UNIVERSIDAD NACIONAL INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

Sección de Posgrado y Segunda Especialización Profesional

Tesis para optar el Grado Académico de Maestro en Ciencias con mención en Matemática Aplicada

# Título

# El Teorema de Reducción de Singularidades para Campos Holomorfos n-Dimensionales con Singularidades Absolutamente Aisladas

Por

**LIC. LUIS JAVIER VÁSQUEZ SERPA**

Asesor

**DR. RENATO BENAZIC TOMÉ**

**LIMA-PERÚ**

**2010**

# Dedicatoria

*A mis queridísimos padres: Julia y Jorge,*
*con mucho cariño y eterno agradecimiento*
*pues es a ellos a quien me debo.*

# Agradecimientos

- Agradezco a mis padres por el apoyo firme constante y por la confianza que tienen en mí, a mis hermanos por entenderme como estudiante de matemáticas.

- Agradezco a mi asesor, el Dr. Renato Benazic Tomé, por la formación académica que recibí durante el pregrado y pos grado; y por el apoyo como orientador durante el desarrollo de la tesis.

- Finalmente agradezco de manera implícita a todas las personas que me apoyaron en época de estudiante.

# RESUMEN


En el presente trabajo, considerar una foliación holomorfa singular por curvas definido en una variedad compleja de dimensión $n$ y sea $p$ una singularidad aislada (dicrítica o no). En dimensión $n = 2$, es conocido que después de un número finito de blowing-ups en los puntos singulares, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas simples (*Teorema de Seidenberg*). Esto significa que si $p^* \in Sing(\mathcal{F}_Z^*)$, entonces $\mathcal{F}_Z^*$ es localmente generada por un campo vectorial holomorfo $Z^*$ que tiene parte lineal con autovalores 1 y $\lambda$, donde $\lambda \notin \mathbb{Q}^+$ ($\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de los números racionales positivos).

Las singularidades simples pueden ser pensadas como formas finales, ya que ellas son persistentes bajo nuevos blowing-ups.

En este trabajo se obtiene dos teoremas de reducción de singularidades (extensión del teorema de Seindenberg a dimensión $n \geq 3$). El primer teorema consiste en que después de un número finito de blow-ups, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas irreducibles. Esto significa que si $p^* \in Sing(\mathcal{F}_Z^*)$, entonces $\mathcal{F}_Z^*$ es localmente generada por un campo vectorial holomorfo $Z^*$, tal que su parte lineal de $Z^*$ posee por lo menos un autovalor no nulo. El segundo teorema consiste en una extensión del primer teorema de tal manera que $\mathcal{F}_Z^*$ posee un número finito de singularidades, todas ellas simples.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) es una de las disciplinas más importantes de las matemáticas, es bien utilizado para modelar fenómenos de otras ramas de la ciencia (Física, Biología, Química, Ecología, Economía, Ingeniería, etc.), por tal motivo las EDO ocupa un amplio lugar en la investigación científica. Por otro lado es bién conocido que en la mayoria de problemas no es posible obtener de manera explícita la solución de una EDO, gracias a Henri Poinacaré, se crearon otras técnicas, que consiste en ver como se comporta las soluciones, desde el punto de vista cualitativo (geométricamente). La Teoría de los Sistemas Dinámicos se encarga de entender el comportamuiento cualitativo de las soluciones de una EDO. Las soluciones de una EDO en una vencidad de un punto regular (punto que no anula al campo que genera la EDO) son de geometría sencilla, el gran problema es saber como se comporta las soluciones de una EDO en una vecindad de un punto singular (punto que anula al campo que genera la EDO). Para saber dicho comportamiento se emplean una gran herramienta matemática (Topologia Diferencial, Análisis en Varias Variables Reales y Complejas, Topología Algebraica, entre otras). El estudio de Foliaciones Holomorfas generada por las soluciones de una EDO, debido a un campo vectorial holomorfo, en la actualidad es un gran tema de investigación científica.

Sean $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja de dimensión $n$, $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa singular por curvas sobre $\mathcal{M}^n$ y $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad aislada de la foliación $\mathcal{F}$. Sea $Z$ el campo vectorial que genera la foliación alrededor del punto $p$ (ver [6], [12]), en una carta $(U, \varphi)$ de $\mathcal{M}^n$ tal que $p \in U$ y $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$. Fijando coordenadas en esta carta, el campo $Z$ se expresa como:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

donde $Z_1,\ Z_2, ..., Z_n \in \mathcal{O}_{n,p}$ (aquí $\mathcal{O}_{n,p}$ es el anillo de gérmenes de las funciones holomorfas en $p$) y $m.c.d.(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = 1$. Denotaremos por $\mathcal{F}_Z$ a esta foliación, el cual coincide con la foliación $\mathcal{F}$. Como $p \in U$ es una singularidad aislada de $Z$, entonces existe una veciendad abierta $U_p$ de $p$ en la que $p \in U_p$ es la única singularidad y los demas puntos de $U_p - \{p\}$ son puntos regulares, por el Teorema del Flujo Tubular (ver [12]) tenemos que las órbitas alrededor de un punto regular pueden "ser enderezadas" mediante una conjugación analítica local, entonces ya sabemos como se comporta localmente. Lo interesante sería ver qué pasa alrededor de un punto singular $p$, i.e como se comporta las órbitas alrededor del punto $p$.

Si el campo $Z$ tiene parte lineal no nula (i.e. $DZ(p) \neq 0$) y viendo que propiedades tienen los autovalores de $DZ(p)$, podemos usar algún Teorema de Linealización (de Poincaré, de Siegel, etc. según sea el caso). Que nos dice que el campo $Z$ es localmente equivalente a su parte lineal $DZ(p)$ en una vecindad del punto $p$ y por lo tanto podremos saber como se comportan las órbitas en una vecindad del punto singular $p$. Sin embargo si el campo $Z$ tiene parte lineal nula (i.e. $DZ(p) = 0$ ), ya no podemos usar los teoremas de Linealización pues no existe la parte lineal; en estos casos se usa una herramienta conocida como Blow-up.

En dimensión $n = 2$, es conocido que después de un número finito de blowing-up's en los puntos singulares, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas simples (*Teorema de Seiden-*

*berg*), (ver [3], [4]). Esto significa que si $p^* \in Sing(\mathcal{F}_Z^*)$, entonces $\mathcal{F}_Z^*$ es localmente generada por un campo vectorial holomorfo $Z^*$ que tiene parte lineal con autovalores 1 y $\lambda$, donde $\lambda \notin \mathbb{Q}^+$ ($\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de los números racionales positivos).

Las singularidades simples pueden ser pensadas como formas finales, ya que ellas son persistentes bajo nuevos blowing-ups.

En este trabajo se obtiene dos teoremas de reducción de singularidades (una extensión del teorema de Seindenberg a dimensión $n \geq 3$). El primer teorema consiste en que después de un número finito de blow-ups, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas irreducibles. El segundo teorema consiste en una extensión del primer teorema de tal manera que $\mathcal{F}_Z^*$ posee un número finito de singularidades, todas ellas simples.

En el segundo capítulo se enuncian conceptos y resultados de los diferentes cursos de la carrera, que serán usados en el presente trabajo. De tal manera que la tesis sea autocontenido. También se dá los teoremas de Linealización para campos holomorfos n-dmensionales con parte lineal no nula, de tal forma que motiva estudiar los campos holomorfos con parte lineal nula.

En el tercer capítulo se describe el proceso de Blow-up. Se analiza los tranformados estrictos de la foliación $\mathcal{F}_Z$ mediante el Blow-up. Se da la defineión de Singularidad Dicrítica.y no Dicrítica.

En el cuarto capítulo se da una caracterización de una dingularidad Dicrítica.

En el quinto capítulo damos la relación que existe entre índice de Poncaré-Hopf y el número de Milnor, más especificamente se prueba que son iguales. Así teniendo más propiedades sobre el número de Milnor que se utilzarán en los próximos capítulos.

En el sexto capítulo damos una fórmula que relaciona el número de Milnor de la singularidad original con los números de Milnor de las singularidades del transformado estricto y la multiplicidad algebraica del campo original, para el caso $n \geq 3$. Dando una prueba diferente en el caso $n = 3$. Con estos resultados extendemos lo obtenido en [3] y [4] para $n = 2$. Estos resultado son fundamentales para la prueba del teorema de reducción de singularidades.

Finalmente, en el séptimo capítulo, se presenta un primer teorema de reducción de singularidades para campos holomorfos n-dimensionales con singularidades absolutamente aisladas. Es decir, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas irreducibles. Esto significa que si $p^* \in Sing(\mathcal{F}_Z^*)$, entonces $\mathcal{F}_Z^*$ es localmente generada por un campo vectorial holomorfo $Z^*$ que tiene parte lineal que posee por lo menos un autovalor no nulo.

También se define lo que es una singularidad simple, dados por los autores C. Camacho, F. Cano y P. Sad. Luego se presenta un segundo teorema de reducción de singularidades, la cual es una extensión del teorema anterior. Esto significa que si $p^* \in Sing(\mathcal{F}_Z^*)$ entonces $p^*$ es una singularidad simple. Así hemos obtenido una generalización del teorema de Seindenberg en dmensión $n \geq 3$.

# Capítulo 2

# Preliminares

En este capítulo se introducirán conceptos y resultados de carácter general que serán utilizados a los largo de la tesis. Ver referencias [11], [18], [7], [2], [12] y [15].

Denotaremos por $\mathbb{C}$ al cuerpo de los números complejos y $\mathbb{C}^n$ al espacio vectorial complejo $\{x = (x_1, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}\}$ .

Para cada $x \in \mathbb{C}^n$, consideremos la base canónica $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ del espacio tangente $T_x\mathbb{C}^{\ n}$ de $\mathbb{C}^n$ en $x$, que por definición es el espacio vectorial $\{x\} \times \mathbb{C}^n$.

## 2.1. Funciones Holomorfas de Varias Variables Complejas

Denotaremos por $\mathbb{C}^n$ al conjunto de todas las n-uplas $(n \geq 1)$ de números complejos, es decir

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, ..., z_n);\ z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\} = \underbrace{\mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}}_{n\text{-veces}}.$$

Los elementos $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ son llamados *puntos* de $\mathbb{C}^n$ y los números complejos $z_1, ..., z_n$ son llamados *coordenadas complejas* de z. Haciendo $z_j = x_j + iy_j$ (donde $x_j = \mathrm{Re}(z_j)$, $y_j = \mathrm{Im}(y_j)$), podemos expresar $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ como

$$z = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

De esta manera $\mathbb{C}^n$ puede ser considerado como $\mathbb{R}^{2n}$ y en este caso $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ son llamados las *coordenadas reales* de $z$.

Sean $z = (z_1, ..., z_n)$ y $w = (w_1, ..., w_n)$ puntos de $\mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Definimos la suma de $z$ y $w$ como

$$z + w = (z_1 + w_1, ..., z_n + w_n)$$

y el producto de $\alpha$ por $z$ como

$$\alpha z = (\alpha z_1, ..., \alpha z_n).$$

Es inmediato ver que con esta operaciones $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión (compleja) $n$.

Dotaremos a $\mathbb{C}^n$ de la topología producto. Un *polidisco abierto* (resp. *cerrado*) en $\mathbb{C}^n$ de centro $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ y *poliradio* $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, denotado por $\Delta(a, r)$ (resp. $\Delta[a, r]$), es el conjunto definido por

$$\Delta(a, r) = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| < r_j, \forall 1 \leq j \leq n\}$$
$$(\text{resp. } \Delta[a, r] = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| \leq r_j, \forall 1 \leq j \leq n\}).$$

Observe que

$$\Delta(a, r) = D_{r_1}(a_1) \times ... \times D_{r_n}(a_n) \text{ y } \Delta[a, r] = D_{r_1}[a_1] \times ... \times D_{r_n}[a_n],$$

donde $D_{r_j}(a_j)$ es el disco abierto y $D_{r_j}[a_j]$ es el disco cerrado en los complejos.

Es claro que $\mathbb{C}^n$ dotado de la topología cuya base es generada por los polidiscos abiertos es un espacio topológico equivalente a $\mathbb{R}^{2n}$ dotado de la topología cuya base generada por las bolas abiertas. De esta manera, todos los resultados conocidos de la topología de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^{2n}$ pueden ser aplicados a $\mathbb{C}^n$.

**Definición 2.1.1** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ es una función holomorfa en $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ si y sólo si existe un polidisco $\Delta$ centrado en $a$ tal que la función $f$ tiene una expansión en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{q_1,\dots,q_n=0}^{\infty} c_{q_1,\dots,q_n}(z_1 - a_1)^{q_1} \cdots (z_n - a_n)^{q_n} \tag{2.1}$$

*la cual es convergente para todo $z \in \Delta$.*

Decimos que $f$ es *holomorfa* en $U$ si y sólo si $f$ es holomorfa en $a$, para todo $a \in U$.

El conjunto de todas las funciones holomorfas en U será denotado por $\mathcal{O}(U)$.

Para simplificar las notaciones, es conveniente introducir la noción de multi-índices. Un *multi-índice de dimensión $n$*, es una $n$-upla de enteros no negativos $Q = (q_1, ..., q_n)$ . Su norma $|Q|$ se define como $|Q| = q_1 + \cdots + q_n$.

Sea $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ y $Q = (q_1, ..., q_n)$ un multi-índice, definimos

$$z^Q = z_1^{q_1}, ..., z_n^{q_n}.$$

Con estas notaciones (2.1) se escribe

$$f(z) = \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q(z-a)^Q,\ \forall z \in \Delta.$$

Sea $f \in \mathcal{O}(U)$, entonces para todo $a \in U$, existe $R = (R_1, ..., R_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ poliradio tal que $f(z) = \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q(z-a)^Q$, $\forall z \in \Delta(a, R)$, consideremos $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ poliradio con $0 < r_j < R_j$ para todo $1 \leq j \leq n$, de la teoría de varias variables complejas (ver [11]), $\sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q(z-a)^Q$ converge absoluta y uniformemente a $f(z)$, para todo $z \in \Delta[a, r]$, reordenando tenemos:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{|Q|=m} c_Q(z-a)^Q \right) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z),\ \forall z \in \Delta[a, r], \tag{2.2}$$

donde $P_m(z) = \sum\limits_{|Q|=m} c_Q(z-a)^Q$ es un polinomio homogéneo de grado $m$ en las variables $z_1, ..., z_n$.

Observe que, de (2.2), como $P_m$ es continuo en $\Delta[a,r]$ y $\sum\limits_{m=0}^{k} P_m(z) \to f(z)$ uniformemente en $\Delta[a,r]$, concluimos que $f$ es continua en $\Delta[a,r]$. En particular, $f$ es continua en a.

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{C}^m$ una función. Podemos asociar a $F$ $m$-funciones $f_1, ..., f_m : U \to \mathbb{C}$ llamadas las *funciones coordenadas* de $F$. Decimos que F es holomorfa en $a \in U$ (resp. en $U$) si y sólo si cada una de las funciones coordenadas $f_1, ..., f_m$ son holomorfas en $a \in U$ (resp. en $U$).

## 2.2. Campos Vectoriales Holomorfos y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

**Definición 2.2.1** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto. Un campo vectorial holomorfo en $U$ es una función holomorfa*

$$\begin{array}{rccl} Z: & U & \to & \mathbb{C}^n \\ & z & \mapsto & Z(z) = (Z_1(z), ..., Z_n(z)) \end{array}$$

*tal que si $z \in U$ entonces $Z(z)$ es un vector cuyo punto de aplicación es z.*

**Notación 2.2.1** *Denotaremos por $\mathcal{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales holomorfos definidos en U.*

Las funciones $Z_i$ serán llamadas *componentes o coordenadas de $Z$*, como las $Z_i$ son funciones holomorfas de varias variables complejas definidas en una vecindad de $p$

contenida en $U$, entonces existe un polidisco $\triangle(p,r)$ tal que ellas tienen un desarrollo en series de potencias alrededor del $p \in U$, si consideramos el polidisco compacto $\triangle[p,r/2]$, entonces las series de potencias convergen absoluta y uniformemente, de esta manera las series de potencias no se alteran si reordenamos sus términos, así obtenemos una serie de polinomios homogéneos

$$Z_i(z_1,...,z_n) = \sum_{k\geq 0} Z_k^i(z_1,...,z_n), (1 \leq i \leq n),$$

donde los $Z_k^i(z_1,...,z_n)$, $(1 \leq i \leq n)$ son polinomios homogéneos de grado $k$ en $n$ variables complejas.

**Definición 2.2.2** *El orden de $Z_i$ en $p \in U$ es el menor número entero $\nu_i$ tal que $Z_k^i \equiv 0$, para todo $k < \nu_i$ y $Z_{\nu_i}^i \not\equiv 0$ y lo denotamos por $ord_p(Z_i) = \nu_i$.*

**Definición 2.2.3** *La multiplicidad algebraica de la foliación $\mathcal{F}_Z$ (o del campo $Z$) en el punto $p \in U$, denotada por $m_p(\mathcal{F}_Z)$ (o simplemente por $m_p(Z)$) es el mínimo de los órdenes $ord_p(Z_i)$, i.e $m_p(Z) = \text{mín}\{ord_p(Z_i); 1 \leq i \leq n\}$.*

**Definición 2.2.4** *Un punto $p \in U$ es llamado punto singular de $Z$ si y sólo si $Z(z) = 0$, caso contrario, decimos que $p$ es un punto regular de $Z$.*

**Notación 2.2.2** *Denotaremos por $Sing(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares de $Z$.*

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ entonces $Z$ se expresa como

$$Z(z) = \left( \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_{1Q}(z-z_0)^Q, ..., \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_{nQ}(z-z_0)^Q \right). \tag{2.3}$$

**Definición 2.2.5** *Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el $k$-jet o Jet de orden $k$ de $Z$ en el punto $z_0$, denotado por $J^k_{z_0}(Z)$, se define como:*

$$J^k_{z_0}(Z) = \left( \sum_{|Q|=0}^{k} c_{1Q}(z - z_0)^Q, ..., \sum_{|Q|=0}^{k} c_{nQ}(z - z_0)^Q \right). \tag{2.4}$$

**Observaciones:**

**1.** Un punto $z_0 \in Sing(Z)$ si y sólo si $J^0_{z_0}(Z) = (0, ..., 0)$ si y sólo si $m_p(Z) \geq 1$.

**2.** Si $z_0 \in Sing(Z)$ entonces $J^1_{z_0}(Z) = DZ(z_0)$, la cual es llamada la *parte lineal* de $Z$.

**Definición 2.2.6** *Un punto $p \in U$ es llamado* ***irreducible*** *si y sólo si $m_p(Z) = 1$ y la parte lineal de $Z$ en $p$ (i.e $DZ(p)$) tiene al menos un autovalor no nulo.*

**Definición 2.2.7** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$. Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O), asociada al campo vectorial holomorfo $Z$*

$$z' = Z(z). \tag{2.5}$$

*Por una solución de la EDO (2.5) se entenderá una función holomorfa $\varphi : D \to U$, donde $D \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto, tal que*

$$\varphi'(T) = Z(\varphi(T)), \ \forall T \in D.$$

**Definición 2.2.8** *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ y $T_0 \in \mathbb{C}$. Dado el Problema de Valor Inicial (P.V.I), o el Problema de Cauchy asociado a $Z$*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z' & = & Z(z) \\ z(T_0) & = & z_0. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

*Por una solución de la E.D.O (2.6) se entenderá una función holomorfa $\varphi : D \to U$, donde $D \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto, tal que*

**a)** *El punto* $T_0 \in D$, $\varphi(T_0) = z_0$.

**b)** $\varphi'(T) = Z(\varphi(T)),\ \forall T \in D$.

Las demostraciones de los siguientes resultados se encuentran en [7] y [22].

**Proposición 2.2.1** *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *un abierto,* $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ *y* $T_0 \in \mathbb{C}$. *Resolver el PVI (2.6) es equivalente a resolver la ecuación integral*

$$Z(T) = z_0 + \int_{T_0}^{T} Z(z(s))ds,$$

*donde la integral es a lo largo del segmento que une* $T_0$ *a* $T$.

**Teorema 2.2.2 (Picard)** *Sea* $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$ *un campo vectorial holomorfo en* $\Delta(z_0, r)$ *y Lipschitz en* $\Delta[z_0, r]$ *entonces para cualquier* $T_0 \in \mathbb{C}$, *existe una única solución del P.V.I.:*

$$\begin{cases} z' &= Z(z) \\ z(T_0) &= z_0 \ , \end{cases}$$

*definida en el disco* $D_\alpha[T_0]$, *donde* $\alpha = \text{mín}\left\{\frac{r_1}{N}, ..., \frac{r_n}{N}\right\}$, $r = (r_1, ..., r_n)$ *y* $N = \text{máx}\left\{\|Z(z)\|\,; z \in \Delta[z_0, r]\right\}$.

***Corolario 2.2.3*** *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *un abierto y* $Z \in \mathcal{X}(U)$. *Entonces para cualquier* $z_0 \in U$ *y cualquier* $T_0 \in \mathbb{C}$, *exixte una única solución del P.V.I*

$$\begin{cases} z' &= Z(z) \\ z(T_0) &= z_0 \ , \end{cases}$$

*la cual está definida en una vecindad de* $T_0$.

**Teorema 2.2.4** *Sea* $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$ *un campo vectorial holomorfo en* $\Delta(z_0, r)$ *y Lipschitz en* $\Delta[z_0, r]$ *y denotemos por* $\varphi_{z_0} : D_\alpha[T_0] \to \Delta[z_0, r]$ *la única solución del*

*P.V.I.:*

$$\begin{cases} z' &= Z(z) \\ z(T_0) &= z_0 \ , \end{cases}$$

*donde* $\alpha = \text{mín}\left\{\frac{r_1}{N}, ..., \frac{r_n}{N}\right\}$, $r = (r_1, ..., r_n)$ *y* $N$=*max*$\{\|Z(z)\| \, ; z \in \Delta[z_0, r]\}$.

*Entonces*

**1.** *Existe un poliradio* $r' = (r'_1, ..., r'_n)$ *con* $r'_j < r_j$ *y existe* $0 < \alpha' < \alpha$ *tales que para todo* $z \in \Delta[z_0, r']$ *existe una única solución* $\varphi_z : D_{\alpha'}[T_0] \to \Delta[z_0, r]$ *del PVI:*

$$\begin{cases} w' &= Z(w) \\ w(T_0) &= z. \end{cases}$$

**2.** $\left\|\varphi_z(T) - \varphi_{z_0}(T)\right\| \leq \|z - z_0\| \, e^{Lip(Z)|T-T_0|}$, $\forall z \in \Delta[z_0, r']$ *y* $\forall T \in D_{\alpha'}[T_0]$.

**Observación:**

1. La parte 2 del teorema anterior recibe el nombre de *continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales.*

2. En virtud al teorema anterior, para el campo $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} \varphi : \ D_{\frac{\alpha}{2}}[T_0] \times \Delta[z_0, \tfrac{r}{2}] &\to \Delta[z_0, r] \\ (T, z) &\mapsto \varphi(T, z) = \varphi_z(T). \end{aligned}$$

Esta función $\varphi$ es llamada *Flujo Local asociado a Z alrededor de* $(T_0, z_0)$. Es claro que el flujo satisface las siguientes condiciones:

**a)** $\frac{\partial \varphi}{\partial T}(T, z) = Z(\varphi(T))$, $\forall (T, z) \in D_{\frac{\alpha}{2}}(T_0) \times \Delta(z_0, \frac{r}{2})$.

**b)** $\varphi(T_0, z) = z$, $\forall z \in \Delta(z_0, \frac{r}{2})$.

El siguiente resultado establece que el flujo local asociado a un campo vectorial holomorfo es también holomorfo, considerando como función de un abierto de $\mathbb{C}^{n+1}$ en $\mathbb{C}^n$.

**Teorema 2.2.5** *Si* $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$ *un campo vectorial holomorfo en* $\Delta(z_0, r)$ *y Lipschitz en* $\Delta[z_0, r]$ *entonces su flujo local asociado* $\varphi : D_{\frac{\alpha}{2}}[T_0] \times \Delta[z_0, \frac{r}{2}] \to \Delta[z_0, r]$ *es una función holomorfa.*

### 2.2.1. Sistemas Lineales Complejos

El caso más simple de una EDO compleja es el sistema lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\frac{dz}{dT} = A.z,\ T \in \mathbb{C},\ \mathrm{z} \in \mathbb{C}^n \text{ y } A \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{2.7}$$

En esta sección, adoptaremos el punto de vista **Genérico**, es decir, veremos qué propiedades son satisfechas por "casí todos" los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. El decir "casí todos" se refire que el conjunto que estudiamos es abierto y denso.

Comenzaremos con un breve repaso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en los números reales:

Las soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dx}{dt} = A.x,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \text{ y } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.8}$$

están dadas por el flujo lineal

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_A : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t, x) & \mapsto & \varphi_A(t, x) = e^{tA}x. \end{array}$$

**Definición 2.2.9** *El sistema lineal* (*2.8*) (*resp. la matriz* $A$) *se llama* ***Hiperbólico*** (*caso real*)*si los valores propios de la matriz* $A$ *tiene parte real diferente de cero.*

**Definición 2.2.10** *El sistema lineal* (*2.8*) (*resp. la matriz* $A$) *se llama* ***Estructuralmente Estable*** *si dado cualquier sistema de ecuaciones diferenciales lineales suficientemente próximo, la estructura de las soluciones no cambia desde un punto de vista topológico.*

Las demostraciones de los siguientes teoremas pueden ser encontradas en [15], [22] y [7].

**Teorema 2.2.6** *En el caso real, se cumplen lo siguiente:*

1. *Los sistemas Hiperbólicos forman un conjunto abierto denso en el espacio de los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales.*

2. *Un sistema de ecuaciones diferenciales es estructuralmente estable si y sólo si es hiperbólico.*

3. *Dos sistemas hiperbólicos son topológicamente conjugados* (*equivalentes*) *si ellos tienen el mismo índice, donde el índice es un número de* $\{0, 1, ..., n\}$.

En resumen, el teorema anterior nos dice que los sistemas estructuralmente estables forman un conjunto abierto y denso en los sistemas de ecuaciones deferenciales lineales en $\mathbb{R}^n$, y que estos tienen $n+1$ clases de equivalencia, dados por la relación de conjugación topológica.

Ahora veamos brevemente, como es el panorama en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales complejos.

Como estamos viendo desde un punto de vista genérico, consideramos al conjunto abierto y denso de las matrices invertibles y diagonizables

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}, \ j = 1, ..., n.$$

Las soluciones de

$$\frac{dz}{dT} = A.z, \ T \in \mathbb{C}, \ z \in \mathbb{C}^n$$

están dadas por el flujo exponencial

$$\begin{array}{rccl} \varphi_A : & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (T, z) & \mapsto & \varphi_A(T, z) = e^{TA}.z \end{array}$$

el cual nos dice que las soluciones son ahora "curvas complejas" (superficies de Riemann), la cual tienen dimensión real igual a dos, esta es la primera diferencia importante a la del caso real.

**Definición 2.2.11** *Dado el flujo complejo $\varphi_A : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{\alpha,A} : & \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (t, z) & \mapsto & \varphi_{\alpha,A}(t, z) = \varphi_A(\alpha t, z) = e^{\alpha t A} z \end{array}$$

*llamada* ***Flujo Real*** *inducido por $\varphi_A$ en la dirección $\alpha$.*

Observe que sus órbitas $\mathcal{O}_{\alpha,A}(z) = \{\varphi_{\alpha,A}(t, z);\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}\}$ son curvas reales contenidas en las órbitas $\mathcal{O}_A(z) = \{\varphi_A(T, z);\ \mathrm{T} \in \mathbb{C}\}$, es decir $\mathcal{O}_{\alpha,A}(z) \subseteq \mathcal{O}_A(z) \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

**Notación 2.2.3** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz compleja, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalores de $A$, denotaremos por*

$$\mathcal{H}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \mathcal{H}(A) \subseteq \mathbb{C}$$

*a la envolvente convexa de los valores propios de la matriz $A$.*

**Definición 2.2.12** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz compleja*

1. *Decimos que la matriz $A$ pertenece al* ***dominio de Poincaré*** *si $0 \notin \mathcal{H}(A)$.*

2. *Decimos que la matriz $A$ pertenece al* ***dominio de Siegel*** *si $0 \in \mathcal{H}(A)$.*

Veamos que el conocimiento de los flujos reales, nos da información sobre el flujo complejo.

**Teorema 2.2.7** *Sea $A = diag[\lambda_1, ..., \lambda_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}$, $j = 1, ..., n$, consideremos el sistema*

$$\frac{dz}{dT} = A.z,\ T \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{2.9}$$

*Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Las soluciones del sistema anterior son transversales a las esferas $S^{2n-1}$.*

2. *Existe $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que el origen es un atractor para el flujo real $\varphi_{\alpha,A} : \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.*

3. *La matriz $A$ pertenece al* ***dominio de Poincaré****.*

Del resultado anterior tenemos:

**Teorema 2.2.8** *El sistema (2.9) pertenece al* ***dominio de Siegel*** *si existe una solución que no es tranversal a la esfera $S^{2n-1}$.*

**Teorema 2.2.9** *Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}-\{0\}$. La matriz $A$ pertenece al dominio de Poincaré si y sólo si $\lambda/\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$.*

**Teorema 2.2.10** *En dimensión $n = 2$, el dominio de Poincaré es abierto y denso en el espacio $\mathbb{C}^{2\times 2}$.*

Del teorema anterior, el dominio de Siegel tiene interior vacio en el espacio $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Para más información ver [3].

**Observación:** En dimensión $n \geq 3$, el dominio de Siegel tiene interior no vacío, con lo cual, el dominio de Poincaré ya no es denso, ver [15].

**Definición 2.2.13** *Sea $A = diag[\lambda_1, ..., \lambda_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}$, $j = 1, ..., n$, consideremos el sistema*

$$\frac{dz}{dT} = A.z,\ T \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

*La matriz $A$ o el sistema es Hiperbólico si $\lambda_i/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ para $i \neq j$.*

Las clases de equivalencia topológicas en el dominio de Poincaré se describen en el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.11** *Todo sistema hiperbólico en el dominio de Poincaré es estructuralmente estable y son topológicamente conjugados entre sí.*

**Corolario 2.2.12** *En dimensión compleja $n = 2$, la estabilidad estructural es genérica. Además, todo sistema Hiperbólico en el dominio de Poincaré es topológicamente conjugado al sistema.*

$$\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

***Observación***

1. En el caso real se tiene que la estabilidad estructural es genérica con n+1 clases de equivalencia dadas por la conjugación topológica.

2. En el caso complejo, dimensión dos, la estabilidad estructural es genérica pero con una sola clase de equivalencia. Mientras que en dimensión $\geq 3$ la estabilidad estructural ya no es genérica.

