 2451545.0;
tut1 = (JD - JD2000)/36525.0; % ttdb
M = 357.5277233 + 35999.05034*tut1; % meananomaly
M = rem( M,360.0 ); %deg
L = 280.460 + 36000.77*tut1; % meanlong
L = rem( L,360.0 ); %deg
V = L + 1.914666471*sind(M) + 0.019994643*sind(2*M); % eclplong
E = 23.439291 - 0.0130042*tut1; % obliquity
r_s=(1.000140612 - 0.016708617*cosd(M) - 0.000139589*cosd(2*M)); % au
S_i = 149597870.691*r_s*[cosd(V); cosd(E)*sind(V); sind(V)*sind(E)];
%S_i = S_i/norm(S_i);
End

```

```

function y = normalizar(u)
N=sqrt(u(1)*u(1)+u(2)*u(2)+u(3)*u(3));
if(N==0)
    N=1;
end
y = u./N;

```

```

function y = eclipse(u)
r_sat=[u(1) u(2) u(3)];
r_sol=[u(4) u(5) u(6)];
%r_nadir=-r_sat/norm(r_sat);
%r_sol=r_sol/norm(r_sol);

alpha = angl ( [r_sat r_sol] );
%acosd(sum(r_nadir.*r_sol)); % angulo entre sol y sat
% 70.395 es en el body
%
if(alpha>(180 - 70.395))
    y= 1;
else
    y=0;
end

```

Lectura de Sensores

```

function [B_b, st_b] = ReadMag(B_s, GM, AM, bM)
B_b = GM*AM*(double(B_s) - bM); %uT
[st_b] = 1;

```

```

function [wb_ib, st_w] = ReadGyro(wb_ib_LSB, GW, AW)
wb_ib = AW*GW*double(wb_ib_LSB); %deg/s
st_w = 1;

function [S_b, st_s] = ReadSolar(v_c,GS, GV)
i_c = 1000*double(v_c)*GS/GV; % mA
%i_c = double(i_c);
%Cara perpendicular al eje X

if i_c(1)-i_c(2)>0
    X=1;
    I2=i_c(1);
else
    X=-1;
    I2=i_c(2);
end

%Cara perpendicular al eje Y
if i_c(3)-i_c(4)>0
    Y=1;
    I3=i_c(3);
else
    Y=-1;
    I3=i_c(4);
end

%Cara perpendicular al eje Z
if i_c(5)-i_c(6)>0
    Z=1;
    I1=i_c(5);
else
    Z=-1;
    I1=i_c(6);
end

beta2=atand(I2/I3);
beta1=atand(sind(beta2)*I1/I2);

if (I1<0.37 && I2<0.37 && I3<0.37) || isnan(beta2) || isnan(beta1)
    S_b = [0; 0; 0];
    st_s = 0;
else
    S_b = [X*cosd(beta1)*sind(beta2); Y*cosd(beta1)*cosd(beta2);
Z*sind(beta1)];
    S_b = S_b/norm(S_b);
    st_s = 1;
end

```

Determinación de Orientación: TRIAD

```

function q_i2b = triad(q_i2b_0, B_i,S_i,B_b,S_b,wb_ib,Ts)
persistent flag1

if isempty(flag1)
    flag1 = 1;

```

```

end

dt = Ts;
q = [0 0 0 0];

if norm(S_b)~=0
    if flag1==1
        q_i2b_0(1) = 1;
    end

    flag1 = 0;
    W1=B_b;    % Vector medido 1    B_b
    W2=S_b;    % Vector medido 2    S_b
    V1=B_i;    % Vector modelado 1  B_i
    V2=S_i;    % Vector modelado 2  S_i

    N=sqrt(W1(1)*W1(1)+W1(2)*W1(2)+W1(3)*W1(3));
    if(N==0)
        N=1;
    end
    r1=W1./N;

    r2=cross(W1,W2);

    N=sqrt(r2(1)*r2(1)+r2(2)*r2(2)+r2(3)*r2(3));
    if(N==0)
        N=1;
    end
    r2=r2./N;

    r3=cross(r1,r2);

