UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST-GRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACION PROFESIONAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS, MENCION: MATEMATICA APLICADA

TITULADA:

DIFERENCIABILIDAD DE LAS VARIEDADES ESTABLES E INESTABLES

PRESENTADO POR:
Mamani Apaza, Edgar Rubén

LIMA-PERU
1999

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

En el marco de la teoría de ecuaciones diferenciables se tiene resultados importantes como el Teorema de Grobman-Hartman. Gracias a las conclusiones de este teorema se consigue definir conjuntos con condiciones especiales; los que tomarán el nombre de Variedades Estables y Variedades Inestables. Un estudio posterior prueba que estas Variedades son el gráfico de una función llamada σ_f. Utilizando las condiciones bajo las cuales la Variedad Estable se constituye en el gráfico de σ_f, pretendemos nosotros probar que σ_f es diferenciable de clase C^1. Conseguimos nuestro objetivo gracias al teorema de "la contracción en las fibras" y argumentos del análisis funcional.

INTRODUCCIÓN

Existen resultados muy importantes en el estudio de la teoría cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, uno de los resultados es la extensión del Teorema de Grobman-Hartman a Espacios Vectoriales de dimensión infinita y su estabilidad local en puntos fijos Hiperbólicos. Las conclusiones de estos estudios mencionados permiten definir conjuntos con ciertas condiciones especiales. Estos Conjuntos son nombrados luego Variedades Estables de tamaño r y Variedades Inestables de tamaño r. Gracias a las propiedades de estos conjuntos se observa que la Variedad Estable de tamaño r es el gráfico de una única función σ_f. Utilizando condiciones y conclusiones de la construcción desarrollada , probamos que σ_f es una función diferenciable de clase C^1.

En el capítulo I y II se trata sobre Operadores lineales sobre espacios de Banach, Operadores Hiperbólicos y teoremas sobre aplicaciones de Lipschitz. Es decir; se presentan preliminares que se utilizan para la prueba final.

En el capítulo III describimos la secuencia que se ha seguido para probar el la estabilidad local de puntos fijos Hiperbólicos; en donde por el teorema de Grobman-Hartman[1] se concluye: " Si $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, U abierto de E que contiene al 0 y $f:U \longrightarrow E$ difeomorfismo sobre su imagen tal que 0 es punto fijo hiperbólico de f, **entonces** $\exists r>0$ y $\exists h \in Hom(E) \,/\, h \circ L = f \circ h$ en $B_r(0) \subseteq E$, $L = Df(0) \in Hip(E)$" . Esta conclusión hace posible, en el capítulo IV, definir el conjunto al que se le llamará Variedad Estable de tamaño r como:

[1] Para un estudio detallado del teorema de Grobman y Hartman véase: Sotomayor, Jorge [17].

$$W_f^s(p,r) = \{q \in U / f^n(q) \in U; \forall n \geq 1 \text{ y } d(f^n(q),p) < r; \forall n \geq 0\}$$

y el conjunto al que se le llamará Variedad Inestable de tamaño r como:

$$W_f^u(p,r) = \{q \in U / f^{-n}(q) \in U; \forall n \geq 1 \text{ y } d(f^{-n}(q),p) < r; \forall n \geq 0\}.$$

Luego, gracias a las propiedades de estas variedades se construye un funcional $\Gamma_f(\sigma_f) = \Pi_s \circ f \circ (id,\sigma_f) \circ [\Pi_u \circ f \circ (id,\sigma_f)]^{-1}$ el cual siendo atractor permite que $G(\sigma_f) = W_f^u(0,r)$. En el capítulo V, finalmente con las condiciones bajo las cuales $G(\sigma_f) = W_f^u(0,r)$ y derivando $\Gamma_f(\sigma_f) \circ \Pi_u \circ f \circ (id,\sigma_f) = \Pi_s \circ f \circ (id,\sigma_f)$ en $x_u \in E_u(r)$, conseguimos construir un funcional:

$$D\Gamma_f(\sigma)\Big|_{(Y_u)} = \Pi_s \circ Df(\xi) \circ (id, D\sigma(\xi_u)) \circ [\Pi_u \circ Df(\xi) \circ (id, D\sigma(\xi_u))]^{-1}.$$

En el cual, disponiendo condiciones correspondientes a la hipótesis del teorema de "la contracción en las fibras" se hace posible que $(\sigma_f, D\sigma_f)$ se constituya en el único punto fijo de el funcional mencionado y de este modo se afirma que σ_f es diferenciable de clase C^1.

No se demuestran todos los teoremas presentados en los capítulos de I al IV pues el detalle de las demostraciones se encuentran en el trabajo de investigación de Guillermo Mamani A. y Juan Mamani C. (ver Bibliografía). Mencionamos los teoremas respetando el orden secuencial que la construcción de la estructura exige en cada uno de los resultados importantes.

CAPÍTULO I

I.1 OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE BANACH

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach sobre el campo K, donde K=R o C. Denotemos por $\mathcal{L}(E,F)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F, es decir:

$$\mathcal{L}(E,F) = \{T: E \longrightarrow F \;/\; T \text{ es lineal y continua}\}$$

Es posible dotar a $\mathcal{L}(E,F)$ de una estructura de espacio de Banach. Para esto, definimos la suma y el producto por un escalar como:

$$+ : \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \quad \text{y} \quad \bullet : K \times \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$
$$(T_1, T_2) \longrightarrow T_1 + T_2 \qquad\qquad (\lambda, T) \longrightarrow \lambda T$$

donde

$$T_1 + T_2 : E \longrightarrow F \qquad \text{y} \qquad \lambda T : E \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow (T_1+T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \qquad \lambda \longrightarrow (\lambda T)(x) = \lambda T(x)$$

De ésta manera $(\mathcal{L}(E,F), +, K, \bullet)$ es un K-espacio vectorial. Podemos definir la norma de un elemento $T \in L(E,F)$ como:

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$T \longrightarrow \|T\| = \sup \left\{ \|Tx\|_F : x \in E \wedge \|x\|_E = 1 \right\}$$

Es fácil probar que $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach[2]. Si E=F denotaremos $\mathcal{L}(E)$ en vez de $\mathcal{L}(E,E)$.

Denotaremos por GL(E) al conjunto de todos los $L \in \mathcal{L}(E)$ biyectivas:

$$GL(E) = \{L \in \mathcal{L}(E) \;/\; L \text{ es biyectivo}\}$$

[2] Una prueba de que $(\mathcal{L}(E,E), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, está en el texto de Mauro C. R. [10]

Luego por el Teorema de la aplicación abierta se tiene que $L^{-1}\mathscr{L}(E)$, puesto que L es continuo, lineal y biyectivo.

El siguiente teorema nos ha de ser muy útil para convertir operadores de la forma $I+T$ ó $I-T$.

TEOREMA I.1.1. *Sea* $T\in \mathscr{L}(E)$ *tal que* $\| T \| < 1$. *Se cumple*:

i) $I-T \in \mathscr{L}(E)$, $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad \wedge \quad \left\| (I-T)^{-1} \right\| \leq \dfrac{1}{1-\| T \|}$

ii) $I+T \in GL(E)$, $(I+T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T^k \quad \wedge \quad \left\| (I+T)^{-1} \right\| \leq \dfrac{1}{1-\| T \|}$

Una generalización del teorema I.1.1 está dado por el corolario siguiente:

COROLARIO Sea $T\in\mathscr{L}(E)$ y $L\in\mathscr{L}(E)$ tal que $\| T \| < \left\| L^{-1} \right\|^{-1}$. Entonces

i) $L-T \in GL(E)$, $(L-T)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} L^{-(k+1)} \circ T^k$ y $\left\| (L-T)^{-1} \right\| \leq \dfrac{1}{\left\| L^{-1} \right\|^{-1} - \| T \|}$

ii) $L+T \in GL(E), (L+T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^{-(k+1)} \circ T^k$ y $\left\| (L+T)^{-1} \right\| \leq \dfrac{1}{\left\| L^{-1} \right\|^{-1} - \| T \|}$

Prueba:

i) Podemos expresar $L-T = L\circ\left(I - L^{-1}\circ T\right)$, como $L\in GL(E)$, $\Rightarrow$ $L^{-1} \in \mathscr{L}(E)$ y como $T \in GL(E) \Rightarrow L^{-1}\circ T \in \mathscr{L}(E)$ y

$$\left\| L^{-1}\circ T \right\| \leq \left\| L^{-1} \right\| \| T \| < \left\| L^{-1} \right\| \left\| L^{-1} \right\|^{-1} = 1$$

con estas condiciones podemos usar el Teorema I.1.1-(i). En efecto

$$\left(I - L^{-1}\circ T\right) \in GL(E)\ ,\ \left(I - L^{-1}\circ T\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(L^{-1}\circ T\right)^k \ , \text{ y}$$

$$\left\| \left(I - L^{-1}\circ T\right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \left\| L^{-1}\circ T \right\|}$$

como $L\in GL(E)$, $\Rightarrow$ $L\circ\left(I - L^{-1}\circ T\right) \in GL(E) \Rightarrow L-T \in GL(E)$. Luego:

$$(L-T)^{-1} = \left[L\circ\left(I-L^{-1}\circ T\right)\right]^{-1} = \left(I - L^{-1}\circ T\right)^{-1}\circ L^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(L^{-1}T\right)^k \circ L^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-(k+1)} T^k$$

$$\| (L - T)^{-1} \| \leq \| (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \| \, \| L^{-1} \| \leq \frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \circ T \|} \qquad (1)$$

por otro lado tenemos

$$\frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \circ T \|} \leq \frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \| \, \| T \|} = \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|} \qquad (2)$$

de (1) y (2), se tiene $\| (L - T)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$

ii) Como $\| - T \| = \| T \| < \| L^{-1} \|^{-1}$ por lo anterior tenemos $L - (-T) = L + T \in$ GL(E)

$$(L + T)^{-1} = [L - (-T)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-(k+1)} \circ (-T)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^{-(k+1)} \circ T^k$$

$$\| (L + T)^{-1} \| \leq \| (L - (-T))^{-1} \| \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| -T \|} \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA I.1.2 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach . GL(E) es un subconjunto abierto de* $\mathcal{L}(E)$.

TEOREMA I.1.3 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. La aplicación*

$$\Psi : GL(E) \longrightarrow GL(E)$$
$$L \longrightarrow \Psi(L) = L^{-1}$$ *es continua.*

El siguiente teorema generaliza la inversión cuando se trabajan con operadores que actúan en dos espacios de Banach distintos.

TEOREMA I.1.4 *Sea* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *dos espacios de Banach.*

Sea $L \in \mathcal{L}(E,F)$ *tal que* L *es biyectiva y* $L^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$. *Sea* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *tal que* $\| T \| < \| L^{-1} \|^{-1}$. *Entonces:*

i) $L - T$ *es invertible,* $(L - T)^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ *y*

$$\| (L - T)^{-1} \| \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$$

ii) $L+T$ *es invertible,* $(L+T)^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ y $\|(L+T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|T\|}$.

I.2 EL ESPECTRO DE UN OPERADOR LINEAL COMPLEJO

DEFINICIÓN I.2.1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un **C**-espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. El RESOLVENTE de T, denotado por $\rho(T)$, es el conjunto de los números complejos λ tales que: $\lambda I - T \in GL(E)$.

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} \,/\, \lambda I - T \in GL(E)\}$$

EL ESPECTRO de T denotado por $\Sigma(T)$ es el complemento de $\rho(T)$ en **C**.

$$\Sigma(T) = \mathbf{C} \setminus \rho(T)$$

Dado $\lambda_0 \in \rho(T)$ fijo arbitrario. Notamos que $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B_\varepsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T)$, entonces $\rho(T)$ es abierto. Luego $\Sigma(T)$ es cerrado.

PROPOSICIÓN I.2.1 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $T \in \mathcal{L}(E)$. *Se cumple:*

i) $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$

ii) $(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} T^k$ *(serie de Neumann)*

iii) $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|T\|}$

Por la Proposición anterior se tiene: $\mathbf{C} \setminus \overline{B_{\|T\|}(0)} \subseteq \rho(T)$. Entonces $\Sigma(T) \subseteq \overline{B_{\|T\|}(0)}$ entonces $\Sigma(T)$ es acotado. En consecuencia $\Sigma(T)$ es compacto en **C**.

TEOREMA I.2.2 (Liouville). *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach complejo y* $g: \mathbf{C} \longrightarrow E$ *función analítica.*

i) $\lim_{|\lambda| \to \infty} g(\lambda) = 0 \Rightarrow g$ *es acotada.*

ii) g *es acotada* $\Rightarrow g$ *es una constante*

PROPOSICIÓN I.2.3 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach en* $\mathbf{C}$*. Sea* $T \in \mathcal{L}(E)$ *y* $\lambda_o \in \rho(T)$. *Si* $\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_o)$, *con* $\varepsilon = \| R_T(\lambda_o) \|^{-1}$.

Entonces

$$R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{-1} (\lambda - \lambda_o)^{-1} R_T(\lambda_o)^{k+1}$$

TEOREMA I.2.4 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach en* **C**, *y* $T \in \mathcal{L}(E)$.

Entonces

$$\Sigma(T) \neq \phi$$

Prueba: Procediendo por contradicción. Supongamos que: $\Sigma(T) = \phi$ entonces $\rho(T) = \mathbf{C}$, tenemos entonces la aplicación

$$\begin{aligned} R_T : \mathbf{C} &\longrightarrow L(E) \\ \lambda &\longrightarrow R_T(\lambda) \end{aligned}$$

está definida en los complejos. Por la proposición anterior se tiene que R_T es analítica, y usando la serie de Neumann

$$R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda)^{-(k+1)} T^k \quad \text{y}$$

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} R_T(\lambda) = \lim_{|\lambda| \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{|\lambda| \to \infty} \left(\lambda^{-(k+1)}\right) T^k = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{|\lambda| \to \infty} R_T(\lambda) = 0$$

Luego, por el Teorema I.2.3 (Liouville), $R_T(\lambda)$ es constante.

$$\Rightarrow R_T(0) = R_T(1) \Rightarrow 0I - T = 1I - T \Rightarrow 0 = 1 \ (\Rightarrow \mid \Leftarrow)$$

$\therefore\ \Sigma(T) \neq \phi$ ■

DEFINICION I.2.2 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach en **C**, y sea $T \in \mathcal{L}(E)$ el **radio espectral** de T, denotado por $r(T)$, se define como

$$r(T) = \text{máx}\{\,|\lambda| \ / \lambda \in \Sigma(T)\,\}$$

Fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|T^n\|} \quad , \quad \forall\ T \in \mathcal{L}(E)$$

PROPOSICIÓN I.2.5 (Ecuación de la resolvente). *Sea* $T \in \mathcal{L}(E)$ *donde* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach complejo. Sea* $\lambda, \mu \in \rho(T)$, *se cumple:*

$$R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\mu - \lambda) R_T(\lambda) \circ R_T(\mu).$$

PROPOSICIÓN I.2.6 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach complejo,* $T \in \mathcal{L}(E)$, *se cumple*:

$$R_T(\lambda) \circ T = T \circ R_T(\lambda) \quad , \quad \lambda \in \rho(T)$$

LEMA I.2.7 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach y* $P \in \mathcal{L}(E)$ *un operador tal que* $P^2 = P$. *Entonces* $N(P)$ *e* $Im(P)$ *son subespacios cerrados de* E *y* $E = N(P) \oplus Im(P)$.

TEOREMA I.2.8 (Descomposición espectral) *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach complejo y* $T \in \mathcal{L}(E)$ *tal que* $\Sigma(T) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, *en*

donde $\Sigma_1 \subseteq B_1(0)$ *y* $\Sigma_2 = \mathbf{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. *Entonces, existe una descomposición de E en subespacios cerrados* E_1, E_2 *tal que*

i) $E = E_1 \oplus E_2$.

ii) $T_1 = T|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1) \ \wedge\ T_2 = T|_{E_2} \in \mathcal{L}(E_2)$

iii) $\Sigma(T_1) = \Sigma_1 \ \wedge\ \Sigma(T_2) = \Sigma_2$

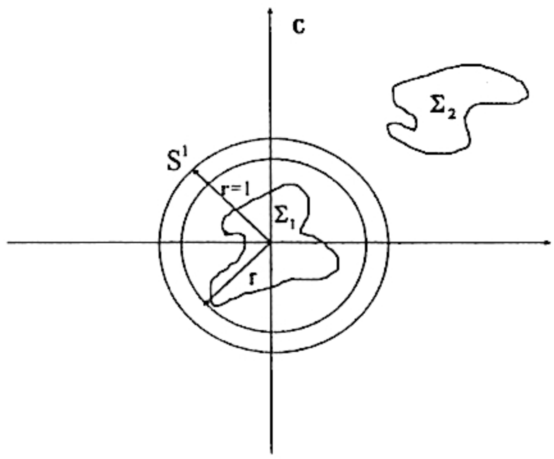
Desarrollamos su prueba por su importancia en el presente trabajo.

Prueba: La idea es construir un operador $P \in \mathcal{L}(E)$ que satisfaga la hipótesis del Lema I.2.7, de ésta manera se cumplirá la parte (i), las otras dos condiciones se deducirán de la forma del operador P.

Obsérvese que por hipótesis se tiene $\Sigma(T) \cap S^1 = \phi$ entonces $S^1 \subseteq \rho(T)$, luego si $|\lambda| = 1 \Rightarrow \exists\, R_T(\lambda)$. Defino entonces:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda$$

Como $R_T(\lambda) \in \mathcal{L}(E)$, $\forall\, \lambda \in S^1$ entonces P es lineal.



Ahora probemos que P es acotado

$$\| P \| = \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \| R_T(\lambda) \| d\lambda \tag{1}$$

como

$$R_T : S^1 \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$\lambda \longrightarrow R_T(\lambda)$$

es analítica, entonces es continua y desde que S^1 es compacto

$$\exists\, \lambda_0 \,/\, \| R_T(\lambda) \| \leq \| R_T(\lambda_0) \| \quad , \quad \forall\, \lambda \in S^1$$

remplazando este resultado en (1). Tenemos

$$\| P \| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \| R_T(\lambda_0) \| d\lambda = \frac{1}{2\pi} \| R_T(\lambda_0) \| \int_{|\lambda|=1} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \| R_T(\lambda_0) \| 2\pi = \| R_T(\lambda_0) \|$$

Entonces como P es acotado entonces P es continua, por tanto $P \in \mathcal{L}(E)$.

Como $\Sigma_1 = \Sigma(T) \cap \overline{B_1(0)}$ es cerrado, compacto y está contenido $\Sigma(T)$, entonces Σ_1 es compacto; se tiene que S^1 es compacto, entonces $d(\Sigma_1, S^1) > 0$, luego, $\exists$ r > 0 tal que el anillo

$$A(r,1) = \{z \in \mathbf{C} / r \leq \| z \| < 1\} \subseteq \rho(T) \ ,$$

De ésta manera, como $R_T(\lambda)$ es analítica $\forall \lambda \in \rho(T)$, podemos definir indistintamente

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r} R_T(\mu)d\mu$$

Probaremos que P es una proyección:

$$P \circ P = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda\right) \circ \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r} R_T(\mu)d\mu\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\left(\int_{|\mu|=r} R_T(\mu)d\mu\right)d\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1}\left(\int_{|\mu|=r} R_T(\lambda)\circ R_T(\mu)d\mu\right)d\lambda$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left[\int_{|\lambda|=1}\left(\int_{|\mu|=r}\left(\frac{d\mu}{\mu-\lambda}\right)\right)R_T(\lambda)d\lambda - \int_{|\mu|=r}\left(\int_{|\lambda|=1}\left(\frac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right)d\mu\right)R_T(\mu)d\lambda\right] \qquad (2)$$

Como $|\lambda| = 1 > r$, λ es un punto exterior al círculo de radio r centrado en cero. Luego el número de vueltas de dicho círculo alrededor de λ es cero (ver anexo), es decir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r}\left(\frac{d\mu}{\mu-\lambda}\right) = 0 \qquad (3)$$

Por otro lado μ, es un punto interior a S^1, luego el número de vueltas de S^1 alrededor de μ es 1, es decir[3]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\left(\frac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right) = 1 \qquad (4)$$

Remplazando (3) y (4) en (2)

$$P \circ P = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left[0 + \int_{|\mu|=r} R_T(\mu)\, d\mu\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r} R_T(\mu)\, d\mu = P$$

$\therefore$ P es una proyección

Por el Lema I.2.7, tenemos $E = N(P) \oplus Im(P)$ con $N(P)$ e $Im(P)$ subespacios cerrados de E. Obsérvese ademas que:

$$P \circ T = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\, d\lambda\right)\circ T = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\circ T\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} T\circ R_T(\lambda)\, d\lambda$$

$$= T \circ \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\, d\lambda\right) = T \circ P \quad ,$$

[3] Usamos aquí el teorema de Cauchy para una integral cerrada. Vease M.L. Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makarenko - [9]

$$\therefore\ P\circ T = T\circ P.$$

Con ésta propiedad probaremos que

$$T|_{N(P)} \in \mathcal{L}(N(P)) \ \wedge \ \ T|_{\mathrm{Im}(P)} \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(P))$$

En efecto

$$x \in N(P) \Rightarrow P(T(x)) = P\circ T(x) = T\circ P(x) = T(P(x)) = T(0) = 0 \ \Rightarrow T(x)\in N(P)$$

$$x \in \mathrm{Im}(P) \Rightarrow P(T(x)) = P\circ T(x) = T\circ P(x) = T(P(x)) = T(x) \ \Rightarrow T(x)\in \mathrm{Im}(P)$$

Resta probar (iii), para ello definimos:

$$H = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \tfrac{R_T(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda \text{ , en donde } \mu \notin S^1$$

Se tiene que:

$$H\circ(\mu I - T) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \tfrac{R_T(\lambda)\circ(\mu I - T)}{\mu-\lambda}\, d\lambda\,. \tag{5}$$

$$\frac{R_T(\lambda)\circ(\mu I - T)}{\mu-\lambda} = \frac{(\lambda I - T)^{-1}\circ(\mu I - \lambda I + \lambda I - T)}{\mu-\lambda} = -(\lambda I - T)^{-1} + \left(\tfrac{1}{\mu-\lambda}\right)\circ I$$

$$= -R_T(\lambda) + \left(\tfrac{1}{\mu-\lambda}\right)\circ I$$

Reemplazamos este resultado en (5)

$$H\circ(\mu I - T) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\left(-R_T(\lambda) + \left(\tfrac{1}{\mu-\lambda}\right)\circ I\right) d\lambda$$

$$= -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda + \left(\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\tfrac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right)\circ I \tag{6}$$

Luego, para

$$(\mu I - T)\circ H = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \tfrac{(\mu I - T)\circ R_T(\lambda)}{\lambda-\mu}\, d\lambda \tag{7}$$

en forma similar a lo anterior se llega a:

$$(\mu I - T)\circ H = -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda + \left(\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\tfrac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right)\circ I \tag{8}$$

De (6) y de (8) se tiene $H\circ(\mu I - T) = (\mu I - T)\circ H$. Luego

$$H\circ(\mu I - T) = (\mu I - T)\circ H = \begin{cases} I - P & , \ \text{si } |\mu| < 1 \\ -P & , \ \text{si } |\mu| > 1 \end{cases} \tag{9}$$

Además

$$H\circ P = \left(\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \tfrac{R_T(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda\right)\circ\left(\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\alpha|=r} R_T(\alpha)\, d\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1}\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\int_{|\alpha|=r}R_T(\lambda)\circ R_T(\alpha)d\alpha\right)d\lambda$$

(10)

se tiene

$$R_T(\lambda)\circ R_T(\alpha)=\frac{R_T(\lambda)-R_T(\alpha)}{\lambda-\alpha}=\frac{-\left(R_T(\alpha)-R_T(\lambda)\right)}{-(\alpha-\lambda)}=R_T(\alpha)\circ R_T(\lambda)$$

$$\therefore\ R_T(\lambda)\circ R_T(\alpha)=R_T(\alpha)\circ R_T(\lambda)$$

Reemplazando en (10)

$$H\circ P=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1}\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\int_{|\alpha|=r}R_T(\alpha)\circ R_T(\lambda)\ d\alpha\right)d\lambda$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\alpha|=r}R_T(\alpha)\,d\alpha\right)\circ\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{R_T(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\right)=P\circ H$$

$$\therefore\ H\circ P=P\circ H$$

Luego

$$x\in N(P)\ \Rightarrow\ P(H(x))=P\circ H(x)=H\circ P(x)=H(P(x))=H(0)=0\ \Rightarrow H(x)\in N(P)$$

$$x\in Im(P)\ \Rightarrow\ P(H(x))=P\circ H(x)=H\circ P(x)=H(P(x))=H(x)\ \Rightarrow H(x)\in Im(P)$$

De esta manera

$$H|_{N(P)}\in\mathscr{L}(N(P))\wedge\ \ H|_{Im(P)}\in\mathscr{L}(Im(P))$$

Luego por lo anterior y por (9)

$$x\in N(P)\Rightarrow H\circ(\mu I-T)(x)=(\mu I-T)\circ H(x)=(I-P)(x)=I(x)-P(x)=I(x),$$

si $|\mu|<1$, $H|_{N(P)}\in\mathscr{L}(N(P))$ la inversa de $(\mu I-T)|_{N(P)}\in\mathscr{L}(N(P))$

$$\mu I-T\in GL(N(P))\quad\Rightarrow\quad \mu\in\rho(T_1)\quad \text{con}\quad T_1=T|_{N(P)}$$

$$\Rightarrow\Sigma(T_1)\subseteq\mathbb{C}\setminus\overline{B_1(0)}$$

si $|\mu|>1$, $x\in Im(P)\Rightarrow H\circ(\mu I-T)(x)=(\mu I-T)\circ H(x)=-P(x)=-x$

$$\Rightarrow H|_{Im(P)}\in\mathscr{L}(Im(P))\ \text{es la inversa de}\ (\mu I-T)|_{Im(P)}\in\mathscr{L}(Im(P))$$

$$\mu I-T\in GL(Im(P))\quad\Rightarrow\quad\mu\in\rho(T_2)\quad\text{con}\ T_2=T|_{Im(P)}$$

$$\Rightarrow\Sigma(T_1)\subseteq B_1(0)$$

Se ha denotado $T_1=T|_{N(P)}$ y $T_2=T|_{Im(P)}$, ahora también denotemos a $E_1=Im(P)$ y $E_2=N(P)$, luego tendríamos que: $E=E_1\oplus E_2$ y $T_1\in L(E_1)$,

$T_2 \in (E_2)$. Luego, como $\Sigma(T_2) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)} \Rightarrow \Sigma(T_1) \subseteq B_1(0)$ con T_1 y T_2 ya definidos.