### 2.2.2. Campos Holomorfos con Parte Lineal No Nula

En esta sección estudiaremos las singularidades de un campo vectorial holomorfo, desde el punto de vista local. Las demostraciones de los teoremas de esta sección pueden ser encontradas en [15], [7] y [22].

**Definición 2.2.14** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ es una singularidad aislada del campo $Z$ si $z_0 \in Sing(Z)$ y existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de $z_0$ tal que $Sing(Z) \cap (V - \{z_0\}) = \phi$.*

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $z_0 \in U$ una *singularidad aislada* de $Z$. Luego existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de $z_0$ tal que

$$Z(z) = \left( \sum_{|Q|=1}^{\infty} c_{1Q}(z - z_0)^Q, ..., \sum_{|Q|=1}^{\infty} c_{nQ}(z - z_0)^Q \right), \ \forall z \in V,$$

observe que el término constante es cero puesto que $z_0$ es una singularidad, además $Z(z) \neq 0 \ \forall z \in V - \{z_0\}$.

**Definición 2.2.15** *$DZ(0)$ es llamado **Parte Lineal** de $Z$.*

**Definición 2.2.16** *Decimos que $Z$ tiene parte lineal no nula en $z_0 \in U$ si la derivada o la matriz jacobiana de $Z$ en $z_0$ $DZ(0) = Z'(z_0) \neq \theta$.*

**Definición 2.2.17** *Sea $z_0$ una singularidad de $Z$, sean $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ los autovalores de $DZ(z_0)$. Diremos que:*

**1.** *Un punto $z_0$ es una singularidad no degenerada si $DZ(z_0)$ es no singular.*

**2.** *Un punto $z_0$ es hiperbólica si es no degenerada y todos los cocientes $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ para todo $i \neq j$.*

**3.** *Un punto $z_0$ está en el dominio de Poincaré si $DZ(z_0)$ está en el dominio de Poincaré.*

**4.** *Un punto $z_0$ está en el dominio de Siegel si $DZ(z_0)$ está en el dominio de Siegel.*

**5.** *Diremos que una singularidad $z_0$ tiene **una resonancia** si existen $1 \leq i \leq n$ y $m_1, ...., m_n$, enteros no negativos, tales que $\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$ y $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j$. Una singularidad que no posee resonancias será llamada **no resonante**.*

**Proposición 2.2.13** *Se cumple lo siguiente:*

**1)** *Las propiedades, arriba definidas, son invariantes por biholomorfismos.*

**2)** *Las singularidades no degenerdas son aisladas.*

**Prueba**.

1) En efecto, si $\varphi : V \to U$ es un biholomorfismo tal que $\varphi(p) = q$ y $Y = \varphi^*(Z)$, entonces, $DY(p)$ y $DZ(q)$ tienen los mismos autovalores.

2) En efecto, sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $q \in U$ singularidad no degenerada entonces $\det(DZ(q)) \neq 0$, implica que $Z$, visto como aplicación de $U$ en $\mathbb{C}^n$, por el Teorema de la función inversa, existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de q tal que $Z : V \to Z(V)$ es un biholomorfismo. Esto implica que $Z(p) \neq 0$ para todo $p \in V - \{q\}$, luego $q$ es la única singularidad de $Z$ en $V$. ■

**Observación:** Desde que las propiedades, arriba definidas, son invariantes por biholomorfismos nos permite extender las definiciones anteriores para campos de vectores en variedades complejas, vía cartas locales.

**Definición 2.2.18** *Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos, $Z_1 \in \mathcal{X}(U_1)$, $Z_2 \in \mathcal{X}(U_2)$, $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ y consideremos sus flujos asociados*

$$\varphi_1 : D_\partial[T_0] \times \Delta[p_1, r'] \to \Delta[p_1, r]$$
$$\varphi_2 : D_\partial[T_0] \times \Delta[p_2, r'] \to \Delta[p_2, r].$$

*Decimos que $Z_1$ es Localmente Topológicamente Conjugados (resp. Analíticamente Conjugados) a $Z_2$, lo que denotaremos $Z_1 \sim_{top} Z_2$ (resp. $Z_1 \sim_{anal} Z_2$) si y sólo si existen vecindades abiertas $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$ de $p_1$, $p_2$ respectivamente y existe $h : V_1 \to V_2$ homeomorfismo (resp. biholomorfismo) llamado Conjugación Topológica Local (resp. Conjugación Analítica Local) tal que*

$$h(\varphi_1(T, z)) = \varphi_2(T, h(z)) \; \forall (T, z) \in D_\partial[T_0] \times V_1.$$

El siguiente Teorema nos da toda la información cualitativa alrededor de un punto regular

**Teorema 2.2.14 (Flujo Tubular)** *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $z_0 \in U$ un punto regular de $Z$ entonces $Z$ es localmente analíticamente conjugado al campo constante $Y = (1, 0, ..., 0)$ alrededor de $z_0$ y $0$. (ver Figura 2.1)*

**Prueba.** Ver [[12]]. ■

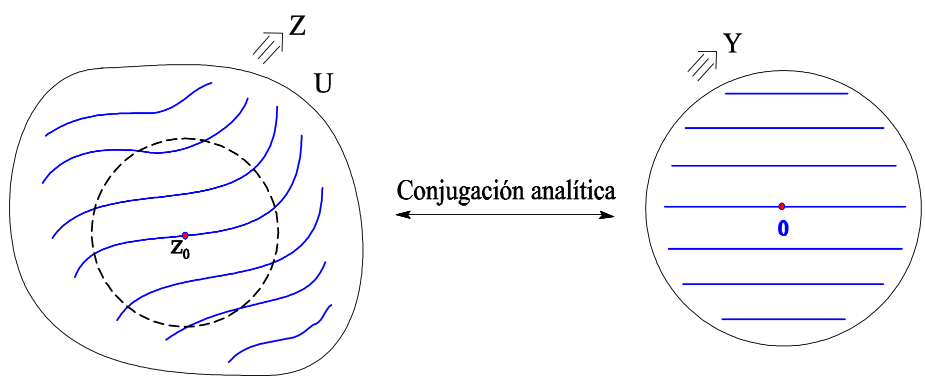


Figura 2.1: En una vecindad, las órbitas se enderezan

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y su flujo asociado $\varphi_Z : D_\partial[T_0] \times \Delta[z_0, r'] \to \Delta[z_0, r]$.

**Definición 2.2.19** *Definimos la órbita (local) de $z$ por el campo $Z$ (o la hoja de $z$ por el campo $Z$) como:*

$$\mathcal{O}_Z(z) = \{\varphi_Z(T, z);\ \ T \in D_\partial(T_0)\}.$$

**Definición 2.2.20** *Denotaremos por $\mathcal{F}_Z = \{\mathcal{O}_Z(z);\ z \in \Delta[z_0, r']\}$, el cual es llamado* ***Foliación (local) por curvas generada por Z.***

Si $Z_1 \sim_{top} Z_2$ (resp. $Z_1 \sim_{anal} Z_2$) entonces la conjugación topológica (resp. analítica) $h : V_1 \to V_2$ satisface

$$h(\mathcal{O}_{Z_1}(z)) = \mathcal{O}_{Z_2}(h(z)),\ \forall z \in V_1,$$

es decir, una conjugación lleva hojas en hojas.

**Definición 2.2.21** *Diremos que um campo de vectores holomorfos $Z$ es* ***linealizable*** *en una singularidad $p$, si $Z$ es localmente analíticamente conjugado en $p$ al campo lineal definido por $DZ(p)$ en 0.*

Los resultados más importantes sobre las singularidades no degeneradas son los teoremas de Linealización de Poincaré y Siegel, que enunciaremos enseguida.

**Teorema 2.2.15 (Linealización de Poincaré)** *Si $p$ es una singularidad en el dominio de Poincaré y sin resonancias, de un campo de vectores holomorfo $Z$, entonces $Z$ es linealizable en $p$.*

**Definición 2.2.22** *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $p \in U$ una singularidad en el domino de Siegel y sin resonancias, $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ los autovalores de $DZ(p)$. Diremos que la singularidad $q$ verifica las* ***condiciones de Siegel,*** *si existen constantes $C$,*

$\nu > 0$, *tales que para cualquier* $i = 1, ..., n$ *y cualquier* $n-$*upla de enteros no negativos* $m = (m_1, ..., m_n)$ *con* $\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$, *tenemos*

$$\left|\lambda_i - \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j\right| \geq \frac{C}{|m|^{\nu}},$$

*donde* $|m| = \sum_{j=1}^{n} m_j$.

Note que las condiciones de Siegel implican que la singularidade es no resonante.

**Teorema 2.2.16 (Linealización de Siegel)** *Un campo holomorfo que posee una singularidad que verifica las condiciones de Siegel, es linealizable en esta singularidad.*

## 2.3. Variedades Complejas

**Definición 2.3.1** *Sea* $M$ *un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.*

1. *Una carta compleja de dimensión* $n$ *sobre* $M$ *es un homeomorfismo* $\varphi : U \to V$ *donde* $U$ *es un abierto de* $M$ *y* $V$ *es un abierto de* $\mathbb{C}^n$.

2. *Dos cartas complejas* $\varphi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$ *son llamadas compatibles si la aplicación* $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ *es un biholomorfismo.*

3. *Un atlas complejo de dimensión* $n$ *sobre* $M$ *es una colección de cartas complejas de dimensión* $n$, $A(M) = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ *tal que son compatibles dos a dos y además* $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

4. *Dos atlas complejos* $A$ *y* $A'$ *sobre* $M$ *de dimensión* $n$ *son llamadas analíticamente equivalentes si cada carta de* $A$ *es compatible con cada carta de* $A'$.

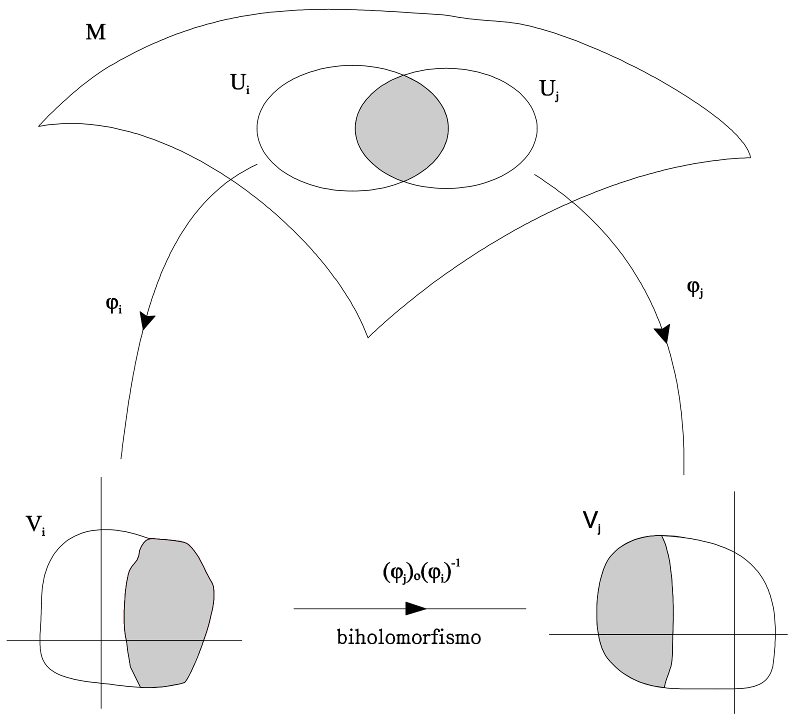


Figura 2.2: Cambio de coordenadas

Denotemos por $\mathcal{A}_M = \{\mathcal{A}; \mathcal{A}$ es un atlas complejo de dimensión $n$ sobre M$\}$. Dados $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}_M$ definimos:

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' \text{ si y sólo si } \mathcal{A} \; y \; \mathcal{A}' \text{ son analíticamente equivalentes.}$$

Es fácil ver que la relación anterior es una relación de equivalencia.

**Definición 2.3.2** *Una clase de equivalencia $\Sigma$ en $\mathcal{A}_M/_\sim$ es llamado estructura compleja n-dimensiónal sobre M.*

Dado $\Sigma \in \mathcal{A}_M/_\sim$, consideramos $\mathcal{A}_* = \bigcup\limits_{\mathcal{A}\in\Sigma} \mathcal{A}$, es claro que $\mathcal{A}_* \in \Sigma$. El conjunto $\mathcal{A}_*$ es llamado *atlas maximal.*

**Definición 2.3.3** *Una variedad compleja de dimensión $n$ es un par $(M, \Sigma)$ donde*

*$M$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y $\Sigma$ es una estructura compleja n-dimensional sobre M.*

**Observación:**

1. Una variedad compleja de dimensión uno es llamada *superficie de Riemann.*

2. Si $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre M, entonces existe una única estructura compleja $\Sigma$ tal que $\mathcal{A} \in \Sigma$. Se sigue que para obtener una variedad compleja es suficiente fijar un atlas complejo sobre un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.

**Lema 2.3.1** *Sea $M \neq \phi$ y $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una familia de biyecciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ que satisface las condiciones siguientes:*

1. *Para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}$, el conjunto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ es un abierto de $\mathbb{C}^n$.*

2. *$M = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$.*

3. *Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{C}^n$ y la composición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un biholomorfismo.*

*Entonces existe una única topología $\tau(\mathcal{F})$ sobre M que torna a la familia $\mathcal{F}$ un atlas complejo de dimensión n para M, además con la topología $\tau(\mathcal{F})$ las biyecciones se tornan en homeomorfismos.*

**Prueba.** Denotemos por $\tau(\mathcal{F})$ a la familia de subconjuntos de M definidas por

$$A \in \tau(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \text{ es abierto } \forall \alpha.$$

Es fácil ver que $\tau(\mathcal{F})$ es una topología sobre M. ■

**Lema 2.3.2** *Sea $M \neq \phi$ y $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ con las condiciones del lema 1. La topología $\tau(\mathcal{F})$ es de Hausdorff si y sólo si $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ no exista ninguna sucesión $(x_n) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ tal que $x_n \to x \in \varphi_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$ y $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x_n) \to y \in \varphi_\beta(U_\beta - U_\alpha)$.*

**Lema 2.3.3** *Sea $M \neq \phi$ y $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ con las condiciones del lema 1. $\tau(\mathcal{F})$ tiene base numerable si y sólo si el cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de $M$ admite un subcubrimiento numerable de $M$.*

Las demostraciones de los lemas anteriores las puede encontrar en [19].

**Definición 2.3.4** *Sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ dos variedades complejas de dimensiónes $m$ y $n$ respectivamente y $f : X \to Y$ continua.*

1. Decimos que $f$ es holomorfa en $p \in X$ si existe $\varphi : U \to V$, $\varphi \in \mathcal{A}$ y existe $\psi : U' \to V'$, $\psi \in \mathcal{B}$ con $p \in U$ y $f(p) \in U'$, $f(U) \subseteq U'$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \subseteq \mathbb{C}^m \to V' \subseteq \mathbb{C}^n$ es holomorfa en $\varphi(p)$.

2. Decimos que $f$ es holomorfa en $X$ si $f$ es holomorfa en $p$, $\forall p \in X$.

3. Decimos que $f$ es biholomorfa si $f$ es biyectiva holomorfa y su inversa también es holomorfa.

4. Decimos que $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ son biholomorfas si existe un biholomorfismo entre ellas.

# Capítulo 3

# Transformado Estricto de Funciones Holomorfas

## 3.1. El Espacio Proyectivo Complejo $\mathbb{C}P(n)$

En $\mathbb{C}^n - \{0\}$ definimos la siguiente relación:

$$z \sim w \Leftrightarrow \exists\ t \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}\ tal\ que\ w = tz,$$

donde $z,\, w \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.

Es claro que "$\sim$" es una relación de equivalencia. Al conjunto cociente definido por la relación lo denotamos por:

$$\mathbb{C}P(n-1) = (\mathbb{C}^n - \{0\})\,/_{\sim} = \{[z] = [z_1; ...; z_{n+1}];\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}.$$

donde $[z] = \{(tz_1, ..., tz_n);\ t \in \mathbb{C}^*\}$.

Los elementos de $\mathbb{C}P(n-1)$ son rectas complejas de $\mathbb{C}\ ^n$ que pasan por el origen tal que el $0 \in \mathbb{C}^n$ no pertenece a la recta.

- Si $n = 1$, $\mathbb{C}P(1)$ es llamado linea proyectiva o esfera de Riemann.

- Si $n = 2$, $\mathbb{C}P(2)$ es llamado plano proyectivo complejo.

Demos una estructura de variedad al espacio $\mathbb{C}P(n-1)$.

Sea $U_j = \{[z] = [z_1; ...; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1);\ z_j \neq 0\}$ para $1 \leq j \leq n$, definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_j :\ & U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ & [z] \longmapsto \varphi_j([z]) = \left( \frac{z_1}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, ... \frac{z_n}{z_j} \right), \end{aligned}$$

es fácil ver que las aplicaciones $\varphi_j$ son biyecciones $(1 \leq j \leq n)$, donde las inversas son $\varphi_j^{-1} : \mathbb{C}^{n-1} \to U_j$ dadas por:

$$\varphi_j^{-1}(w_1, ..., w_{n-1}) = [w_1; ... : w_{j-1}; 1; w_j; ...; w_n].$$

Luego tenemos una familia de biyecciones $\mathcal{F} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ tal que: $\varphi_j(U_j) = \mathbb{C}^{n-1}$ es abierto $(1 \leq j \leq n)$ y $\cup_{j=1}^{n}(U_j) = \mathbb{C}P(n-1)$, con un fácil cálculo se muestra que:

Para $U_i \cap U_j \neq \phi$ se tiene que $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ son abiertos en $\mathbb{C}^{n-1}$. Además $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un biholomorfismo $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

Entonces la familia $\mathcal{F} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ genera una topología $\tau(\mathcal{F})$ sobre $\mathbb{C}P(n-1)$ que torna a $\mathcal{F}$ un atlas holomorfo de dimensión $n$, como $\mathcal{F}$ es finito entonces $\tau(\mathcal{F})$ tiene base numerable, ver lemas 2.3.1 y 2.3.3.

Sea $(U_i, \varphi_i)$,$(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ tal que $U_i \cap U_j \neq \phi$ un fácil cálculo muestra que no existe ninguna sucesión $(x_n) \subseteq \varphi_i(U_i \cap U_j)$ tal que $x_n \longrightarrow x \in \varphi_i(U_i - U_j)$ y $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x_n) \longrightarrow y \in \varphi_j(U_j - U_i)$ entonces $\tau(\mathcal{F})$ es de Hausdorff, ver lema 2.3.2. Luego tenemos que $\mathbb{C}P(n-1)$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable, por lo tanto $(\mathbb{C}P(n-1), \mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1)))$ es una variedad compleja holomorfa de dimensión $n-1$, donde $\mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1))$ es el atlas maximal que contiene al atlas generado por la familia $\mathcal{F}$.

**Definición 3.1.1** $(\mathbb{C}P(n-1), \mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1)))$ *es llamado espacio Proyectivo Complejo* $(n-1)-$*dimencional.*

**Proposición 3.1.1** $\mathbb{C}P(n-1)$ *es compacto.*

**Observación:** El conjunto $\mathbb{C}^{n-1}$ puede ser identificado con $U_1$, y sea el conjunto $H_\infty = \{[z_1; ...; z_n];\ z_1 = 0\}$ en $\mathbb{C}P(n-1)$, observe que la primera carta de $\mathbb{C}P(n-1)$ no puede ver el conjunto $H_\infty = \mathbb{C}P(n-1) - U_1 = \mathbb{C}P(n-1) - \mathbb{C}^{n-1}$, es decir que $H_\infty$ no intersecta la imagen de $\varphi_1$, donde $(U_1, \varphi_1)$ es la primera carta de $\mathbb{C}P(n-1)$, es por eso que a $H_\infty = \mathbb{C}P(n-1) - \mathbb{C}^{n-1}$ se le llama conjunto del infinito (en la 1ra carta).

## 3.2. El Blow-up Centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$

El Blow-up centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$, consiste en remplazar el $0 \in \mathbb{C}^n$ por un espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, dejando todos los otros puntos invariante desde el punto de vista biholomorfo. Vamos a dar un sentido matemático preciso a esta idea informal, empezamos considerando las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rccl} E_j: & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & E_1(y_1, ..., y_n) = (y_1, y_1y_2, ..., y_1y_n) = (z_1, ..., z_n), \end{array}$$

para $1 \leq j \leq n$. Es fácil deducir las siguientes propiedades:

1. $E_j^{-1}(0) = \{y_1 = 0\}$
2. $E_j(\mathbb{C}^n) = \{\mathbb{C}^n - \{z_j = 0\}\} \cup \{0\}$ , i.e $E_j$ no es sobreyectiva
3. $E_j : \mathbb{C}^n - \{y_j = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{z_j = 0\}$ es un biholomorfismo, cuya inversa es:

$$\begin{array}{rccl} E_j^{-1}: & \mathbb{C}^n - \{z_j = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n - \{y_j = 0\} \\ & (z_1, ..., z_n) & \longmapsto & E_j^{-1}(z_1, ..., z_n) = \left(\dfrac{z_1}{z_j}, ..., \dfrac{z_{j-1}}{z_j}, z_j, \dfrac{z_{j+1}}{z_j}, ... \dfrac{z_n}{z_j}\right). \end{array}$$

De lo anterior deducimos que para poder cubrir todo el espacio $\mathbb{C}^n$ se necesitan las $n$-aplicaciones $E_j$, además el $0 \in \mathbb{C}^n$ es llevado a un espacio $(n-1)$-dimensional, $\{z_j = 0\}$, via la aplicación $E_j$.

Para cubrir todo $\mathbb{C}^n$ (i.e todo punto de $\mathbb{C}^n$ tenga pre-imagen bajo $E_1, ..., E_n$) necesitamos pegar los $n$ sistemas haciendo que los espacios $\{y_1 = 0\}, ..., \{y_n = 0\}$ se identifiquen dos a dos, de tal manera que $E_1, ..., E_n$ siguan siendo biholomorfismos, intuitivamente necesitamos construir una **variedad** con ayuda de las apliaciones $E_1, ..., E_n$.

Para $1 \leq j \leq n$, definimos los conjuntos:

$$\tilde{U}_j = \{(z_1, ..., z_n, [w]) \in \mathbb{C}^n \times U_j; (z_1, ...z_{j-1}, z_{j+1}, ..., z_n) = z_j \varphi_j([w])\},$$

donde $(U_i, \varphi_i)$ son las cartas del plano proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$. Observe que:

$$\tilde{U}_j \subseteq \mathbb{C}^n \times U_j \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P(n-1),\ (1 \leq j \leq n).$$

Sea $z = (z_1, ..., z_n)$ y $[w] = [w_1; ...; w_n]$, definimos las funciones:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}_j : & \tilde{U}_j & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (z, [w]) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_1(z, [w]) = \left(\dfrac{w_1}{w_j}, ..., \dfrac{w_{j-1}}{w_j}, z_j, \dfrac{w_{j+1}}{w_j}, ... \dfrac{w_n}{w_j}\right). \end{array}$$

Un fácil cálculo muestra que las $\tilde{\varphi}_j$,$(1 \leq j \leq n)$ son biyeciones, cuyas inversas son:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}_j^{-1} : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \tilde{U}_j \\ & (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_j^{-1}(y_1, ..., y_n) = \big(E_j(y_1, ..., y_n), \varphi_j^{-1}(y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n)\big). \end{array}$$

Luego tenemos una familia de biyecciones $\tilde{\mathcal{F}} = \{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{1 \leq j \leq n}$.

Definimos el conjunto $\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \cup_{j=1}^n (\tilde{U}_j)$, un fácil cálculo se muestra que:

Para $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \phi$ se tiene que $\tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$, $\varphi_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ son abiertos en $\mathbb{C}^n$. Además $\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}$ es un biholomorfismo $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

Entonces la familia $\tilde{\mathcal{F}} = \{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{1\leq j\leq n}$ genera una topología $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$ que torna a $\mathcal{F}$ un atlas holomorfo de dimensión $n$, como $\tilde{\mathcal{F}}$ es finito entonces $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ tiene base numerable, ver lemas 2.3.1 y 2.3.3.

Sean $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$,$(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j) \in \mathcal{F}$ tal que $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \phi$ un fácil cálculo muestra que no existe ninguna sucesión $(x_n) \subseteq \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ tal que $x_n \longrightarrow x \in \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i - \tilde{U}_j)$ y $(\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1})(x_n) \longrightarrow y \in \tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_j - \tilde{U}_i)$ entonces $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ es de Hausdorff, ver lema 2.3.2. Luego tenemos que $\mathbb{C}P(n-1)$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.

Por lo tanto $(\tilde{\mathbb{C}}_0^n, \mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n))$ es una variedad compleja holomorfa de dimensión $n$, donde $\mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n)$ es el atlas maximal que contiene al atlas generado por la familia $\tilde{\mathcal{F}}$.

**Definición 3.2.1** *La variedad compleja* $(\tilde{\mathbb{C}}_0^n, \mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n))$ *es llamada Blow-up centrado en el* $0 \in \mathbb{C}^n$.

Observe que $\tilde{\mathbb{C}}_0^n \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P(n-1)$, de manera natural existen dos proyecciones:

$$\begin{aligned} E: \quad \tilde{\mathbb{C}}_0^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z,[l]) &\longmapsto E(z,[l]) = z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi: \quad \tilde{\mathbb{C}}_0^n &\longrightarrow \mathbb{C}P(n-1) \\ (z,[l]) &\longmapsto E(z,[l]) = [l]. \end{aligned}$$

**i)** Expresamos la proyección $E$ en coordenadas, i.e trabajando con las cartas de la variedad $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$.

En la $j$-ésima carta $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)$

$$(E \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})(y_1, ..., y_n) = E_j(y_1, ..., y_n).$$

Entonces $(E \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}) = E_j \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}$, por lo tanto ahora sí cualquier punto $z \in \mathbb{C}^n$ tiene pre-imagen bajo $E_1, E_2, ...,$ ó $E_n$. Además como las aplicaciones $E_j$ son

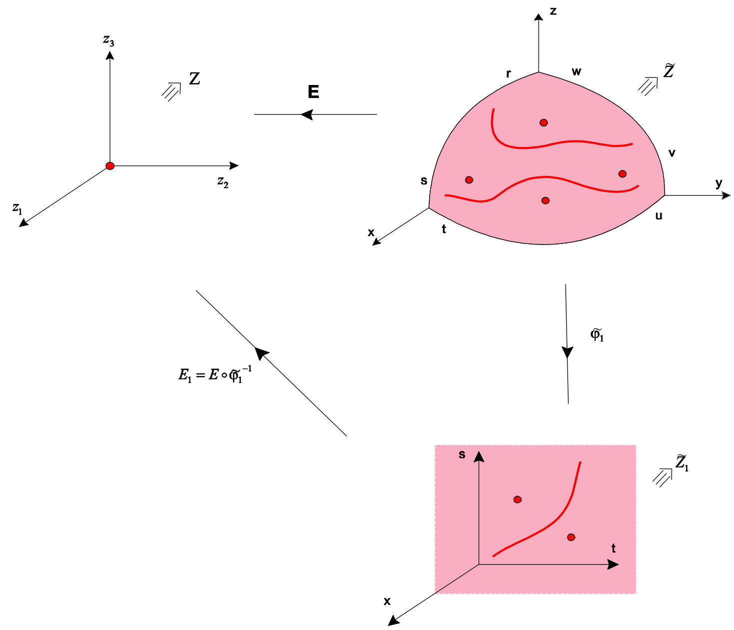


Figura 3.1: El Blow-up centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$.

holomorfas $\forall\ j \in \{1, ..., n\}$, entonces la aplicacion $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa entre variedades, (ver figura 3.1).

**ii)** Análogamente para la proyección $\pi$, es fácil ver que $\pi$ es una función holomorfa entre variedades.

**Definición 3.2.2** *La función holomorfa* $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *será llamada Blow-up con centro en el punto* $0 \in \mathbb{C}^n$*.*

**Proposición 3.2.1** *La función* $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *verifica las siguientes propiedades:*

**(1)** $E^{-1}(\theta) = \mathbb{C}P(n-1)$ ; donde $\theta = (0, 0, 0)$.

**(2)** $\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \{(z, [z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$.

**(3)** $E|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)} : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{\theta\}$ es un biholomorfismo.

**(4)** $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un mapeo propio.

**Prueba.**

**(1)** En efecto, sea $(z,[l]) \in E^{-1}(\theta) \Leftrightarrow E(z,[l]) = \theta \Leftrightarrow z = \theta \Leftrightarrow (z,[l]) \in \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$ entonces $E^{-1}(\theta) = \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$, sea $i : \mathbb{C}P(n-1) \hookrightarrow E^{-1}(\theta)$ la inclusión canónica, es claro que $i$ es una inmersión holomorfa, entonces es claro que $\{\theta\}\times\mathbb{C}P(n-1)$ es biholomorfa a $\mathbb{C}P(n-1)$ ($\mathbb{C}P(n-1) \approx \{\theta\}\times\mathbb{C}P(n-1)$), entonces $E^{-1}(\theta)$ se puede identificar con $\mathbb{C}P(n-1)$.

**(2)** En efecto, es claro que $\{(z,[z]);\, z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}^n_0$, veamos el otro contenido.

Sea $(z,[l]) \in \tilde{\mathbb{C}}^n_0$ ; donde $z = (z_1, ..., z_n)$, $[l] = [l_1, ..., l_n]$ entonces ocurren dos casos :

- Si $z = \theta$, entonces $(z,[l]) \in \{\theta\}\times U_i \subseteq \{\theta\}\times\mathbb{C}P(n-1)$; para algún $i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow$ $(z,[l]) \in \{(z,[z]);\, z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$
- Si $z \neq \theta$, sin pérdida de generalidad supongamos que $(z,[l]) \in \tilde{U}_1 \Rightarrow (z_2, ..., z_n) = z_1\varphi_1([l]) = z_1(\frac{l_2}{l_1}, ..., \frac{l_n}{l1})$, Además $z_1 \neq 0$, entonces $[z] = [l]$, luego $(z,[l]) \in \{(z,[z]);\, z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\}$.

**(3)** En efecto, teniendo en cuenta las identificaciones anteriores, se aclara por última vez que $E|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)} : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{\theta\}$ es una biyección cuya inversa es : $(E|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)})^{-1} : \mathbb{C}^n - \{\theta\} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)$, ya sabemos que la aplicación $E$ es holomorfa , sólo nos falta ver que $(E|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)})^{-1}$ sea holomorfa, como son aplicaciones entre variedades, entonces veamos mediante las cartas, es fácil ver que $\tilde{\varphi}_i \circ (E|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)})^{-1}$ es holomorfa $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, entonces $(E|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)})^{-1}$ sea holomorfa.

