

**Universidad Nacional de Ingeniería**

**PROGRAMA ACADÉMICO DE INGENIERÍA CIVIL**



**ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO Y ANALISIS INELASTICO  
DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO ARMADO  
DURANTE SISMOS SEVEROS**

**T E S I S**

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE

**INGENIERO CIVIL**

**JUAN WALTER MAGNO CHAVEZ ZEGARRA**

PROMOCION 1975 - 2

**LIMA - PERU - 1977**

# INDICE

	Pag.
I. <u>INTRODUCCION</u>	1
1.1 Objetivos y Alcance _____	1
1.2 Importancia del Análisis y Comportamiento Inelástico _____	2
1.3 Métodos Corrientes de Análisis Inelástico _____	4
II. <u>METODO RIGUROSO DE ANALISIS PARA ESTIMAR EL COMPOR- TAMIENTO INELASTICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO ARMADO</u>	6
2.1 Introducción _____	6
2.2 Características Histeréticas de los Miembros Estructurales _____	7
2.2.1 Relaciones Empíricas Consideradas _____	8
2.2.2 Modelo de la Viga Inelástica: Derivación de la matriz de Rigidez Instantánea _____	11
2.3 Influencia de las Cargas Verticales _____	17
2.4 Procedimiento de Análisis _____	21
2.4.1 Rigidez Inelástica del Miembro _____	21
2.4.2 Estimación de la Rigidez Estructural _____	22
2.4.3 Integración Numérica de la Ecuación Gober- nante _____	34
III. <u>METODO SIMPLE DE ANALISIS</u>	37
3.1 Introducción _____	37

	Pag.
3.2 Hipótesis Básicas _____	38
3.2.1 Fundamento del Método Propuesto _____	39
3.2.2 Características de las Estructuras _____	39
3.2.3 Espectros de Respuesta Considerados _____	40
3.2.4 Aplicación al Diseño _____	41
3.3 Descripción del Método _____	43
3.3.1 Estructura Equivalente _____	43
3.3.2 Frecuencias, Formas Modales y Factores de Amortiguamiento _____	46
3.3.3 Fuerzas de Diseño y Desplazamientos	47
3.4 Ejemplo de Aplicación _____	48
<b>IV. <u>ANÁLISIS INELÁSTICO DE EDIFICACIONES DE CONCRETO ARMA-</u></b>	<b>59</b>
<b><u>DO EMPLEANDO PROGRAMAS DE COMPUTACION</u></b>	
4.1 Introducción _____	59
4.2 Hipótesis y Determinación de los Parámetros Inicia- les a Usarse en el Análisis (Modelo Cortante) _____	60
4.2.1 Hipótesis Básicas del Modelo _____	60
4.2.2 Función de Resistencia _____	62
4.3 Breve Explicación de los Programas de Computa- ción _____	66
4.3.1 Base Teórica del Programa _____	66
4.3.2 Diagrama de Flujo del Programa _____	69
4.4 Ejemplo de Aplicación _____	70
<b>V. <u>DISCUSION DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES</u></b>	<b>81</b>
<b><u>BIBLIOGRAFIA</u></b>	<b>88</b>

## NOMENCLATURA GENERAL

- A : área de la sección transversal del miembro.
- B : ancho de la sección transversal del miembro.
- b : coeficiente de amortiguamiento crítico.
- [c]** : matriz de amortiguamiento.
- [C]** : matriz de acoplamiento.
- D : altura de la sección transversal del miembro.
- d : peralte de la viga.
- E : módulo de elasticidad.
- F : fuerzas en los miembros.
- F.P.M.<sub>i</sub> : factor de participación del modo i.
- $f'_c$  : esfuerzo de ruptura en compresión del concreto.
- $f_y$  : esfuerzo de fluencia del acero.
- G : módulo de elasticidad transversal.
- g : aceleración de la gravedad.
- h : longitud ó altura de la columna.
- $I_0$  : momento de inercia.
- [K]** : matriz de rigidez.
- K : rigidez ó constante de resorte (en términos generales).
- k : coeficiente de forma de la sección transversal del miembro.
- L : longitud de la viga.
- [M]** : matriz de masa.
- M : momento flexionante.
- m : masa del piso i.
- n : número de pisos de la estructura.
- $S_A$  : aceleración espectral.



$T$  : período de vibración.

$\bar{u}, v, r, \chi$ : desplazamientos (definidos en cada caso).

$u'$  : ductilidad.

$u$  : relación de daño.

$w_i$  : frecuencia de vibración en el modo  $i$ .

$\alpha_F, \beta_F$ : factores de reducción de rigidez.

$\theta$  : rotación o giro.

$\tau$  : esfuerzos de corte.

$\phi_\alpha^i$  : formas de modo de vibración.

$[ ]^T$  : significa matriz transpuesta.

$\lambda$  : coeficiente que toma en cuenta las zonas rígidas en los extremos de los miembros estructurales.

$\Delta$  : significa variación (incremental).

# C A P I T U L O I

## INTRODUCCION

### 1.1 OBJETIVOS Y ALCANCE

El principal objetivo de este estudio es estimar el posible mecanismo de colapso de una estructura y plantear procedimientos de análisis para determinar el comportamiento dinámico de estructuras (edificaciones) de concreto armado cuando éstas están sometidas a solicitaciones sísmicas severas, considerando el comportamiento inelástico de los miembros estructurales.

Un objetivo secundario es lograr el funcionamiento de un programa de análisis dinámico, elástico e inelástico (Programa FRAME 3), el cual ha sido implementado para ser usado en la Universidad.

Con el fin de cumplir estos objetivos, en la presente tesis presentamos varias técnicas de análisis inelástico conocidas actualmente y que han sido desarrolladas por numerosos investigadores en otros países. Para conseguir un mayor entendimiento de las técnicas de análisis propuestas, estudiaremos únicamente estructuras planas aporticadas simples sin considerar muros de corte ni el efecto de torsión. Todas estas hipótesis iniciales nos servirán para poder comprender de una manera sencilla la teoría presentada, pues debemos hacer notar que gran parte de lo aquí pro-

puesto se puede aplicar a estructuras más complejas que satisfacen otras hipótesis iniciales.

