

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA SANITARIA

TESIS DE GRADO

DISEÑO ESTRUCTURAL DE UN
RESERVORIO ELEVADO DE CONCRETO
PARA 1500 M³ DE CAPACIDAD

PEDRO GUSUKUMA TAIRA

1967

- I N D I C E -

INTRODUCCION

PLACAS CILINDRICAS -----	1
PLACAS ESFERICAS -----	30
ANILLO -----	67
PREDIMENSIONAMIENTO -----	72
VALORES DE LOS EFECTOS PRODUCIDOS POR EL	
PESO PROPIO Y SOBRE-CARGA.	85
VALORES DE LOS EFECTOS PRODUCIDOS POR LA	
PRESION HIDROSTATICA.	107
VALORES DE LOS EFECTOS PRODUCIDOS POR EL	
POSTENSADO DE LA PARED ESFERICA REBANADO -----	118
VALORES DE LOS EFECTOS PRODUCIDOS POR EL	
POSTENSADO DE LOS ANILLOS " i_2 " Y " i_3 ". -----	125
CALCULO DE LOS VALORES DE " δ_p ", " P_2 " Y	
" P_3 ", Y COMPROBACION DEL ESPESOR.	130
GENERALIDADES ACERCA DEL POSTENSADO.	147
DISEÑO DEL POSTENSADO HORIZONTAL DE LA	
PARED ESFERICA Y DE LOS ANILLOS " i_2 " y " i_3 ". -----	177
CIMENTACION -----	199
BIBLIOGRAFIA -----	210

I N T R O D U C C I O N

El diseño estructural de un reservorio, en nuestro caso, de concreto armado y postensado, se basa en los cálculos de las áreas de acero necesarias para cada sección y ubicados en tal forma que pueden evitar que el concreto trabaje a esfuerzos que no le son permisibles. A su vez el cálculo de las áreas de acero, se basan en las fuerzas y momentos que ocurren en cada sección; de lo dicho anteriormente concluimos de que lo fundamental en todo diseño estructural es conocer como actúan las fuerzas y momentos en un elemento, y también por medio de ellas podemos hallar los espesores adecuados del elemento considerado.

La presente tesis consta de 12 capítulos, los 3 primeros tratan en forma breve sobre el estudio de las relaciones entre las fuerzas, los momentos, y los desplazamientos, giros. Se ha considerado el estudio de las placas y anillos en dos partes, la 1ª parte se estudia a la placa o anillo como un elemento de bordes libres sometido a las fuerzas exteriores uniformemente distribuidas con respecto al eje del elemento. La 2ª parte trata al elemento descargado, considerando únicamente las fuerzas y momentos que se producen en los bordes ya sean fijos o empotrados, etc. conocidos los desplazamientos o giros en el caso de bordes libres podemos hallar las fuerzas y momentos que se producen cuando están fijos, o empotrados etc.

Una vez conocidos las fuerzas y momentos podemos calcular las áreas de acero necesarios en cada sección, chequeando los esfuerzos de adherencia, anclaje, etc. Como una sugerencia puedo decirles que es posible programar en una computadora los diferentes diseños arquitectónicos y estructurales de un reservorio, que sería lo más práctico ya que se ahorraría mucho tiempo.

NOTA:

El estudio sobre las placas y anillos se ha basado en los análisis que aparecen en el texto de TIMOSHENKO "TEORIA DE PLACAS PLANAS Y CURVAS" y en las particularidades introducidas por el Ing° CARLOS LABARTHE BACA en su folleto "DEPOSITOS CILINDRICOS PRETENSADOS".

Los capítulos X y XI relacionadas con el pretensado son unas reproducciones literales tomadas del folleto mencionado del Ing° LABARTHE; en igual forma, el capítulo III relacionada con la torsión del anillo circular es una reproducción literal tomada del texto de TIMOSHENKO.

He considerado conveniente hacer dichas reproducciones para mayor claridad de la presente tesis.

C A P I T U L O I

PLACA CILINDRICA CIRCULAR

CARGADA SIMETRICAMENTE

CON RESPECTO A SU EJE.

NOTA:

El estudio sobre la placa cilíndrica circular se ha basado en el texto de TIMOSHENKO y en las particularidades introducidas por el Ing^o CARLOS LABARTHE BACA en su folleto, como se ha indicado en la introducción.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Cortemos un elemento de la placa mediante dos generatrices adyacentes y dos secciones transversales perpendiculares al eje del cilindro (ver figura N^o 101) quedando definida su posición por el ángulo " ϕ " y la coordenada " x " (ver figura N^o 102,) . Suponer que su generatriz es vertical y paralela al eje " x ". De la figura N^o 103 deducimos por simetría, que en este caso las fuerzas de corte de membrana $N_{x\phi} = N \phi x$ se anulan y que las fuerzas $N\phi$ son constantes a lo largo de la circunferencia. Con respecto a las fuerzas de corte transversales se puede deducir también, por simetría, que solamente las fuerzas Q_x no se anulan. También deducimos por simetría que los momentos de torsión $M_{x\phi} = M \phi x$ se anulan, y que los momentos flectores M_ϕ son constantes a lo largo de la circunferencia (ver figura N^o 104).

Suponiendo que las fuerzas exteriores consisten solamente en la presión normal sobre la superficie, estas tres ecuaciones de equilibrio son:

(a) Suma de fuerzas según el eje "x":

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} a \, dx \, d\phi = 0$$

(b) Suma de fuerzas según el eje "z":

(ver figura N° 105)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} a \, dx \, d\phi + N\phi \, dx \, d\phi + Z a \, dx \, d\phi = 0$$

(c) Suma de momentos respecto al eje "y" :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} a \, dx \, d\phi - Q_x a \, dx \, d\phi = 0$$

En las tres ecuaciones de equilibrio se ha considerado que:

$$\text{Sen } d\phi \approx d\phi \quad ; \quad \text{Cos } \frac{d\phi}{2} \approx 1 \quad ; \quad (d\phi)^2 \text{ o } (dx)^2 \approx 0$$

La 1ª de las ecuaciones de equilibrio indica que las fuerzas N_x son constantes, (El efecto de estas fuerzas sobre la flexión se desprecia en este estudio) tomándolas iguales a cero en el próximo estudio. De ser diferentes de cero, la deformación y tensión correspondientes a dichas fuerzas cortantes pueden calcularse fácilmente y superponerse a las tensiones y deformaciones producidas por la carga lateral, las dos ecuaciones restantes pueden escribirse en la forma de simplificada:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a} N\phi = -Z \quad (\text{ecuación N° 101})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (\text{ecuación N° 102}).$$

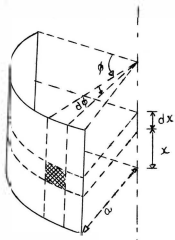


Figura N° 101

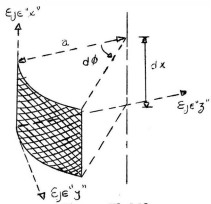


Figura N° 102

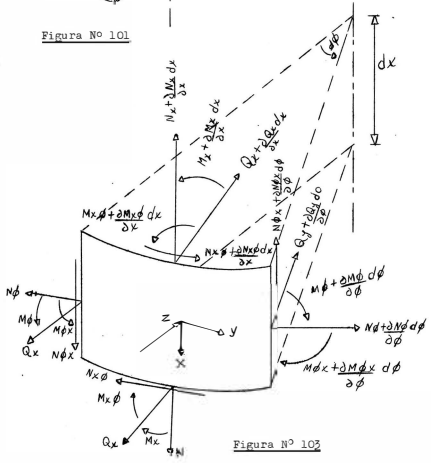


Figura N° 103

DESPLAZAMIENTO

Por simetría deducimos que la componente del desplazamiento en la dirección circunferencial se anula. Por ello tenemos que considerar solamente las componentes "v" y "w" en las direcciones "x" y "z" respectivamente.

En la Fig. N° 106 observamos que el incremento de la longitud \overline{AB} debido a los desplazamientos de la generatriz, "v" y " $(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx)$ " de sus extremos, es igual a $:\frac{\partial v}{\partial x} dx$. Debido a los desplazamientos radiales "w" y " $(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx)$ " la longitud del elemento disminuye una cantidad que lo consideramos despreciable: $dx \cos \alpha - dx = 0$, esto es considerando que $\cos \alpha \approx 1$, por ser $\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$ una cantidad despreciable. Luego la variación total de longitud del elemento \overline{AB} , debida a la deformación es $-\frac{\partial v}{\partial x} dx$, que dividida por la longitud inicial del elemento dx , nos dá la deformación de la placa en la dirección generatriz: $\epsilon_x = \frac{\partial v}{\partial x}$. Considerando un elemento de círculo del cilindro, se ve que debido al desplazamiento "v" el radio del círculo no varía, en cambio el desplazamiento "w", el radio "Q" del círculo disminuye la cantidad de $-w$.

La circunferencia del círculo paralelo disminuye en la misma proporción que su radio, en consecuencia: $\epsilon_\phi = -\frac{w}{a}$, aplicando la Ley de HOOKE, obtenemos:

$$\epsilon_x = \frac{1}{Eh} [N_x - u N_\phi]$$

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{Eh} [N_\phi - u N_x]$$

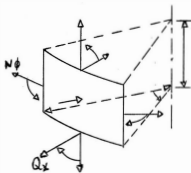


Figura N° 104

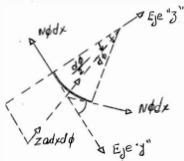


Figura N° 105

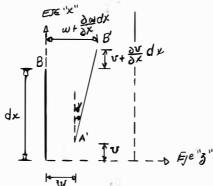


Figura N° 106

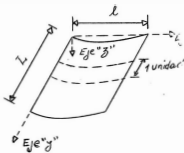


Figura N° 107

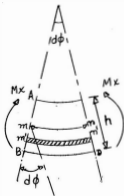


Figura N° 108

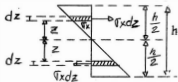


Figura N° 109

$$\text{De donde: } N_x = \frac{Eh}{1-u^2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{w}{a} \right] \quad (\text{Ecuación N}^\circ 103)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-u^2} \left[\frac{w}{a} + u \frac{v}{x} \right] \quad (\text{ecuación N}^\circ 104)$$

En la parte tratada sobre ecuaciones de equilibrio se consideró que : $N_x = 0$, luego: $\frac{\partial v}{\partial x} = u \frac{w}{a}$

(ecuación N^o 105)

$$N_\theta = -G h \frac{w}{a} \quad (\text{ecuación N}^\circ 106)$$

Considerando los momentos flectores, deducimos por simetría que no hay cambio de curvatura en la dirección circunferencial.

El giro lo obtenemos dividiendo la variación de los desplazamientos radiales entre la longitud inicial del elemento:

$$\alpha = \text{Giro} = \frac{(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx) - w}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Esto es la rotación del lado inferior del círculo del cilindro. La rotación del lado superior será:

$$\left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right) \text{ o sea: } \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

El cambio de curvatura de la generatriz lo obtenemos dividiendo la variación angular por la longitud de la generatriz dx:

$$X_x = \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - \frac{\partial w}{\partial x}}{dx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{ecuación N}^\circ 107)$$

ECUACION DIFERENCIAL DE LA FLEXION CILINDRICA DE PLACAS
DE GRAN LONGITUD

Consideremos una placa rectangular de gran longitud sometida a una carga transversal constante en todo su largo. Estudiemos la flexión de una faja elemental cortada mediante dos planos normales a su longitud y a una distancia unitaria uno de otro. La deformación de esta faja está dada por una ecuación diferencial similar a la línea elástica de una viga.

Consideremos una placa de espesor uniforme igual a "h", tomemos el plano "xy" como plano medio de la placa antes de ser cargada, esto es, el medio entre ambas caras de la placa.

Supongamos coincidentes el eje "y", con uno de los bordes longitudinales de la placa y sea el sentido positivo del eje "z" hacia abajo, como muestra la figura N^o 107. Si el ancho de la placa se designa por "l", la faja elemental puede considerarse como una barra de sección transversal rectangular, de longitud "l" y espesor "h". Al calcular las tensiones por flexión en ésta barra, suponemos, lo mismo que se hace en la teoría de las vigas, que sus secciones transversales se mantienen planas durante la flexión, experimentando sólo una rotación respecto de sus ejes neutros. Aplicando la ley de HOOKE, los alargamientos específicos " ϵ_x " y " ϵ_y ", en función de las tensiones normales " σ_x " y " σ_y " que actúan sobre el elemento sombreado en la figura N^o 108:

$$\Sigma_x = \frac{\sigma_x}{E} - u \frac{\sigma_y}{E} \quad (\text{ecuaciones (a)})$$

$$\Sigma_y = \frac{\sigma_y}{E} - u \frac{\sigma_x}{E}$$

Siendo "E" el módulo de elasticidad del material y "u" el coeficiente de Poisson. La deformación lateral en el sentido del eje "y" debe ser cero para mantener la continuidad en la placa durante su flexión deduciéndose de la segunda de las ecuaciones (a) que: $\Sigma_y = \frac{\sigma_y}{E} - u \frac{\sigma_x}{E} = 0$

de donde: $\sigma_y = u \sigma_x \quad (\text{b})$

Sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones (a) obtenemos: $\Sigma_x = \frac{(1-u^2)}{E} \sigma_x$ de donde: $\sigma_x =$

$$\frac{E \Sigma_x}{1-u^2} \quad (\text{c}).$$

Si no existen fuerzas normales aplicadas en las secciones extremas de la barra, su superficie neutra coincide con la superficie media de la placa y el alargamiento específico de una fibra paralela al eje "x" es proporcional a su distancia Z a la superficie media, luego: De la figura N° 108, obtenemos:

$$\Sigma_x = \frac{m't}{dx} = \frac{Z d \phi}{dx} \quad (\text{d})$$

Designamos con "w" los desplazamientos en la dirección de "z" que se suponen pequeños comparados con la longitud "l" de la barra. La tangente con el punto "m" la consideramos igual al ángulo: $Tg_z \phi \approx \phi \approx \frac{\partial w}{\partial x}$

Derivando obtenemos la variación de la tangente respecto al eje "x", en la figura N° 108 se observa que disminuye a medida que crece, luego: $\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (e)$

Se sabe que la curvatura X_x esta dado por la expresión:

$$X_x = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

despreciando los términos que contienen infinitesimos de mayor orden, se tiene; $X_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (f)$

Reemplazando (e) y (f) en (d), se tiene: $\Sigma_x = -Z X_x$

Reemplazando esta última expresión en (c), obtenemos:

$$\bar{Q}_x = - \frac{E Z}{1 - u^2} X_x$$

En la figura N° 109 se observa que:

$$\partial M_x = \bar{Q}_x Z dZ = - \frac{E Z^2}{1 - u^2} X_x dZ$$

Integrando, se tiene: $M_x = - \frac{E h^3}{12(1-u^2)} X_x$

Introduciendo la notación: $D = \frac{E h^3}{12(1-u^2)}$, luego la

ecuación de la línea elástica de la faja elemental se escribirá en la siguiente forma: $M_x = - D X_x$ (ecuación N° 108).

Procediendo en igual forma obtenemos que: $d M_y = \int_y Z dz$
 el valor de \int_y lo hallamos de la ecuación (b), reemplazando y ejecutando la integración, se tiene: $M_y = u M_x$
 (Ecuación N° 109) como el factor "D" reemplaza al producto "EI" de las fórmulas de deflexión de vigas se le llama por analogía "Rigidez a la flexión de una placa".

Si suponemos que X_y es la curvatura del otro lado, por superposición podemos considerar que:

$$M_x = - D (X_x + u X_y) \text{ (ecuación N° 110)}$$

$$M_y = - D (X_y + u X) \text{ (Ecuación N° 111)}$$

Soluciones y Fórmulas

Empleando las mismas ecuaciones que para las placas, obtenemos de las ecuaciones N° 107, 108 y 109 :

$$M \phi = u M_x \quad \text{(ecuación N° 112)}$$

$$M_x = - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{(ecuación N° 113)}$$

$$\text{En donde } D = \frac{E h^2}{12 (1-u^2)}$$

Volviendo a las ecuaciones N° 101 y 102, eliminando Q_x

$$\text{de las mismas obtenemos : } \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{1}{a} N \phi = - Z$$

$$\text{(ecuación N° 114).}$$

De la que empleando las ecuaciones N° 106, y 113, resulta:

$$\frac{D^2 \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)}{D^2} + \frac{Eh}{a^2} w = Z \quad (\text{ecuación N° 115})$$

Todos los problemas de la deformación simétrica de placas cilíndricas circulares se reducen a la integración de la ecuación N° 115. La aplicación más simple de esta ecuación se obtiene cuando el espesor de la placa es constante. Bajo estas condiciones la ecuación N° 115 se escribe:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{a^2} w = Z \quad (\text{ecuación N° 116})$$

Introduciendo la notación : $\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = \frac{3(1-u^2)}{a^2 h^2}$
(ecuación N° 117)

La ecuación N° 116 puede representarse en la forma simplificada:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \quad (\text{ecuación N° 118})$$

La solución general de esta ecuación es:

$$W = e^{\beta x} [C_1 \text{Cos } \beta x + C_2 \text{ Sen } \beta x] + e^{-\beta x} [C_3 \text{Cos } \beta x + C_4 \text{ Sen } \beta x] + f(x)$$

(ecuación N° 119)

En la que $f(x)$ es una solución particular de la ecuación N° 119, y "C₁", "C₂", "C₃", "C₄" son los constantes de integración a determinarse en cada paso particular con las condiciones en los extremos del cilindro.

Derivando sucesivamente la ecuación N° 119, se tiene:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{Bx} \beta \left[C_1 (\cos Bx - \operatorname{Sen} Bx) + C_2 (\cos Bx + \operatorname{Sen} Bx) \right] + e^{-Bx} B \left[-C_3 (\cos Bx + \operatorname{Sen} Bx) + C_4 (\cos Bx - \operatorname{Sen} Bx) \right]$$

(ecuación N° 120)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2 B^2 e^{Bx} \left[-C_1 \operatorname{Sen} Bx + C_2 \cos Bx \right] + 2 B^2 e^{-Bx} \left[C_3 \operatorname{Sen} Bx - C_4 \cos Bx \right] \quad (\text{ecuación N° 121})$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 2 B^3 Bx \left[-C_1 (\cos Bx + \operatorname{Sen} Bx) + C_2 (\cos Bx - \operatorname{Sen} Bx) \right] + 2 B^3 e^{-Bx} \left[C_3 (\cos Bx - \operatorname{Sen} Bx) + C_4 (\cos Bx + \operatorname{Sen} Bx) \right]$$

(Ecuación N° 122)

Con las ecuaciones del 119 al 122 se tienen resueltas las fuerzas y los momentos. De las ecuaciones N° 102 y 113, se tiene:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (\text{ecuación N° 123})$$

De las ecuaciones 103 y 105: $N_x = 0$ (ecuación N° 124)

De la ecuación 106: $N\theta = -\frac{E h}{a} W$ (ecuación N° 125)

De la ecuación N° 113: $M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (ecuación N° 126)

De la ecuación N° 112: $M\theta = -u D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (ecuación N° 127)

El desplazamiento se obtiene de la ecuación 119, y el giro o rotación de la generatriz se halla de la ecuación 120.

TABLA N° 101

TABLA DE LAS FUNCIONES ϕ ; ψ ; θ y ξ .

B_x	ϕ	ψ	θ	ξ
0	1.0000	1.0000	1.0000	0
0.2	0.9651	0.6398	0.8024	0.1627
0.4	0.8784	0.3564	0.6174	0.2610
0.6	0.7682	0.1431	0.4520	0.3099
0.8	0.6354	- 0.0093	0.3131	0.3223
1.0	0.5083	- 0.1108	0.1988	0.3096
1.2	0.3899	- 0.1716	0.1091	0.2807
1.4	0.2849	- 0.2011	0.0419	0.2430
1.6	0.1959	- 0.2077	- 0.0059	0.2018
1.8	0.1234	- 0.1985	- 0.0376	0.1610
2.0	0.0667	- 0.1794	- 0.0563	0.1230
2.2	0.0244	- 0.1548	- 0.0652	0.0895
2.4	- 0.0056	- 0.1282	- 0.0669	0.0613
2.6	- 0.0254	- 0.1019	- 0.0636	0.0383
2.8	- 0.0369	- 0.0777	- 0.0573	0.0204
3.0	- 0.0423	- 0.0563	- 0.0493	0.0071
3.2	- 0.0431	- 0.0383	- 0.0407	- 0.0024
3.4	- 0.0408	- 0.0237	- 0.0323	- 0.0085
3.6	- 0.0366	- 0.0124	- 0.0245	- 0.0121
3.8	- 0.0314	- 0.0040	- 0.0177	- 0.0137
4.0	- 0.0258	0.0019	- 0.0120	- 0.0139
4.2	- 0.0204	0.0057	- 0.0074	- 0.0131
4.4	- 0.0155	0.0079	- 0.0038	- 0.0117
4.6	- 0.0111	0.0089	- 0.0011	- 0.0100
4.8	- 0.0075	0.0089	0.0007	- 0.0082

BX	ϕ	ψ	θ	ϵ
5.0	- 0.0046	0.0084	0.0019	- 0.0065
5.2	- 0.0023	0.0075	0.0026	- 0.0049
5.4	- 0.0006	0.0064	0.0029	- 0.0035
5.6	0.0005	0.0052	0.0029	- 0.0023
5.8	0.0013	0.0041	0.0027	- 0.0014
6.0	0.0017	0.0031	0.0024	- 0.0007
6.2	0.0019	0.0022	0.0020	- 0.0002
6.4	0.0018	0.0015	0.0017	0.0003
6.6	0.0017	0.0009	0.0013	0.0005
6.8	0.0015	0.0004	0.0010	0.0006
7.0	0.0013	0.0001	0.0007	0.0006

En esta tabla se ha introducido las siguientes funciones:

$$\phi (Bx) = e^{-Bx} (\cos Bx \rightarrow \text{Sen } Bx)$$

$$\psi (Bx) = e^{-Bx} (\cos Bx - \text{Sen } Bx)$$

$$\theta (Bx) = e^{-Bx} \cos Bx$$

$$(Bx) = e^{-Bx} \text{ Sen } Bx$$

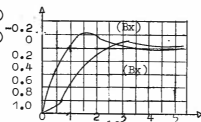


Figura N° 101

Como una conclusión de la tabla N° 101 y de la figura N° 116, podemos decir que la flexión producida en la placa es en realidad de carácter local, como se suponía al principio al calcularse las constantes de integración.

EFFECTOS PRODUCIDOS POR LA PRESION HIDROSTATICA CUANDO
LOS BORDES SON LIBRES

Si un tanque está sometido a la acción de la presión de un líquido, como se indica en la figura N^o 111, las tensiones en las paredes pueden analizarse mediante la ecuación N^o 118. Sustituyendo en esta ecuación: $Z = -\gamma(d-x)$ se tiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 B^4 w = - \frac{\gamma (d-x)}{D}$$

en la que " γ " es el peso específico del líquido. Una solución particular de esta ecuación es:

$$w = - \frac{\gamma (d-x)}{E h} a^2 \quad (\text{ecuación N}^o \text{ 128})$$

que representa la expansión radial de una placa cilíndrica con bordes libres, bajo la acción de tensiones de anillo.

El giro lo obtenemos derivando la ecuación N^o 128:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\gamma a^2}{E h}, \quad (\text{ecuación N}^o \text{ 129})$$

De las ecuaciones 123 al 127 se hallan los valores de las fuerzas y los momentos:

$$Q_x = 0 \quad N_\phi = \gamma (d-x) a$$

(ecuaciones N^o 130)

$$N_x = 0 \quad M_x = 0 \quad M_\phi = 0$$

(a) en el borde inferior se tiene:

$$W_0 = - \frac{\gamma d a^2}{E h} \quad (\text{ecuaciones N}^\circ 131)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 = \frac{\gamma a^2}{E h}$$

(b) en el borde superior, se tiene:

$$W = 0 ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_d = \frac{\gamma a^2}{E h} \quad (\text{ecuaciones N}^\circ 132)$$

Borde Inferior

En este caso no existe presión Z distribuida sobre la superficie de la placa, y $P(x) = 0$ en la solución general de la ecuación N^o 119. (ver figura N^o 112, y 113). Como las fuerzas aplicadas en el extremo $x=0$ producen una flexión local que desaparece gradualmente y en forma rápida cuando la distancia X al extremo cargado aumenta, deducimos que el primer término de la ecuación N^o 119 debe desaparecer, en consecuencia: $C_1 = C_2 = 0$ y obtenemos:

$$W = e^{-Bx} (C_3 \cos Bx + C_4 \operatorname{Sen} Bx) \quad (\text{ecuación N}^\circ 133)$$

Las dos constantes C_3 y C_4 pueden determinarse ahora con las condiciones en el extremo cargado. De las ecuaciones 122 y 123,:

$$Q_x = - 2 B^3 D e^{Bx} \left[C_3 (\cos Bx - \operatorname{Sen} Bx) + C_4 (\cos Bx + \operatorname{Sen} Bx) \right] \quad (\text{ecuación N}^\circ 134)$$

De las ecuaciones 125 y 133, se obtiene:

$$N_x = - \frac{E h}{a} e^{-Bx} (C_3 \cos Bx + C_4 \sin Bx) \quad (\text{ecuación N}^\circ 135)$$

De la ecuación 124, se obtiene: $N_x = 0$ (ecuación N^o136)

De las ecuaciones 121 y 126, se obtiene:

$$M_x = - 2 B^2 D e^{-Bx} (C_3 \sin Bx - C_4 \cos Bx) \quad (\text{ecuación N}^\circ 137)$$

De la ecuación 127, se halla:

$$M_x = - 2 B^2 D u e^{-Bx} (C_3 \sin Bx - C_4 \cos Bx) \\ (\text{ecuación N}^\circ 138)$$

El giro lo obtenemos de la ecuación 120:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = B e^{-Bx} \left[-C_3 (\cos Bx + \sin Bx) + C_4 (\cos Bx - \sin Bx) \right] \\ (\text{ecuación N}^\circ 139)$$

(a) Efectos producidos por una fuerza horizontal por unidad de longitud aplicada en el borde inferior.

Cuando $x=0$ las condiciones en el borde son:
(ver figura N^o 112) $M_x = 0$; $Q_x = Q_0$

reemplazando en las ecuaciones 134 y 137, se obtienen los valores de las constantes: $C_4 = 0$; $C_3 = -\frac{1}{2B^3 D} Q_0$

Para hallar los valores de las fuerzas y los momentos, reemplazamos los valores de las constantes en las ecuaciones del 134 al 138,:

$$Q_x = e^{-Bx} (\cos Bx - \sin Bx) Q_0$$

$$N_x = 2 B a e^{-Bx} \cos Bx Q_0$$

$$N_x = 0$$

$$M_x = 1/B e^{-Bx} \sin Bx Q_0$$

$$M_x = A N_x \quad (\text{ecuaciones N}^\circ 140)$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior, lo obtenemos de las ecuaciones 133 y 139:

$$w_0 = \frac{1}{2 B^3 D} Q_0 = - \frac{2 a^2 B}{E h} Q_0 \quad (\text{ecuaciones N}^\circ 141)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_0 = \frac{1}{2 B^2 D} Q_0 = \frac{2 a^2 B^2}{E h} Q_0$$

(b) Efectos producidos por un momento vertical por unidad de longitud aplicada en el borde inferior.

Cuando $x = 0$ las condiciones en el borde son:
(ver figura N^o 113) $M_{x=0} = M_0$; $Q_{x=0} = 0$

Reemplazando en las ecuaciones 134 y 137, se tiene: $C_3 = -C_4 = -M_0 / 2 B^2 D$

Para hallar los valores de las fuerzas y los momentos reemplazamos los valores de las constantes en las ecuaciones del 134 al 138:

$$Q_x = -2 B e^{-Bx} \sin Bx M_0$$

$$N_x = 2 a B^2 e^{-Bx} (\cos Bx - \sin Bx) M_0$$

$$N_x = 0$$

$$M_x = e^{-Bx} (\cos Bx + \sin Bx) M_0$$

$$M_d = u M_o$$

(ecuaciones N° 142)

El desplazamiento y el giro en el borde inferior, lo ob
tenemos de las ecuaciones 133 y 139,:

$$W_o = - \frac{1}{2 B^2 D} M_o = - \frac{2 a^2 B^2}{E h} M_o$$

Ecuaciones N°143)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_o = 1/BD M_o = \frac{4 a^2 B^3}{E h} M_o$$

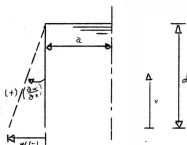


Figura N° 110

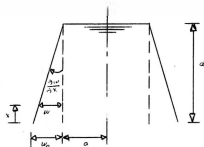


Figura N° 111

Fig. N° 110.- Para las fuerzas y
los momentos, se consideran posi
tivos los sentidos que aparecen
en la figura N° 104

Fig. 111

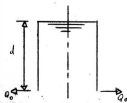


Fig. N° 112

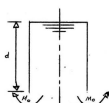


Fig. N° 113

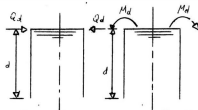


Fig. N° 114

Fig. N° 115

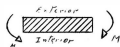
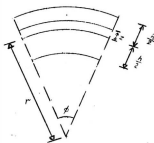
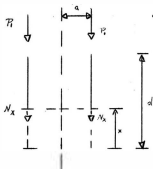


Figura N° 118

Fig. N° 117.- La ecuación de equilibrio es: $2\pi a N_x + 2\pi a P_1 + 2\pi a q (d-x) = 0$
de donde: $N_x = - [P_1 + q (d-x)]$

Borde Superior

En este caso no existe presión Z distribuida sobre la superficie de la placa y $f(x) = 0$ en la solución general de la ecuación N° 119 (ver figura N° 114, 115). como las fuerzas aplicadas en el extremo $x=d$ producen una flexión local que desaparece gradualmente y en forma rápida cuando la distancia x del extremo cargado disminuye, deducimos que el 2° término de la ecuación N° 119 debe desaparecer, en consecuencia $C_3 = C_4 = 0$, y obtenemos:

$$W = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (\text{Ecuación N° 144})$$

Las dos constantes C_1 y C_2 pueden determinarse ahora con las condiciones en el extremo cargado. De las ecuaciones 122 y 123, se tiene:

$$Q_x = 2\beta^3 D e^{\beta x} [-C_1 (\cos \beta x + \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - \sin \beta x)] \quad (\text{Ecuación N° 145})$$

De las ecuaciones 125 y 144, se obtiene:

$$N\phi = - \frac{E h}{a} e^{Bx} \left[C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx \right] \quad (\text{ecuación N}^\circ 146)$$

De la ecuación 124: $N_x = 0$ (ecuación N^o 147)

De las ecuaciones 121 y 126 se obtiene:

$$M_x = - 2 B^2 D e^{Bx} (- C_1 \sin Bx + C_2 \cos Bx) \quad (\text{ecuación N}^\circ 148)$$

De la ecuación 127: $M\phi = u M_x$ (ecuación N^o 149)

El giro lo obtenemos de la ecuación 120:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = B e^{Bx} \left[C_1 (\cos Bx - \sin Bx) + C_2 (\cos Bx + \sin Bx) \right] \quad (\text{ecuación N}^\circ 150)$$

(a) Efectos producidos por una fuerza horizontal por Unidad de Longitud aplicada en el borde superior.

Cuando $x = d$ las condiciones en el borde son:

(ver figura N^o 114) $M_{x=d} = 0$; $Q_{x=d} = Q_d$; reemplazando en las ecuaciones 145 y 148, se tiene: $C_1 = \frac{\cos d}{2/3^3 D c B d} Q_d$

$C_2 = \frac{\sin d}{2/3^3 D c B d} Q_d$. Para hallar los valores de las fuerzas y los momentos, reemplazamos los valores de los constantes en las ecuaciones del 145 al 149,:

$$Q_x = e^{-B(d-x)} \left[\cos B(d-x) - \sin B(d-x) \right] Q_d$$

$$N\phi = - 2 B a e^{-B(d-x)} \cos B(d-x) Q_d$$

$$N_x = 0$$

$$M_x = - 1/B e^{-B(d-x)} \sin B(d-x) Q_d$$

$$M\phi = u M \quad (\text{ecuaciones N}^\circ 151)$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, lo obtenemos de las ecuaciones 144 y 150:

$$W_d = 1/2B^3 D \quad Q_d = 2 a^2 B/E h \quad Q_d$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_d = 1/2 B^2 D \quad Qd = 2 a^2 B^2 / E h \quad Qd$$

(b) Efectos producidos por un momento vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior.

Cuando $x = d$ las condiciones en el borde son:

(ver figura N° 115) $M_{x=d} = Md$; $Q_{x=d} = 0$, reemplazando las ecuaciones 145 y 148 se tiene:

$$C_1 = - \frac{(\cos \beta d - \operatorname{sen} \beta d)}{2 \beta^2 D e^{\beta d}} Md;$$

$$C_2 = - \frac{(\cos \beta d + \operatorname{sen} \beta d)}{2 B^2 D e^{\beta d}} Md$$

Para hallar los valores de las fuerzas y los momentos, reemplazamos los valores C_1 C_2 en las ecuaciones del 145 al 149:

$$Q_x = 2 B e^{-B(d-x)} \operatorname{Sen} B(d-x) Md$$

$$N_x = 2 B^2 a e^{-B(d-x)} [\operatorname{Cos} B(d-x) - \operatorname{Sen} B(d-x)] Md$$

$$N_x = 0$$

$$M_x = e^{-B(d-x)} [\operatorname{Cos} B(d-x) + \operatorname{Sen} B(d-x)] Md$$

$$M_x = u M_x \quad (\text{ecuaciones N° 153})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, lo obtenemos de las ecuaciones 144 y 150: $w_d = 1/2 B^2 D Md =$

$$- \frac{2 a^2 B^2}{E h} Md \quad (\text{Ecuaciones N° 154})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_d = - \frac{1}{B d} Md = - \frac{4 a^2 B^3}{E h} Md$$

Efectos producidos por una fuerza vertical "P₁" por unidad de longitud aplicada en el borde superior, y por una fuerza "q" por unidad de área distribuida uniformemente en toda la superficie que actúa en sentido vertical, cuando los bordes son libres.