**(4)** En efecto, sea $K \subseteq \mathbb{C}^n$ compacto, ocurren dos casos:

- Si $\theta \notin K$, entonces por definición de E, $E^{-1}(K)$ es compacto.
- Si $\theta \in K$, entonces $E^{-1}(K) = E^{-1}(K - \{\theta\}) \cup \mathbb{C}P(n-1)$ es compacto. ■

**Observaciones:** Con respecto a la Proposición anterior, tenemos:

1. Teniendo en cuenta la identificacion en (1) se tiene que

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \{(z,[z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \bigcup \mathbb{C}P(n-1).$$

2. Sea la proyección canónica $\tilde{\pi} : \mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P(n-1)$ obtenida apartir de la relación " $\sim$ " en $\mathbb{C}^n - \{0\}$ ,para la construcción de $\mathbb{C}P(n-1)$, es claro que la aplicación $\tilde{\pi}$ es holomorfa, pues $(\varphi_i \circ \tilde{\pi})$ es holomorfa $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$,entonces el gráfico de $\tilde{\pi}$: $G(\tilde{\pi})$ es una variedad Holomorfa, aún más $G(\tilde{\pi}) = \{(z,[z]);$ $z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}$ es biholomorfo a $\mathbb{C}^n - \{0\}$; entonces de (1) y (2) tenemos que:

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \{(z,[z]); z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \cup \{0\} \times \mathbb{C}P(n-1) \approx (\mathbb{C}^n - \{0\}) \cup \mathbb{C}P(n-1),$$

entonces teniendo en cuenta las identificaciones en (1) y (2) tenemos el siguiente resultado:

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = (\mathbb{C}^n - \{0\}) \bigcup \mathbb{C}P(n-1).$$

3. De la observación 2 y de (3) podemos ver que que el origen 0 es remplazado por el proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, ya que $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$ es una copia fiel (desde el punto de vista biholomorfo) de $\mathbb{C}^n - \{0\}$.

4. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$, y sea $p \in U$, también se puede construir, de manera análoga al caso anterior, el Blow-up centrado en $p \in U$, denotándolo por $\tilde{U}_p$.

## 3.3. Curvas Planas Proyectivas

Las definiciones básicas y resultados de esta sección pueden encontrarlas en [14] y [18].

**Teorema 3.3.1** *Sean $f$ y $h$ funciones holomorfas definidas en vecindades $U$ y $V$ de $0 \in \mathbb{C}^2$ respectivamente con $f$ irreducible. Si $C = \{(x,y) \in U;\ f(x,y) = 0\}$ y $h|_{C\cap V} = 0$ entonces existe una función holomorfa $g$ definido en $W$ vecindad de $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $h = fg$ en $U \cap V \cap W$.*

**Proposición 3.3.2** *Dos curvas planas sin componentes conexas se cortan en un número finito de puntos.*

**Proposición 3.3.3** *Sean $P_1, ..., P_n$ (resp. $Q_1, ..., Q_n$) $n$ puntos de $\mathbb{C}P(n-1)$ no alineados. Entonces existe un único cambio de coordenadas proyectivo $T : \mathbb{C}P(n-1) \to \mathbb{C}P(n-1)$ tal que $T(P_i) = Q_i$, $i = 1, ..., n$.*

**Teorema 3.3.4 (Bezout)** *Sean $F$ y $G$ curvas planas proyectivas de grados $m$ y $n$ respectivamente en $\mathbb{C}P(2)$. Supongamos que $F$ y $G$ no tienen componentes comunes. Entonces*

$$\sum_p i_p(F,G) = mn.$$

## 3.4. Transformado Estricto de Foliaciones

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo y $p \in U$ una singularidad aislada de $Z$, se sabe que las soluciones de la EDO $z' = Z(z)$ asociada al campo $Z$ , induce una foliación $\mathcal{F}_Z$ en una vecindad de $p \in U$, como $p \in U$ es una singularidad aislada de $Z$, entonces existe una veciendad abierta $U_p$ de $p$ en la que el $p \in U_p$

es la única singularidad y los demás puntos de $U_p - \{p\}$ son puntos regulares, por el Teorema del Flujo Tubular nos dice que las órbitas alrededor de un punto regular las puedo enderezar mediante una conjugacion analítica local, entonces ya sabemos como se comporta localmente. Lo interesante sería ver que pasa alrededor del punto singular $p$, i.e como se comporta las órbitas alrededor del punto $p$, una manera de poder observar es levantándola a $\tilde{U}_p$ vía el Blow-up $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ (mediante el *Pull-Back de* $Z$ bajo el biholomorfismo $E_{|_{\tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1)}}$), formando una nueva foliacion que será llamado *Transformado Estricto de* $\mathcal{F}_Z$ y será denotado por $\tilde{\mathcal{F}}_Z$.

Veamos que significa levantar a un campo holomorfo, en el caso general.

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo y $p \in U$ una singularidad aislada de $Z$, sea la EDO

$$z' = Z(z) \tag{3.1}$$

asociada al campo $Z$ , y sea $F : V \longrightarrow U$ un biholomorfismo ($V \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto). Si $z = F(w)$, entonces: $F'(w)w' = z' = Z(z) = Z(F(w))$ luego:

$$w' = [F'(w)]^{-1}Z(F(w)) = [(F^{-1})'(F(w))]Z(F(w)) = ([(F^{-1})'.Z] \circ F)(w), \tag{3.2}$$

donde $F^*(Z) = [(F^{-1})'.Z] \circ F$ es el **Pull-Back** *de* $Z$ bajo $F$, observe que $F^*(Z) : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un campo vectorial holomorfo, entonces en el sistema (3.2) se tiene: $w' = F^*(Z)(w)$, además que $F$ es una conjugación analítica entre los campos $Z$ y $F^*(Z)$ i.e $Z \sim_{ana} F^*(Z)$, entonces las soluciones de (3.2) son transformadas por $F$ en soluciones de (3.1), ver [6].

Por simplicidad supongamos que $U = \mathbb{C}^n$, $p = 0 \in \mathbb{C}^n$ (singularidad aislada). Como el *Blow-up* $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un biholomorfismo entre $\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)$ y $\mathbb{C}^n - \{0\}$, entonces podemos hacer todo el procedimiento anterior, considerando el *Pull-Back de* $Z$ restringido a $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Entonces $E^*(Z)$ es un campo vectorial holomorfo sobre $\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)$, el problema es que no está definido sobre toda la variedad $\tilde{\mathbb{C}}^n_0$, nos

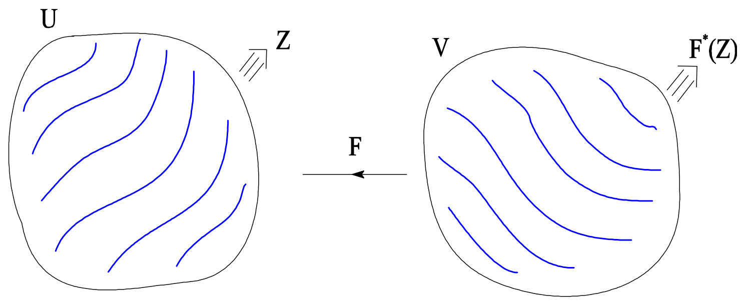


Figura 3.2: El Pull-Back de $Z$ bajo $F$

falta extender sobre el proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, pues en esta zona es la que nos dara información de lo que pasa en el origen. Más adelante se verá que $E^*(Z)$ es extendido a todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$.

Sea $Z = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ un campo vectorial holomorfo tal que $m_p(Z) = \nu$, así tenemos:

$$Z_i(z_1, ..., z_n) = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i(z_1, ..., z_n) \tag{3.3}$$

donde $Z_k^i$ son polinomios homogéneos de grado $k$, obtenidos al desarrollar $Z_i$ como series de potencias alrededor del origen, $1 \leq i \leq n$.

Realizamos el Pull-Back del campo $Z$ bajo la aplicación del Blow-up.

Viendo a $E^*(Z)$ con la $j$-ésima carta del Blow-up.

$$E(y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

donde $z_i = y_i y_j$ si $i \neq j$ y $z_j = y_j$.

El divisor (espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$) es dado por:

$$E^{-1}(0) = \{(y_1, ..., y_n) : y_j = 0\}.$$

En esta carta, el pull-back de $Z$ por $E$ es generado por:

$$E^*(Z) = (Z_j \circ E)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\frac{Z_i \circ E - y_i Z_j \circ E}{y_j}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{3.4}$$

De (3.3):

$$(Z_j \circ E)(y) = \sum_{k\geq\nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}),$$

donde $y = (y_1, ..., y_n)$ y $\hat{y} = (y_1, ..., y_{j-1}, 1, y_{j+1}, ..., y_n)$.

Luego tenemos:

$$E^*Z(y) = \left(\sum_{k\geq\nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y})\right)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n}\left(\sum_{k\geq\nu} y_j^{k-1}[Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y})]\right)\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{3.5}$$

Se presenta dos casos:

**Caso I** Si $\exists i \neq j$ tal que $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) \neq 0$.

En este caso $E^*(Z)$ es divisible por $y_j^{\nu-1}$, denotamos:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(y) = &\ \frac{E_1^*(Z)(y)}{y_j^{\nu-1}}, \text{ luego tenemos:}\\ \tilde{Z}(y) = &\ y_j Z_\nu^j(\hat{y})\tfrac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n}([Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y})])\tfrac{\partial}{\partial y_i} + y_j\tilde{Y}(y),\end{aligned}$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo.

Observe que en este caso se tiene que $E^{-1}(0)$ es inavariante por $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$, donde $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ es la foliación generada por $\tilde{Z}$. Así $E^*(Z)$ se extiende sobre el conjunto $\{y_j = 0\}$.

**CASO II** Si $\forall 1 \leq i \leq n$ con $i \neq j$ se tiene $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) = 0$.

En este caso $E^*(Z)$ es divisible por $y_j^\nu$, denotemos:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(y) = &\ \frac{E_1^*(Z)(y)}{y_j^{\nu}}, \text{ luego tenemos:}\\ \tilde{Z}(y) = &\ Z_\nu^j(\hat{y})\tfrac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n}\left([Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y})]\right)\tfrac{\partial}{\partial y_i} + y_j\tilde{W}(y),\end{aligned}$$

donde $\tilde{W}$ es un campo vectorial holomorfo.

Observe que en este caso se tiene que $E^{-1}(0)$ no es inavariante por $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$, donde $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ es la foliación generada por $\tilde{Z}$. Así $E^{*}(Z)$ se extiende sobre el conjunto $\{y_j = 0\}$.

De los dos casos anteriores, se tiene la siguiente:

**Definición 3.4.1** *Al campo holomorfo $\tilde{Z}$, que es la extensión de $E^{*}(Z)$ en todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$, se le llama el Transformado Estricto del Campo $Z$ por $E$.*

Una vez hecho los análisis en la $j$-ésima carta del Blow-up, se tiene los siguientes teoremas:

**Teorema 3.4.1** *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de $Z$ y $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up (en la $j$-ésima carta) centrada en $0$, tal que si $\exists i \neq j$ tal que $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) \neq 0$ entonces*

*$E^{*}(Z)$ se extiende a una función holomorfa*

$$\tilde{Z} = \frac{E^{*}(Z)}{y_j^{\nu-1}},$$

*donde $\tilde{Z}$ esta definida sobre todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$. Además $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ es invariante por $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$.*

**Teorema 3.4.2** *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de $Z$ y $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up (en la $j$-ésima carta) centrada en $0$, tal que si $\forall 1 \leq i \leq n$ con $i \neq j$ se tiene $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) = 0$ entonces*

*$E^{*}(Z)$ es extendido a una función holomorfa*

$$\tilde{Z} = \frac{E^{*}(Z)}{y_j^{\nu}},$$

*donde* $\tilde{Z}$ *esta definida sobre todo* $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$*. Además* $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ *es no invariante por* $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$*.*

## 3.5. Singularidad Dicrítica

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de $Z$, sea $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up centrada en 0 y $\tilde{Z}$ es el Transformado Estricto de $Z$ por $E$. Siguiendo con las notaciones de la sección anterior y gracias a los Teoremas 3.4.1 y 3.4.2, se tienen las siguiente definiciones:

**Definición 3.5.1** *Decimos que* $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad no Dicrítica*** *de* $Z$ *cuando* $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ *es invariante por* $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$*.*

**Definición 3.5.2** *Decimos que* $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad Dicrítica*** *de* $Z$ *cuando* $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ *no es invariante por* $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$*.*

**Observaciones:**

**1)** Del Teorema 3.4.1 se tiene: Si para cada $j \in \{1, ..., n\}$ $\exists$ $i \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ tal que

$$z_i Z_\nu^j - z_j Z_\nu^i \not\equiv 0$$

si y sólo si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una Singularidad no Dicrítica de* $Z$*.*

**2)** Note que en cualquiera de los dos casos $\mathcal{F}_{E^*(Z)}$ y $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ , las foliaciónes generadas por $E^*(Z)$ y el Transformado Estricto $\tilde{Z}$ respectivamente, coinciden fuera del divisor $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$, pues $\tilde{Z} = \dfrac{1}{y_j^k}\, E^*(Z)$ en la $j$-esima carta, donde $k = \nu - 1$ si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad no Dicrítica***, $k = \nu$ si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad Dicrítica.***

**3)** $T$eniendo una foliación $\mathcal{F}_Z$ en $\mathbb{C}^n$, llegamos a obtener una foliación $\mathcal{F}_{E^*(Z)}$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$, la cual se extiende de manera única , obteniendo una foliación $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$ la cual es llamada el Transformado Estricto de $\mathcal{F}_Z$ (o de $Z$).

# Capítulo 4

# Caracterización de una Singularidad Dicrítica en $0 \in \mathbb{C}^n$

Sea $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja de dimensión $n$ y consideremos en ella una foliación analítica singular por curvas $\mathcal{F}_Z$. Sea $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$. Sea $z = (z_1, ..., z_n)$ un sistema de coordenadas en una vecindad de $p$ en $\mathcal{M}^n$ tal que $p = (0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$. En estas coordenadas, sea

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

el campo vectoral holomorfo que genera a $\mathcal{F}_Z$. Si $m_0\,(Z) = \nu$, donde $\nu \in \mathbb{Z}^+$, entonces las componentes $Z_i$ de $Z$ tienen desarrollo de Taylor en $0 \in \mathbb{C}^n$

$$Z_i = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i \ , \ 1 \leq i \leq n,$$

donde cada $Z_k^i$ son polinomios homogéneos de grado $k$.

Además como las coordenadas $Z_i$ son funciones holomorfas alrededor de $0 \in \mathbb{C}^n$, entonces en una vecinadad de $0 \in \mathbb{C}^n$ tenemos:

$$Z_i(z) = \sum_{|Q| \geq \nu} c_{i,Q}(z-p)^Q \ , \ 1 \leq i \leq n.$$

El *Jet de Orden k ó k-JET de Z* en p denotado por $J_p^k(Z)$ se define como:

$$J_p^k(Z) = \sum_{|Q|=\nu}^{k} c_{i,Q}(z-p)^Q \frac{\partial}{\partial z_i} \ , \ 1 \le i \le n$$

En esta sección probaremos que la condición de que $\mathcal{F}_Z$ tiene una singularidad dicrítica en $p$, puede ser caracterizada en términos de los polinomios $Z_\nu^i$ $(1 \le i \le n)$, es decir, de $J_0^\nu$ (el primer jet no nulo de orden $\nu$ de $Z$ en el origen).

Más especificamente tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.0.1** *Usando las notaciones anteriores, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(1) El punto $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad dicrítica de $\mathcal{F}_Z$*

*(2) $z_j Z_\nu^i - z_i Z_\nu^j \equiv 0, \ \forall 1 \le i < j \le n$*

*(3) Existe un polinomio $P_{\nu-1}$, homogéneo de grado $\nu - 1$ tal que* $\begin{cases} Z_\nu^i = z_i P_{\nu-1}, \\ \forall 1 \le i \le n \end{cases}$

*(4) $J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1}R$, donde $R = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ es el campo vectorial holomorfo radial.*

**Prueba.**

(1) $\Rightarrow$ (2) Para cada $j = 1, ..., n$ , usamos la $j$-ésima carta del Blow-up.

$$E(y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

donde $z_i = y_i y_j$ si $i \neq j$ y $z_j = y_j$. En esta carta, el pull-back de $Z$ por $E$ es generado por:

$$E^*(Z) = (Z_j \circ E)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left( \frac{Z_i \circ E - y_i Z_j \circ E}{y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{4.1}$$

De (2.1) tenemos:

$$(Z_j \circ E)(y) = \sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}),$$

donde $y = (y_1, ..., y_n)$ y $\hat{y} = (y_1, ..., y_{j-1}, 1, y_{j+1}, ..., y_n)$.

Por (4.1) tenemos:

$$E^* Z(y) = \left( \sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left( \sum_{k \geq \nu} y_j^{k-1} [Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y})] \right) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{4.2}$$

Procediendo por contradicción, supongamos que (2) es falso, entonces existe $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$ tal que $Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) \neq 0$, luego $E^* Z$ es divisible por $y_j^{\nu-1}$. Entonces $\tilde{Z} = \frac{E^* Z}{y_j^{\nu-1}}$ es el tranformado estricto de $Z$ por $E$. De (4.2) tenemos que:

$$\tilde{Z}(y) = y_j Z_\nu^j(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left( Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{Y}(y), \tag{4.3}$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo. De (4.3) deducimos que $E^{-1}(0)$ es invariante por $\tilde{Z}$, lo cual es una contradicción, puesto que $\mathcal{F}_{\tilde{Z}} \in \mathcal{D}^n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como los $Z_\nu^j$ son polinomios homogéneos, reordenado sus términos y factorizando $z_1$, se pueden escribir de la siguiente forma:

$$Z_\nu^j(z_1, ..., z_n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^j(z_2, ..., z_n) z_1^k,$$

donde los $a_{\nu-k}^j$ $(1 \leq i \leq n)$ son polinomios homogéneos de grado $\nu - k$ en las variables $z_2, ..., z_n$. De la hipotesis, para $1 < j \leq n$ tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv z_j Z_\nu^1 - z_1 Z_\nu^j = \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^1(z_2, ..., z_n) z_1^k z_j - \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^j(z_2, ..., z_n) z_1^k z_1 \\
&\equiv a_\nu^1(z_2, ..., z_n) z_j + \sum_{k=1}^{\nu} a_{\nu-k}^1(z_2, ..., z_n) z_1^k z_j - \sum_{k=1}^{\nu+1} a_{\nu-k+1}^j(z_2, ..., z_n) z_1^k \\
&\equiv a_\nu^1(z_2, ..., z_n) z_j + \sum_{k=1}^{\nu} [a_{\nu-k}^1(z_2, ..., z_n) z_j - a_{\nu-k+1}^j(z_2, ..., z_n)] z_1^k - a_0^j(z_2, ..., z_n) z_1^{\nu+1}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{cases} a^1_\nu(z_2, ..., z_n) \equiv 0 \\ a^1_{\nu-k}(z_2, ..., z_n)z_j - a^j_{\nu-k+1}(z_2, ..., z_n) \equiv 0, \ \ 1 \leq k \leq \nu - 1 \\ a^j_0(z_2, ..., z_n) \equiv 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

luego de (4.4) tenemos:

$$Z^1_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a^1_{\nu-k}(z_2, ..., z_n)z_1^k = z_1 \left( \sum_{k=0}^{\nu-1} a^1_{\nu-k-1}(z_2, ..., z_n)z_1^k \right). \tag{4.5}$$

Para $1 < j \leq n$, tenemos:

$$\begin{aligned} Z^j_\nu &= \sum_{k=0}^{\nu} a^j_{\nu-k}(z_2, ..., z_n)z_1^k = \sum_{k=0}^{\nu-1} a^j_{\nu-k}(z_2, ..., z_n)z_1^k \\ &= \sum_{k=0}^{\nu-1} z_j a^1_{\nu-k-1}(z_2, ..., z_n)z_1^k = z_j \left( \sum_{k=0}^{\nu-1} a^1_{\nu-k-1}(z_2, ..., z_n)z_1^k \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sea $P_{\nu-1} = \sum\limits_{k=0}^{\nu-1} a^1_{\nu-k-1}(z_2, ..., z_n)z_1^k$, es claro que es un polinomio homogéneo de grado $\nu - 1$, por lo tanto de (4.5) y (4.6) se tiene que:

$$Z^j_\nu = z_j P_{\nu-1}, \forall 1 \leq j \leq n.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Recordando que:

$$J^\nu_0(Z) = \left( \sum_{|Q|=\nu}^{\nu} c_{1,Q}(z-p)^Q, ...., \sum_{|Q|=\nu}^{\nu} c_{n,Q}(z-p)^Q \right)$$

como $m_0(Z) = \nu$, i.e $Z^i_\nu \not\equiv 0$ y $Z^i_k \equiv 0 \ \forall k < \nu$, luego de la hipotesis se tiene:

$$\begin{aligned} J^\nu_0(Z) &= (Z^1_\nu, ..., Z^n_\nu) = (z_1 P_{\nu-1}, ..., z_n P_{\nu-1}) \\ &= P_{\nu-1}(z_1, ..., z_n) = P_{\nu-1} R(z_1, ..., z_n), \end{aligned}$$

entonces $J^\nu_0(Z) = P_{\nu-1}R$, donde $R = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ es el campo vectorial holomorfo radial.

(4) $\Rightarrow$ (1) Por hipótesis tenemos $J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1}R$, entonces:

$$J_0^\nu(Z) = (Z_\nu^1, ..., Z_\nu^n) = (z_1 P_{\nu-1}, ..., z_n P_{\nu-1}),$$

luego de (4.5), tenemos:

$$E^*Z(y) = y_j^\nu \left( (P_{\nu-1}(\hat{y})) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left( Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) + y_j^{\nu+1} \tilde{Y}(y),$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo. Luego $E^*(Z)$ es divisible por $y_j^\nu$. Entonces el transformado estricto de $Z$ por $E$ es dado por $\tilde{Z} = \frac{E^*(Z)}{y_j^\nu}$, entonces $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(2)$ no es invariante por $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$, por lo tanto $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad dicrítica de $Z$. ■

De la proposición anterior tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 4.0.2** *Usando las notaciones anteriores, sea $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad dicrítica de $\mathcal{F}_Z$, entonces el transformado estricto $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ esta dado por:*

*En la j-ésima carta*

$$E(y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

*donde $z_i = y_i y_j$ si $i \neq j$ y $z_j = y_j$*

$$\tilde{Z}(y) = P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left( Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{Y}(y), \tag{4.7}$$

*cuyo conjunto singular esta dado por los puntos $(y_1, ..., y_{j-1}, 0, y_{j+1}, 0..., 0)$ que son soluciones del sistema*

$$\begin{cases} P_{\nu-1}(\hat{y}) = 0 \\ Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) = 0,\ 1 \leq i \leq n,\ i \neq j. \end{cases}$$

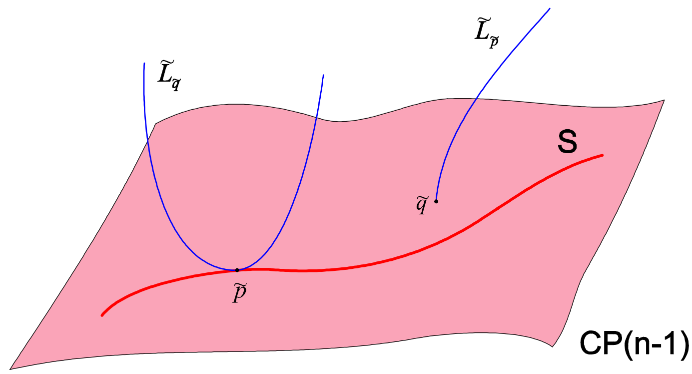


Figura 4.1: Una hipersuperficie $S \subseteq \mathbb{C}P(n-1)$

**Corolario 4.0.3** *El conjunto $Sing(\tilde{\mathcal{F}}_Z) \cap E^{-1}(0)$ en $j$-ésima carta ($j$ fijo, $1 \leq j \leq n$) es el conjunto de los puntos $[z_1, ..., z_n] \in \mathbb{C}P(n-1)$ las cuales son soluciones del siguiente $\frac{(n-1)n}{2} + 1$ sistema de ecuaciones homogéneas:*

$$\begin{cases} P_{\nu-1}(\hat{y}) = 0 \\ Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) = 0, \ 1 \leq i \leq n, \ i \neq j. \end{cases} \tag{4.8}$$

**Notación 4.0.1** *Denotemos por $D^n(p)$ al conjunto de foliaciónes $\mathcal{F}_Z$ tal que $p \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad dicrítica aislada de la foliación $\mathcal{F}_Z$ generada por el campo vectorial holomorfo $Z$.*

**Notación 4.0.2** *$D_0^n(p) = \{\mathcal{F}_Z \in D^n(p); \ Sing(\mathcal{F}_Z) = \phi\}$ para referirnos a las $\mathcal{F}_Z$ cuyo transformado estricto no tiene singularidades en $\tilde{\mathbb{C}}_p^n$, i.e todo punto $\tilde{p} \in E^{-1}(0)$ es un punto regular.*

**Notación 4.0.3** *Cuando $p = 0$ escribiremos simplemente $D^n$, $D_0^n$ en lugar de $D^n(0)$, $D_0^n(0)$ respectivamente.*

**Corolario 4.0.4** *Con las notaciones anteriores tenemos que:*

*$\mathcal{F}_Z \in D_0^n$ si y sólo si $z = 0 \in \mathbb{C}^n$ es la única solución del sistema (4.8).*

**Definición 4.0.3** *Para cada $\mathcal{F}_Z \in D_0^n$ definimos la hipersuperficie algebraica en $\mathbb{C}P(n-1)$.*

$$S = \{[z_1; ...; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1);\ P_{\nu-1}(z_1, ..., z_n) = 0\}.$$

Juntando los resultados anteriores, se tiene:

**Proposición 4.0.5** *Sea $\tilde{p} \in E^{-1}(0)$ y $\tilde{L}$ una hoja de $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ que pasa por el punto $\tilde{p}$, entonces el conjunto $S$ tiene las siguientes propiedades (ver figira 4.1)*

- Si $\tilde{p} \notin S \Longrightarrow \tilde{L}$ es tranversal a $E^{-1}(0)$.
- Si $\tilde{p} \in S \Longrightarrow \tilde{L}$ es tangente a $E^{-1}(0)$ en $\tilde{p}$.

# Capítulo 5

# Índice de Poincaré-Hopf y el Número de Milnor

En este capítulo introducimos el índice topológico de Poincaré-Hopf y la multiplicidad algebraica, al que se conoce como el número de Milnor. Estos conceptos son fundamentales y muy útiles en la terоría de intersección. El objetivo de este capítulo es ver el índice de Poincaré-Hopf coincide con el número de Milnor.

## 5.1. El Índice de Poincaré-Hopf

### 5.1.1. El Grado de Brouwer

La referencia básica para esta sección son los libros de [20] y [24].

Nosotros nos ocuparemos principalmente de los problemas de carácter local, por lo que basta para nuestro propósito de considerar sólo las variedades que están mergulladas en los espacios euclídeos. Diremos variedad a una variead de clase $C^\infty$ también diremos a una función $f$ suave cuando es de clase $C^\infty$. La primera herramienta que necesitamos es:

**Teorema 5.1.1 (Teorema de Sard)** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ suave. Denotemos por $\sum$ el conjunto de los puntos críticos de $f$, esto es, $\sum = \{p \in U;$ $rang(f'(p)) < n\}$. Entonces la imagen $f(\sum) \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue cero.*

**Prueba.** Ver [24]. ■

**Corolario 5.1.2 (Teorema de Brown)** *Sea $X$ e $Y$ variedades suaves de la misma dimensión y $f : X \to Y$ suave. Entonces el conjunto de valores regulares de $f$, $Y \setminus f(\sum)$, es denso en $Y$.*

Ahora sea $X$ una variedad conexa con $dim(X) = n \geq 1$ (con o sin borde). $X$ es orientable si podemos escoger una orientación para el espacio tangente $T_pX$ de tal manera que que para todo $p \in X$ existe una vecindad abierta $U \subseteq X$ de $p$ y un difeomorfismo $\varphi : U \to V$, $\varphi(U) = V$, donde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto ($V \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n;$ $x_n \geq 0\}$ es abierto, en el caso de $X$ tiene borde) que conserva la orientación, esto es, $\varphi'(p)$ lleva a la orientación elegida para $T_pX$ en la orientación estándar de $\mathbb{R}^n$.

Si $X$ tiene borde y es orientable, la orientación de $X$ induce una orientación para $\partial X$ como sigue: dado $p \in \partial X$, escogemos una base positiva $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ para $T_pX$ con la siguiente propiedad: $\{v_2, ..., v_n\}$ genera $T_p\partial X$ y $v_1$ es un vector hacia afuera. Entonces $\mathcal{B}' = \{v_2, ..., v_n\}$ determina una orientación positiva para $T_p\partial X$. Si $dimX = 1$, a cada punto $p$ de la frontera es asígnado la orientación -1 o +1, dependiendo de la dirección del vector que genera $T_pX$.

Antes de introducir el concepto de grado recordemos que una función continua $f : X \to Y$ entre dos variedades suaves es propia si para todo $K \subseteq Y$ compacto se tiene que $f^{-1}(K) \subseteq X$ es compacto.

Si $X$ y $Y$ variedades orientables, de la misma dimensión $n$, con $Y$ conexo y $f : X \to Y$ suave, función propia. Sea $p \in X$ un punto regular de $f$. Entonces el mapeo tangente $f'(p) : T_pX \to T_pY$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados.

**Definición 5.1.1** *El signo de $f'(p)$ se define por*

$$sgn(f'(p)) = \begin{cases} +1 & \textit{, si } f'(p) \textit{ preseserva orientación} \\ -1 & \textit{, si } f'(p) \textit{ invierte orientación.} \end{cases}$$

**Definición 5.1.2** *Sea $q \in Y$ un valor regular de $f$, definimos*

$$\deg(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sgn f'(p)$$

**Teorema 5.1.3** *El número entero* $\deg(f, q)$ *no depende del valor regular $q \in Y$.*

**Prueba.** Ver [20]. ■

**Definición 5.1.3** *El grado de el mapeo $f$ se defne como*

$$\deg f = \deg(f, q)$$

*donde $q \in Y$ un valor regular de $f$.*

Recordemos que una *homotopía suave entre dos funciones* $f, g : X \to Y$ es un aplicación suave $F : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. En este caso diremos que $f$ y $g$ son homotópicamente suave.

**Teorema 5.1.4** *Si $f$ es homotópicamente suave a $g$, entonces* $\deg f = \deg(g)$.

**Prueba.** Ver [20]. ■

**Proposición 5.1.5** *Sea $X$ una variedad orientada compacta con borde $\partial X$ tal que $dim(X) = n+1$ y sea $Y$ variedad conexa orientada con $dim(Y) = n$. Sea $f : \partial X \to Y$ suave. Si $f$ admite una extensión suave $F : X \to Y$, entonces* $\deg f = 0$.