    N=sqrt(V1(1)*V1(1)+V1(2)*V1(2)+V1(3)*V1(3));
    if(N==0)
        N=1;
    end
    s1=V1./N;
    s2=cross(V1,V2);

    N=sqrt(s2(1)*s2(1)+s2(2)*s2(2)+s2(3)*s2(3));
    if(N==0)
        N=1;
    end
    s2=s2./N;

    s3=cross(s1,s2);

    M1=[r1 r2 r3];
    M2=[s1 s2 s3];
    M2=M2';
    R=M1*M2;

    max = 1;
    q(1) = sqrt(0.25*abs(1+R(1,1)+R(2,2)+R(3,3)));
    q(2) = sqrt(0.25*abs(1+R(1,1)-R(2,2)-R(3,3)));
    if q(2) > q(1)
        max = 2;
    end
end

```

```

q(3) = sqrt(0.25*abs(1-R(1,1)+R(2,2)-R(3,3)));
if q(3) > q(max)
    max = 3;
end
q(4) = sqrt(0.25*abs(1-R(1,1)-R(2,2)+R(3,3)));
if q(4) > q(max)
    max = 4;
end
if max==1
    q(2) = 0.25*(R(2,3)-R(3,2))/q(1);
    q(3) = 0.25*(R(3,1)-R(1,3))/q(1);
    q(4) = 0.25*(R(1,2)-R(2,1))/q(1);
elseif max == 2
    q(1) = 0.25*(R(2,3)-R(3,2))/q(2);
    q(3) = 0.25*(R(2,1)+R(1,2))/q(2);
    q(4) = 0.25*(R(3,1)+R(1,3))/q(2);
elseif max == 3
    q(1) = 0.25*(R(3,1)-R(1,3))/q(3);
    q(2) = 0.25*(R(2,1)+R(1,2))/q(3);
    q(4) = 0.25*(R(3,2)+R(2,3))/q(3);
else
    q(1) = 0.25*(R(1,2)-R(2,1))/q(4);
    q(2) = 0.25*(R(3,1)+R(1,3))/q(4);
    q(3) = 0.25*(R(3,2)+R(2,3))/q(4);
end
s = q_i2b_0(1)*q(1) + q_i2b_0(2)*q(2) + q_i2b_0(3)*q(3)+ q_i2b_0(4)*q(4); %
q = sign(s)*q;
else
if flag1 == 0
    q00 = q_i2b_0;
    we = wb_ib;
    w = norm(wb_ib);
    co = cos(0.5*w*dt);
    si = sin(0.5*w*dt);
    if(w~=0)
        n1=we(1)/w; n2=we(2)/w; n3=we(3)/w;
    else
        n1=we(1); n2=we(2); n3=we(3);
    end
    qw0=co; qw1=n1*si; qw2=n2*si; qw3=n3*si;
    om = [qw0 -qw1 -qw2 -qw3;qw1 qw0 qw3 -qw2;qw2 -qw3 qw0 qw1;qw3 qw2
-qw1 qw0];
    q = (om*q00)';
end
end

N = sqrt(q(1)*q(1)+q(2)*q(2)+q(3)*q(3)+q(4)*q(4));
if(N==0)
    N=1;
end
q = q./N;
q_i2b = q';
end

```

Determinación de Orientación: EKF