En la figura N^o 117 se observa que la fuerza $N_x = -P$; siendo $P = P_1 + q(d-x)$ de la ecuación 103, se tiene:
$$N_x = \frac{E h}{(1-u^2)} \left[\frac{dy}{dx} - u \frac{w}{a} \right]$$

(ecuación N^o 155 A)

Igualando las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{w}{a} - \frac{(1-u^2)}{E h} P$$

reemplazando en la ecuación 104 se tiene:

$$N_{\phi} = -\frac{E h}{a} w - u p \quad (\text{ecuación N}^o \text{ 155})$$

En este caso no existe presión hidrostática, luego $Z=0$ en la ecuación 114 y se tiene:

$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{1}{a} N_{\phi} = 0$ reemplazando los valores de la ecuación 155 y la 2^a derivada de la ecuación 113, se tiene:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E h}{a^2 D} w + \frac{u P}{a D} = 0$$

La solución de esta ecuación cuando los bordes están libres es:

$$w = -\frac{u a}{E h} P \quad (\text{ecuación N}^o \text{ 156})$$

De las ecuaciones 102, 103, 112, 113 y 155, hallamos los valores de las fuerzas y de los momentos:

$$N_{\phi} = 0 ; N_x = -P ; Q_x = M_x = M_{\phi} = 0 ; \text{ (ecuación N}^{\circ}157)$$

El desplazamiento y el giro hallamos de la ecuación 156:

$$W = - \frac{u a P}{E h} = - \frac{u a}{G h} \left[P_1 + q (P_1 + q(d-x)) \right]$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{u a}{E h} q \quad \text{(ecuaciones 158)}$$

INFLUENCIA DE LA VARIACION DE LA TEMPERATURA Y RETRACION DEL CONCRETO.

(a) Influencia de la temperatura uniformemente distribuida.

Si una placa cilindrica con bordes libres experimentará una variación uniforme de temperatura, no se producirán tensiones en la misma por ésta causa. Ahora bien, si los bordes se hallan articulados o empotrados, la libre expansión de la placa se halla restringida, produciéndose tensiones locales por flexión en los bordes.

Si se produce una variación de temperatura de " t_2 " a " t_1 ", todo el cilindro experimentará una variación uniforme de temperatura que lo hará expandirse o reducirse, produciéndose una elongación Δa en la longitud del radio del cilindro; siendo: $\Delta_a = C (t_1 - t_2) a$ en la cual "C" es el coeficiente de dilatación lineal

Sea $\Delta T = t_1 - t_2$ y $\Delta a = w$, se tiene : $w = C a \Delta T$
 (Ecuación N° 159)

Si ΔT es positivo se producirá el acortamiento de acuerdo a la conversión adoptada. Los valores de los momentos de reacción y de las fuerzas en los bordes para cualquier clase de apoyos simétricos pueden ser fácilmente obtenidas de las ecuaciones tratadas anteriormente.

(b) Gradiente de Temperatura en Dirección Radial

Supongamos que la variación de temperatura en el espesor de la placa responde a una Ley lineal y que se mantiene constante en planos paralelos a la superficie de la placa. Sea "C" el coeficiente de dilatación lineal del material de la placa y ΔT la diferencia de temperatura entre sus caras superior e inferior, luego la variación por unidad de longitud de espesor será: $\frac{\Delta T}{h}$. Midiendo la temperatura a partir de la correspondiente a la superficie media, se puede deducir que las extensiones y contracciones por variaciones de la temperatura, son proporcionales a la distancia de la superficie media.

El alargamiento o contracción unitaria debido a la variación de la temperatura de una partícula situada a una distancia "Z" de la fibra media del espesor de la pared vendrá dado por : $\xi = c \frac{\Delta T}{h} Z$, suponiendo que los desplazamientos son pequeños comparados con el espesor de la placa, los bordes de la placa calentada de manera no uniforme, se hallan completamente li-

bres , esta flexionará en forma de superficie esférica. En el gráfico N^o 118 se observa que la diferencia de la deformación entre la fibra situada a una distancia "Z" respecto a la fibra media esta dada por:

$(r + z) \phi - r \phi = Z \phi$ siendo su deformación unitaria:

$$\epsilon = \frac{Z \phi}{r \phi} = \frac{Z}{r} , \text{ igualando las dos deformaciones unitarias}$$

Se tiene: $\frac{Z}{r} = C \left(\frac{\Delta T}{h} \right) Z$ de donde: $\frac{1}{r} = C \frac{\Delta T}{h}$
(ecuación N^o160)

que es la curvatura resultando del calentamiento no uniforme.

Esta flexión de la placa no produce tensión alguna, siempre que los bordes sean libres y los desplazamientos pequeños comparados con su espesor. Supongamos ahora que el plano medio de la placa pueda dilatarse libremente pero que los bordes se hallan vinculados en tal forma que no pueden girar. En este caso el calentamiento no uniforme produce momentos flectores uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes de la placa, de valor igual al necesario para anular la curvatura producida por el calentamiento (ecuación N^o 160), desde que sólo en esta forma pueda quedar satisfecha la condición de vinculo impuesta al borde. Utilizando las ecuaciones N^o 110 y 111 de la curvatura producida por los momentos flectores, hallamos para el valor M del momento, por unidad de longitud del contorno la ecuación

ción:

$$M = \frac{\Delta T D (1 + u)}{h} \quad (\text{ecuación N}^\circ 161)$$

Si ΔT es positivo la temperatura anterior es mayor que la exterior, por lo tanto se producen esfuerzos de tracción en la superficie exterior.

(c) Influencia de la retracción del concreto.

El fenómeno de la retracción del concreto se manifiesta por una disminución de sus dimensiones en el tiempo y depende de varios factores, entre ellos la edad del concreto. Es justamente por la diferencia de edad que se produce una retracción relativa de la placa cilíndrica respecto a su base. Si llamamos a la retracción relativa unitaria: " ϵ_x ", la variación relativa del radio del cilindro respecto al de la base será:

$$\Delta_r = \epsilon_r \quad a \quad (\text{ecuación N}^\circ 162)$$

El estudio de los efectos producidos es exactamente igual al que desarrolla un cambio de temperatura uniformemente distribuida.

La forma de cálculo anteriormente descrita puede considerarse suficientemente exacta en el caso que pueda preverse que la placa cilíndrica experimentará más o menos la misma retracción en todos sus puntos. En el caso de que no suceda así, como cuando se construye en partes sucesivas y se invierte un tiempo considerable en cada uno de ellos presentando en el tiem-

po retracciones diferentes, el cálculo anterior se limitará simplemente a ser aproximado para determinar las reacciones en el apoyo, teniendo en cuenta la retracción relativa de la parte inferior respecto a la base. En cuanto al cálculo de los esfuerzos, que se desarrollan a lo largo de la placa por la retracción diferencial de sus partes, se presenta bastante laborioso.

C A P I T U L O I I

PL ACESFERICA

CARGADA SIMETRICAMENTE

CON RESPECTO A S U E J E .

NOTA:

El desarrollo de este capítulo se ha basado en el texto de TIMOSHENKO y en los conceptos obtenidos del folleto del Ing^o. CARLOS LABARTHE BACA; como se ha explicado en la introducción.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Consideremos las ecuaciones de equilibrio de un elemento separado de una placa por dos planos meridianos adyacentes y dos círculos paralelos (ver figura N^o201) Se puede deducir de las condiciones de simetría que sobre los lados del elemento, coincidentes con los planos meridianos, sólo actúan tensiones normales.

Un meridiano está determinado por el ángulo θ a partir de otro meridiano tomado como base ; un círculo paralelo está localizado por medio del ángulo ϕ a partir del eje de rotación de la esfera.

Los planos de curvatura principal de un punto son el meridiano y el círculo paralelo siendo "R" el radio de curvatura de ambos.

Los ejes coordenados " x ", y " z ", son

tangentes al círculo paralelo, al meridiano, y perpendicular a la tangente del meridiano, respectivamente. Los sentidos adoptados en la figura N° 202 se consideran positivos. La fuerza exterior tiene sus componente "X", "Y" "Z" paralelos a los ejes coordenados, y por unidad de superficie.

Para hallar las ecuaciones de equilibrio, encontraremos términos que contienen infinitesimos de mayor orden y que lo consideramos despreciables. Los senos y cosenos de infinitesimos lo consideramos igual al infinitesimo, e igual a la unidad, respectivamente,

Consideramos que las fuerzas de membrana N_θ y N_ϕ no están proximos a sus valores críticos, despreciamos la variación de la curvatura, y luego deducimos las ecuaciones de equilibrio.

Para hallar la primera ecuación de equilibrio de fuerzas, haremos la suma de fuerzas según el eje "y" (ver figura N° 205,206,207) y considerando que $d(\text{Area}) = R^2 \text{ Sen } \phi \, d\phi \, d\theta$, se tiene:

$$\frac{\partial(N_\phi r)}{\partial \phi} - N_\theta R \text{Cos } \phi - r Q \phi + R r y = 0$$

(ecuación N° 201)

Para hallar la 2ª ecuación de equilibrio de fuerzas, haremos la suma de fuerzas según el eje "Z" (ver fig. N° 205, 206, 207,) y se tiene:

$$N_\phi + N_\theta R \text{ Sen } \phi + \frac{\partial(Q_\phi r)}{\partial \phi} + Z R r = 0 \text{ (ecuación N° 202)}$$

Para hallar la 3ª ecuación de equilibrio, haremos la suma de momentos con respecto al eje "x" (ver figuras N° 204, 205, 208 y 209), y considerando que son negativas cuando siguen el sentido del tirabuzón al sacar el corcho \curvearrowright ; y positivas lo contrario es decir empleamos la conocida regla del tirabuzón, obtenemos:

$$\frac{\partial(N \phi r)}{\partial \phi} - M_{\theta} R \cos \phi - Q \phi R r = 0 \quad (\text{Sección N}^{\circ} 203)$$

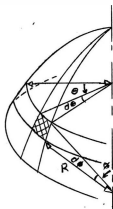


Fig. N° 201

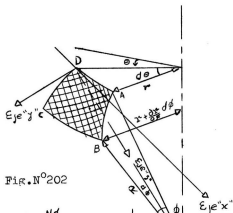


Fig. N° 202

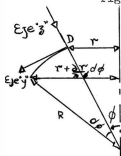


Fig. N° 203

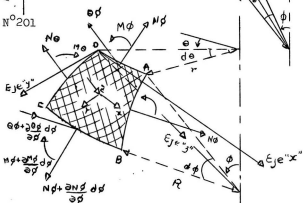


Fig. N° 204

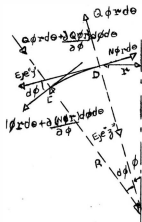


Fig.N°205

Fig.N° 205.- En el lado \widehat{BC} inf. actúa la fuerza de tensión:

$$(N\phi + \frac{\partial N}{\partial \phi} d\phi)(r + \frac{\partial r}{\partial \phi} d\phi)d\theta =$$

$$N\phi r d\theta + \frac{\partial(N\phi r)}{\partial \phi} d\phi d\theta$$

En el lado inferior \widehat{BC} actúa la fuerza de corte:

$$(Q\phi + \frac{\partial Q\phi}{\partial \phi} d\phi)(r + \frac{\partial r}{\partial \phi} d\phi) d\theta =$$

$$Q\phi r d\theta + \frac{\partial(Q\phi r)}{\partial \phi} d\phi d\theta$$

esta fuerza de corte produce un momento negativo respecto al eje "x" (punto D) de:- $\left[(Q\phi r d\theta) + \frac{\partial(Q\phi r)}{\partial \phi} d\phi d\theta \right] R \text{ sen } \phi$
Se considera que:

$$\text{Cos } d\phi \approx 1$$

$$\text{sen } d\phi \approx d\phi$$

$$(d\phi)^2 \approx 0$$

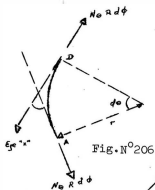


Fig. N° 206

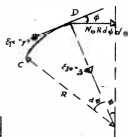


Fig. N° 207

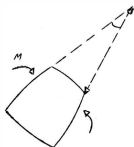


Fig. N° 208A

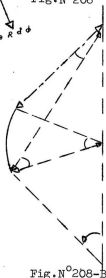


Fig. N° 208-B

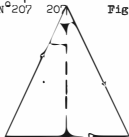


Fig. N° 206-C



Fig. N° 209

Fig. N° 209.- Si consideramos despreciables los infinitésimos de mayor orden, observamos que las fuerzas normales a los lados del elemento ABCD y las fuerzas exteriores producen un momento despreciable. Como ejem. vemos en la fig. que el momento que produce la fuerza exterior Z, será: $(Z R r d\theta \sin \frac{d\theta}{2}) n$; siendo $n = R \sin \frac{d\theta}{2} \approx R \frac{d\theta}{2}$ reemplazando se tiene: $(Z R r d\theta \sin \frac{d\theta}{2}) (R \frac{d\theta}{2})$, que nos da: $Z \frac{R^2}{2} r d\theta (\frac{d\theta}{2}) \approx 0$ por ser $(d\theta)^2 \approx 0$.

DESPLAZAMIENTOS

En el caso de la deformación simétrica de una placa, el pequeño desplazamiento de un punto puede descomponerse en dos componentes:

"v" en la dirección de la tangente al meridiano y "w" en la dirección de la superficie media. Considerando un elemento \overline{AB} del meridiano, el momento de su longitud, debido a los desplazamientos tangenciales "v" y " $(v + \frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi)$ " de sus extremos es igual a:

$\frac{\partial r}{\partial \phi} d\phi$ (ver figura N^o210). Debido a los desplazamientos radiales "w" y " $(w + \frac{\partial w}{\partial \phi} d\phi)$ " de los puntos "A" y "B" respectivamente, la longitud del elemento disminuye de una cantidad : $(\overline{A'B'} - \overline{AB})$, en donde $\overline{A'B'} = [R - (w + \frac{\partial w}{\partial \phi} d\phi)] d\phi = (R - w) d\phi$; y el valor de $\overline{AB} = rd\phi$; luego: $\overline{A'B'} - \overline{AB} = -wd\phi$.

Luego la variación total de longitud del elemento \overline{AB} , debido a la deformación es: $\frac{\partial r}{\partial \phi} d\phi - wd\phi$; que dividido por la longitud, inicial del elemento \overline{AB} nos da la deformación unitaria de la placa en la dirección meridiana: $\epsilon_{\phi} = \frac{1}{R} \frac{1}{d\phi} (\frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi - wd\phi)$ ejecutando la operación se tiene:

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{R} (\frac{\partial v}{\partial \phi} - w) \quad (\text{ecuación N}^{\circ}204)$$

Considerando un elemento \overline{AD} del círculo paralelo se ve que debido a los desplazamientos "v" y "w", el radio "r" del círculo (ver fig. N^o211) aumenta la cantidad: $v \cos \phi - w \sin \phi$. La circunferencia del círculo paralelo aumenta en la misma proporción que su radio, en consecuencia:

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{r} (v \cos \phi - w \sin \phi) \text{ pero } r = R \sin \phi,$$

luego: $\Sigma \rho = \frac{1}{R} (v \operatorname{ctg.} \rho - w)$ (ecuación N° 205)

Aplicando la ley de Hooke, se tiene:

$$\Sigma \rho = \frac{1}{Eh} [N_{\rho} - u N_{\theta}] \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 206)$$

$$\Sigma \rho = \frac{1}{Eh} [N_{\theta} - u N_{\rho}] \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 207)$$

en la cual "u" es el coeficiente de poisson, "E" el módulo de elasticidad y "h" el espesor de la placa.

De los cuatro últimas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - w \right) = \frac{1}{Eh} (N_{\rho} - u N_{\theta}) \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 208)$$

$$\frac{1}{R} (v \operatorname{ctg.} \rho - w) = \frac{1}{Eh} (N_{\theta} - u N_{\rho}) \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 209)$$

Debido al desplazamiento "v" a lo largo del meridiano, (ver figura N° 212) el lado superior \overline{AD} del elemento gira, con respecto a la perpendicular al plano meridiano, de la cantidad: $\frac{v}{R}$. Como resultado del desplazamiento "w" el mismo lado gira nuevamente, con respecto al mismo eje, (ver figura N° 212) de la cantidad:

$$\frac{\partial w}{R \partial \rho} .$$

En consecuencia la rotación total del lado superior del elemento es: $V = \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R \partial \phi}$ (ecuación N° 210)

Para el lado inferior del elemento consideramos que su rotación es: $V + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$. En consecuencia el cambio de curvatura del meridiano está dado por la diferencia de la variación angular de los lados superior e inferior del elemento dividido por la longitud inicial del arco, o sea: $X_{\phi} = \frac{(V + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi) - V}{R \frac{\partial \phi}$ (ecuación N° 211)

Para hallar el cambio de curvatura en el plano perpendicular al meridiano, observamos que debido a la simetría de deformación, los lados laterales del elemento ABCD, giran en su plano meridiano, de un ángulo dado por la ecuación N° 210. Como la normal al lado \overline{AB} del elemento forma un ángulo: $(\frac{\pi}{2} - \text{Cos } \phi d\theta)$ con la tangente al meridiano \overline{AD} , la rotación del lado \overline{AB} en su propio plano, tiene una componente, con respecto al eje "y" (ver figura N° 213), igual a: $V \text{Cos } \phi d\theta$; luego el cambio de curvatura se obtiene dividiendo entre la longitud inicial del arco \overline{AD} , $X_{\theta} = \frac{V \text{Cos } \phi d\theta}{r d\theta} = \frac{V \text{Cos } \phi}{r}$ o sea: $X_{\theta} = V \frac{\text{ctg } \phi}{R}$ (ecuación N° 212)

Soluciones y fórmulas de la placa esférica.

Designaremos el espesor de la placa con la letra "h", considerando esta cantidad siempre pequeña en comparación con las otras dimensiones de la placa y con sus radios de curvatura. La superficie que biseca el es

espesor de la placa (ver figura. N^o 215A) se llamará la su superficie, ~~mediata~~ con ABCD. En la figura 215B, el área de la parte rayada está dada por la expresión: $d(\text{área}) = d(\text{arco}) \times dZ$, siendo: $d(\text{arco}) = (R-Z) d\alpha$; luego: $d(\text{área}) = (R-Z) d\alpha dZ$.

Sea σ el esfuerzo normal del lado AD, luego: $dF = \sigma d(A) = \sigma (R-Z) d\alpha dZ$; el momento de esta fuerza dF respecto al lado medio AD es: $dM = Z dF = Z \sigma (R-Z) d\alpha dZ$ el momento flector por unidad de longitud sería: $dM_{\sigma} = \frac{\partial M}{\partial \text{arco AD}}$ siendo arco AD = $R d\alpha$; luego:

$$dM_{\sigma} = \frac{dM}{R d\alpha} = \sigma Z \left(1 - \frac{Z}{R}\right) dZ \text{ de donde :}$$

$$M_{\sigma} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma Z \left(1 - \frac{Z}{R}\right) dZ \quad (\text{igualdad N}^{\circ} 212A)$$

procediendo en igual forma para el caso del lado AB, se tiene:

$$M_{\sigma} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma Z \left(1 - \frac{Z}{R}\right) dZ \quad (\text{igualdad N}^{\circ} 212B)$$

Al considerar la flexión de placas esféricas, suponemos que los elementos lineales normales a la superficie media de la placa, tales como \overline{mn} y $\overline{M'N'}$ (ver figura N^o 215A), permanece: recta y normal a la misma después de la deformación. Comencemos con un caso simple en el durante la flexión, las caras laterales del elemento $mnm'n'$ giran solamente respecto de las rectas de intersección con la superficie media. Si R_{σ} y R_{θ} son los valores de los radios de curvatura después de la deformación, y si además de la rotación, los lados laterales del elemento se desplazan paralelamente a ellas mismas, debido al a-

largamiento de la superficie media; y si los alargamientos específicos de la superficie media en las direcciones "x" e "y" se designan por " ξ ", y " ξ_2 ", respectivamente, el alargamiento " ξ_ϕ " de la lámina considerada como se ve en la figura N^o 215D, es: $\xi_\phi = \frac{L_2 - L_1}{L_1}$ en donde: $L_1 = (R-Z)d\phi$; $L_2 = (R\phi - Z)\Delta$, siendo:

$$d\phi = \frac{ds}{R} \text{ y } \Delta = \frac{d_s + \xi_2 d_s}{R\phi} ; \text{ luego: } L_1 = d_s \left(1 - \frac{Z}{R}\right) \text{ y}$$

$L_2 = d_s(1 + \xi_2) \left(1 - \frac{Z}{R\phi}\right)$; sustituyendo en el valor de ξ_ϕ ;
Obtenemos: $\xi_\phi = \frac{\xi_2}{1 - Z/R} - \frac{Z}{1 - Z/R} \left[\frac{1}{(1 - \xi_2)R\phi} - \frac{1}{R} \right]$

Una expresión similar puede obtenerse para el alargamiento ξ_θ : $\xi_\theta = \frac{1 - \xi_1}{1 - Z/R} - \frac{Z}{1 - Z/R} \left[\frac{1}{(1 - \xi_1)R\theta} - \frac{1}{R} \right]$

Una expresión "h" de la placa siempre se supondrá pequeño comparado con los radios de curvatura. En este caso las cantidades Z/R pueden despreciarse en comparación con la unidad, así como los efectos de los alargamientos ξ_1 y ξ_2 sobre la curvatura. En éste caso el procedimiento es justificado si la altura de la sección transversal "h", es pequeña en comparación con el radio "R", digamos h/R 0.1 y también si los desplazamientos de la placa son pequeños comparados con el espesor "h".

Luego:

$$\Sigma_\phi = -Z \left(\frac{1}{R\phi} - \frac{1}{R} \right) = -Z\xi_\phi$$

$$\Sigma_\theta = -Z \left(\frac{1}{R\theta} - \frac{1}{R} \right) = -Z\xi_\theta$$

en las que ξ_ϕ y ξ_θ designan los cambios de curvatura.

Empleando estas expresiones para las componentes de la deformación de una lámina y suponiendo que entre ellas no hay tensiones normales o sea $\sigma_z = 0$, se obtienen las siguientes expresiones para los componen-

tes de la tensión: (aplicando la ley de Hooke)

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{\sigma_{\phi}}{E} - u \frac{\sigma_{\theta}}{E} ; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E} - u \frac{\sigma_{\phi}}{E}$$

de donde: $\sigma_{\phi} = - \frac{E}{1-u^2} Z (X_{\phi} + u X_{\theta})$

$$\sigma_{\theta} = - \frac{E}{1-u^2} Z (X_{\theta} + u X_{\phi})$$

Reemplazando las dos últimas expresiones en las ecuaciones 212 A y 212 B, se tiene:

$$M_{\phi} = - \frac{E h^3}{12(1-u^2)} (X_{\phi} + u X_{\theta})$$

$$M_{\theta} = - \frac{E h^3}{12(1-u^2)} (X_{\theta} + u X_{\phi})$$

Sea: $D = \frac{E h^3}{12(1-u^2)}$; se tiene:

$$M_{\phi} = - D (X_{\phi} + u X_{\theta}) \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 212 C)$$

$$M_{\theta} = - D (X_{\theta} + u X_{\phi}) \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 212 D)$$

Reemplazando las ecuaciones 211 y 212, en las ecuaciones 212 C y 212 D, se tiene:

$$M_{\phi} = - D \left[\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \phi} + u \frac{V}{R} \operatorname{ctg} \phi \right] \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 213)$$

$$M_{\theta} = - D \left[\frac{u}{R} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{V}{R} \operatorname{ctg} \phi \right] \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 214)$$

en donde "D" es la rigidez a la flexión de una placa, siendo su valor:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-u^2)} \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 215)$$

Considerando el equilibrio de la parte de la placa arriba del círculo paralelo determinado por el ángulo " ϕ " y suponiendo que no hay carga aplicada, en la placa, (ver figura N° 214), se tiene:

$$2 \phi r N_{\phi} \text{ Sen } \phi + 2 \phi r Q_{\phi} \text{ Cos } \phi = 0 \text{ de donde:}$$

$$N_{\phi} = -Q_{\phi} \text{ ctg } \phi$$

(ecuación N° 216)

Sustituyendo en la ecuación N° 202, hallamos para

$$Z = 0, \text{ lo siguiente: } N_{\theta} = - \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \phi \text{ (ecuación N° 217)}$$

restando miembro a miembro la ecuación 208 menos la ecuación 209, se tiene: $\frac{\partial v}{\partial \phi} - v \text{ ctg } \phi = \frac{R}{Eh} (1+u) (N_{\phi} - N_{\theta})$

(ecuación N° 218)

Suponiendo que el espesor "h" de la placa es constante, entonces la derivación de la ecuación 209, nos da:

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} \text{ ctg } \phi - \frac{v}{\text{Sen } \phi} - \frac{\partial w}{\partial \phi} = \frac{R}{Eh} \frac{\partial (N_{\theta} - u N_{\phi})}{\partial \phi}$$

(ecuación N° 219)

Eliminando $(\frac{\partial v}{\partial \phi})$ en las ecuaciones 218 y 219, se tiene:

$$v + \frac{\partial w}{\partial \phi} = \frac{\text{ctg } \phi}{E h} R (1+u) (N_{\phi} - N_{\theta}) - \frac{R}{Eh} \frac{\partial (N_{\theta} - u N_{\phi})}{\partial \phi}$$

De la ecuación 210 hallamos que: $V + \frac{\partial w}{\partial \phi} = V R$, luego:

$$V = \frac{\text{ctg } \phi}{E h} (1+u) (N_{\phi} - N_{\theta}) - \frac{1}{Eh} \frac{\partial (N_{\theta} - u N_{\phi})}{\partial \phi}$$

(ecuación N° 220)

Sustituyendo las ecuaciones 216 y 217 en las ecuaciones

220, se tiene: $\frac{\partial^2 Q\phi}{\partial \phi^2} + \text{ctg } \phi \frac{\partial Q\phi}{\partial \phi} - (\text{ctg}^2 \phi - u)$

$Q\phi = E h V$ (ecuación N° 221)

La 2ª ecuación que relaciones $Q\phi$ y V se obtiene sustituyendo en la ecuación 203, las expresiones 213 y 214 de M_ϕ y M_ϕ , luego: $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \text{ctg } \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} - (\text{ctg}^2 \phi + u)V = - \frac{R^2 Q\phi}{D}$ (ecuación N° 222).

Introduciendo la notación:

$$L(m) = \frac{\partial^2(m)}{\partial \phi^2} + \text{ctg } \phi \frac{\partial(m)}{\partial \phi} - \text{ctg}^2 \phi (m)$$

(relación N° 222 A).

Las ecuaciones 221 y 222, pueden escribirse en la siguiente forma:

$$L(Q\phi) + u Q\phi = E h V \quad (\text{ecuación N° 222 B})$$

$$L(V) - u V = - \frac{R^2 Q\phi}{D} \quad (\text{ecuación N° 222 C})$$

Despejando el valor de "V" de la ecuación 222B, se tiene:

$$V = \frac{1}{E h} [L(Q\phi) + u Q\phi]$$

reemplazando 222c, se tiene:

ne:

$$L \left[\frac{1}{E h} (L(Q\phi) + u Q\phi) \right] - \frac{u}{E h} [L(Q\phi) + u Q\phi] = - \frac{R^2 Q\phi}{D}$$

Ejecutando la operación:

$$\frac{1}{E h} L [L(Q\phi)] + \frac{u}{E h} L(Q\phi) - \frac{u}{E h} L(Q\phi) - \frac{u}{E h} Q\phi = - \frac{R^2 Q\phi}{D}$$

Simplificando: $L [L (Q_{\phi})] - u^2 Q_{\phi} = - \frac{E h R^2 Q_{\phi}}{D}$

$$L [L (Q_{\phi})] + \left[\frac{E h R^2}{D} - u^2 \right] Q_{\phi} = 0$$

Se sabe que $D = \frac{E h^3}{12(1-u^2)}$; introduciendo la notación:

$$m^2 = \sqrt{\frac{3 R^2 (1-u^2)}{h^2} - \frac{u^2}{4}}; \text{ se tiene:}$$

$$L [L (Q_{\phi})] + 4 m^4 Q_{\phi} = 0 \text{ (ecuación N}^\circ \text{ 222 D)}$$

esta ecuación se puede escribir en la siguiente forma:

$$L [L (Q_{\phi}) + 2 i m^2 Q_{\phi}] - 2 i m^2 [L (Q_{\phi}) + 2 i m^2 Q_{\phi}] = 0$$

en donde: $i = \sqrt{-1}$ o sea que $i^2 = -1$; luego se tiene:

$$[L - 2 i m^2] [L (Q_{\phi}) \pm 2 i m^2 Q_{\phi}] = 0$$

de donde: $L (Q_{\phi}) \pm 2 i m^2 Q_{\phi} = 0$ (ecuación N^o 222 E)

Reemplazando la notación 222 A en la ecuación 222 E, se tiene:

$$\frac{\partial^2 Q_{\phi}}{\partial \phi^2} + \operatorname{ctg} \phi \frac{\partial Q_{\phi}}{\partial \phi} - \operatorname{ctg}^2 \phi Q_{\phi} + 2 i m^2 Q_{\phi} = 0$$

(ecuación N^o 222 F)

Introduciendo las notaciones propuestas por E. Melssrer

$$X = \operatorname{Sen}^2 \phi \quad \gamma = 2 \quad B = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 8 i m^2}}{4}$$

(Relaciones N^o 222 G)

$$Z = \frac{Q_{\phi}}{\operatorname{Sen} \phi} \quad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 8 i m^2}}{4}$$

La ecuación 222 F, se escribe:

$$X(X-1) \frac{d^2 Z}{dX^2} + (\alpha + B + 1) X - \gamma \frac{dZ}{dX} + \alpha B Z = 0$$

(ecuación N° 222 H)

Esta ecuación diferencial pertenece a un tipo de ecuaciones diferenciales de segundo orden y que en honor de Karl Friedrich Gauss, se le conoce como "Ecuación diferencial de Gauss".

Una solución de la ecuación 222 H, puede tomarse en forma de series de potencias: $Z_1 = A_0 + A_1 X^2 + A_3 X^4 + \dots$ (ecuación N° 222 i).

Sustituyendo esta serie en la ecuación 222 H, e igualando a cero los coeficientes para cada potencia de "X", obtenemos las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$A_1 = \frac{\alpha(\beta)}{1\gamma(\gamma)} A_0 ; \quad A_2 = \frac{(\alpha+1)\alpha(\beta+1)}{1(2)(\gamma+1)} A_1$$

$$A_n = A_{n-1} \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}$$

Con estas relaciones la serie 222 i se escribe:

$$Z_1 = A_0 \left[1 + \frac{\alpha B}{1(\gamma)} X + \frac{\alpha(\alpha+1)B(B+1)}{1(2)\gamma(\gamma+1)} X^2 + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)B(B+1)(B+2)}{1(2)(3)(\gamma+1)(\gamma+2)} X^3 + \dots \right]$$

(igualdad N° 222 j)

Esta es la llamada "serie hipergeométrica". Es convergente para todos los valores de "X" menores que la unidad.

La deducción de la segunda integral de la ecuación 222 h, es más complicada, pudiendo escribirse en la siguiente forma:

$$Z_2 = Z_1 L_n X + \frac{1}{X} f(x) \quad (\text{igualdad } N^o \text{ 222 K})$$

En la que $f(X)$ es una serie de potencias, convergente para $X < 1$. Esta 2^a solución se hace infinita para $X = 0$, es decir, en la **cúspide** no puede tomarse en cuenta en aquellos casos en que la esfera no se encuentra agujereada en su cúspide. Si limitamos el estudio a estos últimos casos, necesitamos considerar solamente la solución (222 j).

Dividiendo la serie 222 j en sus partes real e imaginarias obtenemos: $Z_1 = S_1 + i S_2$, en la que S_1 y S_2 son series de potencias, convergentes cuando $X < 1$. La solución correspondiente a la ecuación 222 E, es: $Q_{\phi_1} = \text{Sen } \phi Z_1 = I_1 + i I_2$ (ecuación 222 L) en la que I_1 e I_2 son dos series que se obtienen fácilmente de las S_1 y S_2 .

La integral necesaria de la 2^a de las ecuaciones 222 E puede representarse por las mismas series I_1 e I_2 . Así para el caso de una placa esférica sin agujero en la cúspide, la solución general de la ecuación diferencial 222 D, que es de cuarto orden, puede representarse en la forma: $Q_{\phi} = A I_1 + B I_2$ (ecuación 222 M) en la que "A" y "B" son constantes a determinar de las dos condiciones a lo largo del borde de la placa

esférica.

Teniendo en cuenta la expresión 222 M de Q_{ϕ} podemos fácilmente hallar la 2ª incógnita V. Comenzamos sustituyendo la expresión 222 l en la 1ª de las ecuaciones 222 E, y se tiene:

$$L (I_1 + i I_2) = - 2 i m^2 (I_1 + i I_2)$$

en consecuencia: $L (I_1) = 2 m^2 I_2$ (ecuaciones 222N)

$$L (I_2) = - 2 m^2 I_1$$

sustituyendo la expresión 222 M en la ecuación 222 B y aplicando las expresiones 222 N, obtenemos, luego:

$$E h R V = R L (Q_{\phi}) + u Q_{\phi} = (A u - 2 B A m^2) I_1 + \\ + (2 A R m^2 + B u) I_2 \dots \dots \dots$$

de la que se ve que la segunda incógnita "V" también está representada por las series I_1 e I_2 .

Teniendo las expresiones de Q_{ϕ} y V, podemos obtener todas las fuerzas, momentos, desplazamientos y giro.

La facilidad con que pueden analizarse y realizarse las aplicaciones prácticas de este análisis depende de la rigidez de la convergencia de las series I_1 e I_2 . Esta convergencia a su vez depende principalmente del valor de:

$$m = \sqrt[4]{ \frac{3R^2}{h^2} (1 - u^2) - \frac{u^2}{4} }, \text{ si } u^2 \text{ se desprecia en comparación con la unidad se escribe: } m \approx \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{R}{h}}$$

Los cálculos hechos por L. Bolle indican que para $m < 10$ la convergencia de las series es satisfactoria y todos los valores necesarios pueden hallarse, sin mayores dificultades, para distintas condiciones de borde.

Del estudio anterior de la flexión de placas cilíndricas, sabemos que las tensiones por flexión, producidas por fuerzas uniformemente distribuidas a lo largo del borde, disminuyen rápidamente al aumentar la distancia del mismo. Una condición similar existe también en el caso de placas esféricas delgadas.

Según J. W. Geckeler, propone una solución aproximada para el análisis de las placas esféricas simplificando una ecuación diferencial de tres variables con varios términos a sólo dos términos.