## 1.2 IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS Y COMPORTAMIENTO INELÁSTICO

La respuesta dinámica de estructuras durante movimientos sísmicos severos es el problema que ha concitado la atención de muchos investigadores en años recientes. Actualmente se reconoce un comportamiento inelástico más que elástico de las estructuras durante sismos fuertes.

Con el desarrollo de la investigación se ha visto la necesidad de realizar un análisis inelástico debido principalmente a las siguientes consideraciones :

### a) Comportamiento :

A menudo se ha observado que las fuerzas de diseño son considerablemente excedidas durante un sismo fuerte; sin embargo varias estructuras diseñadas según los "códigos" vigentes no han sufrido daños severos. Esta aparente irregularidad se debe no sólo al hecho de que las estructuras tienen mayor resistencia de la calculada con las fuerzas de diseño debido a los factores de seguridad introducidos en el proceso de diseño y a la influencia de los elementos secundarios, sino también y fundamentalmente al hecho de que los elementos estructurales responden inelásticamente disipando la energía transmitida por las fuerzas sísmicas.

### b) Diseño :

No es práctico diseñar un edificio de suerte tal que durante

el sismo más fuerte esperado responda completamente en el rango inelástico, pues no es económico y además el carácter del movimiento sísmico es errático. Asimismo, la intensidad, duración y frecuencia características de un "sismo de diseño" son muy difíciles de establecer, así como son inciertos algunos de los parámetros estructurales que influyen en la respuesta sísmica. Considerando estas incertidumbres, se debe reconocer que la acción inelástica ocurrirá en un sismo severo y deberá ser considerada en el proceso de análisis y diseño.

c) Verificaciones:

Es necesario considerar el análisis de respuesta para movimientos sísmicos fuertes en el rango inelástico, para poder evaluar la seguridad sísmica de edificios de concreto armado. Dicha necesidad surge principalmente en los siguientes casos:

- Cuando un edificio sufre el colapso estructural o tiene daños severos debido a un sismo destructivo, usualmente es necesario el análisis para demostrar cómo y posiblemente por qué ha progresado el daño. En este caso la complicación en el método de análisis no es problema; se requiere que el análisis pueda reflejar el conocimiento disponible para poder estimar el comportamiento dinámico de la estructura.
- Por otro lado, la seguridad sísmica de edificios existentes algunas veces es cuestionada. También puede ser investigada la seguridad sísmica de edificios proyectados como una par-

te del diseño estructural. En tales casos se prefiere métodos simples de análisis ya que las simplificaciones impuestas no disminuyen la característica esencial de la respuesta dinámica.

### 1.3 METODOS CORRIENTES DE ANALISIS INELASTICO

Actualmente y desde el punto de vista de diseño práctico no existen métodos precisos para realizar el análisis inelástico de estructuras de concreto armado. Usualmente los Códigos de Diseño subsanan esta falta usando coeficientes sísmicos altos y considerando el concepto de ductilidad ( $u'$ ). De esta manera se obtienen las fuerzas de diseño dividiendo la fuerza elástica obtenida aplicando el Código entre el valor  $u'$  (igualdad de desplazamientos) o en forma más conservadora, dividiendo el valor de la fuerza elástica entre el valor  $\sqrt{2u' - 1}$  (Igualdad de energía).

Sin embargo debe reconocerse que han sido desarrollados otros métodos de análisis con fines sobretodo de investigación, los cuales toman en cuenta el comportamiento inelástico de la estructura. Uno de los métodos más conocidos es el propuesto en la Universidad de Tokyo por Umemura, Aoyama y Takizawa (Cap. II). Otro método es el de la estructura equivalente desarrollado en la Universidad de Illinois, por Shibata y Sozen (Cap. III). Asimismo existen otros métodos de análisis más simples que utilizan modelos cortantes (Cap. IV). Todos estos métodos propuestos requieren del uso de la computadora. Además de los métodos ya mencionados o

tros investigadores han propuesto otros procedimientos de análisis, como el modelo SB de Aoyama, el modelo del cantilever equivalente de Ravara y Duarte, modelo de Clough y otros. (\*)

---

Los Números entre paréntesis, indican la referencia consultada.

## C A P I T U L O    I I

### METODO RIGUROSO DE ANALISIS PARA ESTIMAR EL COMPORTAMIENTO INELASTICO DE ESTRUCTURAS DE C. A.

#### 2.1 INTRODUCCION

En este capítulo presentamos un método para idealizar una estructura plana de concreto armado como un sistema dinámico no lineal con el propósito de simular su comportamiento inelástico y con el fin de investigar su proceso de colapso durante sismos severos.

Básicamente la técnica propuesta consiste en dividir la estructura en sus miembros constituyentes (vigas, columnas, conexiones y muros de corte) -Ver fig. 2.1-, luego se estima sus características inelásticas ya sea mediante un conjunto de ecuaciones empíricas o teóricas y entonces se les ensambla aplicando el principio de compatibilidad de desplazamientos, todo lo cual debe ser evaluado sucesivamente en cada etapa del análisis. De esta manera se puede estimar totalmente las características no-lineales instantáneas de la estructura, y luego se puede estudiar el proceso de colapso de cada miembro bajo un movimiento dado del terreno mediante la ayuda de la computadora. En la presente discusión se pone énfasis especial en el llamado "modelo de viga inelástica", el cual



juega un papel muy importante para poder obtener el propósito anterior

En este estudio restringiremos las características inelásticas del miembro a condiciones simples de carga (miembros con distribución antisimétrica de momentos), lo que no corresponde directamente con el estado de esfuerzos de un pórtico real, pero si es bastante aproximado considerando que todavía las técnicas de análisis estructural inelástico requieren de la solución de muchos problemas.