**Prueba.** Ver [24]. ■

**Teorema 5.1.6** *Un mapeo Biholomorfo preserva orientación.*

**Definición 5.1.4** *Sea $p \in \mathbb{C}^n$. Una función germen en $p$ es una clase de funciones, donde dos funciones son equivalentes si ellos son iguales en una vecindad de $p$.*

Denotaremos por $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, q)$ a la función germen en $p$ con $f(p) = q$.

### 5.1.2. El Índice

Denotaremos por $|z|$ a la norma hermitiana en $\mathbb{C}^n$, $\|z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j}$.

Consideremos la función geremen $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^m, q)$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que $f(p) = q = 0$ y diremos que $p$ es una raiz de $f = 0$.

**Definición 5.1.5** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo con $f^{-1}(0) = \{p\}$. El índice o índice de Poincaré-Hopf de $f$ en $p$, denotado por $\mathcal{I}_p(f)$, es el grado de la función*

$$\frac{f}{|f|} : S_\epsilon^{2n-1}(p) \to S_1^{2n-1} \text{ ; es decir } \mathcal{I}_p(f) = \deg \frac{f}{|f|},$$

*donde $S_\epsilon^{2n-1}(p) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - p\| = \epsilon\}$ y $S_1^{2n-1}$ es la esfera unitaria centrada en* $0 \in \mathbb{C}^n$.

Gracias a la proposición 5.1.5, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño el índice está bien definido

**Lema 5.1.1** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto convexo, $p \in U$ y $\phi : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces existen funciones holomorfas $g_1, ....g_n : U \to \mathbb{C}$ tales que*

$$\phi(z) = \phi(p) + \sum_{j=1}^{n} g_j(z)(z_j - p_j),$$

*donde $p = (p_1, ...., p_n)$. Además $g_j(p) = \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p)$.*

**Prueba.** Sea $z \in U$ y definimos $h(t) = \phi(p + t(z - p))$. Desde que $U$ es convexo $h$ está bien definido en el intervalo $[0, 1]$. Luego tenemos:

$$\phi(z) - \phi(p) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)dt,$$

y por la regla de la cadena $h'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p + t(z - p))(z_j - p_j)$. Luego definimos

$$g_j(z) = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p + t(z - p))dt,$$

así el lema está probado. ■

Observe que el Lema anterior también es valido para funciones diferenciables

**Proposición 5.1.7** *Si $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ es un germen biholomorfo, entonces $\mathcal{I}_p(f) = 1$.*

**Prueba.** Usando una traslación (la cual preserva orientación) podemos asumir que $p = 0$. Como la derivada de $f$ en 0 es dado por

$$f'(0).z = \lim_{t \to 0} \frac{f(tz)}{t},$$

esto nos induce a definir

$$F(z, t) = \begin{cases} \frac{f(tz)}{t} & \text{, para } 0 < t \leq 1 \\ f'(0).z & \text{, para } t = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que F es una función suave, entonces por el Lema anterior tenemos:

$$F(z,t) = \left( \sum_{j=1}^{n} g_{1j}(tz)z_j, ...., \sum_{j=1}^{n} g_{nj}(tz)z_j \right) \quad \forall t \in [0,1].$$

Como $F(z,t) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$ pues f es una biyección en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^n$. Definimos

$$H(z,t) = \frac{F(z,t)}{|F(z,t)|}$$

la cual es una homotopía suave entre $f/|f|$ y $f'(0)/|f'(0)|$. Como $f'(0)$ es un isomorfismo que preserva orientación se tiene que $1 = \mathcal{I}_0(f'(0)) = \mathcal{I}_0(f)$. ■

**Proposición 5.1.8** *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *un germen holomorfo y* $\epsilon > 0$ *tal que* $f^{-1}(B_\epsilon[p]) = \{p\}$. *Entonces* $\mathcal{I}_p(f)$ *es el número de puntos del conjunto* $f^{-1}(\zeta) \cap B_\epsilon(p)$ *donde* $\zeta$ *es un valor refular de* $f$ *suficientemente cerca de* $0$.

**Prueba.** Sea $\delta = \text{ínf}\{|f(z)| > 0 : z \in S_\epsilon^{2n-1}(p)\}$. Entonces $|f(z) - t\zeta| \geq \delta - t|\zeta| > 0$ para todo $t \in [0,1]$, $z \in S_\epsilon^{2n-1}(p)$ y $\zeta$ valor regular suficientemente cerca de 0. Se sigue que $f^{-1}(t\zeta) \cap S_\epsilon^{2n-1}(p) = \emptyset$ para todo $t \in [0,1]$. Luego definimos $F : S_\epsilon^{2n-1}(p) \times [0,1] \to S_1^{2n-1}(0)$ dado por

$$F(z,t) = \frac{F(z) - t\zeta}{|F(z) - t\zeta|},$$

es claro que $F$ es una homotopía suave entre $\dfrac{f-\zeta}{|f-\zeta|}$ y $\dfrac{f}{|f|}$. Luego tenemos que $\mathcal{I}_p(f) = \deg \dfrac{f-\zeta}{|f-\zeta|}$.

Por otro lado, sea $\{\xi_1, ..., \xi_k\} = f^{-1}(\zeta) \cap B_\epsilon(p)$. Escojemos bolas cerradas $B_{\delta_j}[\xi_j]$ disjuntas dos a dos tales que $S_{\delta_j}^{2n-1}(\xi_j) \cap S_\epsilon^{2n-1}(p) = \emptyset$. Consideramos la variedad con su orientación trivial

$$X = B_\epsilon[p] \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_{\delta_j}(\xi_j)$$

Es fácil ver que el borde de $X$ es dada por la unión disjunta

$$\partial X = S_\epsilon^{2n-1}(p) \bigsqcup S_{\delta_1}^{2n-1}(\xi_1) \bigsqcup .... \bigsqcup S_{\delta_k}^{2n-1}(\xi_k)$$

Por otro lado, la función $\varphi = \dfrac{f-\zeta}{|f-\zeta|} : \partial X \to S_1^{2n-1}(0)$ admite una extensión suave $\dfrac{f-\zeta}{|f-\zeta|}$ sobre todo $X$. Por la proposición 5.1.5 tenemos que $\deg\varphi = 0$. Pero, debido a la orientación de $X$ tenemos

$$\deg\varphi = \mathcal{I}_p(f) - \mathcal{I}_{\xi_1}(f-\zeta) - ... - \mathcal{I}_{\xi_k}(f-\zeta) = 0.$$

Desde que $f$ es un biholomorfismo alrededor de cada $\xi_j$, por la prop 5.1.7 se tiene que $\mathcal{I}_{\xi_j}(f-\zeta) = 1$. Así $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_{\xi_1}(f-\zeta) + ... + \mathcal{I}_{\xi_k}(f-\zeta) = k$. ■

**Ejemplo 5.1.9** *Sea $f(z_1, z_2) = (z_1^3, z_1 + z_2^2)$. Entonces $f^{-1}(0) = \{0\}$ y el índice $\mathcal{I}_0(f)$ es dado por el número de soluciones de la ecuación (perturbación)*

$$\begin{cases} z_1^3 & = & \zeta_1 \\ z_1 + z_2^2 & = & \zeta_2, \end{cases}$$

*donde $0 < \|(\zeta_1, \zeta_2)\| << 1$. De donde se tiene que $\mathcal{I}_0(f) = 6$.*

Más generalmente tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.1.10** *Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad conexa suave compacta con borde, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto que contenga a $X$, $f : U \to \mathbb{C}^n$ holomorfa y $p \in X \setminus \partial X$ con $f(p) = 0$ y $f^{-1}(0) \cap \partial X = \emptyset$. Suponga que el grado de la función*

$$\varphi = \frac{f}{|f|} : \partial X \to S_1^{2n-1}(0)$$

*es $k$. Entonces la ecuación $f = 0$ tiene un número finito de soluciones en el interior de $X$ y la suma de los índices de $f$ en estos puntos es precisamente $k$.*

**Prueba.** Como $X$ es compacto, entonces $f^{-1}(0) \cap X = \{\xi_1, ..., \xi_r\}$, por hipotesis $\xi_j \notin \partial X$. Escogemos bolas cerradas $B_{\delta_j}[\xi_j]$ disjuntas dos a dos tales que $S_{\delta_j}^{2n-1}(\xi_j) \cap \partial X = \emptyset$. Consideramos la variedad con su orientación trivial

$$\tilde{X} = X \setminus \bigcup_{j=1}^{r} B_{\delta_j}(\xi_j).$$

Es fácil ver que el borde de $\tilde{X}$ es dada por la unión disjunta

$$\partial\tilde{X} = \partial X \bigsqcup S^{2n-1}_{\delta_1}(\xi_1) \bigsqcup .... \bigsqcup S^{2n-1}_{\delta_r}(\xi_r).$$

Por otro lado, la función $\tilde{\varphi} = \dfrac{f}{|f|} : \partial\tilde{X} \to S^{2n-1}_1(0)$ admite una extensión suave $\dfrac{f}{|f|}$ sobre todo $\tilde{X}$. Por la proposición 5.1.5 tenemos que $\deg\tilde{\varphi} = 0$. Pero, debido a la orientación de $\tilde{X}$ tenemos

$$\deg\tilde{\varphi} = \deg\varphi - \mathcal{I}_{\xi_1}(f) - ... - \mathcal{I}_{\xi_r}(f) = 0.$$

Luego $\deg\varphi = \mathcal{I}_{\xi_1}(f) + ... + \mathcal{I}_{\xi_r}(f)$, por la prop 5.1.8 se tiene que $\mathcal{I}_{\xi_j}(f)$ es un entero positivo. Luego

$$k = \deg\frac{f}{|f|} = \sum_{q\in f^{-1}(0)\cap X} \mathcal{I}_q(f).$$

■

**Teorema 5.1.11 (Carácter aditivo del índice de Poincaré-Hopf)** *Sea un germen holomorfo $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $p$ sea una raiz aislada de $f = 0$, i.e. existe bola abierta $B \subset \mathbb{C}^n$ tal que $f^{-1}(0) \cap \bar{B} = \{p\}$ Consideremos una deformación holomorfa $f_\lambda$ del germen $f = f_0$, dependiendo del parametro complejo $\lambda$, i.e una función holomorfa*

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, (p, 0)) \to (\mathbb{C}^n, 0)$$

*tal que $F(z, 0) = f(z)$ y $F(z, \lambda) = f_\lambda(z)$. Entonces, para $\lambda$ variando en una vecindad pequeña del $0 \in \mathbb{C}^n$, la raiz $p$ se descompone en un número finito de raices de $f_\lambda$ y la suma de los índices de $f_\lambda$ en estas raices es igual al índices de $f$ en $p$. Es decir*

$$\mathcal{I}_p(f) = \sum_{q\in f_\lambda^{-1}(0)\cap\bar{B}} \mathcal{I}_q(f_\lambda).$$

**Prueba.** Supongamos que $p = 0$ y sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $f^{-1}(0)\cap \bar{B}_\delta(0) = \{0\}$. Sea $\delta_1 > 0$ tal que si $|\lambda| \le \delta_1$ entonces $f_\lambda$ no tiene ceros en la esfera $\partial B_\delta(0)$. Luego

$$\text{ínf}\{|f_\lambda(z)| : (z, \lambda) \in \partial B_\delta(0) \times \bar{B}_{\delta_1}(0)\} = k > 0.$$

Dado $0 < \epsilon < K$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|\lambda| \leq \delta_2$, entonces

$$\sup\{|f(z) - f_\lambda(z)| : z \in \partial B_\delta(0)\} < \epsilon.$$

Sea $0 < \delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Afirmamos que para $|\lambda| \leq \delta_3$ las funciones

$$\frac{f_\lambda}{|f_\lambda|} : \partial B_\delta(0) \to S_1^{2n-1}(0)$$

son homotópicas. Es sufuciente mostrar que ellos son homotópicos a $\dfrac{f_0}{|f_0|} = \dfrac{f}{|f|}$.

En efecto, sea $|\lambda| \leq \delta_3$, consideremos la función $\varphi : \partial B_\delta(0) \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ dado por

$$\varphi(z,t) = (1-t)f(z) + tf_\lambda(z)$$

y suponga que existe $t_0 \in ]0,1[$ y $z_0 \in \partial B_\delta(0)$ tal que $\varphi(z_0, t_0) = 0$, entonces

$$f(z_0) = \frac{-t_0}{1-t_0} f_\lambda(z_0)$$

pero $\epsilon > |f(z_0) - f_\lambda(z_0)| = \dfrac{1}{1-t_0}\,|f_\lambda(z_0)| \geq \dfrac{K}{1-t_0} > K$ la cual es una contradición. Luego $\varphi(z,t) \neq 0$ para todo $(z,t) \in \partial B_\delta(0) \times [0,1]$.

Definimos $H(z,t) = \dfrac{\varphi(z,t)}{|\varphi(z,t)|}$ la cual es una homotopía suave entre $\dfrac{f_\lambda}{|f_\lambda|}$ y $\dfrac{f}{|f|}$.

Así tenemos

$$\mathcal{I}_0(f) = \deg \frac{f}{|f|} = \deg \frac{f_\lambda}{|f_\lambda|} = \sum_{q \in f_\lambda^{-1}(0) \cap B_\delta(0)} \mathcal{I}_q(f_\lambda).$$

■

**Definición 5.1.6** *Sean $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to \mathbb{C}^n$ gérmenes holomorfos. Se dice que $f$ y $g$ son Algebraicamente Equivalentes, o A-equivalentes, si existe un germen holomorfo $A : (\mathbb{C}^n, p) \to GL(n;\mathbb{C})$ tal que*

$$f(z) = A(z)g(z).$$

**Proposición 5.1.12** *Si $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to \mathbb{C}^n$ son A-equivalentes y $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$, entonces $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g)$.*

**Prueba.** Recordemos que $GL(n, \mathbb{C})$ es abierto y denso en el conjunto de las matrices $M(n, \mathbb{C})$, además $GL(n; \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C}) \setminus \det^{-1}(0)$ y $\det^{-1}(0)$ es una subvariedad de codimensión 2 real de $M(n; \mathbb{C})$. Sea $V \subseteq GL(n; \mathbb{C})$ una vecindad abierta contractible de $A(p)$. Entonces existe una homotopía $G(z, t)$ tal que $G(z, 0) = A(z)$ y $G(z, 1) = A(p)$. Luego definimos la aplicación

$$H(z, t) = \frac{G(z, t)g(z)}{|G(z, t)g(z)|},$$

la cual es una homotopía entre $\dfrac{f(z)}{|f(z)|} = \dfrac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|}$ y $\dfrac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$.

Por otro lado, sea $\gamma : [0, 1] \to GL(n; \mathbb{C})$ un camino tal que $\gamma(0) = A(p)$ y $\gamma(1) = I$. Entonces $F(z, t) = \dfrac{\gamma(t)g(z)}{|\gamma(t)g(z)|}$ es una homotopía suave entre $\dfrac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$ y $\dfrac{g(z)}{|g(z)|}$. Por lo tanto $\dfrac{f(z)}{|f(z)|}$ y $\dfrac{g(z)}{|g(z)|}$ son homotópicos. ∎

**Observación**: De la proposición anterior, tenemos que el índice de Poincaré-Hopf es invariante bajo A-equivalencia.

## 5.2. El Número de Milnor

### 5.2.1. Primeros resultados sobre la Multiplicidad

Empezamos por algunas notaciones.

Denotaremos por $\mathcal{O}_p$ al anillo (local) de gérmenes de las funciones holomorfas en $p \in \mathbb{C}^n$. Se sabe que $\mathcal{O}_p$ es un $\mathbb{C}$-álgebra.

Denotaremos por $\mathfrak{M}_p$ al ideal maximal de $\mathcal{O}_p$, esto es

$$\mathfrak{M}_p = \{h \in \mathcal{O}_p : h(p) = 0\}.$$

Dado $f : (\mathbb{C}^n, p) \to \mathbb{C}^m$ un germen holomorfo, $f = (f_1, ..., f_m)$, denotaremos por $\mathfrak{I}_f$ al ideal de $\mathcal{O}_p$ generada por las funciones $f_1, ..., f_m$, esto es

$$\mathfrak{I}_f = \{h_1 f_1 + ... + h_m f_m : h_j \in \mathcal{O}_p\} = \langle f_1, ..., f_m \rangle_{\mathcal{O}_p}.$$

**Definición 5.2.1** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo. El álgebra local de $f$ en es el $\mathbb{C}$-álgebra cociente*

$$\mathcal{Q}_f = \mathcal{O}_p / \mathfrak{I}_f.$$

Un germen biholomorfo $\psi : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, p)$ induce un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\psi^* : \mathcal{O}_p \to \mathcal{O}_p$ definido por $\psi^*(f) = f \circ \psi$. Por lo tanto $\mathcal{Q}_f$ es invariante bajo cambio de coordenadas.

**Observación:** De lo anterior, se puede dar la definición de álgebra local en una variedad compleja.

**Definición 5.2.2** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo. La multiplicidad de $f$ en $p$, o el número de Milnor de $f$ en $p$, denotado por $\mu_p(f)$, es la dimensión del el espacio $\mathbb{C}-$lineal $\mathcal{Q}_f$, esto es*

$$\mu_p(f) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Q}_f)$$

**Ejemplo 5.2.1** *Sea $f(z_1, z_2) = (z_1^3, z_1 + z_2^2)$, $p = 0$ (recalcando el ejemplo 5.1.9). Tenemos que:*

$$z_1^3 = f_1 \in \mathfrak{I}_f$$
$$z_1^2 z_2^2 = z_1^2 f_2 - f_1 \in \mathfrak{I}_f$$
$$z_2^5 = f_1 - z_1^2 f_2,$$

*luego tenemos:*

$$z_2^2 = -z_1 \bmod \mathfrak{T}_f$$
$$z_1 z_2 = -z_2^3 \bmod \mathfrak{T}_f$$
$$z_1 z_2^2 = -z_2^4 \bmod \mathfrak{T}_f.$$

*Por lo tanto una base* $\mathbb{C}$*-lineal de* $\mathcal{Q}_f = \mathcal{O}_p/\mathfrak{T}_f$ *es dado por* $\{1, z_1, z_2, z_1^2, z_1z_2, z_1z_2^2\}$*.* *Luego se tiene que:*

$$\mu_0(f) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Q}_f) = 6.$$

**Lema 5.2.1** *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *un germen holomorfo de multiplcidad* $\mu$ *(finito) en* $p$*. Sea una colección de* $\mu$ *gérmenes holomorfos en* $\mathfrak{M}_p$*,* $h_1, ..., h_\mu$ *entonces el producto* $h_1 \cdots h_\mu \in \mathfrak{T}_f$*.*

**Prueba.** Consideremos $\mu + 1$ gérmenes holomorfos $H_1 = 1$, $H_2 = h_1$, $H_3 = h_1 \cdot h_2$, ... , $H_{\mu+1} = h_1 \cdots h_\mu$. Desde que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Q}_f) = \mu$, entonces sus clases en $\mathcal{Q}_f$ son linelamente dependientes, luego existen números complejos $a_0, ...., a_\mu$ tal que

$$a_0 + a_1 H_2 + \cdots + a_\mu H_{\mu+1} \in \mathfrak{T}_f.$$

Sea $k$ el menor entero tal que $a_k \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} &a_k H_{k+1} + a_{k+1} H_{k+2} + \cdots + a_\mu H_{\mu+1} = \\ &H_{k+1}\left(a_k + a_{k+1}\tfrac{H_{k+2}}{H_{k+1}} + \cdots + a_\mu \tfrac{H_{\mu+1}}{H_{k+1}}\right) \in \mathfrak{T}_f. \end{aligned}$$

Pero el factor $a_k + a_{k+1}\frac{H_{k+2}}{H_{k+1}} + \cdots + a_\mu \frac{H_{\mu+1}}{H_{k+1}}$ es una unidad en $\mathcal{O}_p$, por lo tanto $H_{k+1} \in \mathfrak{T}_f$. Esto sigue que $H_{\mu+1} = H_{k+1} h_{k+1} h_{k+2} \cdots h_\mu \in \mathfrak{T}_f$. ■

La utilidad de este lema será explotado más adelante. Sea $F : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Recordemos que $F$ alrededor de $p$ puede ser expresado como

$$F = \sum_{k \geq m} F_k \quad , \text{con } F_m \neq 0,$$

donde $F_k$ es un polinomio homogéneo de grado $k$ en las variables $z_1 - p_1$,...., $z_n - p_n$. El número $m$ es llamado el orden de $F$ en $p$.

**Proposición 5.2.2** *Sean $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ gérmenes holomorfos donde $f$ tiene multiplicidad $\mu$. Supongamos que cada componente de la diferencia $g - f$ tiene una expansión de la forma $g_i - f_i = \sum_{k \geq r_i} F_{i,\mu+k}$ con $r_i \geq 1$. Entonces $f$ y $g$ son $A-$equivalentes.*

**Prueba.** Escribimos $F_{i,\mu+k}$ como

$$F_{i,\mu+k} = \sum_J a_{iJ}(z_1 - p_1)^{j_1} \cdots (z_n - p_n)^{j_n},$$

con $j_1 + \cdots + j_n = |J| = \mu + k$. Por lo tanto, cada término es producto de $\mu + k > \mu$ funciones en $\mathfrak{M}_p$ y por el lema 5.2.1 existen funciones $g_{iJ,1}, ..., g_{iJ,n} \in \mathcal{O}_p$ tales que

$$a_{iJ}(z_1 - p_1)^{j_1} \cdots (z_n - p_n)^{j_n} = g_{iJ,1} f_1 + \cdots + g_{iJ,n} f_n.$$

Observe que las funciones $g_{iJ,l} \in \mathfrak{M}_p$ porque el lado izquierdo es de grado $\mu + k > \mu$. Concluimos que

$$F_{i,\mu+k} = \sum_j b_{ij}^{(\mu+k)} f_j,$$

con $b_{ij}^{(\mu+k)} \in \mathfrak{M}_p$. Por lo tanto

$$g_i - f_i = \sum_j c_{ij} f_j \ , \ \text{ con } c_{ij} \in \mathfrak{M}_p.$$

Luego tenemos que $g = (I + Cf)$, donde $C = (c_{ij})$ es una matriz con entradas de gérmenes holomorfas. Desde que $C(p) = 0$ entonces la matriz $I + C$ es inversible en una vecindad de $p$. Así $f$ y $g$ son $A-$equivalentes. ∎

**Proposición 5.2.3** *Sean $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ gérmenes holomorfos tal que $f$ y $g$ son $A-$equivalentes entonces ellos tienen la misma multiplicidad en $p$.*

**Prueba.** Desde que $f(z) = A(z)g(z)$ se tiene $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_g$ y como $A(z)$ es inversible, también $\mathfrak{I}_g \subset \mathfrak{I}_f$, entonces $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_g$. ■

**Lema 5.2.2** *Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un isomorfismo, entonces $\mu_0(T) = 1$.*

**Proposición 5.2.4** *Si $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ es un germen biholomorfo, entonces $\mu_0(f) = 1$.*

**Prueba.** En efecto, como $f$ es holomorfa, tenemos

$$f(z) = f'(0) \cdot z + \sum_{k \geq 2} F_k(z),$$

luego se tiene que

$$f(z) - f'(0) \cdot z = \sum_{k \geq 2} F_k(z).$$

Por la proposición 5.2.2 tenemos que $f$ y $f'(0)$ son $A-$equivalentes, y por la proposición 5.2.3, $\mu_0(f) = \mu_0(f'(0)) = 1$. ■

**Definición 5.2.3** *La función Pham es una función $\Upsilon : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ de la forma*

$$\Upsilon^J(z_1, ..., z_n) = (z_1^{j_1}, z_2^{j_2}, ..., z_n^{j_n}),$$

*donde $J = (j_1, j_2, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n$, $j_k \geq 1$ para todo $k$.*

**Lema 5.2.3** $\mathcal{I}_0(\Upsilon^J) = \mu_0(\Upsilon^J)$.

**Prueba.** Esto se muestra con un cáculo direto. De la prop 5.1.8 $\mathcal{I}_0(\Upsilon^J)$ es el número de soluciones de $z_1^{j_1} = \xi_1, ..., z_n^{j_n} = \xi_n$, tomando $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ valor regular de $\Upsilon^J$ cerca del origen, entonces $\mathcal{I}_0(\Upsilon^J) = j_1 j_2 \cdots j_n$. Por otro lado, la base del álgebra local de $\Upsilon^J$ en 0 está formado por las clases de los monomios

$$z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n} \text{ , donde } 0 \leq m_1 < j_1,..., 0 \leq m_n < j_n$$

que son $j_1 j_2 \cdots j_n$, por lo tanto $\mu_0(\Upsilon^J) = j_1 j_2 \cdots j_n$. ■

**Proposición 5.2.5** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo con multiplicidad $\mu$ en* 0. *Consideremos la función Pham*

$$\Upsilon^{[\mu+1]}, \text{ con } [\mu+1] = (\mu+1, ..., \mu+1)$$

*y la deformación holomorfa $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} = \Upsilon^{[\mu+1]} + \lambda f$, $\lambda$ suficientemente cerca del $0 \in \mathbb{C}$. Entonces $f$ es A-equivalente a $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}$ para $\lambda \neq 0$.*

**Prueba.** Note que $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} - \lambda f = \Upsilon^{[\mu+1]}$ y todas las componentes de $\Upsilon^{[\mu+1]}$ son de grado $> \mu$. Por la prop 5.2.2 $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}$ es A-equivalente a $\lambda f$, además es obvio que $\lambda f$ es A-equivalente a $f$. ■

Antes de examinar si el número de Milnor tiene la característica de adición (como la que tiene el índice de Poincaré-Hopf) vamos a dar un resultado que es muy útil para comprender la multiplicidad.

**Proposición 5.2.6** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo. $\mu_p(f) = 0$ si y sólo si $p$ no es un punto singular de $f$.*

**Prueba.** El número de Milnor es cero si sólo si

$$\langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p} = \mathcal{O}_p$$

y esto ocurre si sólo si, existen gérmenes holomorfos $g_1, ..., g_n \in \mathcal{O}_p$ tales que

$$1 = g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n$$

esto equivale a que alguna componente de $f$ no se anula en $p$. ■

**Teorema 5.2.7** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo. $0 < \mu_p(f) < \infty$ si sólo si $p$ es una singularidad aislada de $f$.*

**Prueba.** Supongamos $0 < \mu_p(f) < \infty$, invocamos al lema 5.2.1, para $i = 1, 2..., n$

$$(z_i - p_i)^{\mu} = \sum_j g_{ij} f_j,$$

donde los $g_{ij} \in \mathcal{O}_p$. Supongamos lo contrario, que $p$ no es una singularidad aislada. Entonces existe una secuencia $p_k = (p_{1k}, ..., p_{nk}) \to p$ con $p_k \neq p$ y $f(p_k) = 0$, desde que los $g_{ij}$ estan definidas en una vecindad de $p$, fijando $i$ tenemos que $p_{ik} = p_i$. Luego $p_{ik} = p_i$ tara todo $i$, lo que es absurdo.

Recíprocamente, supongamos que $p$ es una singularidad aislada, así tenemos

$$V(\langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p}) = \{p\}.$$

Luego $I(V(\langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p})) = \mathfrak{M}_p$, donde $\mathfrak{M}_p$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_p$. Por el teorema de los ceros de Hilbert, tenemos que

$$\mathfrak{M}_p = I(V(\langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p})) = Rad\, \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p},$$

donde $Rad\, \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p} = \{h \in \mathcal{O}_p : h^k \in \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p} \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$.

Observe que $(z_i - p_i) \in \mathfrak{M}_p$, para $i = 1, ..., n$, luego existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(z_i - p_i)^{k_i} \in \mathfrak{T}_f = \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p}$, sea $r = \text{máx}\{k_1, ...., k_n\}$ entonces tenemos

$$\mathfrak{J} = \langle (z_1 - p_1)^r, ..., (z_n - p_n)^r \rangle_{\mathcal{O}_p} \subset \mathfrak{T}_f.$$

Se sigue que

$$\mu_p(f) \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{T}_f} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{J}}.$$

Como $\mathfrak{J}$ es generado por monomios de grado $r$ en las variables $z_1, ..., z_n$ se tiene que $\frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{J}}$ es generado sobre $\mathbb{C}$ por las clases de monomios de grado inferior a $r$. Luego $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{J}} < \infty$, por lo tanto $\mu_p(f) < \infty$. ■

### 5.2.2. El Teorema de Preparación

**Definición 5.2.4** *Un polinomio de Weierstrass de grado* $k > 0$ *es un elemento* $h \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ *de la forma*

$$h = z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} z_n + a_k \ ,$$

*donde los coeficientes* $a_j$ *son gérmenes en* $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ *que se anulan en el* $0$*, es decir,* $a_j \in \mathfrak{M}_{0,n-1} \subset \mathcal{O}_{0,n-1}$*,* $1 \leq j \leq k$*.*

**Definición 5.2.5** *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^n$ *un germen holomorfo. Diremos que* $f$ *es regular de orden* $k$ *en* $z_n$ *si* $f(0, ..., 0, z_n) = \sum_{i \geq k} c_i z_n^i$*, con* $c_k \neq 0$*, esto es,* $f(0, ..., 0, z_n)$ *tiene un cero de orden* $k$ *en* $0 \in \mathbb{C}$*.*

Los siguientes resultados son fundamentales:

**Teorema 5.2.8 (Teorema de Preparación de Weierstrass)** *Sea* $f \in \mathcal{O}_{0,n}$ *regular en* $z_n$ *de orden* $k$*. Entonces existe un único polinomio de Weiestrass* $h \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ *de grado* $k$ *en* $z_n$ *tal que* $f = uh$*, donde* $u \in \mathcal{O}_{0,n}$ *es una unidad.*

**Prueba.** Ver [10]. ■

**Corolario 5.2.9 (Teorema de la función Implícita)** *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *un germen holomorfo con* $\frac{\partial f}{\partial z_n}(0) \neq 0$*. Entonces, en una vecindad del* $0$ *se tiene* $f(z_1, ..., z_n) = u(z)(z_n - a_1(z_1, ..., z_{n-1}))$ *donde* $u$ *es un germen holomorfo tal que* $u(0) \neq 0$ *y* $a_1$ *es única.*

El Teorema de Preparación de Weierstrass es un caso particular de:

**Teorema 5.2.10 (Teorema de la división de Weierstrass)** *Sea $h \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ un polinomio de Weierstrass de grado $k$ y $f \in \mathcal{O}_{0,n}$. Entonces $f$ se espresa de una única manera*

$$f = gh + R,$$

*donde $g \in \mathcal{O}_{0,n}$ y $R \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ es un polinomio en $z_n$ de grado $< k$. Más aún, si $f \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ entonces $g \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$.*

**Prueba.** Ver [10]. ■

**Corolario 5.2.11** *El teorema 5.2.10 implica el teorema 5.2.8.*

**Prueba.** Sea $f \in \mathcal{O}_{0,n}$ regular en $z_n$ de orden $k$ y sea $H(z_1, ..., z_n) = z_n^k$. Por el teorema de la división $f = gH + R$ que dice

$$f = g z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} z_n + a_k \ ,$$

con $a_j \in \mathcal{O}_{0,n-1}$. Si $k = 0$ entonces $f = a_0$ y se tiene el teorema 5.2.8. Si $k \geq 1$ entonces, desde que $f(0) = 0$, tenemos $a_k(0) = 0$ y así $a_k \in \mathfrak{M}_{0,n-1}$, diferenciando sucesivamente con respecto a $z_n$ y evalunado en $z_n = 0$ tenemos que $a_j \in \mathfrak{M}_{0,n-1}$, para $j = 1, ..., k-1$. Ahora $f(0, z_n) = g(0, z_n) z_n^k$ y como $f$ es regular en $z_n$ de orden $k$ se tiene que $g(0,0) \neq 0$. Esto sigue que $g$ es una unidad y el teorema 5.2.8 es provado. ■

Usando el teorema anterior se puede probar el siguiente resultado:

**Teorema 5.2.12** *$\mathcal{O}_{p,n}$ es un dominio de factorización única y $\mathcal{O}_{p,n}$ es un anillo Noetheriano.*

**Prueba.** Ver [10]. ■

Ahora veamos una forma mucho más general del teorema de preparación de Weierstrass. Para esto veamos algunos resultados de álgebra Conmutativa.