Se considera el término que contiene el orden de la ecuación diferencial y el término que contiene la variable que no aparece como derivada en otro término, es decir :

Aplicando la proposición de Geckeler en las ecuaciones

221 y 222, se tiene: $\frac{\partial^2 Q_\phi}{\partial \phi^2} = E h V$ (ecuación 223)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = - \frac{R^2}{D} Q_\phi \quad (\text{ecuación 224})$$

Eliminando V de estas ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{d^4 Q_\phi}{d\phi^4} + R^2 \frac{Eh}{D} Q_\phi = 0 \quad (\text{ecuación 224 A})$$

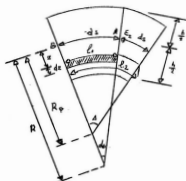


Fig. N°215D.-



Fig. N°216.- Para las fuerzas y los momentos, se consideran positivos los sentidos que aparecen en la figura N° 204.



Fig. N°217.-

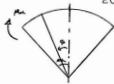


Fig. N°218.-

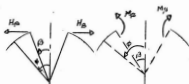


Fig. N°219.- Fig. N°220.-

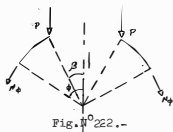


Fig. N°222.-



Fig. N°221

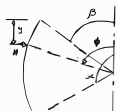


Fig. N°225

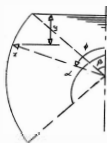


Fig. N°223.-

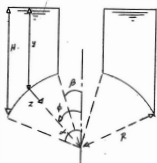


Fig. N°224.-

se sabe que: $D = \frac{E h^3}{12(1-u^2)}$; introduciendo la notación

$$\lambda^4 = \frac{R^2 E h}{4 D} = 3 (1-u^2) \left(\frac{R^2}{h}\right) \text{ (Relación 224 B)}$$

se tiene: $\frac{d^4 Q_\phi}{d \phi^4} + 4 \lambda^4 Q_\phi = 0$ (ecuación 225)

La solución general de ésta ecuación es:

$$Q_\phi = C_1 e^{\lambda \phi} \text{Cos } \lambda \phi + C_2 e^{\lambda \phi} \text{Sen } \lambda \phi + C_3 e^{-\lambda \phi} \text{Cos } \lambda \phi + C_4 e^{-\lambda \phi} \text{Sen } \lambda \phi \text{ (ecuación 226)}$$

Aplicando la proposición de Geckeler en las ecuaciones 213 y 214, y reemplazando en ellas a la derivada de la ecuación 223, se tiene: $M_\phi = -\frac{R}{4\lambda^4} \frac{d^3 Q_\phi}{d \phi^3}$

(ecuación 227)

$$M_\theta = u M_\phi \text{ (ecuación 228)}$$

el desplazamiento en los planos de los círculos paralelos está dado por el incremento del radio "r" el círculo paralelo, luego empleando la ecuación 207, se tiene:

$$\mathcal{S} = r \epsilon_\theta = \frac{r (N_\theta - u N_\phi)}{E h} \text{ (ecuación 228 A)}$$

por ser $r = R \text{ Sen } \phi$ y sustituyendo las ecuaciones 216 y

$$217, \text{ se tiene: } \mathcal{S} = \frac{R \text{ Sen } \phi}{E h} \left[\frac{d Q_\phi}{d \phi} - u \text{ ctg } \phi Q_\phi \right]$$

Aplicando la proposición de Geckeler, se tiene:

$$\int_0^{\phi} \frac{R \operatorname{Sen} \phi}{E h} \frac{d Q_{\phi}}{d \phi} \quad (\text{ecuación 229})$$

Con ayuda de las fórmulas 216, 217, 223 y del 226 al 229 podemos resolver con facilidad varios casos particulares:

BORDE INFERIOR

En este caso no existe fuerza exterior distribuida sobre la superficie de la placa. Como las fuerzas aplicadas en el extremo inferior $\phi = \alpha$ producen una flexión local que desaparece gradualmente y en forma rápida cuando el ángulo ϕ disminuye, deducimos que los dos últimos términos de la ecuación 226 deben desaparecer en consecuencia, : $C_3 = C_4 = 0$ y obtenemos: $Q_{\phi} = C_1 e^{\lambda \phi} \operatorname{Cos} \lambda \phi + C_2 e^{\lambda \phi} \operatorname{Sen} \lambda \phi$ (ecuación 230)

Las dos constantes C_1 y C_2 pueden ahora determinarse con las condiciones en el borde cargado. De la ecuación 216 y 230 se obtiene:

$$N_{\phi} = - \operatorname{ctg} \phi \left[C_1 e^{\lambda \phi} \operatorname{Cos} \lambda \phi + C_2 e^{\lambda \phi} \operatorname{Sen} \lambda \phi \right]$$

(ecuación 231)

De la ecuación 217 y de la 1^a derivada de la ecuación 230, se obtiene:

$$N_{\phi} = - \lambda e^{\lambda \phi} C_1 (\operatorname{Cos} \lambda \phi - \operatorname{Sen} \lambda \phi) + C_2 (\operatorname{Cos} \lambda \phi + \operatorname{Sen} \lambda \phi) \quad (\text{ecuación 232})$$

De la ecuación 223 y de la 2ª derivada de la ecuación 230, se obtiene:

$$v = \frac{2\lambda^2}{Eh} e^{\lambda\phi} \left[-C_1 \operatorname{Sen} \lambda\phi + C_2 \operatorname{Cos} \lambda\phi \right]$$

(ecuación 233)

De las ecuaciones 227 y 228, y reemplazando en ellas la 3ª derivada de la ecuación 230, se obtiene:

$$M_\phi = - \frac{R}{2\lambda} e^{\lambda\phi} \left[-C_1 (\operatorname{Cos} \lambda\phi + \operatorname{Sen} \lambda\phi) + C_2 (\operatorname{Cos} \lambda\phi - \operatorname{Sen} \lambda\phi) \right] \quad (\text{ecuación 234})$$

$$M_\theta = \nu M_\phi \quad (\text{ecuación 235})$$

De la ecuación 229 y la 1ª derivada de la ecuación 230, se obtiene:

$$S_\phi = - \frac{R \lambda \operatorname{Sen} \phi}{Eh} e^{\lambda\phi} \left[C_1 (\operatorname{Cos} \lambda\phi - \operatorname{Sen} \lambda\phi) + C_2 (\operatorname{Cos} \lambda\phi + \operatorname{Sen} \lambda\phi) \right] \quad (\text{ecuación 236})$$

(a) Efectos producidos por una fuerza horizontal por unidad de longitud aplicada en el borde inferior.

Cuando $\phi = \alpha$ las condiciones en el borde son:

$$(\text{ver figura N}^\circ 217) \quad M_\phi = \alpha = 0; \quad N_\phi = \alpha = H \propto \operatorname{Cos} \alpha$$

Reemplazando en las ecuaciones 231 y 234, se obtienen

los valores de las constantes: $C_1 = -H_\alpha \operatorname{Sen} \alpha e^{\lambda-\alpha} (\operatorname{Cos} \lambda\alpha - \operatorname{Sen} \lambda\alpha)$.

$$C_2 = -H_\alpha \operatorname{Sen} \alpha e^{-\lambda\alpha} (\operatorname{Cos} \lambda\alpha + \operatorname{Sen} \lambda\alpha)$$

Hallar los valores de las fuerzas y los momentos, reemplazamos los valores de las constantes C_1 y C_2 en las ecuaciones del 230 al 236, :

$$N_{\phi} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{Sen} \alpha e^{-\lambda(\alpha-\phi)} [\operatorname{Cos} \lambda(\alpha-\phi) - \operatorname{Sen} \lambda(\alpha-\phi)] H \alpha$$

$$Q_{\phi} = -\operatorname{Sen} \alpha e^{-\lambda(\alpha-\phi)} [\operatorname{Cos} \lambda(\alpha-\phi) - \operatorname{Sen} \lambda(\alpha-\phi)] H \alpha$$

$$N_{\Theta} = 2 \lambda \operatorname{Sen} \alpha e^{-\lambda(\alpha-\phi)} \operatorname{Cos} \lambda(\alpha-\phi) H \alpha$$

(ecuaciones 237)

$$M_{\phi} = \frac{R \operatorname{Sen} \alpha}{\lambda} e^{-\lambda(\alpha-\phi)} \operatorname{Sen} \lambda(\alpha-\phi) H \alpha$$

$$M_{\Theta} = u M_{\phi}$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior, se obtiene cuando $\phi = \alpha$: $\delta = \frac{2 R \lambda \operatorname{Sen}^2 \alpha}{E h} H \alpha$

$E h$

$$V = -\frac{2 \lambda^2 \operatorname{Sen} \alpha}{E h} H \alpha \quad (\text{ecuaciones 238})$$

(b) Efectos producidos por un momento vertical por unidad de longitud aplicada en el borde inferior.

Cuando $\phi = \alpha$ las condiciones en el borde son:

(ver figura N^o 218) $M_{\phi} = \alpha = M_{\alpha}$; $N_{\phi} = 0$, reemplazando en las ecuaciones 231 y 234, se tiene: $C_1 =$

$$\frac{2 \lambda e^{-\lambda \alpha} \operatorname{Sen} \lambda \alpha}{R} M_{\alpha} \quad ; \quad C_2 = -\frac{2 \lambda e^{-\lambda \alpha} \operatorname{Cos} \lambda \alpha}{R} M_{\alpha}$$

Para hallar los valores de las fuerzas y los momentos, reemplazamos los valores de las constantes C_1 y C_2 en las ecuaciones del 230 al 236

$$N_{\phi} = -\frac{2 \lambda}{R} \operatorname{ctg} \phi e^{-\lambda(\alpha-\phi)} M_{\alpha}$$

$$\text{Sen } \lambda (\alpha - \phi) \quad M_{\alpha}$$

$$Q_{\phi} = - \text{tg } \phi \quad N_{\phi}$$

$$N_{\theta} = \frac{2\lambda^2}{R} e^{-\lambda(\alpha - \phi)} [\text{Cos } \lambda(\alpha - \phi) - \text{Sen } \lambda(\alpha - \phi)] M_{\alpha}$$

(ecuaciones 239)

$$M_{\phi} = e^{-\lambda(\alpha - \phi)} [\text{Cos } \lambda(\alpha - \phi) + \text{Sen } \lambda(\alpha - \phi)] M_{\alpha}$$

$$M_{\theta} = u \quad M_{\phi}$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior, se

obtienen cuando $\phi = \alpha$,
$$\int = \frac{2\lambda^2 \text{Sen } \alpha}{E h} M_{\alpha}$$

$$v = - \frac{4\lambda^3}{E h R} \alpha$$

BORDE SUPERIOR

En este caso no existe fuerza exterior distribuida sobre la superficie de la placa. Como las fuerzas aplicadas en el extremo superior $\phi = \beta$ producen una flexión local que desaparece gradualmente y en forma rápida cuando el ángulo " ϕ " aumenta, deducimos que los 2 primeros términos de la ecuación 226 deben desaparecer, en consecuencia: $C_1 = C_2 = 0$ y obtenemos:

$$Q_{\phi} = C_3 e^{-\lambda \phi} \text{Cos } \lambda \phi + C_4 e^{\lambda \phi} \text{Sen } \lambda \phi \quad (\text{ecuación 241})$$

Las dos constantes C_3 y C_4 pueden determinarse ahora con las condiciones en el borde cargado: De la ecuación 216

y 241, se tiene:
$$N_{\phi} = - \text{ctg } \phi e^{-\lambda \phi} [C_3 \text{Cos } \lambda \phi + C_4 \text{Sen } \lambda \phi]$$

(ecuación 242)

De la ecuación 217 y reemplazando en ella la 1ª derivada de la ecuación 241 se tiene:

$$v = \frac{2\lambda^2}{Eh} e^{-\lambda\phi} \left[C_3 \text{Sen}\lambda\phi - C_4 \text{Cos}\lambda\phi \right]$$

(ecuación 244)

De las ecuaciones 227 y 228, y reemplazando en ellas la 3ª derivada de la ecuación 241, se tiene:

$$M_\phi = - \frac{R}{2\lambda} e^{-\lambda\phi} \left[C_3 (\text{Cos}\lambda\phi - \text{Sen}\lambda\phi) + C_4 \mathcal{E} (\text{Cos}\lambda\phi + \text{Sen}\lambda\phi) \right] \quad (\text{ecuación 245})$$

$$M_\Theta = u M_\phi \quad (\text{ecuación 246})$$

De la ecuación 229 y reemplazando en ella la 1ª derivada de la ecuación 241, se tiene:

$$= \frac{R \text{Sen}\phi\lambda}{Eh} e^{-\lambda\phi} \left[C_3 (\text{Cos}\lambda\phi + \text{Sen}\lambda\phi) - C_4 (\text{Cos}\lambda\phi - \text{Sen}\lambda\phi) \right] \quad (\text{ecuación 247})$$

(a) Efectos producidos por una fuerza horizontal por unidad de longitud aplicada en el borde superior.

Cuando $\phi = B$ las condiciones en el borde son: (ver figura N° 219) $M_{\phi=B} = 0$; $N_{\phi=B} = -H_B \text{Cos} B$; reemplazando en las ecuaciones 242 y 245, se tiene:

$$C_3 = H_B \text{Sen} B e^{\lambda B} \left[\text{Cos}\lambda B + \text{Sen}\lambda B \right] \quad C_4 = 1 - H_B \text{Sen} B e^{\lambda B} \left[\text{Cos}\lambda B - \text{Sen}\lambda B \right]$$

Para hallar los valores de las fuerzas y los momentos, reemplazamos los valores de las constantes C_3 y C_4 en las

ecuaciones del 241 al, 247, :

$$N_{\phi} = - \operatorname{ctg} \phi \operatorname{Sen} B e^{-\lambda(\phi - B)} \left[\operatorname{Cos} \lambda(\phi - B) - \operatorname{Sen} \lambda(\phi - B) \frac{H_B}{R} \right]$$

$$Q_{\phi} = - \operatorname{tg} \phi N_{\phi}$$

$$N_{\theta} = 2\lambda \operatorname{Sen} B e^{-\lambda(\phi - B)} \operatorname{Cos} \lambda(\phi - B) H_B$$

(ecuaciones 248)

$$M_{\phi} = \frac{R \operatorname{Sen} B}{\lambda} e^{-\lambda(\phi - B)} \operatorname{Sen} \lambda(\phi - B) H_B$$

$$M_{\theta} = u M_{\phi}$$

El desplazamiento y el giro del borde superior se obtie

nen cuando $\phi = B = \frac{2 R \lambda}{E h} \operatorname{Sen}^2 B H_B$

(ecuaciones 249)

$$V = \frac{2\lambda^2 \operatorname{Sen} B}{E h} H_B$$

(b) Efectos producidos por un momento vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior.

Cuando $\phi = B$ las condiciones en el borde son:

(ver figura N^o 220) $M_{\phi = B} = M_B$; $N_{\phi = B} = 0$, reemplazando en las ecuaciones 242 y 245 se obtienen los valores de las constantes C_3 y C_4 .

$$C_3 = \frac{2\lambda}{R} e^{\lambda B} \operatorname{Sen} B M_B ; C_4 = - \frac{2\lambda}{R} e^{\lambda B} \operatorname{Cos} \lambda B M_B$$

Para hallar los valores de las fuerzas y los momentos, reemplazamos los valores de las constantes halladas en las ecuaciones del 241 al 247 .

$$N_{\phi} = \frac{2\lambda}{R} \operatorname{ctg} \phi \cdot e^{-\lambda(\phi - B)} \operatorname{Sen} \lambda(\phi - B) M_B$$

$$Q_{\phi} = -\operatorname{tg} \phi N_{\phi}$$

$$N_{\theta} = \frac{2\lambda^2}{R} e^{-\lambda(\phi - B)} \left[\operatorname{Cos} \lambda(\phi - B) - \operatorname{Sen} \lambda(\phi - B) \right] M_B$$

(ecuaciones 250)

$$M_{\phi} = e^{-\lambda(\phi - B)} \operatorname{Cos} \lambda(\phi - B) + \operatorname{Sen} \lambda(\phi - B) M_B$$

$$M_{\theta} = u M_{\phi}$$

El desplazamiento y el giro del borde superior se obtie

$$\text{nen cuando } \phi = B, : \delta = \frac{2\lambda^2}{E h} \operatorname{Sen} B M_B$$

$$V = \frac{4\lambda^4}{E h R} M_B \quad (\text{ecuaciones 251})$$

BORDES LIBRES RADIALES

Son los bordes que siguen la dirección del radio de la esfera (ver figura N° 22 λ). En este caso consideramos la deformación de la placa esférica sin flexión, como una membrana en la cual no se produce el esfuerzo cortante por sus cargas aplicadas simétricamente, en donde sólo se producen esfuerzos normales (N_{ϕ} , N_{θ}), los desplazamientos y el giro.

El desplazamiento horizontal en los planos de los círculos paralelos, lo hallamos según la ecuación

$$228 A, : \int = \frac{R \operatorname{Sen} \phi}{E h} (N_{\theta} - u N_{\phi}) \quad (\text{ecuación 252})$$

E h

El giro o rotación de una tangente del meridiano, lo obtenemos de la ecuación 220, : $V = (1+u) \frac{ctg \phi}{Eh}$

$$(N_{\phi} - N_{\theta}) - \frac{1}{Eh} \frac{d(N_{\theta} - u N_{\phi})}{d\phi} \quad (\text{ecuación 253})$$

Las ecuaciones de equilibrio las obtenemos de las ecuaciones 201 y 202,

$$\frac{(N_{\phi} r)}{\partial \phi} - N_{\theta} R \cos \phi + R r Y = 0 \quad (\text{ecuación 254})$$

$$N_{\phi} r + N_{\theta} R \sin \phi + Z R r = 0 \quad (\text{ecuación 255})$$

(a) Efectos producidos por una fuerza vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior.

Considerando el equilibrio de la parte de la placa arriba del circuito paralelo determinado por el ángulo " ϕ " (ver figura N° 222), se tiene:

$$2 \tilde{r} R \sin \phi - N_{\phi} \sin \phi = - 2 \tilde{r} R \sin B P, \text{ de donde: } N_{\phi} = - \frac{\sin B}{\sin^2 \phi} P \quad (\text{ecuación 256}),$$

reemplazando en la ecuación 255 en la cual $Z = 0$, por no existir carga distribuida en toda la superficie de la placa; se tiene:

$$N_{\theta} = \frac{\sin B}{\sin^2 \phi} P \quad (\text{ecuación 257})$$

reemplazando la ecuaciones 256 y 257 en las ecuaciones 252 y 253 se tiene: $V = 0$ (ecuación 258)

$$f = (1-u) \frac{R}{Eh} \frac{\sin B}{\sin \phi} P \quad (\text{ecuación 259})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, se obtiene cuando $\phi = B$, $\therefore \int = (1+u) \frac{R}{Eh} P$; $V = 0$,

(ecuaciones 260)

La fuerza al desplazamiento y el giro en el borde inferior, se obtiene cuando $\phi = B$, $\therefore N_{\phi} = - \frac{\text{Sen } B}{\text{Sen}^2 \phi}$

$$\int = (1+u) \frac{R}{Eh} \frac{\text{Sen } B}{\text{Sen}^2 \phi} P$$

(ecuaciones 261)

$$V = 0$$

(b) Efectos producidos por el peso propio por unidad de área.

Sea "q" el peso por unidad de área, y considerando el equilibrio de la parte de la placa arriba del círculo paralelo determinado por el ángulo ϕ , (ver figura N° 221); se tiene: Área de una cúpula = $2\pi R^2 (1 - \text{Cos } \phi)$
 (1-Cos ϕ) Área de la parte agujereada = $2\pi R^2 (1 - \text{Cos } B)$

Área de la placa esférica

Determinada por el ángulo ϕ = Área de una cúpula - Área de la zona agujereada Área = $2\pi R^2 (\text{Cos } B - \text{Cos } \phi)$

(ecuación N° 262)

Luego: $2\pi R \text{ Sen } \phi N_{\phi} \text{ Sen } \phi = - 2\pi R^2 (\text{Cos } B - \text{Cos } \phi) q$

$$N_{\phi} = - R q \frac{(\text{Cos } B - \text{Cos } \phi)}{\text{Sen}^2 \phi} \quad (\text{ecuación N}^{\circ} 263)$$

Reemplazando en la ecuación 255 en la cual $Z = q \text{ Cos } \phi$,

se tiene: $N_{\phi} = R q \left[\frac{\text{Cos } B - \text{Cos } \phi}{\text{Sen}^2 \phi} - \text{Cos } \phi \right]$ (ecuación 264)

Reemplazando las ecuaciones 263 y 264 en las ecuaciones

$$252 \text{ y } 253, \text{ se tiene: } \mathcal{F} = \frac{R^2 q}{E h} \left[(1+u) \frac{(\cos B - \cos \phi)}{\text{Sen } \phi} - \cos \phi \text{ Sen } \phi \right] \quad (\text{ecuación } 265)$$

$$V = - \frac{R q}{E h} (2 + u) \text{ Sen } \phi \quad (\text{ecuación } 266)$$

El desplazamiento y el giro en el bord superior se obtiene cuando $\phi = B$ $= - \frac{R^2 q}{E h} \text{ Sen } B$; $V = - (2+u)$

$$\frac{R q}{E h} \text{ Sen } B; \text{ (ecuaciones } 267)$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior, se obtiene cuando $\phi = \alpha$; $N_{\phi} = - R q$

$$\frac{(\cos B - \cos \alpha)}{\text{Sen}^2 \alpha}; \text{ (ecuaciones } 268)$$

$$\mathcal{F} = \frac{R^2 q}{E h} \left[(1+u) \frac{(\cos B - \cos \alpha)}{\text{Sen } \alpha} - \cos \alpha \text{ Sen } \alpha \right];$$

$$V = - (2 + u) \frac{R q}{E h} \text{ Sen } \alpha$$

(c) Efectos producidos por la presión hidrostática aplicada en el lado concavo.

Sea γ = Peso específico del líquido

Z = Presión del agua

Considerando el equilibrio de la parte de la placa arriba del círculo paralelo determinado por el ángulo ϕ (ver figura N^o 223), y se tiene:

Area de una cúpula = $2 \pi R^2 (1 - \cos \phi)$

$dA = 2 \pi R^2 \sin \phi d\phi$ (ecuación 269)

La presión del agua está dado por: $Z = -\gamma y$, en donde:

$y = R (\cos B - \cos \phi)$, luego: $Z = -R \gamma' (\cos B - \cos \phi)$
(ecuación 270)

La ecuación de equilibrio será: $2 \pi R \sin \phi N \phi \sin \phi +$

$$\int_B^\phi Z \cos \phi dA = 0$$

$$\text{de donde: } N_\phi = \frac{R^2 \gamma'}{6 \sin^2 \phi} \left[\cos^3 B + 2 \cos^3 \phi - 3 \cos B \cos^2 \phi \right]$$

(ecuación 271)

Reemplazamos la ecuación 270 y 271 en 255 y se tiene:

$$N_\theta = -\frac{R^2 \gamma'}{6 \sin^2 \phi E h} \left[\cos^3 B - 4 \cos^3 \phi + 3 \cos B \cos^2 \phi - 6 \cos B + 6 \cos \phi \right]$$

(ecuación 272)

Reemplazando las ecuaciones 271 y 272 en las ecuaciones 252 y 253, se tiene:

$$J = -\frac{R^3 \gamma'}{6 \sin \phi E h} \left[(1+u) \cos^3 B - 2 \cos^3 \phi (2-u) + 3(1-u) \cos B \cos^2 \phi - 6 \cos B + 6 \cos \phi \right]$$

(ecuación 273)

$$V = -\frac{R^2 \gamma'}{E h} \sin \phi \quad (\text{ecuación 274})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, se obtiene cuando $\phi = B$, $J = 0$; $V = -\frac{R^2 \gamma'}{E h} \sin B$;

(ecuaciones 275)

La fuerza el desplazamiento y el giro en el borde inferior, se obtiene cuando $\phi = \infty$: $N_\phi = \frac{R^2 \gamma'}{6 \sin^2 \phi}$

$$\left[\cos^3 B + 2 \cos^3 \infty - 3 \cos B \cos^2 \infty \right]$$

$$S = - \frac{R^3 \gamma}{6 \text{ Sen } \phi \text{ Eh}} \left[(1+u) \text{Cos}^3 B - 2 (2-u) \text{Cos}^3 \alpha + \right.$$

$$\left. + 3 (1-u) \text{Cos } B \text{ Cos}^2 \alpha - 6 \text{Cos } B + 6 \text{Cos} \right]$$

$$V = - \frac{R^2 \gamma}{E h} \text{ Sen } \phi \quad (\text{ecuaciones 276})$$

(d) Efectos producidos por la presión hidrostática aplicada en el lado convexo.

Considerando el equilibrio de la parte de la placa arriba del círculo paralelo determinado por el ángulo ϕ (ver figura N° 224), se tiene:

$$2 \pi R \text{ Sen } \phi N_{\phi} \text{ Sen } \phi + \int Z \text{Cos } \phi \, dA = 0$$

(ecuación 277)

$$\text{en donde: } Z = \gamma y = \left[H + R (\text{Cos } \alpha - \text{Cos } \phi) \right] \gamma$$

(ecuación 278)

Reemplazando las ecuaciones 269 y 278 en la ecuación 277, se tiene: $N_{\phi} = \frac{R \gamma}{2 \text{ Sen}^2 \phi} \left[\frac{H}{2} (\text{Cos}^2 \phi - \text{Cos}^2 B) + R \left(\frac{\text{Cos } \alpha (\text{Cos}^2 \phi - \text{Cos}^2 B)}{2} - \frac{\text{Cos}^3 \phi - \text{Cos}^3 B}{3} \right) \right]$

(ecuación 279)

Reemplazando 278 y 279 en la ecuación 255,:

$$N_{\phi} = - \frac{R \gamma}{\text{Sen}^2 \phi} \frac{H}{2} \left[(\text{Cos}^2 \phi - \text{Cos}^2 B) + R \left\{ \frac{\text{Cos } \alpha (\text{Cos}^2 \phi - \text{Cos}^2 B)}{2} - \frac{\text{Cos}^3 \phi - \text{Cos}^3 B}{3} \right\} \right] - R \gamma \left[H + R (\text{Cos } \alpha - \text{Cos } \phi) \right]$$

(ecuación 280)

Reemplazando las ecuaciones 279 y 280 en las ecuaciones 252 y 253, se tiene: $S = - \frac{R \text{ Sen } \phi}{E h} \left[(1+u) \frac{R \gamma}{\text{Sen}^2 \phi} \right]$

$$\left[\frac{H}{2} (\cos^2 \phi - \cos^2 B) + R \left(\frac{\cos \alpha}{2} (\cos^2 \phi - \cos^3 B) - \frac{\cos^3 \phi - \cos^3 B}{3} \right) \right] + R \gamma (H + R (\cos \alpha - \cos \phi))$$

(ecuación 281)

$$V = \frac{R^2 \gamma}{E h} \text{ Sen } \phi \quad (\text{ecuación 282})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior se obtiene cuando $\phi = B$,

$$S = - \frac{R^2 \gamma}{E h} \text{ Sen } B \left[H + R (\cos \alpha - \cos B) \right]$$

(ecuaciones 283)

$$V = \frac{R^2 \gamma}{E h} \text{ Sen } B$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior, se obtiene cuando $\phi = \alpha$,

$$N_{\phi} = \frac{R \gamma}{\text{Sen } \alpha} \left[\frac{H}{2} (\cos^2 \alpha - \cos^2 B) + R \left(\frac{\cos \alpha}{2} (\cos^2 \alpha - \cos^2 B) - \frac{\cos^3 \alpha - \cos^3 B}{3} \right) \right]$$

$$S = - \frac{R \text{sen } \alpha}{E h} \frac{(1+u) R \gamma}{\text{sen } \alpha} \left[\frac{H}{2} (\cos^2 \alpha - \cos^2 B) + R \left(\frac{\cos \alpha}{2} (\cos^2 \alpha - \cos^2 B) - \frac{\cos^3 \alpha - \cos^3 B}{3} \right) \right] + R H$$

$$V = \frac{R^2 \gamma}{E h} \text{ sen } \alpha \quad (\text{ecuaciones 284})$$

(e) Efectos producidos por el postensado

Sea H la fuerza horizontal por unidad de longitud, producida por el postensado; y consideramos que varía de acuerdo con la profundidad en la siguiente forma: $H = \gamma_P y$, Siendo $y = R (\cos B - \cos \phi)$ (ver fig. #225)

Las fuerzas paralelas a los ejes coordenados "y" y "z",
 tienen un valor de : $Z = H \operatorname{Sen} \phi$, $Y = H \operatorname{Cos} \phi$

o sea: $H = \gamma_P R (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} \phi)$; $= \gamma_P R (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} \phi)$

$$V = - \gamma_P R (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} \phi) \operatorname{Cos} \phi. \quad \operatorname{Sen} \phi$$

De las ecuaciones 254 y 255, se tiene:

$$\frac{d N_\phi}{d \phi} + 2 N_\phi \frac{\operatorname{Cos} \phi}{\operatorname{Sen} \phi} + Z R \operatorname{ctg} \phi + R = 0$$

Reemplazando los valores de Z e Y, se tiene: $\frac{d N_\phi}{d \phi} +$

$$+ 2 N_\phi \frac{\operatorname{Cos} \phi}{\operatorname{Sen} \phi} = 0$$

de donde $N_\phi = \frac{C}{\operatorname{Sen}^2 \phi}$, siendo "C" una constante de in-

tegración cuando $\phi = B$, tenemos que $N_\phi = 0$, luego $C=0$,
 por lo tanto para cualquier valor de ϕ : $N_\phi = 0$

(ecuación 285)

De la ecuación 255: $N_\phi = -R \cdot Z$, reemplazando Z por su
 valor se tiene: $N_\phi = -\gamma_P R^2 (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} \phi) \operatorname{Sen} \phi$

(ecuación 286)

Reemplazando 285 y 286, en 252 y 253, se tiene:

$$\mathcal{S} = \frac{R \operatorname{Sen} \phi}{E h} \left[-\gamma_P R^2 (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} \phi) \operatorname{Sen} \phi \right] \text{ o sea:}$$

$$\mathcal{S} = - \frac{\gamma_P R^3 \operatorname{Sen}^2 \phi (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} \phi)}{E h} \quad \text{(ecuación 286A)}$$

También obtenemos: $V = (1+u) \frac{\operatorname{ctg} \phi}{E h} \left[\gamma_P R^2 (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} \phi) \right]$
 $- \frac{1}{E h} \left[\frac{d N_\phi}{d \phi} \right]$

Reemplazando la 1ª derivada de 286, se tiene:

$$v = \frac{\gamma_p R^2}{E h} \left[(2 + u) \cos \phi (\cos B - \cos \phi) + \text{Sen}^2 \phi \right]$$

(ecuación 286B)

El desplazamiento y el giro en el borde superior, ocurre cuando $\phi = B$, $\int = 0$; $v = \frac{\gamma_p R^2}{E h} \text{Sen}^2 B$

(Ecuaciones 287)

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior ocurre cuando $\phi = \alpha$; $N_\phi = 0$

$$\int = -\frac{\gamma_p R^3}{E h} \text{Sen}^2 \alpha (\cos B - \cos \alpha) \quad (\text{ecuación 288})$$

$$v = \frac{\gamma_p R^2}{E h} \left[(2 + u) \cos \alpha (\cos B - \cos \alpha) + \text{Sen}^2 \alpha \right]$$

C A P I T U L O I I I

ANILLO CARGADO SIMETRICAMENTE

CON RESPECTO A SU EJE.

NOTA:

Este capítulo relacionado con la torsión del anillo circular es una reproducción literal tomada del texto de TIMOSHENKO.

He considerado conveniente presentar esta reproducción para mayor claridad de la presente tesis.

DESPLAZAMIENTO DE UN ANILLO CIRCULAR POR UNA FUERZA RADIAL DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE A LO LARGO DE SU LINEA MEDIA.

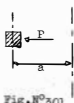


Fig. N° 301

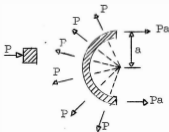


Fig. N° 302.-

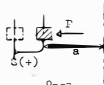


Fig. N° 303.-

Se "P" la fuerza radial aplicada sobre el anillo, tal como aparece en las figuras N° 301 y 302; el esfuerzo de tracción que producen se obtiene dividiendo la fuerza de tracción P a (ver figura N° 302) entre el área, luego: $\sigma = \frac{P a}{EA}$ (ecuación 301).

Aplicando la ley de Hooke: $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ se tiene: $\epsilon = \frac{P a}{EA}$
 Sea "r" el alargamiento que produce la fuerza "P", entonces

su deformación unitaria será: $= \xi \frac{\mathcal{S}}{a}$, igualando las dos deformaciones unitarias, se tiene: $\frac{\mathcal{S}}{a} = \frac{Pa}{E}$,

de donde: $= \frac{P a^2}{A E}$ (ecuación N^o 302)

TORSION DE UN ANILLO CIRCULAR POR UN PAR DISTRIBUIDO UNIFORMEMENTE A LO LARGO DE SU LINEA



Fig. N^o 304.-

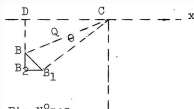


Fig. N^o 305.-

Considerando medio anillo (figura N^o 304) como un cuerpo libre, de su equilibrio se deduce, al tomar momentos respecto al diámetro O_x , que en las secciones m y n debe existir un momento flector de valor: $M = M_t a$ (ecuación 303)

Siendo "a" el radio de la línea media y M_t el momento torsor por unidad de longitud de dicha línea media. Consideremos ahora la deformación del anillo. Por simetría se deduce que durante la torsión cada sección gira en su propio plano el mismo ángulo "theta" que supondremos pequeño.

Sea "C" el centro de rotación (figura N^o 305) y "B" un punto de la sección a distancia "f" de "C". Debido a la rotación de la sección, el punto "B" descri

be arco pequeño $\widehat{BB}_1 = \varphi \theta$. Por ello la fibra anular perpendicular a la sección en el punto "B" aumenta su radio en $B_2 B_1$.

Si tomamos los ejes coordenados tal como se indica, tendremos por la semejanza de los triángulos $B B_1 B_2$ y $B D C$:

$$\frac{B_1 B_2}{B B_1} = \frac{D B}{B C} = \varphi \theta \quad \frac{y}{\varphi} = \theta \quad \text{(ecuación 303A)}$$

Veamos primeramente el caso en que las dimensiones de la sección del anillo son pequeñas comparadas con el radio "a" de su línea media.