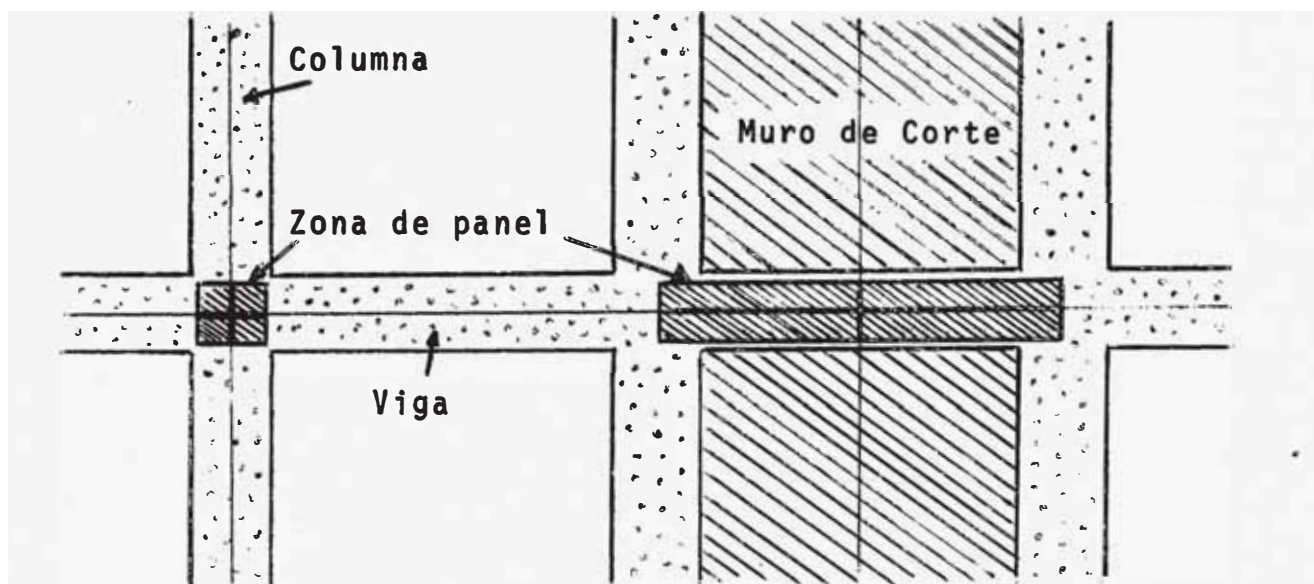


Fig. 2-1 : Miembros típicos de un pórtico

## 2.2 CARACTERÍSTICAS HISTERÉTICAS DE LOS MIEMBROS ESTRUCTURALES

La descripción verdadera del comportamiento inelástico de estructuras de concreto armado es un problema bastante complejo, pues

to que los parámetros que describen las relaciones entre momentos extremos y rotaciones extremas para vigas, columnas y flexión de muros de corte, también relaciones entre momentos distorsionantes de paneles y ángulos de deformación por corte para conexiones viga-columna, así como relaciones entre fuerzas de corte y deformaciones por corte para muros de corte incluyendo columnas de falla tipo cortante, son difíciles de obtener.

Una aproximación para solucionar este problema, consiste en usar directamente las propiedades empíricas de la fuerza de restauración de los componentes estructurales derivados de una revisión de pruebas de laboratorio (17). Asimismo con la ayuda de algunas formulaciones adicionales se pueden obtener expresiones teóricas (4,5) lo que conduce a un método generalizado de análisis de la estructura conociendo las propiedades inelásticas de cada miembro estructural componente.

### 2.2.1 RELACIONES EMPIRICAS CONSIDERADAS

Las ecuaciones empíricas derivadas a partir de pruebas de laboratorio sintetizan las características de las fuerzas de restauración de los miembros estructurales deformados antisimétricamente (fig. 2-2a) en la forma de curvas trilineales, las cuales se encuentran definidas por: el momento de agrietamiento ( $M_A^i$ ), el momento de fluencia ( $M_F^i$ ) y la reducción de rigidez respectiva ( $\alpha_F$ ) para vigas, columnas (fig. 2-2b), así como esfuerzos de agrietamiento ( $\bar{\sigma}_A$ ), esfuerzos de fluencia ( $\bar{\sigma}_F$ ) y reducción de rigidez por fluencia para paneles de conexión (fig. 2-3a y fig. 2-3b).

Las fórmulas consideradas son las siguientes :

Elemento Valor	Vigas	Columnas	Conexiones Viga-Columna
Punto de Agrietamiento	$M_A^i = f_r \cdot Z_e$	$M_A^i = (f_r + \frac{N}{A_e}) Z_e$	$\bar{\epsilon}_{PA} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_t \cdot \sigma_n}$
Punto de Fluencia	$M_F^i = 0.0095 \left[ 1 - 0.0043 p_t \right. \\ \left. (1 - 0.3 p_c) \frac{f_y}{f'_c} \right] p_t f_y B d^2$	$M_F^i = \left[ 0.01 g p_t f_y / f'_c + \right. \\ \left. 0.5 n_o (1 - n_o) \right] f'_c B D^2$	$\bar{\epsilon}_{PF} = 0.65 f'_c - 0.0014 \\ f'_c \leq 75 \text{ kg/cm}^2$
Factor de reducción de rigidez	$\alpha_F = 3.5 n p_t (d/D)^3 \leq 0.48 (d/D)^3$		$\beta_F = \frac{\bar{\epsilon}_{PF}}{\delta_F \cdot G}$

Donde :

$f_r = 2 \sqrt{f'_c}$  ... esfuerzo de agrietamiento del concreto ( $\text{kg/cm}^2$ )

$$A = BD$$

$$I_o = 1/12 BD^3$$

$N$  = Fuerza axial de compresión

$A_e = A(1 + 2np_t)$  ... Area efectiva de concreto.