Sea $\mathfrak{R}$ un anillo conmutativo con unidad y $\mathfrak{G}$ un grupo abeliano.

**Definición 5.2.6** *$\mathfrak{G}$ es un $\mathfrak{R}$-módulo si podemos definir una acción de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{G}$:*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{R}\times\mathfrak{G} & \to & \mathfrak{G} \\ (x,\alpha) & \longmapsto & x\alpha \end{array}$$

*tal que*

$$(x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha$$
$$(xy)\alpha = x(y\alpha)$$
$$x(\alpha+\beta) = x\alpha + y\beta$$
$$1.\alpha = \alpha.$$

**Definición 5.2.7** *Decimos que $\mathfrak{G}$ es finitamente generado sobre $\mathfrak{R}$ si existe un número finito de elementos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{G}$ tal que todo elemento $\beta \in \mathfrak{G}$ se puede escribir en combinación lineal de los $\alpha_i$ con coeficientes en $\mathfrak{R}$, es decir*

$$\beta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

**Lema 5.2.4 (Lema de Nakayama)** *Sea $\mathfrak{R}$ un anillo conmutativo con unidad, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ ideal maximal y $\mathfrak{G}$ un $\mathfrak{R}$-módulo. Suponga que:*

**i)** *$\mathfrak{G}$ es finitamente generado*

**ii)** *$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{G}$.*

*Entonces $\mathfrak{G} = \{0\}$.*

**Prueba.** Ver [9]. ■

**Corolario 5.2.13** *Sea $\mathfrak{G}$ un $\mathfrak{R}$-módulo finitamente generado. Entonces $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$ es espacio vectorial finito dimensional sobre el cuerpo $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$. Sea $\mathfrak{p}:\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$ la proyección canónica y $u_1,...,u_n$ base de $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$. Escogemos elementos $e_1,...,e_n\in\mathfrak{G}$ tal que $\mathfrak{p}(e_i)=u_i$. Entonces $\{e_1,...,e_n\}$ generan $\mathfrak{G}$ sobre $\mathfrak{R}$.*

**Prueba.** Como $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal se tiene que $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ es un cuerpo, Es facil ver que $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$ es un espacio vectorial sobre $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$. Ahora sean $\{\alpha_1,...,\alpha_l\}$ los generadores de $\mathfrak{G}$ sobre $\mathfrak{R}$. Dado $u\in\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$ existe $\beta\in\mathfrak{G}$ tal que $\mathfrak{p}(\beta)=u$ además $\beta=x_1\alpha_1+\cdots+x_l\alpha_l$. Entonces

$$u=\mathfrak{p}(\beta)=\tilde{x}_1\mathfrak{p}(\alpha_1)+\cdots+\tilde{x}_l\mathfrak{p}(\alpha_l),$$

donde $\tilde{x}_j$ es la clase de $x_j$ en $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$. Esto muestra que $\{\mathfrak{p}(\alpha_1),...,\mathfrak{p}(\alpha_l)\}$ es una base para $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$, por lo tanto $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$ es finito dimensional.

Suponga ahora que $\{u_1,...,u_n\}$ es una base para $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$ y $\{e_1,...,e_n\}\subset\mathfrak{G}$ tal que $\mathfrak{p}(e_i)=u_i$. Consideremos el submódulo $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{G}$ generado por $\{e_1,...,e_n\}$ y sea $\mathfrak{B}$ el módulo cociente $\mathfrak{B}=\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$. Desde que $\mathfrak{G}$ es finitamente generado, se tiene que $\mathfrak{B}$ también lo es.

Sea $\alpha\in\mathfrak{G}$, entonces $\mathfrak{p}(\alpha)=\tilde{x}_1u_1+\cdots+\tilde{x}_nu_n$ y $\alpha=x_1e_1+\cdots+x_ne_n+t$, donde $t\in\mathfrak{M}.\mathfrak{G}$. Por lo tanto tenemos:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{U}+\mathfrak{M}\mathfrak{G}$$

pero

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{G}/\mathfrak{U}=(\mathfrak{U}+\mathfrak{M}.\mathfrak{G})/\mathfrak{U}=\mathfrak{M}.(\mathfrak{G}/\mathfrak{U})=\mathfrak{M}.\mathfrak{B}.$$

Luego por el Lema de Nakayama se tiene que $\mathfrak{B}$ =0, por lo tanto $\mathfrak{G}=\mathfrak{U}$. ■

Sea $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^m,0)$ un germen holomorfo y $\mathfrak{G}$ un $\mathcal{O}_{0,n}$-módulo, entonces el pull-back $f^*$ genera una acción sobre $\mathfrak{G}$, convirtiendo a $\mathfrak{G}$ en un $\mathcal{O}_{0,m}$-módulo

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_{0,m}\times\mathfrak{G} & \to & \mathfrak{G}\\ (h,\alpha) & \mapsto & (f^*h)\alpha=(h\circ f)\alpha.\end{array}$$

Tenemos el siguiente resultado no trivial:

**Teorema 5.2.14 (Teorema de Preparación)** *Sean $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ un germen holomorfo y $\mathfrak{G}$ un $\mathcal{O}_{0,n}$-módulo finitamente generado. Entonces $\mathfrak{G}$ es finitamente generado como $\mathcal{O}_{0,m}$-módulo (vía $f^*$) si sólo si el espacio $\mathbb{C}$-lineal $\mathfrak{G}/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}.\mathfrak{G})$ es finito dimensional.*

**Prueba.** Ver [23]. ■

Ahora consideremos $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal $\mu_0(f) < \infty$ y sea $\mathfrak{G} = \mathcal{O}_{0,n}$.

Tenemos

$$f^* : \mathcal{O}_{0,n} \to \mathcal{O}_{0,n},$$

es fácil ver que $f^*\mathfrak{M}_{0,m}.\mathcal{O}_{0,n} = \mathfrak{T}_f$, además $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{0,n}/\mathfrak{T}_f = \mu$. Por el Teorema anterior tenemos que $\mathcal{O}_{0,n}$ es finitamente generado como $\mathcal{O}_{0,n}$-módulo (via $f^*$). Mas aún por el corolario 5.2.13, $\mathcal{O}_{0,n}$ es generado por $\mu$ elementos (via $f^*$).

Así tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 5.2.15** *Dado $g \in \mathcal{O}_{0,n}$, existen funciones $h_j$, $e_j \in \mathcal{O}_{0,n}$, $1 \leq i \leq \mu$, tales que:*

$$g(z) = h_1(f(z))e_1(z) + \cdots + h_\mu(f(z))e_\mu(z).$$

Usando la proposición anterior tenemos el siguiente resultado:

**Lema 5.2.5** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo de multiplicidad finita $\mu$ en 0. Existe una vecindad de 0, $U$ y $V$ dominios, tal que los gérmenes que aparecen en el teorema de preparación (proposición anterior), todos los polinomios son definidos en $U$ y $V$.*

**Prueba.** Consideremos una colección finita de funciones:

$$\{1, z_k e_j\} \text{ para } 1 \leq k \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq \mu.$$

Escribir cada uno como

$$f^*(h_1(w))e_1(w) + \cdots + f^*(h_\mu(w))e_\mu(w).$$

Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ abierto tal que todas las funciones $h_l$ que aparecen en la proposición anterior esten definidas. Sea $U \subset f^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^n$ una vecindad del 0 tal que las funciones $e_j$ esten definidas. Ahora procedemos por inducción sobre el grado de los polinomios.

Si $P$ es un polinomio de grado 0 entonces $P = c \cdot 1$, $c \in \mathbb{C}$. Sea un polinomio de grado $d$, podemos escribir como

$$P(z) = \sum z_j Q_j + c \cdot 1,$$

donde el grado de los polinomios $Q_j$ es menor que $d$. Asumiendo que el lema se cumpla para los $Q_j$, luego se cumple para $z_j Q_j$ y por lo tanto se cumple para $P$. ■

## 5.3. Relación entre $\mathcal{I}$ y $\mu$

En esta sección demostraremos que el índice de Poincaré-Hopf y el número de Milnor coinciden. Primero veamos algunas definiciones.

Sean $\mathcal{O}_{p,n}$ el $\mathbb{C}$-álgebra de los gérmenes holomorfos en $p \in \mathbb{C}^n$ y $\mathfrak{I}_{p,f}$ el ideal de $\mathcal{O}_{p,n}$ generado por las componentes del germen holomorfo $f : (\mathbb{C}^n, p) \to \mathbb{C}^n$ es decir $\mathfrak{I}_{p,f} = \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_{p,n}}$.

Sea el $\mathbb{C}$-álgebra cociente $\mathcal{Q}_{p,f} = \mathcal{O}_{p,n}/\mathfrak{I}_{p,f}$. Sea $\mathcal{P}_{p,n}$ el $\mathbb{C}$-álgebra de los gérmenes polinomiales en $p$, es claro que $\mathcal{P}_{p,n} \subset \mathcal{O}_{p,n}$. Sea $\mathfrak{q} : \mathcal{O}_{p,n} \to \mathcal{Q}_{p,f}$ la función cociente canónica.

**Definición 5.3.1** *El $\mathbb{C}$-subálgebra polinomial $\mathcal{P}_{p,f}$ es la imagen del $\mathbb{C}$-álgebra polinomial $\mathcal{P}_{p,n}$ vía la función cociente $q$, esto es*

$$\mathcal{P}_{p,f} = \mathfrak{q}(\mathcal{P}_{p,n}).$$

**Notación 5.3.1** *En el caso de que $p = 0$, denotaremos por $\mathcal{O}_n$, $\mathfrak{I}_f$, $\mathcal{Q}_f$, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_f$ en ves de $\mathcal{O}_{p,n}$, $\mathfrak{I}_{p,f}$, $\mathcal{Q}_{p,f}$, $\mathcal{P}_{p,n}$, $\mathcal{P}_{p,f}$ respectivamente.*

Consideremos $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo con multiplicidad finita $\mu$ en 0. Consideremos una deformación holomorfa $f_\lambda$ de $f$, $\lambda \in \mathbb{C}^m$, $f_0 = f$.

**Lema 5.3.1** *Sea $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$ definido por $F(z, \lambda) = (f_\lambda(z), \lambda)$. Entonces los $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{Q}_f$ y $\mathcal{Q}_F$ son isomorfos. Más aún, si $[e_1], ..., [e_\mu]$ forman una base de $\mathcal{Q}_f$ entonces ellos también forman una base para $\mathcal{Q}_F$.*

**Prueba.** Escribimos $F = (F_1, ..., F_n, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ con $F_j = f_{j\lambda}$, $j = 1, ..., n$ donde $f_\lambda = (f_{1\lambda}, ..., f_{n\lambda})$. Desde que el ideal $\mathfrak{I}_F$ tiene la siguiente forma

$$\mathfrak{I}_F = \langle f_{1\lambda}, ..., f_{n\lambda}, \lambda_1, ..., \lambda_m \rangle_{\mathcal{O}_{n\times m}}.$$

Luego se llega a que $\mathcal{O}_{n\times m}/\mathfrak{I}_F$ es isomorfo a $\mathcal{O}_n/\mathfrak{I}_f$. ■

**Lema 5.3.2** *Para $|\lambda|$ suficientemente pequeño. Se tiene que el espacio generado por las imagenes de $e_1, ..., e_\mu$ en el $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{Q}_{f_\lambda}$ contiene a $\mathcal{P}_{f_\lambda}$. Es decir, $\mathcal{P}_{f_\lambda}$ es un $\mathbb{C}$-subálgebra de $\mathcal{Q}_{f_\lambda}$.*

**Prueba.** Del Lema 5.2.5 nosotros podemos encontrar una vecindad $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ de 0 y una vecindad $V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ de 0, todos convexos, con $F(U_1 \times U_2) \subset V$ tal que todo polinomio $P$ en $U_1 \times U_2$, podemos escribir de la forma

$$P(z) = \sum_{j=1}^{\mu} h_j(w, \lambda) e_j(z) \text{ , donde } w = F(z, \lambda) = f_\lambda(z),\ z \in U_1.$$

Por el Lema 5.1.1, para cada $h_j$ existen funciones $g_{j,1},...,g_{j,n} : U_1 \times U_2 \to \mathbb{C}$ holomorfas tal que

$$h_j(w,\lambda) = h_j(0,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} w_i g_{j,i}(w,\lambda),$$

sustituyendo la expresión anterior para $P$, tenemos:

$$P(z) = \sum_{j=1}^{\mu} h_j(0,\lambda)e_j(z) + \sum_{i=1}^{n} w_i \left( \sum_{j=1}^{\mu} g_{j,i}(w,\lambda)e_j(z) \right).$$

Sea $g_i(z) = \sum_{j=1}^{\mu} g_{j,i}(w,\lambda)e_j(z)$, es claro que $g_i \in \mathcal{O}_n$, así tenemos:

$$P(z) = \sum_{j=1}^{\mu} h_j(0,\lambda)e_j(z) + \sum_{i=1}^{n} w_i g_i,$$

observe que $w_i = F_i(z,\lambda) = f_{i\lambda}(z)$, luego $\sum_{i=1}^{n} w_i g_i \in \mathfrak{I}_{f_\lambda}$, así tenemos que $[P(z)] \in \mathcal{Q}_{f_\lambda}$ para $\|\lambda\|$ suficientemente pequeño. ■

**Proposición 5.3.1** *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen holomorfo con multiplicidad finita $\mu$ en $0$. Consideremos la deformación $f_\lambda$ de $f$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $f_0 = f$. Para $\|\lambda\|$ suficientemente pequeño la dimensión del espacio $\mathbb{C}$-lineal $\mathcal{P}_{f_\lambda}$ es a lo más $\mu$. Es decir*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{f_\lambda} \leq \mu.$$

**Prueba.** Por el Lema anterior tenemos:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{f_\lambda} \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda},$$

y por el lema 5.3.1, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda} \leq \mu$. ■

**Lema 5.3.3** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto (conexo) con $0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{C}^n$ holomorfa con $f^{-1}(0)$ es un conjunto finito no vacio tal que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_f < \infty$. Entonces $\mu_\xi(f) < \infty$ para todo $\xi \in f^{-1}(0)$. Más aún, el número de soluciones de la ecuación $f = 0$ en $U$ es acotado por $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_f$.*

**Prueba.** Denotemos por $\nu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_f$ y sea $\xi \in U$ tal que $f(\xi) = 0$. Sea $h_1, ..., h_\nu$ funciones lineales alrededor de $\xi$ y consideremos $\nu+1$ funciones $1$, $H_1 = h_1$, $H_2 = h_1 h_2$ y $H_\nu = h_1 h_2 \cdots h_\nu$. Sea $\mathfrak{p} : \mathcal{P}_{\xi,n} \to \mathcal{P}_{\xi,f}$ la aplicación cociente, entonces $\mathfrak{p}(\mathfrak{1})$, $\mathfrak{p}(H_1), ..., \mathfrak{p}(H_\nu)$ son linealmente dependiente, utilizando las mismas ideas usadas en el lema 5.2.1, concluimos que

$$h_1 h_2 \cdots h_\nu \in \mathfrak{T}_{\xi,f}.$$

Como $\xi$ es un cero aislado de $f$ tenemos:

$$V(\langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_{\xi,n}}) = \{\xi\}.$$

Luego $I(V(\langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_{\xi,n}})) = \mathfrak{M}_{\xi,n}$, donde $\mathfrak{M}_{\xi,n}$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{\xi,n}$. Luego por el Teorema de los ceros de Hilbert, tenemos que:

$$\mathfrak{M}_{\xi,n} = I(V(\langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_{\xi,n}})) = Rad \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_{\xi,n}},$$

donde $Rad \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_{\xi,n}} = \{h \in \mathcal{O}_{\xi,n} : h^k \in \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_{\xi,n}}$ para algún $k \in \mathbb{N}\}$.

Observe que $(z_i - \xi_i) \in \mathfrak{M}_{\xi,n}$, para $i = 1, ..., n$, luego existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(z_i - p_i)^{k_i} \in \mathfrak{T}_f = \langle f_1, ..., f_n \rangle_{\mathcal{O}_p}$, sea $r = \text{máx}\{k_1, ...., k_n\}$ entonces tenemos

$$\mathfrak{J} = \langle (z_1 - \xi_1)^r, ..., (z_n - \xi_n)^r \rangle_{\mathcal{O}_{\xi,n}} \subset \mathfrak{T}_{\xi,f}.$$

Se sigue que

$$\mu_\xi(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\xi,n}}{\mathfrak{T}_{\xi,f}} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\xi,n}}{\mathfrak{J}},$$

como $\mathfrak{J}$ es generado por monomios de grado $r$ en las variables $z_1, ..., z_n$ se tiene que $\frac{\mathcal{O}_{\xi,n}}{\mathfrak{J}}$ es generado sobre $\mathbb{C}$ por las clases de monomios de grado inferior a $r$. Luego $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{J}} < \infty$, por lo tanto $\mu_\xi(f) < \infty$.

Esto prueba la primera parte del lema. Supongamos que hay $\nu + 1$ soluciones de la ecuación $f = 0$ en $U$, sean $\xi_0, ..., \xi_\nu$. Para $j = 0, 1, ..., \nu$ definimos los polinomios:

$$P_j(z_1, ..., z_n) = \frac{(z - z_1) \cdots \widehat{(z - z_j)} \cdots (z - z_n)}{(z_j - z_1) \cdots \widehat{(z_j - z_j)} \cdots (z_j - z_n)},$$

es claro que:

$$P_j(\xi_i) = \begin{cases} 1 & , \text{si } i = j \\ 0 & , \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Consideremos una $\mathbb{C}$-combinación lineal de los $P_j$ tal que:

$$c_0 P_0 + \cdots + c_\nu P_\nu = 0,$$

evaluando en $\xi_i = 0$, tenemos que $c_i = 0$. Por lo tanto los polinomios $P_0, ..., P_\nu$ son linealmente independiente lo que es una contradicción. ■

Consideremos $f : U \to \mathbb{C}^n$ holomorfa, $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo. Suponga que $\xi_1, ..., \xi_k$ son soluciones de la ecuación $f = 0$ en $U$. Sean $\mathcal{Q}_{\xi_1,f}, ..., \mathcal{Q}_{\xi_k,f}$ los correspondientes $\mathbb{C}$-álgebras locales de $\xi_1, ..., \xi_k$. Entonces la suma

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i,f}$$

es llamada álgebra Multilocal de $f$ en $U$. Definimos el homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\aleph : \mathcal{O}(U) \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i,f}.$$

**Notación 5.3.2** *Sea $g \in \mathcal{O}(U)$ y $\xi \in U$, denotaremos por $T_\xi^l g$ al polinomio de Taylor de grado $l$ de $g$ en $\xi$.*

**Lema 5.3.4** *Sean un número finito de puntos distintos en $U$, $\xi_1, ..., \xi_k$, y polinomios $P_i$ de grado $d_i$, centrado en $\xi_i$, entonces existe un polinomio $Q$ en $U$ tal que $T_{\xi_i}^{d_i} Q = P_i$.*

**Prueba.** Sea $Q = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_N$ la suma de los polinomios homogéneos cuyos coeficientes se vana determinar. Primero resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} Q(\xi_1) &= P_1(\xi_1) \\ &\vdots \\ Q(\xi_k) &= P_k(\xi_k), \end{aligned} \tag{5.1}$$

luego resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z_j}(\xi_1) &= \frac{\partial P_1}{\partial z_j}(\xi_1) \\ &\vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial z_j}(\xi_k) &= \frac{\partial P_k}{\partial z_j}(\xi_k), \end{aligned} \tag{5.2}$$

continuando el procedimiento encontramos $Q$. ■

**Lema 5.3.5** *Supongamos que* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_f < \infty$. *Entonces*

$$\aleph(\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]_{|U}) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i, f}.$$

**Prueba.** Por el lema 5.3.3 se tiene $\mu_{\xi_i}(f) < \infty$ $\forall 1 \leq i \leq k$, sea $\mu_i = \mu_{\xi_i}(f)$. Sea $h = ([h_{\xi_1}], ..., [h_{\xi_k}]) \in \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i, f}$ donde $h_{\xi_i} \in \mathcal{O}_{\xi_i, n}$ $\forall 1 \leq i \leq k$, entonces existe una función $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $g$ extiende a $h_{\xi_i}$ $\forall 1 \leq i \leq k$, luego $\aleph(g) = h$, así $\aleph$ es sobreyectiva. Entonces

$$\aleph(\mathcal{O}(U)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i, f}.$$

Por otro lado, por el lema 5.3.4 existe un polinomio $Q$ en $U$ tal que $T_{\xi_i}^{\mu_i} Q = T_{\xi_i}^{\mu_i} g$, entonces $\aleph(Q) = \aleph(g)$ y el lema es probado. ■

**Proposición 5.3.2** *Sean* $\xi_1, ..., \xi_k$ *soluciones (contando multiplicidades) de la ecuación* $f = 0$ *en* $U$. *Entonces se cumple*

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_{\xi_i}(f) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_f.$$

**Prueba.** Escribimos $f = (f_1, ..., f_n)$, entonces $\aleph(f_j) = 0$ y así el ideal $\mathcal{I}_f$ es mapeado al 0 por $\aleph$. Entonces nos induce a definir un homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\tilde{\aleph} : \mathcal{P}_f \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i, f},$$

gracias al lema 5.3.5 tenemos que $\tilde{\aleph}$ es sobreyectiva. Así tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\xi_i,f} = \dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i,f} \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_f.$$

■

**Proposición 5.3.3** *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *un germen holomorfo tal* $\mu_0(f) < \infty$. *Entonces*

$$\mathcal{I}_0(f) \leq \mu_0(f).$$

**Prueba.** Por el teorema 5.2.7, 0 es aislado en $f^{-1}(0)$ y por la proposición 5.1.8, $\mathcal{I}_0(f)$ es el número de soluciones de la ecuación $f_\lambda = f - \lambda = 0$, con $\lambda$ valor regular de $f$ y $|\lambda| << 1$, en una vecindad suficientemente pequeña $U$ de 0. Por la proposición 5.3.1 se tiene $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{f_\lambda} \leq \mu_0(f) < \infty$, luego por el lema 5.3.3 se tiene:

$$\mathcal{I}_0(f) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{f_\lambda} \leq \mu_0(f).$$

■

Finalmente tenemos el resultado esperado:

**Teorema 5.3.4** *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *un germen holomorfo tal* $\mu_0(f) < \infty$. *Entonces*

$$\mathcal{I}_0(f) = \mu_0(f).$$

**Prueba.** La prueba consiste en reunir todos los resultados anteriores.

En efecto, considereremos la función Pham $\Upsilon^{[\mu+1]}$, donde $\mu = \mu_0(f)$. Por la proposición 5.2.5 la deformación

$$\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} = \Upsilon^{[\mu+1]} + \lambda f$$

para $\lambda$ en una vecindad suficientemente pequeña de 0 en $\mathbb{C}$, $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}$ es $A$-equivalente a $f$.

Por la proposición 5.1.12,

$$\mathcal{I}_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(f) \tag{5.3}$$

y por las proposición 5.2.3,

$$\mu_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mu_0(f). \tag{5.4}$$

Ahora vamos a explotar las propiedades de la función Pham y de su deformación. Fijamos una bola abierta $B_\epsilon(0)$ y el parametro $\lambda$ tal que $|\lambda|$ suficientemente pequeño. Por la propocición 5.3.1

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}} \leq \mu_0(\Upsilon^{[\mu+1]}).$$

Sean $\xi_1, ..., \xi_k$ las soluciones en $B_\epsilon(0)$ de la ecuación $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} = 0$, por la proposición 5.3.2

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}},$$

luego por la proposición 5.3.3, para $\xi_i$ se tiene

$$\mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) \leq \mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}). \tag{5.5}$$

Por el teorema 5.1.10

$$\sum_{i=1}^{k} \mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \deg \frac{\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}}{\left|\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}\right|},$$

donde esta última función está definida sobre la esfera $\partial B_\epsilon(0)$.

Por el teorema 5.1.11 tenemos:

$$\deg \frac{\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}}{\left|\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}\right|} = \deg \frac{\Upsilon^{[\mu+1]}}{|\Upsilon^{[\mu+1]}|} = \mathcal{I}_0(\Upsilon^{[\mu+1]}),$$

luego por el lema 5.2.3

$$\mathcal{I}_0(\Upsilon^{[\mu+1]}) = \mu_0(\Upsilon^{[\mu+1]}).$$

Nuevamente por el lema 5.2.3 tenemos:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \sum_{i=1}^{k} \mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}). \tag{5.6}$$

En la expresión anterior todos los términos involucrados son positivos, y de (5.5) se concluye que

$$\mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) \ , \forall i = 1, ..., k.$$

Pero 0 es una de las soluciones $\xi_i$ de la equación $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} = 0$, entonces

$$\mu_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}).$$

Finalmente de (5.3) y (5.4) en lo anterior tenemos:

$$\mu_0(f) = \mu_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(f).$$

El Teorema es probado. ■

# Capítulo 6

# El Número de Milnor de un Campo Vectorial Holomorfo

## 6.1. Índice de Intersección

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa El subconjunto de $\mathbb{C}^n$ formado por todos los ceros de $F$ , al que denotaremos por

$$(F = 0) = \{z \in \mathbb{C}^n; F(z) = 0\},$$

es llamado *hipersuperficie analítica de* $\mathbb{C}^n$, es decir, un conjunto analítico de $\mathbb{C}^n$ de codimensión 1 compleja. En el caso de $n = 2$ se tiene que $(F = 0)$ es una curva analítica. En el caso particular de que $F$ es un polinomio, el conjunto $(F = 0)$ es una *hipersuperficie álgebraica de* $\mathbb{C}^n$.

Sean $F_1, ..., F_n \in \mathcal{O}(U)$ y denotemos por $A_j = (F_j = 0)$.

Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $\mathcal{O}_{n,p}$ el anillo de gérmenes de las funciones holomorfos alrededor de $p \in U$, usando las notaciones dados en el capítulo anterior tenemos la siguiente:

**Definición 6.1.1** *Sea $Z = (Z_1, ..., Z_n) : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo holomorfo, el Número de Milnor del campo $Z$ en el punto $p \in U$, es definido como:*

$$\mu_p(Z) = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{\langle Z_1, ..., Z_n \rangle_{\mathcal{O}_{n,p}}} \right).$$

Del capítulo anterior, tenemos:

**Proposición 6.1.1** *El número de Milnor satisface las siguientes propiedades:*

**(1)** *$\mu_p(Z)$ es finito si y sólo si $p$ es una singularidad aislada de $Z$.*

**(2)** *$\mu_p(Z) = 0$ si y sólo si $p$ es un punto regular de $Z$*

**(3)** *$\mu_p(Z) = 1$ si y sólo si $\det\left(\frac{\partial Z_j(p)}{\partial z_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.*

**(4)** *$\mu_p(Z_{j_1}, ..., Z_{j_n}) = \mu_p(Z_1, ..., Z_n)$, para cualquier permutación $(1, ..., n) \longrightarrow (j_1 ..., j_n)$.*

**(5)** *$\mu_p(Z_1, ..., Z_i \cdot W_i, ..., Z_n) = \mu_p(Z_1, ..., Z_i, ..., Z_n) + \mu_p(Z_1, ..., W_i, ..., Z_n)$.*

**(6)** *Si $A$ es una matriz cuadrada $n \times n$ inversible, cuyas entradas son funciones holomorfas tal que*

$$W = AZ,$$

*entonces $\mu_p(W) = \mu_p(Z)$.*

**(7)** *El número de Milnor es invariante bajo biholomorfismo.*

El número de Milnor puede ser geométricamente interpretado como el índice de intersección en $p$ de las $n$ hipersuperficies analíticas generadas por las componentes de $Z$ (Ver [8]),

$$\mu_p(Z) = i_p(Z_1, ..., Z_n).$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, sea la $\varepsilon-$perturbaciones $A_j(\varepsilon) = (Z_j = \varepsilon)$ de $A_j = (Z_j = 0)$. Se tiene que las hipersuperficies $A_j(\varepsilon)$ se intersectan exactamente en $i_p(Z_1, ..., Z_n)$ puntos, i.e.

$$card\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j(\varepsilon)\right) = i_p(Z_1, ..., Z_n).$$

**Definición 6.1.2** *Sean $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ el Blow-up centrado en $0 \in \mathbb{C}^n$, $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, con $ord_0(F) = m$, definimos el **Transformado Estricto de** $F$ **por** $E$, denotado por $\tilde{F}$ como aquella función que en coordenadas se expresa (en la $j$-ésima carta del Blow-up):*

$$\tilde{F}(y_1, ..., y_n) = \frac{(F \circ E)(y_1, ..., y_n)}{y_j^m}. \tag{6.1}$$

## 6.2. El Número de Milnor de un Campo Vectorial Holomorfo 3-Dimensional

En esta sección daremos unas fórmulas que relacióna el número de Milnor del campo, la multiplicidad álgebraica del campo y el número de Minlor del transormado estricto del campo.

El teorema siguiente, cuya demostración puede ser encontrada en [13], es muy importante pues seran de ayuda para probar algunos teoremas.