Entonces el radio de todas las fibras circulares del anillo puede tomarse igual a "a" sin gran error y el alargamiento unitario de la fibra que pasa por "B", debido al desplazamiento dado por la ecuación 303 A, es:

$$\epsilon = \frac{\theta y}{a} \quad \text{(ecuación 303 B)}$$

Si no hay presión lateral entre las fibras anulares, la fatiga debida a este alargamiento es:

$$\sigma = \frac{E \theta y}{a} \quad \text{(ecuación 303 C)}$$

Ahora bien para el equilibrio del semi-anillo la suma de todas las fuerzas normales ligadas a la sección del anillo debe ser nula y el momento de las mismas fuerzas respecto al eje "x" debe igualar a M (vease ecuación 303). Si con dA representamos un elemento de área de dicha sección, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\int_A \frac{E \theta}{a} y \, dA = 0 \quad (\text{ecuación 303 D})$$

$$\int_A \frac{E \theta}{a} y^2 \, dA = M \quad (\text{ecuación 303 E})$$

La ecuación 303 D muestra que el centro de gravedad de la sección debe estar sobre el eje X, y de la ecuación 303 E se deduce:

$$\theta = - \frac{M a}{E I_x} = - \frac{M_t a^2}{E I_x} \quad (\text{ecuación 304})$$

Hemos puesto el signo negativo para indicar que el giro en ese sentido es negativo, similar a lo visto en placas esféricas.

Donde I_x es el momento en la ecuación del anillo respecto al eje x. Sustituyendo en la ecuación 303 C, encontramos:

$$= \frac{M_t a y}{I} \quad (\text{ecuación 304 A})$$

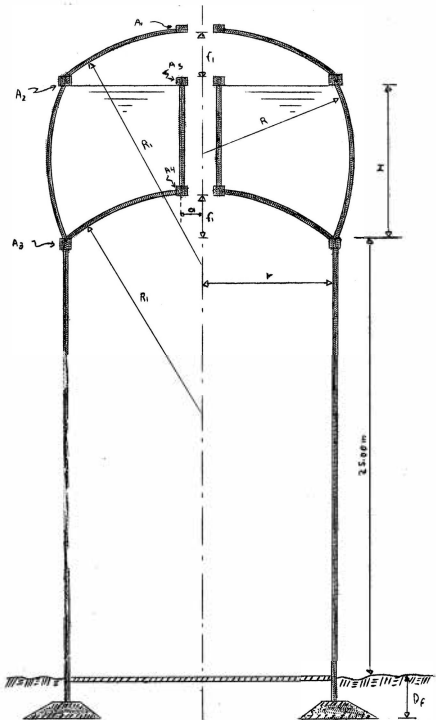
Es decir, la distribución de fatigas normales sobre la sección del anillo es la misma que en el caso de flexión de una barra recta, la fatiga es proporcional a la distancia de la fibra considerada al eje neutro X y la fatiga máxima acontece en los puntos más alejados de dicho eje.

C A P I T U L O I V

PRE - DIMENSIONAMIENTO

NOTA:

Los conceptos y formulas para obtener las dimensiones del reservorio se han basado en los ejemplos que aparecen en el folleto del Ing.° CARLOS LABARTHE BACA ("DEPOSITOS CILINDRICOS PRETENSADOS") y en el texto de FERNANDO MICAL ("HORMIGON ARMADO").



DIMENSIONAMIENTO

Sea " V_e " el volumen de una esfera de radio " R ", luego: $V_e = \frac{4}{3} \pi R^3$; sea " V_{cc} ", el volumen de un casquete esférico de radio esférico " R " y de flecha $f = \frac{R}{2}$, luego:

$$V_{cc} = \pi f^2 \left(R - \frac{f}{3} \right) = \left(\frac{R}{2} \right)^2 \left(R - \frac{R}{6} \right) = \frac{5}{24} \pi R^3$$

Luego, el volumen " V_{se} " de un segmento esférico de dos bases iguales, con una altura igual a su radio " R ", será:

$$V_{se} = V_e - V_{cc} \times 2 = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{5}{24} \pi R^3 \times 2 = \frac{11}{12} \pi R^3$$

Sea " V_{cf} " el volumen de la cúpula de fondo (ver figura N° 401), de radio esférico R_1 y con una flecha f_1 , luego:

$$V_{cf} = \pi f_1^2 \left(R_1 - \frac{f_1}{3} \right); \text{ Sea } "V_{cc}" \text{ el volumen}$$

del conducto cilíndrico. $V_{cc} = \pi a^2 (H - f_1)$

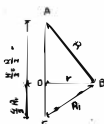
Luego el volumen de agua que se pueda almacenar está dado por: $V_{H_2O} = V_{se} - (V_{cf} + V_{cc}) = \frac{11}{12}$

$$\pi R^3 - \pi f_1^2 \left(R_1 - \frac{f_1}{3} \right)$$

Es recomendable tomar la flecha "P₁" con un valor de 1/2 o 1/5 de su radio "R₁", para evitar que se presenten esfuerzos de tracción en los círculos paralelos.

Tomemos $f_1 = 1/3 R_1$, Luego: en el triángulo ABD, se

tiene: (ver figura pitágoras). $r = \frac{\sqrt{3}}{2} R$



En el triángulo BCD, se tiene:

$$\text{(Por pitágoras)} R_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6} R,$$

$$\text{luego: } f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} R$$

Como el volumen de agua que se quiere almacenar es de 1500 m³, se tiene:

$$1500 = \frac{11}{12} \pi R^3 - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} R \right)^2 \left[\frac{5\sqrt{3}}{6} R - \frac{\sqrt{3}}{18} R \right]$$

$= \pi a^2 (H - f_1)$ Resolviendo, se tiene: para $a=1.00m$,

$$1500 = \frac{11}{12} \pi R^3 - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} R \right)^2 \left[\frac{5\sqrt{3}}{6} R - \frac{\sqrt{3}}{18} R \right]$$

$$= \pi \left(R - \frac{\sqrt{3}}{6} R \right)$$

$$1500 = \frac{11}{12} \pi R^3 - \frac{7\sqrt{3}}{108} \pi R^3 - \frac{(6-\sqrt{3})}{6} \pi R$$

Por tanteo hallamos que para $R = 8.80$ m, se tiene $V_{H_2O} = 1,701 \text{ m}^3$, en realidad el valor obtenido disminuye por el espesor de las placas a un valor un poco mayor de 1500 m^3 . Luego:

$$R = 8.80 \text{ m}$$

$$H = 8.80 \text{ m}$$

$$R_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$R = 12.70 \text{ m (valores 401)}$$

Nota.- Diversos autores recomiendan para el coeficiente de presión $u = 0.17$

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} R = 2.54 \text{ m}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} R = 7.62 \text{ m}$$

$$a = 1.00 \text{ m}$$

$$u = 0.17$$

ANILLO A_1



Area de la sección transversal:

$$A = 0.20 \times 0.30 = 6 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \quad (\text{Igualdad 403})$$

Momento de inercia respecto al eje simétrico horizontal

$$" \text{ x x } " : \quad M_x = \frac{0.20 (0.30)^3}{12} = 45 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

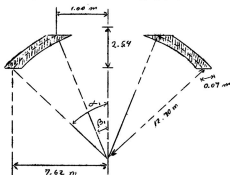
(Igualdad 404)

Considerando que el peso específico del concreto de 2500 $\frac{\text{Kgs}}{\text{m}^3}$, el peso del anillo A_1 por unidad de longitud de la circunferencia media será:

$$P = \frac{\pi [1.10^2 - 0.90^2]}{2 \pi \times 1.00} \times 0.30 \times 2500 = 150 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}}$$

(Igualdad 405)

CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA



Espesor $h = 0.07$ m (406) El valor de " λ_1 ", está dado por: $\lambda_1^4 = 3 (1 - u^2) \left(\frac{R}{h}\right)^2$

Reemplazando los valores correspondientes, se tienen:

$$\lambda_1^4 = 3 (1 - 0.17^2) \left(\frac{12.70}{0.07}\right)^2$$

$$\lambda_1^4 = 95,458.87 \quad (407)$$

El peso de la cubierta por unidad de área de la superficie media, será:

$$q = 4 \pi \frac{[12.735^3 - 12.665^3]}{3 \times 4 \pi \times 12.70^2} \times 2500$$

$$q = 180 \text{ Kgs/m}^2 \quad (\text{Igualdad } 407 \text{ A})$$

Considerando una presión del viento de 50 Kgs/m^2 y una sobrecarga de 60 Kgs/m^2 , se tiene: $P = 180+50+60=290 \text{ Kgs/m}^2$ (408)

Los valores de los ángulos y de las funciones trigonométricas, serán:

$$\star B_1 = 0.0787$$

$$\star \alpha_1 = 0.6437$$

$$\text{Sen } B_1 = \frac{1}{12.70} = 0.07874$$

$$\text{Sen } \alpha_1 = 0.6 \text{ (igualdades } 409)$$

$$\text{Cos } B_1 = 0.997$$

$$\text{Cos } \alpha_1 = 0.8$$

$$\lambda_1 = 17.60$$

$$\lambda_1^3 = 5447.55$$

$$\lambda_1^2 = 309.52$$

$$\lambda_1^4 = 95458.87$$

ANILLO λ_2



Area de la sección transversal:

$$A = 0.30 \times 0.45 = 13.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \quad (\text{Igualdad } 410)$$

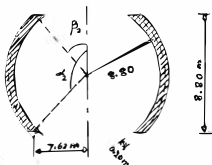
Momento de inercia respecto al eje "xx":

$$I_x = \frac{0.30 \times 0.45^3}{12} = 227.8 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad (\text{Igualdad } 411)$$

El peso del anillo por unidad de longitud de la circunferencia media, será: $P = \frac{11}{2} \sqrt{7.77^2 - 7.47^2} \times 0.45 \times 2500 = 11 \times 7.62$

$$= 340 \text{ Kgs/m} \quad (412)$$

PARED ESFERICO REBANADO



Epesor de la pared:

$$h = 0.20 \text{ m} \quad (\text{Igualdad } 413)$$

El valor de " λ "₂ está dado por: $\lambda_2^4 = \frac{3(1-0.17^2)}{0.20} (8.80)^2$

$$\lambda_2^4 = 5640.15$$

El peso de la pared por unidad de la superficie media,

$$\text{será: } q = \frac{4\pi [8.90^3 - 8.70^3]}{3 \times 4 \pi \times 8.80^2} \times 2500$$

$$q = 500 \text{ Kgs/m}^2$$

Valorando la presión del viento en 50 Kgs/m^2 y considerando una sobrecarga de 60 Kgs/m^2 , se tiene:

$$q = 500 + 50 + 60 = 610 \text{ Kgs/m}^2 \quad (\text{Igualdad } 414)$$

Los valores de los ángulos y de las funciones trigonométricas, será:

$$\angle B_2 = 1.0472 \quad \angle \alpha_2 = 2.0944$$

$$\text{Sen } B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \quad \text{Sen } \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

$$\text{Cos } B_2 = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{Cos } \alpha_2 = -\frac{1}{2} = -0.5$$

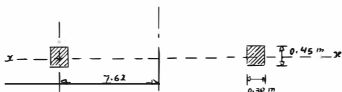
(Igualdades 415)

$$\lambda_2 = 8.66$$

$$\lambda_2^3 = 650.24$$

$$\lambda_2^2 = 75.06$$

$$\lambda_2^4 = 5640.15$$

ANILLO A₃

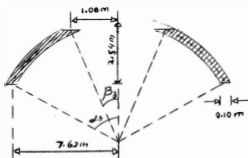
$$\text{Area de la sección transversal: } A = 0.30 \times 0.45 = 13.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \quad (416)$$

$$\text{Momento de inercia respecto al eje simétrico horizontal "xx": } I_x = \frac{0.30 \times 0.45^3}{12} = 227.8 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad (417)$$

$$\text{El peso del anillo por unidad de longitud de la circunferencia media, será: } P = \frac{7.77^2 - 7.47^2}{2 \times 7.62} \times 0.45 \times 2500$$

$$P = 340 \text{ Kgs/m} \quad (418)$$

CUPULA DE FONDO



Espesor de la cúpula de fondo: $h = 0.10 \text{ m}$ (419)

El peso de la cúpula de fondo por unidad de superficie

media será: $q = 4 \frac{\sqrt{12.75^3 - 12.65^3}}{3 \times 4 \sqrt{12.70^2}} \times 2500$

$$q = 250 \text{ Kgs/m}^2$$

Considerando una sobrecarga de 50 Kgs/m^2 , se tiene:

$$q = 250 + 50 = 300 \text{ Kgs/m}^2 \quad (\text{Igualdad 420})$$

Los valores de los ángulos y de las funciones trigonométricas:

$$\angle B_3 = 0.0787 \quad \angle \alpha_3 = 0.6437$$

$$\text{Sen } B_3 = \frac{1}{12.70} = 0.07874 \quad \text{Sen } \alpha_3 = 0.6$$

$$\text{Cos } B_3 = 0.997 \quad \text{Cos } \alpha_3 = 0.8$$

(Igualdades 421)

$$\lambda_3 = 14.7$$

$$\lambda_3^3 = 3190$$

$$\lambda_3^2 = 217$$

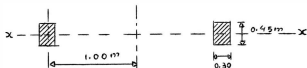
$$\lambda_3^4 = 46989$$

El valor de " λ_3 " se ha obtenido mediante: $\lambda_3^4 = 3$

$$= 3 \left(1 - 0.17^2 \right) \left(\frac{12.7}{0.10} \right)^2$$

de donde $\lambda_3^4 = 46989$

ANILLO A_4



Área de la sección transversal: $A = 0.30 \times 0.45 = 13.5 \times 10^{-2}$
 m^2 (422)

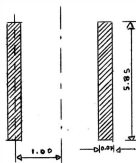
Momento de inercia respecto al eje simétrico horizontal

$$\text{"xx"}: I_x = \frac{0.30 \times 0.45^3}{12} = 227.8 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad (423)$$

El peso del anillo por unidad de longitud de la circun-

$$\text{ferencia media será: } P = \pi \frac{1.15^2 - 0.85^2}{2 \pi (1.00)} \times 0.45 \times 2500 =$$

$$= 340 \text{ Kgs/m} \quad (424)$$



Los valores del espesor y la altura serán: $h = 0.07 \text{ m}$

$$d = 5.85 \text{ m} \quad (425 \text{ A})$$

El peso del conducto cilíndrico por unidad de área de

$$\text{la superficie media: } q = \pi \frac{1.035^2 - 0.965^2}{2 \pi \times 1.00 \times 5.85} \times 5.85 \times 2500$$

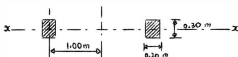
$q = 175 \text{ Kg/m}^2$; sea la sobrecarga = 25 Kg/m^2

$$q = 175 + 25 = 200 \text{ Kg/m}^2 \quad (425)$$

El valor de B_1 se halla por: $B_1^4 = \frac{3(1 - 0.17^2)}{1.00^2 \times 0.07^2} =$
 $= 594.55$

Luego: $B_1 = 4.94$ $B_1^3 = 120.43$
 $B_1^2 = 24.38$ (425 B)
 $B_1^4 = 594.55$

ANILLO A_5



Area de la sección transversal:

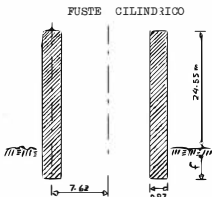
$$A = 0.20 \times 0.30 = 6 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \quad (426)$$

Momento de inercia respecto al eje "xx":

$$I_x = \frac{0.20 \times 0.30^3}{12} = 45 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad (427)$$

El peso del anillo A_5 por unidad de longitud de la circunferencia media, será: $P = \frac{\pi(1.10^2 - 0.90^2)}{2 \times 1.00} \times 0.30 \times$

$$\times 2500 = P = 150 \text{ Ags/m} \quad (428)$$



Los valores del espesor y de la altura:

$$h = 0.07 \text{ m} \quad (429)$$

$$d = 24.55 + f$$

El peso del fuste cilíndrico por unidad de la superficie

$$\text{media } q = \pi \frac{7.655^2 - 7.585^2}{2\pi \times 7.62 \times d} \times d \times 2500$$

$$q = 175 \text{ Kg/m}^2, \text{ Considerando una sobrecarga de } 25 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}^2}$$

$$q = 175 + 25 = 200 \text{ Kgs/m}^2 \quad (430)$$

El valor de "B₂" está dado por: $B_2^4 = \frac{3(1-0.17^2)}{7.62^2 \times 0.07^2} = 10.24$

Luego: $B_2 = 1.79$ $B_2^3 = 5.73$ (431)

$$B_2^2 = 3.2 \quad B_2^4 = 10.24$$

C A P I T U L O V

VALORES DE LOS EFECTOS

QUE PRODUCEN EL PESO

PROPIO Y LA SOBRE-CARGA.

NOTA:

Los conceptos y formulas empleados para el desarrollo de éste capitulo son los que aparecen en un ejemplo resuelto en el folleto del Ing^o. LABARTHE.

CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA

I Caso bordes libres radiales

a) Efectos producidos por una fuerza vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior y por una fuerza vertical por unidad de área aplicada en toda la superficie.

Para hallar el valor de N_{ϕ} sumamos las ecuaciones 256 y 263; el valor de N_{θ} se obtiene sumando las ecuaciones 257 y 264; reemplazando en éstas ecuaciones los valores 401, 405, 408, se tiene :

$$N_{\phi} = - \frac{1}{\text{Sen}^2 \phi} \left[3683 (0,997 - \text{Cos} \phi) + 11,82 \right] \quad \text{(ecuaciones 501),}$$

$$N_{\theta} = \frac{1}{\text{Sen}^2 \phi} \left[3683(0,997 - \text{Cos} \phi) + 11,82 \right] - 3683 \text{Cos} \phi$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior lo hallamos sumando las ecuaciones 260 y 267 :

en la cual reemplazamos los valores 401, 405, 406, 403 y 409, luego :

$$\int_{\delta} = - \frac{20617.47}{E} \quad (\text{Ecuaciones 502}).$$

$$V_{\delta} = - \frac{8990.30}{E}$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior lo hallamos sumando las ecuaciones 261, y 268, en los cuales reemplazamos los valores 401, 405, 406, 408 y 409, luego :

$$N_{\delta} \quad 2048.26 \text{ Kg/n} \quad -N_{\delta} \text{ Cos } \alpha_1 = 1639 \text{ Kg/n.} \quad (\text{Ecuaciones 505})$$

$$\int_{\delta} = - \frac{59869.48}{E} \quad V_{\delta} = - \frac{68589.60}{E}$$

II Caso borde superior empotrado

Para hallar las reacciones de las fuerzas y los momentos que se producen en el borde superior, establecemos las ecuaciones de vínculo entre el anillo "1" y el borde superior de la cubierta. (Ver Pág. 501).

El desplazamiento y el giro del anillo "1" lo obtenemos de las ecuaciones 302, y 304, en las cuales reemplazamos los valores 401, 403, 404, luego :

$$\int_{1} = - 17 \frac{H_1}{E} \quad V_{\int_{1}} = - 2222.22 \frac{M_1}{E} \quad (\text{Ecuaciones 504})$$

El desplazamiento y el giro del borde superior empotrado por efecto de las fuerzas "H₁" y el momento "M₁", lo hallamos de las ecuaciones 249 y 251, en las cuales reemplazamos los valores 401, 406, 409, luego :

$$\int_{H_1} = 39.60 \frac{H_1}{E} \quad \int_{M_1} = 696 \frac{M_1}{E} \quad (\text{Ecuaciones 505})$$

$$V_{H_1} = 696 \frac{H_1}{E} \quad V_{M_1} = 24513.98 \frac{M_1}{E}$$

Las ecuaciones de vínculo son :

$$\int S + \int H_1 + \int M_1 = \int A_1 \quad (\text{Ecuaciones 506}).$$

$$V_S + V_{H_1} + V_{M_1} = V_{A_1}$$

Reemplazando en las ecuaciones de vínculo los valores 502, 504, 505, se tiene :

$$39.60 H_1 + 696M_1 - 20617.47 = - 17 H_1$$

$$696 H_1 + 24513.98M_1 - 8990.30 = - 2222.22 M_1$$

Resolviendo estas dos últimas ecuaciones se tiene :

$$H_1 = 524 \text{ Kg/m} \quad (\text{Valores 507}).$$

$$M_1 = -13 \frac{\text{Kg-m}}{\text{m}}$$

III Caso Borde Inferior Empetrado

Para hallar las reacciones de las fuerzas y de los momentos que se producen en el borde inferior, establecemos las ecuaciones de vínculo entre el anillo "2" y el borde inferior de la cubierta (Ver Fig. 502).

El desplazamiento y el giro del anillo A_2 lo obtenemos de las ecuaciones 302, y 304, en las cuales reemplazamos los valores 401, 410, 411, luego :

$$\begin{aligned} \delta_{A_2} &= \frac{430.10}{E} \left[H_2 + H_3 \right] \\ V_{A_2} &= \frac{25488}{E} \left[M_2 - M_3 \right] \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones 508})$$

El desplazamiento y el giro del borde inferior empotrado por efecto de las fuerzas H_2 y el momento M_2 , lo obtenemos de las ecuaciones 238 y 240, en las cuales reemplazamos los valores 401, 406 y 409.

Consideremos que el borde inferior de la cubierta sigue una dirección horizontal, luego debemos de tomar en cuenta el efecto que produce la componente horizontal de la fuerza $N\beta$ que está dado por la expresión: $-N\beta \cos \alpha_1$ y la cual se puede apreciar en la figura II^o 502, el desplazamiento y el giro que produce lo obtenemos de las ecuaciones 238 y 240, en las cuales reemplazamos los valores 401, 406 y 409, 503; luego, se tiene:

$$\int_{H_2} = 2299.06 \frac{H_2}{E}; \quad V_{H_2} = 5306.06 \frac{H_2}{E}$$

(Ecuaciones 509)

$$\int_{M_2} = 5306.06 \frac{M_2}{E} \quad V_{M_2} = -2451.398 \frac{M_2}{E}$$

$$\int_{-N\beta \cos \alpha_1} = \frac{3768061}{E} V_{-N\beta \cos \alpha_1} = -\frac{8696534}{E}$$

Las ecuaciones de vínculo son :

$$\int^1 + \int_{-N\beta \cos \alpha_1} + \int_{H_2} + \int_{M_2} = \int^2$$

(Ecuaciones 510).

$$V_1 + V_{-N\beta \cos \alpha_1} + V_{H_2} + V_{M_2} = V_2$$

Reemplazando en las ecuaciones de vínculo los valores 503, 508, y 509, :

$$2299.06 H_2 + 3768061 + 5306.06 M_2 - 59869.48 = -430.10 [H_2 + H_3]$$

$$-5306.06 H_2 - 8696534 - 24513.98 M_2 - 68589.60 = 25488 [M_2 - M_3]$$

Simplificando estas dos últimas ecuaciones se tiene :

$$2729.16 H_2 + 5306.06 M_2 + 3708192 = - 430.10 H_3$$

(Ecuaciones 511)

$$5306.06 H_2 + 50002 M_2 + 8765124 = 25488 M_3$$

PARED ESFERICO REBANADO

I Caso Bordes Libres Radiales

a) Efectos producidos por una fuerza vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior y por una fuerza vertical por unidad de área aplicada en toda la superficie.

El valor de la fuerza vertical de longitud g aplicada en el borde superior está dado por la expresión :

$$P = (412) + (-N\phi \text{ Sen } \alpha_1) = 340 + 2048.26(0.6) = 1570 \text{ Kg/m (512)}$$

Para hallar el valor de $N\phi$ sumamos las ecuaciones 256 y 263; el valor de $N\theta$ se obtiene sumando las ecuaciones 257 y 264, reemplazando en éstas ecuaciones los valores 401, 414, 415, 512, :

$$N\phi = - \frac{1}{\text{Sen}^2 \phi} [5368(0.5 - \text{Cos} \phi) + 13 \cdot 9] \quad \text{(Ecuaciones 513)}$$

$$N\theta = \frac{1}{\text{Sen}^2 \phi} [5368(0.5 - \text{Cos} \phi + 1360)] - 5368 \text{ Cos} \phi$$

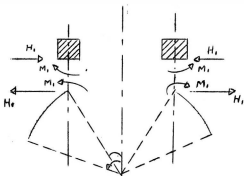


Fig. N° 501

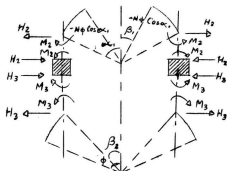


Fig. N° 502

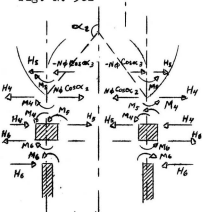


Fig. N° 503

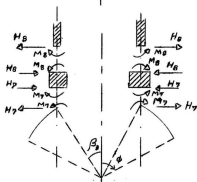


Fig. N° 504

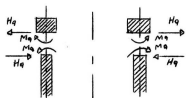


Fig. N° 505

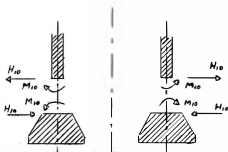


Fig. N° 506

El desplazamiento y el giro en el borde superior lo hallamos sumando las ecuaciones 260 y 267, en las cuales reemplazamos los valores 401, 413, 414, 415,:

$$\int_s = - \frac{21447}{E} ; v_s = - \frac{50438}{E} \quad (\text{ecuaciones 514})$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior lo hallamos sumando las ecuaciones 261 y 268, en las cuales reemplazamos los valores 401, 413, 414 415, 512:

$$N_b = -8970 \text{Kgs/m} ; -N_b \cos \alpha_2 = -4485 \text{Kgs/m} \quad (\text{ecuaciones 515})$$

$$\int_i = \frac{502206}{E} ; v_i = - \frac{50438}{E}$$

II Caso Borde Superior Empotrado

Para hallar las reacciones de las fuerzas y de los momentos que se producen en el borde superior, establezcamos las ecuaciones de vinculo entre el anillo "L2" y el borde superior de la pared (ver figura N° 502).

El desplazamiento y el giro del borde superior empotrado por efecto de las fuerzas H_3 y el momento M_3 , lo hallamos de las ecuaciones 249 y 251, en las cuales reemplazamos los valores 401, 413 y 415:

$$\int_{H_3} = 571.56 H_3/E ; v_{H_3} = 650.02 H_3/E \quad (\text{ecuaciones 516})$$

$$\int_{M_3} = 650.02 M_3/E ; v_{M_3} = 1477.82 M_3/E$$

Las ecuaciones de vinculo son:

$$\int_s + \int_{H_3} + \int_{M_3} = \int_{L2}$$

$$v_s + v_{H_3} + v_{M_3} = v_{L2}$$

y la cual se puede apreciar en la figura N°503; el desplazamiento y el giro que producen lo obtenemos de las ecuaciones 238 y 240, en las cuales reemplazamos los valores 401, 413, 415, 515,:

$$\begin{aligned} \int_{H4} &= 572H_4/E & ; & \quad V_{H4} = -650H_4/E \\ \int_{M4} &= 650M_4/E & ; & \quad V_{M4} = -1478M_4/E \end{aligned} \quad (\text{ecuaciones 521})$$

$$\int -N\beta \cos \alpha_2 = -\frac{2565420}{E} \quad V_{-N\beta \cos \alpha_2} = \frac{2915250}{E}$$

Las ecuaciones de vínculo son:

$$\begin{aligned} \int i + \int -N\beta \cos \alpha_2 + \int_{H4} + \int_{M4} &= \int_{i3} \\ V_1 + V_{-N\beta \cos \alpha_2} + V_{H4} + V_{M4} &= V_{i3} \end{aligned} \quad (\text{ecuaciones 522})$$

Reemplazando en las ecuaciones de vínculo los valores 515, 520, 521,:

$$\begin{aligned} 502206 - 2565420 + 572H_4 + 650M_4 &= -430 \left[H_4 + H_5 - H_6 \right] \\ -50438 + 2915250 - 650H_4 - 1478M_4 &= 25488 \left[M_4 + M_5 - M_6 \right] \end{aligned}$$

Simplificando estos dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$\begin{aligned} -2063214 + 1002H_4 + 650M_4 &= -430H_5 + 430H_6 \\ 2864812 - 650H_4 - 26966M_4 &= 25488M_5 - 25488M_6 \end{aligned} \quad (\text{ecuaciones 523})$$

CUPULA DE FONDO

I Caso bordes libres radiales

(a) Efectos producidos por una fuerza vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior y por una fuerza vertical por unidad de área aplicada en toda la superficie.

valor de la fuerza vertical por unidad de

longitud aplicada en el borde superior está dado por la expresión: $P = (424) + (425) \times d + (428)$

de donde: $P = 340 + 200 \times 5.85 + 150 = 1660 \text{ Kgs/m.}$ (ver 524)

Para hallar el valor de $N\phi$ sumamos las ecuaciones 256 y 263; el valor de $N\theta$ se obtiene sumando las ecuaciones 257 y 264, reemplazando en estas ecuaciones los valores 401, 420, 421, 524,:

$$N\phi = -1/\text{sen}^2\phi \left[3810(0.997 - \cos\phi) \right] + 151$$

$$N\theta = 1/\text{sen}^2\phi \left[3810(0.997 - \cos\phi) + 151 \right] - 3810\cos\phi$$

(ecuaciones 525)

El desplazamiento y el giro en el borde superior lo hallamos sumando las ecuaciones 260, 267; en las cuales reemplazamos los valores 401, 419, 420, 421, 524,:

$$\int_s = \frac{208674}{E} ; V_s = -\frac{6510}{E} ; (\text{ecuaciones 526})$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior, lo hallamos sumando las ecuaciones 261 y 268, en las cuales reemplazamos los valores 401, 419, 420, 421, 524:

$$N\phi = -2448 \text{ Kgs/m} ; -N\phi\cos\alpha_3 = 1958 \text{ Kgs/m.}$$

$$\int_i = -\frac{18994}{E} ; V_i = -\frac{49606}{E} (\text{ecuaciones 527})$$

II Caso borde superior empotrado

Establecemos las ecuaciones de vínculo entre el anillo "4" y el borde superior de la cúpula de fondo (ver figura 504).

El desplazamiento y el giro del anillo "4" lo obtenemos de las ecuaciones 302 y 304, en las cuales reemplazamos los valores 401, 422 y 423,:

$$\int_{A4} = -7/E [H_7 + H_8]; V_{A4} = -\frac{439}{E} [M_7 - M_8]$$

(ecuaciones 528)

El desplazamiento y el giro del borde superior empotrado por efecto de las fuerzas H_7 y el momento M_7 lo hallamos de las ecuaciones 249 y 251, en las cuales reemplazamos los valores 401, 419, y 421,:

$$\int_{H7} = \frac{23}{E} H_7; V_{H7} = \frac{342}{E} H_7$$

(ecuaciones 529)

$$\int_{M7} = \frac{342}{E} M_7; V_{M7} = \frac{10047}{E} M_7$$

Las ecuaciones de vinculo son:

$$\int_s + \int_{H7} + \int_{M7} = \int_{A4}$$

$$V_s + V_{H7} + V_{M7} = V_{A4} \quad (\text{ecuaciones 530})$$

Reemplazando en las ecuaciones de vinculo los valores 526, 528, 529,:

$$208674 + 23H_7 + 342M_7 = -7 [H_7 + H_8]$$

$$-6510 + 342H_7 + 10047M_7 = -439 [M_7 - M_8]$$

Simplificando las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$30H_7 + 342M_7 + 208674 = -7 H_8$$

$$342H_7 + 10486M_7 - 6510 = 439M_8$$

(ecuaciones 531)

III Caso borde inferior empotrado.

Estableceremos las ecuaciones de vínculo entre el anillo "4₃" y el borde inferior de la cúpula (Ver figura 503).

El desplazamiento y el giro del borde inferior empotrado por efecto de las fuerzas H_5 y el momento M_5 , lo hallamos de las ecuaciones 238 y 240, en las cuales reemplazamos los valores 401, 419, 421,:

Consideremos que el borde inferior de la cúpula sigue una dirección horizontal, luego debemos de tomar en cuenta el efecto que produce la componente horizontal de la fuerza $N\phi$, que está dado por la expresión: $-N\phi \cos \alpha_3$, y la cual se puede apreciar en la figura N°503, el desplazamiento y el giro que producen lo obtenemos de las ecuaciones 238 y 240, en las cuales reemplazamos los valores 401, 421, 527,:

$$\begin{aligned} \int_{H_5} &= .1344 H_5/E ; \quad V_{H_5} = -2604 H_5/E \\ \int_{M_5} &= 2604 M_5/E ; \quad V_{M_5} = -10047 M_5/E \end{aligned}$$

(ecuaciones 532)

$$\int_{-N\phi \cos \alpha_3} = \frac{2631552}{E} ; \quad V_{-N\phi \cos \alpha_3} = \frac{5098632}{E}$$

Las ecuaciones de vínculo son:

$$\begin{aligned} \int_1 + \int_{-N\phi \cos \alpha_3} + \int_{H_5} + \int_{M_5} &= \int_{4_3} \\ V_1 + V_{-N\phi \cos \alpha_3} + V_{H_5} + V_{M_5} &= V_{4_3} \end{aligned}$$

(ecuaciones 533)

Reemplazando en las ecuaciones de vínculo los valores 520, 527, 532, se tiene:

$$\begin{aligned} -18994 + 2631552 + 1344H_5 + 2604M_5 &= -430 \left[II_4 + II_5 - II_6 \right] \\ -49606 - 5098632 - 2604H_5 - 10047M_5 &= 25488 \left[II_4 + II_5 - II_6 \right] \end{aligned}$$

Simplificando las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$2612558 + 1774H_5 + 2604M_5 = -430H_4 + 430H_6$$

$$-5148238 - 2604H_5 - 35535M_5 = 25488M_4 - 25488M_6$$

(ecuaciones 554)

CONDUCTO CILINDRICO CENTRAL

I Caso bordes libres.-

(a) Efectos producidos por una fuerza vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior y por una fuerza vertical por unidad de área aplicada en toda la superficie.

El valor de la fuerza vertical total, está dado por la expresión:

$$P = (428) + (425) \times (d-x) = 150 + 200 (5.85 - x)$$

en donde: $P = 1320 - 200x$ (ecuación 535)

De las ecuaciones 157 y reemplazando en ella el valor 535, se tiene:

$$\begin{aligned} N_\theta &= 0 \\ N_x &= -1320 + 200x \end{aligned} \quad (\text{ecuaciones 536})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior lo hallamos de las ecuaciones 158, en la cual reemplazamos los valores 401, 425, 425, 535; cuando $x = 5.05m$; se tiene:

$$w_s = -\frac{364}{E}; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_s = \frac{486}{E}; \quad (\text{ecuaciones 537})$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior, lo hallamos de las ecuaciones 158, en la cual reemplazamos los valores 401, 425, 425., 535; cuando $x = 0$; se tiene:

$$w_1 = -\frac{3206}{E} ; \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 = \frac{486}{E} ; (\text{ecuaciones 538})$$

II Caso Borde superior empotrado.-

Para hallar las reacciones de las fuerzas y momentos que se producen en el borde superior empotrado, establecemos las ecuaciones de vinculo entre el anillo "1.5" y el borde superior del conducto cilíndrico (ver figura N° 505).