Por último, como

$$\rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(T_2) \quad \Rightarrow \quad \Sigma(T) = \Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \Sigma(T) \cap B_1(0) = \left[\Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)\right] \cap B_1(0) \\
&= \left[\Sigma(T_1) \cap B_1(0)\right] \cup \left[\Sigma(T_2) \cap B_1(0)\right] = \Sigma(T_1) \cup \phi = \Sigma(T_1) \\
\Sigma_2 &= \Sigma(T) \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}\right) = \left[\Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)\right] \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}\right) \\
&= \left[\Sigma(T_1) \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}\right)\right] \cup \left[\Sigma(T_2) \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}\right)\right] \\
&= \phi \cup \Sigma(T_2) = \Sigma(T_2)
\end{aligned}$$

■

TEOREMA I.2.9 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach complejo y sea* $T \in \mathcal{L}(E)$ *tal que* $\Sigma(T) \subseteq B_1(0)$. *Entonces existe una norma* $\|\cdot\|_1$ *equivalente a* $\|\cdot\|$ *y existe* $\alpha \in \left]0, 1\right[$ *tal que:*

$$\| Tx \|_1 \leq \alpha \| x \|_1 \ , \quad \forall x \in E$$

I.3. EL ESPECTRO DE UN OPERADOR LINEAL REAL

Hasta ahora se ha presentado resultados con operadores lineales continuos definidos en un espacio de Banach complejo y se presentó resultados interesantes; ahora queremos que estos resultados también sean válidos cuando se trabaja con operadores lineales continuos definidos en espacios de Banach reales. Para ello se sigue el siguiente esquema; dado un espacio de Banach real se le asocia un espacio de Banach complejo y dado un operador lineal y continuo definido en el espacio de Banach real, se le asocia un operador lineal y continuo definido en un espacio de Banach complejo presentado anteriormente. Estas construcciones serán hechas de tal manera que la norma del nuevo operador, así como su resolvente, coincida con la norma y la resolvente antiguo.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real, le asociamos un **C**-espacio de Banach construido de la misma forma como **C** se construye a partir de **R**.

DEFINICIÓN I.3.1 Sea E un **R**-espacio vectorial, el **complexificado** de E denotado por E_C, es el conjunto

$$E_C = \{ x + iy \ / \ x, y \in E \}$$

en donde $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

A continuación dotaremos a E_C de una estructura de **C**-espacio vectorial

TEOREMA I.3.1 *En* E_C *definimos las operaciones de suma y producto por un escalar:*

$$+ : E_C \times E_C \longrightarrow E_C$$

$$(x + iy, x' + iy') \longrightarrow (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$\bullet : \mathbf{C} \times E_C \longrightarrow E_C$$

$$(\alpha + i\beta, x + iy) \longrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

Entonces $(E_C, +, \mathbf{C}, \bullet)$ *es un espacio vectorial.*

TEOREMA I.3.2 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach real, entonces* $(E, \|\cdot\|_c)$, *es también un espacio de Banach, en donde:*

$$\| (x + iy) \|_c = \max \{ \| x \|, \| y \| \}$$

Prueba: Primero demostraremos que $\|\cdot\|_c$ es una norma en **C.**

N1) $\| z \|_c \geq 0$. En efecto, como $z = x + iy$, entonces

$$\| z \|_c = \| (x + iy) \|_c = \max \{ \| x \|, \| y \| \} \geq \| x \| \ \wedge \ \| y \|,$$

se tiene

$$\| x \| \geq 0 \quad \wedge \quad \| y \| \geq 0$$

$$\therefore \ \| z \|_c \geq 0 \ \forall z \in Ec \ , \ x,y \in E$$

N2) $\| z \|_c = 0 \Leftrightarrow z = \theta$.En efecto, como $z = x + iy$, $x,y \in E$, $z \in Ec$

$$\Rightarrow \| (x+iy) \|_c = \max \left\{ \| x \| , \| y \| \right\} = 0 \geq \| x \| \ \wedge \ \| y \| \Leftrightarrow \| x \| = 0 \ \wedge \ \| y \| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \wedge \ y = 0 \Leftrightarrow z = 0 + i0 = \theta \Leftrightarrow z = \theta$$

N3) $\| \lambda z \|_c = | \lambda | \, \| z \|_c \quad \forall z \in Ec \ , \ x,y \in E$

$$| \lambda | \, \| z \|_c = | \lambda | \max \left\{ \| x \| , \| y \| \right\} = \max \left\{ | \lambda | \, \| x \| , | \lambda | \, \| y \| \right\}$$

$$= \max \left\{ \| \lambda x \| , \| \lambda y \| \right\} = \| \lambda x + i \lambda y \|_c$$

$$= \| \lambda (x+iy) \|_c = \| \lambda z \|_c \ , \ \forall z \in Ec \ , \ x,y \in E$$

N4) $\| z + z' \|_c \leq \| z \|_c + \| z' \|_c \ , \ \forall z,z' \in Ec$

$$\| z + z' \|_c \leq \| (x+iy) + (x' + iy') \|_c = \| (x+x') + i(y+y') \|_c$$

$$= \max \left\{ \| (x+x') \| , \| (y+y') \| \right\} \tag{1}$$

$$\| (x+x') \| \leq \max \left\{ \| x \| , \| y \| \right\} + \max \left\{ \| x' \| , \| y' \| \right\} = \| z \|_c + \| z' \|_c$$

$$\| (y+y') \| \leq \max \left\{ \| x \| , \| y \| \right\} + \max \left\{ \| x' \| , \| y' \| \right\} = \| z \|_c + \| z' \|_c$$

$$\Rightarrow \max \left\{ \| (x+x') \| , \| (y+y') \| \right\} \leq \| z \|_c + \| z' \|_c \ ,$$

y reemplazando en (1):

$$\| z + z' \|_c \leq \| z \|_c + \| z' \|_c \ , \ \forall z,z' \in Ec$$

Luego $(E_c, \| \cdot \|_c)$ es un espacio vectorial normado.

Sea $\{z_n\} \subseteq E_c$ una sucesión de Cauchy en Ec , $z_n = x_n + iy_n$, con $x_n, y_n \in E$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Probaremos que $\{x_n\} \subseteq E_c$, $\{y_n\} \subseteq Ec$ son de Cauchy. En efecto; sea

$$\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}^+ / \ n,m \geq N \ \Rightarrow \ \| z_n - z_m \|_c \leq \varepsilon$$

$$\| z_n - z_m \|_C = \| (x_n + iy_n) - (x_m + iy_m) \|_C = \| (x_n - x_m) - i(y_n - y_m) \|_C$$

$$= \max \left\{ \|x_n - x_m\| , \| y_n - y_m \| \right\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbf{Z}^+ / \ n,m \geq N \ \Rightarrow \| x_n - x_m \| < \varepsilon \ \wedge \ \| y_n - y_m \| < \varepsilon$$

por lo tanto $\{x_n\} \subseteq Ec$, $\{y_n\} \subseteq Ec$ son de Cauchy. Como $(E, \|\cdot\|)$ es de Banach entonces

$$\exists x,y \in E \ / \ x_n \longrightarrow x \ \wedge \ y_n \longrightarrow y$$

Resta probar que: $z_n \longrightarrow z$, con $z = x + iy$. En efecto

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{Z}^+ / n \geq N_1 \ \Rightarrow \ \| x_n - x \| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbf{Z}^+ / m \geq N_2 \ \Rightarrow \| y_n - y \| < \varepsilon$$

Sea $N = \max \{ N_1 , N_2 \}$

Si $n \geq N \ \Rightarrow \ \| x_n - x \| < \varepsilon \ \wedge \ \| y_n - y \| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \max \left\{ \| x_n - x \| , \| y_n - y \| \right\} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \| (x_n - x) + i(y_n - y) \|_C \Rightarrow \| (x_n + iy_n) - (x - iy) \|_C \ \Rightarrow \ \| z_n - z \|_C < \varepsilon$$

$$\exists z \in E_c \ / \ z_n \longrightarrow z \ \Rightarrow \ (E_c, \|.\|_C) \text{ es de Banach}$$ ■

Como $(E_c, \|\cdot\|_C)$ es un espacio de Banach, podemos considerar $\mathscr{L}(Ec)$ el espacio de aplicaciones continuas y lineales en Ec.

A continuación asociaremos a cada $T \in \mathscr{L}(E)$, un operador $Tc \in \mathscr{L}(E_C)$

TEOREMA I.3.3 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach real y* $(Ec, \|\cdot\|_C)$ *su complexificado. Sea* $T \in \mathscr{L}(E)$, *definimos* Tc *por*

$$Tc : Ec \longrightarrow Ec$$
$$(x + iy) \longrightarrow Tc(x+iy) = Tx + iTy$$

Entonces $Tc \in \mathscr{L}(Ec)$ y $\| Tc \| = \| T \|$.

Gracias al teorema anterior; dado un $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach real y

$T \in \mathcal{L}(E)$, podemos asociarle $T_c \in \mathcal{L}(E_c)$, de esta manera existe una aplicación de $\mathcal{L}(E)$ a $\mathcal{L}(E_c)$:

TEOREMA I.3.4 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach real, definimos* $\mathcal{C}$ *como:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_c) \\ T &\longrightarrow \mathcal{C}(T) = T_c \end{aligned}$$

La aplicación $\mathcal{C}$ *satisface los siguientes propiedades*:

i) $\mathcal{C}(T + T') = \mathcal{C}(T) + \mathcal{C}(T')$, $\forall\ T, T' \in \mathcal{L}(E)$

ii) $\mathcal{C}(\alpha T) = \alpha\ \mathcal{C}(T)$, $\forall\ \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall T \in \mathcal{L}(E)$

iii) $\mathcal{C}(T \circ T') = \mathcal{C}(T) \circ \mathcal{C}(T')$, $\forall T, T' \in \mathcal{L}(E)$

iv) $\| \mathcal{C}(T) \| = \| T \|$, $\forall T \in \mathcal{L}(E)$

DEFINICION I.3.2 Sea $(E, \|.\|)$ espacio de Banach real y $T \in \mathcal{L}(E)$. Definimos EL RESOLVENTE de T, denotado $\rho(T)$ como el resolvente de T_c:

$$\rho(T) = \rho(T_c)$$

De ésta manera se ha conseguido que todos los resultados obtenidos en la sección anterior son válidos para $T \in \mathcal{L}(E)$ así como para $T_c \in \mathcal{L}(E_c)$ por medio de la Definición I.3.2. De ahora en adelante, no haremos distinción entre espacios de Banach reales y complejos.

CAPÍTULO II

II.1 OPERADORES LINEALES HIPERBÓLICOS EN ESPACIOS DE BANACH

DEFINICIÓN II.1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$.

$$T \text{ es } \textbf{hiperbólico} \Leftrightarrow \Sigma(T) \cap S^1 = \phi$$

Notación: Denotaremos a Hip(E) al conjunto de los operadores hiperbólicos en $(E, \|\cdot\|)$ $\text{Hip}(E) = \{T \in GL(E) \,/\, T \text{ es hiperbólico}\}$

El siguiente Teorema es el principal de ésta sección, nos dice que todo operador lineal hiperbólico descompone al espacio de Banach donde está definido en dos subespacios cerrados e invariantes el cual es una contracción si lo restringimos a uno de ellos y una dilatación si lo restringimos al otro.

Enunciemos los Teoremas que garantizan la validez de lo mencionado

TEOREMA II.1.1. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach y* $L \in Hip(E)$. *Entonces, existen dos subespacios cerrados* E_u *y* E_s, *una norma* $\|\cdot\|_*$ *equivalente a la norma inicial* $\|\cdot\|$ *y una constante* $a \in \,]0,1[$, *tal que*

i) $E = E_u \oplus E_s$.

ii) $L_u = L|_{E_u} \in \mathcal{L}(E_u)$ y $\|L_u^{-1} x_u\|_u \leq a \|x_u\|_u$, $\forall x_u \in E_u$

$L_s = L|_{E_s} \in \mathcal{L}(E_s)$ y $\|L_s x_s\|_s \leq a \|x_s\|_s$, $\forall x_s \in E_s$

iii) $\|x\|_* = \max\{\|x_u\|, \|x_s\|\}$, $x = x_u + x_s, x_s \in E_s, x_u \in E_u$

Prueba: Como $L \in Hip(E) \Rightarrow \Sigma(L) \cap S^1 = \phi$, denotemos

$$\Sigma_s = \Sigma(L) \cap B_1(0) \quad , \quad \Sigma_u = \Sigma(L) \cap \mathbf{C} \setminus \overline{B_1(0)}$$

Entonces por el Teorema de la descomposición espectral, existen subespacios cerrados E_u y E_s de E tal que

$$E = E_u \oplus E_s \quad , \quad L_u = L|_{E_u} \in \mathcal{L}(E_u) \quad , \quad L_s = L|_{E_s} \in \mathcal{L}(E_s) \quad y$$

$$\Sigma_u = \Sigma(L_u) \quad y \quad \Sigma_s = \Sigma(L_s)$$

Como $\Sigma(L_u) \subseteq B_1(0)$, por el Teorema I.3.3 existe una $\|\cdot\|_1$ norma en E_u equivalente a la norma $\|\cdot\|$ restringida a E_s, y existe a_s, $0 < a_s < 1$ tal que

$$\| L_s x_s \|_s \le a \| x_s \|_s \quad , \quad \forall x_s \in E_s$$

Como $\Sigma(L_u) \subseteq \mathbf{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ entonces $\Sigma(L_u^{-1}) \subseteq B_1(0)$ y nuevamente por el Teorema I.3.3 $\exists \|\cdot\|_u$ norma en E_u equivalente a la norma $\|\cdot\|$ restringida a E_u y existe a_u, $0 < a_u < 1$, tal que

$$\| L_u^{-1} x_u \|_u \le a \| x_u \|_u \quad , \quad \forall x_u \in E_u$$

Si tomamos $a = \max\{a_u, a_s\} \Rightarrow 0 < a < 1$ lo cual satisface la parte (ii) del Teorema.

Resta probar que $\| x \|_* = \max \left\{ \| x_u \|, \| x_s \| \right\}$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

En efecto; sabemos que:

$$c_1 \| x_u \| \le \| x_u \|_u \le c_2 \| x_u \| \quad , \quad \forall x_u \in E_u \quad , \quad c_1, c_2 > 0$$

$$c_3 \| x_s \| \le \| x_s \|_s \le c_4 \| x_s \| \quad , \quad \forall x_s \in E_s \quad , \quad c_3, c_4 > 0$$

Sea $x \in E$ entonces $x = x_u + x_s$, tenemos que :

$$\| x \| = \| x_u + x_s \| \le \| x_u \| + \| x_s \| \le \tfrac{1}{c_1} \| x_u \|_u + \tfrac{1}{c_3} \| x_s \|_s$$

$$\le \tfrac{1}{c_1} \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\} + \tfrac{1}{c_3} \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\}$$

$$\le \left(\tfrac{1}{c_1} + \tfrac{1}{c_3} \right) \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\} = K_1 \| x \|_*$$

$$\therefore \quad \| x \| \le \| x \|_* \quad , \quad \forall x \in E$$

Para probar la otra desigualdad, recordemos que $E_s = \mathrm{Im}(P)$, $E_u = N(P)$, $x = x_u + x_s$, $x_u = x - Px \ \wedge \ x_s = Px$, entonces

$$\| x_u \| = \| x - Px \| \le \| x \| + \| Px \| \le \| x \| + \| P \| \, \| x \| = (1 - \| P \|) \, \| x \|$$

entonces

$$\| x_u \| \le (1 - \| P \|) \, \| x \|$$

$$\| x_s \| = \| Px \| \le \| P \| \, \| x \| \ \Rightarrow \ \| x_s \| \le \| P \| \, \| x \| \quad , \quad \forall x \in E$$

Luego; sea $K_2 = \max\left\{ c_2(1 + \| P \|) \, , \, c_4 \| P \| \right\}$

$$\| x_u \|_u \le c_2 \, \| x_u \| \le c_2(1 - \| P \|) \, \| x \| \le K_2 \, \| x \|$$

$$\| x_s \|_s \le c_4 \, \| x_s \| \le c_4 \, \| P \| \, \| x \| \le K_2 \, \| x \|$$

$$\Rightarrow \ \max\left\{ \| x_u \|_u \, , \, \| x_s \|_s \right\} \le K_1 \, \| x \|$$

$$\Rightarrow \ \| x \|_* \le \| x \| \quad , \quad \forall x \in E$$

$$\therefore \| x \|_* \text{ es equiavalente a } \| x \| \qquad \blacksquare$$

Es evidente que los subespacios invariantes depende del operador $L \in \mathrm{Hip}(E)$; es decir $E = E_u(L) \oplus E_s(L)$. Luego a $E_u = E_u(L)$ le llamamos **espacio inestable**, $E_s = E_s(L)$ **espacio estable** y $\| x \|_*$ le llamamos la **norma adaptada** al operador $L \in \mathrm{Hip}(E)$, de ahora en adelante ésta será la norma considerada en E.

PROPOSICIÓN II.1.2. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach y* $L \in Hip(E)$. *Se cumple:*

i) $E_u = E_u(L) = \{x \in E \ / \ L^{-n}x \xrightarrow{n \to \infty} 0\}$

ii) $E_s = E_s(L) = \{x \in E \ / \ L^{n}x \xrightarrow{n \to \infty} 0\}$

Prueba:

i) $x \in E_u \Rightarrow \| L_u x_u \| \le \| L_u^{-1} x_u \|_u \le \alpha^n \| x \|_u$, $\forall n \ge 0$ con $0 < \alpha < 1$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n \to \infty} \| L^{-n} x \| \le \lim_{n \to \infty} \alpha^n \| x \|_u = 0$$

$$\Rightarrow L^{-n} x \longrightarrow 0 \ , \text{ si } n \to \infty$$

Por otro lado, sea $x \in E \ / \lim_{n \to \infty} \| L^{-n} x \| = 0$, sea $x = x_u + x_s, x_u \in E_u, x_s \in E_s$

$$L^{-n} x = L_u^{-n} x_u + L_s^{-n} x_s \ \Rightarrow \ 0 \le \| L_s^{-n} x_s \|_s \le \| L^{-n} x \|_u \quad , \quad \forall n \ge 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| L_s^{-n} x_s \|_s = 0 .$$

Además

$$\| x_s \| = \| L_s^n (L_s^{-n} x_s) \|_s \leq \alpha^n \| L_s^{-n} x_s \|_s \quad , \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha^{-n} \| x_s \|_s \leq \| L_s^{-n} x_s \|_s \quad , \quad \forall n \geq 0 \text{ , con } \alpha^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \alpha^{-n} \| x_s \|_s \leq \lim_{n\to\infty} \| L_s^{-n} x_s \|_s = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha^n \| x_s \|_s = 0 \Rightarrow \| x_s \|_s = 0 \Rightarrow x_s = 0 \Rightarrow x \in E_u$$

$$\therefore \; E_u = E_u(L) = \{ x \in E \,/\, L^{-n} x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \}$$

ii) $x \in E_s \;\Rightarrow\; \| L^n x_u \| \leq \| L_s^n x_s \|_s \leq \alpha^n \| x_s \|_s \quad , \quad \forall n \geq 0$ con $0 < \alpha < 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \| L^{-n} x \| \leq \lim_{n\to\infty} \alpha^n \| x_s \|_s = 0 \Rightarrow L^n x \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Recíprocamente: Sea $x \in E \,/\, L^n x \xrightarrow{n\to\infty} 0$; tomemos

$x = x_u + x_s$, con $x_u \in E_u, x_s \in E_s$

$$L^n x = L_s^n x_s + L_u^n x_u \Rightarrow 0 \leq \| L_u^n x_u \|_u \leq \| L^n x \| \quad , \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \| L_u^n x_u \|_u \leq \lim_{n\to\infty} \| L^n x \| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| L_u^n x_u \|_u = 0 .$$

Además

$$\| x_u \|_u = \| L_u^{-n} (L_u^n x_u) \|_u \leq \alpha^n \| L_u^n x_u \|_u$$

$$\Rightarrow \alpha^{-n} \| x_u \|_u \leq \| L_u^n x_u \|_u \quad , \quad \forall n \geq 0 \text{ , con } \alpha^{-1} > 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \alpha^{-n} \| x_u \|_u \leq \lim_{n\to\infty} \| L_u^n x_u \|_u \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha^{-n} \| x_u \|_u = 0 \Rightarrow \| x_u \|_u = 0 \Rightarrow x_u = 0 \Rightarrow x \in E_s$$

$$\therefore \; E_s = E_s(L) = \{ x \in E \,/\, L^n x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \} \qquad \blacksquare$$

COROLARIO. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L \in Hip(E)$. Entonces

$L^{-1} \in Hip(E)$ y $E_u(L^{-1}) = E_s(L)$, $E_s(L^{-1}) = E_u(L)$

PROPOSICIÓN II.1.3 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach, entonces Hip*(E) *es un subconjunto abierto de* $\mathcal{L}(E)$

Prueba: Sea $L_0 \in \text{Hip}(E)$, por demostrar que:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B_\varepsilon(L_0) \subseteq \text{Hip}(E).$$

Como $L_0 \in \text{Hip}(E)$, entonces

$$\Sigma(L_0) \cap S^1 = \phi \Rightarrow S^1 \subseteq \rho(L_0)$$

Definimos la función

$$R_{L_0} : S^1 \longrightarrow GL(E)$$
$$\lambda \longrightarrow R_{L_0}(\lambda) = (\lambda I - L_0)^{-1}$$

Sabemos que R_{L_0} es analítica y por tanto continua y como S^1 es compacto, se tiene:

$$\exists\, \lambda_0 \in S^1 \,/\, \| R_{L_0}(\lambda) \| \leq \| R_{L_0}(\lambda_0) \| \ , \quad \forall \lambda \in S^1$$

$$\Rightarrow \| R_{L_0}(\lambda_0) \|^{-1} \leq \| R_{L_0}(\lambda) \|^{-1} \ , \quad \forall \lambda \in S^1$$

Sea $L \in B_\varepsilon(L_0)$, con $\varepsilon = \| R_{L_0}(\lambda_0) \|^{-1}$

$$\Rightarrow \| L - L_0 \| < \varepsilon = \| R_{L_0}(\lambda_0) \|^{-1} \leq \| R_{L_0}(\lambda) \|^{-1} = \| (\lambda I - L)^{-1} \|^{-1}$$

$$\forall \lambda \in S^1 \Rightarrow (\lambda I - L_0) - (L_0 - L) = \lambda I - L \in GL(E) \ ; \ \forall \lambda \in S^1$$

$$\Rightarrow S^1 \subseteq \rho(L) \Rightarrow \Sigma(L) \cap S^1 = \phi \Rightarrow L \in \text{Hip}(E)$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(L_0) \subseteq \text{Hip}(E) \ , \text{con } \varepsilon = \| R_{L_0}(\lambda_0) \|^{-1} \ , \quad \forall L_0 \in \text{Hip}(E)$$

por lo tanto Hip(E) es abierto en L(E) ■

PROPOSICIÓN II .1.4. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach de dimensión finita. Entonces Hip*(E) *es denso en* $\mathcal{L}(E)$.