$Z_e = I_e / Y_{\text{máx}}$  ... Módulo resistente de la sección.

$$I_e = [1 + (0.15 + 0.2\lambda) p_t] \cdot I_o$$

$\sigma_t = 1.8 \sqrt{f'_c}$  ... esfuerzo de tensión del concreto.

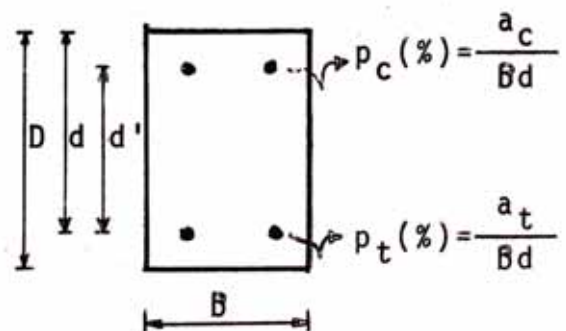
$$g' = d' / D$$

$$\sigma_n = N / (t \cdot \lambda L)$$

$$n_o = N / BD f'_c$$

$$\lambda = p_c / p_t$$

$t, \lambda L, \nu h$  : espesor, ancho y peralte del panel (conexión viga-columna) respectivamente.



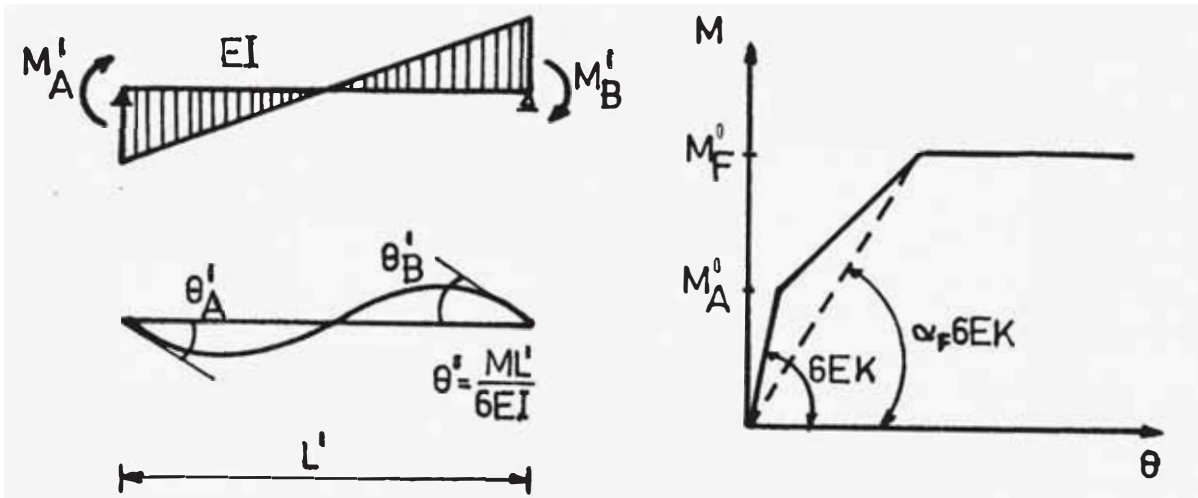


Fig. 2-2a : Viga simple con cargas antisimétricas.

Fig. 2-2b : Curva trilineal considerada.

Fig. 2-2 : Comportamiento inelástico de vigas y columnas

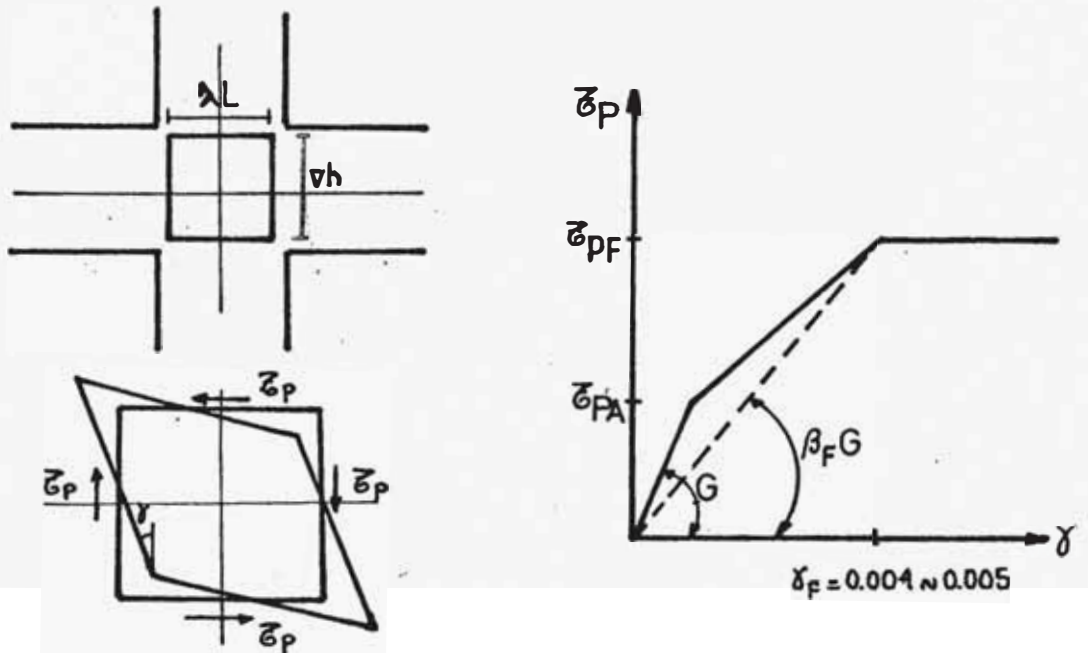


Fig. 2-3a : Deformación del panel.

Fig. 2-3b : Curva trilineal

Fig. 2-3 : Comportamiento inelástico de conexiones Viga-Columna (paneles).