**Teorema 6.2.1 (Fórmula de Noether)** *Sean $F_1, ..., F_n \in O_n$ tales que:*

**(1)** *El punto $0 \in \mathbb{C}^n$ es un punto de intersección aislado de las hipersuperficies analíticas $(F_1 = 0), ..., (F_n = 0)$.*

**(2)** *Las hipersuperficies analíticas $(\tilde{F}_1 = 0), ..., (\tilde{F}_n = 0)$ tienen puntos de intersección aislados en el divisor $E^{-1}(0)$.*

*Entonces*

$$i_0(F_1,...,F_n) = ord_0(F_1)ord_0(F_2)\cdots ord_0(F_n) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q(\tilde{F}_1,...,\tilde{F}_n).$$

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^3$ abierto, $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ un campo holomorfo sobre $U$ y $p \in U$ singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$. Donde $\mathcal{F}_Z$ foliación analítica singular por curvas generada por $Z$ tal que $m_p(Z) = \nu$, denotaremos por $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ al transformado estricto de $\mathcal{F}_Z$ y $\tilde{Z}$ el campo vectorial holomorfo que genera a $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$.

Cuando $n = 2$, existe una fórmula que relacióna $\nu$ con el número de Milnor de $Z$ en $p$ y el número de Milnor de las singularidades del transformado estricto $\tilde{Z}$ :

$$\mu_p(Z) = \begin{cases} \nu^2 - \nu - 1 + \sum\limits_{q\in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), \text{ si } p \text{ es no dicrítico} \\ \nu^2 + \nu - 1 + \sum\limits_{q\in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), \text{ si } p \text{ es dicrítico.} \end{cases}$$

En $n = 2$, el conjunto $Sing(\mathcal{F}_{\tilde{Z}})$ es finito y las sumatorias que aparecen son finitas.

En esta sección probaremos una fórmula análoga a la anterior para $n = 3$, bajo la hipotesis que el conjunto $Sing(\mathcal{F}_{\tilde{Z}})$ sea finito.

Sea $0 \in \mathbb{C}^3$ singularidad aislada dicrítica del campo holomorfo $Z$, por la proposición 4.0.1, existe un polinomio homogéneo $P_{\nu-1}$ de grado $\nu - 1$, tal que

$$Z_i(z_1, z_2, z_3) = z_i P_{\nu-1}(z_1, z_2, z_3) + \sum_{k\geq\nu+1} Z_k^i(z_1, z_2, z_3),$$

donde $1 \leq i \leq 3$.

Hallemos los tranformados estrictos de las componentes de $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, ver (6.1).

**a)** El tranformado estricto de $Z_1$ por $E$ en coordenadas se expresa como:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_1(x,t,s) &= P_{\nu-1}(1,t,s) + \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu} Z_k^1(1,t,s) \\
\tilde{Z}_1(u,y,v) &= uP_{\nu-1}(u,1,v) + \sum_{k\geq\nu+1} y^{k-\nu} Z_k^1(u,1,v) \\
\tilde{Z}_1(r,w,z) &= rP_{\nu-1}(r,w,1) + \sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu} Z_k^1(r,w,1).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

**b)** El tranformado estricto de $Z_2$ por $E$ en coordenadas se expresa como:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_2(x,t,s) &= tP_{\nu-1}(1,t,s) + \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu} Z_k^2(1,t,s) \\
\tilde{Z}_2(u,y,v) &= P_{\nu-1}(u,1,v) + \sum_{k\geq\nu+1} y^{k-\nu} Z_k^2(u,1,v) \\
\tilde{Z}_2(r,w,z) &= wP_{\nu-1}(r,w,1) + \sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu} Z_k^2(r,w,1).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

**c)** El tranformado estricto de $Z_3$ por $E$ en coordenadas se expresa como:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_3(x,t,s) &= sP_{\nu-1}(1,t,s) + \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu} Z_k^3(1,t,s) \\
\tilde{Z}_3(u,y,v) &= vP_{\nu-1}(u,1,v) + \sum_{k\geq\nu+1} y^{k-\nu} Z_k^3(u,1,v) \\
\tilde{Z}_3(r,w,z) &= P_{\nu-1}(r,w,1) + \sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu} Z_k^3(r,w,1).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Recordando el transformado estricto $\tilde{Z}$ del campo $Z$ por $E$, ver Teorema 3.4.2, está dado por:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}^1(x,t,s) = {} & \sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu} Z_k^1(1,t,s)\tfrac{\partial}{\partial x} + \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}[Z_k^2(1,t,s) - tZ_k^1(1,t,s)]\tfrac{\partial}{\partial t} + \\
& + \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}[Z_k^3(1,t,s) - sZ_k^1(1,t,s)]\tfrac{\partial}{\partial s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}^2(u,y,v) = {} & \sum_{k\geq\nu+1} y^{k-\nu-1}[Z_k^1(u,1,v) - uZ_k^2(u,1,v)]\tfrac{\partial}{\partial u} + \sum_{k\geq\nu} y^{k-\nu} Z_k^2(u,1,v)\tfrac{\partial}{\partial y} + \\
& + \sum_{k\geq\nu+1} y^{k-\nu-1}[Z_k^3(u,1,v) - vZ_k^2(u,1,v)]\tfrac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}^3(r,w,z) = {} & \sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu-1}[Z_k^1(r,w,1) - rZ_k^3(r,w,1)]\tfrac{\partial}{\partial r} + \\
& + \sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu-1}[Z_k^2(r,w,1) - wZ_k^3(r,w,1)]\tfrac{\partial}{\partial w} + \sum_{k\geq\nu} z^{k-\nu} Z_k^3(r,w,1)\tfrac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Usando (6.2), (6.3) y (6.4), con un fácil cálculo se tiene la siguiente:

**Proposición 6.2.2** *Sea $0 \in \mathbb{C}^3$ singularidad aislada dicrítica del campo holomorfo $Z$, entonces las componentes de $\tilde{Z}$ se expresan en términos de los transformados estrictos de las componentes de $Z$.*

$$\tilde{Z}^1(x,t,s) = \left(\tilde{Z}_1(x,t,s), \tfrac{\tilde{Z}_2(x,t,s) - t\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}, \tfrac{\tilde{Z}_3(x,t,s) - s\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}\right)$$

$$\tilde{Z}^2(u,y,v) = \left(\tfrac{\tilde{Z}_1(u,y,v) - u\tilde{Z}_2(u,y,v)}{y}, \tilde{Z}_2(u,y,v), \tfrac{\tilde{Z}_3(u,y,v) - v\tilde{Z}_2(u,y,v)}{y}\right)$$

$$\tilde{Z}^3(r,w,z) = \left(\tfrac{\tilde{Z}_1(r,w,z) - r\tilde{Z}_3(r,w,z)}{z}, \tfrac{\tilde{Z}_2(r,w,z) - w\tilde{Z}_3(r,w,z)}{z}, \tilde{Z}_3(r,w,z)\right).$$

Con las definiciones y notaciones anteriores, podemos demostrar el siguiente resultado fundamental:

**Teorema 6.2.3** *Sea $Z$ un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^3$, tal que $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$. Si $0 \in \mathbb{C}^3$ es una singularidad dicrítica de $Z$ y $m_0(Z) = \nu$, entonces*

$$\mu_0(Z) = \nu^3 + 2\nu^2 - 2 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}).$$

**Prueba.** Como $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$ entonces el conjunto $Sing(\tilde{Z})$ es discreto, desde que $Sing(\tilde{Z}) \subseteq \mathbb{C}P(2)$ y $\mathbb{C}P(2)$ es compacto entonces el conjunto $Sing(\tilde{Z})$ es finito.

Desde que $Sing(\tilde{Z})$ es finito, entonces existe una recta proyectiva (Hiperplano $H_\infty$) que no pasa por ninguno de ellos (ver [14]), entonces rotanto el sistema de coordenadas y considerando el nuevo sistema de coordenadas en $\mathbb{C}P(2)$ tal que en el hiperplano $H_\infty$ no se encuentre ninguna singularidad de $\tilde{Z}$, y como las rotaciones son tranformaciones lineales, en particular un biholomorfismo, entonces el número de Milnor es invariante, por lo tanto podemos suponer que en la primera carta $E_1(x,t,s)$ de $\tilde{\mathbb{C}}_0^3$ se encuentran todas las singularidades de $\tilde{Z}$.

Recordando que:

- En la 1ra carta:

$$Sing(\tilde{Z}^1) = \left\{ (0,t,s); \begin{array}{c} P_{\nu-1}(1,t,s) = 0 \\ Z^2_{\nu+1}(1,t,s) - tZ^1_{\nu+1}(1,t,s) = 0 \\ Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s) = 0 \end{array} \right\}. \tag{6.5}$$

- En la 2da carta:

$$Sing(\tilde{Z}^2) = \left\{ (u,0,v); \begin{array}{l} Z^1_{\nu+1}(u,1,v) - uZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \\ P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ Z^3_{\nu+1}(u,1,v) - vZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \end{array} \right\}. \tag{6.6}$$

- En la 3ra carta:

$$Sing(\tilde{Z}^3) = \left\{ (r,w,0); \begin{array}{l} Z^1_{\nu+1}(r,w,1) - rZ^3_{\nu+1}(r,w,1) = 0 \\ Z^2_{\nu+1}(r,w,1) - wZ^3_{\nu+1}(r,w,1) = 0 \\ P_{\nu-1}(r,w,1) = 0 \end{array} \right\}. \tag{6.7}$$

Entonces $0 \notin Sing(\tilde{Z}^2)$ y $0 \notin Sing(\tilde{Z}^3)$, pues si el $0 \in \mathbb{C}^3$ llegaría a pertenecer a uno de los dos conjuntos, la primera carta no podría ver esta singularidad, pues esta se encontraría en el infinito de la 1ra carta (Hiperplano $H_\infty$), llegaríamos a una contradicción pues en la primera carta se ecuentran todas singularidades de $\tilde{Z}$.

Como $0 \notin Sing(\tilde{Z}^2)$, $0 \notin Sing(\tilde{Z}^3)$, entonces de (6.6) y (6.7) podemos suponer sin pérdidad de generalidad que:

$$P_{\nu-1}(0,1,0) \neq 0 \text{ y } Z^1_{\nu+1}(0,0,1) \neq 0. \tag{6.8}$$

Como todas las singularidades de $\tilde{Z}$ se encuentran en la primera carta $E_1(x,t,s)$ , entonces basta demostrar la fórmula en la 1ra carta.

Sea $q \in E^{-1}(0)$, de la proposición 6.2.2 tenemos:

$$\mu_q(\tilde{Z}) = i_q\left(\tilde{Z}_1(x,t,s), \frac{\tilde{Z}_2(x,t,s) - t\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}, \frac{\tilde{Z}_3(x,t,s) - s\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}\right),$$

para no hacer engorrosa la escritura escribiremos:

$$\mu_q(\tilde{Z}) = i_q\left(\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right). \tag{6.9}$$

Observe que:

$$\sum_{k\geq \nu+1} x^{k-\nu-1}[Z_k^2 - tZ_k^1] = x\left(\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1\right) \tag{6.10}$$

y además:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1 \\ \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Entonces de (6.10) $\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1 = x\left(\frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}\right)$, usando las propiedades de índice de intersección (ver Proposición 6.1.1), tenemos:

$$i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) + i_q\left(\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right). \tag{6.12}$$

De (6.9), (6.11) y (6.12) tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) &= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) \\ &= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) - \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Para que (6.13) sea válida, veamos que las dos sumatorias que aparecen sean finitas.

**a) Calculando la sumatoria** $\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)$.

De (6.2) y (6.4) tenemos:

$$\tilde{Z}_1(x,t,s) = P_{\nu-1}(1,t,s) + \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu} Z_k^1(1,t,s) = P_{\nu-1} + x[...]_1$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} &= \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}[Z_k^3(1,t,s) - sZ_k^1(1,t,s)] \\ &= Z_{\nu+1}^3(1,t,s) - sZ_{\nu+1}^1(1,t,s) + x[...]_2.\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{pmatrix} P_{\nu-1}(1,t,s) \\ x \\ Z_{\nu+1}^3(1,t,s) - sZ_{\nu+1}^1(1,t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -[...]_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & [...]_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ x \\ \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} \end{pmatrix}.$$

Usando las propiedades de índice de intersección:

$$\begin{aligned}\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \tfrac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) &= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(P_{\nu-1}(1,t,s), x, Z_{\nu+1}^3(1,t,s) - sZ_{\nu+1}^1(1,t,s)\right) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(1,t,s), Z_{\nu+1}^3(1,t,s) - sZ_{\nu+1}^1(1,t,s)\right).\end{aligned} \tag{6.14}$$

Sea

$$H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3) = z_1 Z_{\nu+1}^3(z_1,z_2,z_3) - z_3 Z_{\nu+1}^1(z_1,z_2,z_3),$$

de (6.8) $Z_{\nu+1}^1(0,0,1) \neq 0$ se tiene: $Z_{\nu+1}^1(z_1,z_2,z_3) = [...] + z_3^{\nu+1} + [...]$, entonces $H_{\nu+2}$ es un polinomio homogéneo de grado $\nu+2$.

**Afirmación:** $H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3)$ y $P_{\nu-1}(z_1,z_2,z_3)$ no tienen factores comunes.

En efecto, supongamos lo contrario entonces existen polinomios homogéneos $P, H, M$

tales que: $H_{\nu+2} = H.M$ y $P_{\nu-1} = P.M$, sabemos que:

$$(u,0,v) \in Sing(\tilde{Z}^2) \ \Leftrightarrow \ \text{es solución de:} \begin{cases} Z^1_{\nu+1}(u,1,v) - uZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \\ P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ Z^3_{\nu+1}(u,1,v) - vZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0. \end{cases}$$

Como $(0,0,0) \notin Sing(\tilde{Z}^2)$, se tiene:

$$(u,0,v) \in Sing(\tilde{Z}^2) \ \Leftrightarrow \ \text{es solución de:} \begin{cases} P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ uZ^3_{\nu+1}(u,1,v) - vZ^1_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \end{cases}$$

y como $H_{\nu+2} = H.M$ y $P_{\nu-1} = P.M$, luego se tiene:

$$(u,0,v) \in Sing(\tilde{Z}^2) \Leftrightarrow \ \text{es solución de :} \begin{cases} P(u,1,v).M(u,1,v) = 0 \\ H(u,1,v).M(u,1,v) = 0. \end{cases}$$

Entonces $\{(u,0,v);\ M(u,1,v) = 0\} \subseteq Sing(\tilde{Z}^2)$ y como $M(u,1,v)$ es un polinomio de dos variables entonces $\{(u,0,v);\ M(u,1,v) = 0\}$ es infinito entonces $Sing(\tilde{Z}^2)$ es infinito, contradición con la hipotesis, esto prueba la afirmación.

Por otro lado

$$[H_{\nu+2} = 0] = \{[z_1; z_2; z_3];\ H_{\nu+2}(z_1, z_2, z_3) = 0\}$$
$$[P_{\nu-1} = 0] = \{[z_1; z_2; z_3];\ P_{\nu-1}(z_1, z_2, z_3) = 0\}$$

son curvas planas proyectivas de grados $\nu+2$ y $\nu-1$ respectivamente, como $H_{\nu+2}(z_1, z_2, z_3)$ y $P_{\nu-1}(z_1, z_2, z_3)$ no tienen factores comunes entonces $[H_{\nu+2} = 0]$ y $[P_{\nu-1} = 0]$ no tienen componentes comunes, luego por el Teorema de Bezout (Teorema 3.3.4) :

$$\sum_{p \in \mathbb{C}^2} i_p \left(P_{\nu-1}(z_1, z_2, z_3), H_{\nu+2}(z_1, z_2, z_3)\right) = (\nu-1)(\nu+2). \tag{6.15}$$

Pero nosotros queremos hallar:

$$\sum_{p \in \mathbb{C}^2} i_p \left(P_{\nu-1}(1,t,s), Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s)\right),$$

observe que

$$H_{\nu+2}(1,t,s) = Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s).$$

En la segunda carta $(u,v)$ de $\mathbb{C}P(2)$, estando en recta $H_\infty$ (i.e $u = 0$), de (6.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que $P_{\nu-1}(0,1,v)$ y $H_{\nu+2}(0,1,v) = -vZ^1_{\nu+1}(0,1,v)$ no tienen raíces comunes.

Análogamente en la tercera carta $(r,w)$ de $\mathbb{C}P(2)$, estando en recta $H_\infty$ (i.e $r = 0$), de (6.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que $P_{\nu-1}(0,w,1)$ y $H_{\nu+2}(0,w,1) = -Z^1_{\nu+1}(0,w,1)$ no tiene raíces comunes.

Por lo tanto, las curvas álgebraicas $[H_{\nu+2} = 0]$ y $[P_{\nu-1} = 0]$ no tienen puntos de intersección en la recta $H_\infty$, esto significa que la primera carta de $\mathbb{C}P(2)$ contiene todos los puntos de intersección de estas curvas álgebraicas, entonces de (6.15) se tiene:

$$\sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(1,t,s), H_{\nu+2}(1,t,s)\right) = (\nu-1)(\nu+2). \tag{6.16}$$

De (6.14) y (6.16) tenemos :

$$\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = (\nu-1)(\nu+2). \tag{6.17}$$

**b) Ahora calculando la sumatoria** $\sum\limits_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)$.

Sea $H$ la función analítica

$$H(z_1,z_2,z_3) = z_1Z_3(z_1,z_2,z_3) - z_3Z_1(z_1,z_2,z_3),$$

como

$$Z_i(z_1,z_2,z_3) = z_iP_{\nu-1}(z_1,z_2,z_3) + \sum_{k\geq\nu+1} Z^i_k(z_1,z_2,z_3); 1\leq i\leq 2$$

entonces

$$H(z_1, z_2, z_3) = \sum_{k \geq \nu+1} [z_1 Z_k^3(z_1, z_2, z_3) - z_3 Z_k^1(z_1, z_2, z_3)].$$

Desde que $0 \in \mathbb{C}^3$ es una singularidad aislada de $Z$, entonces $0 \in \mathbb{C}^3$ es un punto de intersección aislado de las superficies analíticas $(Z_1 = 0)$, $(Z_2 = 0)$ y $(Z_3 = 0)$, y como $H = z_1 Z_3 - z_3 Z_1$, entonces $0 \in \mathbb{C}^3$ es un punto de intersección aislado de las superficies analíticas $(Z_1 = 0), (Z_2 = 0)$ y $(H = 0)$.

Observe que :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ z_1 Z_3 - z_3 Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ z_1 Z_3 \end{pmatrix}.$$

Por propiedades de índice de intersección, tenemos:

$$\begin{aligned} i_0(Z_1, Z_2, H) &= i_0(Z_1, Z_2, z_1 Z_3) \\ &= i_0(Z_1, Z_2, z_1) + i_0(Z_1, Z_2, Z_3) \\ &= i_0(Z_1, Z_2, \pi_1) + \mu_0(Z), \end{aligned} \tag{6.18}$$

donde $\pi_1 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tq $\pi_1(z_1, z_2, z_3) = z_1$.

Sea

$$Z^*(z_1, z_2, z_3) = \sum_{k \geq \nu+1} Z_k^1(z_1, z_2, z_3),$$

un fácil cálculo muestra que:

$$\begin{pmatrix} Z^* \\ Z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -P_{\nu-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \pi_1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$i_0(Z_1, Z_2, \pi_1) = i_0(Z^*, Z_2, \pi_1). \tag{6.19}$$

**Analizando las superficies** $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ **y** $(\tilde{\pi}_1 = 0)$

- En la 1ra carta $(x, t, s)$.

Observe que $\tilde{\pi}_1(x, t, s) = \frac{\pi_1 \circ E_1}{x} = 1$, entonces las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ no tienen puntos de intersección en la 1ra carta $(x, t, s)$.

Veamos que pasa en las otras dos cartas:

- 2da carta $(u, y, v)$.

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{Z}^*(u,y,v) & = & \frac{(Z^* \circ E_2)(u,y,v)}{y^{\nu+1}} & = & \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu-1} Z_k^1(u,1,v) \\ \tilde{Z}_2(u,y,v) & = & \frac{(Z_2 \circ E_2)(u,y,v)}{y^{\nu}} & = & P_{\nu-1}(u,1,v) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu} Z_k^2(u,1,v) \\ \tilde{\pi}_1(u,y,v) & = & \frac{(\pi_1 \circ E_2)(u,y,v)}{y} & = & u. \end{array}$$

Los puntos de intersección en la carta $(u, y, v)$ de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}^*(u,0,v) = Z_{\nu+1}^1(u,1,v) = 0 \\ \tilde{Z}_2(u,0,v) = P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ \tilde{\pi}_1(u,0,v) = u = 0 \end{cases}$$

Pero de (6.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ no se intersectan.

- En la 3ra carta $(r, w, z)$

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{Z}^*(r,w,z) & = & \frac{(Z^* \circ E_3)(r,w,z)}{z^{\nu+1}} & = & \sum\limits_{k \geq \nu+1} z^{k-\nu-1} Z_k^1(r,w,1) \\ \tilde{Z}_2(r,w,z) & = & \frac{(Z_2 \circ E_3)(r,w,z)}{z^{m}} & = & P_{\nu-1}(r,w,1) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} z^{k-\nu} Z_k^2(r,w,1) \\ \tilde{\pi}_1(r,w,z) & = & \frac{(\pi_1 \circ E_3)(r,w,z)}{z} & = & r. \end{array}$$

Los puntos de intersección en la carta $(r, w, z)$ de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}^*(r, w, 0) = Z^1_{\nu+1}(r, w, 1) = 0 \\ \tilde{Z}_2(r, w, 0) = P_{\nu-1}(r, w, 1) = 0 \\ \tilde{\pi}_1(r, w, 0) = r = 0 \end{cases}$$

Pero de la condición (2) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ no se intersectan.

Entonces el conjunto de intersección de las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ es vacio, entonces $\sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}^*, \tilde{Z}_2, \tilde{\pi}_1\right) = 0$.

Luego, estamos en condiciones de usar el Teorema 6.2.1,

$$i_0(Z_1, Z_2, z_1) = i_0(Z^*, Z_2, z_1) = \nu(\nu + 1) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}^*, \tilde{Z}_2, \tilde{\pi}_1\right).$$

Luego de (6.19) tenemos:

$$i_0(Z_1, Z_2, z_1) = \nu(\nu + 1). \tag{6.20}$$

**Analizando las superficies** $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ **y** $(\tilde{H} = 0)$.

- En la 1ra carta $(x, t, s)$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1(x, t, s) &= \tfrac{(Z_1 \circ E_1)(x,t,s)}{x^\nu} &&= P_{\nu-1}(1, t, s) + \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu} Z^1_k(1, t, s) \\ \tilde{Z}_2(x, t, s) &= \tfrac{(Z_2 \circ E_1)(x,t,s)}{x^\nu} &&= tP_{\nu-1}(1, t, s) + \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu} Z^2_k(1, t, s) \\ \tilde{H}(x, t, s) &= \tfrac{(H \circ E_1)(x,t,s)}{x^{\nu+2}} &&= \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu-1}[Z^3_k(1, t, s) - sZ^1_k(1, t, s)]. \end{aligned}$$

Los puntos de intersección en la carta $(x, t, s)$ de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1(0, t, s) = P_{\nu-1}(1, t, s) = 0 \\ \tilde{Z}_2(0, t, s) = tP_{\nu-1}(1, t, s) = 0 \\ \tilde{H}(0, t, s) = Z^3_{\nu+1}(1, t, s) - sZ^1_{\nu+1}(1, t, s) = 0, \end{cases}$$

la solución del sistema es finito, ver (6.16).

- En la 2da carta $(u, y, v)$

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{Z}_1(u, y, v) & = & \frac{(Z_1 \circ E_2)(u,y,v)}{y^\nu} & = & uP_{\nu-1}(u, 1, v) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu} Z^1_k(u, 1, v) \\ \tilde{Z}_2(u, y, v) & = & \frac{(Z_2 \circ E_2)(u,y,v)}{y^\nu} & = & P_{\nu-1}(u, 1, v) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu} Z^2_k(u, 1, v) \\ \tilde{H}(u, y, v) & = & \frac{(H \circ E_2)(u,y,v)}{y^{\nu+2}} & = & \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu-1} [uZ^3_k(u, 1, v) - vZ^1_k(u, 1, v)] \end{array}$$

Los puntos de intersección en la carta $(u, y, v)$ de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1(u, 0, v) = uP_{\nu-1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{Z}_2(u, 0, v) = P_{\nu-1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{H}(u, 0, v) = uZ^3_{\nu+1}(u, 1, v) - vZ^1_{\nu+1}(u, 1, v) = 0. \end{cases}$$

Veamos los puntos de intersección, las cuales no pertenecen a la carta $(x, t, s)$, es decir donde $u = 0$, tales puntos serán solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1(0, 0, v) = 0 \\ \tilde{Z}_2(0, 0, v) = P_{\nu-1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{H}(0, 0, v) = -vZ^1_{\nu+1}(0, 1, v) = 0. \end{cases}$$

Pero de la condición (2) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{H}_1 = 0)$ no se intersectan.

- En la tercera carta $(r, w, z)$

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}_1(r,w,z) &= \tfrac{(Z_1\circ E_3)(r,w,z)}{z^{\nu}} &&= rP_{\nu-1}(r,w,1)+\sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu}Z_k^1(r,w,1)\\
\tilde{Z}_2(r,w,z) &= \tfrac{(Z_2\circ E_3)(r,w,z)}{z^{\nu}} &&= wP_{\nu-1}(r,w,1)+\sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu}Z_k^2(r,w,1)\\
\tilde{H}(r,w,z) &= \tfrac{(H\circ E_3)(x,t,s)}{z^{\nu+2}} &&= \sum_{k\geq\nu+1} z^{k-\nu-1}[rZ_k^3(r,w,1)-Z_k^1(r,w,1)]
\end{aligned}
$$

Los puntos de intersección en la carta $(u, y, v)$ de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$
\begin{cases}
\tilde{Z}_1(r,w,0) = rP_{\nu-1}(r,w,1) = 0\\
\tilde{Z}_2(r,w,0) = wP_{\nu-1}(r,w,1) = 0\\
\tilde{H}(r,w,0) = rZ_{\nu+1}^3(r,w,1) - Z_{\nu+1}^1(r,w,1) = 0
\end{cases}
$$

Veamos los puntos de intersección,las cuales no pertenecen a la carta $(x, t, s)$, es decir donde $r = 0$, tales puntos serán solución del siguiente sistema:

$$
\begin{cases}
\tilde{Z}_1(0,w,0) = 0\\
\tilde{Z}_2(0,w,0) = wP_{\nu-1}(0,w,1) = 0\\
\tilde{H}(0,w,0) = -Z_{\nu+1}^1(0,w,1) = 0
\end{cases}
$$

Pero de (6.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{H} = 0)$ no se intersectan.

Entonces el conjunto de intersección de las superficies $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{H} = 0)$ es finito, estamos en condiciones de usar nuevamente el Teorema 6.2.1

$$
i_0(Z_1, Z_2, H) = \nu.\nu.(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{H}\right). \tag{6.21}
$$

De (6.18) y (6.21), tenemos que:

$$
i_0(Z_1, Z_2, H) = i_0(Z_1, Z_2, z_1) + \mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{H}\right) \tag{6.22}
$$

y de (6.20) $i_0(Z_1, Z_2, z_1) = \nu(\nu+1)$, luego de remplazar en (6.22) y despejando tenemos:

$$\mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{H}\right) - \nu(\nu+1),$$

observe que:

$$\tilde{H}(x,t,s) = \frac{(H \circ E_1)(x,t,s)}{x^{\nu+2}} = \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu-1}[Z_k^3(1,t,s) - sZ_k^1(1,t,s)] = \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x},$$

entonces

$$\mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) - \nu(\nu+1). \qquad (6.23)$$

Luego de (6.13) y (6.17) tenemos:

$$\sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = (\nu-1)(\nu+2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}). \qquad (6.24)$$

Finalmente de (6.23) y (6.24) se tiene:

$$\mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + (\nu-1)(\nu+2) - \nu(\nu+1) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}),$$

entonces

$$\mu_0(Z) = \nu^3 + 2\nu^2 - 2 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) \ .$$

■

**Obsrvación:** La demostración del teorema anterior, es usando las mismas ideas del caso $n = 2$.

Ahora vamos mencionar una fórmula análoga del teorema anterior, para una singularidad no dicrítica.

**Teorema 6.2.4** *Sea $Z$ un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^3$, tal que $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$. Si $0 \in \mathbb{C}^3$ es una singularidad no dicrítica de $Z$ y $m_0(Z) = \nu$, entonces*

$$\mu_0(Z) = \nu^3 - \nu^2 - \nu - 1 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) \ .$$

La demostración puede ser encontrada en [5].

## 6.3. El Número de Milnor de un Campo Vectorial Holomorfo $n$-Dimensional

Sea $Z$ un campo vectorial holomorfo con singularidad dicrítica aislada en $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que su transformado estricto tenga singularidades aisladas.

Sean $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja de dimensión $n$, $p \in \mathcal{M}^n$ y $\mathcal{F}$ una foliación analítica singular por curvas. Sea $Z$ el campo vectorial que genera la foliación alrededor del punto $p$ (Ver [12])

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

donde $Z_1,\ Z_2, ..., Z_n \in \mathcal{O}_{n,p}$ (aquí $\mathcal{O}_{n,p}$ es el anillo de gérmenes de las funciones holomorfas en p) y $m.c.d.(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = 1$. Denotaremos por $\mathcal{F}_Z$ a esta foliación.

Sea $p \in \mathcal{M}^n$ y consideremos una carta $(U, \varphi)$ de $\mathcal{M}^n$ tal que $p \in U$ y $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$, como $Z_i \circ \varphi^{-1}$ es una función holomorfa de varias variables complejas en una vecindad del origen, se tiene:

$$Z_i \circ \varphi^{-1} = \sum_{k \geq \nu_i} Z_k^i \ \ , \ \ 1 \leq i \leq n,$$

donde los $Z_k^i$ son polinomios homogéneos de grado $k$ en $n$ variables complejas.

Es fácil ver que el número $\nu_i$ es independiente de la carta $(U, \varphi)$

**Definición 6.3.1** *El orden $Z_i$ en $p \in \mathcal{M}^n$ es el orden de.$Z_i \circ \varphi^{-1}$ en el $0 \in \mathbb{C}^n$ es $\nu_i$, denotado por $ord_p(Z_i)$.*

**Definición 6.3.2** *La multiplicidad álgebraica de la foliación $\mathcal{F}_Z$ (o del campo $Z$) denotada por $m_p(\mathcal{F}_Z)$ (o $m_p(Z)$) es definida como*

$$m_p(\mathcal{F}_Z) = \min_{1 \leq i \leq n} \{ord_p(Z_i)\}.$$

Es fácil ver que todas las definiciones dadas para campos holomorfos definidas en abierto de $\mathbb{C}^n$, se pueden extender a variedades complejas de dimensión $n$. Como el estudio es local, todo el trabajo sobre variedades se baja, de manera local, a abiertos de $\mathbb{C}^n$.

Veamos un resultado fundamental dado en [5].