Prueba: Sea $L \in GL(E)$ y $\varepsilon > 0$ por demostrar que:

$$\exists L_0 \in \text{Hip}(E) \ / \ \| L - L_0 \| < \varepsilon$$

Supongamos que $\dim(E) = n < \infty$ y denotemos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de L ordenados de tal manera que los m primeros valores no están en S^1 y los restantes n-m lo están, es decir:

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}\cap S^1=\phi \quad y \quad \{\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\dots,\lambda_n\}\subseteq S^1$$

(si $m = n \Rightarrow L$ es hiperbólico y no hay nada que probar), es por ello que consideramos $m < n$. Ademas $0 \notin \Sigma(L)$ pues $L^{-1} \in GL(E)$.

Sean $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$, $1\le j\le n$ y consideremos:

$$\delta_1=\min_{1\le j\le n}\left\{1-\left|\lambda_j\right|\right\} \quad , \quad \delta_2=\min_{m+1\le j\le n}\left\{\left|\alpha_j\right| / \alpha_j\ne 0\right\}$$

Tenemos que δ_1,δ_2 son mayores que cero. Sea $0<\mu<\min\{\delta_1,\delta_2,\varepsilon\}$ y consideremos el operador $L_o=L+\mu I$. Primeramente obsérvese que:

$$\lambda\in\rho(L)\Leftrightarrow\lambda I-L\in GL(E)\Leftrightarrow(\lambda+\mu I)-(L+\mu I)\in GL(E)\Leftrightarrow\lambda+\mu\in\rho(L+\mu I)$$

Luego $\lambda\in\Sigma(L)\Leftrightarrow\lambda+\mu\in\Sigma(L+\mu I)$. De ésta manera:

$$\Sigma(L_o)=\left\{\lambda_j+\mu\right\}_{1\le j\le n}=\left\{(\alpha_j+\mu)+\beta_j\right\}_{1\le j\le n}$$

Afirmo que $\Sigma(L_o)\cap S^1=\phi$. En efecto: Si $1\le j\le n$ entonces

$$\mu<\left|1-\left|\lambda_j\right|\right|\Rightarrow\mu<1-\left|\lambda_j\right|<1 \quad\vee\quad 1-\left|\lambda_j\right|<-\mu$$

entonces

$$\mu+\left|\lambda_j\right|<1 \quad\vee\quad \left|\lambda_j\right|-\mu>1 \tag{1}$$

Si se cumple la primera condición de (1)

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2=(\alpha_j+\mu)^2+\beta_j^2=\alpha_j^2+2\alpha_j\mu+\mu^2+\beta_j^2=\left|\lambda_j\right|^2+2\alpha_j\mu+\mu^2$$

$$\le\left|\lambda_j\right|^2+2\left|\alpha_j\right|\mu+\mu^2\le\left|\lambda_j\right|^2+2\left|\lambda_j\right|\mu+\mu^2=\left(\left|\lambda_j\right|+\mu\right)^2>1$$

$$\Rightarrow\lambda_j+\mu\notin S^1$$

Si se cumple la segunda condición de (1)

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2=\left|\lambda_j\right|^2+2\alpha_j\mu+\mu^2\le\left|\lambda_j\right|^2-2\left|\alpha_j\right|\mu+\mu^2\le\left|\lambda_j\right|^2-2\left|\lambda_j\right|\mu+\mu^2$$

$$=\left(\left|\lambda_j\right|-\mu\right)^2<1$$

$$\Rightarrow\lambda_j+\mu\notin S^1$$

$$\therefore\lambda_j+\mu\notin S^1 \quad , \quad 1\le j\le m$$

Si $m+1\le j\le n$ entonces $\mu<\left|\alpha_j\right|$

$$\Rightarrow\mu<\alpha_j \quad\vee\quad \alpha_j<-\mu \tag{2}$$

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2=\left(\alpha_j+\mu\right)^2+\beta_j^2=\alpha_j^2+2\alpha_j\mu+\mu^2+\beta_j^2=1+2\alpha_j\mu+\mu^2$$

Si se cumple la primera afirmación de (2):

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2=1+2\alpha_j\mu+\mu^2>1+2\mu^2+\mu^2>1+3\mu^2>1$$

$$\Rightarrow \lambda_j+\mu\notin S^1$$

Si se cumple la segunda afirmación de (2):

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2=1+2\alpha_j\mu+\mu^2<1-2\mu^2+\mu^2=1-\mu^2<1$$

$$\Rightarrow \lambda_j+\mu\notin S^1$$

$$\therefore \lambda_j+\mu\notin S^1 \quad , \; m+1\le j\le n$$

De ésta manera queda demostrada la afirmación. Por lo tanto L_o es hiperbólico. Ademas

$$\| L-L_o\|=\|\mu I\|=\mu<\varepsilon$$

$$\therefore \text{ Hip(E) es denso en GL(E)} \qquad \blacksquare$$

II.2 APLICACIONES DE LIPSCHITZ

No todos los operadores que consideraremos posteriormente, están definidos en espacios de Banach., es por eso que necesitamos estudiar operadores no necesariamente lineales definidos en los llamados espacios métricos y debemos ser capaces de invertir esos operadores

DEFINICIÓN II.2.1. Sean (X,d_x) y (Y,d_y) dos espacios métricos y $f:X\longrightarrow Y$. Decimos que f es de **Lipschitz** sí y sólo si

$$\exists K\in\mathbf{R}^+ \text{ tal que } \; d_y(f(x),f(x'))\le K\, d_x(x,x') \quad , \quad \forall\, x,x'\in X$$

Denotaremos por $Lip(X,Y)$ al conjunto de todas las aplicaciones de Lipschitz de X a Y:

$$Lip(X,Y)=\{\, f: X\longrightarrow Y \,/\, f \text{ es Lipschitz }\}$$

Observaciones:

1) Si (E , $\|\cdot\|_E$) y (E , $\|\cdot\|_F$) son espacios normados y $f : X \longrightarrow Y$, decimos que f es de Lipschitz sí y sólo sí

$$\| f(x) - f(x') \|_F \leq K \| x - x' \|_E \quad , \quad \forall\, x, x' \in E$$

2) La mínima de las constantes K que cumplen con la Definición III.1.1, se le llama **constante de Lipschitz** de f y la denotaremos $Lip(f)$

3) Cuando X = Y denotamos $Lip(X,X) \equiv Lip(X)$

TEOREMA II.2.1. *Sean* (X, d_x) *y* (Y, d_y) *dos espacios métricos. Se cumple:*

$$Lip(X,Y) \subseteq C(X,Y)$$

Prueba: Sea $f \in Lip(X,Y) \Rightarrow d_x(f(x), f(x')) \leq Lip(f)\, d_x(x, x') \quad , \quad \forall x, x' \in X$.

Sea $x_0 \in X \wedge \varepsilon > 0$; si consideramos $\delta = Lip(f)^{-1} \varepsilon$, se tiene:

$$d_x(x, x') < \varepsilon \Rightarrow d_x(f(x), f(x')) \leq Lip(f)\, d_x(x, x') < Lip(f)\ Lip(f)^{-1} \varepsilon = \varepsilon$$

Luego f es continua en $x_0 \quad \forall\, x_0 \in X$

$$\therefore \quad Lip(X,Y) \subseteq C(X,Y) \qquad \blacksquare$$

TEOREMA II.2.2 *Sea* (E , $\|\cdot\|_E$) *y* (E , $\|\cdot\|_F$) *espacios normados. Se cumple:* $\mathscr{L}(E,F) \subseteq Lip(E,F) \quad \wedge \quad Lip(f) = \| f \|$ $\forall f \in \mathscr{L}(E,F)$

Prueba: Sea $f \in \mathscr{L}(E,F)$ y considero $x, x' \in E$

$$\| f(x) - f(x') \|_F = \| f(x - x') \|_F \leq \| f \| \| x - x' \|_E \ ; \ \forall\, x, x' \in E \ , \Rightarrow f \in \mathscr{L}(E,F)$$

$$\therefore L(E,F) \subseteq Lip(E,F)$$

Además $Lip(f) \leq \| f \|$. Para probar la otra desigualdad recordemos que

$$\| f \| = \inf \left\{ c > 0 \ / \ \| fx \|_F \leq c \| x \|_E \right\} \ ; \ \forall\, x \in E$$

$$\| f(x) \|_F = \| f(x) - f(0) \|_F \leq Lip(f) \| x \|_E$$

$$\Rightarrow \| f \| \leq Lip(f)$$

$$\therefore Lip(f) = \| f \| \quad , \quad \forall f \in L(E,F) \qquad \blacksquare$$

TEOREMA II.2.3 *Sean* (X,d_x) , (Y,d_y) *y* (Z,d_Z) *espacios métricos,* $f \in Lip(X,Y)$, $g \in Lip(Y,Z)$. *Entonces* $g \circ f \in L_{ip}(X,Z)$

y $Lip(g \circ f) \leq Lip(g)\ Lip(f)$

Prueba: Sean $x,x' \in X$

$$d_z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_Z(g\,(f(x)), g\,(f(x'))) \leq Lip(g)\, d_y(f(x),f(x'))$$

$$\leq Lip(g)\ Lip(f)\, d_x(x,x')$$

$$\therefore g \circ f \in Lip(X,Z). \ \wedge \ Lip(g \circ f) \leq Lip(g)\ L_{ip}(f) \qquad \blacksquare$$

COROLARIO Sea (X,d_x) espacio métrico y $f \in Lip(X)$. Entonces $f^n \in Lip(X)$. y $Lip(f^n) \leq Lip(f)^n \quad \forall n \in \mathbf{Z}^+$

La demostración de este Corolario es una aplicación directa del Teorema anterior

TEOREMA II.2.4. *Sea* $(E, \|\cdot\|_E)$ *y* $(E, \|\cdot\|_F)$ *son espacios normados* $f,g \in Lip(E,F)$. *Entonces:*

i) $f + g \in Lip(E,F)$ y $Lip(f + g) \leq L_{ip}(f) + L_{ip}(g)$

ii) $Lip(f) - Lip(g) \leq Lip(f - g)$

Prueba: Sean $x,x' \in X$

i) $\| (f+g)(x) - (f+g)(x') \|_F = \| f(x) + g(x) - f(x') - g(x') \|_F$

$$\leq \| f(x) - f(x') \|_F + \| g(x) - g(x') \|_F$$

$$\leq Lip(f) \| x - x' \|_E + Lip(g) \| x - x' \|_E$$

$$\leq [\ Lip(f) + Lip(g)] \| x - x' \|_E$$

$$\Rightarrow \quad f + g \in Lip(E,F) \ \ y \ \ Lip(f+g) \leq Lip(f) + Lip(g)$$

ii) $Lip(f) = Lip(f - g + g) \leq Lip(f - g) + Lip(g)$

$$\Rightarrow Lip(f) - Lip(g) \leq Lip(f - g) \qquad \blacksquare$$

Las funciones Lipschizianas cuya constante es menor que 1, se las llaman **contracciones**. Las contracciones son importantes porque ellas tienen un único punto fijo atractor cuando están definidos en un espacio métrico completo

TEOREMA II.2.5 *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo* , $f \in Lip(X)$, *tal que* $Lip(f) < 1$. *Entonces* $\exists ! \, x_o \in X$ *tal que:*

i) $f(x_o) = x_o$,*(*x_o *es punto fijo)*

ii) $\lim_{n\to\infty} f^n(x_o) = x_o$; $\forall x \in X$ *(*x_o *es atractor)*

Prueba:

Existencia: Sea $x \in X$, si $f(x) = x$ no hay nada que probar. Luego, supongamos $f(x) \neq x \ \Rightarrow \ d(f(x),x) > 0$

Afirmación: $\{f^n(x)\}_{n \in Z^+}$ es una sucesión de Cauchy en X. En efecto; obsérvese que para $n,m \in \mathbf{N}$, $n > m$ tenemos:

$$d(f^n(x),f^m(x)) \leq d(f^n(x),f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x),f^{n-2}(x)) + \ . \ . \ . \ + d(f^{m+1}(x),f^m(x))$$

$$= \sum_{j=0}^{n-m-1} d(f^{m+j+1}(x),f^{m+j}(x)) \leq \sum_{j=0}^{n-m-1} Lip(f^{m+j}) d(f(x),x)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-m-1} Lip(f^m) Lip(f^j) d(f(x),x) \leq Lip(f^m) d(f(x),x) \sum_{j=0}^{n-m-1} Lip(f^j)$$

$$\leq Lip(f^m) d(f(x),x) \sum_{j=0}^{\infty} Lip(f^j) = \frac{Lip(f)^m}{1 - Lip(f)} d(f(x),x)$$

Como:

$$\frac{Lip(f)^m}{1-Lip(f)}d(f(x),x)<\varepsilon \Leftrightarrow m\ \ln(Lip(f))+\ln(d(f(x),x))-\ln(1-Lip(f))<\ln(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow\ m\ \ln(Lip(f))<\ln(\varepsilon)+\ln(1-Lip(f))-\ln(d(f(x),x))$$

$$\Leftrightarrow m>\frac{\ln(\varepsilon)+\ln(1-Lip(f))-\ln(d(f(x),x))}{\ln(Lip(f))}$$

Basta tomar $N\in\mathbf{Z}^+$, tal que

$$N>\frac{\ln(\varepsilon)+\ln(1-Lip(f))-\ln(d(f(x),x))}{\ln(Lip(f))}\quad ,$$

luego si $n,m\geq N$ tenemos que $d(f^n(x),f^m(x))<\varepsilon$ entonces $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es Cauchy y desde que (X,d) es completo $\exists\ x_o\in X\ /\ \lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=x_o$; en X y $f\in Lip(X)$ entonces $f\in c(X)$, luego $f^{n+1}(x)\longrightarrow x_o$ en X y por unicidad del límite: $f(x_o)=x_o$, lo cual prueba la existencia del punto fijo.

Unicidad: Supóngase que $\exists\ x'\in X\ /\ f(x')=x'$; se tiene

$$d(x',x_o)=d(f(x'),f(x_o))\leq Lip(f)\,d(x',x_o)\ ,$$

$$\Rightarrow\ [1-Lip(f)]\,d(x',x_o)\leq 0$$

$$\Rightarrow\ d(x',x_o)\leq 0\ \Rightarrow\ d(x',x_o)=0\ \Rightarrow\ x'=x_o$$

Prueba de que es atractor: Tomemos $x\in X$ y construimos $x_o=x_o(x)$ tal que $f^n(x)\longrightarrow x_o$. Sea $x'\neq x$ y supongamos que $f^n(x')\longrightarrow x'_o$

$$d(x',x_o)=d(x_o,f^n(x))+d(f^n(x),f^n(x'))+d(f^n(x'),x'_o)$$

$$\leq d(x_o,f^n(x))+Lip(f)^n d(x',x_o)+d(f^n(x'),x'_o)$$

$$\Rightarrow 0\leq d(x',x_o)\leq 0\Rightarrow d(x',x_o)=0\Rightarrow x'=x_o \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado, generaliza el Corolario al Teorema I.1.2 para operadores de $\mathcal{L}$(E) a Lip(E)

TEOREMA II.2.6 (La función inversa de Lipschitz) *Sea* $(E,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach,* $\varphi\in Lip(E)$ *y* $L\in GL(E)$ *tal que*

$Lip(\varphi) < \| L^{-1} \|^{-1}$. *Entonces* $L+\varphi$ *es invertible,* $(L+\varphi)^{-1} \in Lip(E)$ *y*

$$Lip\left((L+\varphi)^{-1}\right) \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi)}$$

Prueba: Primeramente observe que $x_o = x_o(x)$ tal que

$$\| (L+\varphi)(x_1) - (L+\varphi)(x_2) \| = \| Lx_1 + \varphi(x_1) - Lx_2 - \varphi(x_2) \|$$

$$= \| L(x_1 - x_2) + (\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) \|$$

$$\geq \| L(x_1 - x_2) \| - \| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \qquad (1)$$

Como:

$$\| x_1 - x_2 \| = \| L^{-1}L(x_1 - x_2) \| \leq \| L^{-1} \| \| L(x_1 - x_2) \| \Rightarrow \| L^{-1} \|^{-1} \| x_1 - x_2 \| \leq \| L(x_1 - x_2) \|$$

$$\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \leq Lip(\varphi) \| x_1 - x_2 \| \quad \Rightarrow -\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \geq -Lip(\varphi) \| x_1 - x_2 \|$$

Reemplazando éstos dos últimos resultados en (1):

$$\| (L+\varphi)(x_1) - (L+\varphi)(x_2) \| \geq \left[\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi) \right] \| x_1 - x_2 \| \quad , \ \forall\, x_1, x_2 \in E \qquad (2)$$

Afirmo que $L+\varphi$ es inyectiva: En efecto, supóngase que

$$(L+\varphi)(x_1) = (L+\varphi)(x_2)$$

$$0 = \| (L+\varphi)(x_1) - (L+\varphi)(x_2) \| \geq \left[\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi) \right] \| x_1 - x_2 \|$$

$$\Rightarrow \| x_1 - x_2 \| \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto $L+\varphi$ es inyectiva

Afirmo que $L+\varphi$ es sobreyectiva: En efecto, sea $y \in E$, por demostrar que:

$$\exists\, x \in E \,/\, (L+\varphi)(x) = y$$

Como motivación para la elección del "x", obsérvese que si $\varphi \equiv 0$ entonces $x = L^{-1}y$. Como $\varphi \in Lip(E)$ entonces es de esperarse que $x = L^{-1}y + \omega$, con $\omega \in E$

$$(L+\varphi) \circ (L^{-1}y + \omega) = y \iff L \circ (L^{-1}y + \omega) + \varphi(L^{-1}y + \omega) = y$$

$$\iff y + L\omega + \varphi(L^{-1}y + \omega) = y \iff L(\omega) = -\varphi(L^{-1}y + \omega)$$

$$\iff \omega = -L^{-1} \circ \varphi(L^{-1}y + \omega)$$

Esto nos lleva a definir:

$$\begin{aligned} T_y : E &\longrightarrow E \\ \omega &\longrightarrow T_y(\omega) = -L^{-1} \circ \varphi\left(L^{-1}y + \omega\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| T_y(\omega_1) - T_y(\omega_2) \| &= \left\| -L^{-1} \circ \varphi\left(L^{-1}y + \omega_1\right) + L^{-1} \circ \varphi\left(L^{-1}y + \omega_2\right) \right\| \\ &\leq \| L^{-1} \| \, \| \varphi\left(L^{-1}y + \omega_1\right) - \varphi\left(L^{-1}y + \omega_2\right) \| \\ &\leq \| L^{-1} \| \, Lip(\varphi) \, \| L^{-1}y + \omega_1 - L^{-1}y - \omega_2 \| \\ &< \| L^{-1} \| \, \| L^{-1} \|^{-1} \| \omega_1 - \omega_2 \| = \| \omega_1 - \omega_2 \| \end{aligned}$$

por lo tanto $Lip(T) < 1$ y como E es de Banach, $\exists\, \omega_o \in E \,/\, T(\omega_o) = \omega_o$. Con este resultado probamos la sobreyectividad

Resta por probar que $(L + \varphi)^{-1}$ es Lipschitz. Para ello $y_1, y_2 \in E$, de (2):

$$\begin{aligned} \| y_1 - y_2 \| &= \left\| (L + \varphi) \circ (L + \varphi)^{-1}(y_1) - (L + \varphi) \circ (L + \varphi)^{-1}(y_2) \right\| \\ &= \left\| (L + \varphi)\left((L + \varphi)^{-1}(y_1)\right) - (L + \varphi)\left((L + \varphi)^{-1}(y_2)\right) \right\| \\ &\geq \left[\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi) \right] \left\| (L + \varphi)^{-1}(y_1) - (L + \varphi)^{-1}(y_2) \right\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| (L + \varphi)^{-1}(y_1) - (L + \varphi)^{-1}(y_2) \right\| \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi)} \| y_1 - y_2 \| \quad , \ \forall\, y_1, y_2 \in E$$

$$\therefore \ (L + \varphi)^{-1} \in Lip(E) \ \wedge \ Lip\left((L + \varphi)^{-1}\right) \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi)} \qquad \blacksquare$$

A a continuación nos proponemos obtener una generalización del Teorema I.1.5 pasando de $\mathcal{L}(E,F)$ a $Lip(E,F)$

TEOREMA II.2.7 *Sea* $(E, \|\cdot\|_E)$ *y* $(E, \|\cdot\|_F)$ *espacios de Banach. Sea* $T \in Lip(E,F)$ *tal que* T *es biyectivo y* $T^{-1} \in Lip(E,F)$. *Sea* $f \in Lip(E,F)$ *tal que* $Lip(f) < Lip(T^{-1})$. *Entonces* $T - f$ *es invertible,* $(T - f)^{-1} \in Lip(F,E)$ *y*

$$Lip\left((T - f)^{-1}\right) \leq \frac{1}{Lip(T^{-1})^{-1} - Lip(f)}$$

Prueba: Primeramente, obsérvese que $T - f = T \circ (I - T^{-1} \circ f)$., luego T-f será invertible si T y $(I - T^{-1} \circ f)$ los son. Como $T^{-1} \in Lip(E,F)$. y $f \in Lip(E,F)$ entonces $T^{-1} \circ f \in Lip(E)$ y

$$Lip\left(T^{-1} \circ f\right) \leq Lip\left(T^{-1}\right) Lip(f) < Lip\left(T^{-1}\right) Lip\left(T^{-1}\right)^{-1} < 1$$

luego por el Teorema anterior, $I - T^{-1} \circ f$ es invertible $(I - T^{-1} \circ f)^{-1} \in Lip(E)$ y

$$Lip\left[\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1}\right] \leq \frac{1}{1 - Lip\left(T^{-1} \circ f\right)} \leq \frac{1}{1 - Lip\left(T^{-1}\right) Lip(f)}$$

Como $I - T^{-1} \circ f$ es invertible y T es invertible entonces $T \circ (I - T^{-1} \circ f)^{-1} = T - f$ es invertible, luego $(T - f)^{-1} = (I - T^{-1} \circ f)^{-1} \circ T^{-1}$. Además como $(I - T^{-1} \circ f)^{-1} \in Lip(E)$ y $T^{-1} \in Lip(F,E)$, entonces

$$\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} \circ T^{-1} = (T - f)^{-1} \in Lip(F,E).$$

Por último:

$$Lip\left((T - f)^{-1}\right) \leq Lip\left(\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1}\right) Lip(T^{-1}) \leq \frac{1}{Lip(T^{-1})^{-1} - Lip(f)} \qquad \blacksquare$$

Hasta el momento, los operadores estudiados están definidos en todo el espacio, más adelante, usaremos operadores que están definidos solo en un abierto del espacio y precisaremos de dos Teoremas análogos a los estudiados hasta aquí para poder invertirlos. Tales Teoremas son:

TEOREMA II.2.8 *Sea* (E , $\|\cdot\|$) *espacio de Banach y denotamos por* E(r) *la bola cerrada de E de radio r y centro 0 , es decir:*

$$E(r) = \{x \in E \,/\, \| x \| \leq r\}$$

i) Sea $I - f$ *es invertible sobre su imagen* $U = [I - f][E(r)]$

ii) $(I - f)^{-1} \in Lip(U, E(r))$ *y* $Lip\left[(I - f)^{-1}\right] \leq \dfrac{1}{1 - Lip(f)}$

iii) *Si* $f(0) = 0$, *entonces* $E(r^1) \subseteq U$ *donde* $r^1 = r\,[1 - Lip(f)]$