## 2.2.2 MODELO DE LA VIGA INELASTICA ; DERIVACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ INSTANTANEA

Conociendo las ecuaciones empiricas que dan la relación entre el momento extremo y el ángulo de rotación extrema para miembros deformados antisimétricamente, es bastante difícil derivar la matriz de rigidez instantánea que gobierne el comportamiento inelástico del miembro para una distribución arbitraria de momentos. Como conveniencia para solucionar este problema, el cual implica varias (substanciales) dificultades, existen hasta ahora varias técnicas de análisis y modelado de la viga inelástica (3,4,5,6). Estas son:

- Modelo de dos componentes (Clough).
- Modelo de la viga dividida (Aoyama).
- Modelo de la viga elástica con resortes rotacionales inelásticos (F. Giberson).
- Modelo de la distribución de flexibilidad parabólica (H. Takizawa).

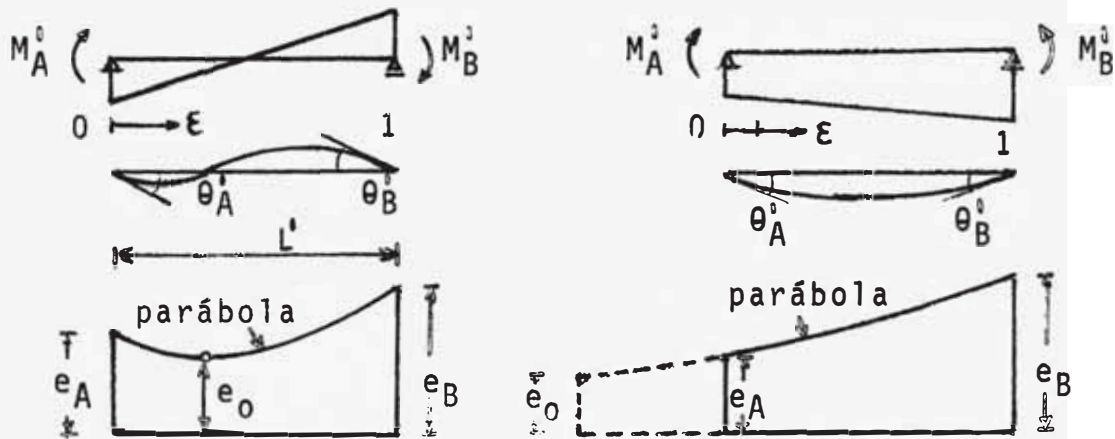
Las técnicas mencionadas anteriormente han sido usadas por muchos investigadores en sus análisis estructurales. En nuestro caso usaremos la técnica del modelo de distribución de flexibilidad parabólica:

### Modelo con distribución de flexibilidad parabólica

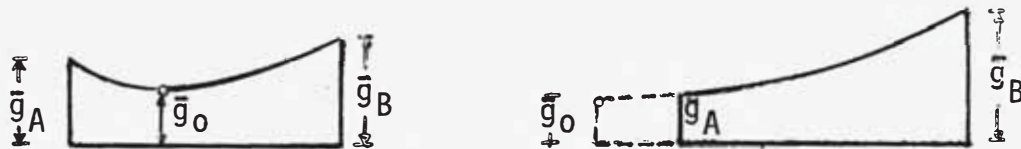
Este modelo de viga ha sido desarrollado por H. Takizawa, es-



tá basado en la hipótesis de un modelo de distribución de las rigideces por corte y por flexión de la sección transversal determinada. En este modelo se separa la deformación incremental de una viga inelástica en componentes de deformación por corte y por flexión, siguiendo el tratamiento convencional de la teoría elemental de vigas. (Ver fig. 2-4).



Distribución de flexibilidad flexionante



Distribución de flexibilidad cortante

a)  $M_A \cdot M_B > 0$

b)  $M_A \cdot M_B < 0$

Fig. 2-4: Modelo con distribución de flexibilidad parabólica

Denotamos la distribución instantánea de la rigidez flexionante de la sección transversal como  $(EI)(\epsilon)$  y la rigidez por corte como  $(GA/k)(\epsilon)$ . En cualquier sección  $(0 \leq \epsilon \leq 1)$ .

$$\Delta\theta(\epsilon) = \frac{\Delta M(\epsilon)}{EI(\epsilon)} = e(\epsilon) \cdot \Delta M(\epsilon) \tag{1}$$

$$\Delta\gamma(\epsilon) = \frac{\Delta Q(\epsilon)}{GA/k(\epsilon)} = \bar{g}(\epsilon) \cdot \Delta Q(\epsilon)$$

donde:  $e(\epsilon) = 1/EI(\epsilon)$

$\bar{g}(\epsilon) = 1/GA/k(\epsilon)$

La relación incremental entre momentos extremos  $M_A^i$ ,  $M_B^i$  y rotaciones extremas  $\theta_A^i$ ,  $\theta_B^i$  es expresada como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\theta_A^i \\ \Delta\theta_B^i \end{bmatrix} &= L' \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\epsilon \\ -\epsilon \end{bmatrix} e(\epsilon) [1-\epsilon, -\epsilon] \Delta\epsilon \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix} + \frac{1}{L'} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{g}(\epsilon) [-1, -1] \Delta\epsilon \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix} \\ &= \left( L' \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{(1-\epsilon)^2}{EI(\epsilon)} \Delta\epsilon & \int_0^1 -\frac{\epsilon(1-\epsilon)}{EI(\epsilon)} \Delta\epsilon \\ \int_0^1 -\frac{\epsilon(1-\epsilon)}{EI(\epsilon)} \Delta\epsilon & \int_0^1 \frac{\epsilon^2}{EI(\epsilon)} \Delta\epsilon \end{bmatrix} + \frac{1}{L'} \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{1}{(GA/k)(\epsilon)} \Delta\epsilon & \int_0^1 \frac{1}{(GA/k)(\epsilon)} \Delta\epsilon \\ \int_0^1 \frac{1}{(GA/k)(\epsilon)} \Delta\epsilon & \int_0^1 \frac{1}{(GA/k)(\epsilon)} \Delta\epsilon \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

