

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática



Tesis para optar el Título Profesional de:

Licenciado en Matemática

Titulada:

ANÁLISIS Y FILTRADO DE RUIDO EN SEÑALES
SÍSMICAS BASADO EN LA TRANSFORMADA
WAVELET Y DESCOMPOSICIÓN MODAL
EMPÍRICA

Presentada por:

Giancarlos Alberto Oviedo Valverde

Asesora:

Dra. Irla Mantilla Núñez

Lima - Perú
2015

Digitalizado por:

Consortio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse

*Dedico este trabajo
a mis padres, Juan Carlos y Aquilina
por su invaluable apoyo y comprensión.*

Agradecimientos

Agradezco el resultado de esta tesis a mi asesora, Dra. Irla Mantilla, del Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica (LABOSIN), FC - UNI quien en todo momento fue capaz de transmitirme la disciplina para lograr este trabajo con generosa disposición y apoyo. También un agradecimiento especial al jefe del área de Geodesia espacial del Instituto Geofísico del Perú (IGP), Phd. Edmundo Norabuena Ortiz por su colaboración científica y al Dr. Juan Rodriguez director del Instituto General de Investigación (IGI) de la Universidad Nacional de Ingeniería por el apoyo en el financiamiento de la ejecución del la Tesis, por ser la tesis ganadora del concurso Planes de Tesis 2014.

Resumen

Uno de los principales problemas en el procesamiento de señales es el elevado nivel de ruido presente en las señales obtenidas lo cual puede conducir a diagnósticos finales erróneos. En el presente trabajo se contribuye con el desarrollo de técnicas matemáticas para el filtrado de ruido en señales para la detección de eventos sísmicos.

Generalmente en el análisis de señales se utilizan herramientas matemáticas basadas en las series y transformadas de Fourier pero este enfoque presenta ciertas fallas cuando se pretende analizar señales complejas como suelen presentarse en la realidad.

Las técnicas de reducción de ruido que son materia de estudio en este trabajo son basadas en la transformada wavelet de tipo Daubechies y Symlet. También se utiliza para el filtrado de ruido el método de Descomposición Modal Empírica (EMD), para ambas técnicas se define un límite de umbralización el cual permite elegir los coeficientes admisibles para la reconstrucción final de la señal.

Así mismo se incluye la implementación de algoritmos de detección de eventos sísmicos conocidos como STA/LTA (short time average - long time average) que nos permite mostrar la importancia de obtener señales con bajo nivel de ruido ya que en caso contrario los resultados pueden tener un alto margen de error.

El objetivo final es la aplicación de las técnicas desarrolladas en el análisis de señales obtenidas desde la estación sísmica del IGP ubicada en Ancón, Lima-Perú.

Finalmente, en los resultados obtenidos se puede observar que en las señales con bajo nivel de ruido se detecta acertadamente los eventos sísmicos a diferencia de las señales con alto nivel ruido que conducen a falsas detecciones.

Abstract

One of the main problems in signal processing is the high level of noise in the signals obtained which can lead to erroneous final diagnoses. This paper contributes to the development of mathematical techniques for filtering noise signals for detection of seismic events.

Usually in signal analysis the basic mathematical tools used are the series and Fourier transforms but this approach has certain flaws when trying to analyze complex signals such as often occur in reality.

The noise reduction techniques that are the subject of study in this paper are based on Daubechies and Symlet wavelet transform. To the noise filtering also we used method Empirical Mode Decomposition (EMD) to both techniques a thresholding limit which lets you choose permissible ratios for the final reconstruction signal is defined.

Also the implementation of algorithms for detecting seismic events known as STA / LTA (short time average - long time average) is included. This allows us to show the importance of obtaining signals with low noise because otherwise the results may have a high margin of error.

The ultimate goal is to apply the techniques developed in the analysis of signals obtained from the seismic station of the IGP located in Ancón, Lima-Peru.

Finally, from the results obtained we can see that signals with low noise seismic events are correctly detected unlike the high level noise signals leading to false detections.

Índice general

Resumen	IV
Abstract	v
Introducción	1
1. Fundamento Teórico	4
1.1. Análisis de Fourier	4
1.1.1. Serie de Fourier	5
1.1.2. Transformada de Fourier	6
1.1.3. Serie de Fourier en tiempo discreto	6
1.1.4. Transformada de Fourier en tiempo discreto	7
1.1.5. Propiedades de la transformada de Fourier	7
1.1.6. Desventaja de la representación de Fourier	9
1.2. Transformada Wavelet	11
1.2.1. Transformada wavelet continua y discreta	12
1.2.2. Formulación Multiresolución del Sistema Wavelet	20
1.3. Transformada de Hilbert - Huang	33
1.3.1. Transformada de Hilbert, Señal Analítica y Frecuencia Instantánea	34
1.3.2. Descomposición Modal Empírica	40
2. Filtrado de Ruido con wavelets y EMD	46
2.1. Umbralización fuerte y umbralización suave	47
2.2. Reducción de Ruido en Base a la Transformada Wavelet	48
2.2.1. Umbral universal	51
2.2.2. Umbral dependiente del nivel	52
2.3. Reducción de Ruido Basado en EMD	52
3. Señales Sísmicas y Detección de Eventos Sísmicos	54
3.1. Ondas Sísmicas	54

3.2. Algoritmos de detección	58
3.2.1. Algoritmo STA/LTA	59
3.2.2. Algoritmo AIC	63
4. Resultados Numéricos: Estación Sísmica de Ancón	64
4.1. Determinación de parámetros del algoritmo EMDdenoise	64
4.2. Comparación entre los métodos de reducción de ruido: wave- lets vs. EMD	71
4.3. Aplicación a las señales sísmicas	73
4.3.1. Aplicación del Algoritmo AIC a señales sísmicas	73
4.3.2. Aplicación del Algoritmo STA/LTA a señales sísmicas .	75
5. Conclusiones y Trabajos Futuros	81
A. Algoritmos implementados en Matlab	83
A.1. Algoritmo de umbralización	83
A.2. Umbralización de los IMF	84
A.3. EMDdenoise para la primera señal de prueba - elección del parametro C.	85
A.4. AIC picker	85
A.5. Grafica de las IMF antes y después de la umbralización	86
A.6. Filtrado de ruido en base a wavelets	86
A.7. Algoritmo de detección de eventos sísmicos	87
Bibliografía	91

Índice de figuras

1.1. Señal estacionaria con frecuencias de 10, 25, 50 y 100 Hz y su espectro de Fourier.	10
1.2. Señal no estacionaria con frecuencias de 10, 25, 50 y 100 Hz y su espectro de Fourier.	11
1.3. Wavelet de Haar.	18
1.4. Wavelet de Daubechies.	18
1.5. Wavelet symlet.	19
1.6. Proyección de una señal de prueba sobre distintos subespacios \mathcal{V}_j	22
1.7. Función escala de Haar.	23
1.8. Aproximación de una señal Doppler sobre los subespacios \mathcal{V}_j usando la wavelet de Daubechies.	32
1.9. Proyección de la señal Doppler sobre los subespacios \mathcal{W}_j usando la wavelet de Daubechies.	33
1.10. Señal chirp	39
1.11. Espectro de Fourier de la señal chirp	39
1.12. Frecuencia instantánea de una señal chirp $s(t)$	40
1.13. Diagrama del algoritmo EMD.	42
1.14. Aplicación de la EMD a una suma de funciones senoidales.	43
1.15. Aplicación de la EMD a una señal transitoria.	45
1.16. Aplicación de la EEMD a una señal transitoria.	45
2.1. Umbralización fuerte y umbralización suave de una señal lineal.	47
2.2. Umbralización de la señal $h(t) = \sqrt{t} \sin(t^2)$	48
2.3. Señales de prueba con ruido.	49
2.4. Coeficientes wavelet.	50
2.5. Coeficientes wavelet umbralizados.	50
2.6. Resultado del filtrado de ruido mediante wavelets.	51
3.1. onda P.	55
3.2. onda S.	56
3.3. Mapa Sísmico del Perú.	57

3.4. Los diferentes tipos de ondas ubicados en el sismograma. . . .	58
3.5. Ventanas STA y LTA.	61
3.6. Algoritmo STA/LTA.	62
4.1. Obtención de datos de campo	65
4.2. Señal de prueba $s(t)$ sin ruido y con ruido agregado	66
4.3. Señal $s(t)$ con ruido (en color rojo) y sus cuatro primeras IMFs. 67	
4.4. Señal $s(t)$ después del proceso de reducción de ruido (en rojo) y las 4 primeras IMFs umbralizadas	68
4.5. Señal $s(t)$ antes y después del proceso de reducción de ruido en base a la EMD.	68
4.6. Reducción de ruido en base a la transformada wavelet.	70
4.7. Señales de prueba utilizadas para la reducción de ruido.	72
4.8. Reducción de ruido en base a la EMD aplicado a una señal sísmica.	74
4.9. Algoritmo AIC aplicado a una señal sísmica después del pro- ceso de reducción de ruido mediante EMD	74
4.10. Algoritmo AIC aplicado a una señal con elevado nivel de ruido. 75	
4.11. Ubicación de algunas de las estaciones sísmicas del IGP. Entre ellas, en la parte superior, la estación de Ancón (ANC).	76
4.12. Detección correcta de una señal con bajo nivel de ruido.	79
4.13. No se detecta el evento sísmico debido al alto nivel de ruido.	80
4.14. Falsa detección debido al alto nivel de ruido.	80

Índice de tablas

4.1. Resultados del proceso de reducción de ruido en base a EMD de la señal $s(t)$ para diferentes valores de c	66
4.2. Resultados del proceso de reducción de ruido en la señal $s(t)$	69
4.3. Resultados del proceso de reducción de ruido	72
4.4. Eventos detectados con umbral=7	77
4.5. Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=7	77
4.6. Eventos detectados con umbral=8	77
4.7. Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=8	77
4.8. Eventos detectados con umbral=9	78
4.9. Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=9	78
4.10. Eventos detectados con umbral=10	78
4.11. Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=10	78

Introducción

Cuando se registran señales que provienen de la naturaleza, por ejemplo, en el caso de las señales sísmicas, a través de sismómetros o acelerómetros, lo ideal es obtener una señal pura que nos brinde información clara de lo que deseamos medir, sin embargo en la realidad lo que se obtiene es una mezcla de la señal pura con una señal de ruido la cual degrada la exactitud y precisión del análisis de datos.

$$s_{\text{medida}}(t) = s_{\text{real}}(t) + \text{ruido}$$

Se entiende por ruido a una mezcla de señales aleatorias de diferente frecuencia a la de la señal principal de interés, pudiendo ser mayor o menor.

El ruido puede deberse a distintos factores, dependiendo de la señal que se desea analizar. En los registros sísmicos el ruido es debido principalmente a dos factores: ruido instrumental y ruido sísmico, este último es ocasionado por las vibraciones de la tierra originadas por diversas fuentes como: ruido generado por el hombre, ruido del viento, ruido del océano, vehículos pesados, etc.

Tener una señal limpia de ruido o con un bajo nivel de ruido permite un mejor y más rápido análisis y obtención de los parámetros deseados de la señal. En una señal sísmica con un alto nivel de ruido puede resultar difícil visualizar el arribo de la onda P y originar una lectura errónea de esta. En la actualidad se han implementado algoritmos que permiten la detección automática de la onda P (Allen R. 1978), algoritmos para calcular el azimut (Galiana-Merino et al., 2007), entre otros algoritmos que permiten una obtención automática de los parámetros de una señal sísmica, sin embargo para obtener resultados satisfactorios es necesario someter a la señal de estudio a un proceso de reducción de ruido antes de aplicar los algoritmos mencionados.

Los métodos clásicos usados para la reducción de ruido se basan en el uso de filtros lineales que a su vez se basan en el análisis de Fourier (Oppenheim A. Et al., 1999) sin embargo este tipo de análisis resulta poco apropiado

para señales con cambios bruscos y temporales ya que el análisis de Fourier toma como base las funciones seno y coseno de frecuencia constante y por su naturaleza resulta difícil caracterizar los picos o cambios bruscos de la señal. Como una alternativa a la transformada de Fourier surge la transformada corta de Fourier (Gabor D. 1946). El método de Gabor consiste en aplicar la transformada de Fourier no a la señal completa, sino a distintos intervalos temporales de la señal. Sin embargo este método presenta la desventaja que analiza la señal con la misma resolución tanto en las partes de alta frecuencia como en las partes de baja frecuencia.

En este contexto surge un nuevo método que busca superar las limitaciones de la transformada de Fourier y la transformada corta de Fourier. Ingrid Daubechies, en 1992, sistematiza y formaliza una serie de métodos que habían surgido en diversas ramas de la ingeniería, expone con rigor matemático la transformada Wavelet que, por medio del análisis multiresolución, permite estudiar señales con una resolución más fina en las partes de altas frecuencias y con menor resolución en las partes de bajas frecuencias. Es decir, brinda un análisis de la señal en el dominio tiempo-frecuencia o tiempo-escala de manera más amplia que los métodos anteriores.

En la tesis también abordamos una novedosa técnica de análisis de señales, un método propuesto por N. Huang y otros autores en el año 1998, el cual se basa en un algoritmo denominado Descomposición Modal Empírica (EMD) que descompone la señal en número finito y pequeño de funciones, cada una de estas con una frecuencia intrínseca y con significado físico. Lo novedoso de este método es que utiliza una base adaptativa, es decir, las funciones base en las cuales se descompone la señal no son definidas a priori a diferencia de los métodos anteriores, como por ejemplo en el caso de Fourier que utiliza las funciones seno y coseno para descomponer las señales. La EMD junto con la transformada de Hilbert forman una herramienta eficaz para el análisis tiempo-frecuencia denominada transformada de Hilbert – Huang.

El objetivo principal de la presente tesis es describir, analizar y comparar las aplicaciones de la transformada wavelet y la transformada de Hilbert-Huang poniendo especial énfasis en los métodos de reducción de ruido. Para lograr este objetivo se utilizan un toolbox de Matlab especial para el análisis wavelet, un toolbox para el análisis mediante la transformada de Hilbert-Huang que puede ser descargado libremente de internet además de pequeños programas propios.

En el capítulo 1 se expone el fundamento teórico que sirve como base para el desarrollo de la tesis, básicamente se divide en tres partes: transformada de Fourier, transformada wavelet y transformada de Hilbert - Huang. En el capítulo 2 se desarrollan los métodos de reducción de ruido que se utilizarán posteriormente basados en la transformada wavelet y descomposición

modal empírica, en el capítulo 3 se expone brevemente y de manera general conceptos fundamentales de señales sísmicas y algoritmos de detección. Finalmente en el capítulo 4 se presentan los resultados y gráficas obtenidas. Las conclusiones son expuestas en el capítulo 5.

Capítulo 1

Fundamento Teórico

En este primer capítulo se expone brevemente los métodos de análisis de señales que sirven de base para los algoritmos que explicaremos posteriormente. Para comenzar se expone el método clásico de análisis de señales basado en series y transformada de Fourier, luego se exponen dos métodos matemáticos de análisis de señales surgidos en los últimos años: la transformada wavelet y la transformada de Hilbert - Huang.

En el análisis de señales es común utilizar la palabra “señal” para referirse a una función. En el presente trabajo utilizaremos la palabra “señal” para referirnos a una función en $L^2(\mathbb{R})$.

1.1. Análisis de Fourier

Muchos fenómenos físicos pueden describirse mediante una señal en el dominio del tiempo, sin embargo la información que se puede obtener directamente de esta representación no siempre es la más apropiada debido a que la información que caracteriza la señal, en muchos casos, puede observarse más claramente en el dominio de la frecuencia. La herramienta matemática más usada para representar una señal en el dominio de la frecuencia es la representación de Fourier.

Hay cuatro representaciones de Fourier distintas, cada una aplicable a una clase diferente de señales. Estas cuatro clases se definen por medio de las propiedades de periodicidad de una señal y dependiendo si es en tiempo discreto o continuo.

Las señales periódicas tienen representación mediante las series de Fourier (FS) y las señales no periódicas tienen representaciones mediante la transformada de Fourier

1.1.1. Serie de Fourier

Se utiliza para analizar el contenido de frecuencias de señales periódicas cuyo dominio temporal es continuo (señales analógicas). Comencemos suponiendo que podemos expresar la función $x(t)$, de periodo T , como suma de exponenciales complejas, $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi k F_0 t}$ donde $F_0 = 1/T$. Para determinar la expresión de los coeficientes, digamos a_l , primero multiplicamos ambos miembros de la última igualdad por la exponencial compleja $e^{-j2\pi l F_0 t}$ y luego integramos ambos lados sobre un periodo:

$$\int_{t_0}^{T+t_0} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt = \int_{t_0}^{T+t_0} e^{-j2\pi l F_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi k F_0 t} \right) dt \quad (1.1.1)$$

Intercambiando el orden de la integral y de la sumatoria y separando el caso $k = l$ se obtiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{t_0}^{T+t_0} e^{j2\pi(k-l)F_0 t} dt = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} a_k \left[\frac{e^{j2\pi(k-l)F_0 t}}{j2\pi(k-l)F_0} \right]_{t_0}^{T+t_0} + a_l T$$

Para $k \neq l$ la expresión entre corchetes después de evaluarla en los límites superior e inferior resulta cero. Reemplazando este resultado en la ecuación (1.1.1) obtenemos la expresión para los coeficientes a_k :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi F_0)t} \quad (1.1.2)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi F_0)t} dt \quad (1.1.3)$$

Una vez obtenidos los coeficientes a_k las condiciones de Dirichlet que garantizan la convergencia de la serie de Fourier son las siguientes:

1. $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades (solo tipo salto) en un periodo.
2. $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
3. $x(t)$ debe ser absolutamente integrable en un periodo, es decir: $\int_T |x(t)| dt < \infty$

1.1.2. Transformada de Fourier

Se utiliza para analizar señales no periódicas cuyo dominio temporal es continuo. Una deducción rigurosa de la transformada de Fourier implica hacer primero un análisis en el espacio $L^1(\mathbb{R})$ y luego extender la teoría al espacio $L^2(\mathbb{R})$ aprovechando la propiedad de densidad del conjunto $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ como subespacio de $L^2(\mathbb{R})$. En $L^1(\mathbb{R})$ se define la transformada de Fourier de $x(t)$ como $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$ y la convergencia de esta integral esta garantizada por:

$$|X(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| |e^{-j2\pi ft}| df \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \|x\|_1 < \infty$$

Para definir la transformada de Fourier de una señal $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, que es un espacio más rico en propiedades, se toma una sucesión $(x_n(t)) \subset L^1 \cap L^2$ y se define la transformada de Fourier de $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ como en límite de la sucesión formada por las transformadas de Fourier de $x_n(t)$.

En el presente trabajo se utiliza la definición para la transformada de Fourier que incluye un factor de $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

1.1.3. Serie de Fourier en tiempo discreto

Se ha visto que una señal T -periódica en tiempo continuo es representada por una suma infinita de exponenciales complejas del tipo $x_k(n) = e^{jk\frac{2\pi}{T}n}$ (ecuación 1.1.2). Ahora, cuando hablamos de una señal periódica en tiempo discreto y con periodo T , la siguiente propiedad de las exponenciales discretas permite hacer una ligera pero importante variación en la sumatoria:

$$x_{k+T}[n] = e^{j(k+T)(\frac{2\pi}{T})n} = e^{jk(\frac{2\pi}{T})n} e^{j2\pi n} = e^{jk(\frac{2\pi}{T})n} = x_k[n]$$

Considerando la ecuación anterior se deduce que en el caso de señales discretas T -periódicas es conveniente asumir que poseen una representación en serie de Fourier de la siguiente forma:

$$x[n] = \sum_{k=\langle T \rangle} a_k e^{jk(2\pi/T)n} \quad (1.1.4)$$

Donde $k = \langle T \rangle$ significa que el índice k varía en un periodo. Ahora para calcular cada coeficiente debemos tener en cuenta que:

$$\sum_{n=0}^{T-1} e^{j2\pi kn/T} = \begin{cases} T & k \in \{0, \pm T, \pm 2T, \dots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Para obtener los coeficientes, digamos a_l , se multiplica ambos lados de la ecuación (1.1.4) por la exponencial $e^{-j2\pi ln/T}$ y sumando los productos desde $n = 0$ hasta $n = T - 1$:

$$\sum_{n=0}^{T-1} x[n] e^{-j2\pi ln/T} = \sum_{n=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} a_k e^{j2\pi(k-l)n/T}$$

Intercambiando el orden de las sumatorias y haciendo uso de la fórmula (1.1.5) en esta última ecuación, obtenemos los coeficientes deseados:

$$a_l = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} x[n] e^{-j2\pi ln/T} \quad l = 0, 1, \dots, T-1$$

1.1.4. Transformada de Fourier en tiempo discreto

Esta transformada se usa para analizar el contenido de frecuencias de una señal no periódica en tiempo discreto. En este caso deseamos expresar una señal discreta como suma de exponenciales discretas, $x_f[n] = e^{j2\pi fn}$. Es importante observar que $x_{f+1}[n] = e^{2\pi(f+1)n} = e^{2\pi fn} e^{2\pi n} = e^{2\pi fn} = x_f[n]$. Por este motivo la expansión de una señal discreta está limitada solo a frecuencias dentro del rango $[0, 1]$, es decir, tendremos una expresión de la siguiente forma:

$$x[n] = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi fn} df$$

La deducción del valor de los coeficientes es análogo a los métodos mostrados anteriormente y no serán detallados aquí. Estos coeficientes vienen dados por la siguiente expresión:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi fn}$$

1.1.5. Propiedades de la transformada de Fourier

Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ con $F = \mathcal{F}[f]$ la transformada de Fourier de f y $G = \mathcal{F}[g]$ la transformada de Fourier de la función g , se cumplen las siguientes propiedades:

Linealidad

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]$$

Dualidad

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \rightarrow \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi F(-\omega)$$

Cambio de escala

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Transformada de la conjugada

$$\mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-\omega)$$

Traslación en el tiempo

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Traslación en frecuencia

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$$

Igualdad de Parseval

$$\langle f, g \rangle = \langle F, G \rangle$$

Veamos la demostración de esta propiedad.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G(\omega)} f(t) e^{-j\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G(\omega)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G(\omega)} F(\omega) d\omega \\ &= \langle F, G \rangle \end{aligned}$$

Transformada de Fourier de la convolución Si se define la convolución según:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Entonces se cumple:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} g(t - \tau)dt \right) d\tau \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $t - \tau = u$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(u+\tau)} g(u)du \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega u} g(u)du \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} \hat{g}(\omega)d\tau \\ &= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

1.1.6. Desventaja de la representación de Fourier

En la parte superior de la figura (1.1) se muestra una señal estacionaria con frecuencias de 10, 25, 50 y 100 Hz dada por la siguiente ecuación:

$$s(t) = \cos(20\pi t) + \cos(50\pi t) + \cos(100\pi t) + \cos(200\pi t)$$

esto significa que el contenido de frecuencias de la señal no cambia a través del tiempo. Al analizar el contenido de frecuencias de esta señal mediante su representación de Fourier obtenemos el gráfico de la parte inferior de la figura (1.1) donde se aprecia claramente que los picos corresponden a los valores de las frecuencias 10, 25, 50 y 100 Hz.