El desplazamiento y el giro del anillo 1.5 lo obtenemos de las ecuaciones 302 y 304, en las cuales reemplazamos los valores 401, 426 y 427,:

$$\int_{1.5} = 17 H_9/E ; v_{1.5} = -2222.22 M_9/E \quad (\text{ecuaciones 539})$$

El desplazamiento y el giro del borde superior empotrado por efecto de las fuerzas H_9 y el momento M_9 lo obtenemos de las ecuaciones 152 y 154, en las cuales reemplazamos los valores 401, 425., 425B,:

$$\begin{aligned} w_{H9} &= 141 H_9/E ; \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{H9} = 697 H_9/E \\ w_{M9} &= -697 M_9/E ; \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{M9} = -6832 M_9/E \end{aligned} \quad (\text{ecuaciones 540})$$

Las ecuaciones de vinculo son:

$$\begin{aligned} \int_s + \int_{H9} + \int_{M9} &= \int_{1.5} \\ v_s + v_{H9} + v_{M9} &= v_{1.5} \end{aligned} \quad (\text{ecuación 541})$$

Por las nomenclaturas adoptados en las figuras 11^o110 y 216, deducimos que:

$$\mathcal{F} = -w ; V = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{igualdades 542})$$

Reemplazando en 541, los valores 537, 539, 540, en 541, y teniendo presente las relaciones 542, se tiene:

$$364 - 141H_g + 697M_g = 17H_g$$

$$-486 - 697H_g + 6882M_g = -2222.22i_g$$

Simplificando las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$364 - 158H_g + 697M_g = 0$$

$$-486 - 697H_g + 9104M_g = 0 \quad (\text{ecuaciones 543})$$

Resolviendo las ecuaciones 543, se tiene:

$$H_g = 4 \quad (\text{ecuaciones 544})$$

$$M_g = 0$$

III Caso borde inferior empotrado.-

Para hallar las reacciones de las fuerzas y momentos que se producen en el borde inferior, establemos las condiciones de vínculo entre el borde inferior del conducto cilíndrico central y el anillo "4" (ver figura 4^o504). El desplazamiento y el giro del borde inferior empotrado por efecto de las fuerzas H_g y el momento M_g , lo obtenemos de las ecuaciones 141 y 143, en las cuales reemplazamos los valores 401, 425A, 425B.

$$V_{H8} = -141 H_g/E ; \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{H8} = 697 H_g/E$$

$$W_{M8} = -697 M_g/E ; \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{M8} = 6882 i_g/E$$

(ecuaciones 545)

Las ecuaciones de vínculo son:

$$\int i + \int H_B + \int M_B = \int A_4$$

$$V_i + V_{H_B} + V_{M_B} = V_{i_4} \quad (\text{ecuaciones 54G})$$

Reemplazando en 546 los valores 528, 538 y 545; y teniendo en cuenta 542, se tiene:

$$3206 + 414H_8 + 697M_8 = -7 [H_7 + H_8]$$

$$-486 - 697H_8 - 6882M_8 = -439 [H_7 - H_8]$$

Simplificando, se tiene:

$$3206 + 148H_8 + 697M_8 = -7H_7 \quad (\text{ecuaciones 547})$$

$$-486 - 697H_8 - 7321M_8 = -439H_7$$

Resolviendo las ecuaciones 531 y 547, se tiene:

$$H_7 = -11309 \text{Kgs/m} ; M_7 = 367 \text{Kgs-m/m}$$

$$H_8 = 744 \text{Kgs/m} ; M_8 = -49 \text{Kgs-m/m}$$

(ecuaciones 548)

FUSTE CILINDRICO

I Caso Bordes Libres.-

(a) Efectos producidos por una fuerza vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior y por una fuerza vertical por unidad de área aplicada en toda la superficie.

El valor total de la fuerza vertical, está dado por la expresión:

$$P = (-N_0 \text{sen } \alpha_2) + (-N_0 \text{sen } \alpha_3) + (418) + (430)x(d-x)$$

de donde: $P = 8970x0.866 + 2448x0.6 + 340 + 200(d-x)$

$$P = 9577 + 200(d-x) \quad (\text{ecuación 549})$$

Por las ecuaciones 157 y reemplazando en ella el valor 549, se tiene:

$$N_0 = 0; N_x = -9577 - 200(d-x); \quad (\text{ecuaciones 550})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior lo hallamos de las ecuaciones 158, en la cual reemplazamos los valores 401, 429, 430, 549; cuando $x = d$; se tiene:

$$w_s = - \frac{177229}{E}; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s = \frac{3701}{E};$$

(ecuaciones 551)

El desplazamiento y el giro en el borde inferior lo hallamos de las ecuaciones 158, en la cual reemplazamos los valores 401, 429, 430, 549; cuando $x = 0$ se tiene:

$$w_i = - \frac{18.5057}{E} 9577 + 200d; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = \frac{3701}{E}$$

(ecuaciones 552)

II Caso borde superior empotrado.-

Para hallar las reacciones de las fuerzas y momentos que se producen en el borde superior empotrado, establecemos las ecuaciones de vínculo entre el anillo "3" y el borde superior del fuste cilíndrico. (ver figura N° 503).

El desplazamiento y el giro del borde superior empotrado por efecto de las fuerzas H_G y el momento M_G lo hallamos de las ecuaciones 152, 154, en las cuales reemplazamos los valores 401, 429, 431, lue

go, se tiene:

$$W_{H6} = 2970H_6/E ; \left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)_{H6} = 5309H_6/E$$

(ecuaciones 569)

$$W_{M6} = -5309H_6/E ; \left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)_{M6} = -19012H_6/E$$

Las ecuaciones de vínculo son:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_S + \mathcal{V}_{H6} + \mathcal{V}_{M6} &= \mathcal{V}_{i3} \\ V_S + V_G + V_{M6} &= V_{i3} \end{aligned} \quad (570)$$

Reemplazando en 570 los valores 520, 551, 569; y teniendo en cuenta 542, se tiene:

$$\begin{aligned} 177229 - 2970H_6 + 5309M_6 &= -430 \left[H_4 + H_5 - G \right] \\ -3701 - 5309H_6 + 19012M_6 &= 25488 \left[M_4 + M_5 - M_6 \right] \end{aligned}$$

Reemplazando en 541, los valores 537, 539, 540, en 544; y teniendo presente las relaciones 542, se tiene :

$$\begin{aligned} 364 &\therefore 141 H_G + 697 M_G = 17 H_G \\ -486 &\therefore 697 H_G + 6882 M_G = -2222.22 M_G \end{aligned}$$

Simplificando los dos últimos ecuaciones, se tiene :

$$364 - 158 H_G + 697 M_G = 0 \quad (\text{Ecuaciones 543})$$

$$\therefore 486 \therefore 697 H_G + 9104 M_G = 0$$

Resolviendo las ecuaciones 543, se tiene :

$$H_G = 4$$

(Ecuaciones 544)

$$M_G = 0$$

III Caso Borde Inferior Empotrado

Para hallar las reacciones de las fuerzas y momentos que se producen en el borde inferior, establecemos las condiciones de vínculo entre el borde inferior del conducto cilíndrico central y el anillo "A₄" (Ver Fig. N° 504). El desplazamiento y el giro del borde inferior empotrado por efecto de las fuerzas H₈ y el momento M₈, lo obtenemos de las ecuaciones 141, y 143 en las cuales reemplazamos los valores 401, 425A, 425B.

$$V_{A_8} = - 141 \frac{H_8}{E} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{H_8} = 697 \frac{H_8}{E}$$

(Ecuaciones 545)

$$V_{H_8} = - 697 \frac{M_8}{E} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{M_8} = 6882 \frac{M_8}{E}$$

Las ecuaciones de vínculo son :

$$\int_1 + \int_{H_8} + \int_{M_8} = \int_{A_4}$$

(Ecuaciones 546)

$$V_1 + V_{H_8} + V_{M_8} = V_{A_4}$$

Reemplazando en 546 los valores 528, 538 y 545, y teniendo en cuenta 542, se tiene :

$$3206 + 141 H_8 + 697 M_8 = -7 [H_7 + H_8]$$

$$\therefore 486 + 697 H_8 + 6882 M_8 = -439 [M_7 - M_8]$$

Simplificando se tiene :

$$3206 + 148 H_8 + 697 M_8 = -7H_7 \quad (\text{Ecuaciones 547})$$

$$\therefore 486 + 697 H_8 + 7321 M_8 = -439 M_7$$

Resolviendo las ecuaciones 531 y 547, se tiene:

$$H_7 = \therefore 11309 \text{ Kg/m} \quad M_7 = 367 \frac{\text{Kg-m}}{\text{m}} \quad (\text{Ecuaciones 548})$$

$$H_8 = 744 \text{ Kg/m} ; M_8 = -49 \frac{\text{Kg-m}}{\text{m}}$$

Simplificando las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$177229 - 3400H_6 + 5309M_6 = -430H_4 - 430H_5 \quad (571)$$

$$\therefore 3701 - 5309H_6 + 44500M_6 = 25488M_4 + 25488M_5$$

Resolviendo las ecuaciones 523, 534, 571, se tiene:

$$H_4 = 2951 \text{Kgs/m} ; M_4 = 219 \text{Kg-n/n}$$

$$H_5 = -2017 \text{Kgs/n} ; M_5 = -52 \text{Kg-n/n} \quad (\text{valores 572})$$

$$H_6 = 393 \text{Kgs/n} ; M_6 = -54 \text{Kg-n/n}.$$

III Caso borde inferior empotrado.-

Para hallar las reacciones de las fuerzas y momentos, que se producen en el borde inferior empotrado, establecemos las ecuaciones de vínculo entre el anillo "1.2" y el borde inferior del fuste cilíndrico.

(ver. figura N° 506).

El desplazamiento y el giro en el borde inferior empotrado por efecto de las fuerzas H_{10} y el momento M_{10} lo hallamos de las ecuaciones 141, 145, en las cuales reemplazamos los valores 401, 429, 431, luego:

$$w_{H10} = -2970 \frac{H_{10}}{E}; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{H10} = 5309.2 \frac{H_{10}}{E}$$

$$w_{M10} = -5309.2 \frac{M_{10}}{E}; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{M10} = 19012 \frac{M_{10}}{E}$$

(ecuaciones 575)

Las ecuaciones de vínculo son:

$$\delta_i + \delta_{H10} + \delta_{M10} = \delta_{iZ}$$

(574)

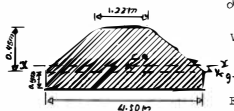
$$V_i + V_{H10} + V_{M10} = V_{iZ}$$

El desplazamiento y el giro de la zapata lo obtenemos de las ecuaciones 302 y 304, en las cuales reemplazamos los valores correspondientes:

$$\delta_{iZ} = - \frac{\alpha^2}{12E} H_{10}$$

$$V_{iZ} = - \frac{\alpha^2}{I_x E} M_{10}$$

(ecuaciones 575)



El área del anillo "i" es:

Fig. N° 207

es:

$$i = \frac{(4.50 + 1.22)}{2} \times 0.45 + 0.15 \times 4.5 =$$

$$i = 1.962 \text{ m}^2, \text{ siendo } 1/i = 0.508 \text{ m}^{-2}$$

El valor de su momento de inercia respecto al eje horizontal que pasa por su centro de gravedad se halla en la siguiente forma:

Sea "Yc" g. la distancia del centro de gravedad de la sección transversal de la zapata, a "Yc. G." = 0.087m. luego empleando las conocidas fórmulas para hallar el "I_x", se tiene:

$$I_x = 0.067 \text{ m}^4, \text{ siendo } \frac{I}{I_x} = 14.925 \text{ m}^4$$

Luego:

$$\int_{A,Z} = -7.62^2 \times 0.508 H_{10}/E = -30 H_{10}/E$$

(ecuaciones 576)

$$V_{A,Z} = -7.62^2 \times 14.925 M_{10}/E = -867 M_{10}/E$$

Reemplazando en 574, los valores 552, 573, 576, y teniendo en cuenta la relación 542m se tiene:

$$+18.5057 [9577 + 200d] + 2970 H_{10} + 5309 M_{10} = -30 H_{10}$$

$$-3701 - 5309 H_{10} - 19012 M_{10} = -867 M_{10}$$

El valor de "d" está dado por: $d = 24.55 + f$, por ser $f = 2.05 \text{ m}$.; luego $d = 26.60 \text{ m}$.

Reemplazando "d" por su valor en las últimas ecuaciones de vínculo, y resolviendo se tiene:

$$H_{10} = 56 \text{ Kgs-m/n}$$

(ecuaciones 577)

C A P I T U L O VI

VALORES DE LOS EFECTOS

QUE PRODUCE LA PRESION

HIDROSTATICA.

NOTA:

Los conceptos y formulas empleados para el desarrollo de éste capitulo son los que aparecen en un ejemplo resuelto en el folleto del Ing°. LABARTIERE

CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA

I Caso bordes libres radiales

Consideramos que la presión hidrostática no actúa en la cubierta, luego en este caso no existe desplazamientos, ni giros en ninguno de sus bordes. Los valores de la fuerza serán:

$$N_{\theta} = 0 \quad ; \quad N_{\phi} = 0 \quad (\text{Ecuaciones 600})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, será :

$$\delta_s = 0 \quad , \quad V_s = 0 \quad (\text{Ecuaciones 601})$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior, será :

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= 0 \quad ; \quad -N_{\theta} \cos \alpha = 0 \quad (\text{Ecuaciones 602}) \\ \delta_i &= 0 \quad ; \quad V_i = 0 \end{aligned}$$

II Caso borde superior empotrado

En este caso empleamos las ecuaciones 506, en las cuales reemplazamos los valores 504, 505, 601, y se tiene:

$$39,60 H_1 + 696 M_1 = -17 H_1,$$

$$696 H_1 + 24513,98 M_1 = -2222,22 M_1,$$

Resolviendo se tiene:

$$H_1 = 0 \quad (\text{Ecuaciones 603})$$

$$M_1 = 0$$

III Caso borde inferior empotrado

En este caso existen fuerzas y momentos, por la influencia de la pared esférica. Empleando las ecuaciones 510 en las cuales reemplazamos los valores 508, 602, y las cuatro primeras ecuaciones de 509, luego :

$$2299,06 H_2 + 5,306.06 M_2 = -430.10 H_2 H_3$$

$$-5,306.06 H_2 - 24513,98 M_2 = 25488 [M_2 - M_3]$$

Simplificando se tiene:

$$2729,16 H_2 + 5,306.06 M_2 = -430.10 H_3$$

$$5306,06 H_2 + 50,002 M_2 = -25488 \quad (\text{Ecuaciones 604})$$

PARED ESFERICO REBANADO

I Caso bordes libres radiales

(a) Efectos producidos por la presión hidrostática aplicada en el lado cóncavo,

Considerando que el peso específico del agua es de $\gamma = 1000 \text{ Kg/m}^3$, se tiene, según las ecuaciones 271 y 272, en las cuales reemplazamos los valores 401, 415, se tiene :

$$N\phi = \frac{806.67}{\text{Sen}^2 \phi} \left[2 + 32 \text{Cos}^3 \phi - 24 \text{Cos}^2 \phi \right] \quad (\text{Ecuaciones 605})$$

$$N_e = \frac{-806.67}{\text{Sen}^2 \phi} \left[-46 - 64 \text{Cos}^3 \phi + 24 \text{Cos}^2 \phi + 96 \text{Cos} \phi \right]$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, lo hallamos de las ecuaciones 275, en las cuales reemplazamos los valores 401, 413, 415, :

$$\int s = 0 ; V_s = - \frac{335315.20}{E} \quad (\text{Ecuaciones 606})$$

La fuerza el desplazamiento y el giro en el borde inferior lo hallamos de las ecuaciones 276, en los cuales reemplazamos los valores 401, 413, 415, y se tiene :

$$N\phi = -8604.48 ; -N\phi \text{Cos} \alpha_2 = -4302 \text{ Kg/m}$$

$$\int i = \frac{3334569.98}{E} ; V_i = -\frac{335315.20}{E} \quad (607)$$

II Caso borde superior empotrado

Empleando las ecuaciones 517, en las cuales reemplazamos los valores, 508, 516, 606 y simplificando, se tiene:

$$430.10 H_2 + 650.02 M_3 = -1001.66 H_3 \quad (\text{Ecuaciones 608})$$

$$-335315.20 + 650.02 H_3 - 25488 M_2 = 26965.82 M_3$$

Resolviendo las ecuaciones 604, 608, se tiene:

$$H_2 = -39 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}} \quad ; \quad M_2 = 20 \frac{\text{Kgs-m}}{\text{m}} \quad (\text{Ecuaciones 609})$$

$$H_3 = -4 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}} \quad ; \quad M_3 = 32 \frac{\text{Kgs-m}}{\text{m}}$$

III Caso borde inferior empotrado

Consideramos que el borde inferior de la pared sigue una dirección horizontal, luego debemos de tomar en cuenta el efecto que produce la componente horizontal de la fuerza $N \phi$ que está dado por la expresión $-N \phi \cos \alpha$, y la cual se puede apreciar en la figura N° 503, el desplazamiento y el giro que produce obtenemos de las ecuaciones 238 y 240, en las cuales reemplazamos los valores 401, 413, 415 y 607, :

$$\int -N \phi \cos \alpha_2 = \frac{-2460744}{E} \quad ; \quad V - N \phi \cos \alpha_2 = \frac{2796300}{E}$$

(Ecuaciones 610)

Empleando las ecuaciones 522, en los cuales reemplazamos los valores 520, las cuatro primeras ecuaciones de 521, y las ecuaciones 607, 610, se tiene:

$$3334569.98 - 2460744 + 572 H_4 + 650 M_4 = -430$$

$$\left[\begin{array}{c} H_4 + H_5 - H_6 \\ H_4 + H_5 - H_6 \end{array} \right]$$

$$- 33531520 + 2796300 - 650 H_4 - 1478 M_4 = 25488$$

$$\left[\begin{array}{c} M_4 + M_5 - M_6 \\ M_4 + M_5 - M_6 \end{array} \right]$$

Simplificando, se tiene:

$$873826 + 1002 H_4 + 650 M_4 = 430 H_5 + 430 H_6$$

$$2460985 - 650 H_4 - 26966 M_4 = 25488 M_5 - 25488 M_6$$

(Ecuaciones 611)

CUPULA DE FONDO

I Caso bordes libres radiales

(a) Efectos producidos por la presión hidrostática aplicada en el lado convexo

Considerando que el peso específico del agua es de $\gamma = 1000 \text{ Kg/m}^3$ y la altura de agua $H=8.80\text{m}$, se tiene :

Según las ecuaciones 279 y 280, en las cuales reemplazamos los valores 401, 421, se tiene:

$$N\phi = - \frac{12700}{\text{Sen}^2\phi} \left[5.23 - 9.48 \text{Cos}^2\phi + 4.233 \text{Cos}^3\phi \right] \quad (\text{Ecuaciones } 612)$$

$$N_e = \frac{12700}{\text{Sen}^2\phi} \left[-13.73 + 12.7 \text{Cos}\phi + 9.48 \text{Cos}^2\phi - 8.47 \text{Cos}^3\phi \right]$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, lo hallamos de las ecuaciones 283, en las cuales reemplazamos los valores 401, 419, 421, :

$$\delta_s = - \frac{799858}{E} ; \quad V_s = \frac{127000}{E} \quad (613)$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior, se halla de las ecuaciones 284, en las cuales reemplazamos los valores 401, 419, 421, luego:

$$N\phi = - 46920 \text{ Kg/m} ; \quad N\phi \text{Cos}\alpha_3 = 37536 \text{ Kg/m}$$

$$\delta_i = - \frac{4333006}{E} ; \quad V_i = \frac{967740}{E} \quad (\text{Ecuaciones } 614)$$

Para el desplazamiento del anillo "A₄" por efecto de la presión hidrostática, consideramos la

presión que actúa en la superficie horizontal media del anillo, (ver figura N° 401) la cual tiene un valor de:

$$\text{presión} = 1000 \text{ Kg/m}^3 \times \left[5.85 + 0.45/2 \right] = 6075 \text{ Kg/m}^2$$

El valor de la fuerza horizontal total, será:

$$P = -6075 \times 0.45 = -2733.75 \text{ Kg/m} \quad (\text{Ecuación 615})$$

Empleando la ecuación 302, en la cual reemplazamos los valores 401, 422, 615; se tiene:

$$\int_{A_4}^P = -20250 / E \quad (616)$$

II Caso borde superior empotrado

En este caso las ecuaciones de vínculo son:

$$\int S + \int H_7 + \int M_7 = \int A_4 + \int_{A_4}^P \quad (\text{Ecuaciones 617})$$

$$V_S + V_{E7} + V_{M7} = V_{A4}$$

Reemplazando en 617, los valores 528, 529, 613, 616, se tiene:

$$\therefore 799858 + 23H_7 + 342 M_7 = -7 [H_7 + H_8] - 20250$$

$$127000 + 342H_7 + 10047M_7 = -439 [M_7 - M_8]$$

Simplificándolos, se tiene:

$$\therefore 779608 + 30 H_7 + 342 M_7 = -7 H_8 \quad (\text{Ecuaciones 618})$$

$$127000 + 342 H_7 + 10486M_7 = 43 M_8$$

III Caso borde inferior empotrado

Consideramos que el borde inferior de la capsula sigue una dirección horizontal, luego debemos to

mar en cuenta el efecto que produce la componente horizontal de la fuerza $N\delta$, que está dado por la expresión $-N\delta \cos \alpha_3$, y la cual se puede apreciar en la figura 503; el desplazamiento y el giro que produce lo obtenemos de las ecuaciones 238 y 240, en las cuales reemplazamos los valores 401, 419, 421, 614, :

$$\begin{aligned} \int -N\delta \cos \alpha_3 &= 50448384/E & (619) \\ V-N\delta \cos \alpha_3 &= 97743744/E \end{aligned}$$

Empleando las ecuaciones 533, en las cuales reemplazamos los valores 520, las cuatro primeras ecuaciones de 532, 614, 619, se tiene:

$$-4333006 + 50448384 + 1344 H_5 + 2604M_5 = -430 [H_4 + H_5 - H_6]$$

$$967740 - 97743744 - 2604H_5 - 10047M_5 = 25488 [M_4 + M_5 - M_6]$$

simplificando se tiene:

$$46115378 + 1774H_5 + 2604M_5 = -430H_4 + 430H_6 \quad (620)$$

$$-96776004 - 2604H_5 - 35535 M_5 = 25488M_4 - 25488M_6$$

CONDUCTO CILINDRICO CENTRAL

I Caso bordes Libres

(a) Efectos producidos por la presión hidrostática aplicada en el lado convexo.

Considerando que el peso específico del agua es de $\gamma = 1000 \text{ Kg/m}^3$ y empleando las ecuaciones 130, en las cuales reemplazamos los valores 401, 425A, se tiene:

$$N_x = 0 ; N\delta = -5850 + 1000X \quad (\text{Ecuaciones 621})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior, lo hallamos de las ecuaciones 132, en las cuales reemplazamos los valores 401, 425A:

$$W_s = 0 ; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s = - \frac{14286}{E} \quad (\text{Ecuaciones 622})$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior lo hallamos de las ecuaciones 131, en las cuales reemplazamos los valores 401, 425A:

$$W_i = \frac{83571}{E} ; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = - \frac{14286}{E} \quad (\text{Ecuaciones 623})$$

II Caso borde superior empotrado

Empleando las ecuaciones 541, en las cuales reemplazamos los valores 539, 540, 542, 622; y simplificando, se tiene:

$$-158H_9 + 697M_9 = 0 \quad (\text{Ecuaciones 624})$$

$$14286 - 697H_9 + 9104M_9 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones 624, se tiene :

$$H_9 = -10 ; M_9 = -2 \quad (\text{Valores 625})$$

III Caso borde inferior empotrado

En este caso las ecuaciones de vínculo son:

$$\delta i + H_8 + M_8 = A_4 + \frac{P}{A_4} \quad (\text{Ecuaciones 626})$$

$$V_i + V H_8 + V M_8 = V A_4$$

Reemplazando en 626, los valores 528, 542, 616, 623, se tiene:

$$-83571 + 141H_8 + 697M_8 = -7 H_7 + H_8 - 20250$$

$$14286 - 697H_8 - 6882M_8 = -439 M_7 - M_8$$

Simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} -63321 + 148H_8 + 697M_8 &= -7H_7 & (\text{Ecuaciones 627}) \\ 14286 - 697H_8 - 7321M_8 &= -439M_7 \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones 618, 627, se tiene:

$$\begin{aligned} H_7 &= 42246 \text{ Kg/m} ; M_7 = -1385 \text{ Kg-m/m} & (\text{Ecuaciones 628}) \\ H_8 &= -2160 \text{ Kg/m} ; M_8 = 125 \text{ Kg-m/m} \end{aligned}$$

FUSTE CILINDRICO

I Caso borde libres

En este caso consideramos que la presión hidrostática no actúa en el fuste, solamente para producir una fuerza vertical en el borde superior del fuste.

(a) Efectos producidos por una fuerza vertical por unidad de longitud aplicada en el borde superior.

El valor de la fuerza vertical está dado por la expresión:

$$P = (-N\phi \text{ Sen } \alpha_2) + (-N\phi \text{ Sen } \beta) = 8604.48 \times 0.866 + 46920 \times 0.6$$

de donde: $P = 35603 \text{ Kg/m}$ (Valor 628A)

Por las ecuaciones 157 y reemplazando en ella el valor 628A,:

$$N\phi = 0 ; N_x = -35603 \quad (\text{Ecuaciones 629})$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior lo hallamos de las ecuaciones 158, en la cual reemplazamos los valores 401, 429, 628A; cuando $x=d$, se tiene:

$$W_s = \frac{-658859}{E} ; \frac{\partial W}{\partial X} = 0 ; (\text{Ecuaciones 630})$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior lo hallamos de las ecuaciones 158, en la cual reemplazamos los valores 401, 429, 628A, cuando $x=0$, se tiene:

$$V_i = - \frac{658859}{E} \quad ; \quad \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)_i = 0 \quad (\text{Ecuaciones 631})$$

II Caso borde superior empotrado

Empleando las ecuaciones 570, en las cuales reemplazamos los valores 520, 569, 630; y teniendo en cuenta 542, después de simplificarlo, se tiene:

$$\begin{aligned} 658859 - 3400H_6 + 5309M_6 &= -430H_4 - 430H_5 \\ -5309H_6 + 44500M_6 &= 25488M_4 + 25488M_5 \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones 632})$$

Resolviendo las ecuaciones 611, 620, 632, se tiene:

$$\begin{aligned} H_4 &= 6946 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}} ; M_4 = 1356 \frac{\text{Kgs-m}}{\text{m}} \\ H_5 &= -24429 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}} ; M_5 = -2902 \frac{\text{Kgs-m}}{\text{m}} \quad (\text{Ecuaciones 633}) \\ H_6 &= -4175 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}} ; M_6 = -1378 \frac{\text{Kgs-m}}{\text{m}} \end{aligned}$$

III Caso borde Inferior Empotrado

Empleando las ecuaciones 574, en las cuales reemplazamos los valores 573, 576, 631, y teniendo en cuenta 542, se tiene:

$$\begin{aligned} 658859 + 2970 H_{10} + 5309 M_{10} &= 30 H_{10} \\ -5309 H_{10} - 19012 M_{10} &= 876 M_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Reduciendo se tiene : } H_{10} &= -455 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}} \\ H_{10} &= 133 \frac{\text{Kgs-m}}{\text{m}} \quad (\text{Valores 634}) \end{aligned}$$

C A P I T U L O V I I

VALORES DE LOS EFECTOS

QUE PRODUCE EL POSTENSADO

DE LA PARED ESFERICA

REBANADO.

NOTA:

Los conceptos y formulas empleados para el desarrollo de éste capitulo son los que aparecen en un ejemplo resuelto en el folleto del Ing^o. LABARTHE

CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA

I Caso bordes libres radiales

Consideramos que el postensado no actúa en la cubierta, luego en este caso no existe desplazamiento, ni giros, en ninguno de sus bordes.

Los valores de las fuerzas serán : $N_{\theta} = 0$; $N_{\phi} = 0$

(Ecuaciones 701). El desplazamiento y el giro en el borde superior serán :

$$\int s = 0 ; \int v_s = 0 \quad (\text{Ecuaciones 702})$$

La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior será : $N_{\theta} = 0$; $\int i = 0$; $\int v_i = 0$ (Ecuaciones 703)

II Caso borde superior empotrado

En este caso emplearemos las ecuaciones 506, en los cuales reemplazamos los valores 504, 505, 702, Luego :

$$39.60 H_1 + 696 M_1 = -17 H_1$$

$$696 H_1 + 24513.98 M_1 = -2222.22 M_1$$

Resolviendo, obtenemos que : $H_1 = 0$; $M_1 = 0$

(Valores 704)

III Caso borde inferior empotrado

En este caso existen fuerzas y momentos por la influencia de la pared. Aplicando las ecuaciones 510, en las cuales reemplazamos los valores 508, las cuatro primeras ecuaciones de 509, 703, y simplificando, se tiene :

$$27.29.16 H_2 + 5306.06 M_2 = -430.10 H_3$$

$$5306.06 H_2 + 50002 M_2 = 25488 N_3 \quad (\text{Ecuaciones 705})$$

PARED ESFERICO REBANADO

ICaso bordes libres radiales

(a) Efectos producidos por el postensado

Según las ecuaciones 285 y 286, en las cuales reemplazamos los valores 401, 415, se tiene : $N_\phi = 0$

$$N_\phi = -77.44 \quad \gamma p$$

don $(0.5 - \cos \phi)$ (Ecuaciones 706)

El desplazamiento y el giro en el borde superior lo hallamos de las ecuaciones 287, en las cuales reemplazamos los valores 401, 413, 415, : $\delta_s = 0$;

$$v_s = 290.4 \frac{\gamma p}{E} \quad (\text{Ecuaciones 707})$$

La fuerza de desplazamiento y el giro en el borde inferior lo hallamos de la ecuación 288, en las cuales

reemplazamos los valores 401, 413, 415, luego :

$$H_1 = 0; \quad \delta_1 = 2555.52 \frac{\delta_p}{E}; \quad V_1 = -129.712 \frac{\gamma_p}{E} \quad (708)$$

II Caso borde superior empotrado

Empleando las ecuaciones 517 en las cuales reemplazamos los valores 508, 516, 707, y simplificando, se tiene :

$$\begin{aligned} 430.10 H_2 + 650.02 M_3 &= -1001.66 H_3 \\ 290.4 \gamma_p + 650.02 H_3 - 25488 M_2 &= -26965.82 M_3 \end{aligned}$$

(Ecuaciones 709)

Resolviendo las ecuaciones 705, 709, se tiene:

$$\begin{aligned} H_2 &= 0.0332442 \gamma_p; \quad M_2 = -0.01755 \gamma_p \\ H_3 &= 0.00366 \gamma_p; \quad M_3 = -0.027446 \gamma_p \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones } 710)$$

III Caso borde inferior empotrado

Empleando las ecuaciones 522, en las cuales reemplazamos los valores 520, los cuatro primeros valores de 521, 708, y simplificando, se tiene:

$$\begin{aligned} -2555.52 \gamma_p + 1002 H_4 + 650 M_4 &= 430 H_5 + 430 H_6 \\ -129.712 \gamma_p - 650 H_4 - 26966 M_4 &= 25488 M_5 - 25488 H_6 \end{aligned}$$

(Ecuaciones 711)

CUPULA DE FONDO

I Caso bordes libres radiales

En este caso consideramos que no existe ~~pot~~ tensión en la cúpula de fondo, luego los valores de las fuerzas serán :

$$N \delta = 0 ; N \delta = 0 \quad (\text{valores } 712)$$

El desplazamiento y el giro en el borde superior serán: $\delta_s = 0 ; \psi_s = 0$ (Ecuaciones 713)
 La fuerza, el desplazamiento y el giro en el borde inferior serán: $N \delta = 0 ; \delta_i = 0 ; \psi_i = 0$ (ecuaciones 714)

II Caso borde superior empotrado

Empleando las ecuaciones 530, en la cual reemplazamos los valores 528, 529, 703, y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} 30 H_7 + 342 M_7 &= -7 H_8 \\ 342 H_7 + 10486 M_7 &= 439 M_8 \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones } 715)$$

III Caso borde inferior empotrado

Empleando las ecuaciones 533, en la cual reemplazamos los valores 520, 532, 714 y simplificando, se tiene:

$$\begin{aligned} 1774 H_5 + 2604 M_5 &= -430 H_4 + 430 H_6 \\ -2604 H_5 - 35535 M_5 &= 25488 M_4 - 25488 M_6 \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones } 716)$$

CONDUCTO CILINDRICO CENTRAL

I Caso bordes libres

En este caso consideramos que no existe postensado en el conducto cilindrico central, luego:
 $N_x = 0 ; N \delta = 0$ (Ecuaciones 717)

El desplazamiento y el giro en el borde superior serán:

$$V_s = 0 ; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s = 0 \quad (\text{Ecuaciones } 718)$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior, serán :

$$U_1 = 0 ; \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_1 = 0 \quad (\text{Ecuaciones 719})$$

II Caso borde superior empotrado

Empleando las ecuaciones 541, en las cuales reemplazamos los valores 539, 540, 542, 718, simplificando y resolviendo las ecuaciones, se tiene : $H_9 = 0$
 $M_9 = 0$ (Ecuaciones 720)

III Caso borde inferior empotrado

Empleando las ecuaciones 546, en la cual reemplazamos los valores 528, 545, 719, y simplificando se tiene :

$$\begin{aligned} 148 H_8 + 697 M_8 &= -7 H_7 \\ -697 H_8 - 7321 M_8 &= -439 M_7 \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones 721})$$

Resolviendo las ecuaciones 715 y 721, se tiene :

$$\begin{aligned} H_7 &= 0 ; M_7 = 0 \\ H_8 &= 0 ; M_8 = 0 \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones 722})$$

FUSTE CILINDRICO

I Caso bordes libres

En este caso consideramos que no existe postensado en el fuste cilindrico, luego : $N_x = 0$;
 $H \phi = 0$ (Ecuaciones 723)

El desplazamiento y el giro en el borde superior serán

$$U_8 = 0 ; \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_8 = 0 \quad (\text{Ecuaciones 724})$$

El desplazamiento y el giro en el borde inferior serán :

$$V_1 = 0 ; \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_f = 0 \quad (\text{Ecuaciones 725})$$

II Caso borde superior empotrado

Empleando las ecuaciones 570, en las cuales los reemplazamos 520, 5, 569, 724, y simplificando, se tiene :

$$\begin{aligned} \therefore 3400 H_6 + 5309 M_6 &= -430 H_4 - 430 H_5 \\ \therefore 5309 H_6 + 44500 M_6 &= 25488 M_4 + 25488 M_5 \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones 726})$$

Resolviendo las ecuaciones 711, 716, 726, se tiene :

$$\begin{aligned} H_4 &= 3.88849 \gamma p ; M_4 = -0.71196 \gamma p \\ H_5 &= -1.80903 \gamma p ; M_5 = 0.62871 \gamma p \quad (\text{Ecuaciones 727}) \\ H_6 &= 0.23254 \gamma p ; M_6 = -0.01954 \gamma p \end{aligned}$$

III Caso borde inferior empotrado

Empleando las ecuaciones 574, en las cuales los reemplazamos los valores 573, 576, 725 y teniendo en cuenta 542, después de resolverlo, se halla que :

$$\begin{aligned} H_{10} &= 0 \\ H_{10} &= 0 \quad (\text{Ecuaciones 728}) \end{aligned}$$

C A P I T U L O V I I I

VALORES DE LOS EFECTOS

QUE PRODUCE EL POSTENSADO

DE LOS ANILLOS A_2 Y A_3

NOTA:

Los conceptos y formulas empleados para el desarrollo de este capitulo son los que aparecen en un ejemplo resuelto en el folleto del Ing°. LABARTHE

POSTENSADO DEL ANILLO A₃
PARED ESFERICO REBANADO

Caso del borde inferior empotrado

Sea "P₃" el efecto del postensado de anillo "A₃", que actúa como una fuerza horizontal comprimiendo al anillo.