Prueba:. Primeramente, obsérvese que:

$$\|(I-f)(x_1)-(I-f)(x_2)\| = \|x_1 - f(x_1) - x_2 + f(x_2)\|$$
$$\geq \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1)-f(x_2)\|$$
$$\geq \|x_1 - x_2\| - Lip(f)\,\|x_1 - x_2\|$$
$$\Rightarrow \|(I-f)(x_1)-(I-f)(x_2)\| \geq (1-Lip(f))\,\|x_1-x_2\| \quad \forall\, x_1,x_2 \in E(r) \qquad (1)$$

i) Supóngase $(I-f)(x_1)=(I-f)(x_2)$, luego , por (1)

$$0 = \|(I-f)(x_1)-(I-f)(x_2)\| \geq (1-Lip(f))\,\|x_1-x_2\|$$
$$\Rightarrow \|x_1-x_2\| = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

entonces $(I-f)$ es inyectiva, entonces $(I-f)$ es invertible sobre su imagen $[I-f][E(r)]$

ii) Sea $y_1,y_2 \in U$, nuevamente por (1)

$$\|y_1-y_2\| = \|(I-f)\circ(I-f)^{-1}(y_1)-(I-f)\circ(I-f)^{-1}(y_2)\|$$
$$= \|(I-f)((I-f)^{-1}(y_1))-(I-f)((I-f)^{-1}(y_2))\|$$
$$\geq (1-Lip(f))\,\|(I-f)^{-1}(y_1)-(I-f)^{-1}(y_2)\|$$
$$\Rightarrow \|(I-f)^{-1}(y_1)-(I-f)^{-1}(y_2)\| = \frac{1}{1-Lip(f)}\,\|y_1-y_2\| \;,\; \forall\, y_1,y_2 \in U$$
$$\therefore\; (I-f)^{-1} \in Lip(E(r),E) \quad y \quad Lip\left[(I-f)^{-1}\right] \leq \frac{1}{1-Lip(f)}$$

iii) Como f(0)=0 entonces $0 \in U$, de ésta manera U contiene un disco cerrado alrededor del 0. Sea $y \in E(r^{I})$ con $r^{I} = r\,[1-Lip(f)]$. Por demostrar que:

$$\exists \in E/(I-f)(x)=y$$

Obsérvese que $f\equiv 0$ entonces el "x" buscado es "y" , ésto motiva a buscar "x" de la forma "y+ ω", en el caso $f\neq 0$ entonces se tendría:

$$(I-f)(y+\omega)=y \Leftrightarrow y+\omega-f(y+\omega)=y \Leftrightarrow f(y+\omega)=\omega$$

Como ω debe ser tal que $y+\omega \in E(r)$, tenemos:

$$\|y+\omega\| \leq \|y\|+\|\omega\| \leq r^{I}+\|\omega\| \leq r \Leftrightarrow \|\omega\| \leq r-r^{I} = r - r\,[1-Lip(f)] = r\,Lip(f)$$

Tomemos $\delta = \min\{r\,Lip(f)\,,\,r^{I}\}$. Defino:

$$T_y : E(\delta) \longrightarrow E(\delta)$$
$$\omega \longrightarrow T_y(\omega) = f(y+\omega)$$

$$\|T_y(\omega_1)-T_y(\omega_2)\| \leq \|f(y+\omega_1)-f(y+\omega_2)\| \leq Lip(f)\,\|y+\omega_1-y-\omega_2\|$$

$$\therefore\ T_y \in Lip(E(\delta)) \ \wedge\ Lip(T_y) < 1, \Rightarrow \exists\, \omega_o \in E(\delta) \subseteq E(r) \,/\, T(\omega_o) = \omega_o$$

$$\Rightarrow f(y+\omega_o) = y+\omega_o \Rightarrow y+\omega_o - f(y+\omega_o) = y \Rightarrow (I-f)(y+\omega_o) = y$$

Además

$$\| y+\omega_o \| \le \| y \| + \| \omega_o \| \le r^{I} + \delta \le r^{I} - rLip(f) = r\,[1-Lip(f)] + rLip(f) = r$$

$$\therefore \exists x = y + \omega_o \in E(r) \,/\, (I-f)(x) = y \ \Rightarrow\ y \in [I-f][E(r)]$$

$$\therefore\ E(r^{I}) \subseteq U\ ,\ r^{I} = r\,[1-Lip(f)]$$ ■

COROLARIO. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, $T \in GL(E)$ y $f \in Lip(E(r),E)$ tal que $Lip(f) < \| T^{-1} \|^{-1}$. Entonces

i) Sea $T-f$ es invertible sobre su imagen $U = [I-f][E(r)]$

ii) $(T-f)^{-1} \in Lip(U,E(r))$ y $Lip\left[(I-f)^{-1}\right] \le \dfrac{1}{1-Lip(f)}$

iii) Si $f(0) = 0$. Entonces $E(r^{I}) \subseteq U$ donde $r^{I} = r\,[\| T^{-1} \|^{-1} - Lip(f)]$

Prueba: Primeramente, obsérvese que $T - f = T \circ (I - T^{-1} \circ f)$., luego T-f será invertible si $(I - T^{-1} \circ f)$ lo es, como $f \in Lip(E(r),E)$ y $T^{-1} \in GL(E)$ entonces $T^{-1} \circ f \in Lip(E(r),E)$ y

$$Lip\left(T^{-1} \circ f\right) \le Lip\left(T^{-1}\right) Lip(f) < \| T^{-1} \| \, \| T^{-1} \|^{-1} = 1$$

luego por el Teorema anterior: $I - T^{-1} \circ f$ es invertible sobre su imagen $\tilde{U} = [I-f][E(r)]$, luego, $(I - T^{-1} \circ f)^{-1} \in Lip(\tilde{U}, E(r))$ y

$$Lip\left[\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1}\right] \le \frac{1}{1 - Lip\left(T^{-1} \circ f\right)} \le \frac{1}{1 - \| T^{-1} \| Lip(f)}$$

Luego $T - f$ es invertible sobre su imagen, y como

$$(T-f)^{-1} = \left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} \circ T^{-1}$$

$$[T-f][E(r)] = T\left[\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} [E(r)]\right] = T[\tilde{U}] = U$$

$$I - T^{-1} \circ f \in Lip(\tilde{U}, E(r)) \ \wedge\ T^{-1} \in Lip(U, \tilde{U})$$

$$\Rightarrow \left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} \circ T^{-1} \in Lip(U, E(r)) \ \text{ y}$$

$$Lip\left((T-f)^{-1}\right) \le Lip\left(\left(I - T^{-1}\circ f\right)^{-1}\right)Lip(T^{-1}) \le \frac{\|T^{-1}\|}{1-\|T^{-1}\|Lip(f)} = \frac{1}{\|T^{-1}\|^{-1} - Lip(f)}$$

Por último: $f(0) = 0$ entonces $E(\tilde{r}) \subseteq \tilde{U}$, donde $\tilde{r} = r\,[1-Lip(f)]$

$$\Rightarrow T[E(\tilde{r})] \subseteq T[\tilde{U}] = T\circ\left(I - T^{-1}\circ f\right)[E(r)] = U = [T-f]\,[E(r)]$$

Afirmo que $E(r') \subseteq T[E(\tilde{r})]$. En efecto; $y \in E(r')$, entonces

$$\|T^{-1}y\| \le \|T^{-1}\|\,\|y\| \le \|T^{-1}\|\,r' \le \|T^{-1}\|\;r\,(\|T^{-1}\|^{-1} - Lip(f))$$

$$= r\,(\|T^{-1}\|^{-1} - \|T^{-1}\|\;Lip(f)) \le r(1-Lip(T^{-1}\circ f)) = \tilde{r}$$

$\Rightarrow x \in E(\tilde{r})\ /\ y = Tx \ \Rightarrow\ y \in T[E(\tilde{r})]$. Por tanto $E(r') \subseteq T[E(\tilde{r})]$. ■

II.3 EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN FIJA

TEOREMA II.3.1 *Sean* (X,d_x) *un espacio métrico completo y* (X,d_y) *un espacio métrico. Sea*

$$\begin{aligned} f : X\times Y &\longrightarrow X \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) \end{aligned}$$

Definimos: $\quad \begin{aligned} f_y : X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow f_y(x) = f(x,y) \end{aligned} \quad \wedge \quad \begin{aligned} f_x : Y &\longrightarrow X \\ y &\longrightarrow f_x(y) = f(x,y) \end{aligned}$

Supóngase que se cumple:

i) $f_y \in Lip(X) \ \wedge\ Lip(f_y) \le K < 1 \ ;\ \forall y \in Y$

ii) $f_x \in C(Y,X) \ ;\ \forall x \in X$

Entonces si denotamos x_y *el único punto fijo de* f_y $(y \in Y)$, *la aplicación*:

$$\begin{aligned} \varphi : Y &\longrightarrow X \\ y &\longrightarrow \varphi(y) = x_y \end{aligned}$$

llamado ***aplicación fija*** *de* f, *es continua y satisface*

$$d_x(\varphi(y),\varphi(y')) \le \frac{1}{1-k}\,d_x\left(f_y(x_y), f_{y'}(x_y)\right) \quad , \quad \forall\, y,y' \in Y$$

Prueba:. Sean $y,y' \in Y$:

$$d_x(\varphi(y),\varphi(y')) = d_x\left(x_y, x_{y'}\right) = d_x\left(f_y(x_y), f_{y'}(x_{y'})\right)$$

$$\leq d_x\left(f_y(x_y), f_{y'}(x_y)\right) + d_x\left(f_{y'}(x_y), f_{y'}(x_{y'})\right)$$

$$\leq d_x\left(f_y(x_y), f_{y'}(x_y)\right) + Lip(f_{y'}) d_x\left(x_y, x_{y'}\right)$$

$$\leq d_x\left(f_y(x_y), f_{y'}(x_y)\right) + K\, d_x(\varphi(y), \varphi(y'))$$

$$\Rightarrow \quad (1-K)\, d_x(\varphi(y), \varphi(y')) \leq d_x\left(f_y(x_y), f_{y'}(x_y)\right)$$

$$\therefore \quad d_x(\varphi(y), \varphi(y')) \leq \frac{1}{1-k} d_x\left(f_y(x_y), f_{y'}(x_y)\right) \qquad \forall\, y, y' \in Y$$

Para probar la continuidad de φ, sea $y_o \in Y$ (fijo arbitrario); como $f_{x_{y_o}} \in C(Y,X)$, entonces , dado

$$\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, d_y(y, y_o) \Rightarrow d_x\left(f_{x_{y_o}}(y_o), f_{x_{y_o}}(y)\right) < (1-k)\, \varepsilon$$

Luego; por la desigualdad probada anteriormente:

$$d_x(\varphi(y), \varphi(y_o)) \leq \frac{1}{1-k} d_x\left(f_{y_o}(x_{y_o}), f_y(x_{y_o})\right)$$

$$= \frac{1}{1-k} d_x\left(f_{x_{y_o}}(y_o), f_{x_{y_o}}(y)\right) < \frac{(1-K)\,\varepsilon}{1-K} = \varepsilon$$

entonces φ es continua en y_o $\forall y_o \in Y$. Por lo tanto $\varphi \in C(Y,X)$ ■

II.4 TEOREMA DE CONTRACCIÓN EN LAS FIBRAS

Antes de enunciar y demostrar este Teorema, que será útil en el capítulo posterior, necesitamos dos resultados previos.

LEMA II.4.1 *Sea $\{c_j\}_{j\geq 0}$ una sucesión de reales no negativos tal que* $\lim_{j\to\infty} c_j = 0$. *Sea* $0 < K < 1$. *Definamos* $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} c^k \lambda^{n-k}; \forall n \geq 0$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Prueba:. Sea $M_n = \sup_{j\geq n}\{c_j\}$. se cumple que $0 \leq M_{n+1} \leq M_n; \forall n \in \mathbf{Z}^+$

Afirmación: $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, como $\lim_{j\to\infty} c_j = 0$, $\exists\, N \in Z^+ \,/\, j \geq N \Rightarrow c_j < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \sup_{j\geq n}\{c_j\} \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow M_N < \varepsilon$, $n \geq N \Rightarrow M_n \leq M_N < \varepsilon$; lo cual prueba la afirmación.

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n} &= \sum_{k=o}^{2n} \lambda^{2n-k} c_k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{2n-k} c_k + \sum_{k=n}^{2n} \lambda^{2n-k} c_k \\
&\leq M_o\left[\lambda^{2n} + \lambda^{2n-1} + \dots\dots + \lambda^{n+1}\right] + M_n\left[\lambda^{n} + \lambda^{n-1} + \dots\dots + \lambda + 1\right] \\
&\leq M_n\lambda^n\left[\lambda^{n} + \lambda^{n-1} + \dots\dots + \lambda\right] + M_n\left[\lambda^{n} + \lambda^{n-1} + \dots\dots + \lambda + 1\right] \\
&< \frac{M_o\lambda^n}{1-\lambda} + \frac{M_n}{1-\lambda} \quad , \ \forall n \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n} \leq \lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_o\lambda^n}{1-\lambda} + \frac{M_n}{1-\lambda}\right] = 0$$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n+1} &= \sum_{k=o}^{2n+1} \lambda^{2n+1-k} c_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{2n+1-k} c_k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \lambda^{2n+1-k} c_k \\
&\leq M_o\left[\lambda^{2n+1} + \lambda^{2n} + \dots\dots + \lambda^{n+1}\right] + M_{n+1}\left[\lambda^{n} + \lambda^{n-1} + \dots\dots + \lambda + 1\right] \\
&\leq M_n\lambda^n\left[\lambda^{n+1} + \lambda^{n} + \dots\dots + \lambda\right] + M_{n+1}\left[\lambda^{n} + \lambda^{n-1} + \dots\dots + \lambda + 1\right] \\
&< \frac{M_o\lambda^n}{1-\lambda} + \frac{M_{n+1}}{1-\lambda} \quad , \ \forall n \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_o\lambda^n}{1-\lambda} + \frac{M_{n+1}}{1-\lambda}\right] = 0$$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n+1} = 0$$

Luego concluimos que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ ■

LEMA II.4.2 *Sea* (Y,d) *espacio métrico completo y considere* $\{G_n\}_{n\in Z^+} \subseteq Lip(Y)$ *tal que* $Lip(G_n) \leq k < 1$; $\forall\, n \in \mathbf{Z}^+$ *y* $\lim_{n\to\infty} G_n(Y) = G(Y)$; $\forall\, y \in Y$. *Entonces:*

i) $G \in Lip(Y) \ \wedge \ Lip(G) \leq k$

ii) *Sea* $\tilde{y}$ *el único punto fijo de* G. *para* $y \in Y$, *considere la sucesión* $y_1 = G_1(y)$, $y_2 = G_2(y_1)$,..., $y_n = G_n(y_{n-1})$; $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} y_n = \tilde{y}$

Prueba:.

i) Sean $y_1, y_2 \in Y$. Por hipótesis se tiene que para $\varepsilon > 0$

$$\exists\ N_1, N_2 \in Z^+ / n \geq N_1 \Rightarrow d(G_n(y_1), G(y_1)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow d(G_n(y_2), G(y_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, se cumple:

$$d(G(y_1), G(y_2)) \leq d(G(y_1), G_N(y_1)) + d(G_N(y_1), G_N(y_2)) + d(G_N(y_2), G(y_2))$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + Lip(G_n) d(y_1, y_2) + \frac{\varepsilon}{2} \leq k d(y_1, y_2) + \varepsilon \ ,\ \forall \varepsilon > 0$$

$\therefore$ $G \in Lip(Y)$ y $Lip(G) \leq k$

ii) Por demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, \tilde{y}) = 0.$$

Para ello, calculemos la "ley de formación" de los $d(y_n, \tilde{y})$:

$$d(y_1, \tilde{y}) = d(G_1(y), \tilde{y}) \leq d(G_1(y), G_1(\tilde{y})) + d(G_1(\tilde{y}), \tilde{y})$$
$$\leq k d(y, \tilde{y}) + d(G_1(\tilde{y}), \tilde{y})$$

$$d(y_2, \tilde{y}) = d(G_2(y_1), \tilde{y}) \leq d(G_2(y_1), G_2(\tilde{y})) + d(G_2(\tilde{y}), \tilde{y})$$
$$\leq k d(y_1, \tilde{y}) + d(G_2(\tilde{y}), \tilde{y})$$
$$\leq k^2 d(y, \tilde{y}) + k d(G_1(\tilde{y}), \tilde{y}) + d(G_2(\tilde{y}), \tilde{y})$$
$$= k^2 d(y, \tilde{y}) + \sum_{j=0}^{1} k^{1-j} d(G_{j+1}(\tilde{y}), \tilde{y})$$

$$d(y, \tilde{y}) \leq k^{n-1} d(y, \tilde{y}) + \sum_{j=0}^{n-2} k^{n-2-j} d(G_{j+1}(\tilde{y}), \tilde{y}) \qquad \text{(Hip. Ind.)}$$

$$d(y_n, \tilde{y}) \leq d(G_n(y_{n-1}), G_n(\tilde{y})) + d(G_n(\tilde{y}), \tilde{y})$$
$$\leq k d(y_{n-1}, \tilde{y}) + d(G_n(\tilde{y}), \tilde{y})$$
$$\leq k^n d(y, \tilde{y}) + k\left[\sum_{j=0}^{n-2} k^{n-2-j} d(G_{j+1}(\tilde{y}), \tilde{y})\right] + d(G_n(\tilde{y}), \tilde{y})$$

$$= k^n d(y,\tilde{y}) + \sum_{j=0}^{n-2} k^{n-1-j} d\left(G_{j+1}(\tilde{y}),\tilde{y}\right) + d\left(G_n(\tilde{y}),\tilde{y}\right)$$

$$\Rightarrow d(y_n,\tilde{y}) \le k^n d(y,\tilde{y}) + \sum_{j=0}^{n-1} k^{n-1-j} d\left(G_{j+1}(\tilde{y}),\tilde{y}\right) \quad , \quad \forall n \ge 1 \qquad (1)$$

Sea $c_j = d\left(G_{j+1}(\tilde{y}),\tilde{y}\right)$, $\forall\, j \ge 0$, $\{c_j\}$ una sucesión de reales no negativos y por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} c_j = \lim_{n\to\infty} d\left(G_{j+1}(\tilde{y}),\tilde{y}\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(G_{j+1}(\tilde{y}),G(\tilde{y})\right) = 0$$

y como $0 < k < 1$, por el lema II.4.1 se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} k^{n-j} d\left(G_{j+1}(\tilde{y}),\tilde{y}\right) = 0$$

Luego por (1):

$$0 \le \lim_{n\to\infty} d(y_n,\tilde{y}) \le \lim_{n\to\infty} \left[k^n d(y,\tilde{y}) + \sum_{j=0}^{n-1} k^{n-1-j} d\left(G_{j+1}(\tilde{y}),\tilde{y}\right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(y_n,\tilde{y}) = 0 \qquad \blacksquare$$

Ahora enunciaremos y probaremos el Teorema de contracción en las fibras

TEOREMA II.4.3. *Sean* (X,d_x) *y* (X,d_y) *espacios métricos completos;*

sean

$$f : X \longrightarrow X \quad y \quad g : X\times Y \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow f(x) \qquad\qquad y \longrightarrow g(x,y) = g_x(y)$$

funciones tales que:

i) $f \in Lip(X)$ *y* $Lip(f) < 1$

ii) $g_x \in Lip(Y)$; $Lip(g_x) \le K < 1 \quad \forall x \in X$

iii) $g_y \in C(X,Y)$; $\forall x \in Y$

Entonces la aplicación

$$F : X\times Y \longrightarrow X\times Y$$
$$(x,y) \longrightarrow F(x.y) = (f(x),g(x,y)))$$

tiene un único punto fijo atractor.

Prueba: Por la parte (i), se tiene que f es atractor, sea x_o único punto fijo atractor de f. Por demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x,y)=(x_o,y_o)\text{ .para algún } (x_o,y_o)\in X\times Y;\forall(x,y)\in X\times Y$$

Primero, hallemos la "ley de formación" de $F^n(x,y)$.

$$F(x,y)=\big(f(x),g(x,y)\big)=\big(f(x),g_x(y)\big)$$

$$F^2(x,y)=F\big(F(x,y)\big)=F\big(f(x),g_x(y)\big)=\Big(f\big(f(x)\big),g_{f(x)}\big(g_x(y)\big)\Big)$$

$$=\big(f^2(x),g_{f(x)}\circ g_x(y)\big)$$

entonces

$$F^{n-1}(x,y)=\big(f^{n-1}(x),g_{f^{n-2}(x)}\circ g_{f^{n-3}(x)}\circ\ldots\ldots\circ g_x(y)\big) \qquad \text{(Hip. Ind)}$$

$$F^n(x,y)=F\big(F^{n-1}(x,y)\big)=F\big(f^{n-1}(x),g_{f^{n-2}(x)}\circ g_{f^{n-3}(x)}\circ\ldots\ldots\circ g_x(y)\big)$$

$$=\Big(f\big(f^{n-1}(x)\big),g_{f^{n-1}(x)}\big(g_{f^{n-2}(x)}\circ g_{f^{n-3}(x)}\circ\ldots\ldots\circ g_x(y)\big)\Big)$$

$$=\big(f^n(x),g_{f^{n-1}(x)}\circ g_{f^{n-2}(x)}\circ\ldots\ldots\circ g_x(y)\big)$$

Defino $G_1=g_x, G_2=g_{f(x)},\ldots\ldots,G_n=g_{f^{n-1}(x)}$, $\forall n\in\mathbf{Z}^+$. Por hipótesis (ii)

$$\{G_n\}_{n\in Z^+}\subseteq Lip(Y) \ \wedge\ Lip(G_n)\leq k<1 \ ;\ \forall n\in\mathbf{Z}^+$$

De la hipótesis (iii), g_y es continua $\forall x\in Y$, luego

$$\lim_{n\to\infty} G_n(y)=\lim_{n\to\infty} g_{f^{n-1}(x)}(y)=\lim_{n\to\infty} g_y\big(f^{n-1}(x)\big)$$

$$=g_y\Big(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x)\Big)=g_y(x_o)=g_{x_o}(y)=G(y)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} G_n(y)=G(y) \quad , \quad \forall x\in Y$$

Llamemos y_o al único punto fijo de $G=g_{x_o}\in Lip(Y)$, $Lip(G)\leq k<1$

Por el Lema II.4.2

$$\lim_{n\to\infty}\big(G_n\circ G_{n-1}\circ,\ldots\ldots,\circ G_1(y)\big)=y_o$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_{f^{n-1}(x)}\circ g_{f^{n-2}(x)}\circ\ldots\ldots\circ g_x(y)=y_o \quad , \quad \forall x\in Y$$

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x,y)=\lim_{n\to\infty}\big(f^n(x),g_{f^{n-1}(x)}\circ g_{f^{n-2}(x)}\circ\ldots\ldots\circ g_x(y)\big)$$

$$=\Big(\lim_{n\to\infty} f^n(x),\lim_{n\to\infty}\big(g_{f^{n-1}(x)}\circ g_{f^{n-2}(x)}\circ\ldots\ldots\circ g_x(y)\big)\Big)=(x_o,y_o) \ \blacksquare$$

CAPÍTULO III

ESTRUCTURA LOCAL DE LOS PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS PARA DIFEOMORFISMOS EN ESPACIOS DE BANACH

III.1 PRELIMINARES

DEFINICIÓN III.1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, U una vecindad de $0 \in E$ y $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo sobre su

imagen. Decimos que 0 es un punto fijo hiperbólico de f sí y sólo sí

i) $f(0) = 0$

ii) $Df(0) \in Hip(E)$

Recordemos que si $L \in Hip(E)$, entonces, existen dos subespacios cerrados de E , E_u y E_s, y normas $\|\cdot\|_u$, $\|\cdot\|_s$ en E_u y E_s respectivamente tal que

i) $E = E_u \oplus E_s$

ii) $L_u = L|_{E_u} \in \mathcal{L}(E_u)$ y $L_s = L|_{E_s} \in \mathcal{L}(E_s)$

iii) $\| L_u^{-1} x_u \|_u \leq \alpha \| x_u \|_u$, $\forall x_u \in E_u$ y $\| L_s x_s \|_s \leq \alpha \| x_s \|_s$, $\forall x_s \in E_s$

iv) La norma $\| x \|_* = \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\}$, $x = x_u + x_s$, $x_s \in E_s, x_u \in E_u$ es equivalente a la inicial $\| x \|$ en E.