**Teorema 6.3.1** *Sea $\mathcal{F}_Z$ una foliación analítica por curvas sobre una variedad compleja $n$-dimensional $\mathcal{M}^n$, $p$ es una singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$ tal que $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$. Si $p \in \mathcal{M}^n$ es una singularidad no dicrítica de $\mathcal{F}_Z$ y $m_0(\mathcal{F}_Z) = \nu$, entonces*

$$\mu_0(\mathcal{F}_Z) = g(\nu) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\mathcal{F}_{\tilde{Z}}),$$

*donde $g(\sigma) = \sigma^n - \sigma^{n-1} - \cdots - \sigma - 1$.*

La demostración del Teorema anterior puede ser encontrada en [5].

Si $m_0(Z) = \nu$ entonces $Z = \sum_{k \geq \nu} Z_k$ donde $Z_\nu = P_{\nu-1} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, $Z_k = \sum_{i=1}^{n} Z_k^i \frac{\partial}{\partial z_i}$ para $k \geq \nu + 1$ y los $Z_k^i$ son polinomios homogéneos de grado $k$.

Consideremos $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, como los $Z_i$ son gérmenes holomorfos entonces $Z_i = \sum\limits_{k\geq\nu} Z_k^i$ donde los $Z_k^i$ son polinomios homogéneos de grado $k$, luego agrupando convenientemente el campo $Z$ se expresa como:

$$Z = \sum_{k\geq\nu} \mathcal{Z}_k,$$

donde los $\mathcal{Z}_\nu = P_{\nu-1}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, $\mathcal{Z}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_k^i \frac{\partial}{\partial z_i}$ para $k \geq \nu + 1$.

Veamos el siguiente resultado principal:

**Teorema 6.3.2** *Sea $\mathcal{F}_Z$ una foliación analítica por curvas sobre una variedad compleja n-dimensional $\mathcal{M}^n$, $p$ es una singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$ tal que $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$. Si $p \in \mathcal{M}^n$ es una singularidad dicrítica de $\mathcal{F}_Z$ y $m_0(\mathcal{F}_Z) = \nu$, entonces*

$$\mu_0(\mathcal{F}_Z) = g(\nu + 1) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\mathcal{F}_{\tilde{Z}}),$$

*donde $g(\sigma) = \sigma^n - \sigma^{n-1} - \cdots - \sigma - 1$.*

**Prueba:**

Consideremos el campo vectorial $\mathcal{Z}_{\nu+1} + R$, donde $R = \sum\limits_{k\geq\nu+2} \mathcal{Z}_k$ y supongamos que se cumplan las siguientes condiciones:

**(1)** $\mathcal{Z}_{\nu+1} + R$ tiene una singularidad aislada en el $0 \in \mathbb{C}^n$.

**(2)** Su transformado estricto $\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$.

Por otro lado:

$\mathcal{Z}_{\nu+1} + R = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k \geq \nu+2} Z_k^i \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$ trabajando e la $j$-ésima carta del Blow-up y haciendo el pull-back tenemos:

$$E^*[\mathcal{Z}_{\nu+1} + R] = y_j^{\nu} \left[ y_j Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left( Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \right] + y_j^{\nu+1} \tilde{Y}(y),$$

como estamos trabajando sobre una singularidad dícritica, tenemos que $Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y})$ se anula un número finito de veces, luego se tiene

$$\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R} = \frac{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}{y_j^{\nu}}, \tag{6.25}$$

entonces el plano $\{y_j = 0\}$ es invariante por $\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}$, por lo tanto $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad no dicrítica aislada para el campo vectorial $\mathcal{Z}_{\nu+1} + R$, luego usando el teorema (6.3.2) tenemos:

$$\mu_0(\mathcal{Z}_{\nu+1} + R) = g(\nu+1) + \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}), \tag{6.26}$$

donde $g(\nu) = \nu^n - \nu^{n-1} - \cdots - \nu - 1$.

De la condición (2) podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las singularidades de $\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}$ se encuentran en la primera carta del blow-up $(\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1)$, donde el blow-up se expresa como

$$E_1(y_1, ..., y_n) = (y_1, y_1 y_2 ..., y_1 y_n) = (z_1, ..., z_n).$$

Luego de (6.25) tenemos:

$$\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R} = y_1 Z_{\nu+1}^1(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{n} \left( Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^1(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_1 \tilde{Y}(y), \tag{6.27}$$

entonces por la condición (2) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$Sing(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_r = (0, y_{r,2}, ..., y_{r,n}), 1 \leq r \leq N \text{ tal que} \\ Z_{\nu+1}^i(\hat{q}_r) - y_i^r Z_{\nu+1}^1(\hat{q}_r), \forall 2 \leq i \leq n \end{array} \right\}, \tag{6.28}$$

donde $\hat{q}_r = (1, y_{r,2}, ..., y_{r,n})$.

Para $\epsilon > 0$, consideremos la perturbación $Z_\epsilon = \epsilon \mathcal{Z}_\nu + \mathcal{Z}_{\nu+1} + R$.

**Afirmación:** Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad dicrítica aislada de $Z_\epsilon$.

Veamos que $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad aislda de $Z_\epsilon$.

Hacemos el pull-back con la primera carta del blow-up

$$\begin{aligned} E^*(Z_\epsilon) &= \epsilon E^*(\mathcal{Z}_\nu) + E^*(\mathcal{Z}_{\nu+1} + R) \\ &= \epsilon \left[ E^*(P_{\nu-1} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}) \right] + E^*(\mathcal{Z}_{\nu+1} + R) \end{aligned}$$

$$E^*(Z_\epsilon)(y) = \epsilon y_1^\nu P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_1} + E^*(\mathcal{Z}_{\nu+1} + R)(y).$$

Luego el transformado estricto de $Z_\epsilon$ mediante el blow-up en la primera carta

$$\tilde{Z}_\epsilon(y) = \epsilon P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R})(y) \tag{6.29}$$

y de (6.27) tenemos:

$$\tilde{Z}_\epsilon(y) = [\epsilon P_{\nu-1}(\hat{y}) + y_1 Z^1_{\nu+1}(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{n} \left( Z^i_{\nu+1}(\hat{y}) - y_i Z^1_{\nu+1}(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_1 \tilde{Y}(y).$$

Desde que $\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}$ tiene singularidades aisladas aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$, se tiene que $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad dicrítica aislada de $Z_\epsilon$.

Se sabe que el conjunto singular del campo $\tilde{Z}_\epsilon$ esta dado por la unión disjunta de dos conjuntos:

$$Sing(\tilde{Z}_\epsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{p} = (0, y_2, ..., y_n) : P_{\nu-1}(\tilde{p}) = 0 \\ \text{y } \tilde{p} \in Sing(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) \end{array} \right\} \bigcup \left\{ \begin{array}{l} \tilde{p} = (y_1, y_2, ..., y_n) : \\ y_1 \neq 0, \ \tilde{Z}_\epsilon(\tilde{p}) = 0 \end{array} \right\},$$

es claro que el conjunto $Sing(\tilde{Z}_\epsilon)$ es un conjunto finito.

- Singularidades en el divisor: esta dado por

$$\tilde{p}_r = (0, y_{r,2}, ..., y_{r,n})$$

tales que $\tilde{p}_r$ satisface las condiciones de (6.28) y $P_{\nu-1}(1, y_{r,2}, ..., y_{r,n}) = 0$

Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ con $1 \leq N_1 \leq N$ tal que

$$\tilde{p}_r = \tilde{q}_r, 1 \leq r \leq N_1. \tag{6.30}$$

Oberve que

$$\{\tilde{p}_r = (0, y_{r,2}, ..., y_{r,n}) : 1 \leq r \leq N_1\} \subset Sing(\tilde{Z}).$$

- Singularidades fuera del divisor: estan dados por

$$\tilde{p}_k = \tilde{p}_k(\epsilon) = (y_{k,1}, y_{k,2}, ..., y_{k,n}) \text{ con } y_{k,1} \neq 0$$

tal que $\tilde{Z}_\epsilon(\tilde{p}) = 0$, $1 \leq k \leq M_\epsilon, M_\epsilon \in \mathbb{N}$.

Observe que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que $\tilde{Z}_\epsilon$ es una perturbación de $\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}$, luego tenemos:

Para $1 \leq r \leq N$ existe una vecindad $U_{\epsilon,r}$ de $\tilde{q}_r$, existe un conjunto finito de índices $I_{\epsilon,r}$ tales que

$$\tilde{p}_k(\epsilon) \in U_{\epsilon,r} \text{ para todo } k \in I_{\epsilon,r}$$

además

$$\sum_{r=1}^{N_1} card(I_{\epsilon,r}) = M_\epsilon.$$

De (6.29), se sigue que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \tilde{p}_k(\epsilon) = \tilde{q}_r \ \forall k \in I_{\epsilon,r}$, $1 \leq r \leq N$.

Observe que cada singularidad $\tilde{p}_k = \tilde{p}_k(\epsilon)$ de $\tilde{Z}_\epsilon$ fuera del divisor se tiene que $p_k = E(\tilde{p}_k) \in Sing(Z_\epsilon)$, luego tenemos:

$$\mu_{p_k}(Z_\epsilon) = \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon). \tag{6.31}$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos:

$$\mu_{\tilde{q}_r}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) = \sum_{\tilde{p}_k \in \tilde{Z}_\epsilon^{-1}(0)} \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon)$$

$$\mu_{\tilde{q}_r}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) = \begin{cases} \mu_{\tilde{p}_r}(\tilde{Z}_\epsilon) + \sum\limits_{k \in I_{\epsilon,r}} \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon) & , \text{si } 1 \leq r \leq N_1 \\ \sum\limits_{k \in I_{\epsilon,r}} \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon) & , \text{si } N_1 + 1 \leq r \leq N. \end{cases} \tag{6.32}$$

Usando (6.31) se tiene:

$$\mu_0(\mathcal{Z}_{\nu+1} + R) = \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{r=1}^{N} \sum_{k \in I_{\epsilon,r}} \mu_{p_k}(Z_\epsilon). \tag{6.33}$$

De (6.26), (6.31), (6.32) y (6.33) tenemos:

$$\begin{aligned} g(\nu+1) + \sum_{r=1}^{N} \mu_{\tilde{q}_r}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) &= \mu_0(\mathcal{Z}_{\nu+1} + R) \\ &= \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{r=1}^{N} \textstyle\sum_{k \in I_{\epsilon,r}} \mu_{p_k}(Z_\epsilon) \\ &= \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{r=1}^{N_1} \textstyle\sum_{k \in I_{\epsilon,r}} \mu_{p_k}(Z_\epsilon) + \displaystyle\sum_{r=N_1+1}^{N} \sum_{k \in I_{\epsilon,r}} \mu_{p_k}(Z_\epsilon) \\ &= \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{r=1}^{N_1} \left[\mu_{\tilde{q}_r}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) - \mu_{\tilde{p}_r}(\tilde{Z}_\epsilon)\right] + \sum_{r=N_1+1}^{N} \sum_{k \in I_{\epsilon,r}} \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon) \\ &= \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{r=1}^{N_1} \left[\mu_{\tilde{q}_r}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) - \mu_{\tilde{p}_r}(\tilde{Z}_\epsilon)\right] + \sum_{r=N_1+1}^{N} \mu_{\tilde{q}_r}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) \\ &= \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{r=1}^{N} \mu_{\tilde{q}_r}(\widetilde{\mathcal{Z}_{\nu+1} + R}) - \sum_{r=1}^{N_1} \mu_{\tilde{p}_r}(\tilde{Z}_\epsilon) \end{aligned}$$

y de (6.30) tenemos:

$$g(\nu+1) = \mu_0(Z_\epsilon) - \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}_\epsilon).$$

Por lo tanto

$$\mu_0(Z_\epsilon) = g(\nu+1) + \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}_\epsilon). \tag{6.34}$$

**Afirmación:** $\mu_0(Z) = \mu_0(Z_\epsilon)$En efecto, como $Z$ y $Z_\epsilon$ tienen al $0 \in \mathbb{C}^n$ como singularidad aislada, entonces existe $\delta > 0$ tal que $Z(0) = Z_\epsilon(0) = 0$ y $Z(0) \neq 0 \neq Z_\epsilon(0)$ $\forall 0 < \|z\| < \delta$.

Sea $0 < \delta_1 < \delta$, definimos

$$\frac{Z}{\|Z\|}, \frac{Z_\epsilon}{\|Z_\epsilon\|} : S_{\delta_1}^{2n-1} \to S_1^{2n-1}.$$

Veamos que ellas satisfacen

$$\left\| \frac{Z(z)}{\|Z(z)\|} - \frac{Z_\epsilon(z)}{\|Z_\epsilon(z)\|} \right\| < 2 \text{ para todo } z \in S_{\delta_1}^{2n-1}. \tag{6.35}$$

En efecto, es claro que se cumple (6.35) si y sólo si $\langle Z(z), Z_\epsilon(z) \rangle > 0 \ \forall z \in S_{\delta_1}^{2n-1}$

como

$$\langle Z(z), Z_\epsilon(z) \rangle = \frac{1}{4} \left[ \|Z(z) + Z_\epsilon(z)\| - \|Z(z) - Z_\epsilon(z)\| \right],$$

observe que

$$Z(z) + Z_\epsilon(z) = \frac{1}{2} \left[ 2(1+\epsilon)\mathcal{Z}_\nu + \mathcal{Z}_{\nu+1} + R \right].$$

Es fácil ver que en una vecindad suficientemente pequeña (si es necesario) se cumple:

$$\|Z(z) - Z_\epsilon(z)\| < \|Z(z) + Z_\epsilon(z)\|,$$

por lo tanto $\langle Z(z), Z_\epsilon(z) \rangle > 0 \ \forall z \in S_{\delta_1}^{2n-1}$.

Consideremos la homotopía $H : [0,1] \times S_{\delta_1}^{2n-1} \to S_1^{2n-1}$ dada por:

$$H(t,z) = \frac{t\,\|Z(z)\|\, Z_\epsilon(z) + (1-t)\,\|Z_\epsilon(z)\|\, Z(z)}{\|t\,\|Z(z)\|\, Z_\epsilon(z) + (1-t)\,\|Z_\epsilon(z)\|\, Z(z)\|},$$

entonces se tiene $H(0,z) = \dfrac{Z(z)}{\|Z(z)\|}$ y $H(1,z) = \dfrac{Z_\epsilon(z)}{\|Z_\epsilon(z)\|}$

Por lo tanto tenemos:

$$\mu_0(Z) = \mu_0(Z_\epsilon).$$

**Afirmación:** $\mu_{\tilde{p}_r}(\tilde{Z}) = \mu_{\tilde{p}_r}(\tilde{Z}_\epsilon)$.

En efecto, tenemos

$$\tilde{Z}_\epsilon(y) = [\epsilon P_{\nu-1}(\hat{y}) + y_1 Z^1_{\nu+1}(\hat{y})]\frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{n} \left(Z^i_{\nu+1}(\hat{y}) - y_i Z^1_{\nu+1}(\hat{y})\right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_1 \tilde{Y}(y)$$

$$\tilde{Z}(y) = P_{\nu-1}(\hat{y})\frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{n} \left(Z^i_{\nu+1}(\hat{y}) - y_i Z^1_{\nu+1}(\hat{y})\right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_1 \tilde{Y}(y),$$

la prueba es de manera análoga a la afirmación anterior.

Luego de (6.34) tenemos:

$$\mu_0(Z) = g(\nu+1) + \sum_{\tilde{q}\in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}). \tag{6.36}$$

En el caso de que $0 \in \mathbb{C}^n$ no es una singularidad aislada de $\mathcal{Z}_{\nu+1}+R$, consideramos la perturbación

$$Z_\delta = \mathcal{Z}_\nu + \mathcal{Z}_{\nu+1} + \delta Y_{\nu+1} + R,$$

donde $Y_{\nu+1}$ es un campo vectorial homogéneo de grado $\nu+1$ tal que $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad aislada de $\mathcal{Z}_{\nu+1} + \delta Y_{\nu+1} + R$. Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeño entonces $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad aislada de $Z_\delta$.

En efecto, desde que $Y_{\nu+1}(0) = 0$, existe $r > 0$ tal que si $\|z\| < r$ entonces $\|Y(z)\| < 1$, sea $m = \inf\{\|Z(z)\| : \|z\| = r'\}$ donde $0 < r' < r$, como $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad aislada de $Z$ se tiene que $m > 0$. Tomamos $0 < \delta < m$ tenemos:

$$\|Z_\delta\| > \|Z(z)\| - \delta\,\|Y_{\nu+1}(z)\| > m - \delta,$$

luego se tiene que $\|Z_\delta\| > 0$ para todo $\|z\| = r'$.

Por lo tanto $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad aislada de $Z_\delta$ que satisface las dos condiciones dadas al inicio.

Luego de (6.36) tenemos:

$$\mu_0(Z_\delta) = g(\nu+1) + \sum_{\tilde{q}\in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}_\delta)$$

y como antes, se prueba que:

$$\mu_0(Z) = \mu_0(Z_\delta) \ \text{ y } \ \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}) = \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}_\delta).$$

Finalmente se tiene:

$$\mu_0(Z) = g(\nu+1) + \sum_{\tilde{q}\in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}).$$

■

# Capítulo 7

# Parte Central: Teoremas de Reducción

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $\mathcal{F}_Z$ una foliación holomorfa (por curvas) de $U$ generada por el campo vectorial $Z = (Z_1, ..., Z_n)$, recordemos que un punto $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es llamado irreducible, si $m_p(Z) = 1$ y la parte lineal de $Z$ en $p$ (i.e. $DZ(p)$) tiene al menos un autovalor no nulo.

Sea $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ el Blow-up centrado en el punto $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$, entonces existe una única manera de extender la foliación pull-back $E^*(\mathcal{F}_Z - \{p\})$ a una foliación analítica singular $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ sobre una vecindad del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P(n-1) = E^{-1}(p) \subseteq \tilde{U}_p$, con un conjunto singular de codimensión $\geq 2$, donde $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ es llamado el *transformado estricto* de $\mathcal{F}_Z$ por $E$, recordando que $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es una singularidad *no dicrítica* de $\mathcal{F}_Z$ si y sólo si $E^{-1}(p)$ es invariante por $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ i.e. $E^{-1}(p)$ es unión de hojas y de singularidades de $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$, en caso contrario, $p$ es llamado *singularidad dicrítica.*

El problema de desingularización (o de Reducción de Singularidades) para un $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ (dicrítica o no) de $\mathcal{F}_Z$ consiste en demostrar la existencia de un mapeo holomorfo propio, $\Phi : U^* \longrightarrow U$ definido en una variedad $n$-dimensional que cumpla las siguientes condiciones:

**(1)** $\Phi^{-1}(p) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$ es unión de subvariedades complejas compactas de codimensión uno y con cruzamientos normales.

**(2)** La foliación pull-back $\Phi^*(\mathcal{F}_Z - \{p\})$ se extiende a una foliación de $U^*$ con un conjunto singular de codimensión $\geq 2$ y tal que todos sus puntos singulares son irreducibles.

En esta sección, resolveremos el problema de desingularización.

Sea $z = (z_1, ..., z_n)$ las coordenadas locales de una vecindad de $p$ en $\mathcal{M}^n$ tal que $p = (0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$. En estas coordenadas, sea

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

el campo que genera la foliación $\mathcal{F}_Z$ en una vecindad del origen.

## 7.1. Singularidad Absolutamente Aislada

**Definición 7.1.1 (S.A.A.)** *Sea $\mathcal{F}_Z$ una foliación analítica por curvas sobre una variedad compleja n-dimensional $\mathcal{M}^n$. Decimos que $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es una* ***Singularidad Absolutamente Aislada*** *(**S.A.A.**) de $\mathcal{F}_Z$ si y sólo si severifican las siguientes condiciones:*

**(1)** El punto $p$ *es una singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$.*

**(2)** *Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_0^n$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$, $\tilde{\mathcal{M}}_p^n = \mathcal{M}_1^n$, $F_{\tilde{Z}} = F_1$, $E^1 = E$. Si consideramos una sucesión arbitraria de blowing-up's*

$$\mathcal{M}_0^n \xleftarrow{E^1} \mathcal{M}_1^n \xleftarrow{E^2} \mathcal{M}_2^n \xleftarrow{E^3} .... \xleftarrow{E^{N-1}} \mathcal{M}_{N-1}^n \xleftarrow{E^N} \mathcal{M}_N^n,$$

*donde el centro de cada $E^i$ es un punto $p_{i-1} \in Sing(F_{i-1})$, (aqui $\mathcal{F}_j$ denota el transformado estricto de $\mathcal{F}_{j-1}$ por $E^j$, $(1 \leq i,\ j \leq N)$ entonces $Sing(F_N)$ es un conjunto finito.*

**Observación:** En dimensión $n = 2$, no era necesario esta definición, pues en cada Blow-up, el conjunto singular de la foliación levantada tiene codimensión 2.

Teniendo en cuenta las notaciones de los capítulos anteriores.

Antes de ir al resultado principal veamos el siguiente Teorema.

**Teorema 7.1.1** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$, $(n \geq 3)$ un punto singular de $\mathcal{F}_Z$ tal que $m_p(Z) = 1$ y $p$ no es irreductible entonces $p$ no es una Singularidad Absolutamente Aislada (S.A.A.) de $\mathcal{F}_Z$.*

**Prueba.**

Sea $z = (z_1, ..., z_n)$ las coordenadas locales de una vecindad de $p$ en $\mathcal{M}^n$ tal que $p = (0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$. En estas coordenadas, $\mathcal{F}_Z$ es generado por el campo vectorial holomorfo

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

en una vecindad del origen, donde $Z_i = \sum_{k \geq 1} Z_k^i$ y $Z_k^i$ son polinomios homogéneos de grado $k$. Desde que $p$ es un punto singular no irreducible, $DZ(0)$ tiene la forma canónica de Jordan:

$$DZ(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \epsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

donde $\epsilon_j \in \{0,1\}$, $\forall j = 1, ..., n-1$. Se sigue que:

$$Z(z) = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon_i z_{i+1} \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k \geq 2} Z_k^i(z) \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Trabajando en la primera carta del blowing-up

$$(z_1, z_2, ..., z_n) = (y_1, y_1 y_2, ..., y_1 y_n)$$

tenemos que el tranformado estricto $\tilde{Z}$ esta dado por

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Z}_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1(y) &= y_1 y_2 + \sum_{k \geq 2} Z_k^i(\hat{y}) y_1^k \\ \tilde{Z}_i(y) &= \epsilon_i y_{i+1} - y_2 y_i + \sum_{k \geq 2} \left[ Z_k^i(\hat{y}) - y_n Z_k^1(\hat{y}) \right] y_1^{k-1} \ , \ 2 \leq i \leq n-1 \\ \tilde{Z}_n(y) &= -y_2 y_n + \sum_{k \geq 2} \left[ Z_k^n(\hat{y}) - y_n Z_k^1(\hat{y}) \right] y_1^{k-1}, \end{aligned}$$

con $\hat{y} = (1, y_2, ..., y_n)$. Luego el conjunto singular de $\tilde{Z}$ en la primera carta, esta dado por los puntos $(0, y_2, ..., y_n)$ tales que

$$\tilde{Z}(0, y_2, ..., y_n) = \sum_{i=2}^{n-1} \left( \epsilon_i y_{i+1} - y_2 y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_i} - y_2 y_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

De donde, se desprende dos casos:

**Caso 1:** Existe $i_0 \in \{2, ..., n-1\}$ tal que $\epsilon_{i_0} = 0$. Entonces

$$\tilde{Z}(0, y_2, ..., y_n) = \sum_{i=2, i \neq i_0}^{n-1} \left( \epsilon_i y_{i+1} - y_2 y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_i} - y_2 y_{i_0} \frac{\partial}{\partial y_{i_0}} - y_2 y_n \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

En este caso se ve que

$$\tilde{Z}(0, ..., 0, y_{i_0+1}, 0, ..., 0) = 0, \ \forall y_{i_0+1} \in \mathbb{C},$$

por lo tanto $Sing(\tilde{\mathcal{F}}_Z)$ es un conjunto infinito, se sigue que $p$ no es una S.A.A..

**Caso 2:** $\epsilon_2 = \cdots = \epsilon_{n-1} = 1$. En este caso tenemos:

$$\tilde{Z}(0, y_2, ..., y_n) = \sum_{i=2}^{n-1} (y_{i+1} - y_2 y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} - y_2 y_n \frac{\partial}{\partial y_n},$$

es fácil ver que $0 \in \mathbb{C}^n$ es la única singularidad de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$, además

$$D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

donde $\alpha_i = Z_2^i(1, 0, ..., 0)$, $2 \leq i \leq n$.

Busquemos la forma canónica de Jordan de $D\tilde{Z}(0)$.

El polinomio característico de $D\tilde{Z}(0)$ es $\Delta(T) = T^n$, $T \in \mathbb{C}$. Hallemos el polinomio minimal $m(T)$ de $D\tilde{Z}(0)$. Observe que

$$\tilde{M} = D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ P & R_{n-1}(1) \end{pmatrix},$$

donde $\Theta = [0 \cdots 0] \in \mathbb{C}^{1\times(n-1)}$ y $P^t = [\alpha_2 \cdots \alpha_n] \in \mathbb{C}^{1\times(n-1)}$ y $R_{n-1}(1) \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ es la matriz canónica nilpotente de orden $n-2$, es decir

$$R_{n-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos $R_{n-1}(k) = [R_{n-1}(1)]^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. Con estas notaciones es fácil ver que:

$$\tilde{M}^k = D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ R_{n-1}(k-1)P & R_{n-1}(k) \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Desde que $R_{n-1}(k) = 0$ si y sólo si $k \geq n-1$, tenemos $\tilde{M}^k \neq 0, \forall 1 \leq k \leq n-2$. Observe que:

$$\tilde{M}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde se desprende dos posibilidades:

**a)** Si $\alpha_n = 0$. Entonces $\tilde{M}^{n-1} = 0$, se sigue que $m(T) = T^{n-1}$. Luego $D\tilde{Z}(0)$ tiene la forma canónica de Jordan a la matriz

$$D\tilde{Z}(0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $D\tilde{Z}(0)$ es semejante a una matriz (7.1) y por el caso 1, llegamos a que $0 \in \mathbb{C}^n$ no es una S.A.A..

**b)** Si $\alpha_n \neq 0$. Veamos que existe un cambio lineal de coordenadas $\varphi$ tal que el pull-back $\varphi^*(\tilde{Z})$ satisface las condiciones del caso 2-(a).

En efecto, definimos las transformaciones lineales

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n),\ \psi = (\psi_1, ..., \psi_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

donde:

$\varphi_1(z) = \frac{1}{\alpha_n} z_n$, $\varphi_2(z) = z_1$ y $\varphi_i(z) = z_{i-1} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_n} z_n$ para $3 \leq i \leq n$

$\psi_1(w) = w_2$, $\psi_i(w) = \alpha_i w_1 + w_{i+1}$ para $2 \leq i \leq n-1$ y $\psi_n(w) = \alpha_n w_1$.

Es fácil ver que $\psi = \varphi^{-1}$. Ahora definimos $W = \varphi^*(\tilde{Z}) = \psi \circ \tilde{Z} \circ \varphi$. Si denotamos

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \frac{\partial}{\partial w_i} \text{ y } \tilde{Z} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Z}_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

entonces $W_1 = \tilde{Z}_2 \circ \varphi$, $W_i = \alpha_i \tilde{Z}_1 \circ \varphi + \tilde{Z}_{i+1} \circ \varphi$ para $2 \leq i \leq n-1$ y $W_n = \alpha_n \tilde{Z}_1 \circ \varphi$.

Desde que $DW(0) = \psi \circ \tilde{Z}(0) \circ \varphi$, es fácil ver que $DW(0) = R_n(1)$. Trabajando en la primera carta del tranformado estricto $\tilde{W}$

$$(w_1, w_2..., w_n) = (u_1, w_1 u_2, ...., w_1 u_n)$$

y denondo

$$W_i = \sum_{k \geq 1} W_k^i, \text{ donde } W_k^i \text{ son polinomios homogéneos de grado k,}$$

tenemos que:

$$D\tilde{W}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\beta_i = W_2^i(1, 0, ..., 0)$, $2 \leq i \leq n$. Observe que:

$$\beta_n = W_2^n(1, 0, ..., 0) = \frac{\partial^2 W_n}{\partial z_1^2}(0, ..., 0) = \alpha_n \frac{\partial^2 \tilde{Z}_1}{\partial z_1^2}(0, ..., 0) = 0.$$

Luego, estamos en el caso 1-(a), entonces $0 \in \mathbb{C}^n$ no es una S.A.A. de $W = \varphi^*(\tilde{Z})$. Por lo tanto $0 \in \mathbb{C}^n$ no es una S.A.A. de $Z$.

■

## 7.2. Primer Teorema de Reducción

**Teorema 7.2.1 (1er Teorema de Reducción)** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$, $(n \geq 3)$, una singularidad absolutamente aislada de $\mathcal{F}_Z$. Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_0^n$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$,*

*$E_1 = E$, entonces existe ena sucesión finita de bowing-up's*

$$\mathcal{M}_0^n \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}_2^n \xleftarrow{E_2} \mathcal{M}_3^n \xleftarrow{E_3} \ldots. \xleftarrow{E_{N-1}} \mathcal{M}_{N-1}^n \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}_N^n$$

*que satisface las siguientes propiedades:*

*(1) El centro de cada $E_i$ es un punto $p_{i-1} \in Sing(\mathcal{F}_{i-1})$, donde $\mathcal{F}_j$ denota el transformado estricto de la foliación $\mathcal{F}_{j-1}$ por $E_j$, donde $1 \leq i, j \leq N$.*

*(2) Si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$ entonces $q$ es una singularidad irreductible.*

**Prueba.** Sea $\nu = m_p(Z)$ ■

**a)** Si $\nu = 1$ entonces por el teorema 7.1.1, $p$ es una singularidad irreducible.

**b)** Si $\nu \geq 2$,

Desde que $p$ es una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z$, entonces tenemos:

$$\mu_p(Z) = \begin{cases} g(\nu+1) + \sum\limits_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}), \text{ si } p \text{ es dicrítico} \\ g(\nu) + \sum\limits_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}), \text{ si } p \text{ es no dicrítico,} \end{cases}$$

donde $g(x) = x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$. Observe que si $x \geq 2$ entonces $g(x) > 0$.

En cualquier caso (dicrítico o no), con un fácil cálculo se tiene:

$$m_p(Z) \geq 2 \Rightarrow \mu_q(\tilde{Z}) < \mu_p(Z) \quad \forall q \in E^{-1}(p) \tag{7.3}$$

y del teorema 6.2.1, se tiene que $m_p(Z) \leq \mu_p(Z)\ \forall p$.

Afirmamos que después de un número finito de blowing-up's $E_1 = E$, $E_2$,...,$E_N$ con centros en los puntos singulares, se obtiene solamente puntos singulares con multiplicidad álgebraica $\leq 1$.