El desplazamiento del anillo "A₃" por causa del postensado de dicho anillo, lo obtenemos de la ecuación 302, en la cual reemplazamos los valores 401, 416, luego : $\int_{A_3}^1 = - 430 \frac{P_3}{E}$ (Ecuación 801)

Las ecuaciones de vínculo de anillo "A₃" y el borde inferior de la pared serán : $\int_{A_3}^1 + \int_{A_3}^1 = \int_{H_4}^1 + \int_{H_4}^1 = \int_{A_3}^1 + \int_{A_3}^1 \quad V_{H_4} + V_{M_4} = V_{A_3}$ (Ecuaciones 802)

Reemplazando en 802 los valores 520, los cuatro primeros valores de 521, 801 y simplificando, se

tiene :

$$430 P_3 + 1002 H_4 + 650 M_4 = -430 H_5 + 430 H_6$$

$$- 650 H_4 - 26966 M_4 = 25488 M_5 - 25488 M_6 \quad (\text{Ecuaciones } 803)$$

CÚPULA DE FONDO

Caso del borde inferior empotrado

Las ecuaciones de vínculo entre el anillo A_3 y el borde inferior de la cúpula de fondo, serán :

$$\int H_5 + \int M_5 = \int A_3 + \int A_3^1$$

$$\nabla H_5 + \nabla M_5 = \nabla A_3 \quad (\text{Ecuaciones } 804)$$

Reemplazando en 804, los valores 520, los cuatro primeros valores de 532, 801 y simplificando, se tiene :

$$430 P_3 + 1774 H_5 + 2604 M_5 = - 430 H_4 + 430 H_6$$

$$- 2604 H_5 - 35535 M_5 = 25488 M_4 - 25488 M_6$$

(Ecuaciones 805)

FUSTE CILINDRICO

Caso del borde superior empotrado

Las ecuaciones de vínculo entre el anillo "A₃" y el borde superior del fuste cilindrico serán :

$$\int H_6 + \int M_6 = \int A_3 + \int A_3^1$$

$$\nabla A_6 + \nabla M_6 = \nabla A_3 \quad (\text{Ecuaciones } 806)$$

Reemplazando en 806, los valores 520, 542, 569, 801, y simplificando:

$$\begin{aligned} 430 P_3 - 3400 H_6 + 5309 M_6 &= -430 H_4 - 430 H_5 \\ -5309 H_6 + 44500 M_6 &= 25488 M_4 + 25488 H_5 \end{aligned}$$

(ecuaciones 807)

Resolviendo las ecuaciones 803, 805, 807, se tiene:

$$\begin{aligned} H_4 &= -0.30954 P_3 ; M_4 = 0.02459 P_3 \\ H_5 &= -0.17682 P_3 , M_5 = 0.02942 P_3 \quad (\text{Ecuaciones 803}) \\ H_6 &= 0.139119 P_3 ; M_6 = 0.04754 P_3 \end{aligned}$$

Los valores de las otras fuerzas y momentos son:

$$\begin{aligned} H_1 &= 0 ; H_2 = 0 ; H_3 = 0 ; H_7 = 0 ; H_8 = 0 ; H_9 = 0 \\ H_{10} &= 0 . \\ M_1 &= 0 ; M_2 = 0 ; M_3 = 0 ; M_7 = 0 ; M_8 = 0 ; M_9 = 0 \\ M_{10} &= 0 . \end{aligned}$$

(Valores 809).

POSTENSADO DEL ANILLO A₂ CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA.

Caso del borde inferior empotrado

Sea "P₂" la fuerza horizontal por causa del postensado del anillo "A₂", que actúa sobre dicho anillo produciendo compresión.

El desplazamiento del anillo A₂ por causa del postensado lo obtenemos de la ecuación 302, en la cual reemplazamos los valores 401, 410, luego: $f_{A_2}^1 =$

$$-430 \frac{P_2}{E} \quad (\text{Ecuación 810})$$

Las ecuaciones de vínculo del anillo "A₂" y el borde inferior de la cubierta en cúpula esférica será :

$$\begin{aligned} \int H_2 + \int M_2 &= \int A_2 & \int A_2 \\ \sqrt{H_2} + \sqrt{M_2} &= \sqrt{A_2} & \text{(Ecuaciones 811)} \end{aligned}$$

Reemplazando en 811 los valores 508, los cuatro primeros valores de 509, 810 y simplificando, se tiene:

$$\begin{aligned} 430 P_2 + 2729.16 H_2 + 5306.06 M_2 &= - 430 H_3 \\ 5306.06 H_2 + 50002 M_2 &= 25488 M_3 \quad \text{(Ecuaciones 812)} \end{aligned}$$

PARED ESFERICO REBANADO

Caso del borde superior empotrado

Las ecuaciones de vínculo entre el anillo "A₂" y el borde superior de la pared, será :

$$\begin{aligned} \int H_3 + \int M_3 &= \int A_2 \int A_2 \\ \sqrt{H_3} + \sqrt{M_3} &= \sqrt{A_2} & \text{(Ecuaciones 813)} \end{aligned}$$

Reemplazando en 813, los valores 508, 516 810 y simplificando, se tiene : 430 P₂ + 430 H₂ + 650 M₃ = 1001.66 H₃
650 H₃ - 25488 M₂ = - 26965.82 M₃ (Ecuaciones 814)

Resolviendo las ecuaciones 812 y 814, se tiene :

$$\begin{aligned} H_2 &= - 0.19093 P_2 ; M_2 = 0.04817 P_2 \\ M_3 &= - 0.38303 P_2 ; M_3 = 0.05476 P_2 \quad \text{(Valores 815)} \end{aligned}$$

C A P I T U L O IX

CALCULO DE LOS VALORES DE

" δ_p " ; " P_2 " ; " P_3 " Y COMPROBACION

DE LOS ESPESORES.

NOTA:

Los conceptos y formulas empleados para el desarrollo de este capitulo son los que aparecen en un ejemplo resuelto en el folleto del Ing°. LABARTHÉ

Los valores de H_n ; $(-N\phi \cos \alpha_n)$ y de M_n obtenidos en los capítulos V al VIII aparecen en los cuadros N° 900 ; 901 ; 902 respectivamente. En el cuadro N° 903, se han obtenido los posibles valores de " χ_p " para diferentes " ϕ " de la pared esférica rebanada, mediante la siguiente expresión :

$$\chi_p = \frac{(La \ 2^{da} \text{ Ecuación de 513}) + (La \ 2^{da} \text{ Ecuación de 605})}{(La \ 2^{da} \text{ Ecuación de 706})}$$

En el cuadro N° 904 se han obtenido los valores de $N\phi$ con el borde inferior de la pared, cuando $\phi = \alpha/2$:

Para el caso de borde libre radial se han empleado las 2^{das} ecuaciones de 513, 605, 706.

Para el caso de $(-N \cdot \phi \cos \alpha_2)$, H_4 y M_4 , se han hecho uso de las terceras de las ecuaciones 237 y 239.

En el cuadro N° 905 se han obtenido los valores de $N \cdot e$ en el borde inferior de la cúpula de fondo, cuando $\phi = 3$

Para el caso de borde libre radial se han empleado las 2^{as} ecuaciones de 525, 612, 712.

Para el caso de $(-N \cdot \phi \cos \alpha_3)$, H_5 , M_5 , se han hecho uso de las 3^{as} de las ecuaciones 237 y 239.

El cuadro 909 representa la suma de los valores de los cuadros 900 y 901, en las cuales se han reemplazado los valores 903 y 906.

El cuadro No 910 es el correspondiente al 901, en la cual se han reemplazado los valores 903 y 906.

Cuadro N° 900
VALORES DE Hn

Hn	P. p + s/c	Presión H ₂ O	Posfensado de la pared	Potens. de los anillos
H ₁	524	0	0	0
H ₂	-1274	- 39	0.0332442 X p	- 0.19095 P ₂
H ₃	568	- 4	0.00366 X p	- 0.30503 P ₂
H ₄	2951	6946	3.88849 X p	- 0.30954 P ₃
H ₅	-2017	- 24429	-1.80903 X p	- 0.17682 P ₃
H ₆	393	- 4176	0.23254 X p	3.13919 P ₃
H ₇	-11309	42246	0	0
H ₈	744	- 2160	0	0
H ₉	4	- 10	0	0
H ₁₀	- 180	- 455	0	0

VALORES DE N₆ Cos α_n

H _n	R. p. + s/c	Presión H ₂ O	- N ₆ Cos α _n
H ₂	1659	0	- N ₆ Cos α ₁
H ₄	-4485	- 4302	- N ₆ Cos α ₂
H ₆	-1958	37536	- N ₆ Cos α ₃

Cuadro No 902

VALORES DE M_n

M _n	R. p. + s/c	Presión H ₂ O	Postensado de la pared	Pontons. de los anillos
M ₁	- 13	0	0	0
M ₂	- 89	20	-0.01755 δ p	0.04017 P ₂
M ₃	- 96	32	-0.027446 δ p	0.05476 I ₂
M ₄	219	1356	-0.71196 δ p	0.02459 P ₃
M ₅	- 52	-2902	-0.62871 δ p	0.02942 I ₃
M ₆	- 54	-1378	-0.01954 δ p	0.04754 P ₃
M ₇	367	-1385	0	0
M ₈	- 49	125	0	0
M ₉	0	- 2	0	0
M ₁₀	56	133	0	0

VALORES POSIBLES DE χ^2 P

ϕ	E.P. Qa/c	Intrusión H ₂ O	Postensado de la pared	I+II	χ^2 P
60	-871	0	0	-871	—
64	-260	4033	-4.2875 χ^2 P	3773	£30
68	354	9680	-9.0039 χ^2 P	10034	1114
72	970	14520	-14.0677 χ^2 P	15498	1102
76	1616	18553	-19.3936 χ^2 P	20169	1040
80	2276	23393	-24.8922 χ^2 P	25669	1031
84	2960	29040	-30.4591	32000	1051
88	3675	34687	-35.9957 χ^2 P	38362	1036
92	4423	39527	-41.3979 χ^2 P	43950	1062
96	5217	45980	-46.5550 χ^2 P	51197	1100
100	6062	51627	-51.3706 χ^2 P	57689	1125
104	6974	57274	-55.7464 χ^2 P	64248	1153
108	7965	64534	-59.5854 χ^2 P	72499	1217
112	9054	70987	-62.7984 χ^2 P	80041	1275
116	10272	78247	-65.3155 χ^2 P	88519	1355
120	11655	86045	-67.0630 χ^2 P	97700	1457

Cuadro nº 904

VALORES DE M_6 EN EL BORDE INFERIOR DE LA PARED ESFERICA REBAJADO

	Borde libre Horizontal		Empotrado		Total
	Radial	$-N_6 \cos \alpha_2$	H_4	M_4	
P.p. + s/c	11655	-67275	44265	3733	-7692
Presión del agua	86045	-64530	103230	21664	146439
Postens. de la pared	-67.06304 δp	0	58.32735 δp	-12.13536 δp	-20.87105 δp
Postens. del anillo	0	0	-4.64310 P_3	0.41914 P_3	-4.22396 P_3

Cuadro nº 905

VALORES DE N_6 EN EL BORDE INFERIOR DE LA CUPULA DE FONDO

	Borde libre Horizontal		Empotrado		Total
	Radial	$N_6 \cos \alpha_3$	H_5	M_5	
P.p. + s/c	-580	34539	-35580	-1777	-3598
Presión E_2 0	-64891	662135	-432286	-99102	65856
Post. pared	0	0	-31.91129 δp	-21.40501 δp	-10.42628 δp
Post. anillo	0	0	-3.11910 P_3	1.00537 P_3	-2.11373 P_3

Cuadro nº 906

VALORES DE N_0 EN EL BORDE INFERIOR DE LA CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA

	Borde Libre Horizontal		Empotrado		Total
	Radial	- $N \delta \cos \alpha$ 1	H_2	I_2	
Popo. + s/c	- 896	34616	- 26907	- 4550	2475
Precisión H_2 0	0	0	- 824	975	151
Post. anillo	0	0	-4.03244 P_2	2.54795 P_2	-1.68449 P_2

Cuadro nº 907

VALORES DE N_0 EN EL BORDE SUPERIOR DE LA PARED ESFERICA REANADO

	Borde Libre	Empotrado		Total
		H_3	M_3	
Popo. + s/c	- 871	8520	- 1636	6013
Precisión H_2 0	- 45174	- 60	545	-44699
Post. Pared	0	75	- 614	- 539
Post. anillo	0	-5.745445	0.93338 P_2	- 4.81207 P_2

Cálculo de los valores : " γ_p " y " P_3 "

La suma total de los valores de n_e en el borde inferior de la pared esférica rebanoado debe ser igual o menor que cero.

El caso más desfavorable para el cálculo de " γ_p " y " P_3 " se presenta cuando el depósito está lleno de agua, luego procederemos a sumar los valores totales hallados en el cuadro N° 904, luego :

$$- 7622 + 146409 - 20.87105 \gamma_p - 4.22396 P_3 = 0$$

Simplificando se tiene:

$$138787 - 20.87105 \gamma_p - 4.22396 P_3 = 0$$

(Ecuación 901)

La suma total de los valores de N_e en el borde inferior de la cúpula de fondo debe ser igual o menor que cero.

El caso más desfavorable para el cálculo de " γ_p " y " P_3 " se presenta cuando el depósito se encuentra lleno de agua, luego procederemos a sumar los valores totales hallados en el cuadro N° 905, y se tiene :

$$- 3398 + 65856 - 10.42628 \gamma_p - 2.113737 P_3 = 0$$

Simplificando se tiene :

$$62458 - 10.42628 \gamma_p - 2.11373 P_3 = 0 \quad (\text{Ecuación 902})$$

Si nos dedicamos a resolver las ecuaciones 901 y 902, obtendríamos valores de " γ_p " superiores a los hallados en la tabla N° 903; observando el cuadro N° 903, deducimos que el valor promedio de " γ_p " será : $\frac{\sum \gamma_p}{n} = \frac{17026}{15} = 1135$; si queremos que

exista una compresión residual cuando actúe la presión del agua y para asegurarla impermeabilidad, le agregamos un $\pm 13\%$, y tendremos : $\chi_p = 1300$ (valor 903)

Reemplazando 903 en 901, obtenemos el valor de P_3 , necesario para anular la tracción en el borde inferior de la pared esférica :

$$P_3 = \frac{138787 - 20.87105 \times 1300}{4.22396}$$

de donde : $P_3 = 26434$ (Valor 904)

Reemplazando 903 en 902, obtenemos el valor de P_3 , necesario para anular la tracción en el borde inferior de la cúpula de fondo, :

$$P_3 = \frac{62458 - 10.42628 \times 1300}{2.11373} = 23136 \quad (\text{Valor 905})$$

Comparando los valores 904, 905, deducimos que el valor 904, es el más favorable, pero éste valor solamente sirve para anular las tracciones en el borde inferior de la pared esférica, pero como queremos que exista en dicho borde una cierta compresión residual que garantice la impermeabilidad, podemos tomar esta compresión residual como de $-5 \frac{\text{Kgs}}{\text{cm}^2}$ que vendría a ser : $N_e = -5 \text{ Kgs/cm}^2 \times 100 \times 20 = -10000 \text{ Kgs/m}$

Luego la ecuación 901, podría escribirse así : $138787 - 20.87105 \chi_p - 4.22396 P_3 = -10000$
Reemplazando 903, y resolviendo, se tiene :

$$P_3 = 28800 \frac{\text{Kgs}}{\text{m}} \quad (\text{Valor 906})$$

do los valores totales del cuadro 905, a excepción - del correspondiente a la presión del agua, deducimos que esta suma total no sea mayor que el esfuerzo admisible del concreto o sea a :

$$N_e = -0.55 \times 0.85 \times 210 \times 100 \times 10 = -98175 \text{ Kgs/m}^2;$$

$$\text{luego : } -3398 - 10.42628 \gamma_p - 2.11373 P_3 < -98175$$

(909)

Reemplazando en 908, los valores 905 y 906, se tiene :

$$-77.827 \leq -98175; (910)$$

(Es decir menor en valor absoluto). En conclusión se cumple la condición 909, luego podemos decir que el espesor elegido para la cúpula de fondo según el resultado 910, se le puede disminuir o no postensar antes de los 14 días.

El esfuerzo de compresión máximo admisible en el concreto que actuará durante un tiempo considerable es : $0.45 f'c$, o sea $N_e = -0.45 \times 210 \times 100 \times 10 = -94500 \text{ Kgs/m}$, es mayor que el actuante: -77827 , luego cumple con el reglamento.

CÁLCULO DEL VALOR DE "P₂"

La suma total de los valores de N_e en el borde inferior de la cubierta debe ser igual o menor que cero.

El caso mas desfavorable para el calculo de "P₂" se presenta cuando el depósito está lleno de agua, luego procederemos a sumar los valores totales hallados en el cuadro N° 906, y se tiene :

COMPROBACION DEL ESPESOR DE LA PARED

Para comprobar el espesor de la pared, lo haremos en el caso más desfavorable, que sería cuando el depósito está vacío, en este caso la compresión máxima sería en el borde inferior, sumando los valores totales del cuadro 904, a excepción del correspondiente a la presión del agua, deducimos que esta suma total no sea mayor que el esfuerzo admisible del concreto o sea: $N_e = 0.55 \times 0.85 \times 210 \times 100 \times 20 = 196350$ Kgs/m. $-0.55(0.85 f'_c)(I_x/h)$

Luego : $-7622 - 20.87105 \gamma_p - 4.22396 P_3 \leq -19650$,
(907).

Reemplazando en 907, los valores 903 y 906, se tiene :
 $-156404 - 196350$; (908) Es decir menor en valor absoluto). En conclusión se cumple la condición 907, luego podemos decir que el espesor elegido para la pared esférica rebonado es el adecuado, y que es posible disminuirlo o si no postensor antes de los 14 días.

El esfuerzo de compresión máximo admisible en el concreto es : $0.45 f'_c$.

Luego : $N_e = -0.45 \times 210 \times 100 \times 20 = -190000$ Kgs/m;
 mayor que el actuante : -156404 , luego cumple con el reglamento.

COMPROBACION DEL ESPESOR DE LA CUPULA DE FONDO

Para comprobar el espesor de la cúpula de fondo lo haremos en el caso más desfavorable, que sería cuando el depósito está vacío, en este caso la compresión máxima sería en el borde inferior, luego suman

$$2475 + 151 - 1.68449 P_2 = 0 \quad (\text{Ecuación 911})$$

de donde $P_2 = 1559$; (912).

La suma total de los valores de N_e en el borde superior de la pared esférica debe ser igual o menor que cero.

El caso más desfavorable para el cálculo de " P_2 ", se presenta cuando el depósito está vacío, luego procederemos a sumar los valores hallados en el cuadro 907, a excepción del correspondiente a la presión del agua, y se tiene :

$$6013 - 4.81207 P_2 = 0 \quad (\text{Ecuación 913})$$

de donde $P_2 = 1250$; (Valor 914).

En nuestro caso consideramos la ecuación 911 para el cálculo de P_2 , el cual lo igualamos a un valor menor que cero, tal como $N_e = -5 \cdot 100 \cdot 7 = -3,500$ Kg/m que de una compresión residual de -5 Kg/cm, luego:

$$2475 + 151 - 1.68449 P_2 = -3500 \quad (\text{Ecuación 915})$$

de donde: $P_2 = 3,700$ Kg/m (valor 916)

Cuadro No. 909

VALORES DE $H_n + (H \beta \cos \alpha n)$.

H_n	Topo + s/c	Prosi6n $H_2 O$	Post. Fared	Post. inilio	Total sin $H_2 O$	Total con $H_2 O$
H_1	524	0	0	0	524	524
H_2	365	- 39	43	706	- 298	- 337
H_3	568	- 4	5	- 847	- 844	- 848
H_4	-1534	2644	5055	- 3915	- 5394	- 2750
H_5	- 59	13107	- 2352	- 5092	- 7503	5604
H_6	393	- 4176	302	4009	4704	528
H_7	-11309	42246	0	0	-11309	30937
H_8	744	- 2160	0	0	744	- 1416
H_9	4	- 10	0	0	4	- 6
H_{10}	- 188	- 455	0	0	- 188	- 643

Quadro Nº 910

Valores de M_n

M_n	P.P. + s/o o.o.	Presión H_2O	Post. Pared	Post. Anillo	Total SiH_2O	Total $conH_2O$
M_1	13	0	0	0	13	13
M_2	89	20	23	178	66	86
M_3	96	32	36	203	71	103
M_4	219	1356	926	708	1	1357
M_5	52	2902	817	847	1612	1290
M_6	54	1378	25	1369	1340	38
M_7	367	1385	0	0	367	1018
M_8	49	125	0	0	49	76
M_9	0	2	0	0	0	2
M_{10}	56	133	0	0	56	189

Cuadro 911

Valores de N_0 en el borde inferior del conducto cilíndrico.-

	Borde libre	Empotrado		Total
		H8	M8	
$P_0 P_0 + s/c$	0	7351	-2389	4962
Pres. H_2O	-5850	-21431	6095	-15246

Cuadro 912

Valores de N_0 en el borde superior del fuste.-

	Borde li bre	Empotrado		Total
		H_6	M_6	
$P_0 P_0 + s/c$	0	-10721	-2634	-13355
Pres. H_2O	0	123442	-71546	51896
Post. Pared	0	-8239	1219	-7020
Post. Anillo	0	-109366	66766	-42600

Cuadro 913

Valores de N_0 en el borde inferior del fuste.-

	Borde libre	empotrado		Total
		H_{10}	M_{10}	
$P_0 P_0 + s/c$	0	-4992	2585	-2407
Pres. H_2O	0	-12000	5180	-6820

C A P I T U L O X

GENERALIDADES ACERCA

DEL POSTENSADO.

NOTA:

El presente capítulo es una reproducción literal tomado del folleto del Ing^o. CARLOS LABARTHE BACA ("DEPOSITOS CILINDRICOS PRETENSADOS").

He considerado conveniente presentar esta reproducción para mayor claridad de la presente tesis.

OBJETO DEL POSTENSADO HORIZONTAL

El postensado Horizontal está constituido por alambres traccionados, individuales o formando cables, dispuestos a manera de zunchos rodeando la pared esférica rebanado. Estan destinados a ejercer en cada punto de la pared una fuerza de compresión horizontal N_{ep} por unidad de longitud, superior en valor absoluto a la de tracción horizontal N_o , que en ese punto produce la presión del líquido depositado.

Dentro de esta denominación se incluyen los alambres horizontales que presionan el anillo de unión de la pared esférica rebanado con la cúpula de fondo, y cuya misión es anular las tracciones que en el anillo tiende a desarrollar el empuje de la cúpula de fondo.

Maneras de Ejecutar el Postensado Horizontal

El postensado horizontal de los depósitos se ejecuta principalmente de dos maneras diferentes:

- (a) Aplicando en forma continúa el alambre pre
viamente traccionado sobre la pared.
- (b) Traccionando los alambres o cables por sec
tores.

Como se ha dicho anteriormente, en el primer sistema el alambre se aplica previamente tensado y en forma continúa, para lo cual se requiere un equipo es
pecial formando por una máquina bobinadora y por una bo
quilla de tensión. La máquina bobinadora está colocada sobre una plataforma, la que con su propio motor se mueve sobre la superficie exterior del cilindro. Desde la máquina bobinadora se entrega continúamente el alam
bre tensado y como la plataforma posee su movimiento ascensional a voluntad, el alambre forma una espiral con paso graduado a los requerimientos de tensión, en cada punto. La boquilla de tensión no es otra cosa que un orificio de diámetro menor que el alambre y por el cual se le obliga a pasar. Indudablemente la fuerza con que hay que tirar de la boquilla para entregar el alambre es la misma con que se queda éste tensado.

En el segundo sistema se utiliza el equipo común de pretensado no requiriéndose equipo especial para el caso de depósitos circulares. En este caso los ambres o cables se tensan por sectores con el fin de dismi

nir las pérdidas de la tensión por efecto de las fuerzas de rozamiento que se desarrollan entre el acero y la superficie en contacto y que son proporcionales a las longitudes de los tramos a tensar. En los extremos de los sectores existen, en general, cuerpos salientes a la pared y donde se apoyan los dispositivos de anclaje (Figura N° 1000). En otros casos tensados simultáneamente todos los sectores de una circunferencia es posible fijar los extremos en anclajes autofijados que no necesitan ser empotrados en el concreto (Figura N° 1001).

En el segundo sistema cuando los valores U_{ep} son elevados se utiliza cables en lugar de alambres con el fin de disminuir el tiempo y mano de obra de la operación de tensado. Los cables son constituidos por el ordenamiento regular de dos o varios alambres que se unsan en conjunto con gatos más poderosos que en el caso de alambres individuales. Al final del tensado es necesario cubrir los alambres o cables con una capa de mortero para evitar la corrosión y es económico, en determinadas circunstancias, disponer los cables dentro de vainas que se dejan en el interior de las paredes en el momento del vaciado. En éste último caso se requiere un volumen de mortero suficiente para llenar los vacíos entre las vainas y los cables.

A continuación presentaremos un resumen de las ventajas y desventajas que ofrece cada sistema señalado.

(a) Sistema de tensado continuo.-

Ventajas : (1) Rapidez de ejecución por la continuidad de la operación.

- (2) No hay pérdidas de rozamiento debido a que el alambre al entrar en contacto en la pared se encuentra ya tensado al esfuerzo de trabajo - previsto.
- (3) No se requiere de dispositivos especiales de anclaje.

Desventajas :

- (1) Necesidad de equipo especial de tensado continuo, específico para paredes esféricas.
- (2) Imposibilidad de refinamiento en los cálculos por la incertidumbre en el conocimiento de la fuerza de tensado inducidas por la boquilla sobre los alambre
- (3) Imposibilidad de utilizar cables.

(b) Sistema de tensado por sectores .-

Ventajas :

- (1) Utiliza equipo común de postensado.
- (2) Es posible refinar los cálculos por el conocimiento relativamente preciso de la tensión que ejercen los gatos.
- (3) Es posible utilizar cables.

Desventajas :

- (1) Se requiere mayor tiempo para la ejecución del postensado.
- (2) Se producen pérdidas de tensión por el rozamiento que se desarrolla entre los alambres y las paredes.

(3) Necesidad utilizar gran número de anclajes.

Objeto del Postensado Vertical

El postensado vertical está constituido por cables varillas verticales traccionadas y dispuestas regularmente en todo el desarrollo de la pared. Su objeto es producir una compresión vertical, superior en valor absoluto a la de tracción, debido a la acción de los momentos de flexión verticales. Estos momentos son debidos a dos causas : (a) la presión del liquido, (b) el postensado horizontal.

En algunas ocasiones, cuando los momentos de flexión verticales son poco importantes, se puede prescindir del postensado vertical y para resistir los esfuerzos de tracción que se presentan se dispone de refuerzo ordinario de acuerdo a la teoría del concreto armado. En este caso el esfuerzo de trabajo del refuerzo se limita a valores que no comprometan la aparición de fisuras.

Maneras de Ejecutar el Postensado Vertical

En la ejecución del postensado vertical no existe diferencias fundamentales entre los diversos sistemas que se adoptan. En su mayor parte consisten de cables o varillas que se alojan en vainas que se disponen verticalmente dentro de las paredes en el momento del vaciado y que impiden al contacto entre el acero y el concreto en el momento del tensado. Cuando se

trata de tanques con bordes empotrados, articulados, los cables o varillas se anclan en la base de apoyo, y cuando se trata de tanques con bordes (no empotrados) libres, se anclan en el mismo borde inferior de la pared (Ver figuras N^o 1002, 1003 y 1004, respectivamente). En algunas ocasiones se ha utilizado el sistema de colocar los cables en forma de "U" con el fin de evitar los anclajes inferiores (Figura N^o 1005). La posición de los cables o varillas respecto al espesor de la pared puede ser cualquiera, pero por lo general van dispuestos al centro con el propósito de evitar esfuerzos secundarios radiales que influirán en el postensado horizontal. En algunos tanques con bordes libres se ha proyectado dejar en la superficie interior de la pared hendiduras donde se alojan tirantes de acero, generalmente varillas que se tensan por tuercas, (Figura N^o 1006).

Pérdidas en las fuerzas del postensado

Los alambres, cables o varillas que provocan los postensados horizontal y vertical, experimentan pérdidas en las fuerzas de tracción que las inducen los gatos. Estas pérdidas se producen durante la operación del tensado y en el transcurso de dilatados intervalos de tiempo. Señalaremos a continuación, en forma general, el origen y orden de magnitud de estas pérdidas de tracción.

(a) Pérdidas por rozamientos en el gato de tracción.

En algunos gatos de tracción se obliga a los alambres a desviar su dirección por intermedio de pie-

zas especiales. Sobre las superficies de contacto de los y dichas piezas se desarrollan, en el momento de la operación del tensado, fuerzas de rozamiento que es necesario vencer a costa de parte de la fuerza que el gato imprime a los alambres. Su magnitud varía con el equipo utilizado, pero en vía de información sabemos que producen una pérdida del 4% al 6% de la fuerza tensora. Es decir si el manómetro del gato señala como 100, los alambres, a la salida del gato, estarán tensados como 96 ó 94.

- (b) Pérdidas por deslizamiento de los alambres en las cañas y deformaciones de los dispositivos de anclaje.-

Las experiencias señalan que, en el caso de utilizarse cañas para fijar los alambres, al aliviarse el gato y transferirse la carga a los dispositivos de fijación se produce un cierto deslizamiento de los alambres antes de efectuarse la acuñación perfecta.

De otra parte los dispositivos de fijación sufren una natural contracción al ser esforzados. Se estima, en total, que el acortamiento de los alambres debido a los dos fenómenos es del orden de los 3mm.

El acortamiento unitario y la consiguiente pérdida de tensión del acero depende, en principio, de la longitud del cable.

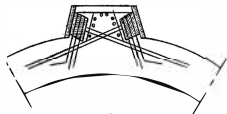


Fig. N° 1000

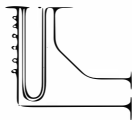


Fig. N° 1002

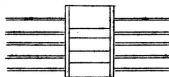


Fig. N° 1001

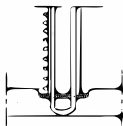


Fig. N° 1003

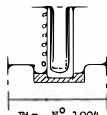


Fig. N° 1004

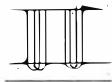


Fig. N° 1005

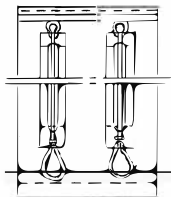
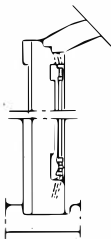


Fig. N° 1006

- (c) Pérdidas producidas por el rozamiento de los alambres con las vainas.-

Estas pérdidas se producen aún en el caso de vainas rectas y se deben a diversos motivos: (1) Entrada de lechada de concreto dentro de las vainas por defecto de aislamiento; (2) deformaciones y angostamientos producidos en las vainas por el vaciado incontrolado del concreto o durante la operación de vibrado, y (3) ondulaciones por falta de perfecto aislamiento. Con adecuado control la 1^a causa es totalmente accidental.

La acción de éstas fuerzas de rozamiento motivan que si "To" es la fuerza del cable a la salida del gato, la fuerza "T" que se obtiene a una distancia "L" metros del gato estará dada por la siguiente expresión :

$T = T_0 e^{-KL}$ Siendo "K" un coeficiente que depende del tipo de cable y naturaleza de la vaina, pero cuyo valor no excede por regla general de 0.005.

- (d) Pérdidas por rozamiento de los alambres con las superficies curvas.-

En el caso de los alambres y cables curvados se presentan pérdidas de tracción por los rozamientos desarrollados entre los aceros y las superficies en contacto permanente. Las fuerzas de rozamiento deben ser vencidos con parte de la fuerza que el gato imprime a los alambres. En el caso en que los alambres

curvados van dentro de vainas fijadas en el momento del vaciado del concreto, las pérdidas descritas en "c" deben acumularse a estas. Indicamos que las pérdidas del tipo "e" son mucho menores que las "d"

Es debido principalmente a las pérdidas de tracción por rozamientos en curvas que se verifica el fenómeno, en el caso del postensado horizontal de tanques, que el esfuerzo de tensión del alambre a la salida del gato no es la misma en toda su longitud sino que va disminuyendo conforme se aleja de este. Para disminuir estas pérdidas de tracción conviene tensar los alambres de ambos extremos y con el fin de regularizar la fuerza N_{ep} que se induce con la pared, conviene elaborar un plan de tensado como el que se muestra en la figura 1007, donde un cable ó alambre se tensa entre los puntos "A" y "C" y el siguiente lo hará entre "B" y "D" y así sucesivamente con el fin de tener en una vertical las secciones de máximos esfuerzos de la mitad de los alambres correspondiendo con las secciones de mínimos esfuerzos de la otra mitad. Un plan similar puede adoptarse para 6 ó más puntos de tensado.