```
function [q_hat, b_hat, P_k] = mekf(q, b, w, P, mb, mr, sigma_r, sigma_g,
sigma_b, Ts)
%% Filtro de Kalman extendido multiplicativo.
%
% Entradas:
% q = Estimación del cuaternión del paso de tiempo anterior [4x1]
% b = Estimación giroscópica del paso de tiempo anterior [3x1]
% w = Velocidad angular actualizada (i.e. w = gyro_w - b) [3x1]
% P = Actualización de covarianza de estado del paso de tiempo anterior
% [6x6]
% mb = n vectores de medición de sensores en el sistema body [3xn]
% mr = n vectores de medición en sistema inercial [3xn]
% sigma_r = Desviaciones estándar de ruido de los sensores vectoriales. [1xn]
% sigma_g = Matriz de desviación estándar del ruido giroscópico,
% rad/sec^(1/2) [3x3]
% sigma_b = Matriz de desviación estándar del ruido sesgo-giroscópico,
% rad/sec^(3/2) [3x3]
% Q = Covarianza del ruido del proceso [6x6]
% Ts = Tiempo de muestreo (sec)
%
% Salidas:
% q_hat = Cuaterniones actualizada estimado [4x1]
% b_hat = Gyro-biases actualizado estimado [3x1]
% dx_hat = Estado actualizado estimado [6x1]
% P_k = Covarianza actualizada estimada [6x6]
%
% References:
% [1] Markley, Crassidis - Fundamentals of Spacecraft Attitude
% Determination and Control (2014)
% [2] Crassidis, Junkins - Optimal Estimation of Dynamic Systems
% (2nd ed.) (2011)
%
% Note:
% 1. The equations mentioned in the comments references to [2].
% 2. For 3-axis gyro, sigma_g = diag[sigma_gx, sigma_gy, sigma_gz] and
% sigma_b = diag[sigma_bx, sigma_by, sigma_bz].
%
% Rishav (2021/01/18)
% MChA (2023/05/05)
persistent flag3

if isempty(flag3)
    flag3 = 1;
end

if norm(mb(:,2))~= 0 && flag3==1
    flag3 = 0;
end

if flag3 == 1
    q_hat = q;
    b_hat = b;
    P_k = P;
else
    dt = Ts;
```

```

% Propagar estado, giro-sesgo, cuaternión y estimar covarianza
% Note: La propagación del sesgo giroscópico es constante.
% ( b = b)
q = propQuaternion(q, w, dt);
Q = computeProcessCovariance(sigma_g, sigma_b, dt);
P = propStateCovariance(P, Q, w, dt);
A = quaternion2A(q); % Matriz de actitudes

% Matriz de salida, medidas y covarianza de medidas
if norm(mb(:,2))==0
    n=1;
else
    n=2;
end
pbe = zeros(3,n);
H = zeros(3*n,6);
z = zeros(3*n,1);
R = zeros(3*n);
h = zeros(3*n,1);
for i=1:n
    pbe(:,i) = A*mr(:,i);
    pbe_cr = [0 -pbe(3,i) pbe(2,i);pbe(3,i) 0 -pbe(1,i);-pbe(2,i) pbe(1,i)
0];
    H(i*3-2:i*3,:) = [pbe_cr zeros(3)];
    z(i*3-2:i*3,1) = mb(:,i);
    R(i*3-2:i*3,i*3-2:i*3) = diag(sigma_r(i,:).^2);
    h(i*3-2:i*3,1) = pbe(:,i);
end
% Actualización MEKF
K = P*H'/(H*P*H' + R); % [6x3]
dx_hat = K*(z - h);
P_k = (eye(6) - K*H)*P;

% Actualizar q y b
dq = dx_hat(1:3);
db = dx_hat(4:6);
q_hat = upQuaternion(q, dq);
b_hat = b + db;
end
end

% ~~~~~ Funciones utilizadas ~~~~~ %

% Propagación de cuaterniones en tiempo discreto
function [q_out] = propQuaternion(q, w, dt)
omega_tol = 1e-5;
n = norm(w);
if n > omega_tol
    c = cos(0.5*n*dt);
    s = sin(0.5*n*dt);
    x = w(1)/n*s;
    y = w(2)/n*s;
    z = w(3)/n*s;
    Omega = [c, -x, -y, -z; x, c, z, -y; y, -z, c, x; z, y, -x, c];
    q_out = Omega*q;
else
    q_out = q;
end
end

```

```

% Q using gyro and gyro-bias noise standard deviations
function [Q] = computeProcessCovariance(sigma_g, sigma_b, dt)
% Inputs:
%   sigma_g = Desviación estándar del ruido giroscópico, rad/sec^(1/2) [3x3]
%   sigma_b = Desv. estándar del ruido bias-giroscópico, rad/sec^(3/2) [3x3]