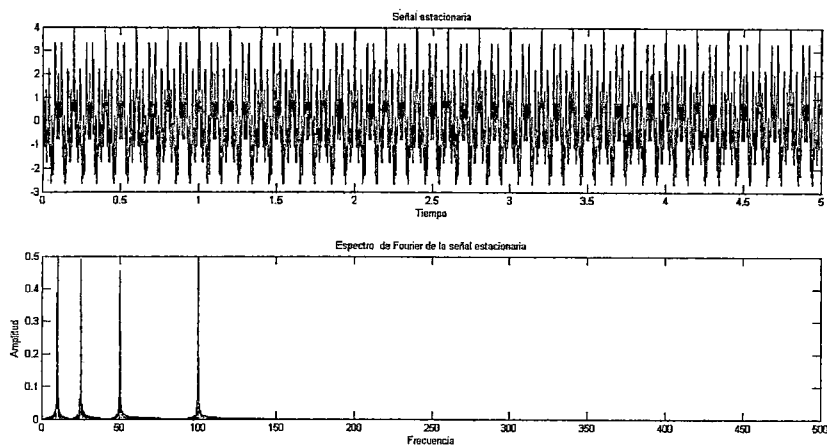


Figura 1.1: Señal estacionaria con frecuencias de 10, 25, 50 y 100 Hz y su espectro de Fourier.

Por otra parte, la representación de Fourier brinda información de las frecuencias de la señal, pero no indica el instante de tiempo en el que cada frecuencia actúa sobre la señal; esta información no es necesaria cuando la señal es estacionaria (ya que este caso el contenido de frecuencias es el mismo en todo el intervalo de tiempo considerado); sin embargo es de mucha importancia en señales no estacionarias. El concepto de estacionariedad es muy importante en el análisis de señales, las señales cuyo contenido de frecuencias no cambia en el tiempo se denominan señales estacionarias, por lo cual no se necesita saber en que instante de tiempo existen esas componentes de frecuencias, ya que todas las componentes de frecuencia están presentes en todo instante de tiempo como en el caso anterior.

Ahora analicemos otra señal con el mismo contenido de frecuencias que la señal anterior pero distribuidas de una manera diferente, con cada frecuencia actuando únicamente sobre un determinado intervalo temporal. En la parte superior de la figura (1.2) se observa una señal cuya única frecuencia durante el tiempo $[0, 1.25)$ es 10 Hz, luego, durante el intervalo de $[1.25, 2.50)$ su única frecuencia es 25 Hz, en el intervalo $[2.50, 3.75)$ la frecuencia es de 50 Hz y finalmente en el intervalo $[3.75, 5.00]$ la frecuencia es de 100 Hz.

Si se realiza un análisis de esta señal mediante su representación de Fourier se observa que se tiene cuatro picos correspondiente a las frecuencias de 10, 25, 50 y 100 Hz como se esperaba.

Si se comparan los espectros de las figuras (1.1) y (1.2) puede observarse que ambos muestran cuatro componentes espectrales para las mismas frecuencias. A parte del rizado que presenta el espectro de la señal no es-

tacionaria y la diferencia de amplitud, ambos espectro son practicamente idénticos, aunque las señales en el dominio del tiempo son completamente diferentes. Ambas señales contienen las mismas componentes de frecuencia pero la señal de la figura (1.1) contiene estas frecuencias para todo el tiempo y la de la figura (1.2) presenta estas frecuencias en diferentes intervalos de tiempo. Esto se debe a que la representación de Fourier solo proporciona el contenido espectral de la señal y no la localización temporal de las componentes espectrales. Esta es la razón por la cual la transformada y la serie de Fourier no es una técnica adecuada para señales no estacionarias cuando se desea obtener una representación tiempo-frecuencia. Esto último se logra a través de la transformada wavelet y la transformada de Hilbert-Huang que se describen en las siguientes secciones.

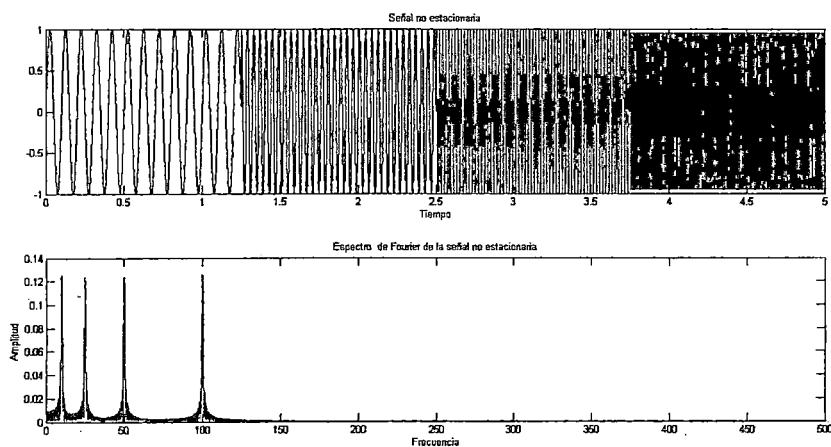


Figura 1.2: Señal no estacionaria con frecuencias de 10, 25, 50 y 100 Hz y su espectro de Fourier.

1.2. Transformada Wavelet

En las siguientes secciones se desarrolla brevemente la teoría de wavelets u ondículas. Primero se aborda la transformada wavelet continua y sus principales propiedades, luego se aborda el caso discreto y finalmente se desarrolla en análisis multiresolución en base a wavelets.

1.2.1. Transformada wavelet continua y discreta

Definición 1.1 (Transformada Wavelet Continua). Sean $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$. La transformada wavelet continua de $f \in L^2(\mathbb{R})$ esta dada por:

$$(W_\psi f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1.2.1)$$

La función ψ es llamada wavelet madre y las funciones $\psi_{a,b}$ definidas de la siguiente manera:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (1.2.2)$$

son las funciones wavelet obtenidas a partir de traslaciones y dilataciones de la wavelet madre, por medio de estas podemos expresar la ecuación (1.2.1) como un producto interno:

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad (1.2.3)$$

Estos son los llamados coeficientes wavelet continuos de f que a diferencia de los coeficientes de Fourier, son doblemente indexados.

La transformada wavelet continua cumple las siguientes propiedades:

Linealidad Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y $c, d \in \mathbb{R}$. Se cumple:

$$W_\psi[cf + dg](a, b) = cW_\psi[f](a, b) + dW_\psi[g](a, b)$$

Lo cual se deduce fácilmente de la linealidad de la integral.

Traslación Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$. Se cumple:

$$W_\psi[f(t-c)](a, b) = W_\psi[f](a, b-c)$$

Sea $f_c(t) = f(t-c)$ entonces:

$$\begin{aligned} (W_\psi f_c)(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-c) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \psi \left(\frac{\tau - (b-c)}{a} \right) d\tau \\ &= (W_\psi f)(a, b-c) \end{aligned}$$

Escalamiento Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $c > 0$. Se cumple:

$$W_\psi[f(ct)](a, b) = \frac{1}{\sqrt{c}} W_\psi[f](ca, cb)$$

Veamos la demostración para $c > 0$, cuando $c < 0$ la demostración es la misma. Sea $g(t) = f(ct)$ entonces:

$$\begin{aligned} (W_\psi g)(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ct) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{1}{c\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \psi\left(\frac{\tau/c-b}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{c\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \psi\left(\frac{\tau-bc}{ac}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} (W_\psi f)(ac, bc) \end{aligned}$$

La Definición (1.1) es coherente si simplemente pedimos que $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, sin embargo, para obtener fórmulas de reconstrucción (análogas a la transformada inversa de Fourier), como se verá más adelante, se necesita que se verifique la siguiente condición:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1.2.4)$$

Donde $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$. La ecuación (1.2.4) es conocida como "condición de admisibilidad".

Teorema 1.2.1. *sea $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ cumpliendo la condición de admisibilidad (1.2.4) y f también en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces se cumplen las siguientes relaciones:*

Fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2} \quad (1.2.5)$$

Isometría

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2} \quad (1.2.6)$$

Demostración. Veamos primero la demostración de la fórmula de inversión y luego demostraremos la fórmula de isometría.

Fórmula de inversión Sean:

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wf(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dbda}{a^2} \\ \overline{\psi}_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(-\frac{t}{a}\right) \\ \psi_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \end{aligned}$$

Con estas notaciones establecidas es sencillo verificar que la transformada wavelet se puede expresar mediante una convolución de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (f * \overline{\psi}_a)(b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \overline{\psi}_a(b - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{\tau - b}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \psi\left(\frac{\tau - b}{a}\right) d\tau \\ &= (W_\psi f)(a, b) \end{aligned}$$

Luego, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} Wf(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * \overline{\psi}_a)(b) \psi_a(t - b) db \\ &= [(f * \overline{\psi}_a) * \psi_a](t) \end{aligned}$$

Si reemplazamos este último resultado en la definición de $B(t)$ obtenemos:

$$B(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} f * \overline{\psi}_a * \psi_a(t) \frac{da}{a^2} \quad (1.2.7)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad teniendo en cuenta que la transformada de Fourier puede ingresar dentro de la integral obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{B}(\omega) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f * \overline{\psi}_a * \psi_a(t)\}(\omega) \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{\overline{\psi}_a\} \mathcal{F}\{\psi_a\}(\omega) \frac{da}{a^2} \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier (cambio de escala y transformada de la conjugada) se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{B}(\omega) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \sqrt{a} \hat{\psi}(a\omega) \sqrt{a} \hat{\psi}(a\omega) \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{\hat{f}(\omega)}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{a}\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $\zeta = a\omega$ y recordando la definición de C_ψ en (1.2.4) tenemos:

$$\hat{B}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\zeta)|^2}{\zeta} d\zeta = \hat{f}(\omega)$$

Fórmula de Isometría Demostraremos la siguiente fórmula un poco más general:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{da db}{a^2}$$

Antes de demostrar dicha igualdad, caracterizaremos los multiplicandos de la integral, para ello notemos lo siguiente:

$$\widehat{\psi_{a,b}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Haciendo el cambio de variables $z = \frac{t-b}{a}$, entonces se tiene que $dz = \frac{dt}{a}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi_{a,b}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \int_{\mathbb{R}} e^{-is(az+b)} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi(z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isaz} e^{-isb} \psi(z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-isb} \int_{\mathbb{R}} e^{-isaz} \psi(z) dz \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-isb} \hat{\psi}(as)\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

Por otra parte, de la identidad de Parseval se obtiene:

$$W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\widehat{\psi_{a,b}}(x)} dx\tag{1.2.9}$$

Reemplazando la ecuación (1.2.8) en la ecuación (1.2.9) se tiene que

$$\begin{aligned}
 W_\psi f(a, b) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-ixb} \overline{\hat{\psi}(ax)} dx \\
 &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{ixb} \overline{\hat{\psi}(ax)} dx \\
 &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \mathcal{F} \left\{ \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \quad (1.2.10)
 \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos

$$W_\psi g(a, b) = \frac{a}{\sqrt{|a|}} \mathcal{F} \left\{ \hat{g}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \quad (1.2.11)$$

Con estas consideraciones demostraremos la relación deseada, para lo cual denotamos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dadb}{a^2}$$

Usando las relaciones (1.2.10) y (1.2.11) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{|a|} \mathcal{F} \left\{ \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \overline{\mathcal{F} \left\{ \hat{g}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right\} (-b)} \frac{dadb}{a^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \overline{\mathcal{F} \left\{ \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right\} (b)} \mathcal{F} \left\{ \hat{g}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right\} (b) db da
 \end{aligned}$$

Aplicando la identidad de Parseval obtenemos:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \overline{\hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)}} \hat{g}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} dx da \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \hat{g}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} dx da \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) |\hat{\psi}(ax)|^2 dx \frac{da}{|a|}
 \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de las integrales (Teorema de Fubini):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{|a|} da \right) dx$$

Haciendo el cambio de variables $u = ax$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(u)|^2}{|u|} du \right) dx \\ &= C_{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx \\ &= C_{\psi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la identidad de Parseval se obtiene la relación deseada:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \frac{1}{C_{\psi}} I$$

□

La ecuación (1.2.5) expresa la síntesis de la señal como la superposición integral de las funciones elementales $\psi_{a,b}(t)$.

En la transformada wavelet continua se considera la familia de funciones $\psi_{a,b}(t)$ definidas por la ecuación (1.2.2) con $\psi(t)$ cumpliendo la ecuación de admisibilidad (1.2.4) y los parámetros a, b variando en \mathbb{R} . En la transformada wavelet discreta, como se verá a continuación, se discretizan estos parámetros mediante: $a = a_0^j$, donde $j \in \mathbb{Z}$ y $a_0 \neq 1$ es fijo y $b = kb_0 a_0^j$, $k \in \mathbb{Z}$. En la práctica se consideran $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$. Discretizando de esta forma los parámetros de escala y tiempo, las wavelets quedan de la siguiente forma:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \quad (1.2.12)$$

quedando entonces definida la transformada wavelet discreta de la siguiente manera:

Definición 1.2 (Transformada Wavelet Discreta). Sean $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ una wavelet madre y $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces la transformada wavelet discreta de $f(t)$ está dada por:

$$(DW_{\psi}f)(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) dt \quad (1.2.13)$$

Con j y k Para el caso discreto se tiene la siguiente fórmula de reconstrucción:

$$f(t) = \sum_j \sum_k a_{j,k} 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \quad (1.2.14)$$

Donde $a_{j,k}$ representa los coeficientes de la transformada wavelet discreta.

La primera wavelet madre conocida, cuyo gráfico se muestra en la Figura (1.3), fue propuesta en 1909 y definida de la siguiente forma:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & t \notin [0; 1) \end{cases} \quad (1.2.15)$$

Posteriormente surgieron otras wavelets madre como las que se muestran en las figuras (1.4) y (1.5) las cuales son más usadas debido a sus propiedades de suavidad y simetría. Estas wavelets no se pueden expresar mediante una fórmula explícita, ya que son obtenidas mediante algoritmos y técnicas propias de la teoría de filtros.

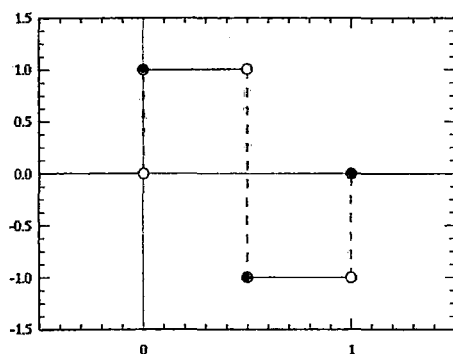


Figura 1.3: Wavelet de Haar.

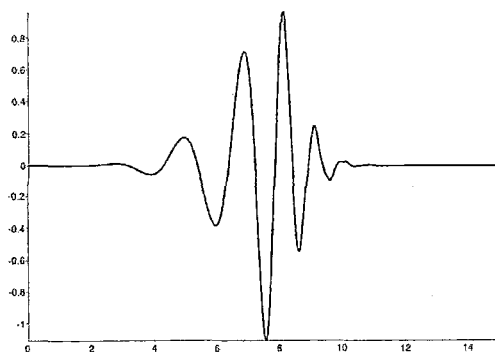


Figura 1.4: Wavelet de Daubechies.

Evidentemente no cualquier familia $\{\psi_{j,k}\}$ generada a partir de las traslaciones y dilataciones de una función ψ tienen la propiedad de generar cualquier función de $L^2(\mathbb{R})$. Veamos ahora bajo que condiciones una señal discre-

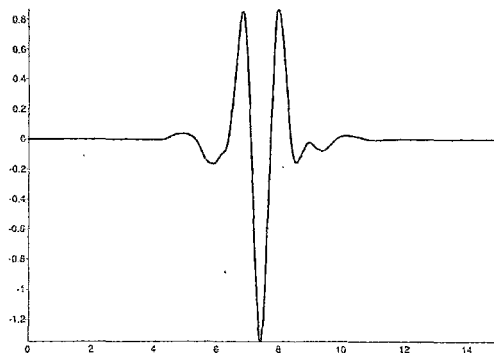


Figura 1.5: Wavelet symlet.

ta $f(t)$ puede ser reconstruida usando las wavelets discretas $\psi(j, k)$. Para ello necesitaremos introducir la noción de Marco según la siguiente definición.

Definición 1.3 (Marco Wavelet). Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. El conjunto de funciones $\{\psi_{m,n}/m, n \in \mathbb{Z}\}$ es llamado un Marco Wavelet para $L^2(\mathbb{R})$ si existen dos constantes positivas A, B tal que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{m,n}, f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (1.2.16)$$

Las constantes A, B son llamadas cotas del marco. Si $A = B$ entonces el marco se denomina **ajustado**, si además $A = B = 1$ se dice que es un **marco de Parseval**.

El concepto de marco es muy importante ya que estos permiten establecer una relación única entre la señal f y los coeficientes $\langle \psi_{m,n}, f \rangle$.

A todo marco $\{\psi_{m,n} | m, n \in \mathbb{Z}\}$ se le puede asociar un único operador $T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{Z}^2)$ definido de la siguiente forma:

$$(Tf)_{m,n} := \langle \psi_{m,n}, f \rangle \quad (1.2.17)$$

En [23] se demuestra que la propiedad (1.2.16) que define un marco es necesaria y suficiente para garantizar que T es invertible en su imagen, con inversa acotada, es decir, toda función en $L^2(\mathbb{R})$ queda completamente determinada por sus productos internos con los elementos del marco $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$.

La propiedad de Marco es importante ya que nos dice que existe una relación única entre una señal y sus coeficientes, pero no responde la cuestión de cómo reconstruir dicha señal a partir de sus coeficientes. Un caso particular de Marco es una base ortogonal. En la siguiente subsección se ve como puede obtenerse una base ortonormal de wavelets a partir de ciertas condiciones.

1.2.2. Formulación Multiresolución del Sistema Wavelet

El análisis multiresolución permite obtener funciones wavelet $\psi(t)$ las cuales, a partir de traslaciones y dilataciones, generan una familia $\{\psi_{j,k} | j, k \in \mathbb{Z}\}$ con la propiedad de ser una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Definición 1.4 (Análisis Multiresolución). *Una sucesión \mathcal{V}_j de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ es una Aproximación Multiresolución o Análisis Multiresolución si las siguientes propiedades son satisfechas:*

- Para toda $j, k \in \mathbb{Z}$: $f(t) \in \mathcal{V}_0 \leftrightarrow f(t - k) \in \mathcal{V}_0$.
- Para toda $j \in \mathbb{Z}$: $\mathcal{V}_{j+1} \subset \mathcal{V}_j$.
- Para toda $j \in \mathbb{Z}$: $f(t) \in \mathcal{V}_{j+1} \leftrightarrow f(2t) \in \mathcal{V}_j$.
- $\bigcap \mathcal{V}_j = \{0\}$ y $\overline{\bigcup \mathcal{V}_j} = L^2(\mathbb{R})$.
- Existe $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, conocida como función de escala, tal que el conjunto $\{\varphi_n(t) = \varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de \mathcal{V}_0 .

A partir de la definición es sencillo verificar que el conjunto $\{\varphi_{j,k} = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k)\}$ es una base ortonormal para el subespacio \mathcal{V}_j .

Si se denota por $P_{\mathcal{V}_j} f$ a la proyección de una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ sobre el subespacio \mathcal{V}_j es fácil ver de la definición de análisis multiresolución que se cumple lo siguiente:

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_{\mathcal{V}_j} f(t) = f(t)$$

Cada subespacio \mathcal{V}_j aproxima la señal estudiada con una resolución dada por el parametro de escala j ; las bajas frecuencias de la señal se pueden observar en los subespacios de baja resolución, es decir, para valores grandes de j y a medida que se requiere obtener información de las frecuencias más altas se debe disminuir el índice del subespacio (Figura 1.7). Podemos tomar como ejemplo la función de escala de Haar definida según:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (1.2.18)$$

Se comprueba que $\varphi(t)$ así definida es una función de escala de una representación multiresolución, en este caso cada subespacio \mathcal{V}_j viene dado por:

$$\mathcal{V}_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / f([2^j k, 2^j(k+1)]) = \text{constante}; k \in \mathbb{Z}\} \quad (1.2.19)$$

Es decir, la proyección de una función f en el subespacio de escala \mathcal{V}_j está dada por una función que es constante en los intervalos $[2^j k, 2^j(k+1)]$. Esta es la representación multirresolución de Haar. En la figura (1.6) se muestra una función de prueba y su análisis multirresolución el cual consiste en las proyecciones sobre los subespacios \mathcal{V}_j usando la función de escala de Haar para $-6 \leq j \leq 0$. Como se puede observar a medida que disminuye el índice j la aproximación es más cercana a la función de prueba original y muestra más detalles de la misma.