Recordemos también que si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(E, \|\cdot\|_F)$ son dos espacios de Banach entonces el espacio de funciones continuas y acotadas de E a F, denotado por $C_b(E,F)$ es también un espacio de Banach, es decir:

$$C_b(E,F) = \{ f : E \longrightarrow E \ / \ f \text{ es continua y acotada} \}$$

con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un escalar, es un espacio vectorial y si definimos:

$$\| f \|_{E,F} = \sup_{x\in E} \| f(x) \|_F$$

entonces $(C_b(E,F), \|\cdot\|_{E,F})$ es un espacio de Banach. Si $E=F$ denotaremos $C_b(E) \equiv C_b(E,F)$. Ahora probaremos que **la descomposición de E en E_u y E_s, induce una descomposición en** $C_b(E)$ en donde consideramos $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|$ la norma de E que satisface (iv).

Primeramente, definimos las proyecciones canónicas Π_u, Π_s

$$\begin{aligned} \Pi_u : E &\longrightarrow E_u \\ x &\longrightarrow \Pi_u(x) = x_u \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Pi_s : E &\longrightarrow E_s \\ x &\longrightarrow \Pi_s(x) = x_s \end{aligned}$$

Obviamente $\Pi_u \in \mathscr{L}(E,E_u)$, $\Pi_s \in \mathscr{L}(E,E_s)$, $\|\Pi_u\| \leq 1$ y $\|\Pi_s\| \leq 1$

Sea $f \in C_b(E)$, definimos $f_u = \Pi_u \circ f$ y $f_s = \Pi_s \circ f$, es decir:

$$\begin{aligned} f_u : E &\longrightarrow E_u \\ x &\longrightarrow f_u(x) = \Pi_u(f(x)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_s : E &\longrightarrow E_s \\ x &\longrightarrow f_s(x) = \Pi_s(f(x)) \end{aligned}$$

Como $\Pi_u \in \mathscr{L}(E,E_u) \subseteq C_b(E,E_u)$ y $\Pi_s \in \mathscr{L}(E,E_s) \subseteq C_b(E,E_s)$ entonces $f_u \in C_b(E,E_u)$ y $f_s \in C_b(E,E_s)$

Afirmación: $f = f_u + f_s$. En efecto, sea $x \in E$

$$\Rightarrow f(x) \in E = E_u \oplus E_s \Rightarrow f(x) = \Pi_u(f(x)) + \Pi_s(f(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = (\Pi_u \circ f)(x) + (\Pi_s \circ f)(x) = (\Pi_u \circ f + \Pi_s \circ f)(x) \ , \ \forall\, x \in E$$

$$\Rightarrow f = f_u + f_s \ , \ \forall f \in C_b(E) \ ,$$

lo que prueba la afirmación.

Además $f \in C_b(E,E_u) \cap C_b(E,E_s) \Rightarrow f \in C_b(E,E_u)$ y $f \in C_b(E,E_s)$; luego, para $x \in E$, $f(x) \in E_u$ y $f(x) \in E_s \Rightarrow$, $f(x) \in E_u \cap E_s = \{0\} \Rightarrow f(x) = 0$, $\forall\, x \in E \Rightarrow f \equiv 0$. De ésta manera, hemos probado que:

$$C_b(E) = C_b(E,E_u) \oplus C_b(E,E_s)$$

Sabemos que $(C_b(E), \|\cdot\|_{E,E})$, $(C_b(E,E_u), \|\cdot\|_{E,E_u})$ y $(C_b(E,E_s), \|\cdot\|_{E,E_s})$ son espacios de Banach. A continuación veremos la relación que existe entre $\|\cdot\|_{E,E}$, $\|\cdot\|_{E,E_u}$ y $\|\cdot\|_{E,E_s}$

Afirmación: $\| f \|_{E,E} = \max \left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\}$, $\forall f \in \dot{C}_b(E)$

Considérese ahora $T \in \mathcal{L}(C_b(E))$ tal que

$$T_u = T\big|_{cb(E,Eu)} \in \mathcal{L}(C_b(E,E_u)) \text{ y } T_s = T\big|_{cb(E,Es)} \in \mathcal{L}(C_b(E,E_s)),$$

$f \in C_b(E)$ entonces $T(f) \in C_b(E)$, luego $T(f) = [T(f)]_u + [T(f)]_s$ donde $[T(f)]_u \in C_b(E,E_u)$ y $[T(f)]_s \in C_b(E,E_s)$. Pero:

$$[T(f)]_u = \Pi_u \circ (T(f)) = \Pi_u \circ (T(f_u + f_s)) = \Pi_u \circ (T_u(f_u) + T_s(f_s)) = T_u(f_u)$$

$$[T(f)]_s = \Pi_s \circ (T(f)) = \Pi_s \circ (T(f_u + f_s)) = \Pi_s \circ (T_u(f_u) + T_s(f_s)) = T_s(f_s)$$

Luego;

$$\| T(f) \|_{E,E} = \max \left\{ \| T_u(f_u) \|_{E,E_u} , \| T_s(f_s) \|_{E,E_s} \right\}$$

Luego se prueba que: $\| T \| = \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\}$.

III.2 EL TEOREMA DE GROBMAN-HARTMAN PARA DIFEOMORFISMOS EN ESPACIOS DE BANACH

Sea $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo de U sobre su imagen, en donde $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, U es un abierto de E y $0 \in U$. Se prueba que, si 0 es punto fijo hiperbólico de f, entonces f es localmente conjugado a Df(0); es decir $\exists h \in \mathrm{Hom}(E) \,/\, h \circ Df(0) = f \circ h$ en una vecindad del $0 \in E$. A continuación solo presentamos los resultados previos al teorema.

LEMA III.2.1. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach, U es un abierto de E y* $0 \in U$. *Sea* $f : U \longrightarrow E$ *de clase* C^1 *sobre su imagen tal que*

$f(0) = 0$ *y denotemos por* $L = Df(0) \in \mathcal{L}(E,E)$. *Entonces*

$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, r(\varepsilon) = r > 0$ *y* $\exists\, \varphi \in C_b(E) \cap Lip(E) \,/\, f = L + \varphi$ *en* $B_r(0) \subseteq E$.

LEMA III.2.2. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $L \in Hip(E)$. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $\forall\ \varphi, \psi \in C_b(E) \cap Lip(E)$ con $Lip(\varphi), Lip(\psi) < \varepsilon$ la ecuación funcional: $(L+\varphi)\circ(I+\omega) = (I+\omega)\circ(L+\psi)$ tiene una única solución en $C_b(E)$.*

COROLARIO Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L \in Hip(E)$, si $0 < \varepsilon < (1-a)\,\|L^{-1}\|^{-1}$. Entonces $(L+\varphi)$ y $(L+\psi)$ son conjugados, $\forall\ \varphi, \psi \in C_b(E) \cap Lip(E)$ tales que $Lip(\varphi), Lip(\psi) < \varepsilon$

Prueba: Por el Lema anterior, la ecuación funcional:

$$(L+\varphi)\circ(I+\omega_o) = (I+\omega_o)\circ(L+\psi)$$

tiene única solución $\omega_o \in C_b(E)$, También la ecuación funcional:

$$(L+\varphi)\circ(I+\widetilde{\omega}_o) = (I+\widetilde{\omega}_o)\circ(L+\psi)$$

tiene única solución $\widetilde{\omega}_o \in C_b(E)$

$$(I+\omega_o)\circ(I+\widetilde{\omega}_o)\circ(L+\varphi) = (I+\omega_o)\circ(L+\psi)\circ(I+\widetilde{\omega}_o) = (L+\varphi)\circ(I+\omega_o)\circ(I+\widetilde{\omega}_o)$$

$$(I+\widetilde{\omega}_o)\circ(I+\omega_o)\circ(L+\psi) = (I+\widetilde{\omega}_o)\circ(L+\varphi)\circ(I+\omega_o) = (L+\psi)\circ(I+\widetilde{\omega}_o)\circ(I+\omega_o)$$

observe que:

$$(I+\omega_o)\circ(I+\widetilde{\omega}_o) = I + (\widetilde{\omega}_o + \omega_o + \widetilde{\omega}_o\omega_o)$$

$$(I+\widetilde{\omega}_o)\circ(I+\omega_o) = I + (\omega_o + \widetilde{\omega}_o + \omega_o\widetilde{\omega}_o)$$

y como $\omega_o, \widetilde{\omega}_o \in C_b(E) \Rightarrow \widetilde{\omega}_o + \omega_o + \widetilde{\omega}_o\omega_o \wedge \omega_o + \widetilde{\omega}_o + \omega_o\widetilde{\omega}_o \in C_b(E)$.

Además es evidente que

$$(I+0)\circ(L+\varphi) = (L+\varphi)\circ(I+0) \quad \text{y}$$

$$(I+0)\circ(L+\psi) = (L+\psi)\circ(I+0)$$

por unicidad de la solución del tipo $I + \omega$ con $\omega \in C_b(E)$ de las ecuaciones funcionales anteriores, tenemos:

$$(I+\omega_o)\circ(I+\widetilde{\omega}_o) = I = (I+\widetilde{\omega}_o)\circ(I+\omega_o)$$

luego $(I+\omega_o)^{-1} = (I+\tilde{\omega}_o) \in C_b(E)$, luego haciendo $h = I+\omega_o$ entonces $h \in \text{Hom}(E)$ y $(L+\varphi)\circ h = h\circ(L+\psi)$

$$\therefore\ L+\varphi \text{ y } L+\psi \text{ son conjugadas} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA III.2.3. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach, U es un abierto de* E *tal que* $0 \in U$. *Sea* $f : U \longrightarrow E$ *un difeomorfismo de clase*

C^1 *sobre su imagen y 0 es punto fijo hiperbólico de f. Denotemos por* $L = Df(0) \in Hip(E)$. *Entonces* f *es localmente conjugado a* L *es decir:*

$\exists\, h \in Hom(E) \,/\, h\circ Df(0) = f\circ h$ *en* $B_r(0) \subseteq E$[4]

Prueba: Sea $\varepsilon \le (1-a)\|L^{-1}\|^{-1}$, por el Lema III.2.1; existe $r>0$ y $\exists\, \varphi \in C_b(E)\cap Lip(E)$ con $Lip(\varphi) < \varepsilon$ tal que $f = L+\varphi$ en $B_r(0) \subseteq E$. Haciendo $\psi = 0 \in C_b(E)\cap Lip(E)$ entonces $Lip(\psi) = 0 < \varepsilon \le (1-a)\ \|L^{-1}\|^{-1}$, luego por el corolario anterior, $L+\varphi$ y L son conjugadas, entonces

$\exists\, h \in \text{Hom}(E) \,/\, L\circ h = h\circ(L+\varphi)$.

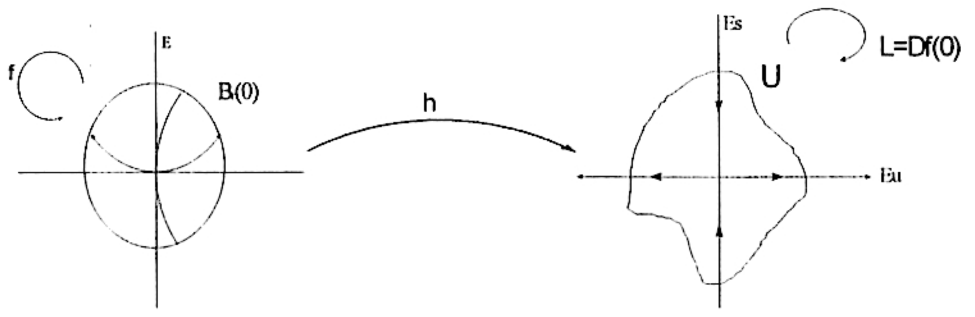
$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "L+\varphi"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "h"] \\
E \arrow[r, "L"'] & E
\end{tikzcd}$$

Luego, si $x \in B_r(0)$, se tiene:

$$L\circ h(x) = h\circ(L+\varphi)(x) = h\circ f(x)$$

$$\therefore\ L \text{ y } f \text{ son conjugados en } B_r(0) \qquad \blacksquare$$

En virtud de la conjugación local, tenemos el siguiente diagrama:



[4] Este teorema fue demostrado por Grobman y Hartman cuando se trabaja en un espacio vectorial de dimensión finita. Vease Sotomayor, J. [17]

III.3 ESTABILIDAD DE PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS

A continuación estudiamos un resultado importante de los puntos fijos hiperbólicos a saber que si una función $g:U \longrightarrow E$ está "**suficientemente cerca**" de $f:U \longrightarrow E$ de tal modo que cumpla con las condiciones del Teorema de Grobman-Hartman, entonces se tendrá que g es localmente conjugado a f y que g tiene un punto fijo hiperbólico "**cercano**" a 0. Para llegar a este resultado es necesario considerar algunos detalles como: ¿qué significa g suficientemente cerca de f ?, y otros adicionales.

Sea $g : U \longrightarrow E$ donde $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach; decimos que g es diferenciable en U sí y sólo sí $\forall\, x \in E$, $\exists\, L \in \mathcal{L}(E,E)$ tal que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\| g(x+\delta) - g(x) - L\delta \|}{\| \delta \|} = 0$$

en tal caso denotaremos $L = Dg(x)$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} Dg : U &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ x &\longrightarrow Dg(x). \end{aligned}$$

Si Dg es continua en U , es decir, $Dg \in C(U, \mathcal{L}(E))$, diremos que g es una función de clase C^1 en U. al conjunto de todas las funciones que son una vez continuamente diferenciable en U , es decir:

$$C^1(U,E) = \{ g : U \longrightarrow E \;/\; g \text{ es diferenciable en U y } Dg \in C(U, \mathcal{L}(E)) \}$$

Es posible dotar a $C^1(U,E)$ de una estructura de espacio de Banach siempre que g y Dg sean acotadas en U. En efecto, si g y Dg son acotadas, se tiene que

$$\| g(x) \| \le k_1 \text{ y } \| Dg(x) \| \le k_2 \;, \quad \forall\, x \in U$$

con k_1, k_2 constantes reales positivas que dependen de g. Luego existen

$$\sup_{x\in U} \| g(x) \| = \| g \|_{U,E} \ \text{ y } \ \sup_{x\in U} \| Dg(x) \| = \| Dg \|_{U,L(E)}$$

Denotamos por $\| g \|_1$ al máximo de éstos supremos. De ésta manera, si denotamos por $C_b^1(U,E)$ al conjunto:

$$C_b^1(U,E) = \{ g \in C'(U,E) \ / \ g \text{ y } Dg \text{ son acotados en } U \}$$

tenemos que:

$$\|\cdot\|_1 : C_b^1(U,E) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

$$g \longrightarrow \| g \|_1 = \max \left\{ \sup_{x\in U} \| g(x) \| , \ \sup_{x\in U} \| Dg(x) \| \right\}$$

es una norma sobre $C_b^1(U,E)$. Además $(C_b^1(U,E), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. Luego "g suficientemente cerca de f" significará que $g,f \in C_b^1(U,E)$ entonces $\| g-f \|_1 < \varepsilon$ es decir:

$$\| g(x)-f(x) \| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \| Dg(x)-Df(x) \| < \varepsilon \quad , \quad \forall\, x \in U$$

Por otro lado, recordemos que en la prueba del Lema III.2.2 empleamos que si $\varphi, \psi \in C_b(E) \cap Lip(E)$ con $Lip(\varphi)$, $Lip(\psi) < (1-\alpha)\| L^{-1} \|^{-1}$ entonces: T es una contracción de $C_b(E)$ en el mismo punto y su único punto fijo ω, satisface

$$(L+\varphi)\circ(I+\omega) = (I+\omega)\circ(L+\psi)$$

$$(I+\omega) \in \mathrm{Hom}(E)$$

Denotemos

$$Y = \{ \varphi \in C_b(E) \cap Lip(E) \ / \ Lip(\varphi) < (1-\alpha) \ \| L^{-1} \|^{-1} \}$$

con $L \in \mathrm{Hip}(E)$, entonces podemos definir

$$d : Y \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(\psi,\varphi) \longrightarrow d(\psi,\varphi) = \| \psi - \varphi \|_{E,E}$$

luego (Y,d) es un espacio métrico. Además:

$$T : C_b(E) \times Y \times Y \longrightarrow C_b(E)$$

$$(\omega,\psi,\varphi) \longrightarrow T(\omega,\psi,\varphi) = \left(I - L_\varphi\right)^{-1} \circ L^{-1} \circ \left(\psi - \varphi \circ (I+\omega)\right)$$

es una contracción $\forall\, \varphi, \psi \in Y$.

Si fijamos $\varphi \in Y$, tendríamos

$$\begin{aligned} T : C_b(E) \times Y &\longrightarrow C_b(E) \\ (\omega, \psi) &\longrightarrow T(\omega, \psi) \end{aligned}$$

y T_ψ es una contracción. Denotemos por $\omega_\psi \in C_b(E)$ el único punto fijo de T_ψ, entonces la aplicación fija

$$\begin{aligned} \theta : Y &\longrightarrow C_b(E) \\ \psi &\longrightarrow \theta(\psi) = \omega_\psi \end{aligned}$$

está bien definida. El siguiente Lema prueba la continuidad de θ.

LEMA III.3.1 *La aplicación fija θ es continua en Y*

Prueba: De acuerdo al Teorema II.2.1 es suficiente probar que

$$T_\omega \in C(Y, C_b(E)) \quad \forall \omega \in C_b(E)$$

Para $\psi_1, \psi_2 \in Y$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\| T_\omega(\psi_1) - T_\omega(\psi_2) \right\|_{E,E} &= \left\| T_{\psi_1}(\omega) - T_{\psi_2}(\omega) \right\|_{E,E} \\ &\leq \left\| (I-L)^{-1} \circ L^{-1} \circ \big(\psi_1 - \varphi \circ (I+\omega)\big) - (I-L)^{-1} \circ L^{-1} \circ \big(\psi_2 - \varphi \circ (I+\omega)\big) \right\|_{E,E} \\ &\leq \left\| (I-L)^{-1} \right\| \left\| L^{-1} \right\| \left\| \psi_1 - \varphi \circ (I+\omega) - \psi_2 + \varphi \circ (I+\omega) \right\|_{E,E} \\ &\leq \left\| (I-L)^{-1} \right\| \left\| L^{-1} \right\| \left\| \psi_1 - \psi_2 \right\|_{E,E} \quad , \quad \forall\, \psi_1, \psi_2 \in Y \end{aligned}$$

Por tanto $T_\omega \in Lip(Y, C_b(E))$ entonces $T_\omega \in C(Y, C_b(E)), \forall \omega \in C_b(E)$ ∎

Teorema de estabilidad local de puntos fijos hiperbólicos.

TEOREMA VI.3.2 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, U es un abierto de E tal que $0 \in U$. Sea $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo de clase*

C^r sobre su imagen y 0 es punto fijo hiperbólico de f. Entonces $\exists\, r > 0$ y $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $g \in B_\varepsilon(f) \subseteq C^r(U,E)$ y se cumple que g es localmente conjugado a f. Además si h es la conjugación entre f y g, $h(0) \in B_r(0) \subseteq E$ y h(0) es punto fijo hiperbólico de g.

Veremos que $\exists\, \varepsilon > 0$, tal que $Lip(f - L) < \varepsilon$ entonces $W^u_f(0,r)$ es el gráfico de una función $\sigma : E_u(r) \longrightarrow E_s(r)$, σ lipschitziana con $Lip(\sigma) < 1$ y $\sigma(0) = 0$

Denotemos por

$$\mathcal{G}(r) = \{ \sigma \in Lip\,(E_u(r), E_s(r)) \,/\, Lip(\sigma) < 1 \;\; y \;\; \sigma(0) = 0 \}$$

Consideremos $d : \mathcal{G}(r) \times \mathcal{G}(r) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \longrightarrow d(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{x \in E_u(r)} \|\sigma_1(x) - \sigma_2(x)\|$$

Queremos ver que $\exists\, \sigma_o \in \mathcal{G}(r)$ tal que $W^u_f(0,r) = G(\sigma_o)$; si asi ocurriera,

para $x_u \in E_u(r) \Rightarrow (x_u, \sigma_o(x_u)) \in G(\sigma_o) = W^u_f(0,r)$

$$\Rightarrow f^{-1}(x_u, \sigma_o(x_u)) \in f^{-1}[\, W^u_f(0,r)\,]$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x_u, \sigma_o(x_u)) \in W^u_f(0,r) = G(\sigma_o)$$

$$\Rightarrow \exists\, y_u \in E_u(r) \;\; \text{tal que} \;\; f^{-1}(x_u, \sigma_o(x_u)) = (y_u, \sigma_o(y_u))$$

$$\Rightarrow (x_u, \sigma_o(x_u)) = f(y_u, \sigma_o(y_u))$$

$$\Rightarrow (x_u, \sigma_o(x_u)) = (\, f_u(y_u, \sigma_o(y_u)) \,,\, f_s(y_u, \sigma_o(y_u)) \,)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_u = f_u(y_u, \sigma_o(y_u)) = f_u \circ (id, \sigma_o)(y_u) \\ \sigma_o(x_u) = f_s(y_u, \sigma_o(y_u)) = f_s \circ (id, \sigma\;)(y_u) \end{cases} \qquad (*)$$

Suponiendo que $f_u \circ (id, \sigma_o) : E_u(r) \longrightarrow E_u$ fuera invertible

$$\Rightarrow y_u = [\, f_u \circ (id, \sigma_o)\,]^{-1}(x_u)$$

reemplazando este resultado en la segunda ecuación de (*):

La demostración de los resultados mencionados se encuentran en Dinámica de operadores hiperbólicos en espacios de Banach [Tesis].

COROLARIO Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, U es un abierto de E tal que $0 \in U$. Sea $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo sobre su imagen y 0 es punto fijo hiperbólico de f. Entonces existen $r, r^{I} > 0$ tal que la aplicación

$$\xi : B_{r^I}(f) \longrightarrow B_r(0)$$
$$g \longrightarrow \xi(g) = h(0)$$

donde $h(0)$ es el punto fijo hiperbólico de g en $B_r(0)$; es continua de claseC[1].

PROPOSICIÓN III.3.4. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach y* $L_o \in Hip(E)$. *Entonces* $\exists\, \delta > 0$ tal que $L \in B_\delta(L_o)$, *entonces* L *es localmente conjugado a* L_o.

[1] Para un estudio detallado de las demostraciones de proposiciones y teoremas mencionados hasta aquí vease: Mamani, Guillermo [19].