Q = zeros(6); % Q discreto
ssg = sigma_g.^2;
ssb = sigma_b.^2;
Q(1:3,1:3) = ssg*dt + ssb*dt*dt*dt/3;
Q(1:3,4:6) = 0.5*ssb*dt*dt;
Q(4:6,1:3) = Q(1:3,4:6)';
Q(4:6,4:6) = dt*ssb;
end

% Propagación discreta de la covarianza del error de estado
function [P_out] = propStateCovariance(P, Q, w, dt)
omega_tol = 1e-5;
n = norm(w);

if n > omega_tol
    % Ec.(7.45)
    s = sin(n*dt);
    c = cos(n*dt);
    wX = [0, -w(3), w(2); w(3), 0, -w(1); -w(2), w(1), 0];
    Phi_11 = eye(3) - wX*s/n + wX*wX*(1 - c)/n^2;
    Phi_12 = wX*(1 - c)/n^2 - eye(3)*dt - wX*wX*(n*dt - s)/n^3;
else
    % Phi Estado estable
    Phi_11 = eye(3);
    Phi_12 = - eye(3)*dt;
end

Phi_21 = zeros(3);
Phi_22 = eye(3);
Phi = [Phi_11, Phi_12; Phi_21, Phi_22];

Y = [-eye(3), zeros(3); zeros(3), eye(3)];
P_out = Phi*P*Phi' + Y*Q*Y';
end

% Cuaternión a matriz de rotación
function [A] = quaternion2A(q)
A = zeros(3);
A(1,1) = 1 - 2*(q(3)^2 + q(4)^2);
A(2,2) = 1 - 2*(q(2)^2 + q(4)^2);
A(3,3) = 1 - 2*(q(2)^2 + q(3)^2);
A(1,2) = 2*(q(2)*q(3) + q(4)*q(1));
A(1,3) = 2*(q(2)*q(4) - q(3)*q(1));
A(2,1) = 2*(q(2)*q(3) - q(4)*q(1));
A(2,3) = 2*(q(3)*q(4) + q(2)*q(1));
A(3,1) = 2*(q(2)*q(4) + q(3)*q(1));
A(3,2) = 2*(q(3)*q(4) - q(2)*q(1));
end

```

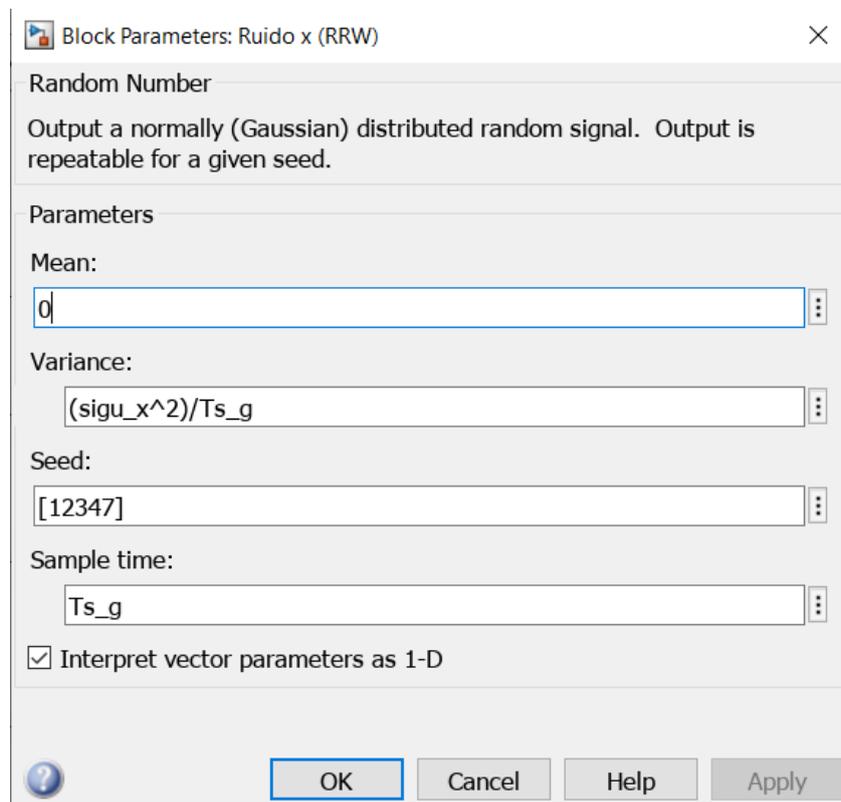
```