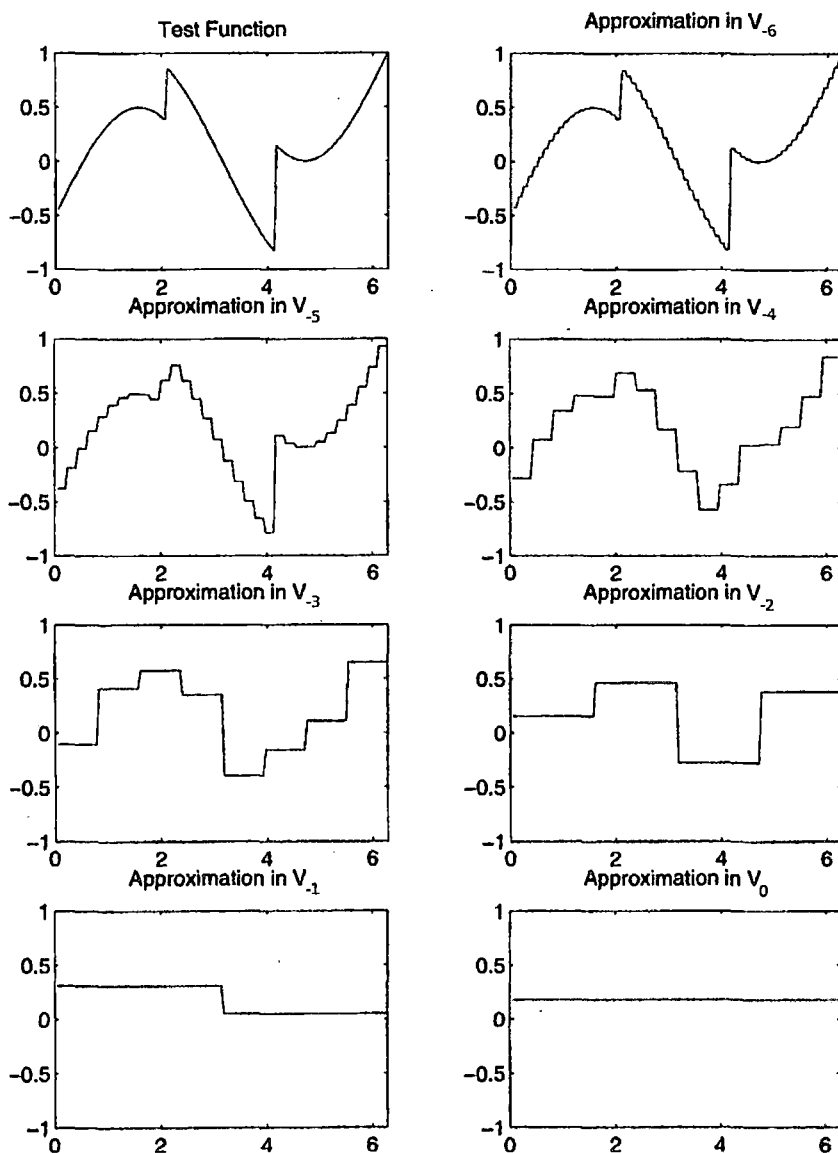


Figura 1.6: Proyección de una señal de prueba sobre distintos subespacios \mathcal{V}_j .

Veamos ahora como se obtiene una base ortormal wavelet $\{\psi_{j,k}|j, k \in \mathbb{Z}\}$ a partir del análisis multiresolución $\{\mathcal{V}_j|j \in \mathbb{Z}\}$.

Debido a que $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1}$, entonces $\varphi(t)$ puede expresarse como combinación lineal de traslaciones enteras de la función de escala $\varphi(2t)$ como se representa

en la siguiente ecuación:

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \sqrt{2} \varphi(2t - n) \quad (1.2.20)$$

Donde h_n es una secuencia de números reales o complejos llamados “coeficientes de la función de escala”. Por ejemplo si consideramos que la función de escala de Haar es una simple función rectangular de ancho y altura igual a la unidad y con soporte sobre el intervalo $[0, 1]$, es obvio que esta puede ser generada a partir de su versión escalada, $\varphi(2t)$, como se muestra en la ecuación (1.2.21) y en la Figura (1.7)

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1) \quad (1.2.21)$$

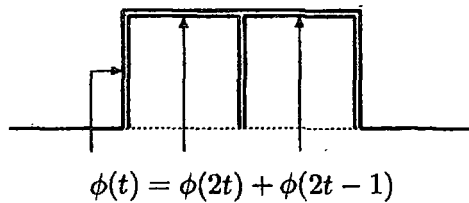


Figura 1.7: Función escala de Haar.

Por lo tanto, en el caso de la función de escala de Haar, la ecuación (1.2.20) se satisface para los coeficientes $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Las características importantes de la señal son mejor descritas considerando solo los detalles que se van ganando al pasar a una escala superior (menor índice j). Las funciones que generan estos detalles adicionales al pasar a la siguiente escala son las wavelets. Denotamos el complemento ortogonal de \mathcal{V}_j en \mathcal{V}_{j-1} como \mathcal{W}_j :

$$\mathcal{V}_{j-1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j \quad (1.2.22)$$

teniendo en cuenta esta última ecuación y la definición de análisis multiresolución se tiene lo siguiente:

$$L^2 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_{-1} \oplus \mathcal{W}_{-2} \oplus \dots \quad (1.2.23)$$

Lo que nos dice que cualquier función (señal) en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ puede ser aproximada como la suma de una función de aproximación en el subespacio \mathcal{V}_0 y varias señales de detalle, cada una de estas en los subespacios wavelet $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_{-1}, \mathcal{W}_{-2}$, etc.

Regresando a la ecuación (1.2.20), si aplicamos la transformada de Fourier a ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h[n] e^{-in\xi/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

La ecuación anterior puede ser abreviada si la escribimos de la siguiente forma:

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (1.2.24)$$

Donde

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h[n] e^{-in\xi} \quad (1.2.25)$$

Proposición 1.1. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces $\{g(\cdot - n), n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal si y solo si $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ para todo $\mu \in \mathbb{R}$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(x - n) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x - n)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-in\xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{in\xi} d\xi \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{in\xi} d\xi \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 e^{in\mu} d\mu \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 \right) e^{in\mu} d\mu \quad (1.2.26) \end{aligned}$$

Por otro lado, si hacemos el cálculo de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la función δ definida según:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Obtenemos lo siguiente:

$$(\mathcal{F}\delta)(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\mu n} = 1$$

y la fórmula de inversión se puede expresar como:

$$\delta[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{F}\delta)(\mu) e^{j\mu n} d\mu$$

Es decir:

$$\delta[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot e^{j\mu n} d\mu \quad (1.2.27)$$

Ahora, si se asume la ortonormalidad se tiene que la expresión (1.2.26) es igual a $\delta(n)$. Aprovechando que (1.2.26) es una expansión de Fourier se tiene la igualdad buscada (por la unicidad de la transformada de Fourier).

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (1.2.28)$$

Recíprocamente, si se cumple la igualdad anterior, de (1.2.26) y (1.2.27) se obtiene la ortonormalidad. \square

Sea $\psi \in \mathcal{V}_{-1}$, entonces se tiene que:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\psi[n] \varphi(2t - n)$$

Aplicando la transformada de Fourier en ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\psi[n] e^{-jn\xi/2} \widehat{\varphi}(\xi/2) \quad (1.2.29)$$

Ahora se define

$$m_\psi(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\psi[n] e^{-jn\xi} \quad (1.2.30)$$

para poder expresar la ecuación anterior como:

$$m_\psi(\xi) = m_\psi(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2) \quad (1.2.31)$$

Proposición 1.2. *El conjunto $\{\psi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{V}_{-1}$ es ortonormal sii:*

$$|m_\psi(\omega/2)|^2 + |m_\psi(\omega/2 + \pi)|^2 = 1 \quad (1.2.32)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(\omega + 2k\pi) \right|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_{\psi}(\omega/2 + k\pi)|^2 |\widehat{\varphi}(\omega/2 + k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_{\psi}(\omega/2 + 2k\pi)|^2 |\widehat{\varphi}(\omega/2 + 2k\pi)|^2 \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_{\psi}(\omega/2 + \pi + 2k\pi)|^2 |\widehat{\varphi}(\omega/2 + \pi + 2k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_{\psi}(\omega/2)|^2 |\widehat{\varphi}(\omega/2 + 2k\pi)|^2 \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_{\psi}(\omega/2 + \pi)|^2 |\widehat{\varphi}(\omega/2 + \pi + 2k\pi)|^2 \\
&= |m_{\psi}(\omega/2)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\omega/2 + 2k\pi)|^2 \\
&\quad + |m_{\psi}(\omega/2 + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\omega/2 + \pi + 2k\pi)|^2 \\
&= |m_{\psi}(\omega/2)|^2 \frac{1}{2\pi} + |m_{\psi}(\omega/2 + \pi)|^2 \frac{1}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} [|m_{\psi}(\omega/2)|^2 + |m_{\psi}(\omega/2 + \pi)|^2]
\end{aligned}$$

De la proposición 1.1 se deduce inmediatamente el enunciado. \square

Proposición 1.3. *El espacio generado por $\{\psi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es ortogonal al subespacio \mathcal{V}_0 sii:*

$$m_{\psi}(\omega)m_0^*(\omega) + m_{\psi}(\omega + \pi)m_0^*(\omega + \pi) = 0 \quad (1.2.33)$$

Demostración. La ortogonalidad de $\{\psi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con \mathcal{V}_0 equivale a:

$$\langle \psi_{0,n}, \varphi_{0,m} \rangle = 0 \quad \text{Para todo } n, m \in \mathbb{Z}$$

Por la identidad de Parseval tenemos que lo anterior equivale a:

$$\langle \widehat{\psi}_{0,n}, \widehat{\varphi}_{0,m} \rangle = 0 \quad \text{Para todo } n, m \in \mathbb{Z}$$

Es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi} e^{-jn\omega} \widehat{\varphi}^*(\omega) e^{jm\omega} = 0 \quad (1.2.34)$$

Lo que equivale a mostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\omega) \widehat{\varphi}^*(\omega) e^{-jn\omega} d\omega = 0 \quad \text{Para todo } n \in \mathbb{Z} \quad (1.2.35)$$

Además se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\omega) \widehat{\varphi}^*(\omega) e^{-jn\omega} d\omega &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} \widehat{\psi}(\omega) \widehat{\varphi}^*(\omega) e^{-jn\omega} d\omega \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{\psi}(u + 2\pi l) \widehat{\varphi}^*(u + 2\pi l) e^{-jn(u+2\pi l)} du \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nl} \int_0^{2\pi} \widehat{\psi}(u + 2\pi l) \widehat{\varphi}^*(u + 2\pi l) e^{-jnu} du \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{\psi}(u + 2\pi l) \widehat{\varphi}^*(u + 2\pi l) e^{-jnu} du \\ &= \int_0^{2\pi} e^{jnu} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(u + 2\pi l) \widehat{\varphi}^*(u + 2\pi l) \right] du \end{aligned}$$

Luego, la ortogonalidad de $\{\psi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con \mathcal{V}_0 equivale a:

$$\int_0^{2\pi} e^{jnu} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(u + 2\pi l) \widehat{\varphi}^*(u + 2\pi l) \right] du = 0 \quad (1.2.36)$$

Por la unicidad de la transformada de Fourier, la igualdad anterior ocurre sii:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(u + 2\pi l) \widehat{\varphi}^*(u + 2\pi l) = 0 \quad \text{Para toda } u \in [0, 2\pi] \quad (1.2.37)$$

Ahora veamos que esta última igualdad es equivalente a (1.2.33)

$$\begin{aligned}
\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(u+2\pi l) \widehat{\varphi}^*(u+2\pi l) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{\psi}(u/2+\pi l) \widehat{\varphi}(u/2+\pi l) m_0^*(u/2+\pi l) \widehat{\varphi}^*(u/2+\pi l) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{\psi}(u/2+\pi l) m_0^*(u/2+\pi l) |\widehat{\varphi}(u/2+\pi l)|^2 \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{\psi}(u/2+2\pi l) m_0^*(u/2+2\pi l) |\widehat{\varphi}(u/2+2\pi l)|^2 \\
&\quad + \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{\psi}(u/2+\pi+2\pi l) m_0^*(u/2+\pi+2\pi l) |\widehat{\varphi}(u/2+\pi+2\pi l)|^2 \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{\psi}(u/2) m_0^*(u/2) |\widehat{\varphi}(u/2+2\pi l)|^2 \\
&\quad + \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{\psi}(u/2+\pi) m_0^*(u/2+\pi) |\widehat{\varphi}(u/2+\pi+2\pi l)|^2 \\
&= m_{\psi}(u/2) m_0^*(u/2) \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u/2+2\pi l)|^2 \\
&\quad + m_{\psi}(u/2+\pi) m_0^*(u/2+\pi) \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u/2+\pi+2\pi l)|^2 \\
&= m_{\psi}(u/2) m_0^*(u/2) \frac{1}{2\pi} + m_{\psi}(u/2+\pi) m_0^*(u/2+\pi) \frac{1}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} [m_{\psi}(u/2) m_0^*(u/2) + m_{\psi}(u/2+\pi) m_0^*(u/2+\pi)]
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.4. *El conjunto de funciones $\{\psi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \cup \{\varphi_{0,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ forma una base ortonormal para el subespacio \mathcal{V}_{-1} sii:*

$$|m_\psi(\omega/2)|^2 + |m_\psi(\omega/2 + \pi)|^2 = 1 \quad (1.2.38)$$

$$m_\psi(\omega)m_0^*(\omega) + m_\psi(\omega + \pi)m_0^*(\omega + \pi) = 0 \quad (1.2.39)$$

Demostración. Si asumimos que $\{\psi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \cup \{\varphi_{0,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal, las proposiciones (1.2) y (1.3) nos proporcionan las igualdades (1.2.38) y (1.2.39) respectivamente.

Recíprocamente, sea $f \in \mathcal{V}_{-1}$. Entonces:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \sqrt{2} \varphi(2t - n).$$

Luego, se debe encontrar $b[n]$ y $c[n]$ tal que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \sqrt{2} \varphi(2t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] \varphi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] \psi(t - n)$$

Si se aplica la transformada de Fourier a cada miembro de la igualdad anterior se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{a}(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega/2) = \widehat{b}(\omega) \widehat{\varphi}(\omega) + \widehat{c}(\omega) \widehat{\psi}(\omega) \quad (1.2.40)$$

Recordando que:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\omega) &= m_\psi(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega/2) \\ \widehat{\varphi}(\omega) &= m_0(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega/2) \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación (1.2.40) se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{a}(\omega/2) = \widehat{b}(\omega) m_0(\omega/2) + \widehat{c}(\omega) m_\psi(\omega/2)$$

Esta última ecuación es satisfecha al escoger:

$$\begin{aligned} \widehat{b}(2\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\widehat{a}(\omega) m_0^*(\omega) + \widehat{a}(\omega + \pi) m_0^*(\omega + \pi)] \\ \widehat{c}(2\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\widehat{a}(\omega) m_\psi^*(\omega) + \widehat{a}(\omega + \pi) m_\psi^*(\omega + \pi)] \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.2. Sea φ una función de escala de un análisis multiresolución, sea m_0 como se ha definido anteriormente. Sea ψ una función en \mathcal{V}_{-1} definida por:

$$\widehat{\psi}(\omega) = m_\psi(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2) \quad (1.2.41)$$

Donde

$$m_\psi(\omega) = e^{-j\omega}m_0^*(\omega + \pi) \quad (1.2.42)$$

Entonces $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Primero se verá que $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ cumple las condiciones (1.2.38) y (1.2.39).

1.

$$\begin{aligned} |m_\psi(\omega)|^2 + |m_\psi(\omega + \pi)|^2 &= |e^{-j\omega}m_0^*(\omega + \pi)|^2 + |e^{-j(\omega+\pi)}m_0^*(\omega + 2\pi)|^2 \\ &= |m_0(\omega + \pi)|^2 + |m_0(\omega)|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} m_\psi(\omega)m_0^*(\omega) + m_\psi(\omega + \pi)m_0^*(\omega + \pi) &= e^{-j\omega}m_0^*(\omega + \pi)m_0^*(\omega) \\ &\quad + e^{-j(\omega+\pi)}m_0^*(\omega + 2\pi)m_0^*(\omega + \pi) \\ &= e^{-j\omega}m_0^*(\omega + \pi)m_0^*(\omega) \\ &\quad + e^{-j\pi}e^{-j\omega}m_0^*(\omega)m_0^*(\omega + \pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego por la proposición (1.4) se tiene que $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para \mathcal{W}_0 . Por la definición de análisis multiresolución se tiene que $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para \mathcal{W}_j de donde se infiere el resultado. \square

En base a la ecuación (1.2.23) se construye un conjunto de funciones ortonormales, $\varphi_k(t)$ y $\psi_{j,k}(t)$ que generan todo $L^2(\mathbb{R})$, es decir, cualquier función $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser representada en términos de la función de escala y funciones wavelets:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(t) + \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (1.2.43)$$

donde gracias a la ortonormalidad de las funciones base $\{\varphi_k, \psi_{j,k} | j, k \in \mathbb{Z}\}$ se demuestra fácilmente que los coeficientes vienen dados por:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi_k(t)dt \quad (1.2.44)$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\psi_{j,k}(t)dt \quad (1.2.45)$$

En la Figura (1.8) se muestra el análisis de una señal Doppler mediante los subespacios de escala (o aproximación) \mathcal{V}_j . Por otra parte, en la Figura (1.9) se observa la proyección sobre el subespacio de escala \mathcal{V}_0 y sobre los subespacios wavelet, \mathcal{W}_j , que muestran los detalles de la señal a diferentes escalas. En ambos casos se utiliza como wavelet madre la wavelet de Daubechies de orden 8.

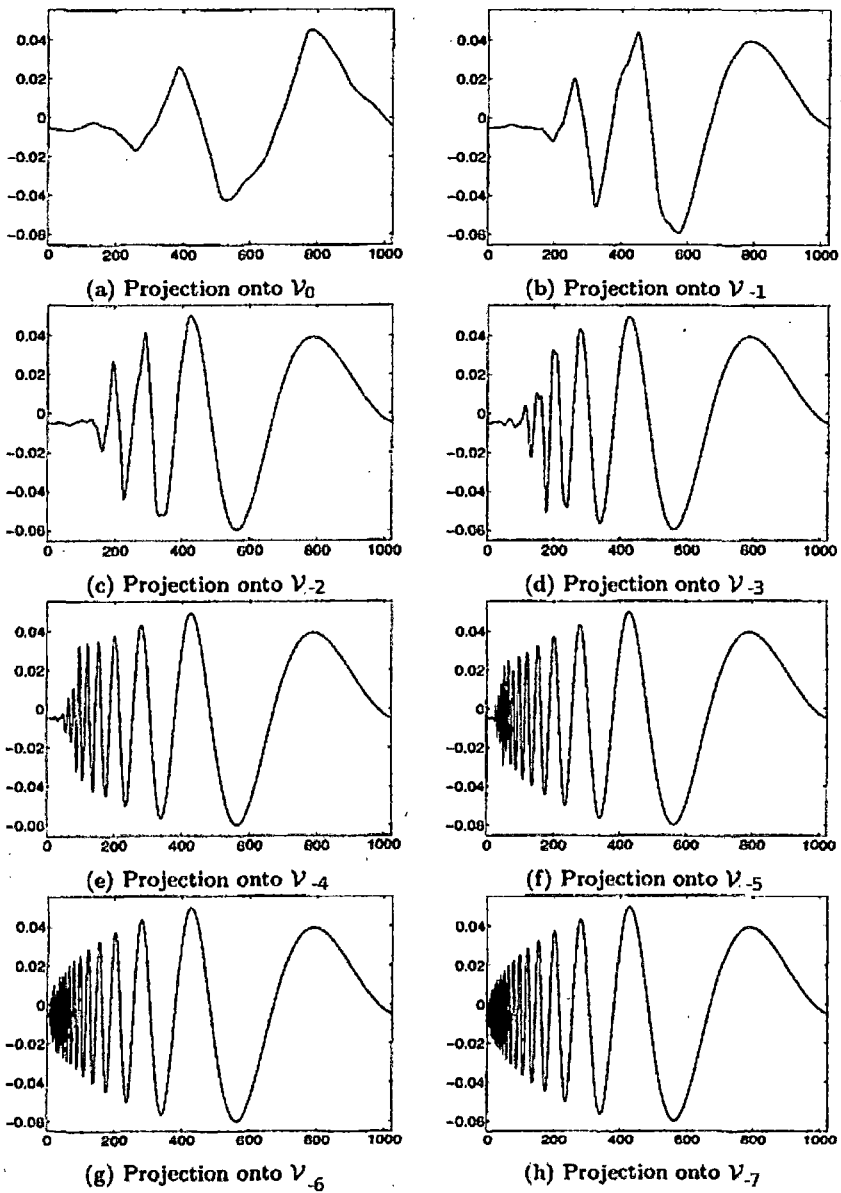


Figura 1.8: Aproximación de una señal Doppler sobre los subespacios \mathcal{V}_j usando la wavelet de Daubechies.

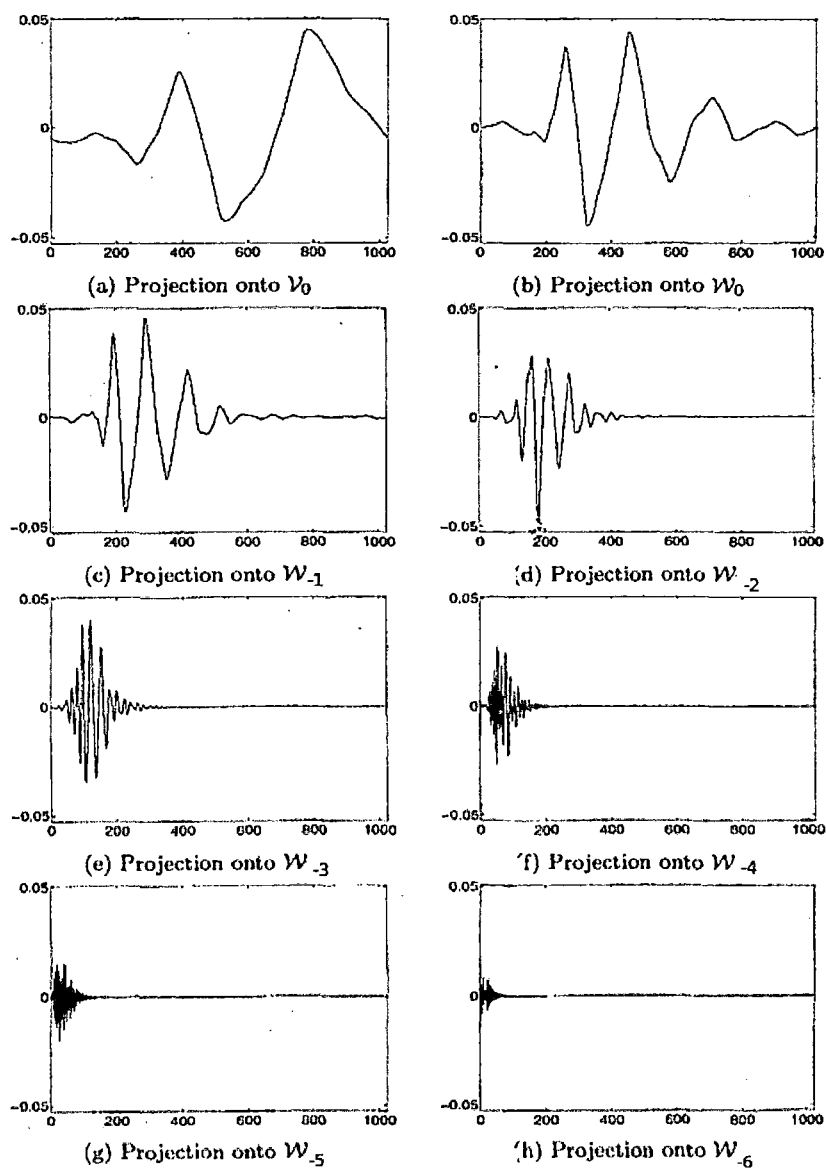


Figura 1.9: Proyección de la señal Doppler sobre los subespacios \mathcal{W}_j usando la wavelet de Daubechies.