Es decir:  $\begin{bmatrix} \Delta\theta_A^i \\ \Delta\theta_B^i \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix} = ([F_F] + [F_C]) \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix}$

Si la distribución de  $e(\epsilon) \equiv EI(\epsilon)$  es parabólica, obtenemos:

$$e(\epsilon) = p + q\epsilon + r\epsilon^2 = \left(p - \frac{q^2}{4r}\right) + r\left(\epsilon + \frac{q}{2r}\right)^2 \quad (3)$$

donde:  $e_A = p$   
 $e_B = p + q + r$   
 $e_0 = p - q^2/4r$

luego:  $p = e_A$   
 $q = -2(e_A - e_0) \mp 2\sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)}$   
 $r = e_A + e_B - 2e_0 = \pm 2\sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)}$



Entonces, la matriz  $[F_F]$  toma la siguiente forma:

$$[F_F] = L \begin{bmatrix} \frac{1}{3}p + \frac{1}{12}q + \frac{1}{30}r & , & -\frac{1}{6}p - \frac{1}{12}q - \frac{1}{20}r \\ -\frac{1}{6}p - \frac{1}{12}q - \frac{1}{20}r & , & \frac{1}{3}p + \frac{1}{4}q + \frac{1}{5}r \end{bmatrix}$$

$$= L \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e_A + \frac{1}{30}e_B + \frac{1}{10}e_0 \mp \frac{1}{10} \sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)} & , & -\frac{1}{20}(e_A + e_B) - \frac{1}{15}e_0 \pm \frac{1}{15} \sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)} \\ -\frac{1}{20}(e_A + e_B) - \frac{1}{15}e_0 \pm \frac{1}{15} \sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)} & , & \frac{1}{30}e_A + \frac{1}{5}e_B + \frac{1}{10}e_0 \mp \frac{1}{10} \sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)} \end{bmatrix}$$

..... (4)

Si asimismo la distribución de  $\bar{g}(\xi)$  es parabólica, obtenemos:

$$[F_C] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} p + \frac{1}{2}q + \frac{1}{3}r & , & " \\ " & , & " \end{bmatrix} = \frac{1}{3L} \begin{bmatrix} \bar{g}_A + \bar{g}_B + \bar{g}_0 \mp \sqrt{(\bar{g}_A - \bar{g}_0)(\bar{g}_B - \bar{g}_0)} & , & " \\ " & , & " \end{bmatrix}$$

..... (5)

Ya que no hay suficiente información disponible en cuanto a la distribución de flexibilidad por corte y considerando este efecto como secundario (lo que se cumple especialmente para vigas y columnas con luces grandes), podemos considerar que la rigidez por corte varía en forma proporcional a la rigidez por flexión. Otra hipótesis podría ser suponer que la rigidez por corte permanece siempre elástica.

Adoptando la primera hipótesis encontramos:  $g(\xi) \propto e(\xi)$ , es decir:

$$\bar{g}_0 = \frac{L'^2}{6} \bar{g} \cdot e_0$$

$$\bar{g}_A = \frac{L'^2}{6} \bar{g} \cdot e_A \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\bar{g}_B = \frac{L'^2}{6} \bar{g} \cdot e_B$$

$$\bar{g} = \frac{6 EI_0}{(GA/k) L'^2}$$

Luego, la ecuación (2) toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_A^i \\ \Delta \theta_B^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \Delta M_A^i \\ \Delta M_B^i \end{bmatrix} \dots (7)$$

$$f_{11} = \left\{ \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{18}g \right) e_A + \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{18}g \right) e_B + \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{18}g \right) \left( e_0 + \sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)} \right) \right\} L'$$

$$f_{12} = f_{21} = \left\{ \left( -\frac{1}{20} + \frac{1}{18}g \right) (e_A + e_B) + \left( -\frac{1}{15} + \frac{1}{18}g \right) \left( e_0 + \sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)} \right) \right\} L'$$

$$f_{22} = \left\{ \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{18}g \right) e_A + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{18}g \right) e_B + \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{18}g \right) \left( e_0 + \sqrt{(e_A - e_0)(e_B - e_0)} \right) \right\} L'$$

Por otro lado, las propiedades inelásticas estimadas directamente de pruebas de laboratorio son  $M_A^i \approx \theta_A^i$  ( $\delta f_A = \Delta \theta_A^i / \Delta M_A^i$ ) y  $M_B^i \approx \theta_B^i$  ( $\delta f_B = \Delta \theta_B^i / \Delta M_B^i$ ) bajo condición antisimétrica de carga del miembro. Por esto es preferible que los parámetros  $e_A$  y  $e_B$  sean transformados en aquellos parámetros  $f_A$  y  $f_B$ . Esta transformación es fácil si permitimos que el modelo tenga una flexión antisimétrica (Es decir  $\Delta M_A = \Delta M_B$ , cuando  $e_A = e_B$ ).

Entonces, en el caso de que:  $\Delta M_A' = \Delta M_B'$ ,  $e_A = e_B$

$$\frac{\Delta \theta_A'}{\Delta M_A'} = \left\{ \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{9\bar{g}} \right) e_A + \left( \frac{1}{15} + \frac{2}{9\bar{g}} \right) e_0 \right\} L' = f_A$$

En el rango elástico

$$\frac{\Delta \theta_A'}{\Delta M_A'} = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3\bar{g}} \right) e_0 L' = f_0$$