En efecto, supongamos lo contrario, entonces en cada Blow-up existe por lo menos un punto en el divisor cuya multiplicidad álgebraica es $\geq 2$, es decir, dado $k \in \mathbb{N}$,

$\exists p_k \in E_k^{-1}(p_{k-1})$ tal que $m_p(Z^{(k)}) \geq 2$, en donde $Z^{(1)} = \tilde{Z}$ y $Z^{(k)} = \tilde{Z}^{k-1}$ (hipotesis auxiliar)

Luego de (7.3) y de la hipotesis auxiliar, se sigue que:

$$\mu_{p_1}(Z^{(1)}) < \mu_p(Z),\ \mu_{p_2}(Z^{(2)}) < \mu_{p_1}(Z^{(1)}), ....., \ \mu_{p_k}(Z^{(k)}) < \mu_{p_{k-1}}(Z^{(k-1)}),\ \forall k \in \mathbb{N}$$

la cual implica que:

$$\mu_p(Z) > \mu_{p_1}(Z^{(1)}) > ..... > \mu_{p_{k-1}}(Z^{(k-1)}) > \mu_{p_k}(Z^{(k)}) > ... \geq 0. \tag{7.4}$$

Desde que el conjunto $Sing(Z^{(k)})$ es discreto (por hipotesis), entonces los $p_k \in Sing(Z^{(k)})$ son singularidades aisladas, entonces la sucesión $\mu_{p_k}(Z^{(k)})$ es finito $\forall k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que (7.4) es una contradicción, esto prueba la afirmación.

Luego definimos $\Phi = E_N \circ E_{N-1} \circ ... \circ E_1$, se sigue que $\Phi : \mathcal{M}_N^n \longrightarrow \mathcal{M}_0^n$ es una función holomorfa propia, pues $E_1 = E$, $E_2$, ....,$E_N$ son propias y el pull-back $\Phi^*(\mathcal{F}_0 \mid_{\mathcal{M}^n - \{p\}})$ se extiende a una foliación singular $\mathcal{F}_N$ sobre $\mathcal{M}_N^n$ con conjunto singular de codimensión $n$.

Por lo tanto si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$, entonces $m_q(\mathcal{F}_N) = 1$ y como $p$ es una S.A.A. , entonces $q$ es una S.A.A.. Luego por el torema 7.1.1, $q$ es un punto singular irreducible.
■

## 7.3. Puntos Simples

En este capítulo veamos que sucede si hacemos nuevas explosiones en los puntos singulares irreducibles. Veremos que despues de un número finito de explosiones llegaremos a unos puntos singulares que persisten bajos nuevas explosiones, estos puntos son llamados puntos simples los cuales también son conocidos como formas finales.

Con un fácil cálulo se tiene el siguente resultado.

**Lema 7.3.1** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$ un punto singular irreducible de la foliación $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{M}^n$. Si $p$ es dicrítico entonces su transformado estricto $\tilde{\mathcal{F}}$ no tiene singularidades.*

Sea $p \in \mathcal{M}^n$ un punto singular irreducible de la foliación $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{M}^n$. Si $p$ es dicrítico, por el lema anterior su tranformado estricto $\tilde{\mathcal{F}}$ no tiene singularidades, por lo tanto, debemos considerar el caso en que $p$ es no dicrítico. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_s$ los autovalores de la parte lineal de $DZ(p)$, entonces el polinomio característico de la matriz $DZ(p)$ es dado por:

$$\Delta(t) = \prod_{k=1}^{s}(t-\lambda_k)^{r_k},$$

donde $\sum_{k=1}^{s} r_k = n$.

Tomando coordenadas locales $z = (z_1, ..., z_n)$ en una vecindad de $p \in \mathcal{M}^n$ tal que $p = (0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$, donde la matriz $DZ(p)$ tiene la forma canónica de Jordan:

$$DZ(p) = \begin{pmatrix} M_1 & \Theta & \cdots & \Theta \\ \Theta & M_2 & \cdots & \Theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Theta & \Theta & \cdots & M_s \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

donde $M_k \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$ es el bloque de Jordan correspondiente al autovalor $\lambda_k$, es decir:

$$M_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \epsilon_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \epsilon_2^{(k)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & \epsilon_{r_k-1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \lambda_k \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

donde $\epsilon_i^{(k)} \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq r_k - 1$ y $1 \leq k \leq s$.

Para que el transformado estricto $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ tenga singularidades aisladas es necesario y suficiente que $\epsilon_i^{(k)} = 1$, $\forall 1 \leq i \leq r_k - 1$ y $1 \leq k \leq s$. Más específicamente, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 7.3.1** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$ un punto singular, irreducibe y no dicrítico de la foliación $\mathcal{F}_Z$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

**(1)** *El conjunto $Sing(\mathcal{F}_{\tilde{Z}})$ es finito.*

**(2)** *La matriz $DZ(0)$ tiene la siguiente forma*

$$DZ(0) = \begin{pmatrix} M(\lambda_1) & \Theta & \cdots & \Theta \\ \Theta & M(\lambda_2) & \cdots & \Theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Theta & \Theta & \cdots & M(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

*donde $M(\lambda_k) = \lambda_k I + N_{r_k}$, $\forall k = 1, ..., s$. (Aquí $I \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$ es la matriz identidad y $N_{r_k} \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$ es la matriz Nilpotente canónica de orden $r_k$).*

**Prueba.**

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $Z = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k \geq 1} Z_k^i \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$ el campo que genera a la foliación $\mathcal{F}_Z$ en la carta $z = (z_1, ..., z_n)$ anterior. De (7.5) y (7.6) tenemos que:

$$\begin{cases} Z_1^i & = & \lambda_l z_i + \epsilon_{i-t_{l-1}}^{(l)} z_{i+1}, \; t_{l-1} + 1 \leq i \leq t_l - 1, \; 1 \leq l \leq s \\ Z_1^{t_l} & = & \lambda_l z_{t_l}, \; 1 \leq l \leq s, \end{cases} \tag{7.7}$$

donde $t_0 = 0$ y $t_l = \sum_{k=1}^{l} r_k$, $1 \leq l \leq s$.

Procediendo por contradicción, suponga que existe $k_0 \in \{1, ..., s\}$ y existe $i_0 \in \{1, ..., r_{k_0} - 1\}$ ta que $\epsilon_{i_0}^{(k_0)} = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$k_0 = 1$. Trabajando en la primera carta del blow-up

$$y_1 = z_1,\, y_i = \frac{z_i}{z_1} \ (2 \leq i \leq n)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(0, y_2, ..., y_n) &= \sum_{i=2}^{n}[Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^1(\hat{y})]\tfrac{\partial}{\partial y_i} \\
&= \sum_{i=2}^{r_1-1}[Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^1(\hat{y})]\tfrac{\partial}{\partial y_i} + [Z_1^{r_1}(\hat{y}) - y_{r_1} Z_1^1(\hat{y})]\tfrac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\
&\quad + \sum_{l=2}^{s}\left\{\sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1}[Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^1(\hat{y})]\tfrac{\partial}{\partial y_i} + [Z_1^{t_l}(\hat{y}) - y_{t_l} Z_1^1(\hat{y})]\tfrac{\partial}{\partial y_{t_l}}\right\},
\end{aligned}$$

donde $\hat{y} = (1, y_2, ..., y_n)$. De (7.7) se tiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(0, y_2, ..., y_n) &= \sum_{i=2}^{r_1-1}[\epsilon_i^{(1)} y_{i+1} - \epsilon_1^{(1)} y_2 y_i]\tfrac{\partial}{\partial y_i} - [\epsilon_1^{(1)} y_2 y_{r_1}]\tfrac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\
&\quad + \sum_{l=2}^{s}\{\sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1}[(\lambda_l - \lambda_1 - \epsilon_1^{(1)} y_2) y_i + \epsilon_{i-t_{l-1}}^{(l)} y_{i+1}]\tfrac{\partial}{\partial y_i} + \\
&\quad + [\lambda_l - \lambda_1 - \epsilon_1^{(1)} y_2] y_{t_l} \tfrac{\partial}{\partial y_{t_l}}\}.
\end{aligned}$$

De esto se sigue que $\tilde{Z}(0, ..., 0, y_{i_0+1}, 0, ..., 0) = 0$, por lo tanto $Sing(\mathcal{F}_{\tilde{Z}})$ es un conjunto infinito, lo cual es una contradicción. Concluimos que $\epsilon_i^{(1)} = 1$, $\forall 1 \leq i \leq r_1 - 1$ y por lo tanto $M_1 = M(\lambda_1) = \lambda_1 I + N_{r_1}$.

Para probar que $M_l = M(\lambda_l) = \lambda_l I + N_{r_l}$, $(l = 2, ..., s)$ se considera la carta

$$y_j = z_j,\, y_i = \frac{z_i}{z_j} \ (1 \leq i \leq n \text{ con } i \neq j),$$

donde $j = t_{l-1} + 1$ y se procede como antes.

(2) $\Rightarrow$ (1) Por hipotesis y de (7.7) tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{lcl} Z_1^i &=& \lambda_l z_i + z_{i+1},\, t_{l-1} + 1 \leq i \leq t_l - 1,\, 1 \leq l \leq s \\ Z_1^{t_l} &=& \lambda_l z_{t_l},\, 1 \leq l \leq s, \end{array}\right. \tag{7.8}$$

trabajando en la primera carta del blow-up

$$y_1 = z_1,\, y_i = \frac{z_i}{z_1} \ (2 \leq i \leq n)$$

y de (7.8) se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(0,y_2,...,y_n) &= \sum_{i=2}^{r_1-1}[y_{i+1}-y_2y_i]\tfrac{\partial}{\partial y_i} - y_2y_{r_1}\tfrac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\ &= +\sum_{l=2}^{s}\{\sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1}[(\lambda_l-\lambda_1-y_2)y_i+y_{i+1}]\tfrac{\partial}{\partial y_i} + \\ &\quad +[\lambda_l-\lambda_1-y_2]y_{t_l}\tfrac{\partial}{\partial y_{t_l}}\}.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Se sigue que $(0,...,0)$ es la única singularidad de $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ en esta carta.

Para $i_0 \in \{2,...,r_1-1,r_1\}$, consideremos la carta

$$y_{i_0} = z_{i_0},\ y_i = \frac{z_i}{z_{i_0}}\ (1 \le i \le n \text{ con } i \ne i_0),$$

denotando

$$\begin{aligned}y_0 &= (y_1,...,y_{i_0-1},0,y_{i_0+1},...,y_n)\\ \hat{y}_0 &= (y_1,...,y_{i_0-1},1,y_{i_0+1},...,y_n),\end{aligned}$$

desde que $p$ es una singularidad no dicrítica y de (7.9) tenemos:

- Si $i_0 \in \{2,...,r_1-1\}$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(y_0) &= \sum_{i=1,i\ne i_0}^{n}[Z_1^i(\hat{y})-y_iZ_1^{i_0}(\hat{y})]\tfrac{\partial}{\partial y_i}\\ &= \sum_{i=1,i\ne i_0-1}^{r_1-1}[y_{i+1}-y_iy_{i_0+1}]\tfrac{\partial}{\partial y_i} + [1-y_{i_0-1}y_{i_0+1}]\tfrac{\partial}{\partial y_{i_0-1}} - y_{i_0+1}y_{r_1}\tfrac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\ &\quad + \sum_{l=2}^{s}\left\{\sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1}[(\lambda_l-\lambda_1-y_{i_0+1})y_i+y_{i+1}]\tfrac{\partial}{\partial y_i} + [\lambda_l-\lambda_1-y_{i_0+1}]y_{t_l}\tfrac{\partial}{\partial y_{t_l}}\right\}.\end{aligned} \tag{7.10}$$

- Si $i_0 = r_1$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(y_0) &= \sum_{i=1,i\ne r_1}^{n}[Z_1^i(\hat{y})-y_iZ_1^{r_1}(\hat{y})]\tfrac{\partial}{\partial y_i}\\ &= \sum_{i=1,i\ne r_1}^{r_1-1} y_{i+1}\tfrac{\partial}{\partial y_i} + \tfrac{\partial}{\partial y_{r_1-1}} + \\ &\quad + \sum_{l=2}^{s}\left\{\sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1}[(\lambda_l-\lambda_1)y_i+y_{i+1}]\tfrac{\partial}{\partial y_i} + [\lambda_l-\lambda_1]y_{t_l}\tfrac{\partial}{\partial y_{t_l}}\right\}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

De (7.10) y (7.11), se tiene que $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ no tiene singularidades en estas cartas.

De manera similar, podemos probar que

$$Sing(\mathcal{F}_{\tilde{Z}}) = \{\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_s\} \tag{7.12}$$

donde $\tilde{p}_l$ es el cero de $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ la $j$-ésima carta del blow-up

$$y_j = z_j,\ y_i = \frac{z_i}{z_j}\ (1 \leq i \leq n \text{ con } i \neq j),$$

donde $1 \leq l \leq s$ y $j = t_{l-1} + 1$, $t_l = \sum\limits_{k=1}^{l} r_k$. ■

De la prueba anterior, de (7.10) y (7.11) y (7.12) se tiene:

**Corolario 7.3.2** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$ un punto singular, irreducibe y no dicrítico de la foliación $\mathcal{F}_Z$ tal que $Sing(\mathcal{F}_{\tilde{Z}}) = \{\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_s\}$ entonces los puntos $\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_s$ son singularidades no dicríticas de $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$.*

Ahora consideremos la parte lineal de $\tilde{Z}$ en cada punto singular no dicrítico $\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_s$. En la carta

$$y_1 = z_1,\ y_i = \frac{z_i}{z_1}\ (2 \leq i \leq n)$$

con un fácil cálculo se tiene que:

$$D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} M_1 & \Theta & \cdots & \Theta \\ P_1 & M(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \Theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{s-1} & \Theta & \cdots & M(\lambda_s - \lambda_1) \end{pmatrix},$$

donde $M_1 \in \mathbb{C}^{r_1 \times r_1}$, $M(\lambda_l - \lambda_1) \in \mathbb{C}^{r_l \times r_l}$ y $P_{l-1} \in \mathbb{C}^{r_l \times r_l}$ $(l = 2, ..., s)$ están definidas como:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{r_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P_{l-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{t_{l-1}+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{t_{l-1}+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{t_l} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y $M(\lambda_l - \lambda_1) = (\lambda_l - \lambda_1)I + N_{r_l}$. (Aquí $\alpha_i = Z_2^i(1, 0, ..., 0)$ para $2 \leq i \leq n$)

Nótese que tenemos tres posibilidades para el polinomio característico $\tilde{\Delta}(t)$ de la matriz $\tilde{M} = D\tilde{Z}(0)$.

**a)** Si $\lambda_1 = 0$ entonces

$$\tilde{\Delta}(t) = t^{r_1} \prod_{l=2}^{s} (t - \lambda_l)^{r_l}.$$

**b)** Si $\lambda_l \neq 2\lambda_1$, $\forall l = 2, ..., s$ entonces

$$\tilde{\Delta}(t) = t^{r_1 - 1}(t - \lambda_1) \prod_{l=2}^{s} (t - \lambda_l + \lambda_1)^{r_l}.$$

**c)** Si $\exists l_0 \in \{2, ..., s\}$ tal que $\lambda_{l_0} = 2\lambda_1$ entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $l_0 = 2$, luego

$$\tilde{\Delta}(t) = t^{r_1 - 1}(t - \lambda_1)^{r_2 + 1} \prod_{l=3}^{s} (t - \lambda_l + \lambda_1)^{r_l}.$$

**Notación 7.3.1**

$$[\lambda_1, ..., \lambda_s; r_1, ..., r_s] = \begin{pmatrix} M(\lambda_1) & \Theta & \cdots & \Theta \\ \Theta & M(\lambda_2) & \cdots & \Theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Theta & \Theta & \cdots & M(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

*donde $M(\lambda_k) = \lambda_k I + N_{r_k}$, $\forall k = 1, ..., s$. (Aquí $I \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$ es la matriz identidad y $N_{r_k} \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$ es la matriz Nilpotente canónica de orden $r_k$).*

**Proposición 7.3.3** *Sea $\tilde{p}_1 \in Sing(\mathcal{F}_Z^{(2)})$ tal que $Sing(\mathcal{F}_Z^{(2)})$ es un conjunto finito, entonces*

**(1)** *Si $\lambda_1 = 0$ entonces*

$$D\tilde{Z}(0) = [0, \lambda_2, ..., \lambda_s; r_1, r_2..., r_s].$$

**(2)** *Si $\lambda_l \neq 2\lambda_1$, $\forall l = 2, ..., s$ entonces*

$$D\tilde{Z}(0) = [0, \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1..., \lambda_s - \lambda_1; r_1 - 1, 1, r_2..., r_s].$$

**(3)** *Si $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 2\lambda_1$ entonces*

$$D\tilde{Z}(0) = [0, \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1..., \lambda_s - \lambda_1; r_1 - 1, r_2 + 1, r_3..., r_s].$$

**Prueba.** Por hipotesis, de la proposición anterior y de los casos a) , b) y c) el polinomio minimal $\tilde{m}(t)$ de $D\tilde{Z}(0)$ es $\tilde{m}(t) = \tilde{\Delta}(t)$, la prueba se sigue. ■

De las proposiciones 7.3.1 y 7.3.3 tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 7.3.4** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$ un punto singular, irreducibe y no dicrítico de la foliación $\mathcal{F}_Z$ tal que $p$ es una singularidad absolutamente aislada (S.A.A.) entonces no aparecen puntos dicríticos en el proceso de blowing-up´s.*

**Prueba.** Por la proposición 7.3.1, cualquier punto de $Sing(\mathcal{F}_Z)$ es un punto singular no dicrítico y por la proposición 7.3.3, la parte lineal de $\tilde{Z}$ tiene la misma forma a la parte lineal de $Z$. Luego la prueba se sigue por inducción. ■

## 7.4. Segundo Teorema de Reducción

Sea $\mathcal{M}^n$ una variedad cmpleja $n$-dimensional y sea $D \subset \mathcal{M}^n$ un divisor de $\mathcal{M}^n$ con cruzamientos normal (podemos imaginar que estamos en la etapa 0 del proceso de reducción de singularidades, siendo $D$ todo el divisor excepcional), sea $\mathcal{F}$ una foliación analítica singular por curvas de $\mathcal{M}^n$ tal que cada componente irreducible de $D$ es invariante para $\mathcal{F}$. Fijemos un punto $p \in Sing(\mathcal{F})$ y denotemos por

$$e = e(D, p)$$

al número de componentes irreducibles de $D$ que pasan por $p$.

Asumimos que $e \geq 1$ (esta condición siempre es satisfecha después de un blowing-up). Bajo estas condiciones, la foliación $\mathcal{F}$ es generada por el campo vectorial

$$Z = \sum_{i=1}^{e} Z_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=e+1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

donde $D = (\prod_{i=1}^{e} z_i = 0)$ localmente en $p$. Así tenemos la siguiente definición:

**Definición 7.4.1** *Cuando $e = 1$. Decimos qu $p$ es un punto simple de $\mathcal{F}$ si y sólo si ocurre una de las siguientes posibilidades:*

**(1)** *Si $Z_1(0) = 0$ entonces la curva $(z_2 = 0, ..., z_n = 0)$ es invariante por $\mathcal{F}$ (salvo una adecuada elección de coordenadas $(z_1, ..., z_n)$) y la parte lineal de $\mathcal{F}\mid_D$ es una matriz de rango $n-1$.*

**(2)** *Si $Z_1(0) = \lambda \neq 0$ entonces la multiplicidad de $\lambda$ es uno y si $\mu$ es otro autovalor e la parte lineal de $Z$, entonces $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}^+$.*

**Definición 7.4.2** *Cuando $e \geq 2$. Decimos que $p$ es una esquina simple de $\mathcal{F}$ si y sólo si (salvo un reordenamiento de $(z_1, ..., z_e)$) se tiene que $Z_1(0) = \lambda \neq 0$, $Z_2(0) = \mu$ y $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}^+$.*

**Definición 7.4.3** *Decimos que $p \in Sing(\mathcal{F})$ es una singularidad simple (o forma final)de $\mathcal{F}$ si es un punto simple o una esquina simple.*

En [5] los autores definen:

**Definición 7.4.4** *Sea $\mathcal{F}$ una foliación analítica por curvas sobre una variedad compleja $n$-dimensional $\mathcal{M}^n$. Decimos que $p \in Sing(\mathcal{F})$ es una **Singularidad Absolutamente Aislada no dicrítica** (**S.A.A.N.D.**) de $\mathcal{F}_Z$ si y sólo si severifican las siguientes condiciones:*

**(1)** *El punto $p$ es una singularidad aislada de $\mathcal{F}$.*

**(2)** *Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}^n_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\tilde{\mathcal{M}}^n_p = \mathcal{M}^n_1$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1$, $E^1 = E$. Si consideramos una sucesión arbitraria de blowing-up's*

$$\mathcal{M}^n_0 \xleftarrow{E^1} \mathcal{M}^n_1 \xleftarrow{E^2} \mathcal{M}^n_2 \xleftarrow{E^3} .... \xleftarrow{E^{N-1}} \mathcal{M}^n_{N-1} \xleftarrow{E^N} \mathcal{M}^n_N,$$

*donde el centro de cada $E^i$ es un punto $p_{i-1} \in Sing(F_{i-1})$, (aqui $\mathcal{F}_j$ denota el transformado estricto de $\mathcal{F}_{j-1}$ por $E^j$, $(1 \leq i,\ j \leq N)$ entonces $Sing(F_N)$ es un conjunto finito.*

**(3)** *Si $q \in Sing(F_N)$ entonces $q$ es una singularidad no dicrítica.*

**Observación 7.4.1** *Una singularidad absolutamente aislada no dicrítca implica que es una singularidad absolutamente aislada, es decir*

$$S.A.A.N.D.. \Rightarrow S.A.A..$$

El Recíproco es cierto bajo ciertas condiciones:

**Teorema 7.4.1** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$ un punto singular, irreducibe y no dicrítico de la foliación $\mathcal{F}$ tal que $p$ es una singularidad absolutamente aislada (S.A.A.) entonces $p$ es una singularidad absolutamente aislada no dicrítica (S.A.A.N.D.).*

**Prueba.** Se sigue del teorema 7.3.4. ∎

**Teorema 7.4.2** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad simple de $\mathcal{F}$, sea $E : \tilde{\mathcal{M}}^n \to \mathcal{M}^n$ un blowin-up de $\mathcal{M}^n$ con centro en $p$ y $\tilde{D} = E^{-1}(D \cup \{p\})$. Sea $\tilde{\mathcal{F}}$ el transformado estricto de $\mathcal{F}$ por $E$. Entonces:*

**a)** *Cada componente irreducible de $\tilde{D}$ es invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$.*

**b)** *Si $\tilde{p} \in Sing(\tilde{\mathcal{F}}) \cap E^{-1}(p)$ entonces $\tilde{p}$ es una singularidad simple de $\tilde{\mathcal{F}}$, más precisamente:*

- **b-1)** *Si $p$ es un punto simple, entonces existe exactamente un punto simple $\tilde{p} \in Sing(\tilde{\mathcal{F}}) \cap E^{-1}(p)$ mientras que los demas puntos de $Sing(\tilde{\mathcal{F}}) \cap E^{-1}(p)$ son esquinas simples.*

- **b-2)** *Si es una esquina simple, entonces todos los puntos de $Sing(\tilde{\mathcal{F}}) \cap E^{-1}(p)$ son esquinas simples.*

**Prueba.** Ver [5]. ■

**Corolario 7.4.3** *Las singularidades simples persisten bajo blowing-ups.*

Veamos un teorema de reducción de singularidades para una S.A.A.N.D..

**Teorema 7.4.4** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$, una singularidad absolutamente aislada no dicrítica (S.A.A.N.D.) de $\mathcal{F}$. Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}^n_0$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$, $E_1 = E$, entonces existe ena sucesión finita de bowing-up's*

$$\mathcal{M}^n_0 \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}^n_2 \xleftarrow{E_2} \mathcal{M}^n_3 \xleftarrow{E_3} \ldots. \xleftarrow{E_{N-1}} \mathcal{M}^n_{N-1} \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}^n_N$$

*que satisface las siguientes propiedades:*

**(1)** *El centro de cada $E_i$ es un punto $p_{i-1} \in Sing(\mathcal{F}_{i-1})$, donde $\mathcal{F}_j$ denota el transformado estricto de la foliación $\mathcal{F}_{j-1}$ por $E_j$, donde $1 \leq i, j \leq N$.*

**(2)** *Si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$ entonces $q$ es una singularidad simple.*

**Prueba.** Ver [5]. ■

Ahora veamos que en el teorema anterior se puede debilitar la hipotesis a una S.A.A. y tener el mismo resultado.

**Teorema 7.4.5 (2do Teorema de Reducción)** *Sea $p \in \mathcal{M}^n$, una singularidad absolutamente aislada (S.A.A.) de $\mathcal{F}$. Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_0^n$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$, $E_1 = E$, entonces existe ena sucesión finita de bowing-up's*

$$\mathcal{M}_0^n \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}_2^n \xleftarrow{E_2} \cdots \xleftarrow{E_M} \mathcal{M}_M^n$$

*de tal manera que si $q \in Sing(\mathcal{F}_M)$ entonces $q$ es una singularidad simple de $\mathcal{F}_M$.*

**Prueba.** En efecto, del Teorema Principal, existe una sucesón de *bowing-up's*

$$\mathcal{M}_0^n \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}_2^n \xleftarrow{E_2} \cdots \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}_N^n$$

con la propiedad de que si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$ entonces $q$ es una singularidad irreducible de $\mathcal{F}_N$. Luego tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$ es dicrítico.

En este caso hacemos una nueva explosión, por el lema 7.3.1 su transformado estricto no posee singularidades.

**Caso 2.** Si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$ es no dicrítico.

En este caso se tiene que $q$ es una singularidad absolutamente aislada, irreducible y no dicrítica, entonces por el teorema 7.4.2 se tiene que $q$ es una singularidad absolutamente no dicrítica. Luego aplicamos el teorema 7.4.4 y obtenemos una sucesión de blowing-ups

$$\mathcal{M}_0^n \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}_2^n \xleftarrow{E_2} \cdots \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}_N^n \xleftarrow{E_{N+1}} \cdots \xleftarrow{E_M} \mathcal{M}_M^n, \text{ donde } M \geq N.$$

De tal manera que si $q \in Sing(\mathcal{F}_M)$ entonces $q$ es una singularidad simple de $\mathcal{F}_M$.

■

# Capítulo 8

# Conclusiones y Recomendaciones

## Conclusiones

1. Si el campo $Z$ tiene parte lineal no nula (i.e. $DZ(p) \neq 0$), donde $p$ es una singularidad aislada, vemos que propiedades tienen los autovalores de $DZ(p)$ para así usar algún Teorema de Linealización (de Poincaré, de Siegel, etc. según sea el caso).

2. Si el campo $Z$ tiene parte lineal nula (i.e. $DZ(p) = 0$), donde $p$ es una singularidad aislada, usamos la herramienta conocida como Blow-up. Si $p$ es una singularidad absolutamente aislada (S.A.A..), tenemos que después de un número finito de blow-ups el campo $Z$ es transformado a un campo $Z^*$ tal que los puntos singulares de $Z^*$ tienen multipicidad álgebraica uno (de naturaleza más sencilla). Luego podríamos aplicar en cada punto singular (de manera local) de $Z^*$ los teoremas de linealización u otro comportamento geométrico.

## Recomendaciones

Una continuación de este trabajo, sería ver una extensión del Teorema de Camacho-Sad para foliaciónes por curvas en variedades de dimensión $n \geq 3$. Es decir, bajo que condiciones sobre la foliación existe una separatriz, pues en dimensión $n = 3$ existen campos que no admite una separatriz.

Se sabe que en dimensión $n = 2$, dos campos son equivalentes si sus holonomías lo son. Sería muy interesante ver si se sigue cumpliendo para campos definidos en variedades de dimensión $n \geq 3$.

# Bibliografía


[1] R. Benazic, A resolution theorem for absolutely isolated singularities of holomorphic vector fields, Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 28, N 1, (199), p. 211-231.

[2] R. Benazic, Singularidades de Campos Vectoriales Holomorfos en el Dominio de Poincaré, Pro Mathematica, Vol X, N° 19-20, (1996).

[3] C. Camacho, P. Sad, Pontos singulares de Equações Diferenciais Analíticas, 16° Colóquio Brasíleiro de Matemática, IMPA, (1987)

[4] C. Camacho, Holomorphic Dynamical Systems, Summer School on Dynamical Systems, ICTP, Triestre-Italia,(16 August - 9 September, (1988).

[5] C. Camacho, F. Cano, and P Sad, Absolutely isolated singularities of holomorphic vector fields, Invent. math. 98, (1989), p. 351-369.

[6] C. Camacho e A. Lins Neto, teoría geométrica das folheações, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1979).

[7] S. Ramirez , Topicos de teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Complejas, Lima-Perú, UNMSM, Tesis, (2001).

[8] E. Chirka, Complex Analytic Sets, MIA, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London (1989).

[9] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. Introducción al álgebra conmutativa. Editoral Reverté, 1973.

[10] Robert C. Gunning. Introduction to holomorphic fuctions of several variables, volumenes 1, 2, 3. Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[11] H. Cartan, Elementary theory of Analytic funcións of one or several Complex variables, Dover Publications, INC, New York, (1995).

[12] X. Gomez-Mont y L. Ortiz-Bobadilla, Sistemas Dinamicos Holomorfos en Superficies, Sociedad Matemática Mexicana, Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M, (1989).

[13] W. Fulton, Intersection Theory, 2. ed., Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1998).

[14] W. Fulton, álgebraic Curves An Introduction to álgebraic Geometry, New York, (1969).

[15] Omegar Calvo Andrade, Sistemas Lineales Complejos, Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato-México, (1999).

[16] Márcio G. Soares e Rogério S Mol, Índices de Campos Holomorfos e Aplicações, 23° Colóquio Brasíleiro de Matemática, IMPA, (2001).

[17] A. Lins Neto e B. Azevedo Scárdua, Folheações Algébraicas Complexas, 21° Colóquio Brasíleiro de Matemática, IMPA, (1997).

[18] B. V. Shabat, Introduction to Complex Analysis part. II, Functions of Several Cariables, Traslation of Mathematical Monographs. vol. 110, (1992).

[19] E. Lages Lima, Variedades Diferenciáveis, Monografías de Matemática, N°15, IMPA, Rio de Janeiro, (1973).

[20] E. Lages Lima, Introdução à topología Diferencial, Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, (2001).

[21] V.I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Secon Edition, Springer Verlag, (1988).

[22] J. Sotomayor, Lições de Equações Diferencias Ordinárias, Proyecto Euclides, Rio de Janeiro, (1979).

[23] John N. Mather, Stability of $C^{\infty}$ mappings. The divsion theorem, Annals Math. (2) 87, (1968), 89-104.

[24] John W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint. The University Press of Virginia, ISBN 0-8139-0181-2, 1978.