1.3. Transformada de Hilbert - Huang

La transformada de Hilbert - Huang es un método de análisis de señales surgido en el año 1994 que permite analizar las señales en el dominio tiempo-

frecuencia. Este método se basa en un algoritmo conocido como Descomposición Modal Empírica (EMD) y debido a su reciente aparición aún carece de una base matemática rigurosa que la sustente, no obstante ya ha sido aplicada con éxito a diversas ramas de la ciencia e ingeniería que incluyen geofísica, medicina, finanzas, etc.

1.3.1. Transformada de Hilbert, Señal Analítica y Frecuencia Instantánea

Las señales que surgen de la naturaleza son señales reales, sin embargo, con el fin de poder aplicar herramientas matemáticas más sofisticadas, es conveniente definir una señal compleja que, en algún sentido, corresponda a una señal real dada. A esta señal compleja que se le asigna a una señal real se le suele llamar señal analítica. Se verá más adelante que resulta natural definir la frecuencia instantánea de una señal como la derivada de la fase de su respectiva señal analítica. Uno de los motivos para definir la señal analítica es precisamente que nos permite definir la fase desde la cual podemos obtener la frecuencia instantánea.

En 1946 Gabor [1] define la señal analítica como aquella cuyo espectro es idéntico al espectro de la señal real para frecuencias positivas y que sea cero para frecuencias negativas. Es decir, si la señal real, $s(t)$, tiene como transformada de Fourier $S(\omega)$, entonces su señal analítica correspondiente, $z(t)$, será aquella cuyo espectro está compuesto solamente de las frecuencias positivas de $S(\omega)$. Con el fin de que la parte real de la señal analítica sea igual a la señal real se considera que el espectro de la señal analítica debe ser igual al doble del espectro de la señal real para frecuencias positivas. Es decir:

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega \leq 0 \end{cases}$$

Donde $Z(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal analítica $z(t)$ y $S(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal real $s(t)$.

La expresión anterior podemos considerarla equivalente a:

$$Z(\omega) = S(\omega)(1 + \text{sgn}(\omega))$$

A partir de la ecuación anterior se deduce la expresión de la señal analítica

en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned}
 Z(\omega) &= S(\omega) + S(\omega) \operatorname{sgn}(\omega) \\
 &= S(\omega) + \frac{j}{\pi} \sqrt{2\pi} S(\omega) (-j \operatorname{sgn}(\omega)) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
 &= S(\omega) + \frac{j}{\pi} \sqrt{2\pi} S(\omega) G(\omega)
 \end{aligned}$$

Donde $G(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ es la transformada de Fourier de $g(t) = \frac{1}{t}$. Tomando en cuenta la linealidad de la transformada inversa de Fourier y la propiedad de la convolución obtenemos:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= s(t) + \frac{j}{\pi} (s * g)(t) \sqrt{2\pi} \\
 &= s(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau
 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

La expresión (1.3.1) es la forma usual de definir la señal analítica, además el segundo sumando del lado derecho de la igualdad anterior define la transformada de Hilbert:

Definición 1.5 (Transformada de Hilbert). *Sea $\phi(t)$ una función real o compleja. Entonces la transformada de Hilbert de $\phi(t)$, denotada por $H[\phi](t)$, está dada por:*

$$H[\phi](t) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\tau)}{t - \tau} d\tau \tag{1.3.2}$$

Donde $\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\tau)}{t - \tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{\phi(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(\tau)}{t - \tau} d\tau \right]$ se conoce como el valor principal de Cauchy.

Como hemos visto se puede calcular la señal analítica a partir del espectro de amplitud de la señal real multiplicando por dos las frecuencias positivas y anulando las frecuencias negativas para finalmente usar la transformada inversa de Fourier. Consideremos por ejemplo la función compleja $s(t) = e^{j\omega t}$ cuyo espectro es una función delta de Dirac centrada en ω . Entonces si ω es negativo, el espectro de la señal analítica será nulo y si ω es positivo, el espectro de la señal analítica será el doble del espectro de la señal real, teniendo en cuenta, además, que la transformada inversa de Fourier es lineal, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= 0 & \text{si } \omega < 0 \\
 z(t) &= 2s(t) & \text{si } \omega > 0
 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Este sencillo resultado es muy importante ya que si podemos expresar una señal $s(t)$ en términos de exponenciales complejas entonces todo lo que tenemos que hacer para formar la señal analítica es anular los términos con

frecuencia negativa y multiplicar por dos los terminos con frecuencia positiva. Denotemos por $\mathcal{A}[s] = z$ a la señal analítica obtenida a partir de la señal s . Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.3.1 (Señal analítica de $\cos(|\omega|t)$). *Expresamos esta función en términos de exponenciales complejas y usamos la ecuación (1.3.3).*

$$\begin{aligned}\cos(|\omega|t) &= \frac{1}{2} [e^{j|\omega|t} + e^{-j|\omega|t}] \\ \mathcal{A}[\cos(|\omega|t)] &= \frac{1}{2} \mathcal{A}[e^{j|\omega|t}] + \frac{1}{2} \mathcal{A}[e^{-j|\omega|t}] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{A}[e^{j|\omega|t}] \\ &= e^{j|\omega|t}\end{aligned}$$

$$\text{Similarmente } \mathcal{A}[\sin(|\omega|t)] = \frac{1}{2j} \mathcal{A}[e^{j|\omega|t} - e^{-j|\omega|t}] = -j e^{j|\omega|t}$$

Ejemplo 1.3.2 (Señal analítica de $s(t) = \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$). *Consideremos $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2$ y escribimos $s(t)$ en términos de exponenciales complejas:*

$$\begin{aligned}s(t) &= \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \\ &= \frac{1}{4} [e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}] [e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t}] \\ &= \frac{1}{4} (e^{j(\omega_2+\omega_1)t} + e^{j(\omega_2-\omega_1)t} + e^{j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_2+\omega_1)t})\end{aligned}$$

Los dos últimos términos tienen frecuencias negativas, por lo tanto nos quedamos solo con los dos primeros términos de la suma para obtener:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[s](t) = z(t) &= 2 \left(\frac{1}{4} \right) (e^{j(\omega_1+\omega_2)t} + e^{j(\omega_2-\omega_1)t}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) e^{j\omega_2 t} \\ &= \cos(\omega_1 t) e^{j\omega_2 t}\end{aligned}$$

Es importante notar en este último ejemplo que la frecuencia mayor, ω_2 , es considerada como frecuencia instantánea.

Veamos ahora la definición de un concepto importante, el de Frecuencia Instantánea, y la motivación para tal definición dadas por L. Cohen en [2] para una señal compleja: $z(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$. Para este fin consideremos su

frecuencia promedio:

$$\begin{aligned}\langle \omega \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega |Z(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z^*(t) \frac{1}{j} \frac{d}{dt} z(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi'(t) - j \frac{A'(t)}{A(t)} \right) A^2(t) dt\end{aligned}$$

La parte imaginaria de la última integral es cero, luego tenemos:

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) A^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) |z(t)|^2 dt$$

Una deducción más detallada se puede encontrar en [2].

La última igualdad motiva la definición de la frecuencia instantánea como la derivada de la fase de la señal analítica.

Definición 1.6 (Frecuencia Instantánea). *Sea la señal $s(t)$ cuya señal analítica asociada es $z(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$. La Frecuencia Instantánea de la señal $s(t)$ esta dada por :*

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \phi(t) \quad (1.3.4)$$

Ejemplo 1.3.3 (Frecuencia instantánea de la señal $s(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$). *Como ω_1 y ω_2 son positivos, del ejemplo (1.3.1) se deduce que la señal analítica de $s(t)$ esta dada por $\mathcal{A}[s](t) = z(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}$. Es decir:*

$$z(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (1.3.5)$$

Donde:

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \quad (1.3.6)$$

$$\phi(t) = \arctan \frac{A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)}{A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)} \quad (1.3.7)$$

Derivando la fase $\phi(t)$ de la ecuación (1.3.7) obtenemos la frecuencia instantánea:

$$\omega(t) = \phi'(t) = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \frac{A_2^2 - A_1^2}{A^2(t)} \quad (1.3.8)$$

Es importante observar del último ejemplo que si las dos amplitudes A_1 y A_2 son iguales, la frecuencia instantánea resultaría constante e igual al promedio aritmético de ambas frecuencias, es decir, $\omega(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Ejemplo 1.3.4 (Frecuencia instantánea de una señal chirp usando Matlab). Consideremos la señal $s(t) = \sin(0.3t^2 + 2t)$ cuyo gráfico se muestra en la Figura (1.10). Si analizamos dicha señal mediante la transformada de Fourier obtenemos el gráfico mostrado en la figura (1.11) donde se observa el espectro de amplitud de $s(t)$ (módulo de la transformada de Fourier), este gráfico solo nos muestra que la señal contiene frecuencias significativas aproximadamente desde 0 Hz hasta 14 Hz. Un análisis mediante la frecuencia instantánea basada en la transformada de Hilbert nos muestra con más detalle el contenido de frecuencias de la señal.

Las siguientes instrucciones en Matlab nos proporcionan la frecuencia instantánea basada en la transformada de Hilbert :

```

1 t=(0:0.01:20);
2 s=2*sin(0.3*(t.*t)+2*t);
3 z=hilbert(s);
4 for k=1:length(t)
5     fase(k)=angle(z(k));
6 end
7 frecuencia=diff(fase)/0.01;
8 plot(t(:,1:length(frecuencia)),frecuencia);
9 axis([0,20,0,18]);

```

El comando "hilbert(s)" devuelve la señal analítica de la señal s , el comando "angle(z)" devuelve el argumento del número complejo z y el comando "diff(fase)" dividido entre la longitud de paso 0.01 se usa para aproximar la derivada del vector fase. La frecuencia instantánea obtenida se ilustra en la Figura (1.12) y se puede observar un comportamiento lineal como se esperaba, pero distorción en los extremos.

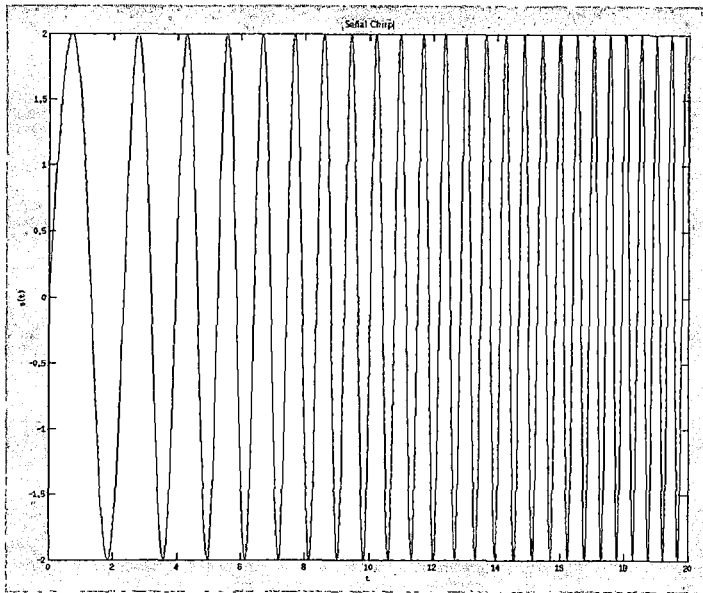


Figura 1.10: Señal chirp .

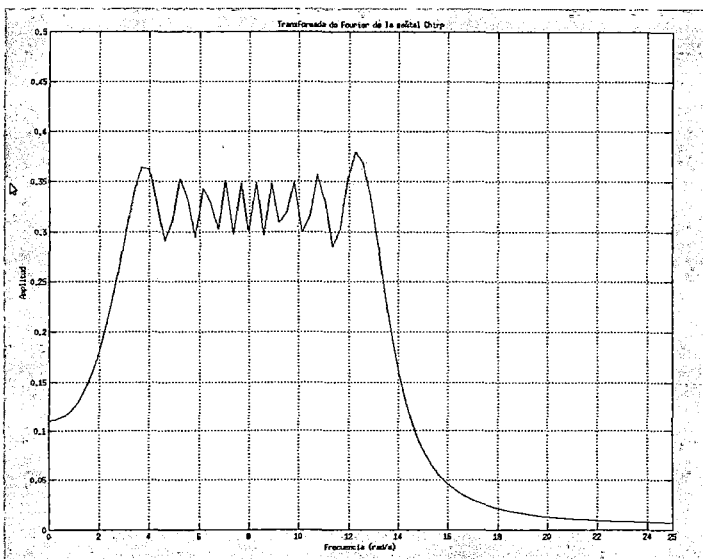


Figura 1.11: Espectro de Fourier de la señal chirp .

Analizando estos dos últimos ejemplos es importante observar que en el caso de la señal formada por una suma de cosenos del ejemplo (1.3.3) la frecuencia instantánea definida en base a la transformada de Hilbert no nos da

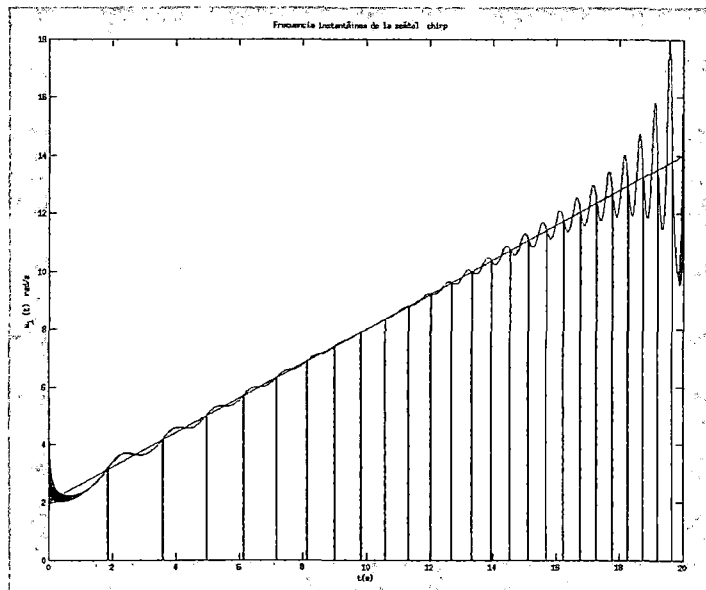


Figura 1.12: Frecuencia instantánea de una señal chirp $s(t)$.

información sobre cada una de las frecuencias ω_1 y ω_2 , solamente nos brinda el promedio de estas lo que en realidad no es muy útil. Por otro lado, en el caso de la señal chirp del ejemplo (1.3.4) vemos que, salvo las discontinuidades debidas al uso de la función arctan en el cálculo de la fase y los efectos de borde, el gráfico obtenido muestra el comportamiento esperado de la frecuencia (comportamiento lineal creciente). Esto nos dice que la frecuencia instantánea definida en base a la transformada de Hilbert es adecuada solo para ciertas señales con características especiales. B. Boashash [10] y L. Cohen [2] señalan que la definición de frecuencia instantánea solo tiene sentido para señales monocomponentes, es decir, que en cada instante de tiempo solo actúa una frecuencia sobre la señal (para más información sobre la definición de señal monocomponente ver [2]). Surge entonces el problema de descomponer una señal en suma de señales monocomponentes como paso previo al análisis de la frecuencia instantánea en base a la transformada de Hilbert, este asunto es tratado en la siguiente sección.

1.3.2. Descomposición Modal Empírica

La descomposición modal empírica (EMD) proporciona una herramienta para el análisis de señales mediante una descomposición en funciones base análogas a las funciones senoidales en el caso del análisis de Fourier. Sin embargo a diferencia del clásico análisis de Fourier, la EMD proporciona una

base adaptativa, es decir, que no esta definida a priori y depende solo de los datos. Esta particularidad de la EMD brinda la ventaja de que las funciones base (denominadas IMF) tengan un significado físico.

Las funciones base, denominadas IMF (Intrinsecal Mode Functions) son definidas mediante las siguientes características:

1. El número de ceros y el número de extremos (máximos y mínimos relativos) deben diferir a lo más en uno.
2. El promedio de la envolvente superior y envolvente inferior debe ser cero.

El proceso de sifting o tamizado propuesto por N. Huang en [7] para obtener los IMF de una señal $s(t)$ es el siguiente:

1. Inicializar $r(t) = s(t)$, $i = 1$.
2. Inicializar $p(t) = r(t)$.
3. Identificar los puntos extremos de la señal $p(t)$ (máximos y mínimos relativos).
4. Realizar una interpolación entre los puntos máximos relativos de p mediante splines cúbicos, para obtener la envolvente superior $e_{\text{sup}}(t)$. Análogamente, mediante los mínimos relativos, se obtiene la envolvente inferior $e_{\text{inf}}(t)$ de p . Las envolventes deben cubrir toda la señal.
5. Calcular el promedio de las envolventes $m(t) = (e_{\text{sup}}(t) + e_{\text{inf}}(t))/2$.
6. Calcular el nuevo $p(t)$ según: $p(t) \leftarrow p(t) - m(t)$.
7. Si $p(t)$ es una IMF se almacena como la i -ésima IMF: $h_i(t) = p(t)$. Si $p(t)$ no es una IMF se regresa al paso 3.
8. Calcular el nuevo residuo $r(t) \leftarrow r(t) - h_i(t)$
9. Aumentar el valor del contador $i \leftarrow i + 1$ y se regresa al paso 2 hasta que el residuo $r(t)$ sea una función monótona o despreciable (casi nula).

A partir de ahora denotaremos a las IMF por h_i donde i indica en número de IMF. El algoritmo anterior nos proporciona una descomposición de la forma:

$$s(t) = \sum_{i=1}^L h_i(t) + r(t) \quad (1.3.9)$$

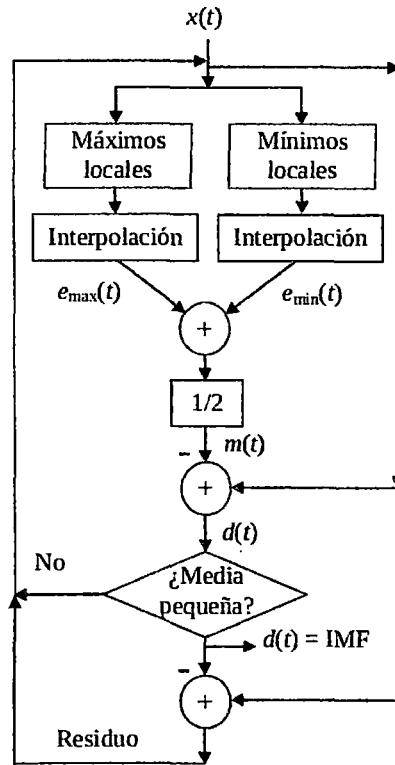


Figura 1.13: Diagrama del algoritmo EMD.

Con respecto a la ortogonalidad, se define un índice de ortogonalidad (IO) a partir de la ecuación (1.3.9) expresándola de la siguiente manera:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{L+1} h_i(t) \quad (1.3.10)$$

Donde se ha incluido el residuo r como último término dentro de la sumatoria. Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (1.3.10) obtenemos:

$$s^2(t) = \sum_{j=1}^{L+1} h_j^2(t) + 2 \sum_{j=1}^{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{L+1} h_j(t) h_k(t)$$

Si la descomposición es ortogonal, el segundo sumando del lado derecho de la ecuación debe ser cero. Por lo tanto se define el siguiente índice de orto-

gonalidad (IO):

$$IO = \sum_{t=0}^T \left(\sum_{j=1}^{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{L+1} h_j(t)h_k(t)/s^2(t) \right) \quad (1.3.11)$$

El índice de ortogonalidad también se puede definir para dos componentes específicas, h_i y h_j , en ese caso la medida de ortogonalidad estará dada por:

$$IO_{i,j} = \sum_{t=0}^T \frac{h_i(t)h_j(t)}{c_i^2(t) + c_j^2(t)} \quad (1.3.12)$$

Ejemplo 1.3.5 (EMD aplicado a la suma de dos funciones senoidales). *Veamos un ejemplo de como trabaja el algoritmo de Descomposición Modal Empírica (EMD). Utilizaremos como entrada una función relativamente sencilla como $s(t) = \sin(2\pi t) + \sin(6\pi t)$.*

El algoritmo de la EMD implementado en Matlab arroja el resultado mostrado en la Figura 1.14 donde la señal graficada en rojo es la señal de entrada, s , y las señales graficadas en azul son las dos IMF y el residuo respectivamente. La primera IMF corresponde a la componente de mayor frecuencia, $\sin(6\pi t)$ y la segunda IMF corresponde a la componente de menor frecuencia $\sin(2\pi t)$, el índice de ortogonalidad de estos dos IMF calculado mediante la ecuación (1.3.12) es 0.0045. Se observa que, de esta manera, la señal es descompuesta de un modo natural en sus componentes senoidales.

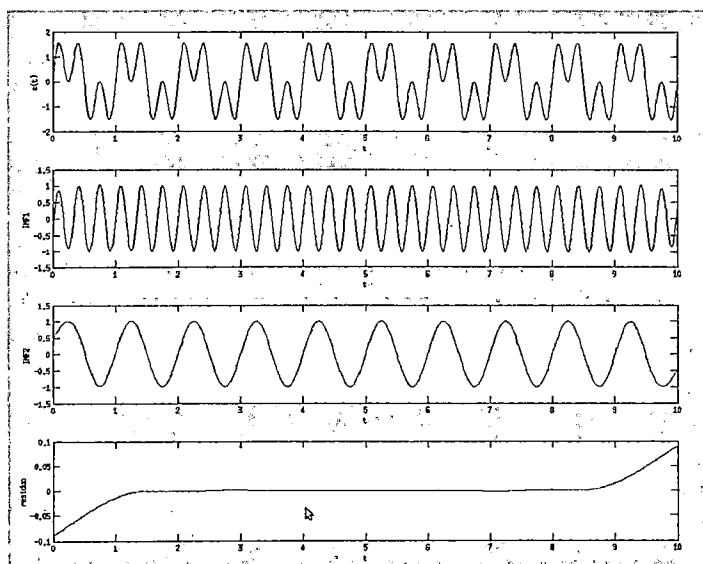


Figura 1.14: Aplicación de la EMD a una suma de funciones senoidales.