Por el efecto de las fuerzas de rozamiento en curvas, se tiene que si " T_0 " es la fuerza tensora de los alambres a la salida del gato, la fuerza " T " en un punto desplazado angularmente " α " radianes del primero, vendrá dada por la expresión: $T = T_0 e^{-f\alpha}$. Siendo " f " el coeficiente de rozamiento entre las superficies de contacto.

En nuestro caso "f" puede variar de 0.2 á 0.5.

Las pérdidas (a), (b), (c), (d), anteriormente descritas, son todas ellas debidas al rozamiento. En el caso de utilizar el sistema continuo para aplicar el postensado horizontal, estos tipos de pérdidas de tracción, no existen, por que en cada punto se aplica el alambre ya tensado. La pérdida que en este caso habría que considerar será la que se produce en la boquilla de tracción.

En efecto la tensión impartida por una boquilla nueva será mayor a la impartida por una boquilla gastada por el rozamiento y por lo tanto hay necesidad de formar un valor promedio como esfuerzo útil aplicado. Por otra parte este esfuerzo útil debe ser castigado automáticamente por un coeficiente de seguridad por la incertidumbre de su valor, al no medirse la tensión directamente.

Adoptando un esfuerzo útil en los alambres que contemple las pérdidas por desgaste de las boquillas e incertidumbres no se requiere, en este caso del postensado continuo, hacer intervenir las pérdidas por rozamientos en las fórmulas de diseño.

(c) Pérdidas por la retracción y flujo plástico del concreto.-

La retracción es una contracción del concreto producida por la evaporación del exceso de agua de la operación físico-química del fraguado.

Al evaporarse el agua disminuye el estado higrométrico dentro de la masa, lo que motiva un aumento de la tensión capilar del agua retenida en los pequeños canales que forman la parte no sólida del concreto. Este aumento de tensión capilar provoca disminución de las dimensiones de la pieza de concreto, de ahí el nombre de retracción.

El flujo plástico del concreto es otro fenómeno de contracción que se produce cuando la pieza de concreto es sometida a un esfuerzo permanente de compresión. Es una contracción diferente de la elástica y motivada también por la evaporación del agua de los canales del concreto, al aumentarse el estado higrométrico dentro de la masa por disminución de las dimensiones de los canales por efecto de la compresión permanente.

Ambos fenómenos, retracción y flujo plástico, se realizan en dilatados intervalos de tiempo por que la evaporación del agua es lenta. Las experiencias señalan que los fenómenos de contracción se estabilizan entre los 2 y 3 años.

Los aceros de postensado sujetos a la pieza sufren a su vez acortamientos que disminuyen su fuerza de tracción aplicada en un principio. En el caso de depósitos, estimamos que las contracciones unitarias debidas a estos fenómenos varían entre 0.0005 a 0.00012.

Para una explicación más detallada ver el ap

titulo : "Materiales utilizados en concreto pretensado" por el Ing. CARLOS LABARTHE BACA, aparecido en el boletín de la Escuela Nacional de Ingenieros correspondiente a Abril, Mayo y Junio de 1955.

(f) Pérdidas por flujo plástico del Acero .-

El acero que sirve para la fabricación de los alambros, cables y verillas para el postensado experimentan también el fenómeno de flujo plástico al estar sometidas a tracciones permanentes entre dos puntos fijos. El fenómeno se produce por un lento deslizamiento, en ciertas direcciones, a lo largo de los planos cristalográficos. La magnitud de estos desplazamientos depende de los fuerzas de corte que actúan sobre estos planos. El deslizamiento está acompañado por un incremento de la resistencia al mismo deslizamiento que desacelera la deformación en el tiempo, llegando a estabilizarse el esfuerzo de tracción en el acero. Este alargamiento diferente del elástico y producido en determinados períodos de tiempo, motiva pérdidas de tracción en los aceros del postensado. La magnitud de las pérdidas, por este concepto, varía alrededor de 3 % a 5 % y depende de los características de los aceros empleados y del valor de los esfuerzos de tracción aplicados.

Calidad del Concreto a Utilizar

El concreto en los tanques postensados juega el papel de material impermeable destinado a contener el líquido depositado. Mediante el postensado horizon-

tal y vertical se desarrolla en el concreto de las paredes un régimen permanente de compresiones para cualquier circunstancia previsible de cargas, que impide la aparición de fisuras. Esta cualidad valiosa en los tanques, motiva junto a la ventaja económica en la gran mayoría de casos, el desarrollo cada vez más intensivo de la utilización del concreto postensado en su construcción. Como el concreto es un material que resiste relativamente bien los esfuerzos de compresión, se le utiliza en forma racional en los reservorios postensados, y al poder admitir altos esfuerzos se le utiliza en forma económica.

La adopción de concretos de altos esfuerzos no sólo puede significar economía desde el punto de vista de la reducción del espesor de las paredes, sino que existe una cierta relación inversa entre la calidad del concreto y las pérdidas por contracción flujo plástico del mismo y el reducirlos significa economía de la fuerza tensora y por consiguiente economía de acero. Por lo anteriormente dicho se recomienda que la validez mínima del concreto a emplear sea de $f'_c = 210 \text{ Kgs/cm}^2$, ensayado a los 28 días en probetas cilíndricas standard. El esfuerzo de trabajo permanente deberá ser $0.45 f'_c$ y se podrá admitir esfuerzos temporales de $0.55 f'_c$. En general se limitará la relación agua-cemento a 0.45 debido a que existe relación directa entre la proporción agua-cemento y las pérdidas, por retracción y flujo plástico del concreto.

Calidad de los Aceros para el Postensado

En el concreto armado común el acero es un refuerzo que acompaña al concreto en su alargamiento y por éste motivo se limita los esfuerzos en el primero para evitar fisuras en el segundo. En la técnica del postensado el acero juega el rol de fuerza exterior y al acompañar al concreto en sus deformaciones puede someterse a los más altos esfuerzos limitados simplemente por los progresos manufactureros.

Es por esta razón que podemos decir que en el concreto postensado se utiliza el acero en forma racional y económica.

El utilizar aceras de altos esfuerzos con fuertes alargamientos iniciales no es sólo económico sino necesario en el postensado. Acabamos de ver anteriormente que se producen pérdidas de tracción por la retracción del concreto y el flujo plástico en el concreto y en el acero. Luego es imprescindible que inicialmente el acero esté sometido a considerables tensiones y fuertes alargamientos, para que a pesar de las pérdidas anotadas, de al final un importante remanente de fuerza tengamos en los aceros para obtener un postensado permanente. Los aceros de altos esfuerzos que nos interesan presentan la importante característica de no poseer una zona de influencia, donde a pequeños incrementos de esfuerzos corresponde fuertes alargamientos, como en el caso de los aceros utilizados en el concreto armado. La curva representativa, tensión-deformación se pre

senta interrumpida, sin observarse un límite elástico definido, siendo sustituido para fines de diseño, por uno convencional que equivale al que produce un alargamiento permanente de 0.2 % . El esfuerzo de ruptura, f'_s , y el límite elástico P_{yp} (Yield Point) así definido, dependen de las características de los aceros empleados y deben ser garantizados por el fabricante. En el capítulo de información damos los siguientes valores que nos dan idea del rango de los mismos :

	f'_s	f_{yp}
(a) Aceros en alambres de pequeño diámetro	16000Kg/cm ²	13500Kg/cm ²
(b) Aceros de alambres galvanizados	14000Kg/cm ²	12000Kg/cm ²
(c) Aceros de barras.	10000Kg/cm ²	9000Kg/cm ²

En general, se estipula como recomendación que el esfuerzo de trabajo permanente del acero no sobrepasa de 0.60 f'_c ó 0.80 f_{yp} . El esfuerzo de los alambres a la salida de los gatos en el momento del tensado y antes de producirse las pérdidas, puede elevarse temporalmente hasta 0.70 f'_s .

DISEÑO DEL POSTENSADO HORIZONTAL

(a) Distribución de la fuerza Tensora de un Alambre o Cable en el Sistema de Tensado por Sectores

Al poner el gato en juego con el fin de tensar un alambre o cable siempre estaremos en condiciones de producir en los aceros, en una sección, inmediata a la salida del gato, un esfuerzo equivalente al de trabajo o sea generalmente $0.60f'_s$ ó $0.80f_{yp}$.

Si utilizamos un sistema de tensado que posea piezas que obliguen a los alambres a desviarse se producirán pérdidas de la fuerza de tracción por los rozamientos desarrollados en estos puntos. Estas pérdidas son el orden del 2 % al 8 % de acuerdo al tipo y estado del equipo. En este caso para obtener a la salida del gato un esfuerzo de $0.60 f's$ será necesario tirar de los alambres con esfuerzos mayores, de valores tales que dentro las pérdidas indicadas tengamos a la salida del gato $0.60 f's$.

Se recomienda que éste esfuerzo, mayor que el de trabajo no sobrepase de $0.70 f's$ que es suficiente para la gran mayoría de los sistemas de postensado.

En el momento en que se induce a los alambres el esfuerzo de trabajo a la salida del gato, las otras secciones de las mismas se encuentran a esfuerzos cada vez menores conforme se alejan del gato. Esta pérdida gradual de tensión se debe al rozamiento relativamente

fuerte que se produce en las curvas y que es necesario vencer a costa de parte de las fuerzas de tensado.

Se señaló anteriormente que las pérdidas por rozamiento en curvas obedecían a la ley $T = T_0 e^{-f \frac{\alpha}{r}}$. En el caso menos frecuente, que sean cables que van dentro de fundes o vainas que se dejan en el concreto en el momento del vaciado, se producen otras pérdidas de tensión provocadas por las irregularidades de las vainas o fundas, y como habremos indicado anteriormente respondían a la fórmula $T = T_0 e^{-K'L}$. En conclusión y en general, la fuerza tensora "T" en una sección a " α " radianes y "L" metros del gato, que induce a la salida la fuerza "to", vendrá dada por la siguiente expresión: $T = t_0 e^{-f \frac{\alpha}{r} - K'L}$ (ecuación 1000) en la que "f" es el coeficiente de rozamiento y "K" un coeficiente que depende principalmente de la naturaleza de la vaina o funda.

Debido a estas pérdidas se recomienda cumplir dos reglas: La primera es tensar el alambre o cable de ambos extremos con el fin de que la disminución gradual de la tensión se efectúe solo en media longitud de alambre. La segunda es tensar dos alambres o cables consecutivos de puntos diferentes con el propósito de regularizar los esfuerzos. Por ejemplo en la figura N° 1007, se tensa un alambre o cable entre los puntos A y C, y el consecutivo entre B y D. La variación de los esfuerzos en media longitud del primero están representados en la figura 1008, por la línea "ab" y la del segundo por "a'b'". Se ve claramente que el esfuerzo máximo de

uno corresponde a un punto borde es mínimo el esfuerzo del consecutivo y vicerversa.

Con el fin de disminuir las pérdidas por rozamientos en curvas, se sugiere en el caso que los alambres o cables se apliquen directamente a la superficie exterior de la pared dar al concreto un terminado fino. Otra buena medida es instalar varillas de acero verticales sobresalidas de la superficie exterior de la pared con el fin de que el alambre o cable resbale sobre ellas y no sobre en concreto. En el caso de utilizar cables que se alojan en nichos formados con "ductube" se ha practicado en algunas oportunidades apretar el tubo de jete de cierto trecho con anillos metálicos los que se abandonan fijados al concreto al extraer el aire del ductube para recuperarlo. El cable al tensarse, va a tomar contacto con el acero de los anillos disminuyendo el coeficiente de rozamiento. Otro procedimiento para disminuir "f", en el caso de cables alojados en nichos formados con ductube vainas metálicas o fundas, es rodear el cable de material grasoso como parafina por ejemplo.

Damos a continuación algunos valores de "f" y "K", que se sugiera para diseñar:

(a) Alambres o cables directamente aplicados al concreto	$\frac{f}{0.45}$	$\frac{K}{0}$
(b) Alambres o cables directamente aplicadas al concreto con terminado fino	0.30	0

(c) Alambre o cables aplicados a las paredes con interposición de varillas metálicas	$\frac{f}{0.30}$	$\frac{K}{0}$
(d) Cables dentro de nichos formados con ductubo	0,55	0,006
(e) Cables dentro de nichos formados con ductubo y en las cuales se han abandonado anillos de acero.	0.30	0,004
(f) Cables dentro de vainas metálicas	0.30	0,003
(g) Cables confunda lubricada y envoltorio de papel Kraft ..	0.30	0,006

De acuerdo a la ecuación $T = T_0 e^{-f - KL}$ tendremos en media longitud de cable o alambre una distribución de esfuerzos como se muestran por el esfuerzo permanente admisible, generalmente $0.60f's$.

En la figura 1009 se han trazado la línea "1-2" que representa los alargamientos unitarios ($\frac{\Delta L}{L}$) que corresponden a cada sección del alambre y que seguirán una distribución similar a la línea "ab" de los esfuerzos de acuerdo a la ley de Hooke $\epsilon = \frac{P}{E}$. El área encerrada por la curva "1-2" mide la elongación total del alambre entre los puntos A y B, vale decir en la media longitud del alambre. Una vez obtenida la tensión de trabajo a la salida del gato procederemos a fijar los alambres y aliviar el gato. Hemos dicho anteriormente, que se la fricción de los alambres se realiza por efecto de suña, se produce un corrimiento de los alambres hasta lograrse la perfecta acañación. Este corrimiento motiva una disminución de la elongación

inapropiada alaceroy por consiguiente produce una pérdida de tracción de los mismos. Esta pérdida, por causa de los rozamientos entre los alambres y concreto en las curvas es máxima junto al gato y va disminuyendo conforme se aleja de él hasta anularse a una distancia "m".

En la figura 1009 se ha trazado la línea "3-4" que reemplaza al tramo "1-4" en representar los alargamientos unitarios después de producido el acuñaamiento de los alambres. La gradiente de la línea "3-4" es contraria a la de la línea "1-4" y el área encerrada por "1-3-4" que está rayada en la figura 1009, equivale al corrimiento total producido durante la acuñaación. En la figura 1008, la línea "c d" reemplaza al tramo "ad" en la representación de los esfuerzos después de la acuñaación y se obtiene por la ley de Hooke a partir de la línea "3-4".

Para calcular "m" bastaría tantear la línea "3-4" que con gradiente contraria a "1-4" encerraría una área "1-3-4" igual al corrimiento producido y luego medir "m".

También se puede determinar "m" analíticamente de la siguiente manera: si llamamos σ_1 a la tensión inicial a la salida del gato, σ_2 a la tensión a la salida del gato después del corrimiento y σ_m a la tensión en un punto donde cesa el efecto del corrimiento y que suponemos a una distancia lineal "m" del gato y angular "W", tendremos:

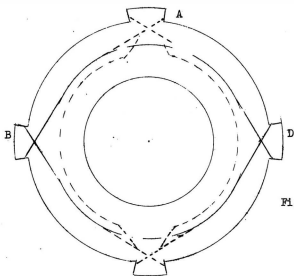


Fig. N° 1007

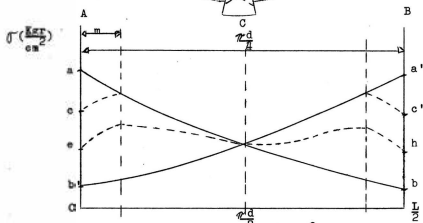


Fig. N° 1008

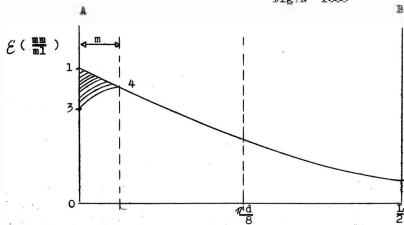


Fig. N° 1009

$$\sigma_m = \sigma_1 c^{-fw} \quad (\text{Ecuación 1001})$$

$$\sigma_2 = \sigma_m c^{-fw} \quad (\text{Ecuación 1002})$$

$$\text{de donde } \sigma_2 = \sigma_1 c^{-2fw} \quad (\text{Ecuación 1003})$$

En la longitud "m" del alambre y antes del corrimiento se produce un alargamiento " ΔL ", cuyo valor diferencial " $d(\Delta L)$ " en un elemento de longitud $dL = a d\beta$, vendrá dado por :

$$E \frac{\sigma}{a} dL, \text{ o sea : } d(\Delta L) = \frac{\sigma a c^{-f\beta}}{E} d\beta; \text{ de donde :}$$

$$\Delta L = \frac{\sigma a}{E f} \left[1 - c^{-fw} \right]$$

Producido el corrimiento, el alargamiento

ΔL en "m" se calculará por :

$$d(\Delta L) = \frac{\sigma_m a c^{-f\beta}}{E} d\beta; \text{ de donde: } \Delta L =$$

$$\frac{\sigma_m a}{E f} \left[1 - c^{-fw} \right]$$

El valor del corrimiento "g" será igual a la diferencia de los alargamientos anteriormente calculados y por lo tanto :

$$g = \Delta L - \Delta L \frac{\sigma}{\sigma_m} \left[1 - c^{-fw} \right] \left[\sigma_1 - \sigma_m \right]$$

Reemplazando σ_m por su valor $\sigma_1 c^{-fw}$ tendremos:

$$g = \frac{a}{E f} \left[1 - c^{-fw} \right]^2 \sigma_1 \text{ despejando : } 1 - c^{-fw} =$$

$$\sqrt{\frac{g E f}{a \sigma_1}} \text{ haciendo } p = \sqrt{\frac{g E f}{a \sigma_1}} \quad (\text{Ecuación 1004})$$

$$\text{se tiene : } c^{-fw} = \frac{1}{1-p} ; \text{ de donde : } w = \frac{1}{f} \ln \left[\frac{1}{1-p} \right]$$

$$\text{y se tiene : } m = a w = \frac{a}{f} \ln \left[\frac{1}{1-p} \right] \quad (\text{Ecuación 1005})$$

Luego, al final de la operación del tensado y en el caso que se produzca corrimientos de los alambres en el proceso de acufación tendremos que la línea "Cdb" de la figura 1008 representa los esfuerzos a lo largo de media longitud de alambre y en el punto "d" se presenta el máximo. Si a la salida del gato se inducía a los alambres el esfuerzo de trabajo, en el punto de esfuerzo máximo permanente inicial "d" tendremos un esfuerzo menor y estaremos atentando contra el aprovechamiento y economía del acero. Es por este motivo que se debe sobretensar los alambres procurando obtener al final, en el punto "d", el esfuerzo de trabajo permanente, en general $0.60 f'_s$ ó $0.80 f_y$ p. Habíamos indicado antes que la sobretensión para eliminar las pérdidas de tracción en los gatos podía llegar generalmente a $0.70 f'_s$. Esta recomendación es correcta, pero si la operación de sobretensado es breve puede llevarse el esfuerzo temporal a $0.80 f'_s$.

Más arriba dimos como recomendación para mejorar la distribución de los esfuerzos inducidos en las paredes realizar un plan de tensado que contemplase hacerlo desde puntos que se alternen en alambres consecutivos. Así, en la figura 1007, se han elegido 4 puntos. Un primer alambre se tensa entre A y C, y entre C y A, y su distribución de esfuerzos en la media longitud AB, viene dado por la línea "Cdb" de la figura 1008. El siguiente alambre se tensará entre B y D y entre D y B y su distribución de esfuerzos en la me-

dis longitud AB viene dado por la línea " $c'-d'-b'$ ". Continuando sucesivamente con este plan de tensado tendremos que la distribución de los esfuerzos del conjunto estará representado por la línea media " $c-f-h$ " de la figura 1008. De la línea " $a-f-h$ " podremos determinar el esfuerzo promedio σ_p correspondiente a los alambres al final de la operación de tensado. En el caso de σ postensado por operación continúa no existen las pérdidas acabadas de mencionar, si no otras que son las producidas por el desgaste de las boquillas de tensión. El esfuerzo σ_p será el que se admita como promedio entre el incluido por una boquilla nueva y una gastada y considerando un factor de seguridad por incertidumbre.

(b) Pérdidas de Tracción Posteriores a la Operación de tensado

El esfuerzo σ_p va a sufrir una disminución de su valor en el transcurso de d latados intervalos de tiempo, generalmente 2 a 3 años, debidas a ac rta mientos de longitud de los alambres, producidos por :

- (a) Retracción del concreto (ξ_{cr})
- (b) Flujo plástico del concreto (ξ_{cf})
- (c) Flujo plástico del acero (ξ_{af})

Los valores de E_{cr} y E_{cf} se adaptarán de acuerdo a las circunstancias de curado, humedad del ambiente, calidad de agregados, relación agua-cemento del concreto etc.

La suma de datos (Ecr + Ecf) varía generalmente entre 0.0005 a 0.0012 y careciendo de datos precisos puede tomarse para fines de diseño un valor de 0.0008 con toda seguridad.

Respecto al valor de Eaf, generalmente se da como un porcentaje " ψ " de la tensión inicial y debe ser especificado por el fabricante de los alambres. Para fines de diseño se puede adoptar $\psi = 3\%$ cuando el esfuerzo medio no pasa de 0.50 f's y de $\psi = 5\%$ en los otros casos.

Por consiguiente, si al final de la operación del tensado se aplicó a los alambres un esfuerzo medio σ_p al cabo de un dilatado período de tiempo y cuando ya se han producido todas las pérdidas acabadas de indicar, se tendrá en los alambres un esfuerzo promedio σ que se calculará por la siguiente expresión:

$$\sigma = \sigma_p - (Ecr + Ecf) E_a - \psi \sigma_p, \text{ de donde:}$$

$$\sigma = (1 - \psi) \sigma_p - (Ecr + Ecf) E_a \quad (\text{Ecuación } 1006).$$

(c) Cálculo de las Áreas de Acero Para el Postensado Horizontal

El área de acero por metro líneal a cualquier altura se calculará por : $A_{ax} = \frac{N\sigma_p}{\sigma}$ (Ecuación 1007)

$$A_{ax} = \frac{N\sigma_p}{(1 - \psi) \sigma_p - (Ecr + Ecf) E_a} \quad (\text{Ecuación } 1008)$$

En donde N_{ep} es la fuerza del postensado, que se obtiene de la segunda ecuación de 288.

(d) Comprobación del Espesor de la Pared

Se estudiarán los esfuerzos considerando el depósito como formado por anillos libres. Corresponderá el caso a un depósito enteramente libre, de no ser lo estaremos del lado de la seguridad al no considerar la colaboración del efecto de viga de las paredes.

En el momento de la operación de tensado, el máximo esfuerzo efectivo de los alambres se produce a la salida del gato, o sea σ_1 .

En el caso del postensado continuo este esfuerzo reemplaza al producido por una boquilla nueva de tensión. A su vez el depósito se encontrará sometido a un esfuerzo de compresión equivalente a:

$$\sigma_{c_1} = \frac{\sigma_1 \times A_{ax}}{h \times L} = \frac{\sigma_1}{h} \times \text{Arca de acero} \times \text{unidad de longitud}$$

(Ecuación 1009)

Se requiere que : $\sigma_{c_1} \leq f_{c_1}$ (Condición 1010)

Fondo f_{c_1} el esfuerzo de compresión admisible en el concreto en el momento de la operación. Generalmente se acepta para f_{c_1} un valor igual a $0.45 f'_{c_1}$ representando f'_{c_1} el esfuerzo de ruptura del concreto a compresión en el momento de la operación del tensado y ensayando en probetas cilíndricas standard. Si al fijarse los alambres se producen corrimientos de los mismos y el valor σ_1 sólo es temporal, se puede admitir

para $f'c_1$ un valor límite de $0.55 f'c_1$, pero comprobando que :

$$\sigma_{cm} = \frac{\sigma_m \Delta L}{h \times \Delta L} \leq 0.45 f'c_1 \quad (\text{Condición 1011})$$

De tenerse entera confianza en el empotramiento o articulación del borde inferior, se determinarán

σ_c y σ_{cm} por:

$$\sigma_{c_1} = \frac{N_{ep}}{h \Delta L} \times \frac{\sigma_1}{\sigma} \quad (\text{Ecuación 1012})$$

$$\sigma_{cm} = \frac{N_{ep}}{h \Delta L} \times \frac{\sigma_m}{\sigma} \quad (\text{Ecuación 1013})$$

(c) Esfuerzos en el Acero Al entrar el Depósito en Servicio.

Al finalizar la operación de tensado y estando el depósito vacío el máximo esfuerzo en el acero es el que le corresponde en el punto "d" del diagrama de la figura 1008 y que lo designamos por σ_m . En el caso de tensado por operación continua, este esfuerzo corresponde al que induce una boquilla nueva de tensión. Se debe cumplir la siguiente condición : $\sigma_m \leq a$ (Condición 1014)

Siendo σ_a el esfuerzo de tracción admisible en el acero y que generalmente se adopta como máximo $0.60 f's$ ó $0.80 fyp$. Al entrar el depósito en servicio y ser llenado del líquido correspondiente, se sustran algebraicamente el esfuerzo anterior los producidos por la presión hidrostática .

La presión hidrostática ejerce una fuerza N de tracción en la pared, suponiendo el depósito libre.

Siendo la pared formada por una área A_c de concreto y una área A_s de acero, se desarrollará en el acero un esfuerzo por este concepto de: $\sigma_a' = n \frac{N}{A_c + (n-1) A_s}$ (ecuación 1015)

Siendo "n" la relación de los módulos de elasticidad del acero y del concreto.

Teóricamente al sumar el esfuerzo anterior al esfuerzo σ_m , obtendríamos un esfuerzo superior al admisible σ_a .

En realidad, los esfuerzos en el acero decrecen con el tiempo por fluencia plástica y se ha comprobado experimentalmente que la mayor parte de estas pérdidas se realiza en las primeras horas, y cuando el depósito entra en servicio la suma anterior no alcanza a σ_a .

C A P I T U L O X I

DISEÑO DEL POSTENSADO

HORIZONTAL DE LA PARED

ESFERICA REBANADO Y DE

LOS ANILLOS "A₂" Y "A₃".

Una parte de éste capítulo es una reproducción literal tomado del folleto del Ing°. CARLOS LABARENE B. ("DEPOSITOS CILINDRICOS PRETENSADOS").

He considerado conveniente presentar esta reproducción para mayor claridad de la presente tesis.

La formula de flexo-compresión ha sido desarrollada en base al texto de PHIL M. FERGUNSON ("TEORIA ELEMENTAL DEL CONCRETO REFORZADO").

Ante todo estudiemos la forma en que van a distribuir los esfuerzos en los alambres de elegir un sistema de tensor por sectores. Supongamos elegir 4 puntos de tensado, caso similar al descrito en el capítulo X. Las características de los aceros escogidos para el postensado son : $f's = 16000 \text{ Kgs/cm}^2$
 $fyp = 13500 \text{ Kgs/cm}^2$

El sistema de fijación de los alambres va ser por acuñación y se conoce que se producen corrimientos de 2mm. al aliviar los gatos. Dado que se producen pérdidas por corrimientos es importante sobretensar a los alambres en el momento de la operación de tensado. Se determina obtener a la salida de los gatos un esfuerzo igual a :

$0.70 f'_s = 0.70 \times 16000 = 11200 \text{ Kgs/cm}^2$. Para ello es necesario sobretensar aún mas los alambres dentro de los gatos con el fin de anular las pérdidas por rozamiento.

zamiento en los mismos gatos. Esta operación es posible por ser de corta duración y las características de los alambres escogidos lo permiten de acuerdo a los datos suministrados por el fabricante. Cuando el esfuerzo en el alambre es de 11200 Kgs./cm² a la salida de los gatos, los esfuerzos en las otras secciones irán disminuyendo conforme nos alejamos de los gatos debido al rozamiento en curvas. Los esfuerzos se calcularán por la fórmula: $\sigma_d = \sigma_1 e^{-fd}$ siendo "f" el coeficiente de rozamiento. Adoptemos un valor de "f" igual a 0,30

De tensor de ambos extremos sectores 100° , tendremos los siguientes valores de esfuerzos a II₄ y II₂ de los gatos respectivamente :

$$\sigma_{II_4} = 11200 e^{-0.30} = 11200 \times 0.7906 = 8855 \frac{\text{Kgs}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{II_2} = 11200 e^{-0.30} = 11200 \times 0.625 = 7000 \frac{\text{Kgs}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{luego : } \sigma_{II_4} = 8855 \frac{\text{Kgs}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{II_2} = 7000 \frac{\text{Kgs}}{\text{cm}^2} \quad (\text{Valores } 1100)$$

La representación de estos esfuerzos aparece en el gráfico de la figura N° 1100. Al momento de aliviar los gatos se producen corrimientos de $g = 2\text{mm}$ en cada extremo, que producen pérdidas de tensión en extremos de longitud "m" contiguos a los gatos. El cálculo de "m" se efectuara de la siguiente manera

$$(1) a = (R + \frac{h}{2}) \text{ Sen } \phi = (8.80 + \frac{0.20}{2}) \text{ Sen } \phi = 8.90 \text{ Sen } \phi;$$

(1101) En el caso del anillo $a_A = 7.77 \text{ m}$.

$$(2) \text{ Segun la ecuación 1004 : } p = \sqrt{\frac{E f}{a \sigma_1}} =$$

$$\sqrt{\frac{0.2 \times 2.1 \times 10^6 \times 0.30}{890 \text{ Sen } \phi \times 11200}}$$

$$\text{luego : } P = \frac{\sqrt{0.01264}}{\text{Sen } \phi} \quad (\text{Valor 1102})$$

$$\text{En el caso del anillo } P_A = \sqrt{\frac{0.2 \times 2.1 \times 10^6 \times 0.30}{777 \times 11200}} = 0.9203$$

(3) Segun la ecuación 1005 :

$$n = \frac{a}{A} \ln \frac{1}{1-p}, \text{ reemplazando 1101 y 1102, se tie}$$

no :

$$m = 29,6667 \ln \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{0.01264}}{\text{Sen } \phi}} \quad (\text{Valor 1103})$$

$$\text{En el caso del anillo } m_A = 3.32 \text{ m}$$

De la ecuación 1001, hallamos el valor del esfuerzo de los alambres a una distancia "m" de los ganchos : $\sigma_m = \sigma_1 e^{-fw} = 11200 e^{-0.30 \frac{m}{\text{m}}}$; (1104)

Este esfuerzo debera cumplir la siguiente condición :

$$\sigma_m < (0.60 f's = 9600 \frac{\text{Kgs}}{\text{cm}^2})$$

$$\sigma_m < (0.80 fyp = 10800 \frac{\text{Kgs}}{\text{cm}^2}) \quad (\text{Condición 1105})$$

En el cuadro N° 1100 se observa que el valor máximo de σ_m es 9943 Kgs/cm² mayor que 0.60 f's = 9600 Kgs/cm² , lo cual lo cooptamos por serlo ligeramente y estar sujeto a pérdidas que lo horan dismi

nir en corto plazo.

El esfuerzo en los alambres a la salida del g₁to después del corrimiento lo hallamos de la ecuación - 1002, : $\sigma_2 = \sigma_n e^{-fw} = \sigma_n e^{-0.30 \frac{n}{n}}$, (1106).

En el gráfico de la figura 1100, hemos trazado la línea representativa de los esfuerzos después de producidos los corrimientos, le correspondiente al cable consecutivo y por último la de los esfuerzos promedio entre los dos cables. Analizando ésta última línea observamos que tendríamos un esfuerzo útil inicial en los cables de $\sigma_{\frac{II}{4}} = 8855 \text{ Kg/m}^2$ en gran parte de su longitud, pero que cae a σ_p hacia de las gatas, siendo:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_2 + \sigma_{\frac{II}{2}}}{2} \quad (\text{Valor 1107})$$

Esto nos indica claramente que en el caso de disponer un equipo que tenga el corrimiento fijado es conveniente estudiar la manera de mejorar la distribución de esfuerzos a base de perfeccionar el plan de tendido. Para estar en el lado de la seguridad aceptamos un esfuerzo útil inicial de σ_p . Este esfuerzo va a sufrir pérdidas en el tiempo debido a la retracción del concreto y al flujo plástico del concreto y el acero, obteniéndose al final un esfuerzo útil permanente, según la ecuación 1006 y aceptando los valores de los coeficientes indicados, de : $\sigma = (1-0.025) \sigma_p - 0.0008 \times 2.1 \times 10^6$ de donde : $\sigma = 0.975 \sigma_p - 1680$ (Ecuación 1108)

Para el cálculo de las áreas de acero requeridas en cada sección para postensado horizontal, se hará

uso de la ecuación 1007, : $A_{ax} = \frac{N_{op}}{f}$ (Ecuación 1109)

El máximo esfuerzo de compresión del concreto será en el momento de la operación de tensado. Suponiendo tensar 14 días después del vacado y correspondiendo al concreto un esfuerzo de ruptura, en ese momento, de 0,85 del que le corresponderá a los 28 días, el esfuerzo máximo que soportaría sería : $0.55f'_c$ de donde: $0.55(0.85 f'_c) = 98 \text{ Kg/cm}^2$ (Valor 1110).

El esfuerzo de compresión máximo admisible en el concreto que actuará durante un tiempo considerable sería : $0.45 f'_c$, de donde : $0.45 f'_c = 95 \text{ Kg/cm}^2$ (Valor 1111).

El valor de N_{op} lo obtenemos de la ecuación 206, : $N_{op} = - (8.90)^2 \times 1300 \text{ Sen } \phi (0.5 - \text{Cos } \phi)$.