CAPITULO IV

IV.1 VARIEDADES INVARIANTES DE PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS

Notemos que si $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, U abierto de E que contiene al 0 y sea $f : U \longrightarrow E$ difeomorfismo sobre su imagen tal que 0 es punto fijo hiperbólico de f, entonces por el teorema de Grobman-Hartman :

$\exists\, r>0$ y $\exists\, h \in \mathrm{Hom}(E)$ / $h \circ L(0) = f \circ h$ en $B_r(0) \subseteq E$, $L = Df(0) \in \mathrm{Hip}(E)$, $h(0) = 0$, Sea

$$y \in h\big[\, E_s \cap B_r(0) \,\big] \Rightarrow \exists\ x \in E_s \cap B_r(0) \text{ tal que } h(x)=y$$

como $\quad x \in E_s \Rightarrow L^n x \in E_s \cap B_r(0), \forall\, n \geq 0 \quad$ y $\quad \lim_{n\to\infty} L^n x = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(L^n x) = h(0)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n\big(h(x)\big) = h(0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(y) = 0$$

Si definimos :

$$W_f^s(0) = \Big\{ q \in U / f^n(q) \in U; \forall n \geq 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} f^n(q) = 0 \Big\}$$

tenemos que $\quad y \in W_f^s(0) \quad \Rightarrow \quad h\big[\, E_s \cap B_r(0) \,\big] \subseteq W_f^s(0)$

Análogamente, $y \in h\big[\, E_u \cap B_r(0) \,\big] \Rightarrow \exists\ x \in h\big[\, E_u \cap B_r(0) \,\big]$ tal que $h(x)=y$

$$\text{como } \quad x \in E_u \Rightarrow L^{-n} x \in E_u \cap B_r(0) \quad \forall n \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} L^{-n} x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(L^{-n} x) = h(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^{-n}(h(x)) = h(0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^{-n}(y) = 0$$

PROPOSICIÓN IV.1.1.- *Sea (M.d) un espacio métrico, U abierto de M,* $f: U \longrightarrow M$ *un homeomorfismo sobre su imágen y* $p \in U$ *punto fijo de f. Se cumple:*

i) $W_f^u(p) = W_{f^{-1}}^s(p)$, $W_{f^{-1}}^u(p) = W_f^s(p)$

ii) $W_f^u(p,r) = W_{f^{-1}}^s(p,r)$, $W_{f^{-1}}^u(p,r) = W_f^s(p,r)$

iii) $f^{-1}\left[W_f^u(p)\right] = W_f^u(p)$, $f\left[W_f^s(p)\right] = W_f^s(p)$

$f\left[W_f^U(p)\right] = W_f^u(p)$, $f^{-1}\left[W_f^S(p)\right] = W_f^s(p)$

iv) $f^{-1}\left[W_f^u(p,r)\right] \subseteq W_f^u(p,r)$ y $f\left[W_f^s(p,r)\right] \subseteq W_f^s(p,r)$

$W_f^u(p,r) \subseteq f\left[W_f^u(p,r)\right]$ y $W_f^s(p,r) \subseteq f^{-1}\left[W_f^S(p,r)\right]$

v) $W_f^s(p,r) = \bigcap_{n\geq 0} f^{-1}\left[B_r(p)\right]$ y $W_f^u(p,r) = \bigcap_{n\geq 0} f^n\left[B_r(p)\right]$

PROPOSICIÓN IV.1.2.- *Sea (M,d) un espacio métrico, U abierto de M, f: U* $\longrightarrow$ *M Homeomorfismo sobre su imagen y* $p \in U$ *punto fijo de f.*

i) $\exists r > 0 /\ W_f^s(p,r) \subseteq W_f^s(p) \Rightarrow W_f^s(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}\left[W_f^S(p,r)\right]$

ii) $\exists r > 0 /\ W_f^u(p,r) \subseteq W_f^u(p) \Rightarrow W_f^u(p) \bigcup_{n\geq 0} f^n\left[W_f^u(p,r)\right].$

PROPOSICIÓN IV.1.3 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach, U abierto de E, f: U* $\longrightarrow$ E *difeomorfismo de clase* C^1 *tal que* $p \in U$ *es punto fijo hiperbólico de f. Entonces* $\exists r > 0 /\ W_f^s(p,r) \subseteq W_f^s(p)$ y $W_f^u(p,r) \subseteq W_f^u(p)$.

si definimos $W_f^{us}(0) = \left\{ q \in U / f^{-n}(q) \in U; \forall n \geq 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} f^{-n}(q) = 0 \right\}$

tenemos que $y \in W_f^u(0) \Rightarrow h\left[E_u \cap B_r(0) \right] \subseteq W_f^u(0)$

considerando lo anterior tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN IV.1.1: Sea (M,d) un espacio métrico, $U \subseteq M$ abierto y $f: U \longrightarrow M$ un homeomorfismo sobre un abierto $f[U]$ de M. Sea $p \in M$ un punto fijo de f. Entonces:

i) La **VARIEDAD ESTABLE** de f en p, denotado por $W_f^s(p)$ es el conjunto

$$W_f^s(p) = \left\{ q \in U / f^n(q) \in U; \forall n \geq 1 \text{ y } \lim_{n\to\infty} d(f^n(q), p) = 0 \right\}$$

ii) la **VARIEDAD INESTABLE** de f en p, denotada por $W_f^u(p)$ es el conjunto

$$W_f^u(p) = \left\{ q \in U / f^{-n}(q) \in U; \forall n \geq 1 \text{ y } \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(q), p) = 0 \right\}$$

iii) La **VARIEDAD ESTABLE DE TAMAÑO r** (r>0) de f en p, denotado por $W_f^s(p,r)$ es el conjunto:

$$W_f^s(p,r) = \left\{ q \in U / f^n(q) \in U; \forall n \geq 1 \text{ y } d(f^n(q), p) < r; \forall n \geq 0 \right\}$$

iv) La **VARIEDAD INESTABLE DE TAMAÑO r** (r>0) de f en p, denotado por $W_f^u(p,r)$ es el conjunto:

$$W_f^u(p,r) = \left\{ q \in U / f^{-n}(q) \in U; \forall n \geq 1 \text{ y } d(f^{-n}(q), p) < r; \forall n \geq 0 \right\}$$

Enunciamos las propiedades de las variedades estables e inestables que utilizaremos posteriormente.

Con las proposiciones enunciadas se observará que si $f:U \longrightarrow E$ es un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen, en donde $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, U abierto de E tal que $p \in U$ es punto fijo hiperbólico, entonces $W_f^u(p,r)$ (en donde $r > 0$ es tomado tal que $B_r(p) \subseteq U$) es el gráfico de alguna función continua . Análogamente para $W_f^s(p,r)$.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, U abierto de E que contiene al cero,

$f:U \longrightarrow E$ lipschitziana tal que $f(0)=0$ y $L \in Hip(E)$. Como sabemos, existen subespacios cerrados de E: E_u, E_s y una constante $a = a(L)$, $0 < a < 1$ tal que :

i) $E = E_u \oplus E_s$

ii) $L_u = L|_{E_u} \in \mathcal{L}(E_u)$ y $L_s = L|_{E_s} \in \mathcal{L}(E_s)$

iii) $\|L_u^{-1} x_u\|_u \leq a \|x_u\|_u$, $\forall x_u \in E_u$ y $\|L_s x_s\|_s \leq a \|x_s\|_s$, $\forall x_s \in E_s$

iv) La norma $\|x\|_* = \max\left\{ \|x_u\|_u , \|x_s\|_s \right\}$, $x = x_u + x_s$, $x_s \in E_s, x_u \in E_u$

es equivalente a la inicial $\|x\|$ en E.

Como U es abierto, $\exists\, r > 0$ tal que $\overline{B_r(r)} \subseteq U$. Usaremos la siguiente notación:

$$E_u(r) = E_u \cap \overline{B_r(r)}$$

$$E_s(r) = E_s \cap \overline{B_r(r)}$$

$$E(r) = E_u(r) \times E_s(r) = \overline{B_r(r)}$$

De esta manera, podemos considerar $f: E(r) \longrightarrow E$ Lipschitziana, $f(0) = 0$, f homeomorfismo sobre su imagen.

$$\sigma_o(x_u) = \left[f_s \circ (id,\sigma_o)\right] \circ \left[f_u \circ (id,\sigma_o)\right]^{-1}(x_u), \qquad \forall\, x_u \in E_u(r)$$

$$\Rightarrow \sigma_o = \left[f_s \circ (id,\sigma_o)\right] \circ \left[f_u \circ (id,\sigma_o)\right]^{-1}$$

Luego si $\exists\, \sigma_o \in \mathcal{G}(r)$ tal que $G(\sigma_o) = W_f^u(0,r)$ entonces σ_o debe ser punto fijo de la aplicación $\left[f_s \circ (id,\sigma_o)\right] \circ \left[f_u \circ (id,\sigma_o)\right]^{-1}$. Para ver si la aplicación mencionada es contractiva de tal manera que σ_o sea punto fijo, consideremos lo siguiente:

Sea $\sigma_o \in \mathcal{G}(r)$: Denotemos: $\psi_f(\sigma) = f_u \circ (id,\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u$

$$\varphi_f(\sigma) = f_s \circ (id,\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_s$$

Veamos ahora la secuencia y el detalle de la construcción

LEMA IV.1.4 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach, U abierto de* E *que contiene al cero* $f: U \longrightarrow E$ *homeomorfismo sobre su imágen tal que*

$f \in Lip(U, E)$ *y* $f(0) = 0$. *Sea* $L \in Hip(E)$, *si* $Lip(f - L) < \varepsilon < a^{-1}$, *entonces la función :*

$$\psi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u$$

$$x_u \longrightarrow \psi_f(\sigma)(x_u) = f_u \circ (id,\sigma)(x_u) = f_u \circ (x_u, \sigma(x_u))$$

es invertible, $\psi_f(\sigma)^{-1} \in Lip(E_u, E_u(r))$ y $Lip(\psi_f(\sigma)^{-1}) \leq \dfrac{1}{a^{-1} - \varepsilon}$ $\qquad \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$

Prueba:

Tenemos que $\psi_f(\sigma) = \Pi_u \circ f \circ (id,\sigma) \Rightarrow \psi_f(\sigma) = L_u + \Pi_u \circ f \circ (id,\sigma) - L_u$

luego $\psi_f(\sigma)$ es invertible si $Lip(\Pi_u \circ f \circ (id,\sigma) - L_u) < \| L_u^{-1} \|^{-1} = a^{-1}$

nótese que:

$$\Pi_u \circ L \circ (id,\sigma)(x_u) = \Pi_u(L(x_u, \sigma(x_u))) = \Pi_u(L_u(x_u), L_s\sigma(x_u))) = L_u(x_u),$$

$$\forall\, x_u \in E_u(r) \Rightarrow \Pi_u \circ L \circ (id,\sigma) = L_u \text{ luego :}$$

$$Lip(\Pi_u \circ f \circ (id,\sigma) - L_u) = Lip(\Pi_u \circ f \circ (id,\sigma) - \Pi_u \circ L_u(id, \sigma))$$

$$= Lip(\Pi_u \circ (f - L) \circ (id, \sigma))$$

$$\leq \|\Pi_u\| \; Lip(\mathrm{f} - \mathrm{L}) \; Lip(\mathrm{id}, \sigma)) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

como $\|(\mathrm{id},\sigma)(x_u) - (\mathrm{id},\sigma)(x_u)\| = \max \left\{ \|x_u - x_u'\|_u \, , \, \|\sigma(x_u) - \sigma(x_u')\|_s \right\}$

y $\|\sigma(x_u) - \sigma(x_u')\|_s \leq Lip(\sigma) \|x_u - x_u'\|_u \leq \|x_u - x_u'\|_u$, se tiene que

$\|(\mathrm{id},\sigma)(x_u) - (\mathrm{id},\sigma)(x_u)\| \leq \|x_u - x_u'\|_u$, $\forall x_u, x_u' \in E_u(r) \Rightarrow Lip(\mathrm{id},\sigma) \leq 1$,

reemplazando este resultado en (1) y teniendo en cuenta que $\|\Pi_u\| \leq 1$

$$\therefore Lip(\Pi_u \circ f \circ (\mathrm{id},\sigma) - \mathrm{L}_u) \leq Lip(\mathrm{f} - \mathrm{L}) < \varepsilon$$

pero por hipótesis

$$\varepsilon < \| \; \mathrm{L}_u^{-1} \; \|^{-1} = \alpha^{-1} \;\; \Rightarrow \;\; \psi_f(\sigma) = \mathrm{L}_u + \left[\; \Pi_u \circ f \circ (\mathrm{id},\sigma) - \mathrm{L}_u \; \right]$$

es invertible más aún : $\psi_f(\sigma)^{-1} \in Lip(E_u, E_u(r))$ y

$$Lip\big(\psi_f(\sigma)^{-1}\big) \leq \frac{1}{\alpha^{-1} - \varepsilon}. \qquad \blacksquare$$

LEMA IV.1.5 . *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach, U abierto de* E *que contiene al cero* $f: U \longrightarrow$ E *homeomorfismo sobre su imágen tal que*

$f \in Lip(\mathrm{U}, \mathrm{E})$ *y* $f(0) = 0$. *Sea* $\mathrm{L} \in Hip(\mathrm{E})$, *si* $Lip(f - \mathrm{L}) < \varepsilon < \alpha^{-1} - 1$, *entonces:*

$$E_u(r) \subseteq \mathrm{Im}\big(\psi_f(\sigma)\big) \, , \quad \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

Prueba:

Sea $y_u \in E_u(r)$. P.D.Q. $\exists \, x_u \in E_u(r)$ tal que $\psi_f(\sigma)(x_u) = y_u$.
Como $\psi_f(\sigma)$ es invertible entonces $x_u = \psi_f(\sigma)^{-1}(y_u)$, notemos que :
$\psi_f(\sigma)(0) = f_u \circ (\mathrm{id},\sigma)(0) = f_u \circ (0,0) = \Pi_u\big(f(0)\big) = \Pi_u(0) = 0 \Rightarrow \psi_f(\sigma)^{-1}(0) = 0$

luego ;
$\|x_u\|_u = \| \; \psi_f(\sigma)^{-1}(y_u) \; \|_u = \| \; \psi_f(\sigma)^{-1}(y_u) - \psi_f(\sigma)^{-1}(0) \; \|_u \leq Lip\big(\psi_f(\sigma)^{-1}\big) \|y_u\|_u$

considerando el lema anterior $\|x_u\|_u \leq \dfrac{1}{\alpha^{-1} - \varepsilon} r$, luego por hipótesis $\|x_u\|_u \leq r$

entonces $\exists \, x_u \in E_u(r)$ tal que $\psi_f(\sigma)(x_u) = y_u \Rightarrow y_u \in \mathrm{Im}\big(\psi_f(\sigma)\big)$

$\therefore E_u(r) \subseteq \mathrm{Im}\big(\psi_f(\sigma)\big) \qquad \blacksquare$

LEMA IV.1.6 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach, U abierto de* E *que contiene al cero* $f: U \longrightarrow E$ *homeomorfismo sobre su imágen tal que*

$f \in Lip(U,E)$ *y* $f(0) = 0$. *Sea* $L \in Hip(E)$, *si* $Lip(f - L) < \varepsilon < 1 - \alpha$, entonces

$$\varphi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_s(r) \; ; \; \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

Prueba: Sea $x_u \in E_u(r)$,
nótese que $f_s \circ (id,\sigma)(0) = f_s \circ (0,0) = \Pi_s(f(0)) = \Pi_s(0) = 0 \Rightarrow \varphi_f(\sigma)^{-1}(0) = 0$,
sabemos que : $\Pi_s \circ L \circ (id,\sigma)(x_u) = L_s(\sigma(x_u))$; luego

$$\begin{aligned}
\| \varphi_f(\sigma)(x_u) \|_u &= \| \Pi_s \circ L \circ (id,\sigma)(x_u) - \Pi_s \circ L \circ (id,\sigma)(0) \|_s \\
&\le \| \Pi_s \circ f \circ (id,\sigma)(x_u) - \Pi_s \circ L \circ (id,\sigma)(x_u) - \Pi_s \circ f \circ (id,\sigma)(0) + \\
&\quad \Pi_s \circ L \circ (id,\sigma)(0) \|_s + \| L_s(\sigma(x_u)) - L_s(\sigma(0)) \|_s \\
&\le \|\Pi_u\| Lip(f - L)\, Lip(id, \sigma) \|x_u\|_u + \| L_s \| \|Lip(\sigma)\| \|x_u\|_u \\
&\le (Lip(f - L) + \alpha) \|x_u\|_u < (\varepsilon + \alpha) r < r \qquad \text{(por hipotesis)}
\end{aligned}$$

$\therefore \| \varphi_f(\sigma)(x_u) \|_u < r$ ■

TEOREMA IV.1.7 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach, U abierto de* E *que contiene al cero* $f: E(r) \longrightarrow E$ *homeomorfismo sobre su imágen tal que:*

$f \in Lip(E(r),E)$ *y* $f(0) = 0$. *Sea* $L \in Hip(E)$, *si* $Lip(f - L) < \varepsilon < 1 - \alpha$, *entonces:*

i) $\psi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u$ *es invertible* , $\psi_f(\sigma)^{-1} \in Lip(E_u(r))$ *y* $Lip(\psi_f(\sigma)^{-1}) \le \dfrac{1}{\alpha^{-1} - \varepsilon}$; $\forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$

ii) $\varphi_f(\sigma) \in Lip(E_u(r), E_s(r))$ *y* $Lip(\varphi_f(\sigma)) < \varepsilon + \alpha$,

iii) $\varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1} \in \mathcal{G}(r)$; $\forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$

Prueba: Dado que $\varepsilon < \min\{ 1 - \alpha , \alpha^{-1} - 1 \}$ por los dos lemas anteriores y $\varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1} : E_u(r) \longrightarrow E_s(r)$ está definida y además,

$$\psi_f(\sigma)^{-1} \in Lip(E_u(r), E_u(r)) \quad \text{y } Lip(\psi_f(\sigma)^{-1}) \le \frac{1}{\alpha^{-1} - \varepsilon} \quad ; \quad \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

De esta manera solo hace falta probar la parte iii) ; veamos;

Sea $x_u, x_u' \in E_u(r)$

$$\| \varphi_f(\sigma)(x_u) - \varphi_f(\sigma)(x_u') \|_s = \| f_s \circ (id,\sigma)(x_u) - f_s \circ (id, \sigma(x_u'))\|_s$$

$$\leq \| \Pi_s \circ f \circ (id,\sigma)(x_u) - \Pi_s \circ L \circ (id,\sigma)(x_u) - \Pi_s \circ f \circ (id,\sigma)(x_u') + \Pi_s \circ L \circ (id,\sigma)(x_u') \|_s + \| L_s(\sigma(x_u)) - L_s(\sigma(x_u')) \|_s$$

$$\leq \|\Pi_s\| \, \mathrm{Lip}(f - L) \, \mathrm{Lip}(id, \sigma) \|x_u - x_u'\|_u + a\mathrm{Lip}(\sigma) \|x_u - x_u'\|_u \leq (\varepsilon + a)\|x_u - x_u'\|_u$$

$$\Rightarrow \varphi_f(\sigma) \in Lip(E_u(r), E_s(r)) \text{ y } Lip(\varphi_f(\sigma)) < \varepsilon + a$$

finalmente $Lip(\varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1}) \leq Lip(\varphi_f(\sigma))Lip(\psi_f(\sigma)^{-1}) \leq \dfrac{\varepsilon + a}{a^{-1} - \varepsilon} < 1$,

por hipótesis se tiene:

$$1 - a = \min\left\{ a^{-1} - 1 , 1 - a , \frac{a^{-1} - a}{2} \right\}; \ \varepsilon + a < a^{-1} - a,$$

luego como $\varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1}(0) = \varphi_f(\sigma)(0) = 0$

$$\therefore \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1} \in \mathcal{G}(r) ; \ \forall \sigma \in \mathcal{G}(r). \qquad \blacksquare$$

De esta manera es posible definir:

$$\begin{aligned} \Gamma_f : \mathcal{G}(r) &\longrightarrow \mathcal{G}(r) \\ \sigma &\longrightarrow \Gamma_f(\sigma) = \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1} \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN IV.1.8. *Sea* $\mathcal{G}(r) = \{ \sigma \in Lip(E_u(r), E_s(r)) \,/\, Lip(\sigma) \text{ y } \sigma(0) = 0 \}$

con la métrica:

$$d: \mathcal{G}(r) \times \mathcal{G}(r) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \longrightarrow d(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{x \in E_u(r)} \| \sigma_1(x) - \sigma_2(x) \|$$

Entonces $(\mathcal{G}(r), d)$ *es un espacio métrico completo.*

Prueba: Sea $\sigma \in \mathcal{G}(r) \Rightarrow \sigma \in Lip(E_u(r), E_s(r)) \subseteq C(E_u(r), E_s(r))$

Además $\|\sigma(x_u)\|_s = \|\sigma(x_u) - \sigma(0)\|_s \leq Lip(\sigma)\|x_u\|_u \leq r \quad \forall\, x_u \in E_u(r)$

$$\Rightarrow \sigma \in C_b\big(E_u(r), E_s(r)\big)$$

$$\therefore \mathcal{G}(r) \subseteq C_b\big(E_u(r), E_s(r)\big)$$

Como $E_s(r)$ es un subconjunto cerrado del espacio de Banach $(E_s, \|.\|_s)$, entonces $E_s(r)$ es un espacio métrico completo, con la métrica d_s inducida por $\|.\|_s$ i. e.

$$d_s : E_s(r) \times E_s(r) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x_s, x_s') \longrightarrow d_s(x_s, x_s') = \| x_s - x_s' \|_s$$

Luego $C_b\big(E_u(r), E_s(r)\big)$ es un espacio métrico completo. De ésta manera, es suficiente probar que $Lip\ (E_u(r), E_s(r))$ es un subespacio cerrado de $C_b\big(E_u(r), E_s(r)\big)$.

Sea $\sigma \in \overline{\mathcal{G}(r)} \Rightarrow \exists \{\sigma_n\} \subseteq \mathcal{G}(r)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(\sigma_n, \sigma) = 0$

Afirmo que $\sigma \in \mathcal{G}(r)$. En efecto:

Para $x_u, x_u' \in E_u(r)$, se tiene que $\|\sigma_n(x_u) - \sigma(x_u)\|_s \leq d(\sigma_n, \sigma)$; $\forall\, n \in Z^+$

y $\|\sigma_n(x_u') - \sigma(x_u')\|_s \leq d(\sigma_n, \sigma)$; $\quad \forall\, n \in Z^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|\sigma_n(x_u) - \sigma(x_u)\|_s = 0$ y

$\lim\limits_{n\to\infty} \|\sigma_n(x_u') - \sigma(x_u')\|_s = 0$, luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in Z^+$ tal que:

$\|\sigma_N(x_u) - \sigma(x_u)\|_s < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|\sigma_N(x_u') - \sigma(x_u')\|_s < \frac{\varepsilon}{2}$, luego:

$$\|\sigma(x_u) - \sigma(x_u')\|_s \leq \|\sigma(x_u) - \sigma_N(x_u)\|_s + \|\sigma_N(x_u) - \sigma_N(x_u')\|_s + \|\sigma_N(x_u') - \sigma(x_u')\|_s$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{Lip}(\sigma_N)\|x_u - x_u'\|_u \leq + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon + \| x_u - x_u' \|_u$$

$$\Rightarrow \|\sigma(x_u) - \sigma(x_u')\|_s < \varepsilon + \| x_u - x_u' \|_u\ ; \ \forall\ \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \|\sigma(x_u) - \sigma(x_u')\|_s \leq \| x_u - x_u' \|_u \quad \forall\ x_u, x_u' \in E_u(r)$$

$$\Rightarrow \sigma \in Lip\big(E_u(r), E_s(r)\big) \text{ y } \mathrm{Lip}\,(\sigma) \leq 1\ ,$$

Además:

$$0 \le \|\sigma(0)\|_s = \|\sigma_n(0) - \sigma(0)\|_s \le d(\sigma_n,\sigma) \ ; \ \forall\, n \ge 0 \Rightarrow \|\sigma(0)\|_s = 0$$

entonces $\sigma(0) = 0$ por lo tanto $\sigma \in \mathcal{G}(r)$, luego $\mathcal{G}(r)$ es cerrado y esto prueba la proposición. ■

Finalmente, queda por probar que Γ_f es una contracción : $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}(r)$

$$d(\Gamma_f(\sigma_1)\Gamma_f(\sigma_2)) = \sup_{x \in E_u(r)} \|\Gamma_f(\sigma_1)(x_u) - \Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\|_s$$ pero tenemos:

$$\|\Gamma_f(\sigma_1)(x_u) - \Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\|_s =$$
$$\left\| f_s \circ (id,\sigma_1) \circ \left[f_u \circ (id,\sigma_1)\right]^{-1}(x_u) - f_s \circ (id,\sigma_2) \circ \left[f_u \circ (id,\sigma_2)\right]^{-1}(x_u) \right\|_s$$

haciendo $y_u = \left[f_u \circ (id,\sigma_1)\right]^{-1}(x_u) \Rightarrow x_u = f_u \circ (y_u, \sigma_1(y_u))$ y reemplazando en lo anterior:

$$\|\Gamma_f(\sigma_1)(x_u) - \Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\|_s = \| f_s(y_u,\sigma_1(y_u)) - \Gamma_f(\sigma_2)(f_u(y_u,\sigma_1(y_u)) \|_s \ \ldots\ldots\ldots (*)$$

Veamos ahora la forma de acotar el lado derecho de la igualdad:

LEMA IV.1.9 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach* $f: E(r) \longrightarrow E$ *homeomorfismo sobre su imágen tal que* $f \in Lip(E(r), E)$ *y* $f(0) = 0$. *Sea* $L \in Hip(E)$. *Si* $Lip(f-L) < \varepsilon < 1 - a$,

entonces la función:

$$\Gamma_f : \mathcal{G}(r) \longrightarrow \mathcal{G}(r)$$
$$\sigma \longrightarrow \Gamma_f(\sigma) = \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1}$$

satisface la desigualdad:

$$\| \Gamma_f(\sigma_2)(f_u(y_u,\sigma_1(y_u)) - f_s(y_u,\sigma_1(y_u)) \|_s \le (a + 2\varepsilon)\|\sigma(y_u) - y_s\|_s ; \ \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

en donde $(y_u, y_s) \in E(r)$ es tal que $f_u(y_u, y_s) \in E_u(r)$

Prueba:

$$\| \Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s) - f_s(y_u,y_s) \|_s \le \| \Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s) - f_s(y_u,\sigma(y_u)) \|_s +$$
$$+ \| f_s(y_u,\sigma(y_u)) - (f_s(y_u,y_s) \|_s$$

acotemos el primer sumando:

$$\| \Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s)-f_s(y_u,\sigma(y_u)) \|_s = \| \Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s)-\Gamma_f(\sigma)\psi_f(\sigma)(y_u) \|_s$$

$$\leq Lip(\Gamma_f(\sigma)) \| f_u(y_u,y_s)-f_u(y_u,\sigma(y_u)) \|_u$$

$$\leq \| f_u(y_u,y_s)-f_u(y_u,\sigma(y_u)) \|_u$$

$$\leq \| \Pi_u \circ f(y_u,y_s)-\Pi_u \circ L(y_u,y_s)-f_u(y_u,\sigma(y_u))+\Pi_u \circ L(y_u,y_s) \|_u$$

$$+ \| L_u(y_u)-L_u(y_u) \|_u$$

$$= \| \Pi_u \circ (f-L)(y_u,y_s)-\Pi_u \circ (f-L)(y_u,\sigma(y_u)) \|_u$$

$$\leq \|\Pi_u\| \, Lip(f-L) \, \| (y_u,y_s)-(y_u,\sigma(y_u)) \|_u$$

$$< \varepsilon \| y_s-\sigma(y_u) \|_s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Acotando el segundo sumando:

$$\| f_s(y_u,\sigma(y_u))-(f_s(y_u,y_s) \|_s$$

$$\leq \| \Pi_s \circ f(y_u,\sigma(y_u))-\Pi_s \circ L(y_u,\sigma(y_u))-\Pi_s \circ f(y_u,y_s)+\Pi_s \circ L(y_u,y_s) \|_s +$$

$$\| L_s(\sigma(y_u))-L_s(y_s) \|_s$$

$$= \| \Pi_s \circ (f-L)(y_u,\sigma(y_u))-\Pi_s \circ (f-L)(y_u,y_s) \|_u + \| L_s(\sigma(y_u)-y_s) \|_s$$

$$\leq \|\Pi_s\| \, Lip(f-L) \, \| (y_u,\sigma(y_u))-(y_u,y_s) \|_u + a \| \sigma(y_u)-y_s \|_s \ldots\ldots(2)$$

Remplazando (1) y (2) en la primera desigualdad:

$$\| \Gamma_f(\sigma_1)(x_u)-\Gamma_f(\sigma_2)(x_u) \|_s \leq (a+2\varepsilon) \| \sigma(y_u)-y_s \|_s \ ; \ \forall\, \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

Usando el lema en (*)

$$\| \Gamma_f(\sigma_1)(x_u)-\Gamma_f(\sigma_2)(x_u) \|_s \leq (a+2\varepsilon) \| \sigma(y_u)-y_s \|_s \leq (a+\varepsilon) \sup_{x \in E_u(r)} \| \sigma_1(y_u)-\sigma_2(y_u) \|_s$$

$$= (a+2\varepsilon) d(\sigma_1,\sigma_2) \ ; \ \forall\, x_u \in E_u(r)$$

$$\therefore \ d(\Gamma_f(\sigma_1),\Gamma_f(\sigma_2)) \leq (a+2\varepsilon) d(\sigma_1,\sigma_2) \ ; \ \sigma_1,\sigma_2 \in \mathcal{G}(r) \qquad \blacksquare$$

$$\begin{cases} y_u^0 = x_u \quad y \quad y_u^n = f_u\left(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}\right); \forall n \geq 0 \\ y_s^0 = x_s \quad y \quad y_s^n = f_s\left(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}\right); \forall n \geq 0 \end{cases} \quad \text{: además}$$

$f_u(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}) \in E_u(r)$; $\forall n \geq 0$,. Luego :

$$\left\|\sigma_f(x_u) - x_s\right\|_s = \left\|\Gamma_f(\sigma_f)(f_u(y_u^1, y_s^1)) - f_s(y_u^1, y_s^1)\right\|_s \leq (\alpha + 2\varepsilon)\left\|\sigma(y_u^1) - y_s^1\right\|_s$$

$$= (\alpha + 2\varepsilon)\left\|\Gamma_f(\sigma_f)(f_u(y_u^2, y_s^2)) - f_s(y_u^2, y_s^2)\right\|_s$$

$$\leq (\alpha + 2\varepsilon)^2 \left\|\sigma(y_u^2) - y_s^2\right\|_s$$

.

.

.

$$\leq (\alpha + 2\varepsilon)^n \left\|\sigma(y_u^n) - y_s^n\right\|_s \; ; \; \forall n \geq 0$$

$$\therefore \quad \left\|\sigma_f(x_u) - x_s\right\|_s \leq (\alpha + 2\varepsilon)^n \left[\left\|\sigma_f(y_u^n)\right\|_s + \left\|y_s^n\right\|_s\right] \leq (\alpha + 2\varepsilon)^n 2r \; ; \; \forall n \geq 0$$

Haciendo $n \longrightarrow \infty$, como $\alpha + 2\varepsilon < 1$: $\left\|\sigma_f(x_u) - x_s\right\|_s \leq 0$

$$x_s = \sigma_f(x_u) \Rightarrow (x_u, x_s) \in G(\sigma_f) \;\therefore\; \bigcap_{n \geq 0} f^n\left[E(r)\right] \subseteq G(\sigma_f)$$

$$\therefore \quad G(\sigma_f) = \bigcap_{n \geq 0} f^n\left[E(r)\right] = W_f^u(0, r)$$

Por último, obsérvese que para σ_f definimos

$$\Pi^* : E_u(r) \longrightarrow G(\sigma_f)$$

$$x_u \longrightarrow \Pi^*(x_u) = (x_u, \sigma_f(x_u))$$

$$\Pi_u \Pi^*(x_u) = \Pi_u(x_u, \sigma_f(x_u)) = x_u \quad y \quad \Pi^* \Pi_u(x_u, \sigma_f(x_u)) = \Pi^*(x_u) = (x_u, \sigma_f(x_u))$$

$$\therefore \quad \Pi^* = \Pi^{-1}\big|_{G(\sigma_f)} \text{ . Además:}$$

$$\left\|\Pi^*(x_u) - \Pi^*(x_u')\right\| = \left\|(x_u, \sigma_f(x_u)) - (x_u', \sigma_f(x_u'))\right\|$$

$$= \left\|(x_u - x_u') - (\sigma_f(x_u) - \sigma_f(x_u'))\right\| = \left\|x_u - x_u'\right\|_s$$

$$\therefore \quad Lip(\Pi^*) \leq 1$$

$\Rightarrow\ \Gamma_f \in Lip(\mathcal{G}(r))$ y $Lip(\Gamma_f) \le (\alpha + 2\varepsilon)$. Si tomamos $\alpha + 2\varepsilon < 1$

$\Leftrightarrow\ \varepsilon < \dfrac{1-\alpha}{2}$. Γ_f será una contracción y por tanto, tendrá un único punto fijo σ_f

Afirmo que $G(\sigma_f) = W_f^u(0,r)$. En efecto , primeramente observe que :

$$(x_u, x_s) \in f[G(\sigma)] \cap E(r) \Leftrightarrow \exists\, y_u \in E_u(r) / (x_u, x_s) = f(y_u, \sigma(y_u))$$
$$= f_u(y_u, \sigma(y_u)),\ f(y_u, \sigma(y_u))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_u = f_u(y_u, \sigma(y_u)) = \Pi_u \circ f \circ (id, \sigma)(y_u) = \psi_f(\sigma)(y_u) \\ x_s = f_s(y_u, \sigma(y_u)) = \Pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(y_u) = \varphi_f(\sigma)(y_u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ y_u = \psi_f(\sigma)^{-1}(x_u) \quad y \quad y_s = \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1}(x_u) = \Gamma_f(\sigma)(x_u)$$

$$\Leftrightarrow\ (x_u, x_s) \in G(\Gamma_f(\sigma))$$

$$\therefore \quad G(\Gamma_f(\sigma)) = f[G(\sigma)] \cap E(r) : \ \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

Luego $G(\sigma_f) = G(\Gamma_f(\sigma_f)) = f[G(\sigma)] \cap E(r) \subseteq E(r)$

Suponga: $G(\sigma_f) \subseteq f^{n-1} E(r)$ (Hipótesis inductiva)

$$f[G(\sigma_f)] \subseteq f^n[E(r)] \Rightarrow f[G(\sigma)] \cap E(r) \subseteq f^n[E(r)] \Rightarrow G(\Gamma_f(\sigma_f)) \subseteq f^n[E(r)]$$

$$\Rightarrow G(\sigma_f) \subseteq f^n E(r) : \ \forall n \ge 0 \quad \therefore\ G(\sigma_f) \subseteq \bigcap_{n \ge 0} f^n[E(r)]$$

Recíprocamente, $(x_u, x_s) \in \bigcap_{n\ge 0} f^n[E(r)] \Rightarrow (x_u, x_s) \in f^n[E(r)];\ \forall n \ge 0$

$\Rightarrow\ f^{-n}(x_u, x_s) \in [E(r)]$; $\forall n \ge 0$. Denotemos $(y_u^n, y_s^n) = f^{-n}(x_u, x_s);\ \forall n \ge 0$

$$\Rightarrow\ (y_u^{n+1}, y_s^{n+1}) = f^{-n-1}(x_u, x_s) = f^{-1}[f^{-n}(x_u, x_s)] = f^{-1}(y_u^n, y_s^n)$$

$\Rightarrow\ f(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}) = (y_u^n, y_s^n)$, Hemos formado así una sucesión en E(r) que cumple:

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E_u(r) & \xrightarrow{\psi_f(\sigma_f)} & E_u(r) \\ \Pi^{*}\Big\uparrow & & \Big\downarrow \Pi_u \\ G(\sigma_f) & \xrightarrow[f]{} & G(\sigma_f) \end{array} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} = \Pi^{*}\psi_f(\sigma_f)\Pi_u$$

$$\Rightarrow Lip(f^{-1}) \leq Lip(\Pi^{*})\, Lip(\psi_f(\sigma_f))\, Lip(\Pi_u) \leq Lip(\psi_f(\sigma_f)) < 1$$

$$\therefore \quad f^{-1}\Big|_{G(\sigma_f)=W_f^u(0,r)}$$

De esta manera se ha probado el siguiente teorema:

TEOREMA IV.1.10 *(Teorema de la variedad inestable para un punto fijo de un homeomorfismo Lipschitziano) Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach* $f: E(r) \longrightarrow E$ *homeomorfismo sobre su imagen tal que* $f \in Lip(E(r),E)$ *y* $f(0)=0$ *. Sea* $L \in Hip(E)$ *tal que* $Lip(f - L) < \varepsilon < \frac{1-\alpha}{2}$,
Entonces $\exists!\ \sigma_f \in \mathcal{G}(r)$ *tal que:*

i) $G(\sigma_f)=W_f^u(0,r)$

ii) $f^{-1}\Big|_{G(\sigma_f)=W_f^u(0,r')}$

Por otro lado considerando el teorema II.2.8 , si hacemos $Lip(f - L) < \varepsilon < \|L^{-1}\|^{-1}$ entonces $f = L - (L - f)$ es invertible sobre su imagen la cual contiene una bola $E(r)$ con $r' = r(\|L^{-1}\|^{-1} - \varepsilon)$, además $f^{-1} \in Lip(E(r'),E)$ y

$$Lip(f^{-1}) \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - Lip(f - L)}$$

Como ;

$L \in Hip(E) \Rightarrow L^{-1} \in Hip(E)$, $E_s(L^{-1}) = E_s(L)$, $E_u(L^{-1}) = E_u(L)$ y $a(L^{-1}) = a(L)$

Además

$$f^{-1} - L^{-1} = f^{-1}(I - fL^{-1}) = f^{-1}(L - f)L^{-1}$$

entonces :

$$Lip(f^{-1} - L^{-1}) \leq Lip(f^{-1})Lip(L - f)\|L^{-1}\| \leq \frac{Lip(L-f)\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - Lip(f - L)}$$

pero $\dfrac{Lip(L-f)\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - Lip(f - L)} < \varepsilon \Leftrightarrow Lip(L - f)\|L^{-1}\| < \varepsilon\|L^{-1}\|^{-1} - \varepsilon\, Lip(f - L)$

$$\Leftrightarrow (\|L^{-1}\| + \varepsilon)Lip(f - L) < \varepsilon\|L^{-1}\|^{-1} \Leftrightarrow Lip(f - L) < \frac{\varepsilon\|L^{-1}\|^{-1}}{\|L^{-1} + \varepsilon\|}$$

De ésta manera, si tomamos $\varepsilon < \min\left\{\dfrac{1-a}{2}, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}$ y $Lip(f - L) < \min\left\{\varepsilon, \dfrac{\varepsilon\|L^{-1}\|^{-1}}{\|L^{-1}\| + \varepsilon}\right\}$

tenemos $f^{-1} : E(r') \longrightarrow E$ Lipschitz $f^{-1}(0)=0$, $L^{-1} \in Hip(E)$ con $Lip(f^{-1} - L^{-1}) < \varepsilon$ luego el teorema anterior se cumple para f^{-1} y L^{-1}, luego $\exists!\, \sigma_f \in Lip(E_u(r', L^{-1}), E_s(r', L^{-1}))$ tal que $G(\sigma_{f^{-1}}) = W^u_{f^{-1}}(0,r')$ y

$$(f^{-1})^{-1}\Big|_{G(\sigma_f) = W^u_{f^{-1}}(0,r')}$$

es una contracción.

Como $E_u(r', L^{-1}) = E_s(r', L) = E_s(r',)$ y $E_s(r', L^{-1}) = E_u(r', L) = E_u(r')$, definiendo $\sigma^s_f = \sigma_{f^{-1}}$ tenemos que $G(\sigma^s_f) = W^u_f(0,r')$ y $f\Big|_{W^s_f(0,r')}$ es una contracción.

De esta manera queda mejorado el teorema anterior, por el siguiente:

TEOREMA IV.1.11 *(Teorema de la variedad estable e inestable para un punto fijo de una función de Lipschitz).- Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach*

$f \in Lip(E(r),E)$ *tal que* $f(0)=0$. *Sea* $L \in Hip(E)$. *Si* $\varepsilon < min\left\{\frac{1-a}{2}, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}$ *y*

$$Lip(f - L) < min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon\|L^{-1}\|^{-1}}{\|L^{-1}\|+\varepsilon}\right\}, \textit{ Entonces}$$

i) $\exists!\, \sigma_f^u \in Lip(E_s(r),E_u(r))$ *con* $Lip(\sigma_f^u) \leq 1$ *y* $\sigma_f^u(0)=0$ *tal que*

$G(\sigma_f)=W_f^u(0,r)$ *y* $f^{-1}\Big|_{W_f^u(0,r')}$ *es una contracción.*

ii) $\exists!\, \sigma_f^s \in Lip(E_u(r'),E_s(r'))$ *con* $Lip(\sigma_f^s) \leq 1$ *y* $\sigma_f^s(0)=0$ *tal que* $G(\sigma_f^s)=W_f^u(0,r')$ *y*

$f\Big|_{W_f^s(0,r')}$ *es una contracción, en donde* $r' = r(\|L^{-1}\|^{-1} - Lip(f - L))$

Consideremos el conjunto $\mathcal{F}(r)$ definido por:

$$\mathcal{F}(r) = \left\{ f \in Lip(E(r),E) \ / \ f(0)=0 \text{ y } Lip(f - L) < \varepsilon \right\}$$

en donde $L \in Hip(E)$ (fijo), $)\,\varepsilon < \min\left\{\frac{1-a}{2}, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}$, Definimos

$$d: \mathcal{F}(r) \times \mathcal{F}(r) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(f_1,f_2) \longrightarrow \quad d(f_1,f_2) = \sup_{x \in E_u(r)} \|f_1(x) - f_2(x)\|$$

Con las notaciones anteriores, observamos que Γ_f está bien definida; $\forall f \in \mathcal{F}(r)$. Luego:

$$\Gamma : \mathcal{G}(r) \times \mathcal{F}(r) \longrightarrow \mathcal{G}(r)$$

$$(\sigma,f) \longrightarrow \Gamma(\sigma,f)$$

Ya probamos que $\Gamma_f : \mathcal{G}(r) \longrightarrow \mathcal{G}(r)$ es Lipschitz y $Lip(\Gamma_f) \leq a+2\varepsilon$; $\forall f \in \mathcal{F}(r)$.

Afirmo que $\Gamma_\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(r), \mathcal{G}(r))$. En efecto:

$$\|\Gamma_\sigma(f)(x_u) - \Gamma_\sigma(f')(x_u)\|_s = \|\Gamma_f(\sigma)(x_u) - \Gamma_{f'}(\sigma)(x_u)\|_s =$$

$$= \left\| \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)(x_u) - \varphi_{f'}(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)(x_u) \right\|_s$$

$$\le \left\| \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)(x_u) - \varphi_f(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)(x_u) \right\|_s$$

$$+ \left\| \varphi_f(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)(x_u) - \varphi_{f'}(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)(x_u) \right\|_s$$

$$\le Lip(\varphi_f(\sigma)) \left\| \psi_f(\sigma)(x_u) - \psi_{f'}(\sigma)(x_u) \right\|_u +$$

$$+ \left\| \varphi_f(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)(x_u) - \varphi_{f'}(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)(x_u) \right\|_s$$

Acotaremos los dos sumandos anteriores, haciendo $y_u = \psi_{f'}(\sigma)^{-1}(x_u)$, tenemos:

$$\left\| \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1}(x_u) - \varphi_{f'}(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)^{-1}(x_u) \right\|_s = \left\| \varphi_f(\sigma)(y_u) - \varphi_{f'}(y_u) \right\|_s$$

$$= \left\| \Pi_s \circ f \circ (id,\sigma)(y_u) - \Pi_s \circ f' \circ (id,\sigma)(y_u) \right\|_s$$

$$\le \left\| f_s(y_u, \sigma(y_u) - f'_s(y_u, \sigma(y_u)) \right\|_s$$

$$\le \sup_{x \in E(r)} \left\| f(x) - f'(x) \right\| = d(f,f')$$

$$\therefore \left\| \varphi_f(\sigma) \circ \psi_f(\sigma)^{-1}(x_u) - \varphi_{f'}(\sigma) \circ \psi_{f'}(\sigma)^{-1}(x_u) \right\|_s \le d(f,f') \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left\| \psi_f(\sigma)^{-1}(x_u) - \psi_{f'}(\sigma)^{-1}(x_u) \right\|_u = \left\| \psi_f(\sigma)^{-1} \circ \psi_{f'}(\sigma)(y_u) - y_u \right\|_u$$

$$= \left\| \psi_f(\sigma)^{-1} \circ \psi_{f'}(\sigma)(y_u) - \psi_f(\sigma)^{-1} \circ \psi_f(\sigma)(y_u) \right\|_u$$

$$\le Lip(\psi_f(\sigma)^{-1}) \left\| \Pi_u \circ f' \circ (id,\sigma)(y_u) - \Pi_u \circ f \circ (id,\sigma)(y_u) \right\|_u$$

$$\le \left\| f'_u(y_u, \sigma(y_u) - f_u(y_u, \sigma(y_u)) \right\|_u$$

$$\le \sup_{x \in E(r)} \left\| f(x) - f'(x) \right\| = d(f,f') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) y (2) en la primera desigualdad:

$$\left\| \Gamma_\sigma(f)(x_u) - \Gamma_\sigma(f')(x_u) \right\|_s \le 2\, d(f,f'); \ \forall x_u \in E_u(r)$$

$$\Rightarrow d(\Gamma_\sigma(f), \Gamma_\sigma(f')) \le 2\, d(f,f'); \ \forall f,f' \in \mathcal{F}(r)$$

$$\therefore \; Lip(\mathcal{J}(r),\mathcal{G}(r)) \text{ y } Lip(\Gamma_f) \leq 2 \; ; \; \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

$$\therefore \; \Gamma_\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{J}(r), \mathcal{G}(r)).$$

Por el teorema de la aplicación fija; la función θ que asocia a cada $f \in \mathcal{J}(r)$ la función $\sigma_f \in \mathcal{G}(r)$ es continua:

$$\begin{aligned} \theta: \mathcal{J}(r) &\longrightarrow \mathcal{G}(r) \\ f &\longrightarrow \theta(f) = \sigma_f \end{aligned}$$

$\theta \in \mathcal{C}(\mathcal{J}(r), \mathcal{G}(r))$ y como $G(\sigma_f) = W_f^u(0,r) \Rightarrow$ f y f' están "muy cerca" $W_f^u(0,r)$ y $W_{f'}^u(0,r)$ también están muy cerca i.e. la familia $\{W_f^u(0,r)\}_{f \in \mathcal{J}(r)}$ varía contínuamente con $f \in \mathcal{J}(r)$.

COROLARIO: Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, $L \in Hip(E)$, $\varepsilon < \min\left\{\frac{1-\alpha}{2}, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}$

$$\text{Sea } \mathcal{G}(r) = \{\ \sigma \in Lip(E_u(r), E_s(r)) \;/\; Lip(\sigma) \leq 1 \text{ y } \sigma(0) = 0\ \}$$

$$\mathcal{J}(r) = \{\ f \in Lip(E(r), E) \;/\; f(0) = 0 \text{ y } Lip(f - L) < \varepsilon\ \}$$

y considero:

$$\begin{aligned} \Gamma: \mathcal{G}(r) \times \mathcal{J}(r) &\longrightarrow \mathcal{G}(r) \\ (\sigma, f) &\longrightarrow \Gamma(\sigma, f) = \Gamma_f(\sigma) \end{aligned}$$

Entonces i) $\Gamma_\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{J}(r), \mathcal{G}(r))$ y satisface:

$$d(\Gamma_\sigma(f), \Gamma_\sigma(f')) \leq 2\, d(f,f') \; ; \; \forall f,f' \in \mathcal{J}(r)$$

ii) La aplicación $\theta: \mathcal{J}(r) \longrightarrow \mathcal{G}(r)$

$f \longrightarrow \theta(f) = \sigma_f$ es continua

iii) $\{W_f^u(0,r)\}_{f \in \mathcal{J}(r)}$ es una familia que varía contínuamente con f.

Para un estudio detallado de Variedades Invariantes de puntos fijos Hiperbólicos véase: Mamani C. Juan. [20]

CAPITULO V

DIFERENCIABILIDAD DE LA VARIEDAD ESTABLE E INESTABLE

V.1 DIFERENCIABILIDAD DE LA VARIEDAD ESTABLE E INESTABLE

En esta sección finalmente, estudiaremos la diferenciabilidad de la variedad estable e inestable. Como siempre, Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, . Sea $L \in Hip(E)$ (fijo) Supóngase que

$f : E(r) \longrightarrow E$ es de clase C^1 y $\|f-L\|_1 < \varepsilon$ donde $\varepsilon < \min\left\{\frac{1-\alpha}{2}, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}$

(obsérvese que $\|f-L\|_1 < \varepsilon$ implica $\|f-L\| < \varepsilon$) luego $\exists!\ \sigma_f \in \mathcal{G}(r)$ tal que $G(\sigma_f) = W_f^u(0,r)$. Recordemos que :

$$\Gamma_f(\sigma_f) = \Pi_s \circ f \circ (id, \sigma_f) \circ \left[\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma_f)\right]^{-1}$$

Suponiendo que $\sigma_f \equiv \sigma$ es de clase C^1 entonces $\Gamma_f(\sigma)$ es de clase C^1 y desde que :

$$\Gamma_f(\sigma_f) \circ \Pi_u \circ f \circ (id, \sigma_f) = \Pi_s \circ f \circ (id, \sigma_f)$$

Podemos derivar en $x_u \in E_u(r)$

$$D\Gamma_f(\sigma)\Big|_{f_u(x_u,\sigma(x_u))} \circ D\Pi_u\Big|_{f(x_u,\sigma(x_u))} \circ Df\Big|_{(x_u,\sigma(x_u))} \circ D(id,\sigma)\Big|_{(x_u)} =$$

$$= D\Pi_s\Big|_{f(x_u,\sigma(x_u))} \circ Df\Big|_{(x_u,\sigma(x_u))} \circ D(id,\sigma)\Big|_{(x_u)}$$

$$\Rightarrow D\Gamma_f(\sigma)\Big|_{f_u(x_u,\sigma(x_u))} \circ \Pi_u \circ Df \circ (x_u, \sigma(x_u)) \circ (id, D\sigma(x_u))$$

$$= \Pi_s \circ Df \circ (x_u, \sigma(x_u)) \circ (id, D\sigma(x_u))$$

Denotando $y_u = f(x_u, \sigma(x_u)) = \psi_f(\sigma)(x_u)$; $\xi = (\xi_u, \xi_s) = (x_u, \sigma(x_u))$; tenemos:

$$D\Gamma_f(\sigma)\Big|_{(Y_u)} = \Pi_s \circ Df(\xi) \circ (id, D\sigma(\xi_u)) \circ \left[\Pi_u \circ Df(\xi) \circ (id, D\sigma(\xi_u))\right]^{-1}$$

Denotemos $g = Df(\xi)\big|_{E(r)}$ (Recuérdese que $Df(\xi) \in \mathcal{L}(E)$; $\forall \xi \in E(r)$)

Afirmo que $g \in \mathcal{F}(r)$. En efecto: Sea $x, x' \in E(r)$

$$\|g(x) - g(x')\| = \|Df(\xi)(x) - Df(\xi)(x')\| = \|Df(\xi)(x - x')\| \leq \|Df(\xi)\| \, \|(x - x')\|$$

$\Rightarrow g \in \mathcal{L}_{ip}(E(r), E)$. Además $g(0) = Df(\xi) = 0$. Por último;

$$Lip(g - L) = Lip(Df(\xi) - L) = Lip(D(f - L)(\xi)) = \|D(f - L)(\xi)\| \leq \|f - L\|_1 < \varepsilon$$

lo cual prueba la afirmación.