Cuando se desea analizar mediante la EMD señales intermitentes, es decir, señales que tienen componentes que aparecen solo en un intervalo de tiempo, ocurre un fenómeno llamado mezcla de modos el cual origina que las IMF resultantes aparezcan mezcladas. Tomemos como ejemplo una señal sinusoidal de amplitud constante igual a 1 y frecuencia 1 rad/s a la cual se le suma otra señal sinusoidal de amplitud mucho menor, mayor frecuencia y que solo aparece al rededor de los máximos relativos de la primera senoide.

$$s(t) = \sin(t) + \text{señal intermitente} \quad (1.3.13)$$

donde la señal intermitente viene dada por $0.1 \sin(10\pi t)$. Esta señal se ilustra en parte superior de la figura (1.15).

Al efectuar la EMD a esta señal se obtienen los IMF mostrados en la figura (1.15) donde puede observarse que la primera IMF contiene ambos modos, tanto la señal sinusoidal de frecuencia 1 rad/s como la señal transitoria por lo tanto en este caso la EMD no ha podido separar efectivamente la señal en sus componentes intrínsecas.

Para solucionar este problema N. Huang propone en [8] una variante de la EMD denominada EEMD (Ensemble Empirical Mode Decomposition) que consiste en realizar repetidas veces la EMD a la señal que se desea analizar con ruido blanco gaussiano agregado, luego, para obtener la i -ésima IMF se promedian todas i -ésimas IMF obtenidas en cada proceso de la EMD. Al aplicar la EEMD con 200 repeticiones y con ruido agregado con desviación estandar de 0.2 se obtiene la descomposición mostrada en la figura (1.16). Esta figura evidencia la mejora que representa la EEMD con respecto a la EMD ya que separa eficientemente la señal en sus componentes superando el inconveniente de la intermitencia y evitando la mezcla de modos.

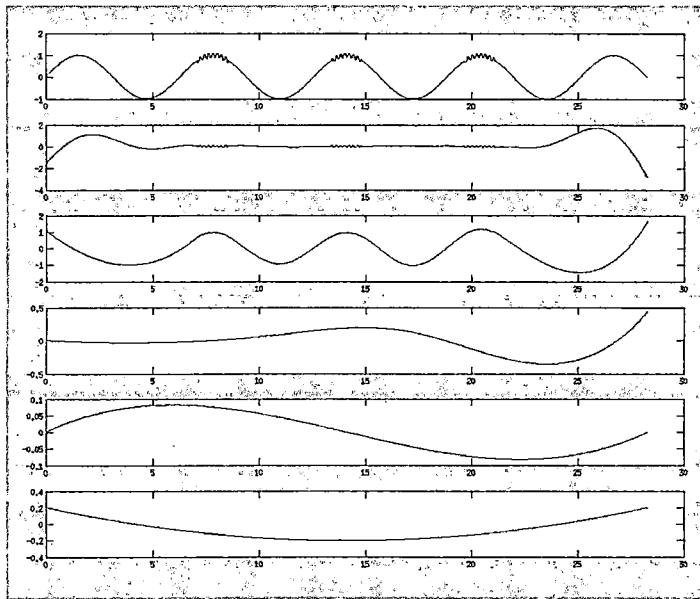


Figura 1.15: Aplicación de la EMD a una señal transitoria.

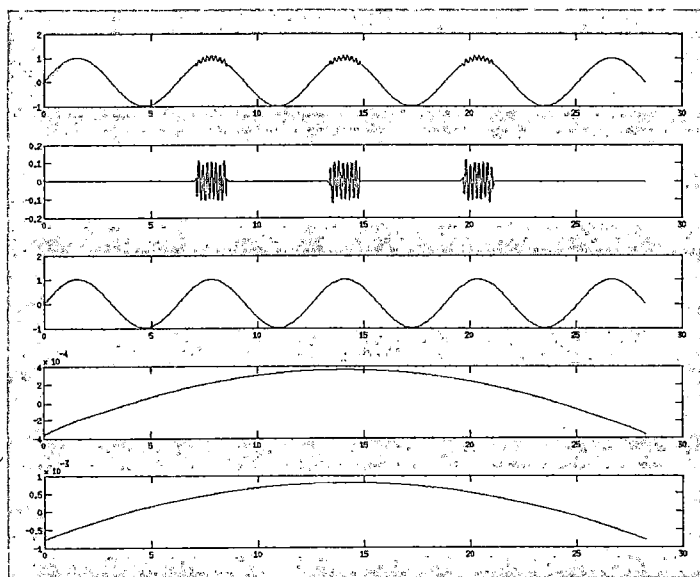


Figura 1.16: Aplicación de la EEMD a una señal transitoria.

Capítulo 2

Filtrado de Ruido con wavelets y EMD

Cuando tenemos muestreada una señal de cualquier tipo (señal de campo eléctrico, señal sísmica, señal de voz, imagen, etc.) esta siempre viene mezclada con cierto nivel de ruido que hace que los datos que se tienen no sean exactamente los datos del fenómeno que se desea estudiar. En el caso particular de las señales sísmicas es importante poder separar el ruido de la señal real para poder obtener con una buena exactitud ciertos parametros como el tiempo de llegada de las fases P y S, epicentro, azimut, etc. ya sea mediante un analista especializado o mediante métodos automáticos (software) que han surgido en los últimos años.

En este capítulo se presentan diferentes métodos para la reducción de ruido basados en dos enfoques: la transformada wavelet y la descomposición modal empírica.

Se asume que la señal muestreada (con ruido) sigue el siguiente modelo matemático:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sigma n(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2.0.1)$$

donde $x(t)$ son los datos obtenidos, $\bar{x}(t)$ representa los datos ideales en ausencia de ruido, $n(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana normalmente distribuida $\mathcal{N}(0, 1)$ y σ representa el nivel de ruido. El objetivo de la reducción de ruido es proporcionar un aproximado, $\tilde{x}(t)$, de la señal sin ruido $\bar{x}(t)$.

Los métodos de reducción de ruido se pueden clasificar en paramétricos y no paramétricos dependiendo si se acepta o no un modelo predefinido para $\bar{x}(t)$. Un ejemplo del caso paramétrico es la aproximación por splines cúbicos, sin embargo el presente trabajo está enfocado a los métodos no paramétricos, en donde encajan las técnicas presentadas a continuación basadas en la teoría de wavelets y descomposición modal empírica.

2.1. Umbralización fuerte y umbralización suave

Los métodos de reducción de ruido en base a wavelets se basan en la hipótesis de que el ruido está distribuido en todos los coeficientes y en todas las escalas, de ahí surge la idea de reducir en cierto nivel el valor de los coeficientes con la intención de quitar el aporte del ruido en cada uno de estos.

De los múltiples tipos de umbralización existentes se estudiarán dos, umbralización fuerte y suave, en el primer caso para un determinado valor umbral, λ , se anulan todos los coeficientes que estén por debajo de este valor y se dejan invariantes los coeficientes que excedan el valor umbral. Es decir, si tenemos una señal discreta d_j , la señal umbralizada con un umbral λ está definida por:

$$\tilde{d}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_j| \leq \lambda \\ d_k & \text{si } |d_j| > \lambda \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Por otro lado, la umbralización suave también anula los coeficientes que estén por debajo del valor umbral pero además disminuye la magnitud (en una cantidad λ) de los coeficientes que sobrepasen el valor umbral.

$$\tilde{d}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_j| \leq \lambda \\ d_j - \lambda & \text{si } d_j > \lambda \\ d_j + \lambda & \text{si } d_j < -\lambda \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Como su nombre sugiere, la umbralización suave no crea discontinuidades como lo hace la umbralización fuerte.

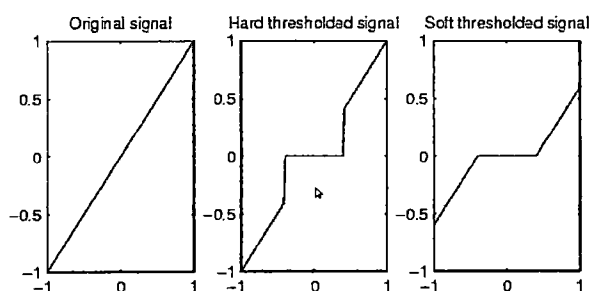


Figura 2.1: Umbralización fuerte y umbralización suave de una señal lineal.

Veamos un ejemplo del efecto de la umbralización, en este caso usamos función $h(t) = \sqrt{t} \sin(t^2)$ y un valor umbral de $\lambda = 2$.

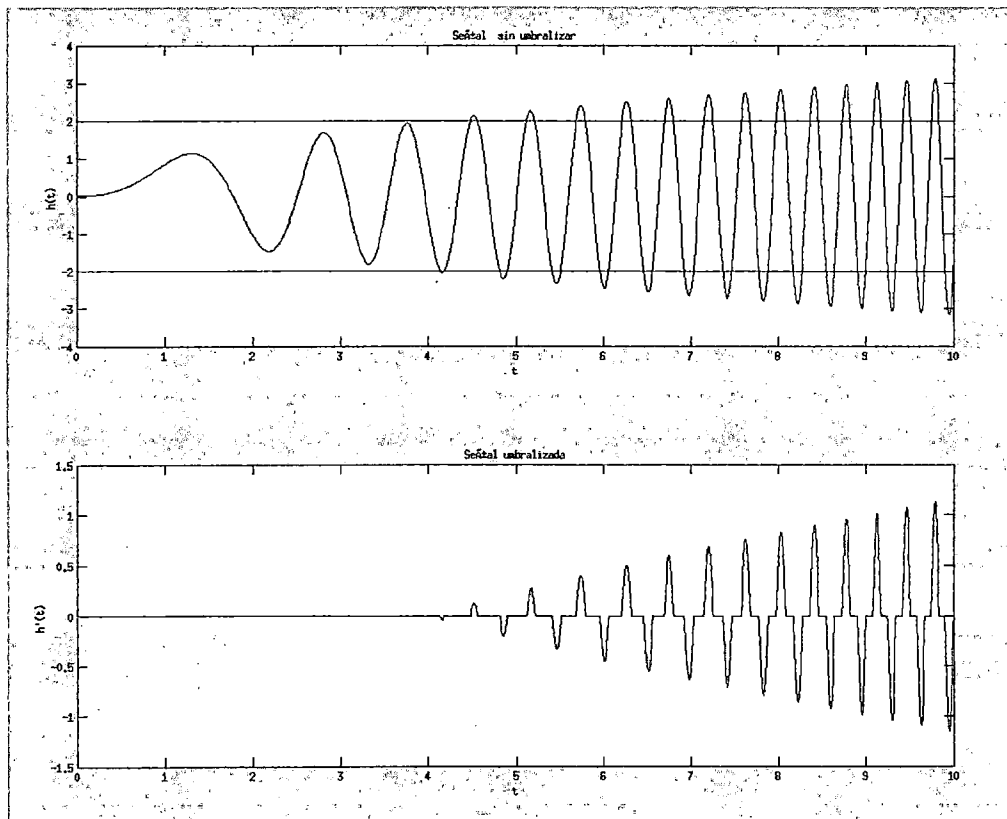


Figura 2.2: Umbralización de la señal $h(t) = \sqrt{t} \sin(t^2)$.

La Figura (2.2) muestra en la parte superior a la señal $h(t)$ sin umbralizar y debajo se observa la señal umbralizada con un valor de umbral $\lambda = 2$. Como se puede observar los valores de la señal que se encuentran dentro del intervalo $[-\lambda, \lambda]$ son reducidos a cero, mientras que los valores fuera de dicho intervalo se reducen en un valor igual a λ .

Ahora veamos una de las partes más importantes del proceso de reducción de ruido en señales, los diferentes tipos de umbral. Se estudiarán dos métodos: el umbral universal y el algoritmo Rogorious Sure.

2.2. Reducción de Ruido en Base a la Transformada Wavelet

En los últimos 25 años el desarrollo de la teoría de ondículas (wavelets) se ha visto enriquecido con el surgimiento de múltiples aplicaciones de entre las cuales destacan la compresión de imágenes digitales y los métodos de

reducción de ruido. Los métodos más usados para esta última aplicación están basados en la umbralización de los coeficientes wavelets de la ecuación (1.2.43) y su estudio comienza principalmente con los trabajos de D. Donoho y Johnstone ([5] y [6]).

La reducción de ruido o denoising en base a wavelets se puede resumir en tres pasos:

1. Descomposición: cálculo de los coeficientes wavelets según la ecuación (1.2.44) y (1.2.45).
2. Umbralización de los coeficientes wavelet.
3. Reconstrucción a partir de los coeficientes wavelet umbralizados según la ecuación (1.2.43).

Este procedimiento se describe en los siguientes gráficos

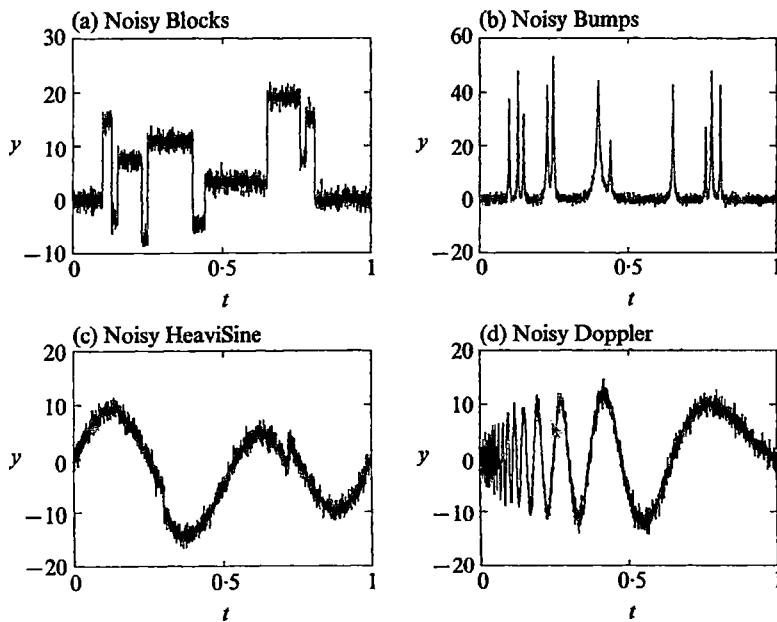


Figura 2.3: Señales de prueba con ruido.

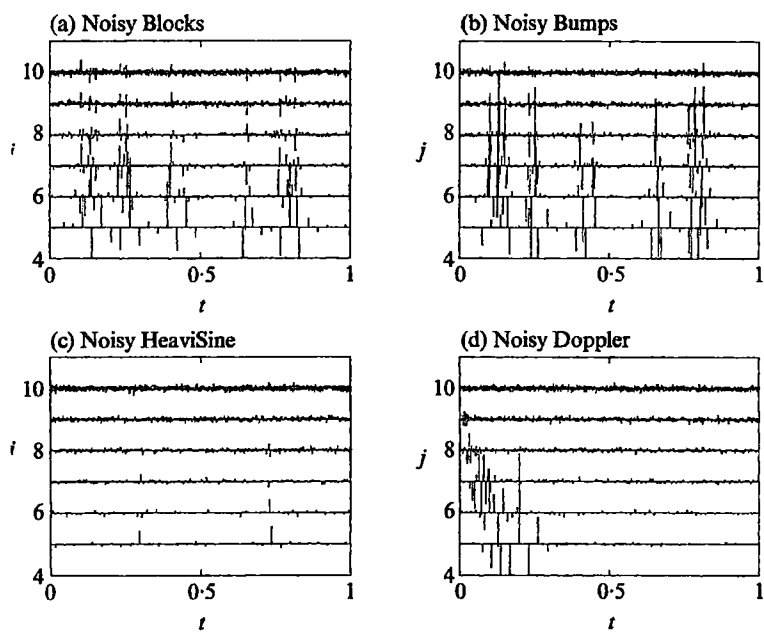


Figura 2.4: Coeficientes wavelet.

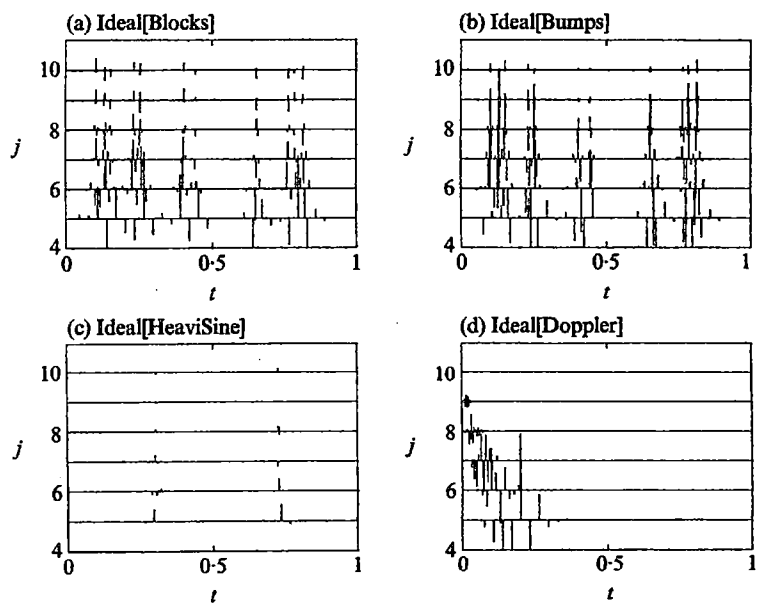


Figura 2.5: Coeficientes wavelet umbralizados.

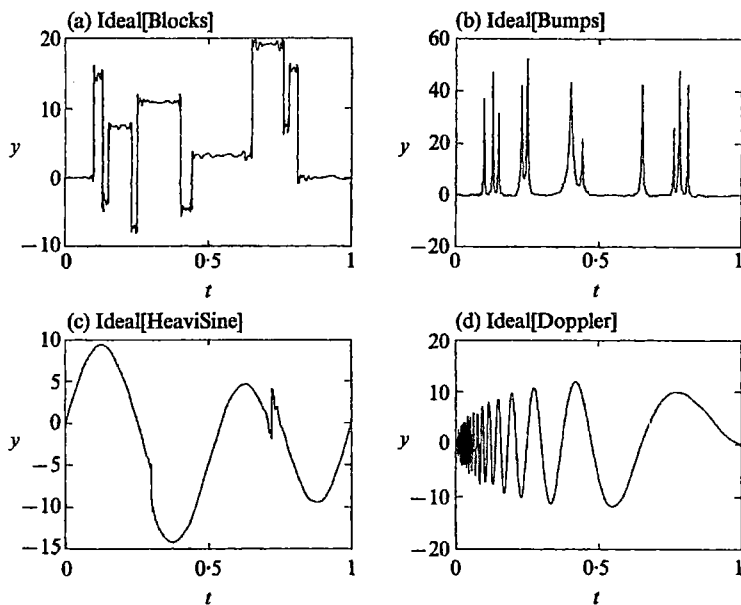


Figura 2.6: Resultado del filtrado de ruido mediante wavelets.

Existen diversos métodos de reducción de ruido que siguen la metodología mencionada (descomposición, umbralización y reconstrucción), cada método se diferencia en la elección del valor umbral λ y el tipo de umbralización utilizada (umbralización suave o umbralización fuerte). En la tesis se estudiarán los métodos conocidos como VisuShrink que utiliza un umbral universal y SureShrink que utiliza un umbral para cada nivel de resolución.

Para definir el umbral primero es necesario tener un estimador del nivel de ruido σ . Usualmente este parámetro se define como la desviación estándar de los datos, sin embargo Donoho y Johnstone en [5] consideran conveniente definir este parámetro en base a los coeficientes wavelet según:

$$\sigma = \frac{\text{mediana}\{d_{J-1,k} | k = 0, 1, \dots, 2^{J-1} - 1\}}{0.6745} \quad (2.2.1)$$

Donde los valores de $d_{J-1,k}$ representan los coeficientes wavelet del último nivel de descomposición el cual generalmente contiene ruido en su mayor parte.

2.2.1. Umbral universal

Fue propuesto por D. Donoho y Johnstone en 1994 [5] y algunos autores también lo conocen como VisuShrink. Este método utiliza un valor umbral

para todos los niveles de la descomposición wavelet por lo que está dentro de los métodos de umbral global.

Con σ como se definió en la ecuación (2.2.1), el umbral universal propuesto por Donoho y Johnstone se expresa de la siguiente manera:

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(N)} \quad (2.2.2)$$

En este caso N representa la longitud de la señal. Este umbral es relativamente grande y crece a medida que aumentan los datos anulando una gran cantidad de estos. Otra característica importante es que este umbral tiene una alta probabilidad que garantiza que todas las muestras de la DWT de la señal buscada que son nulas serán estimadas como tal.

2.2.2. Umbral dependiente del nivel

Este algoritmo (Rigorous Stein's Unbiased Risk Estimator) fue propuesto en 1995 también por Donoho y Johnstone. Utiliza un umbral diferente para cada nivel los cuales se obtienen mediante métodos estadísticos.

El valor del umbral, obtenido después de un procedimiento en base a técnicas estadísticas es el siguiente:

$$\lambda_j = \arg \left[\min_{0 < \lambda \leq \lambda_U} \text{SURE} \left(\lambda; \frac{d_{j,k}}{\sigma} \right) \right] \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \quad (2.2.3)$$

Donde λ_U representa el umbral universal definido en la ecuación (2.2.2) y el operador SURE está definido de la siguiente manera:

$$\text{SURE}(\lambda, X_k) = N - 2 \text{card}\{i : |X_i| \leq t\} + [\min(|X_i|, \lambda)]^2 \quad (2.2.4)$$

Es decir, el valor umbral está dado por aquel valor λ que minimiza la función $\text{SURE}(\lambda, X)$ la cual mide la precisión de la aproximación. Es importante observar que en este método también se hace uso del parámetro σ definido según la ecuación (2.2.1).

2.3. Reducción de Ruido Basado en EMD

Existe cierta semejanza entre la transformada wavelet y la descomposición modal empírica en el sentido de que ambas pueden separar una señal en una suma de señales con un rango diferente de frecuencias, esto motiva a adaptar algunas aplicaciones de la transformada wavelet para ser utilizadas en base a la descomposición modal empírica.