De donde : $N_{op} = 102,973 \text{ Sen } \phi (0.5 - \text{Cos } \phi)$.
(Ecuación 1112)

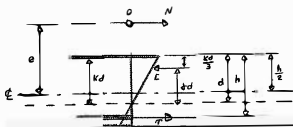
El valor de N_{op} del anillo A_3 , será $N_{opA_3} = - p_3 \times a_{A_3} = - 28800 \times 7.77 N_{opA_3} = - 223,776$

Kg/m^2 ; para el anillo A_2 : $N_{opA_2} = - p_2 \times a_{A_2}$

CUADRO N° 1100

ϕ	a	p	Π	Γ_{Π}	Γ_2	Γ_P	Γ	N_{OP}	A_{Δ}
60	7.71	0.1208	3.82	9650	8314	7657	5786	0	0
66	8.13	0.1176	3.71	9766	8516	7758	5884	-8773	1.45
72	8.46	0.1153	3.63	9845	8654	7827	5951	-18704	3.14
78	8.71	0.1137	3.58	9904	8758	7879	6002	-29419	4.90
84	8.85	0.1127	3.55	9933	8810	7905	6027	-40499	6.72
90	8.90	0.1124	3.53	9943	8827	7914	6036	-51437	8.53
96	8.85	0.1127	3.55	9933	8810	7905	6027	-61909	10.27
102	8.71	0.1137	3.58	9904	8758	7879	6002	-71303	11.90
108	8.46	0.1153	3.63	9845	8654	7827	5951	-79229	13.31
114	8.13	0.1176	3.71	9766	8516	7758	5884	-85297	14.50
120	7.71	0.1208	3.82	9650	8314	7657	5786	-89173	15.41
AnilloA ₁	7.77	0.1203	3.32	9854	8670	7835	5959	-223776	37.55
AnilloA ₂	7.77	0.1203	3.32	9854	8670	7835	5959	-28743	4.83

CALCULO DE A_s EN EL CASO DE FLEXOCOMPRESION



La excentricidad "e" de la fuerza Normal "N" es:

$e = \frac{100M}{N}$ en donde "M" representa el momento flector por metro lineal.

Haciendo suma de momentos con respecto al punto "O", se tiene :

$$C \left[e - \frac{h}{2} + \frac{Kd}{3} \right] = T \left[e - \frac{h}{2} + \frac{Kd}{3} + j d \right]$$

$$C \left[e - \frac{h}{2} + \frac{Kd}{3} \right] = T \left[e - \frac{h}{2} + d \right]$$

La suma de fuerzas es igual a cero, luego :

$$N + T - C = 0, \text{ de donde } C = N + T$$

$$\text{Reemplazando, se tiene: } (N+T) \left[e - \frac{h}{2} + \frac{Kd}{3} \right] = T \left[e - \frac{h}{2} + d \right]$$

$$\text{de donde : } N \left[e - \frac{h}{2} + \frac{Kd}{3} \right] = T \left[d - \frac{Kd}{3} \right]$$

$$O \text{ sea : } N \left[c - \frac{h}{2} + \frac{Kd}{3} \right] = T \gamma d$$

La fuerza de tracción es resistida por el acero, luego:

$$T = A_s f_s, \text{ reemplazando se tiene :}$$

$$A_s = \frac{100M - N \left[\frac{h}{2} - d(1-\beta) \right]}{f_s \gamma d}$$

El valor de "K" y de "x" para: $f_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$
y $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$.

es: $K = 0.402$, luego $\beta = 0.866$, y se tiene:

$$A_s = \frac{100M - N \left[0.5h - 0.134d \right]}{866 d}$$

Se ha considerado $f_s = 1000 \text{ Kg/cm}^2$.

CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA

La armadura vertical la calculamos cuando $M_0 = 86 \frac{\text{Kg-m}}{m}$ y $M_0 = -2,048 \text{ Kg/m}$ (Valores obtenidos del cuadro N° 910 y de la primera de las ecuaciones 505)



Supongamos que vamos a utilizar un $\phi 1/4''$.

Luego:

$$A_s = \frac{100 \times 86 - 2048 \left[0.5 \times 7 - 0.134 \times 3.818 \right]}{866 (3.818)}$$

$$A_s = 0.73 \text{ cm}^2$$

Según el ACI:

$$A_{s \text{ report.}} = 0.002 \times 100 \times 7 = 1.40 \text{ cm}^2.$$

luego usaremos $\varnothing 1/4"$ @ 20 cm.


La armadura horizontal la calculamos para: $M_{\theta} = 0.17M_{\theta}$

$$M_{\theta} = 0.17 \times 86 = 15 \frac{\text{Kg-m}}{\text{m}} \quad \text{y} \quad N_{\theta} = -3607 \text{ Kg/m.}$$

(Valores obtenidos del cuadro 906 y 910)

Suponiendo que vamos a utilizar un $\varnothing 1/4"$, se

tiene :



$$A_s = \frac{100 \times 15 - 3607 \left[0.5 \times .7 - 0.134 \times 3.182 \right]}{866 \times 3.182}$$

De donde : $A_s = (-)$ (Entonces indica que no hay flexión).

Pero según el ACI : $A_{srop.} = 1.40 \text{ cm}^2$

Luego : $\varnothing 1/4"$ @ 20 cm.

PARED ESFERICO REBANADO

Para la confección de la tabla N^o 1101, en el caso del reservorio sin agua se han empleado las ecuaciones 513; los valores de H_3 , H_4 , M_3 y M_4 del cuadro 909, 910 respectivamente.

En el caso del reservorio lleno se han empleado las ecuaciones 513, 605, los valores de H_3 , H_4 y M_3, M_4 del cuadro 909 y 910 respectivamente.

En estos dos casos se han hecho uso de las ecuaciones 237, 239, 248, 250, que nos dan los valores de M_{θ} y N_{θ} en función de H y M.

La tabla N°101 ha servido como auxiliar para el cálculo de $N\phi$ y $M\phi$ en función de H y M .

Cuadro N° 1101

δ	Sin agua		Con agua	
	$N\phi$	$M\phi$	$N\phi$	$M\phi$
60	-1391	71	-1389	103
64	-2021	-176	-1926	-152
68	-2399	-183	-2096	-171
72	-2677	-114	-2065	-108
76	-2937	- 48	-1987	- 47
80	-3217	- 5	-2010	- 6
84	-3525	24	-2075	13
88	-3863	49	-2269	18
92	-4235	68	-2646	11
96	-4662	60	-3274	- 14
100	-5176	- 34	-4228	- 72
104	-5824	-291	-5590	-159
108	-6605	-764	-7437	-242
112	-7365	-1332	-9789	-199
116	-7593	-1470	-12682	210
120	-6273	1	-16167	1357

Empleando la fórmula de flexocompresión se tiene:

$$A_s = \frac{100M - N \left[0.5 \times 20 - 0.134 \times 16 \right]}{866 \times 16} = \frac{100M - 7.856N}{13856}$$

El área de acero por repartición es:

$$3.2 < \frac{100M - 7.856N}{13856}$$

O sea: $M > 443 + 0.07856N$

Se observa en la tablas N° 1101 que esta condición se ~~cumple~~ en el caso del reservorio sin agua, y solamente para los ángulos $\beta = 116^\circ$ y $\beta = 112^\circ$, luego:

para $\beta = 116^\circ$, se tiene:

$$(-) A_s = \frac{100 \times 1470 - 7.856 \times 7593}{13856} = 6.30 \text{ cm}^2$$

δ 10 ϕ 3/8" @ 10cm.

para $\beta = 112^\circ$, se tiene:

$$(-) A_s = \frac{100 \times 1332 - 7365 \times 7.856}{13856} = 5.40 \text{ cm}^2$$

δ (-) $A_s \approx 8 \phi$ 3/8" @ 13cm.

CUPULA DE FONDO

Cuadro N° 1102

β	Sin agua		Con agua		sin agua	con agua
	N ϕ	M ϕ	N ϕ	M ϕ	N x θ	N x θ
4°30'	-9833	366	-40771	-1018	3685	-25821
10°	-5748	- 82	-44201	219	-978	-52696
16°	-3751	- 10	-43190	53	451	-45147
22°	-2694	10	-45433	- 12	1499	-56007
28°	-1972	-284	-46752	206	- 27	-56746
34°	-4404	-169	-45647	57	-45645	-28190
36°53'	-8455	1612	-45201	-1290	-77853	-11975

Para el cálculo de la armadura vertical empleamos la fórmula de flexocompresión y nos da:

$$A_s = \frac{100M - N [0.5 \times 10 - 0.134 \times 7]}{866 \times 7} = \frac{100M - 4.062N}{6062}$$

Según el ACI: $A_{sR} = 0.002 \times 100 \times 10 = 2.00\text{cm}^2$

o sea 7 ϕ 1/4" a 15cm. , luego:

$$M > 121.24 + 0.04062N$$

En el cuadro N°1102 se observa que los ángulos $\beta = 36^\circ$ y $\beta = 28^\circ$ cumplen con esta condición, luego:

$$\text{para } \beta = 36^\circ; A_s = \frac{100 \times 1612 - 8455 \left[0.5 \times 10 - 0.134 \times 7 \right]}{866 \times 7}$$

$$A_s = 20.92\text{cm}^2 \text{ ó } 11 \phi 5/8" @ 9\text{cm.}$$

$$\text{para } \beta = 28^\circ; A_s = \frac{100 \times 284 - 1972 \times 4.062}{6062} = 3.36\text{cm}^2$$

o sea 11 ϕ 1/4" @ 9cm.

Para el cálculo de la armadura horizontal, observamos en el cuadro N° 1102 que el caso más desfavorable se presenta cuando $\beta = 4^\circ 30'$, luego:

$$A_s = \frac{100 \times 62 + 3685 \left[0.5 \times 10 - 0.134 \times 3.635 \right]}{866 \times 3.635} = 7.21\text{cm}^2$$

o sea 11 ϕ 3/8" @ 9cm. ó ϕ 1/2" @ 15cm.

En los otros valores de β en el cual no es necesario el fierro, solamente se colocará fierro por repartición y fraguado $A_s = 2.00\text{cm}^2$ ó 7 ϕ 1/4" @ 15cm.

CUADRO N^o
ANILLOS

A _n	Valores de H _n				total sin H ₂ O	total con H ₂ O	H(-) m ² x.	Hmáx(+)	H(-) θ	H _c (+)	A _s	D ^o de fo.
	p.p.+s/c	H ₂ O	post.de la pared	post.de los cables								
A ₁	-524	0	0	0	-524	-524	- 524	0	-524	0	-	4 ø 3/8"
A ₂	706	45	- 48	-2123	-1465	-1422	- 1465	0	-1103	0	-	4 ø 3/8"
A ₃	-541	15507	-2401	-10784	-13726	- 419	-13726	0	-104592	0	-	4 ø 3/8"
A ₄	10565	-20000	0	0	10565	-29521	-29521	10565	- 29521	10565	10.57	6 ø 5/8"
A ₅	4	- 10	0	0	4	- 6	- 6	4	- 3	4	0.004	4 ø 3/8"

Los valores H_n se han obtenido de las tablas N^o900 y 909, además se ha igualado la sección N^o=H_a en donde "H" representa a la fuerza horizontal total; "a" el radio medio del anillo. En el caso de los estribos usamos 4 ø 3/8" @ 25cm. por ml.

Conducto cilíndrico central.- Para el caso del conducto cilíndrico central, calcularemos el A_s por repartición y fregado; luego: A_s = 0.002Bd = 0.002 x 100 x 7 = 1.4cm²/ml.

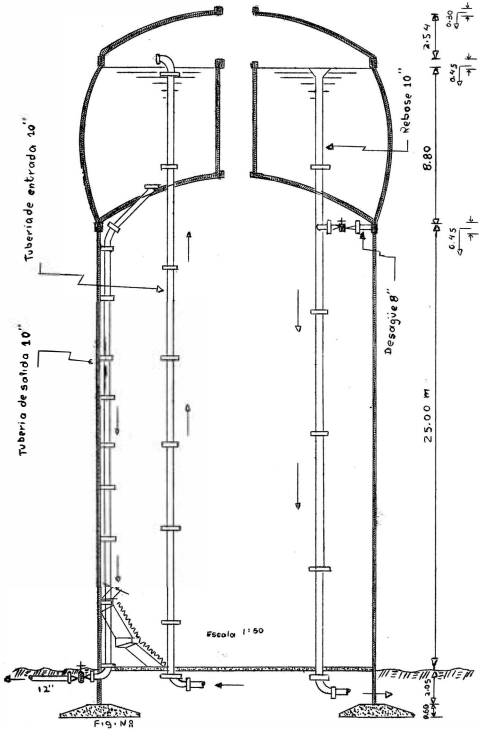
o sea : 5 ø 1/4" @ 20cm.

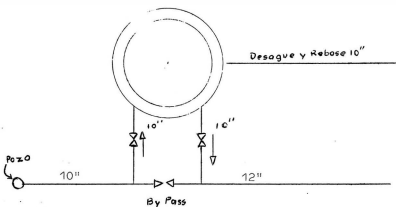
Fuste cilíndrico.

Por medio de un análisis, en la cual se hace uso de las ecuaciones del 1^{er} capítulo, se obtiene que el caso más desfavorable se presenta cuando el reservorio está vacío, y se tiene:

Cuando 1.4m ≤ (d-x) ≤ 2.4m. se usa 4 ø 3/8" @ 25cm. (Armadura Circular).

Para los otros valores de "x" se hace uso de : A_s = 0.002Bd = 0.002x100x7=1.4cm²
o sea 5 ø 1/4" a 20cm. por cada metro lineal para los dos casos de armadura.



Fig. N^o

ESQUEMA DE CONEXIONES

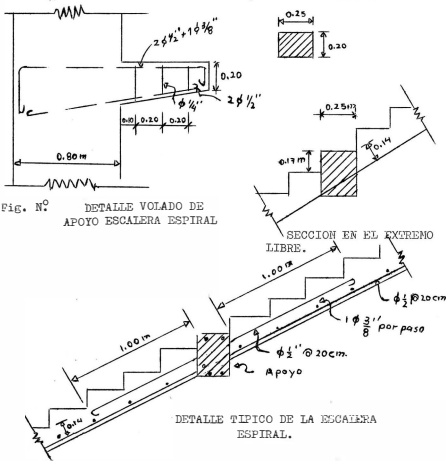


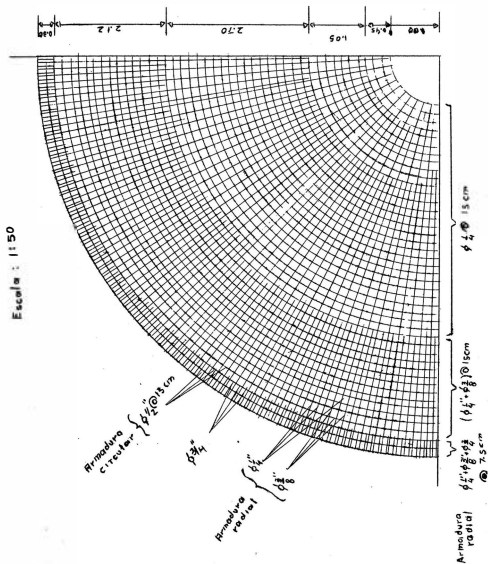
Fig. N.º

DETALLE VOLADO DE APOYO ESCALERA ESPIRAL

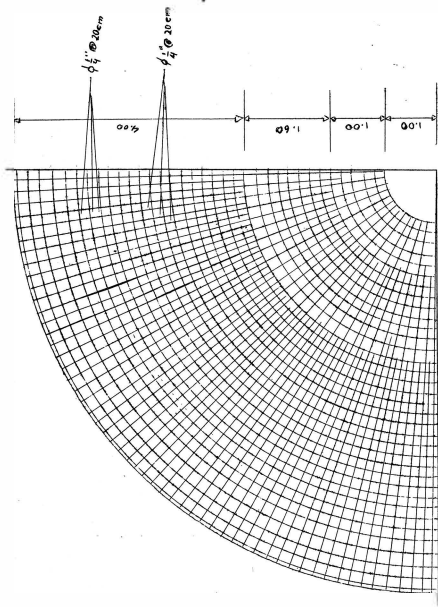
SECCION EN EL EXTREMO LIBRE.

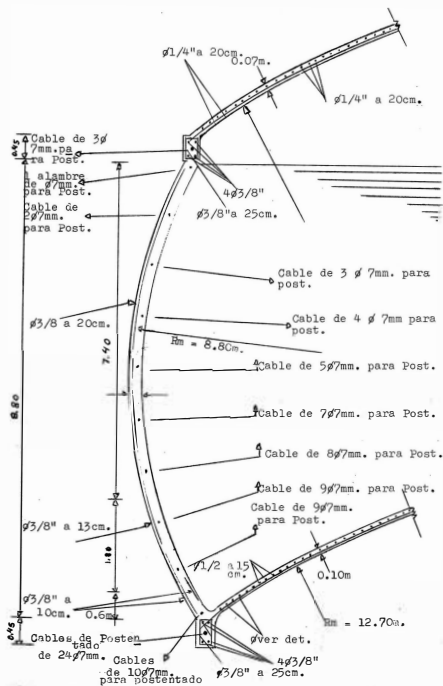
DETALLE TIPICO DE LA ESCALERA ESPIRAL.

DETALLE DEL ARMADO DE
LA CUPULA DE FONDO



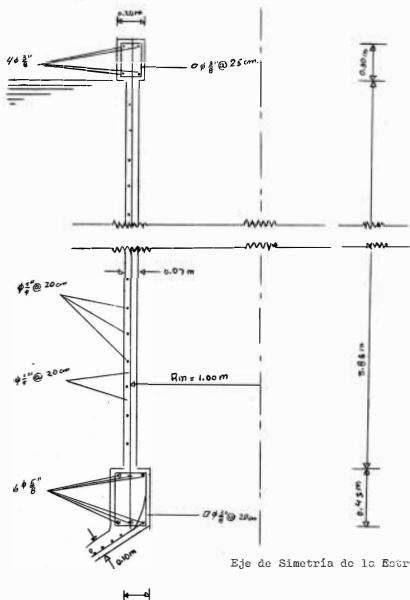
DETALLE DEL ARMADO DE LA CUBIERTA EN CUPULA ESFERICA



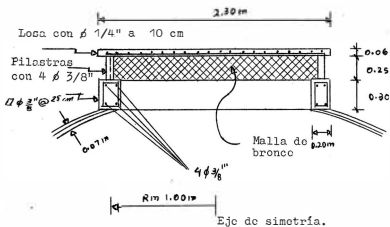


ESCALA 1:50

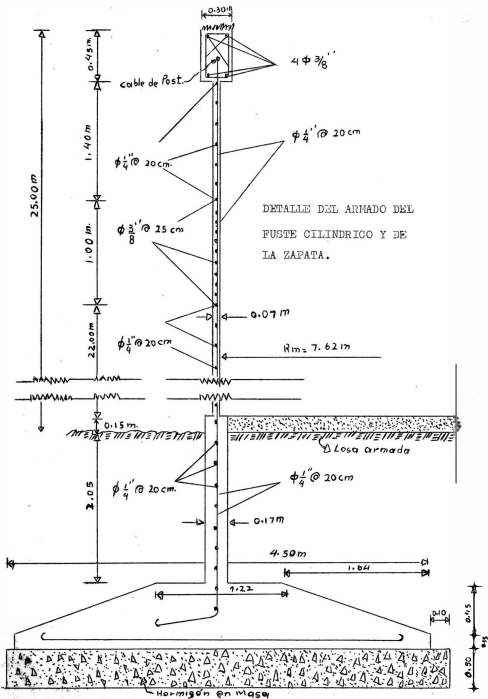
DETALLE DEL ARMADO DE LA CUBA



DETALLE DEL ARMADO DEL CONDUCTO CILINDRICO CENTRAL



DETALLE DEL BORDE SUPERIOR DE LA CUBIERTA
EN CUPULA ESFERICA.



C A P I T U L O X I I

C I M E N T A C I O N

NOTA:

El gráfico N° 1202 es una reproducción tomado del texto de TERZAGHI y PECK ("MECANICA DE SUELOS EN LA INGENIERIA PRACTICA").

Para el cálculo de los valores de la presión que ejerce la zapata sobre el terreno a distintas profundidades, se ha utilizado la fórmula práctica dada en las clases del Ing°. CARLOS LABARTHE BACA.

El desarrollo de este capítulo se ha basado en los textos de TERZAGHI y PECK; FERNANDO NORAL y de las copias de clases del Ing°. LABARTHE.

RESISTENCIA DEL TERRENO

La investigación previa del subsuelo indica la estratificación y características señalados a continuación, con el nivel de la mesa de agua a 7.50m. de la superficie (ver figura N° 1201).

En el diseño se determinara la influencia de la carga en los diversos estratos; y se pronosticara el asentamiento que sufrirá la estructura por consolidación de la capa subyacente de arcilla, de la que se han obtenido muestras inalteradas que indican una resistencia a la ruptura por compresión de 0.4Kgr/cm^2 , relación de vacíos 0.55; e índice de consolidación igual a 0.17.

En la figura N°1201, "N" representa el número de golpes en el ensayo de penetración estándar realizada en la arena (fig.N° 1202) de la cual obtenemos los valores de la resistencia del terreno en función de "N" y del ancho "B" de la zapata.

Después de realizar una serie de tanteos he llegado a la conclusión de que el espesor adecuado en este caso es $B = 4.50m.$ y $D_f = 2.05m.$, siendo " D_f " la distancia desde el nivel del terreno a la cota de fundación, y se le conoce como "profundidad de la fundación".

Por encontrarse la napa de agua dentro de los límites de $2B$, tomaremos los $2/3$ de los valores de la presión admisible del terreno, la cual aparece en la figura N°1202.

En la IV columna del cuadro N°1204, aparecen los valores de la presión admisible del terreno, obtenidos de la figura N°1202, cuando la napa de agua se halla a más de $2B$.

En la V columna del cuadro N°1202 aparecen los valores admisibles de la presión del terreno cuando la napa de agua está dentro de los límites de $2B$, y son los $2/3$ de los valores que aparecen en la IV columna del mismo cuadro.

En el caso de la arcilla hemos empleado un coeficiente de seguridad $C_s = 3$ y de acuerdo a la tabla de Terzaghi y Peck, obtenemos $C = 0.9$, valor que aparece en la V columna del cuadro N°1204.

Los valores de la presión que ejerce la zapata (transmisora del peso total del reservorio) sobre el terreno a distintas profundidades aparece en la VI columna del cuadro N°1204. Estos valores se han obtenido empleando el sistema práctico el cual considera co-

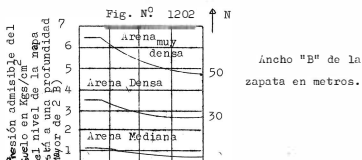
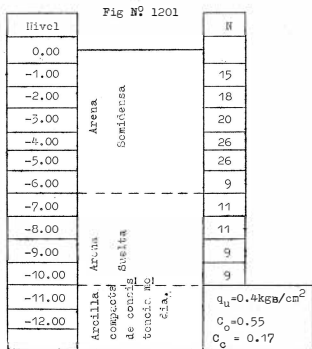
no área cargada al área proyectada de la base de la zapata adistintas profundidades del terreno con unas regatas proyectantes oblicuas que forman un ángulo de 60° respecto al área proyectada.

Sea "Z" la profundidad del terreno a partir de la base de la zapata, luego según la figure N°1203, obtg tenemos:

$$\text{Para } Z < Z_1 \text{ tenemos: } q = \frac{Q}{2\pi r [B + 2Z \operatorname{tg} 30^{\circ}]}$$

$$\text{Para } Z \geq Z_1 \text{ tenemos: } q = \frac{4Q}{\pi [2Z \operatorname{tg} 30^{\circ} + 2r + B]^2}$$

en donde "Q" representa el peso total que soporta el terreto.



Para el cálculo del asentamiento empleamos la fórmula:

$$S = H \frac{C_c}{1+C_c} \log_{10} \left(\frac{P_0 + \Delta P}{P_0} \right)$$

En donde "H" es el espesor inicial del techo de arcilla; "C_c" el índice de consolidación, "C_o" es la relación de vacíos, "P_o" es la presión original y "ΔP" el incremento de la presión.

El valor de P_o lo obtenemos sumando las presiones que ejercen el agua, la arena, la arcilla; pero antes hallamos los valores de los pesos específicos de cada estrato mediante los valores de "N", lo cual nos da:

$$P_o = 2.135 \text{Kgr/cm}^2 \text{ siendo } \Delta P = 0.33 \text{Kgr/cm}^2,$$

luego:

$$S = \frac{200 \times 0.17}{1 + 0.55} \log_{10} \left(\frac{2.135 + 0.33}{2.135} \right) = 1.37 \text{cm.}$$

El asentamiento máximo "S máx." lo obtenemos considerando que ΔP = 1.06 gr/cm², luego:

$$S_{\text{máx.}} = \frac{200 \times 0.17}{1 + 0.55} \log_{10} \left(\frac{2.135 + 1.06}{2.135} \right) = 3.86 \text{cm.}$$

los valores hallados estén por debajo del máximo permisible.

ACCION SISMICA

Sea "H" la altura del reservorio desde el nivel del terreno hasta el nivel del terreno hasta el borde superior, luego tenemos: H = 37.09m.

Consideremos que la acción sísmica horizontal se halla distribuida en la parte del reservorio determinado por "H", el centro de aplicación de esta fuerza ho

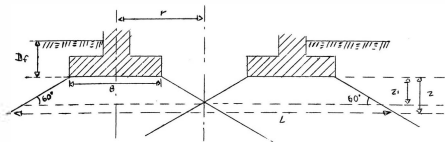


Fig. Nº 1203

CUADRO Nº 1204

I	II	III	IV	V	VI
Nivel	H	Z	q_u	cxq_u	q
-1.00	15	-	-	-	-
-2.00	18	-	1.64	1.09	1.06
-3.00	20	0.95	1.84	1.23	0.86
-4.00	26	1.95	2.45	1.63	0.71
-5.00	26	2.95	2.45	1.63	0.61
-6.00	9	3.95	0.80	0.53	0.51
-7.00	11	4.95	0.92	0.61	0.47
-8.00	11	5.95	0.92	0.61	0.42
-9.00	9	6.95	0.80	0.53	0.38
-10.00	9	7.95	0.80	0.53	0.35
-10.50	Arcilla	8.45	0.40	0.36	0.33
-12.50	Arcilla	9.45	0.40	0.36	0.31

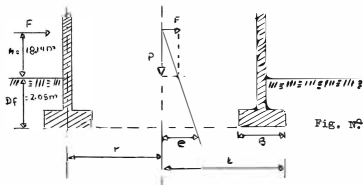


Fig. Nº 1205

horizontal se obtiene mediante la siguiente expresión :

$$h = \frac{\Sigma(\text{Área} \times h)}{\Sigma \text{Área}}$$

de donde : $\Sigma(\text{Área} \times h) = 10,069.90 \text{ m}^3$.

$$\Sigma(\text{Área}) = 555.04 \text{ m}^2.$$

luego : $h = 18.14 \text{ m.}$, en donde "h" es la distancia del centro de aplicación de la fuerza horizontal sísmica "F" al nivel del terreno.

El valor de "F" será: $F = 0.15P$, el momento de vuelco " M_V " que produce ésta fuerza será : $M_V = 0.15 P (h + D_f)$.

De donde : $M_V = 0.15 P (18.14 + 2.05) = 3.023 P$.

El momento estabilizador M_E , lo obtenemos en el caso más desfavorable que sería cuando el reservorio está vacío:

$M_E = P \times L$ de donde: $L = 7.62 + \frac{4.50}{2} = 9.87 \text{ m.}$

luego : $M_E = 9.87 P$, la razón entre el " M_E " y el " M_V "

será : $\frac{M_E}{M_V} = \frac{9.87P}{3.023P} = 3.26$ mayor que lo recomienda

de por varios autores.

La excentricidad que produce esta fuerza sísmica es : $e = \frac{M_V}{P} = 3.023 \text{ m.}$

La excentricidad " e_{mfx} " del reservorio para que no se produzca flexión se obtiene haciendo :

$$0 = \frac{P}{\text{Área}} \pm \frac{Pe_{mfx}C}{I} = 0$$

de donde : $e_{mfx} = \frac{K^2}{C}$

de donde $C = R_2$ y $K^2 = \frac{I}{\text{Área}} = \frac{R_2^2 + R_1^2}{4}$

Por ser $R_2 = r + \frac{B}{2}$ y $R_1 = r - \frac{B}{2}$, se tiene: $e_{mfx} = 3.19 \text{ m.}$

Observamos que la excentricidad producida por el mismo

$$e = 3.023 < (e_{\text{máx}} = 3.19)$$

La presión que se ejerce sobre el terreno por acción sísmica lo obtenemos en el caso más desfavorable que sería cuando el reservorio se encuentre lleno de agua.

$$\sigma = \frac{P_{LL}}{\text{Área}} + \frac{P_{LL} \cdot eC}{I} = \frac{P_{LL}}{\text{Área}} \left[1 + \frac{e}{c_1} \right]$$

$$\text{fondo } c = \frac{M_y}{P_{LL}} = \frac{3.023 \times 790,000}{2'290,000} = 1.045$$

de donde $\frac{e}{c_1} = 0.326$ que representa un 32.6 % más de la presión que ejerce el reservorio lleno de agua cuando no actúa el sismo; según el proyecto de Normas Peruanas de Diseño Antisísmico es aceptable en caso de sismo agregar un 33 % más a la presión admisible del terreno.

CÁLCULO DE LA ZAPATA

El cálculo de las dimensiones de la zapata lo haremos en el caso más desfavorable que sería cuando el reservorio se encuentra lleno de agua.

La presión efectiva será :

$$\sigma = \frac{(\text{Peso total} - \text{Peso de la zapata})}{\text{Área de la base de la zapata}} \times 1.326$$

$$\text{de donde : } \sigma = \frac{2'082,817 \times 1.326}{2'154,510} = 1.28 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Según el ACI : } v_c = 0.29 \sqrt{f'_c} = 4.24 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{En la figura N}^\circ \text{ 1206, se observa que: } b = \frac{450 - 17}{2} = 216.5 \text{ cm.}$$

luego : $(b - d) \times 100 \sqrt{v_c} \leq 100 d v_c$ de donde :

$v_c \geq \frac{(b - d)}{d}$, considerando $d = 52.5$ cm y un recubrimiento de 7.5 cm., se tiene $\frac{(b - d)}{d} \sqrt{v_c} = 4 \text{ Kg/cm}^2$.

Para el cálculo de "M" consideramos que es igual a la altura de la sección que soporta el corte a una distancia de 7.5 cm. a partir del borde exterior - (Ver Fig. N° 1207), luego :

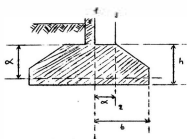


Fig. N° 1206

Fig. N° 1207

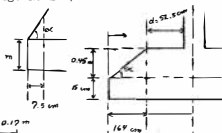


Fig. N° 1208

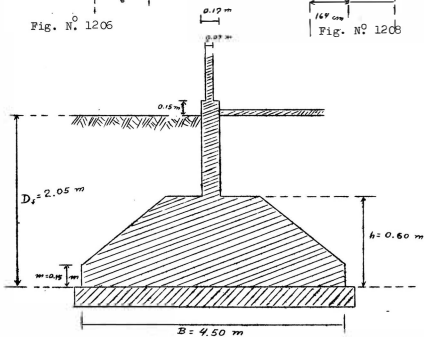


Fig. N° 1209 .-

$$v_c \geq \frac{7.5}{d_m} \sqrt{\quad} \text{ de donde : } d_m \geq \frac{7.5}{v_c} \sqrt{\quad}$$

Considerando $d_m = 7.5$ cm, se tiene : $d_m = 7.5 + 7.5 = 15$ cm .

El valor de la tangente del ángulo de la figura N° 1208, es : $\text{tg} \alpha = \frac{4.5}{164}$; el valor de "d" en función de "x" está dado por : $d = \frac{x}{v_c}$, según el ACI

$$d_R = \frac{1.28 x}{4.24} = 0.3019 x$$

En la figura N° 1208, se tiene : $d = x \text{tg} \alpha + 15 = 7.5$ de donde $d = 0.2744x + 7.5$, luego se tiene que cumplir la siguiente condición : $d \leq d_R$ o sea :

$$0.2744x + 7.5 \leq 0.3019x$$

El valor máximo de "x" es 164 cm., luego transponiendo los términos en la condición, se tiene :

$$0.0275x \leq 7.5$$

Reemplazando x por su valor tenemos : $4.51 < 7.5$.

El área de acero radial lo calculamos mediante la fórmula :

$$A_s = \frac{M_{1-1}}{f_s \cdot d} = \frac{3'046,696}{1266 \times 0.866 \times 52.5} = 52.93 \text{ cm}^2$$

que equivale a 11# 1" @ 9 cm.

Según el ACI el esfuerzo de adherencia está dado por :

$$U_R = \frac{3.23 \sqrt{f'c}}{A_s \text{ de } 1\phi} = 18.4 \text{ Kg/cm}^2$$

En nuestro caso el esfuerzo de adherencia está dado por:

$$U = \frac{V_{1-1}}{\sum \phi + d} = \frac{1.28 x 100 x 216.5}{87.78 x 0.866 x 52.5} = 6.9 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\angle U_R = 18.4 \text{ Kg/cm}^2$$

El área de acero en dirección circular, lo ha
llanos para el caso de repartición y fraguado :

$$A_s = 0.002 B d$$

Cuando "d" es constante, se tiene que B =
122 cm., luego :

$$A_{s_1} = 0.002 \times 122 \times 52.5 = 12.81 \text{ cm}^2 \text{ ó } 10\phi 1/2" \text{ @ } 12\text{cm}$$

Cuando "d" es variable, obtenemos el A_{s_2} para
tres valores de "x", $A_{s_2} = 0.002 \times (0.2744x + 7.5)$

$$\text{Para } x = 50 \text{ cm.}, \quad A'_{s_2} = 2.12 \text{ cm}^2 \text{ ó } 3\phi 3/8" \text{ @ } 17\text{cm.}$$

$$\text{Para } x = 100 \text{ cm.}, \quad A''_{s_2} = 6.99 - 2.12 = 4.87 \text{ cm}^2$$

$$\text{ó } 4\phi 1/2" \text{ @ } 13 \text{ cm.}$$

$$\text{Para } x = 164 \text{ cm.}, \quad A'''_{s_2} = 17.22 - 6.99 =$$

$$10.23 \text{ cm}^2 \text{ ó } 8\phi 1/2" \text{ @ } 8 \text{ cm.}$$

B I B L I O G R A F I A

- "Teoría de Placas Planas y Curvas".....por Timoshenko
- "Depósitos Cilíndricos Pretensados".....por el Ing^o Carlos Labarthe D.
- "Hormigón Armado".....por Fernando Higral.
- "Resistencia de Materiales".....por Timoshenko
- "Reglamento .ACI318 - 63"
- "Proyecto de Normas Peruanas de Diseño Antisísmico".....por el Ing^o Julio Kuroiwa.
- "Teoría de la Elasticidad".....por Timoshenko
- "Teoría Elemental del Concreto Reforzado..por Fergusón
- "Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica".....por Terzaghi y Peck"
- "Elementos y Estructuras Precesforzados"por Alfonso Olivera López.
- "Diseño de Estructuras de Concreto Precesforzados.....por T.Y. Lin.