Similarmente, hagamos:

$$\alpha = D\sigma(\xi_u)\big|_{E_u(r)}$$

Afirmo que $\alpha \in \mathcal{G}(r)$:

Primeramente, observemos que $D\sigma(\xi_u) \in \mathcal{L}(E_u(r), E_s(r))$, como suponemos que $D\sigma$ es de clase C', entonces $D\sigma$ es continua en ξ_u, luego gracias a una aplicación del teorema del valor medio,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \|s\| \leq \delta \Rightarrow \|\sigma(\xi_u + s) - \sigma(\xi_u) - D\sigma(\xi_u)(s)\|_s < \varepsilon \|s\|_u$$

Sea $x \in E_u(r) \Rightarrow \left\|\frac{\delta}{r} x\right\| = \frac{\delta}{r}\|x\| \leq \frac{\delta}{r} r = \delta$, luego aplicando lo anterior y el hecho que

σ es Lipschitz con $Lip(\sigma) \leq 1$:

$$\|D\sigma(\xi_u)(x)\|_s = \tfrac{r}{\delta}\left\|D\sigma(\xi_u)(\tfrac{\delta}{r}x)\right\|_s$$

$$\leq \tfrac{r}{\delta}\left[\left\|D\sigma(\xi_u)(\tfrac{\delta}{r}x) - \sigma(\xi_u + \tfrac{\delta}{r}x) + \sigma(\xi_u)\right\|_s + \left\|\sigma(\xi_u + \tfrac{\delta}{r}x) - \sigma(\xi_u)\right\|_s\right]$$

$$< \tfrac{r}{\delta}\left[\varepsilon\left\|\tfrac{\delta}{r}x\right\|_u + \left\|\tfrac{\delta}{r}x\right\|_u\right] = \varepsilon\|x\|_u + \|x\|_u = (\varepsilon + 1)\|x\|_u$$

$$\therefore \|D\sigma(\xi_u)\|_s < (\varepsilon + 1); \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|D\sigma(\xi_u)\|_s \leq 1$$

De esta manera : $\|\alpha(x_u)\|_s = \|D\sigma(\xi_u)(x_u)\|_s \leq \|D\sigma(\xi_u)\| \, \|x_u\|_u \leq \|x_u\|_u \leq r$

$$\Rightarrow \alpha : E_u(r) \longrightarrow E_s(r).$$

Además:

$$\|\alpha(x_u) - \alpha(x'_u)\|_s = \|D\sigma(\xi_u)(x_u) - D\sigma(\xi_u)(x'_u)\|_s = \|D\sigma(\xi_u)(x_u - x'_u)\|_s$$

$$\leq \left\| D\sigma(\xi_u) \right\| \left\| (x_u - x'_u) \right\|_u \leq \left\| (x_u - x'_u) \right\|_u ; \ \forall\, x_u, x'_u \in E_u(r)$$

$$\therefore\ \alpha \ \ Lip(E_u(r), E_s(r)) \ \text{y}\ Lip(\alpha) \leq 1$$

Además

$$\alpha(0) = D\sigma(\xi_u)(0) = 0; \ \therefore\ \alpha \in \mathcal{G}(r)$$

Luego

$$Df(\xi)\big|_{E(r)} \in \mathcal{I}(r) \qquad \text{y} \qquad D\sigma(\xi_u)\big|_{E_u(r)} \in \mathcal{G}(r),$$

de éste modo:

$$D\Gamma_f(\sigma)\big|_Y = \Gamma_{Df(\xi)}(D\sigma(\xi_u)); \ \ \forall\, y_u \in E_u(r)$$

La discusión anterior nos induce a considerar el espacio $\widetilde{\mathcal{G}}(r)$ y la aplicación $\widetilde{\Gamma}$ siguientes:

$$\widetilde{\mathcal{G}}(r) = \left\{ h \in \mathcal{C}(E_u(r), \mathcal{L}(E_u, E_s)) \ \| h \| = \sup_{x_u \in E_u(r)} \| h(x) \| \leq 1 \right\}$$

(Puesto que si $\sigma \in \mathcal{G}(r)$ es de clase C', $D\sigma \in \widetilde{\mathcal{G}}(r)$)

$$\widetilde{\Gamma} : \mathcal{G}(r) \times \widetilde{\mathcal{G}}(r) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(r)$$

$$(\sigma, h) \longrightarrow \widetilde{\Gamma}\,(\sigma, h)$$

donde

$$\widetilde{\Gamma}\,(\sigma, h)(y_u) = \Pi_s \circ Df(\xi) \circ (id, h(\xi_u)) \circ \left[\Pi_u \circ Df(\xi) \circ (id, h(\xi_u)) \right]^{-1} = \Gamma_{Df(\xi)}(h(\xi)),$$

en donde

$$\xi = (\xi_u, \xi_s), \ \ \xi_u = \psi_f(\sigma)^{-1}(y_u) \ , \ \xi_s = \sigma(\xi_u)$$

Nótese que si definimos :

$$\widetilde{d} : \widetilde{\mathcal{G}}(r) \times \widetilde{\mathcal{G}}(r) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(h_1, h_2) \longrightarrow \widetilde{d}\,(h_1, h_2) = \sup_{x_u \in E_u(r)} \left\| h_1(x) - h_2(x) \right\|$$

entonces $(\widetilde{\mathcal{G}}(r), \widetilde{d})$ es un espacio métrico completo.

Además si σ_f es diferenciable, de clase C', de lo anterior:

$$\widetilde{\Gamma}_{\sigma_f}(D\sigma_f)(y_u) = \widetilde{\Gamma}_{Df(\xi)}(D\sigma_f(\xi_u)) = D\Gamma_f(\sigma_f)\Big|_{(y_u)} \quad ; \ \forall y_u \in E_u(r)$$

entonces

$$\widetilde{\Gamma}_{\sigma_f}(D\sigma_f) = D\Gamma_f(\sigma_f) = D\sigma_f$$, luego $D\sigma_f$ es punto fijo de $\widetilde{\Gamma}_{\sigma_f}$.

Defino ahora la función:

$$\mathbf{F}: \mathcal{G}(r) \times \widetilde{\mathcal{G}}(r) \longrightarrow \mathcal{G}(r) \times \widetilde{\mathcal{G}}(r)$$

$$(\sigma, h) \longrightarrow F(\sigma, h) = (\Gamma_f(\sigma), \widetilde{\Gamma}(\sigma, h))$$

Sabemos que $\Gamma_f \in Lip(\mathcal{G}(r))$ y $Lip(\Gamma_f) < 1$, suponiendo que

i) $\widetilde{\Gamma}_\sigma \in Lip(\widetilde{\mathcal{G}}(r))$ y $Lip(\widetilde{\Gamma}_\sigma) \leq \lambda < 1$; $\forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$

ii) $\widetilde{\Gamma}_h \in \mathcal{C}(\mathcal{G}(r), \widetilde{\mathcal{G}}(r))$; $\forall h \in \widetilde{\mathcal{G}}(r)$

Por el teorema de contracción de Fibras. $\mathbf{F}$ tiene un único punto atractor (σ_f, h_f),

donde σ_f es el punto fijo de Γ_f y h_f es el punto fijo de $\widetilde{\Gamma}_{\sigma_f}$. Por tanto, si

tomamos $\sigma \in \mathcal{G}(r)$ de clase C', entonces $D\sigma \in \widetilde{\mathcal{G}}(r)$ y tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(\sigma, D\sigma) = (\sigma_f, h_f)$$

obsérvese que

$$F(\sigma, D\sigma) = (\Gamma_f(\sigma), \widetilde{\Gamma}_\sigma(D\sigma)) = (\Gamma_f(\sigma), D\Gamma_f(\sigma))$$

como $\Gamma_f(\sigma)$ es de clase C':

$$F(\Gamma_f(\sigma), D\Gamma_f(\sigma)) = (\Gamma_f(\Gamma_f(\sigma)), D\Gamma_f^2(\sigma)) = (\Gamma_f^2(\sigma), D\Gamma_f^2(\sigma))$$

entonces

$$F^2(\sigma, D\sigma) = (\Gamma_f^2(\sigma), D\Gamma_f^2(\sigma))$$

Supóngase $F^{n-1}(\sigma, D\sigma) = (\Gamma_f^{n-1}(\sigma), D\Gamma_f^{n-1}(\sigma))$ (Hipótesis inductiva)

$$F^n(\sigma, D\sigma) = F(F^{n-1}(\sigma, D\sigma)) = F(\Gamma_f^{n-1}(\sigma), D\Gamma_f^{n-1}(\sigma)) = (\Gamma_f^n(\sigma), D\Gamma_f^n(\sigma))$$

$$\therefore \ F^n(\sigma, D\sigma) = (\Gamma_f^n(\sigma), D\Gamma_f^n(\sigma)) \ ; \ \forall n \in Z^+$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_f^n(\sigma) = \sigma_f \quad y \quad \lim_{n\to\infty} D\Gamma_f^n(\sigma) = h_f$$

Además $\Gamma_f^n(\sigma)$ es de clase C', luego $\lim_{n\to\infty} D\Gamma_f^n(\sigma) = D\lim_{n\to\infty}\Gamma_f^n(\sigma) = D\sigma_f$

De éste modo σ_f es de clase C' y $D\sigma_f = h_f$ y quedaría demostrada nuestra conjetura, suponiendo que $\widetilde{\Gamma}$ satisface las dos condiciones anteriores. Pasamos a demostrarlas.

LEMA V .1.1 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach,* $f \in \mathrm{Diff}^1(E(r),E)$ *tal que* $f(0)=0$

$$L \in \textit{Hip(E) tal que } \|f - L\|_1 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1-\alpha}{2}, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}, \textit{ considérese}$$

$$\widetilde{\mathcal{G}}(r) = \left\{h \in \mathcal{C}(E_u(r), \mathcal{L}(E_u, E_s)) \;\|h\| = \sup_{x_u \in E_u(r)} \|h(x)\| \le 1\right\}$$

con la métrica

$$\tilde{d} : \widetilde{\mathcal{G}}(r) \times \widetilde{\mathcal{G}}(r) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(h_1, h_2) \longrightarrow \tilde{d}(h_1, h_2) = \sup_{x_u \in E_u(r)} \|h_1(x) - h_2(x)\|$$

y la aplicación:

$$\widetilde{\Gamma} : \mathcal{G}(r) \times \widetilde{\mathcal{G}}(r) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(r)$$

$$(\sigma, h) \longrightarrow \widetilde{\Gamma}(\sigma, h)$$

donde

$\widetilde{\Gamma}(\sigma,h)(y_u) = \Gamma_{Df(\xi)}(h(\xi))$, *con* $\xi = \xi(\sigma) = (\xi_u, \xi_s)$, $\xi_u = \psi_f(\sigma)^{-1}(y_u)$,
$\xi_s = \sigma(\xi_u)$

Entonces:

i) $\widetilde{\Gamma}_\sigma \in Lip(\widetilde{\mathcal{G}}(r))$ *y* $Lip(\widetilde{\Gamma}_\sigma) \le \lambda < 1$; $\forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$

ii) $\widetilde{\Gamma}_h \in \mathcal{C}(\mathcal{G}(r), \widetilde{\mathcal{G}}(r))$; $\forall h \in \widetilde{\mathcal{G}}(r)$.

Prueba:

i) $$\left\|\widetilde{\Gamma}_\sigma(h_1)(x_u) - \widetilde{\Gamma}_\sigma(h_2)(x_u)\right\| = \left\|\Gamma_{Df(\xi)}(h_1)(x_u) - \Gamma_{Df(\xi)}(h_2)(x_u)\right\|$$

$$\le Lip(\Gamma_{Df(\xi)}) \left\|h_1(x_u) - h_1(x_u)\right\|$$

$$\le (a+2\varepsilon) \sup_{x_u \in E_u(r)} \left\| h_1(x_u) - h_1(x_u) \right\|$$

$$\le (a+2\varepsilon)\, \tilde{d}\,(h_1,h_2)$$

$$\Rightarrow \tilde{d}\,(\widetilde{\Gamma}_\sigma(h_1),\widetilde{\Gamma}_\sigma(h_2)) = \sup_{x_u \in E_u(r)} \left\| \widetilde{\Gamma}_\sigma(h_1)(x_u) - \widetilde{\Gamma}_\sigma(h_2)(x_u) \right\| \le (a+2\varepsilon)\, \tilde{d}\,(h_1,h_2)$$

$$\therefore\ \widetilde{\Gamma}_\sigma \in Lip(\hat{\mathcal{G}}(r)) \ \text{ y } Lip(\widetilde{\Gamma}_\sigma) \le (a+2\varepsilon) < 1 \ ; \ \forall \sigma \in \mathcal{G}(r)$$

ii) Sabemos que $\widetilde{\Gamma}_h : \mathcal{G}(r) \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}(r)$

$$\sigma \longrightarrow \widetilde{\Gamma}_h(\sigma)$$

$$\tilde{d}\,(\widetilde{\Gamma}_h(\sigma_1),\widetilde{\Gamma}_h(\sigma_2)) = \sup_{x_u \in E_u(r)} \left\| \widetilde{\Gamma}_h(\sigma_1)(x_u) - \widetilde{\Gamma}_h(\sigma_2)(x_u) \right\|$$

Sean $\sigma,\sigma_\circ \in \mathcal{G}(r)$, denotemos: $\xi_\circ = (\xi_u^\circ, \xi_s^\circ)$, $\xi_u^\circ = \psi_f(\sigma_\circ)^{-1}(x_u)$, $\xi_s^\circ = \sigma_\circ(\xi_u^\circ)$

$\xi = (\xi_u, \xi_s)$, $\xi_u = \psi_f(\sigma)^{-1}(x_u)$, $\xi_s = \sigma(\xi_u)$

$$\left\| \widetilde{\Gamma}_h(\sigma)(x_u) - \widetilde{\Gamma}_h(\sigma_\circ)(x_u) \right\| = \left\| \widetilde{\Gamma}_\sigma(h_1)(x_u) - \widetilde{\Gamma}_{\sigma_o}(h_2)(x_u) \right\|$$

$$= \left\| \Gamma_{Df(\xi)}(h(\xi_u)) - \Gamma_{Df(\xi_o)}(h(\xi_u^\circ)) \right\|$$

$$\le \left\| \Gamma_{Df(\xi)}(h(\xi_u)) - \Gamma_{Df(\xi_o)}(h(\xi_u)) \right\| +$$

$$+ \left\| \Gamma_{Df(\xi_o)}(h(\xi_u)) - \Gamma_{Df(\xi_o)}(h(\xi_u^\circ)) \right\|$$

$$\le 2\left\| Df(\xi) - Df(\xi_\circ) \right\| + (a+2\varepsilon) \left\| h_1(\xi_u) - h_1(\xi_u^\circ) \right\| \ldots\ldots(1)$$

Nótese que : $Df : E(r) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ y $h : E_u(r) \longrightarrow \mathcal{L}(E_u, E_s)$ son continuas, si $(E, \|\cdot\|)$ fuera espacio de Banach de dimensión finita, entonces $E(r)$ y $E_u(r)$ serían compactos, por lo tanto Df y h son uniformemente continuas en E(r) y $E_u(r)$ respectivamente; luego $\forall \eta > 0$; $\exists \delta = \delta(\eta)$ tal que

$$\left\| x - x_\circ \right\| < \delta \ \Rightarrow \ \left\| Df(x) - Df(x_\circ) \right\| < \tfrac{1}{4}\eta; \ \forall\, x, x_\circ \in E(r)$$

y desde que $\|x_u - x_u^\circ\|_u \le \|x - x^\circ\|$, el mismo δ y se tiene

$$\|x_u - x_u^\circ\|_u < \delta \Rightarrow \|h(x_u) - h(x_u^\circ)\| < \tfrac{1}{2}\eta;\ \forall\ x_u, x_u^\circ \in E_U(r)$$

Ahora bien $\|\xi - \xi_\circ\| = \max\left\{\|\xi_u - \xi_u^\circ\|_u, \|\xi_s - \xi_s^\circ\|_s\right\}$

$\|\xi_u - \xi_u^\circ\|_u = \|\psi_f(\sigma)^{-1}(x_u) - \psi_f(\sigma_\circ)^{-1}(x_u)\|_u$ haciendo: $y_u = \psi_f(\sigma_\circ)^{-1}(x_u)$

$$= \left\|\psi_f(\sigma)^{-1}\psi_f(\sigma_\circ)(y_u) - y_u\right\|_u$$

$$= \left\|\psi_f(\sigma)^{-1}\psi_f(\sigma_\circ)(y_u) - \psi_f(\sigma)^{-1}\psi_f(\sigma)(y_u)\right\|_u$$

$$\le Lip(\ \psi_f(\sigma)^{-1})\left\|\psi_f(\sigma_\circ)(y_u) - \psi_f(\sigma)(y_u)\right\|_u$$

$$\le \left\|\Pi_u \circ f(y_u, \sigma_\circ(y_u)) - \Pi_u \circ f(y_u, \sigma(y_u))\right\|_u$$

$$\le \left\|\Pi_u \circ f(y_u, \sigma_\circ(y_u)) - \Pi_u \circ L(y_u, \sigma_\circ(y_u)) - \Pi_u \circ f(y_u, \sigma(y_u)) + \Pi_u \circ L(y_u, \sigma(y_u))\right\|_u$$

$$+ \left\|\ \Pi_u \circ L(y_u, \sigma_\circ(y_u)) - \Pi_u \circ L(y_u, \sigma(y_u))\right\|_u$$

$$= \left\|\Pi_u \circ (f-L)(y_u, \sigma_\circ(y_u)) - \Pi_u \circ (f-L)(y_u, \sigma(y_u))\right\|_u + \left\|L_u y_u - L_u y_u\right\|_u$$

$$\le Lip(f-L)\ \left\|(y_u, \sigma_\circ(y_u)) - (y_u, \sigma(y_u))\right\|_u < \varepsilon\ \left\|\sigma_\circ(y_u) - \sigma(y_u)\right\|_s < \varepsilon\, d(\sigma, \sigma_\circ)$$

$$\therefore\ \|\xi_u - \xi_u^\circ\|_u < \varepsilon\, d(\sigma, \sigma_\circ)$$

$$\|\xi_s - \xi_s^\circ\|_s = \|\sigma(\xi_u) - \sigma_\circ(\xi_u^\circ)\|_s \le \|\sigma(\xi_u) - \sigma_\circ(\xi_u)\|_s + \|\sigma_\circ(\xi_u) - \sigma_\circ(\xi_u^\circ)\|_s$$

$$\le d(\sigma, \sigma_\circ) + \|\xi_u - \xi_u^\circ\|_u < (1+\varepsilon)d(\sigma, \sigma_\circ)$$

$$\therefore\ \|\xi_s - \xi_s^\circ\|_s < (1+\varepsilon)d(\sigma, \sigma_\circ)$$

De ésta manera, si tomamos $d(\sigma, \sigma_\circ) < \frac{\delta}{1+\varepsilon}$; tenemos:

$$\|\xi - \xi_\circ\| = \max\left\{\|\xi_u - \xi_u^\circ\|_u, \|\xi_s - \xi_s^\circ\|_s\right\} = (1+\varepsilon)d(\sigma, \sigma_\circ) < \delta$$

$$\Rightarrow \|Df(\xi) - Df(\xi_\circ)\| < \tfrac{\eta}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\|\xi_u - \xi_u^\circ\|_u < \varepsilon\, d(\sigma, \sigma_\circ) < \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta < \delta \Rightarrow \|h(\xi_u) - h(\xi_u^\circ)\| < \tfrac{\eta}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(2) y (3) en (1):

$$\left\|\hat{\Gamma}_h(\sigma)(x_u)-\hat{\Gamma}_h(\sigma_\circ)(x_u)\right\| < \tfrac{\eta}{2} + \tfrac{\eta}{2} = \eta\,;\ \forall\, x_u \in E_U(r)$$

$$\therefore\ d(\widetilde{\Gamma}_h(\sigma),\widetilde{\Gamma}_h(\sigma_\circ)) < \eta \text{ siempre que } d(\sigma,\sigma_\circ) < \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

entonces $\widetilde{\Gamma}_h$ es continua en $\sigma_\circ$; $\forall\ \sigma_\circ \in \mathcal{G}(r) \Rightarrow\ \widetilde{\Gamma}_h \in \mathcal{C}(\mathcal{G}(r),\widetilde{\mathcal{G}}(r))$

Se ha probado así el siguiente teorema:

TEOREMA V.1.2.- *Sea* $(E,\|\cdot\|)$ *espacio de Banach de dimensión finita.* $f \in \mathrm{Diff}^1(E(r),E)$ *tal que* $f(0) = 0$ *y* $L \in Hip(E)$ *tal que* $\|f-L\|_1 < \varepsilon$, $\varepsilon < min\left\{\frac{1-\alpha}{2},\|L^{-1}\|^{-1}\right\}$.

Entonces $\exists!\ \sigma_f \in \mathcal{G}(r)$ *tal que:*

i) $G(\sigma_f)=W^u_f(0,r)$

ii) σ_f *es de clase* C^1.

BIBLIOGRAFÍA

1. Dieuodonné, J. *Fundamentos de Análisis Moderno.* Editorial Reverté, S.A. 1979
2. Gutierrez, C. - Sotomayor, J. *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces.* 18° Colóquio Brasilero de Matemática, 1991.
3. Hirsch, M., Pugh and Shub, M. *Invariant Manifolds.* Edición: Lecture not Mathematics. No 583, Springer-Verlag,1976.
4. Hirsch, M.W. y Pugh, C.C. *Stable manifolds and hiperbolic sets.*
5. Irwin, M. *On Stable Manifold Theorem.* Review: Bulletin London Mathematics Soc., 1970
6. Jorge Billeke. *Seminario de Sistemas Dinámicos*, Universidad Santiago de Chile 1989
7. Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis with applications.* Editorial: John Wiley y Sons, 1978.
8. Lages, E.L. *Análisis Geométrico*, 7° Colóquio Brasilero de Matemática.
9. M.L. Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makérenko. *Funciones de variable compleja, CálculoOperacional, Teoría de la Estabilidad.* Editorial MIR Moscú, 1981
10. Mauro Chumpitaz R. *Análisis Funcional I* . W.H. Editores S.C.R.L.
11. Nitecki, Z. *Differentiable Dynamics.* The M.I.T., 1971
12. Palis, F.- Takens, F. *Homoclinic Bifurcationes and Hiperbolic Dinamics.* Edición Springer-Verlag, 1980.

13. Palis, J. *On the local structure of hiperbolic points in Banach Spaces*. Anais da ademia Brasilera de Ciencias (1968 Vol. 4to nº 3)

14. Palis, J. - de Mello, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Edición: Springer-Verlag, 1980.

15. Palis Jacob JR. *Seminario de Sistemas Dinámicos*, Rio de Janairo, abril de 1971

16. Shub, M. *Global Stability of Dynamical Systems*. Edición Springer-Verlag, 1993.

17. Sotomayor, J. *Licoes de Ecuacoes Diferenciais Ordinárias*. Proyecto Euclides, 1989

18. Rocha, J. *Sistemas Dinámicos*. Una breve introducãu. Colóquio de Sistemas Dinámicos Santiago de Chile, 1991.

19. Mamani. Guillermo. *Dinámica de Operadores Hiperbólicos*. Tesis. UNI-Perú 1998

20. Mamani, Juan M. *Variedades Invariantes de Puntos fijos Hiperbólicos*. Tesis. UNI-Perú 1998