Consideremos la señal $x(t)$ y su descomposición en IMF después de aplicar el algoritmo de descomposición modal empírica (EMD):

$$x(t) = \sum_{i=1}^L h_i(t) + r(t) \quad (2.3.1)$$

El método de reducción de ruido en señales en base a la EMD se basa en la umbralización de las IMF y se puede resumir en los siguientes 3 pasos (análogos a la reducción de ruido en base a wavelets):

1. Descomposición: aplicar el algoritmo de EMD para obtener la descomposición de la señal en IMF.
2. Umbralización de cada IMF.
3. Reconstruir la señal según la ecuación (2.3.1) usando las IMF umbralizadas.

El ruido contenido en cada IMF es de diferente nivel de energía, por este motivo Kopsinis y McLaughlin (2008) proponen usar un umbral diferente, adecuado para cada IMF. En este caso usaremos:

$$\lambda_i = c\sqrt{E_i 2 \log N} \quad (2.3.2)$$

donde c es una constante que depende de la aplicación (en el Capítulo 4 el valor de este parametro es calculado mediante pruebas numéricas) y E_i es la energía de la i -ésima IMF resultante de aplicar la EMD a una señal de ruido blanco puro. Según los estudios realizados por Z. Wu y N. Huang en [9] esta cantidad se puede aproximar mediante una fórmula empírica dada por :

$$E_i = \frac{E_1}{0.719} 2.01^{-i}, \quad i = 2, 3, \dots, L \quad (2.3.3)$$

y E_1 está dada por:

$$E_1 = \sum_{t=1}^N [h^{(1)}(t)]^2 \quad (2.3.4)$$

En resumen, se umbraliza cada IMF, $h^{(i)}(t)$, usando un valor umbral de $\lambda_i = c\sqrt{E_i 2 \log N}$ donde el parametro E_i está definido por las ecuaciones (2.3.3) y (2.3.4).

Capítulo 3

Señales Sísmicas y Detección de Eventos Sísmicos

3.1. Ondas Sísmicas

Dado que los métodos matemáticos expuestos en los capítulos anteriores serán aplicados a señales sísmicas, es necesario conocer al menos de manera general lo que es una señal sísmica, es decir, la información que esta nos puede brindar acerca de un evento sísmico.

Las observaciones sismológicas consisten en un registro del movimiento de la tierra por instrumentos instalados en su superficie. Estos instrumentos se denominan en general con el nombre de sismógrafos y registran el desplazamiento, velocidad y aceleración del suelo. El perfeccionamiento de estos instrumentos, desde los primitivos sismógrafos de poca sensibilidad de principios de siglo hasta los actuales de tecnología digital y grandes amplificadores, permite conocer como se mueve realmente el material de la tierra. Estas observaciones se interpretan en función de modelos teóricos de generación y propagación de ondas. Un paso intermedio entre la observación y la interpretación de los datos sismológicos lo forma su procesado que ha adquirido actualmente una gran importancia. El progreso en los métodos de observación y el proceso de los datos sismológicos permite aplicar modelos cada vez más complejos, tanto para la generación de los terremotos como para la estructura de la tierra.

Las ondas sísmicas son un tipo de onda elástica que se propaga tanto al interior como en la superficie de la tierra generada a partir del movimiento de las placas tectónicas. Al ocurrir un terremoto, las ondas sísmicas se propagan en todas las direcciones partiendo desde el hipocentro. Sin embargo no todos los tipos de onda son iguales ya que existen diferencias importantes entre

ellas. Las ondas sísmicas se clasifican en dos grandes grupos de acuerdo a la forma de propagación en la tierra: ondas de cuerpo y ondas superficiales.

Ondas de cuerpo Se llaman así porque estas tienden a viajar a través del interior de la Tierra (adentrándose incluso a grandes profundidades). La teoría de la elasticidad nos dice que son posibles dos tipos de ondas elásticas que viajan a través de la Tierra, y que son conocidas como ondas de cuerpo u ondas internas, las cuales pueden ser compresionales o de cizalla. Las ondas compresionales (conocidas como ondas P) son las que se transmiten cuando las partículas del medio se desplazan en la dirección de propagación, produciendo compresiones y dilataciones en el medio. Ésta es la más veloz de todas las ondas sísmicas (entre 5 km/s y 11 km dependiendo de la profundidad) y, por lo tanto, es la primera en llegar a cualquier punto, en ser sentida y en ser registrada en los sismogramas, por lo que se llamó onda primaria y de allí el nombre de P (en inglés se asocia también con push que significa empujón o empujar). la velocidad exacta de la onda P depende de las constantes elásticas del medio donde esta se propaga y viene dada por la siguiente fórmula:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (3.1.1)$$

Donde λ y μ se denominan primer y segundo coeficiente de Lamé respectivamente y ρ es la densidad del medio.

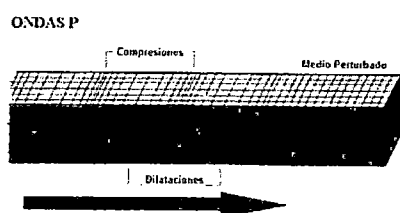


Figura 3.1: onda P.

Otro tipo de onda que viaja a través de la Tierra son las ondas de corte o de cizalla conocidas como ondas S. Son aquellas en las cuales las partículas del medio se desplazan perpendicularmente a la dirección de la propagación, por lo que están asociadas a las deformaciones de terreno. La onda S es más lenta que la onda P. En una amplia gama de rocas su velocidad, V_s , es aproximadamente igual a la velocidad de la onda P, V_p , dividida entre $\sqrt{3}$ (esto es conocido como condición de Poisson). Como la onda S es la segunda en llegar se le llamó Secundaria,

y de allí su nombre (en inglés se asocia con shake, que significa sacudir). La velocidad exacta viene dada por:

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.1.2)$$

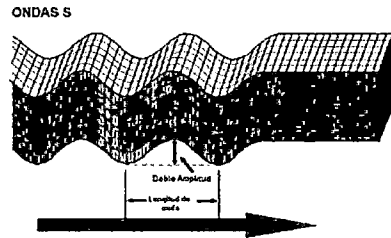


Figura 3.2: onda S.

Ondas de superficie Además de las ondas que viajan a través del terreno, existen otras que lo hacen por la superficie, esto es, su amplitud es máxima en ésta y nula en las grandes profundidades. Estas ondas pueden explicarse como causadas por la interferencia de las ondas de cuerpo (interacción de muchas de estas ondas que viajan en diferentes direcciones), y son más lentas que éstas. Las principales ondas de superficie son conocidas como ondas de Rayleigh y ondas Love.

La Figura (3.4) muestra un sismograma. Cada tipo de onda se muestra con un color diferente. La parte antes del arribo de las ondas P se denomina pre-evento y por lo general está constituido por ruido ambiente (agitación del suelo por efectos del tránsito vehicular, el viento, etc. que es imperceptible para el hombre).

Las ondas P son las primeras en llegar, ya que la velocidad promedio de propagación es casi dos veces mayor a la de las ondas S. Las ondas S se diferencian de las ondas P en que poseen mayor amplitud.

La energía de las ondas se calcula en base a su amplitud. Por tanto, una onda de igual período pero mayor amplitud poseerá una mayor cantidad de energía. Las ondas S son por tanto las que transportan la mayor cantidad de la energía de un sismo. Esto significa también que la mayoría de los daños producidos a estructuras será debido a las ondas S (las responsables de la fuerza de la sacudida).

Las ondas superficiales viajan a velocidades mucho menores que las velocidades a las que viajan las ondas P y S. Son ondas que, al igual que las ondas S, poseen amplitudes mayores a las de las ondas P, pero sus períodos son mucho más largos. En la Figura 6 se muestra solamente la onda Love, esto porque el registro mostrado corresponde al de una componente horizontal.

La coda es la parte del sismograma que decae conforme pasa el tiempo hasta llegar al nivel original del pre-evento cuando los otros tipos de ondas han pasado. La coda puede llegar a durar un tiempo significativo dependiendo del tamaño del sismo.

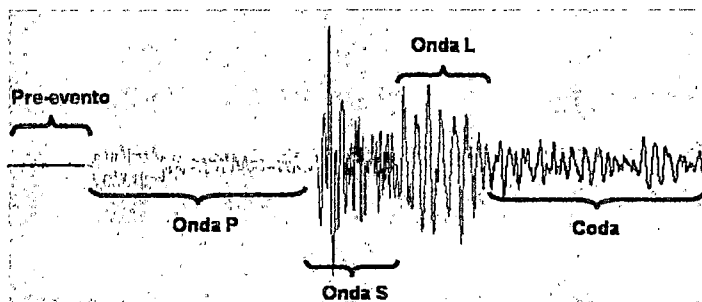


Figura 3.4: Los diferentes tipos de ondas ubicados en el sismograma.

3.2. Algoritmos de detección

Como ya se ha mencionado, la importancia de las técnicas de reducción de ruido se debe a que las señales son mejor procesadas cuando no estan

perturbadas con un alto nivel de ruido. Para verificar esta afirmación se hace uso de dos algoritmos de detección: algoritmo STA/LTA y algoritmo AIC. En el capítulo 4 se verá que con las señales filtradas los algoritmos de detección brindan buenos resultados, sin embargo cuando los algoritmos de detección procesan señales altamente ruidosas (sin filtrar) pueden brindar resultados erróneos.

Para comprender como funcionan los algoritmos de detección en esta sección se expone brevemente el algoritmo STA/LTA y el algoritmo AIC.

3.2.1. Algoritmo STA/LTA

En sismología, la detección de fases de eventos sísmicos representa un paso fundamental para la localización y análisis de datos de terremotos en cualquier estación sismológica. Tradicionalmente, esta tarea era realizada por inspección visual mediante la lectura de los registros de las estaciones.

Actualmente, el monitoreo sísmico se ha multiplicado significativamente en todo el planeta, lo que genera la necesidad de analizar un inmenso volumen de datos. Esta abundancia de datos produjo que la inspección visual de los registros se vuelva una tarea muy demandante en cuanto a tiempo y recurso humano. Por esta razón en las últimas décadas se han desarrollado diversos algoritmos para realizar la detección y picado de fases de eventos sísmicos de manera automática o semiautomática.

Entre los métodos más aceptados son aquellos que comparan algún atributo de la señal en dos ventanas de tiempo diferentes. Este atributo es calculado en una primera ventana de corta duración con el fin de obtener las características actuales de la señal, y en otra de mayor duración con la finalidad de dar la referencia del ruido de fondo en el que esta mezclada la señal a detectar. Allen (1982) introduce un nuevo concepto definiendo dicho atributo como "characteristic function" (CF). Debido a que estos métodos suelen comparar los promedios de dicha CF entre las dos ventanas de tiempo, suelen ser denominados métodos de tipo STA/LTA ("short term average / long term average"). El evento se suele declarar cuando este cociente supera un valor umbral THR ("threshold"). El método que fue presentado originalmente por Allen (1978) ha sido ampliamente utilizado por el U.S. Geological Service (USGS).

Además del método de Allen, existen otros métodos de tipo STA/LTA muy difundidos, por ejemplo la rutina AUTOPIC contenida en el Seismic Analysis Code (SAC) también utiliza internamente un método del tipo STA/LTA. Por su parte, Earle y Shearer (1994) definen la envolvente analítica de la señal obtenida usando la transformada de Hilbert como la CF para calcular el cociente STA/LTA en su método, el cual utilizan para hacer un es-

tudio sobre sismología global a partir de la construcción de tablas de tiempos de recorrido. Todos estos métodos del tipo STA/LTA, podrían denominarse convencionales por su amplia difusión y aceptación a lo largo del tiempo.

Se han desarrollado también diversos algoritmos no convencionales que utilizan modelos autorregresivos junto con el Criterio de Información de Akaike (AIC) presentado en Akaike (1971) y Akaike (1974). Inclusive, la teoría de fractales también ha sido utilizada en sismología para detección de fases.

Uno de los mayores problemas de los métodos de detección automática de fases de eventos sísmicos son los "falsos disparos", esto ocurre cuando el método detecta la llegada de la fase P cuando en realidad esto no ocurre, generando un almacenamiento innecesario de los datos y por lo tanto consume espacio en la memoria innecesariamente. Los falsos disparos se deben principalmente a un aumento súbito del nivel de ruido o a una mala calibración de los parámetros del método.

Lo ideal es acotar lo más posible el número de falsos disparos, procurando paralelamente no perder sensibilidad en la detección de eventos reales.

El método de Allen usa como función característica el valor absoluto de los valores dados por el sismograma, es decir, para calcular el STA se obtiene el promedio de los valores absolutos dentro de la ventana de tiempo corto y análogamente para el valor del LTA. Se considera que un evento es detectado cuando el cociente STA/LTA sobrepasa un valor umbral determinado, $THR1$, dicho evento sísmico terminará cuando el valor del cociente STA/LTA regrese a un valor inferior a un parámetro $THR2$ cumpliéndose que $THR2 \leq THR1$.

Además de los datos almacenados durante el tiempo que dure el evento sísmico (tiempo de disparo), el algoritmo también registra cierta cantidad de datos anteriores y posteriores al evento sísmico que se conocen como pre-evento (PEM) y post-evento (PET).

Para una mejor comprensión la figura (3.6) muestra un evento sísmico y las variables del algoritmo STA/LTA. La parte a) muestra el sismograma, la parte b) muestra los promedios de los valores absolutos de la ventana de tiempo corto y la ventana de tiempo largo mientras se desplazan a través del tiempo, la parte c) muestra el cociente STA/LTA y por último, la parte d) muestra la señal sísmica registrada, incluyendo el pre-evento y post-evento.

Como se mencionó anteriormente, para obtener buenos resultados con el algoritmo STA/LTA es fundamental realizar una buena elección de sus parámetros, estos son los siguientes:

Duración de la ventana STA La duración de la ventana de tiempo corto es importante con respecto a los falsos disparos. Al disminuir la duración de la ventana STA, el algoritmo es más sensible a detectar un aumento en el nivel de ruido como si se tratase de un evento sísmico. En

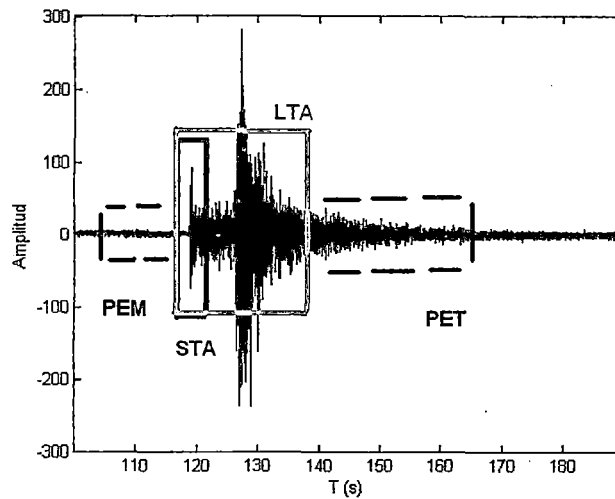


Figura 3.5: Ventanas STA y LTA.

las estaciones ubicadas en lugares altamente contaminados con ruido es recomendable establecer la duración de la ventana de tiempo corto suficientemente grande, como consecuencia, también disminuirá la sensibilidad para reconocer eventos locales de corta duración e intensidad.

Para eventos regionales un valor típico de la duración de la ventana STA es entre 1 y 2 segundos. Para eventos locales comúnmente son usados valores más pequeños entre 0.3 hasta 0.5.

Duración de la ventana LTA El valor del LTA mide en promedio la amplitud del ruido sísmico. Un valor pequeño de la duración del LTA hara que el LTA se aproxime al valor del STA (ambos aumentan o disminuyen a la vez) mantenido el valor del cociente STA/LTA sin grandes cambios; esto disminuye la sensibilidad del algoritmo para detectar eventos sísmicos de pequeña magnitud. Por otro lado, usando una veltana LTA de duración muy larga se aumenta la sensibilidad del algoritmo ya que el valor del LTA no varía significativamente cuando se presenta una señal sísmica. Un valor de 60 segundos para la duración de esta ventana es comunmente usado en algunas aplicaciones.

Umbral de inicio de evento Este parametro es el que determina en mayor medida que eventos serán registrados y cuales no. Mientras mayor sea el valor de este umbral, menor cantidad de eventos serán detectados y viceversa. Mientras menor sea el valor del umbral, más sensible será el algoritmo y más eventos serán detectados, sin embargo también au-

mentarán los falsos disparos lo que causa un uso innecesario de memoria. No solo la amplitud del ruido, sino también el tipo de ruido influencia en el ajuste del valor del umbral. Un ruido sísmico estacionario (con fluctuaciones menos irregulares) permite escoger un menor valor para el umbral; en presencia de ruido sísmico de comportamiento irregular es preferible usar valores altos para el umbral. En un primer ajuste un valor de 4 para este umbral es comúnmente utilizado, valores menores pueden ser usados en lugares con bajo nivel de ruido. Para lugares con un alto nivel de ruido es recomendable usar un valor de 8 o mayor.

Umbral de finalización del evento El evento finaliza cuando el cociente STA/LTA decrece hasta un valor THR2. Este valor generalmente es mayor o igual al primer umbral THR1.

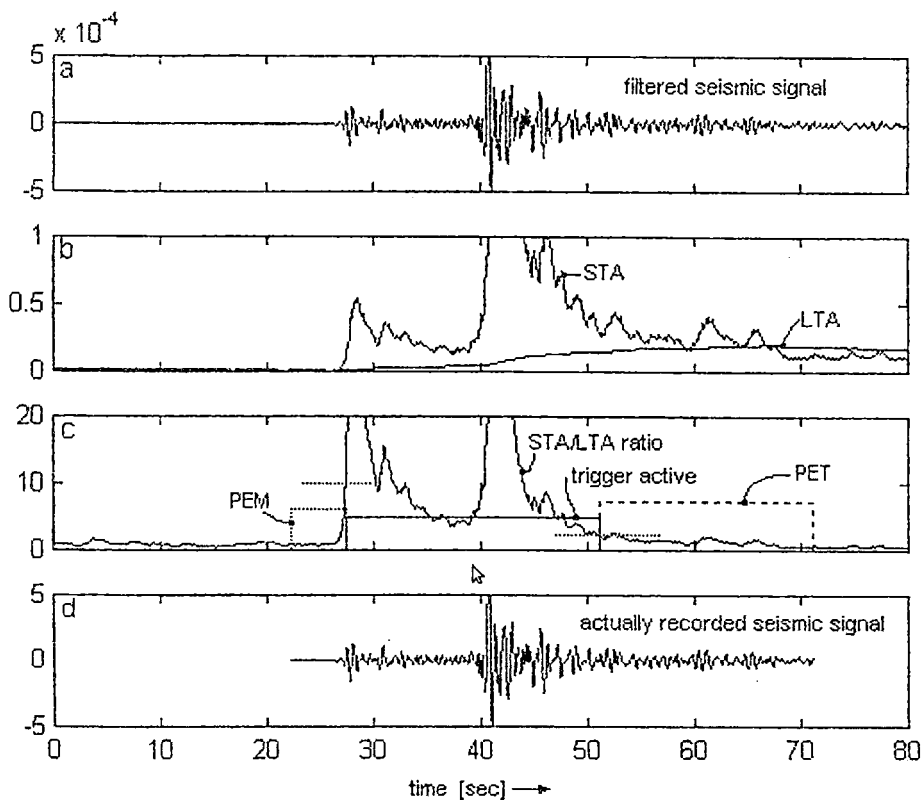


Figura 3.6: Algoritmo STA/LTA.

Método de Earle y Shearer

Earle y Shearer utilizan la envolvente de la señal obtenida mediante la transformada de Hilbert como función característica. Definen la envolvente como:

$$E(i) = \sqrt{s^2(i) + (\tilde{s})^2(i)}$$

donde \tilde{s} es la transformada de Hilbert de la señal s . Luego se definen dos ventanas de tiempo consecutivas de tamaño T_{STA} y T_{LTA} para el cálculo del STA y LTA y se calcula el cociente punto a punto.

El algoritmo STA-LTA no se aplica directamente sobre el sismograma, sino que es aplicado sobre la envolvente y se declara el evento cuando el cociente STA/LTA supera el valor umbral establecido.

3.2.2. Algoritmo AIC

El Criterio de Información de Akaike (AIC) es un algoritmo matemático basado en técnicas estadísticas que calcula la variación de energía entre dos intervalos cuyo valor óptimo (mayor variación de energía) es el mínimo valor de AIC y ésta es la característica por la cual es altamente explotado de muchas formas en varias aplicaciones.

Para nuestro caso en particular, en el análisis de señales sísmicas, se calcula el AIC directamente del sismograma, el tiempo de arribo de la fase P es el punto donde el AIC tiene el mínimo valor (mayor variación de energía). Para el sismograma de longitud N , el valor AIC es definido como:

$$AIC(k) = k \log(\text{var}(x(1 : k))) + (N - k - 1) \log(\text{var}(x(k + 1 : N)))$$

donde varía a través de todas las muestras del sismograma.

Este algoritmo brinda buenos resultados solo cuando el nivel de ruido es relativamente bajo y puede brindar resultados erróneos para sismogramas con alto nivel de ruido como se verá más adelante.

Capítulo 4

Resultados Numéricos: Estación Sísmica de Ancón

Para aplicar el algoritmo EMDdenoise debemos escoger un valor adecuado para el parametro c el cual define el valor del umbral (ver ecuación 2.3.2), para ello, en la primera sección de este capítulo, usamos una señal de prueba $s(t)$ generada en MATLAB y aplicamos a dicha señal el algoritmo EMDdenoise con diferentes valores de c .

Luego, en la segunda sección, usamos 6 señales de prueba para comparar los dos métodos de reducción de ruido que se tienen (en base a wavelets y en base a la EMD). Finalmente, en la tercera sección, usamos los algoritmos de reducción de ruido en señales sísmicas y aplicamos los algoritmos de detección.

4.1. Determinación de parámetros del algoritmo EMDdenoise

La primera señal de prueba utilizada fue la siguiente:

$$s(t) = \sqrt{t} \sin(t^2) + \sin(3\pi t)$$

a esta señal se le agregó ruido mediante el comando randn de Matlab obteniéndose las gráficas mostradas en la figura (4.2). En la parte superior se muestra la gráfica de la señal $s(t)$ y en la parte inferior se muestra dicha señal distorcionada debido al ruido agregado.

El programa EMDdenoise permite escoger el valor de la constante c de la ecuación (2.3.2) que define el umbral.

Se usaron valores de c desde 0.1 hasta 1.1 con un paso de 0.1. Para evaluar la efectividad del método se usó el valor de $\|s - \tilde{s}\|$ donde \tilde{s} es la señal que



Figura 4.1: Obtención de datos de campo

resulta de aplicar el programa EMDdenoise a la señal s , si dicha norma es pequeña significa que se ha obtenido una buena aproximación de la señal.