Entonces:

$$e_A = \frac{1}{L'} \left\{ \frac{90}{9+10\bar{g}} f_A - \frac{12(3+10\bar{g})}{(9+10\bar{g})(1+2\bar{g})} f_0 \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$e_B = \frac{1}{L'} \left\{ \frac{90}{9+10\bar{g}} f_B - \frac{12(3+10\bar{g})}{(9+10\bar{g})(1+2\bar{g})} f_0 \right\}$$

$$e_0 = \frac{1}{L'} \left\{ \frac{6}{1+2\bar{g}} f_0 \right\}$$

Substituyendo (8) en (7) obtenemos finalmente:

$$\begin{bmatrix} \Delta M_A' \\ \Delta M_B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \theta_A' \\ \Delta \theta_B' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (9)$$

$$f_{11} = (9\alpha + 0.5)f_A + (-\alpha + 0.5)f_B + (-0.5 - 8\alpha + \beta)f_0 + (-3\alpha - 0.5)f_{AB}$$

$$f_{12} = f_{21} = (-6\alpha + 0.5)(f_A + f_B) + (-0.5 + 12\alpha - \beta)f_0 + (-0.5 + 7\alpha)f_{AB}$$

$$f_{22} = (-\alpha + 0.5)f_A + (9\alpha + 0.5)f_B + (-0.5 - 8\alpha + \beta)f_0 + (-3\alpha - 0.5)f_{AB}$$

donde:  $f_{AB} = \pm \sqrt{(f_A - f_0)(f_B - f_0)}$  (+)  $M_A' \cdot M_B' \geq 0$   
(-)  $M_A' \cdot M_B' \leq 0$

$$f_0 = \frac{(1 + 2\bar{g})L^3}{6 EI_0} \quad (\text{flexibilidad elástica})$$

$$\alpha = \frac{1.5}{(9 + 10\bar{g})} \quad \beta = \frac{1.5}{1 + 2\bar{g}} \quad \bar{g} = \frac{6 EI_0}{(G.A/k)L^2}$$

$f_A, f_B$ : representan las flexibilidades en ambos extremos en caso de deformación antisimétrica

caso que la deformación por corte no sea considerada ( $g=0$ )

$$\begin{aligned} f_{11} &= 2f_A + \frac{1}{3}f_B - \frac{1}{3}f_0 - f_{AB} \\ f_{12} &= -\frac{1}{2}(f_A + f_B) + \frac{2}{3}f_{AB} = f_{21} \quad \dots\dots\dots (10) \\ f_{22} &= \frac{1}{3}f_A + 2f_B - \frac{1}{3}f_0 - f_{AB} \end{aligned}$$

El modelo de viga inelástica presentada, al igual que otros modelos conocidos tienen diferentes limitaciones en cuanto a su formulación misma, pero es de gran aplicación práctica para generalizar un método de análisis inelástico de estructuras.

### 2.3 INFLUENCIA DE LAS CARGAS VERTICALES

Las discusiones anteriores sobre el modelo de viga inelástica han sido desarrolladas considerando una distribución lineal del momento de flexión a lo largo del eje del miembro. Este no es el caso de vigas cuando los momentos iniciales de flexión debido a carga

muerta y carga viva son demasiado grandes para depreciar sus efectos comparados con el momento de flexión debido a una excitación sísmica. En otras palabras, el modelo de viga inelástica tiene que ser modificada cuando se considera la influencia de cargas horizontales y verticales (Ver fig. 2-5). El siguiente es un intento para tomar en cuenta la influencia de los esfuerzos considerados, bajo la hipótesis de que el momento de flexión total puede ser reemplazado por la línea cortada de la fig. 2-5.

De la configuración mostrada en la fig. 2-6a, el requerimiento de continuidad de rotación en el centro de luz conduce a:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta'_A \\ \Delta\theta'_B \end{bmatrix} = [E_L] \begin{Bmatrix} \Delta S_A \\ \Delta S_L \end{Bmatrix} + [E_R] \begin{Bmatrix} \Delta S_R \\ \Delta S_B \end{Bmatrix}, \quad [E_L] = \begin{bmatrix} 1, -1/2 \\ 0, 1/2 \end{bmatrix}, \quad [E_R] = \begin{bmatrix} 1/2, 0 \\ -1/2, 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la relación incremental entre los momentos de flexión dados en la fig. 2-6b son:

$$\begin{bmatrix} \Delta M'_A \\ \Delta M'_B \end{bmatrix} = [E_L]^T \begin{Bmatrix} \Delta M'_A \\ \Delta M'_B \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Delta M_R \\ \Delta M_B \end{bmatrix} = [E_R]^T \begin{Bmatrix} \Delta M'_A \\ \Delta M'_B \end{Bmatrix}$$

Entonces, representando las relaciones de flexibilidad de la izquierda y derecha de la viga por:

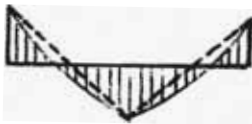
$$\begin{Bmatrix} \Delta S_A \\ \Delta S_L \end{Bmatrix} = [F_L] \begin{Bmatrix} \Delta M'_A \\ \Delta M'_B \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Delta S_R \\ \Delta S_B \end{Bmatrix} = [F_R] \begin{Bmatrix} \Delta M_R \\ \Delta M_B \end{Bmatrix}$$

respectivamente, la relación siguiente es obtenida para la viga :

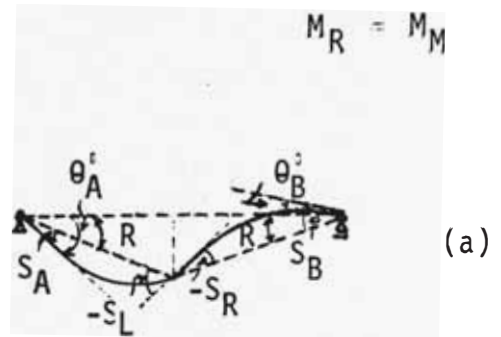
$$\begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Esta matriz de flexibilidad  $[F']$  será evaluada en cada etapa del análisis inelástico, calculando  $[F_L]$  y  $[F_R]$  usando las relaciones:  $f_A = \Delta\theta_A^i / \Delta M_A^i$ ,  $f_B = \Delta\theta_B^i / \Delta M_B^i$  y  $f_M = \Delta\theta_M / \Delta M_M$