% Actualizar cuaternión usando error-cuaternion
function [q_out] = upQuaternion(q, del_alpha)
Xi = [-q(2), -q(3), -q(4); ...
      q(1), -q(4), q(3); ...
      q(4), q(1), -q(2); ...
      -q(3), q(2), q(1)];
q_out = q + 0.5*Xi*del_alpha;
q_out = q_out/norm(q_out); % Normalización de cuaterniones
end

```

Bloques Simulink

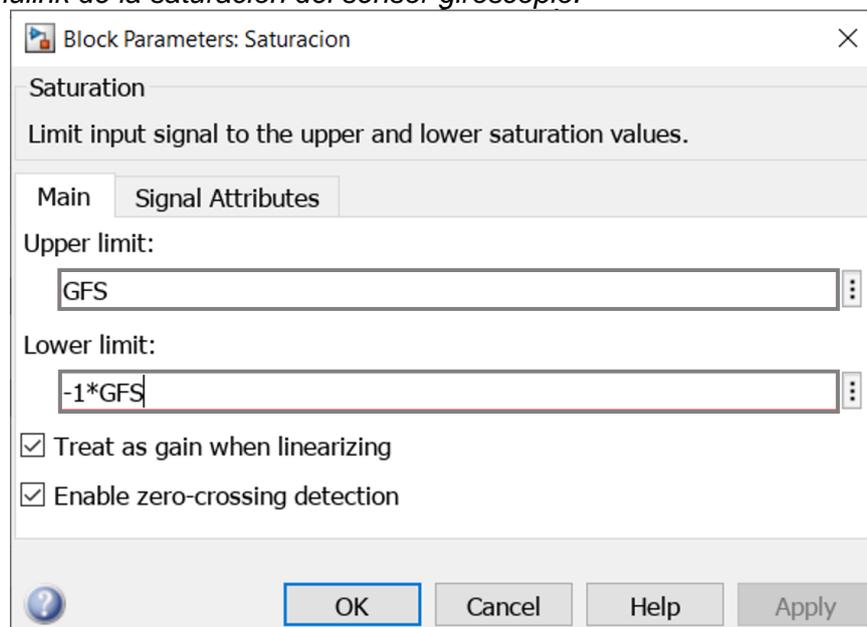
Bloque Simulink del ruido de sensor giroscopio.



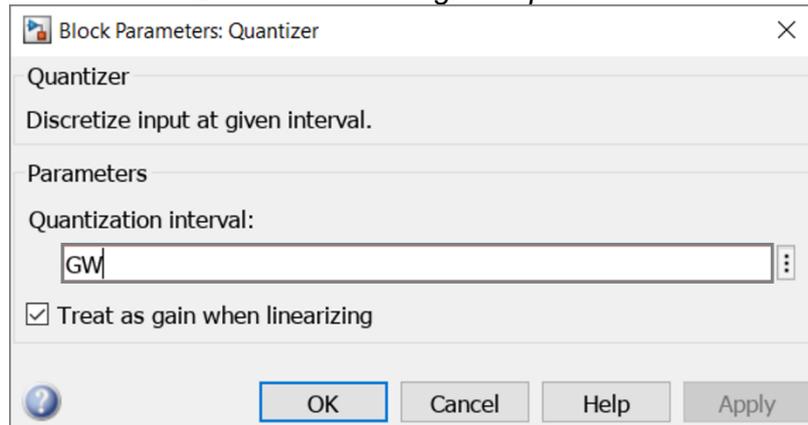
Bloque Simulink de la dinámica del sensor giroscopio.



Bloque Simulink de la saturación del sensor giroscopio.



Bloque Simulink de la cuantización del sensor giroscopio.



Bloque Simulink de la dinámica del sensor vector solar.