Los resultados de aplicar el programa EMDdenoise a la señal $s(t)$ con los valores de la constante c ya mencionados se resumen en la tabla 4.1. Se observa que el menor error se obtiene para $c = 0.5$ y en segundo lugar $c = 0.4$. No es necesario tomar valores mayores de 1.1 para c ya que se observa la tendencia creciente del error a partir de $c = 0.5$. Este será el valor del parámetro c que se utilizará al aplicar el algoritmo EMDdenoise en las siguientes secciones de este capítulo.

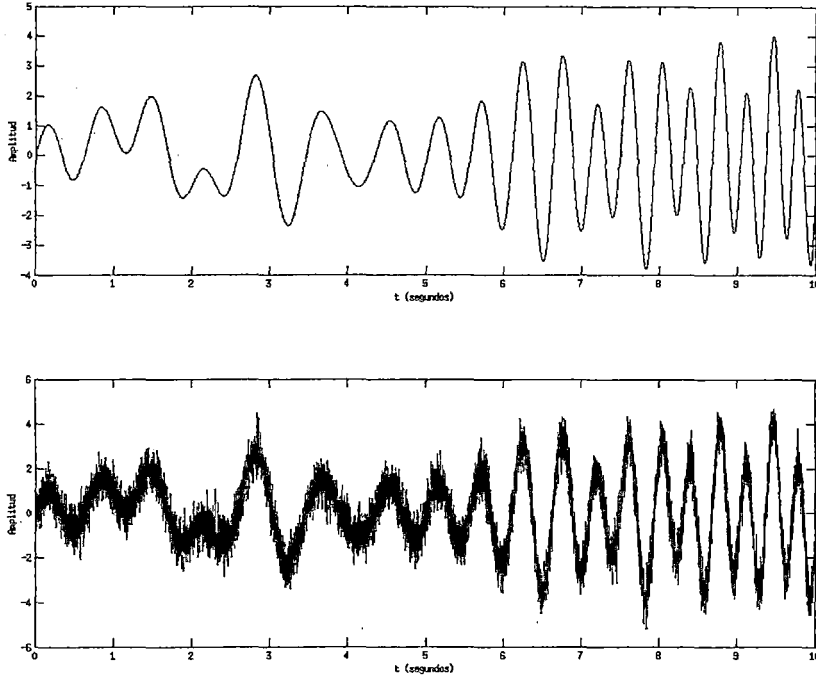


Figura 4.2: Señal de prueba $s(t)$ sin ruido y con ruido agregado

c	$\ s - \tilde{s}\ $
0.1	26.08
0.2	21.89
0.3	18.97
0.4	17.50
0.5	17.40
0.6	18.26
0.7	19.59
0.8	21.18
0.9	22.81
1.0	24.45
1.1	26.02

Tabla 4.1: Resultados del proceso de reducción de ruido en base a EMD de la señal $s(t)$ para diferentes valores de c .

En la Figura (4.3) se muestra la señal ruidosa en color rojo y las 4 primeras IMF's obtenidas después de aplicar el proceso de descomposición modal empírica (EMD) a dicha señal ruidosa. En la Figura (4.4) se muestra la señal reconstruida a partir de la umbralización de las IMF (de color rojo en la parte superior) y las 4 primeras IMF umbralizadas, se puede notar que la umbralización afecta principalmente a las 3 primeras IMF, esto se debe a que las primeras IMF son las que contienen la mayor parte del ruido. Finalmente en la Figura (4.5) se muestra la señal con ruido y la señal después de aplicar el algoritmo de reducción de ruido EMDdenoise.

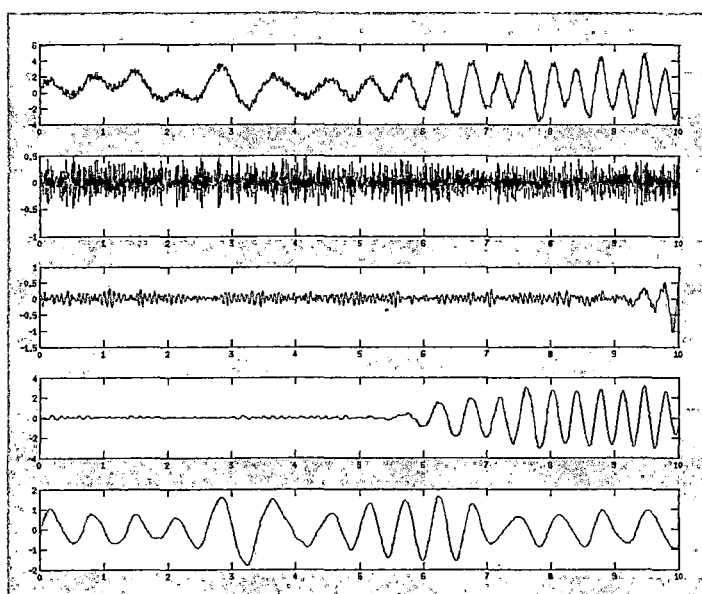


Figura 4.3: Señal $s(t)$ con ruido (en color rojo) y sus cuatro primeras IMF's.

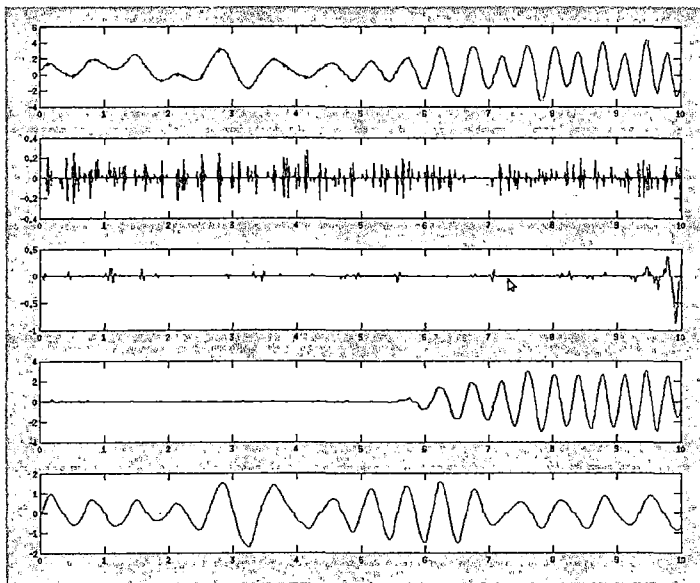


Figura 4.4: Señal $s(t)$ después del proceso de reducción de ruido (en rojo) y las 4 primeras IMFs umbralizadas

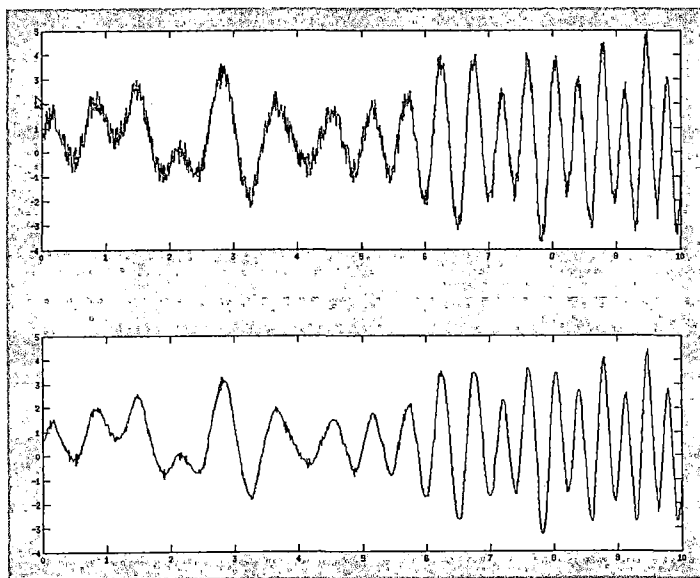


Figura 4.5: Señal $s(t)$ antes y después del proceso de reducción de ruido en base a la EMD.

Como una introducción a la siguiente sección ahora podemos aplicar los algoritmos de reducción de ruido en base a wavelets a la misma señal de

prueba $s(t) = \sqrt{t} \sin(t^2) + \sin(3\pi t)$ para comparar resultados con el algoritmo EMDdenoise. En la siguiente sección se hará esta comparación con otras 6 señales de prueba.

Los métodos de reducción de ruido en base a la transformada wavelet se diferencian por el tipo de umbral utilizado. El primer método utiliza un umbral universal (un mismo valor de umbral para todos los niveles de descomposición) y algunos autores lo conocen como Visushrink y el segundo método utiliza un umbral diferente para cada nivel de descomposición, este método es conocido como Rigorous SURE. A su vez, cada uno de estos dos métodos se implementaron con la wavelet de Daubechies de orden 8 y la wavelet symlet de orden 8 como wavelet madre generando un total de 4 métodos en base a la transformada wavelet y uno en base a la EMD.

En las tablas que se presentan debemos tener en cuenta la siguiente notación:

- Método 1 = Umbral variable con Daubechies 8
- Método 2 = Umbral variable con Symlet 8
- Método 3 = Umbral universal con Daubechies 8
- Método 4 = Umbral universal con Symlet 8
- Método 5 = EMDdenoise

Los resultados de los métodos de reducción de ruido aplicados a nuestra primera señal de prueba, $s(t)$, se resumen en la Tabla (4.2). Para esta señal en particular el método basado en la EMD es superior a los métodos basados en wavelets. En un segundo lugar se encuentran los métodos basados en wavelets con umbral variable y por último el método basado en wavelet con umbral universal es el que tiene peores resultados.

Método	$\ s - sd\ $
método 1	25.866
método 2	23.506
método 3	44.520
método 4	48.723
método 5	17.400

Tabla 4.2: Resultados del proceso de reducción de ruido en la señal $s(t)$

En la figura (4.6) se compara gráficamente las señales filtradas mediante métodos wavelet. Puede observarse que en este caso los métodos que usan umbral universal causan pérdida de información y los métodos con umbral variable aproximan mejor la señal original.

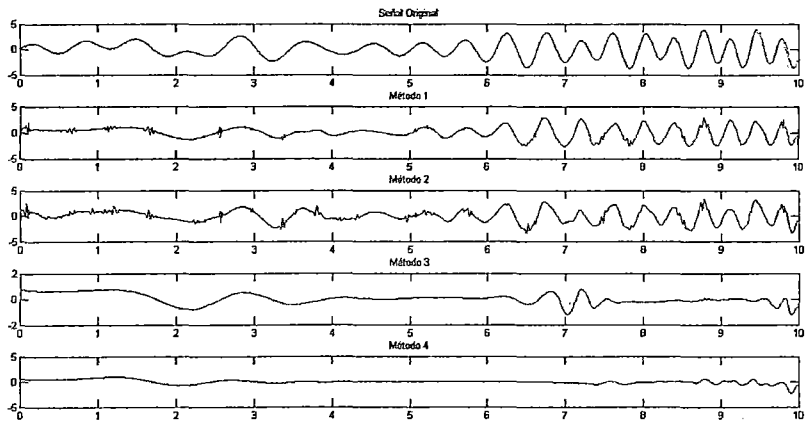


Figura 4.6: Reducción de ruido en base a la transformada wavelet.

4.2. Comparación entre los métodos de reducción de ruido: wavelets vs. EMD

El procedimiento anterior se repitió para las siguientes 6 señales, las cuales son sugeridas para este tipo de experimentos numéricos en [5] ya que suelen presentarse en la naturaleza.

blocks (señal1): $s(t) = \sum h_j K(t - t_j)$ $K(t) = (1 + \text{sgn}(t)) / 2$
 $t_j = \{0.1; 0.13; 0.15; 0.23; 0.25; 0.40; 0.44; 0.65; 0.76; 0.78; 0.81\}$
 $h_j = \{4; -5; 3; -4; 5; -4.2; 2.1; 4.3; -3.1; 2.1; -4.2\}$

bumps (señal2): $s(t) = \sum h_j K\left(\frac{t-t_j}{w_j}\right)$ $K(t) = (1 + |t|)^{-4}$
 $t_j = \{0.1; 0.13; 0.15; 0.23; 0.25; 0.40; 0.44; 0.65; 0.76; 0.78; 0.81\}$
 $h_j = \{4; 5; 3; 4; 5; 4.2; 2.1; 4.3; 3.1; 5.1; 4.2\}$
 $w_j = \{0.005; 0.005; 0.006; 0.01; 0.01; 0.03; 0.01; 0.01; 0.005; 0.008; 0.005\}$

doppler (señal3): $s(t) = \sqrt{t(1-t)} \sin\left(\frac{3\pi}{t+0.5}\right)$

heavi sine (señal4): $s(t) = 4 \sin(4\pi t) - \text{sgn}(t - 0.3) - \text{sgn}(0.7t - 7)$

quad chirp (señal5): $s(t) = \sin(170.67\pi t^3)$

mish mash (señal6): $s(t) = \sin(170.67\pi t^3) + \sin(64\pi t^2) + \sin(353.38\pi t)$

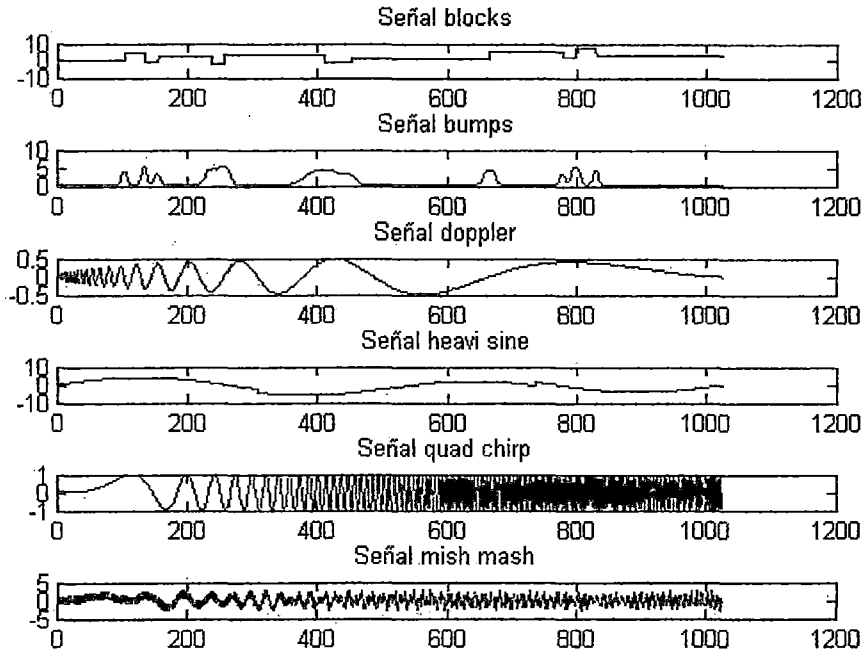


Figura 4.7: Señales de prueba utilizadas para la reducción de ruido.

Al igual que se hizo con la primera señal de prueba, a cada una de estas seis señales se le agrega ruido mediante el comando `randn` para posteriormente aplicar los algoritmos de reducción de ruido en base a wavelets y se compara con el algoritmo de reducción de ruido en base a la EMD. Los resultados se resumen en la tabla 4.3 donde se muestra la norma de la diferencia $\|s - \tilde{s}\|$ entre la señal pura (sin ruido) y la señal obtenida después de aplicar los algoritmos a la señal con ruido agregado.

Método	señal1	señal2	señal3	señal4	señal5	señal6
método 1	44.567	27.064	16.060	13.998	130.550	32.818
método 2	21.140	15.325	15.443	9.719	112.162	32.989
método 3	91.843	72.071	37.023	21.249	141.116	96.911
método 4	50.128	50.976	27.424	16.371	142.850	95.893
método 5	19.119	18.749	18.289	10.855	39.783	35.129

Tabla 4.3: Resultados del proceso de reducción de ruido

Se observa que en el caso de las señales 1 y 6 el método más eficiente es el método 5 (basado en la EMD) mientras que para las señales 2, 3 y 4 el método más eficiente es el método 2 el cual corresponde al método basado en wavelets con umbral dependiente del nivel (Rigorous SURE) seguido muy de cerca por el método en base a la EMD. Solamente en el caso de la señal 5 el método 1 resulta ser el más eficiente pero tiene un resultado casi igual al del método 2 y seguido muy de cerca por el método 5. En todos los casos el método de umbral universal basado en wavelets (métodos 3 y 4) quedan en último lugar.

La reducción de ruido en base a la EMD y el método en base a la wavelet symlet8 con umbral variable siempre nos brinda buenos resultados como se observa en la tabla 4.3 donde en el peor de los casos ofrece resultados muy cercanos al mejor resultado.

4.3. Aplicación a las señales sísmicas

4.3.1. Aplicación del Algoritmo AIC a señales sísmicas

En esta sección veremos la importancia de tener señales con bajos niveles de ruido. Primero usaremos un algoritmo de detección de eventos sísmicos conocido como AIC y veremos que para que se obtengan buenos resultados con ese algoritmo es necesario que la señal a analizar tenga un bajo nivel de ruido.

La figura (4.8) muestra el sismograma antes y después de aplicarle el algoritmo EMDdenoise. En dicho gráfico se observa que el nivel de ruido disminuye, luego se le aplica el algoritmo AIC a la señal filtrada. Se observa que el mínimo absoluto de función AIC corresponde al tiempo de arribo de la fase P. Sin embargo no sucede lo mismo con el segundo sismograma, a pesar de haber sido filtrado con el algoritmo EMDdenoise, al aplicarle el algoritmo AIC este no detecta correctamente el arribo de la onda P. Se observa que la onda P esta cerca de un mínimo relativo del AIC (un poco antes del punto 4000) pero lejos del mínimo absoluto. Este resultado se debe a que la señal original tenía un alto nivel de ruido como se puede observar en la figura (4.10).

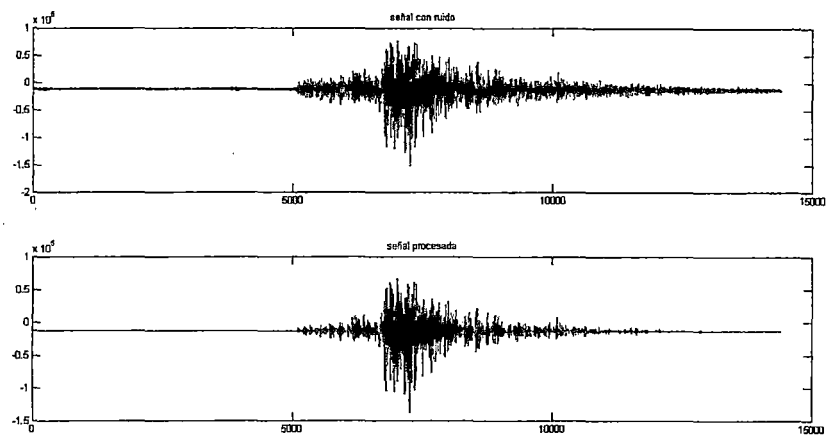


Figura 4.8: Reducción de ruido en base a la EMD aplicado a una señal sísmica.

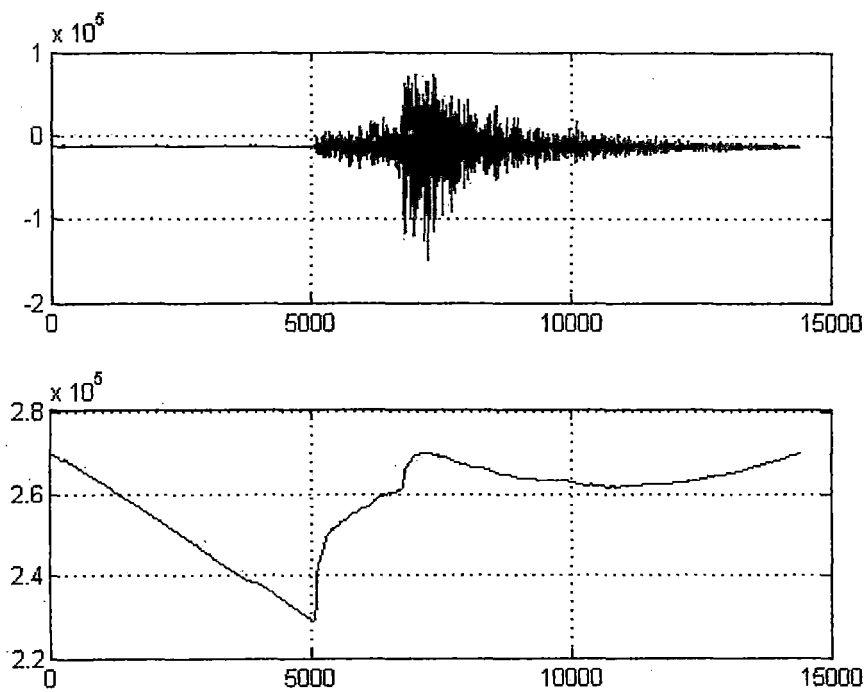


Figura 4.9: Algoritmo AIC aplicado a una señal sísmica después del proceso de reducción de ruido mediante EMD

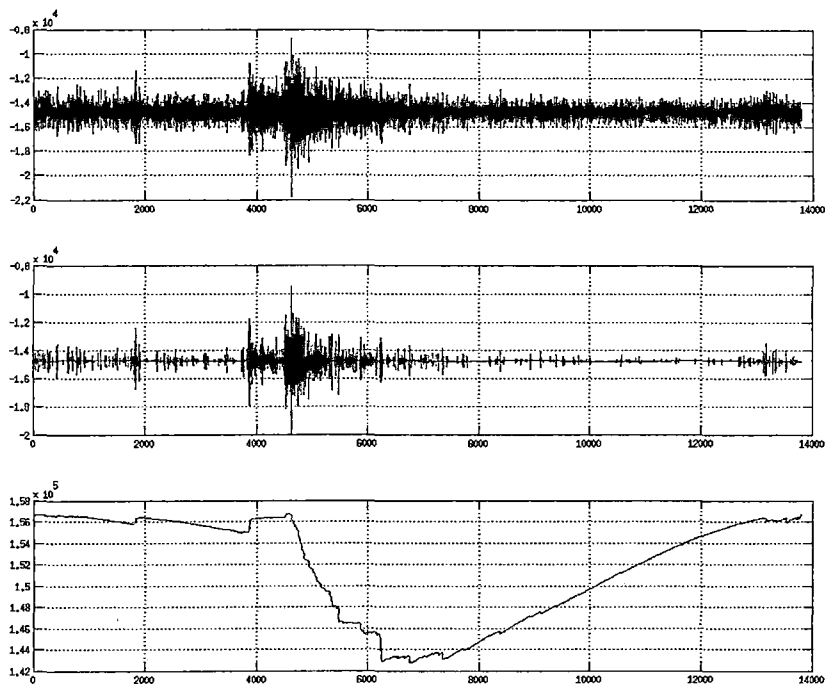


Figura 4.10: Algoritmo AIC aplicado a una señal con elevado nivel de ruido.

4.3.2. Aplicación del Algoritmo STA/LTA a señales sísmicas

Se usaron un total de 34 señales de la estación sísmica de Ancón perteneciente al IGP, de las cuales 23 corresponden a eventos sísmicos y 11 corresponden a señales de ruido. El algoritmo de Earle y Shearer (el cual es un algoritmo de detección de tipo STA/LTA) fue probado con estas señales usando diferentes valores de umbral. Se observó que al escoger un nivel de umbral muy alto se pierde sensibilidad en la detección de eventos sísmicos pero se evita que el programa detecte señales de ruido puro como si fueran eventos sísmicos. Por otro lado cuando se escoge un valor de umbral demasiado bajo se puede detectar la mayoría de eventos sísmicos pero aumenta el número de señales de ruido detectadas como eventos sísmicos. Para optimizar los resultados del algoritmo STA/LTA todas las señales fueron previamente pre-procesadas con el método de reducción de ruido en base a la EMD.

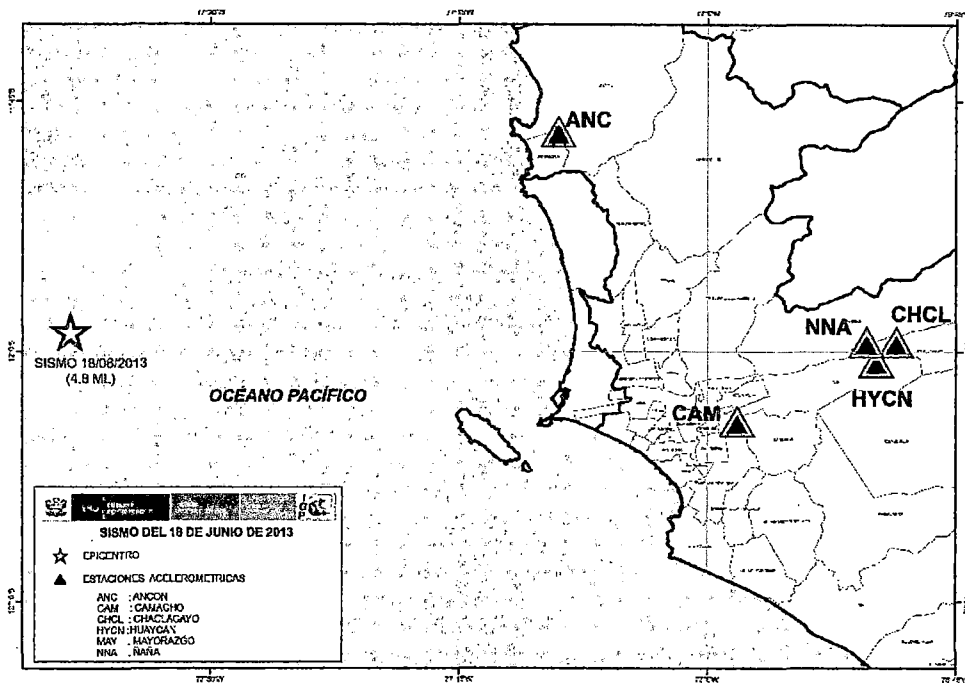


Figura 4.11: Ubicación de algunas de las estaciones sísmicas del IGP. Entre ellas, en la parte superior, la estación de Ancón (ANC).

A) Umbral=7

	Evento sísmico	Ruido
Si se detecta como evento sísmico	18	7
No se detecta como evento sísmico	5	4

Tabla 4.4: Eventos detectados con umbral=7

Correctos	Incorrectos
64.7 %	35.3 %

Tabla 4.5: Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=7

B) Umbral=8

	Evento sísmico	Ruido
Si se detecta como evento sísmico	17	7
No se detecta como evento sísmico	6	4

Tabla 4.6: Eventos detectados con umbral=8

Correctos	Incorrectos
61.8 %	38.2 %

Tabla 4.7: Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=8

C) Umbral=9

	Evento sísmico	Ruido
Si se detecta como evento sísmico	13	5
No se detecta como evento sísmico	10	6

Tabla 4.8: Eventos detectados con umbral=9

Correctos	Incorrectos
55.9%	44.1%

Tabla 4.9: Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=9

D) Umbral=10

	Evento sísmico	Ruido
Si se detecta como evento sísmico	13	2
No se detecta como evento sísmico	10	9

Tabla 4.10: Eventos detectados con umbral=10

Correctos	Incorrectos
64.7%	35.3%

Tabla 4.11: Porcentaje de eventos detectados usando un umbral=10

Al usar un valor de umbral de 7 se detecta 18 de los 23 eventos sísmicos, es decir, la mayoría de eventos sísmicos son detectados, sin embargo también son detectados como eventos sísmicos 7 señales que corresponden a ruido. Esto representa un porcentaje de 64.7% de detecciones correctas.

Cuando el umbral aumenta a 8 la detección de eventos sísmicos empeora ya que se deja de detectar un evento más. Cuando el umbral aumenta a 9 la mayoría de señales de ruido no son detectadas como eventos sísmicos pero se detectan menos eventos sísmicos verdaderos. Finalmente cuando se usa un umbral de 10 se puede detectar 13 eventos sísmicos y solo dos señales de ruido son erróneamente detectadas como eventos sísmicos.

Si bien es cierto algunos eventos sísmicos no se detectaron con el umbral de 10, los eventos sísmicos de mayor intensidad si fueron detectados, además el porcentaje de señales de ruido detectadas como evento sísmico fue mínimo.

Las falsas detecciones (señales que contienen solo ruido y que son detectadas como eventos sísmicos) ocurren generalmente debido a un aumento repentino en el nivel de ruido como se puede observar en la figura (4.14). Mientras que los eventos sísmicos que no son detectados generalmente contienen un alto nivel de ruido aun después de aplicar los métodos de reducción de ruido. Esto demuestra la importancia de tratar de disminuir el nivel de ruido cualquiera que sea la señal estudiada. Un adecuado proceso de reducción de ruido permite obtener con mayor exactitud los parametros de la señal o serie de tiempo estudiada.

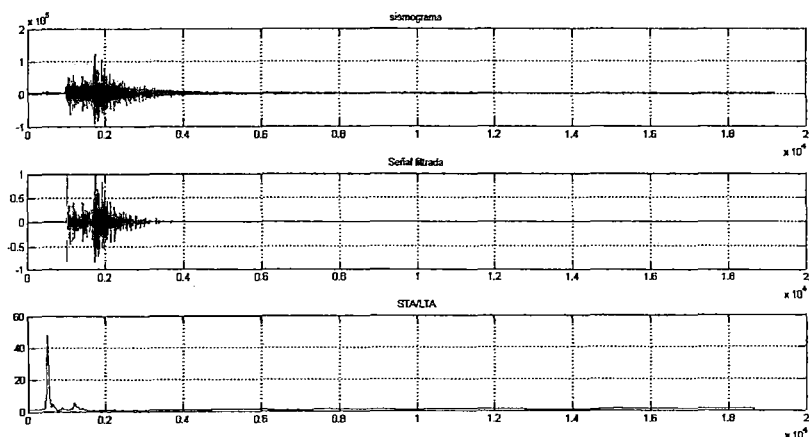


Figura 4.12: Detección correcta de una señal con bajo nivel de ruido.

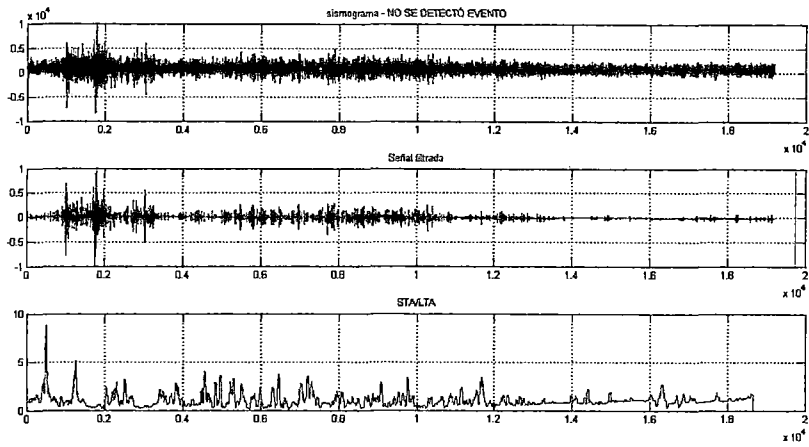


Figura 4.13: No se detecta el evento sísmico debido al alto nivel de ruido.

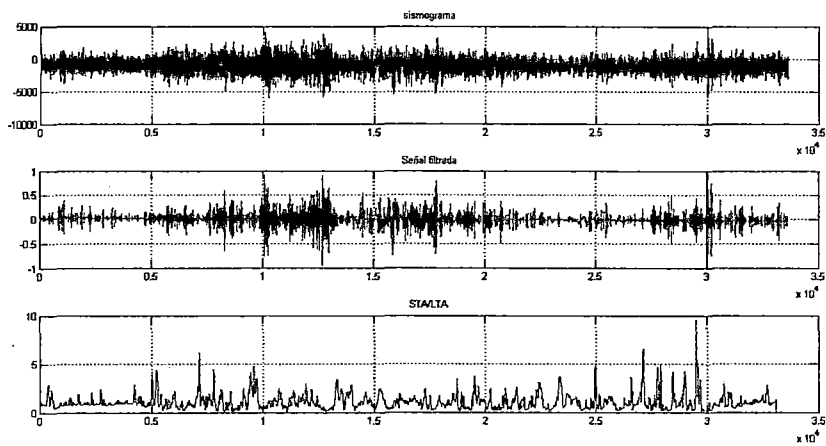


Figura 4.14: Falsa detección debido al alto nivel de ruido.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

- Para el procesamiento de señales mediante algoritmos matemáticos es necesario trabajar con señales en tiempo discreto, si se tienen señales analógicas primero deben pasar por un proceso de discretización o muestreo.
- El análisis de Fourier permite describir completamente el contenido de frecuencias de una señal estacionaria ya que estas señales por definición contienen frecuencias que no varían en el tiempo, cuando la señal de interés es no estacionaria el análisis de Fourier resulta ser insuficiente ya que no permite conocer el comportamiento de las frecuencias con respecto al tiempo.
- La transformada wavelet permite descomponer una señal en una suma de señales localizadas en tiempo y en frecuencia y proporciona información de la evolución de las frecuencias con respecto al tiempo.
- La transformada de Hilbert-Huang es un método de análisis de señales no estacionarias el cual se basa en un algoritmo de descomposición de señales conocido como Descomposición Modal Empírica (EMD) y en la transformada de Hilbert. Este método nos permite conocer el comportamiento de las frecuencias intrínsecas de una señal a través del tiempo.
- Al analizar señales reales es importante pre-procesar la señal con métodos de reducción de ruido para obtener resultados más exactos en la etapa del procesamiento.

- Con los experimentos numéricos realizados se demuestra que los algoritmos en base a wavelets y en base a la EMD logran reducir el ruido tanto en las señales de prueba como en las señales sísmicas permitiendo de esta forma un mejor procesamiento de las mismas.
- El algoritmo AIC sirve para detectar el arribo de la fase P. Este algoritmo brinda buenos resultados solo cuando la señal de entrada tiene un bajo nivel de ruido.
- El algoritmo de detección de señales de tipo STA/LTA es efectivo al detectar eventos sísmicos de alta magnitud. Los parámetros utilizados en el algoritmo dependen de las condiciones de ruido en la estación sísmica. Para el caso de la estación de Ancón, después de calibrar adecuadamente y analizar los resultados, se obtuvo que un valor de umbral igual 10 era adecuado si se desea detectar solo eventos de alta magnitud.
- Por último, como trabajo a futuro se viene preparando una publicación para la revista TECNIA en base a los resultados de los algoritmos de filtrado de ruido y detección de señales sísmicas.

Anexo A

Algoritmos implementados en Matlab

A.1. Algoritmo de umbralización

```
1 function [ sin_ruido ] = umbralizar( con_ruido , tau )
2 L=length(con_ruido);
3 sin_ruido=zeros(L,1);
4 for i=1:L
5     if con_ruido(i)>=tau
6         sin_ruido(i)=con_ruido(i)-tau;
7     elseif abs(con_ruido(i))<tau
8         sin_ruido(i)=0;
9     else
10        sin_ruido(i)=con_ruido(i)+tau;
11    end
12 end
13 end
```

A.2. Umbralización de los IMF

```
1 function [ matriz_sinRuido ] = denoise1( xn , C, l ) %no se
   umbralizan los ultimos l IMF
2 matriz=eemd(xn,0.2,100);
3 [m,n]=size(matriz);
4 matriz_sinRuido=matriz;
5 matriz_sinRuido(:,1)=zeros(1,m);
6 E=zeros(n);
7 tau=zeros(n);
8 E(1)=var(matriz(:,2));
9 tau(1)=C*sqrt(E(1)*2*log(m));
10 for i=2:n
11     E(i)=E(1)*(2.01^(-i))/0.719;
12     tau(i)=C*sqrt(E(i)*2*log(m));
13 end
14 for j=2:n-1
15     matriz_sinRuido(:,j)=denoise(matriz(:,j),tau(j));
16 end
17 for k=2:n
18     matriz_sinRuido(:,1)=matriz_sinRuido(:,1)+matriz_sinRuido(:,
        k);
19 end
20 end
```

A.3. EMDdenoise para la primera señal de prueba - elección del parametro C.

```
1 matriz=eemd(xn,0.2,100);
2 temp=zeros(11,2);
3 c=(0.1:0.1:1.1);
4 for ii=1:11
5     matriz1=denoise1(matriz,c(ii),4);
6     xd=matriz1(:,1);
7     v=norm(x'-xd);
8     temp(ii,:)=[c(ii) v];
9     fprintf('\nPara_c=%3.1f_se_tiene_||x-xd||=%6.4f\n',c(ii),v);
10 end
11 [vmin,jj]=min(temp(:,2));
12 matriz1=denoise1(matriz,c(jj),4);
13 xd=matriz1(:,1);
14 graficar;
15 fprintf('\n\nEl_error_minimo_es_ %6.4f_para_c=%3.1f\n\n\n',vmin,
        c(jj));
```

A.4. AIC picker

```
1 AIC=zeros(1,length(x));
2 for k=1:length(x)
3     AIC(k)=k*log(var(x(1:k)))+(length(x)-k-1)*log(var(x(k+1:
4         length(x))));
5 end
6 plot(AIC);
```

A.5. Grafica de las IMF antes y después de la umbralización

```
1 figure(1); %EMD de la senal ruidosa
2 subplot(5,1,1);
3 plot(matriz(:,1),'r');
4 ylabel='x(t)';
5 for ii=2:5
6     subplot(5,1,ii);
7     plot(matriz(:,ii));
8 end
9 figure(2); %EMD de la senal despues del filtrado
10 subplot(5,1,1);
11 plot(matriz1(:,1),'r');
12 for ii=2:5
13     subplot(5,1,ii);
14     plot(matriz1(:,ii));
15 end
16 figure(3); % Comparacion
17 subplot(3,1,1); plot(x); title('Senal_original');
18 subplot(3,1,2); plot(xn); title('Senal_ruidosa');
19 subplot(3,1,3); plot(xd); title('Senal_despues_del_filtrado_por
    EMD');
```

A.6. Filtrado de ruido en base a wavelets

```
1 [x,xn]=wnoise(FUN,10,5);
2 xd=wden(xn,'sqtwolog','s','mln',7,'db8');
3 xd1=wden(xn,'sqtwolog','s','mln',7,'sym8');
4 xd2=wden(xn,'rigrsure','s','mln',7,'db8');
5 xd3=wden(xn,'rigrsure','s','mln',7,'sym8');
6 save 'signal' x -ascii
7 save 'signal_ruidosa' xn -ascii
8 save 'denoise_sqtwolog_db8' xd -ascii
9 save 'denoise_sqtwolog_sym8' xd1 -ascii
10 save 'denoise_rigrsure_db8' xd2 -ascii
11 save 'denoise_rigrsure_sym8' xd3 -ascii
```


A.7. Algoritmo de detección de eventos sísmicos

```

1 LTA=500; STA=50; umbral=9;
2 DC=sum(s)/length(s);
3 s1=s-DC;
4 maximo=max(abs(s1));
5 s2=s1/maximo;
6 env=abs(hilbert(s2));
7 l=length(s);
8 ii=1;
9 prom_sta=zeros(1,length(s));
10 prom_lta=zeros(1,length(s));
11 r=zeros(1,length(s));
12 while ii+LTA+STA<l
13   prom_sta(ii)=sum(env(ii+LTA:ii+LTA+STA))/(STA+1);
14   prom_lta(ii)=sum(env(ii:ii+LTA))/(LTA+1);
15   r(ii)=prom_sta(ii)/prom_lta(ii);
16   ii=ii+1;
17 end
18 jj=1;
19 while jj<length(r)+1 && r(jj)<umbral
20   jj=jj+1;
21 end
22 if jj~=length(r)+1
23   sismograma=strcat('s',int2str(vector(k)),'.txt');
24   sn=load(sismograma);
25   subplot(3,1,1); plot(sn); grid on; title('sismograma');
26   subplot(3,1,2);
27   plot(s2); title('Sennal_filtrada')
28   hold on;
29   %plot(env,'r');
30   plot([jj+LTA+STA jj+STA+LTA],[min(s2) max(s2)], 'g');
31   grid on;
32   subplot(3,1,3); plot(r); title('STA/LTA');
33   hold on;
34   %plot([jj+LTA+STA jj+STA+LTA],[min(r) max(r)], 'r');
35   grid on;
36   hold off;
37 else
38   sismograma=strcat('s',int2str(vector(k)),'.txt');
39   sn=load(sismograma);
40   subplot(3,1,1); plot(sn); grid on; title('sismograma_--NO_
      SEL_DETECCIO_EVENTO');
41   subplot(3,1,2);
42   plot(s2); title('Sennal_filtrada')
43   hold on;

```

```
44  %plot(env, 'r');
45  plot([jj+LTA+STA jj+STA+LTA],[min(s2) max(s2)], 'g');
46  grid on;
47  subplot(3,1,3); plot(r); title('STA/LTA');
48  hold on;
49  %plot([jj+LTA+STA jj+STA+LTA],[min(r) max(r)], 'r');
50  grid on;
51  hold off;
52 end
```

Bibliografía

- [1] Gabor, D. Theory of Communication. Proc. IEE. 1946
- [2] Cohen, L. Time Frequency Analysis.
- [3] Daubechies, 1. Ten Lectures on Wavelets. SIAM. 1992.
- [4] Mallat, S. A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press.1998.
- [5] Donoho, D. Johnstone, M. Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage. Biometrika Trust. 1994.
- [6] Donoho, D. De-Noising by Soft-Thresholding. IEEE Transaction of Information Theory. 1995.
- [7] Joy, J et. Al .Denoising Using Soft Thresholding. International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics ans Instrumentation Engineering Vol. 2. 2013.
- [8] Huang, N. The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series Analysis.Proc. R. SocoLond. A, vol. 454. 1998.
- [9] Huang, N. E., and S. S. P. Shen (Eds.) (2005), Hilbert-Huang Transform and Its Applications, 311 pp., World Sci., Singapore.
- [10] Huang, N. E., C. C. Chern, K. Huang, L. W. Salvino, S. R. Long, and K. L. Fan (2001), A new spectral representation of earth-quake data: Hilbert spectral analysis of station TCU129, Chi-Chi, Taiwan, 21 September 1999, Bull. Seismol. Soc. Am., 91, 1310 –1338.
- [11] Huang, N. E., M. L. Wu, S. R. Long, S. S. Shen, W. D. Qu, P. Gloersen, and K. L. Fan (2003), A confidence limit for the position empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 459, 2317 – 2345.

- [12] Wu, Z. y Huang, N. A Study of the Characteristics of White Noise Using the Empirical Mode Decomposition Method. Proc. R.Soc.2004
- [13] Wu, Z., and N. E. Huang (2005a), Statistical significant test of intrinsic mode functions, in Hilbert-Huang Transform: Introduction and Applications, edited by N. E. Huang and S. S. P. Shen, pp. 125 – 148, World Sci., Singapore.
- [14] Huang, N. y Wu, Z. A Review on Hilbert-Huang Transform: Method and its Applications to Geophysical Studies. American Geophysical Union. 2008.
- [15] Wu, z y Huang, N. Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method. World Scientific. 2009.
- [16] Flandrin, P., G. Rilling, and P. Goncalves (2004), Empirical mode decomposition as a filter bank, IEEE Signal Process. Lett., 11, 112 – 114, doi:10.1109/LSP.2003.821662.
- [17] P. Flandrin, G. Rilling y P. Goncalves. EMD equivalent filter banks, from interpretation to applications. World Scientific Publishing Company. 2005.
- [18] Boashas, B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals. Proc. IEEE . 1992.
- [19] Kopsinis Y. y McLaughlin S. Empirical mode decomposition based denoising techniques. Primer International Workshop on Cognitive Information Processing (CIP2008). 2008.
- [20] Burrus S. et al.Introduction to Wavelet and Wavelet Transform. Prentice Hall. 1998.
- [21] Haijiang. et al.Automatic P-wave Arrival Detection and Picking with Multiscale Wavelet Analysis for Single-Component Recordings. Bulletin of the Seismological of America, Vol. 93, No. 5, pp. 1904 - 1912. 2003.
- [22] Wolfgang Keller. Wavelets in Geodesy and Geodynamics. Walter de Gruyter Berlin. 2004.
- [23] Mallat, S., A wavelet tour of signal processing. Academic Press San Diego, 1999.
- [24] Meyer, Y., Wavelets and operators. Cambridge University Press, 1992.

- [25] Sabbione Juan et al., Análisis comparativo de diferentes métodos de picado automático de fases de terremotos registrados en la estación sismológica de La Plata. Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas, 2011.
- [26] Allen, R. V., 1982. Automatic phase pickers: their present use and future prospects. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72:S225-S242.
- [27] S. M ALLAT (1 989) , Multiresolution approximation and wavelets, *Trans. Amer. Math. Soc .* , 315, p p . 69-88.