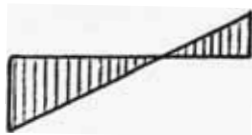
Notar las siguientes relaciones:  $\Delta M_M = (\Delta M_A^i - \Delta M_B^i) / 2$  y  $M_L = -M_M$



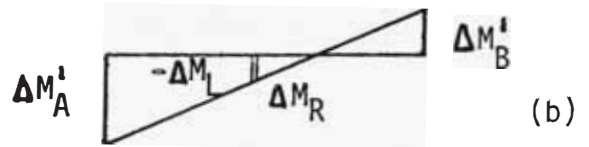
Momentos iniciales por carga viva y muerta



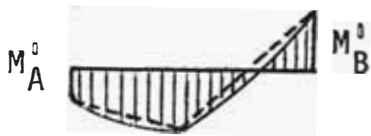
Configuración deformada



Momentos de flexión por sismo



Momentos de flexión incremental



Momentos de flexión reales

Fig. 2-6. Deformación y esfuerzos incrementales de vigas

Fig. 2-5: Momentos de flexión instantánea de vigas

Como una manera general de evaluar las características de la fuerza de restauración de los miembros de la estructura presentamos el diagrama de flujo mostrado en la fig. 2-7



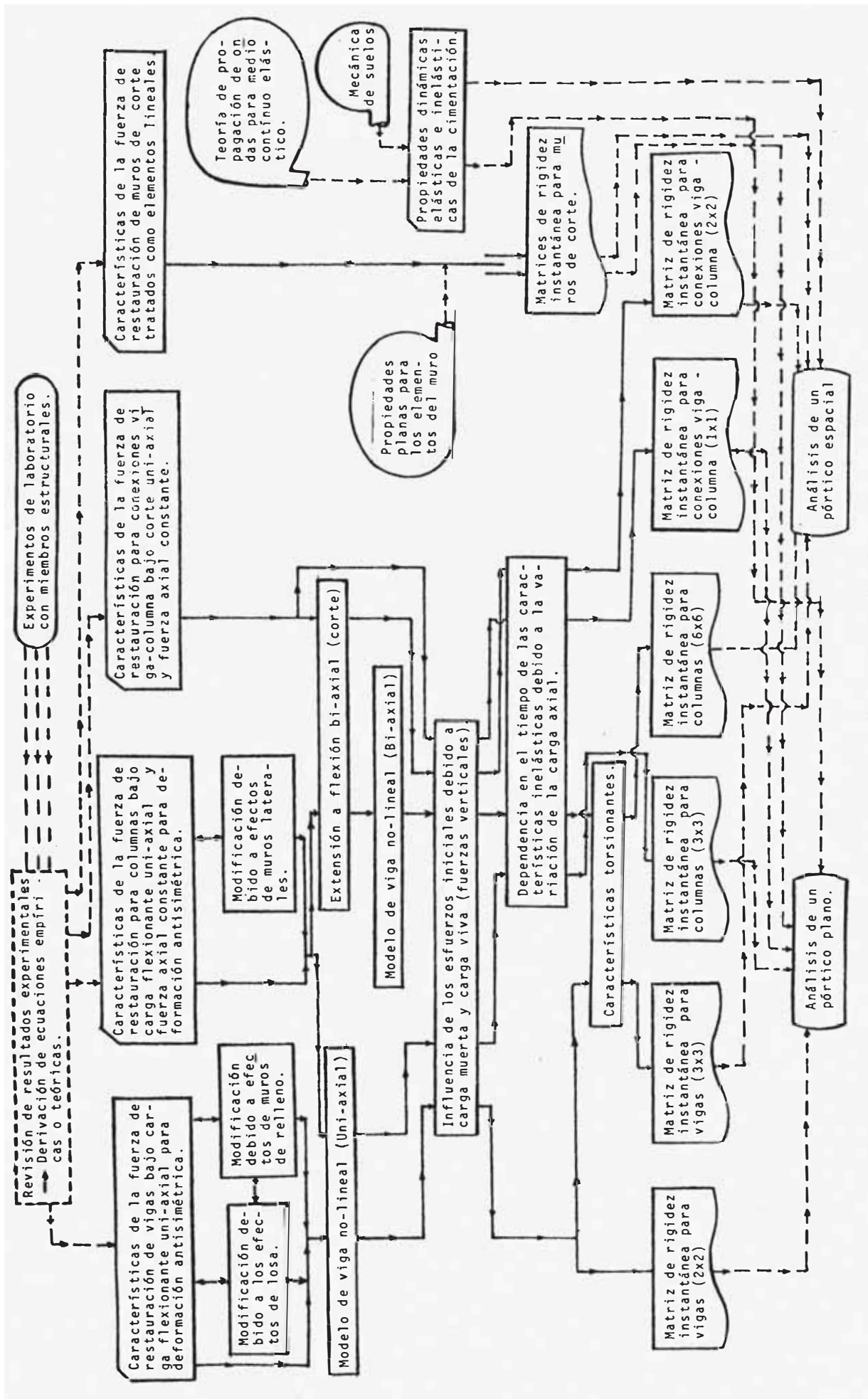


FIG. 2-7 : DIAGRAMA DE FLUJO PARA EVALUAR LAS CARACTERÍSTICAS INELÁSTICAS DE LOS MIEMBROS ESTRUCTURALES



## 2.4 PROCEDIMIENTO DE ANALISIS

En el procedimiento de análisis propuesto, el cual ha sido desarrollado en la Universidad de Tokyo (2), la estructura dada es primeramente dividida en vigas, columnas, conexiones viga-columna, y después de estimar las características inelásticas de cada miembro en forma independiente (empleando los conocimientos presentados anteriormente), estos miembros son ensamblados aplicando el principio de compatibilidad de desplazamiento. Luego se puede estudiar el mecanismo de colapso de toda la estructura para un movimiento sísmico determinado.

Este proceso se puede realizar de la siguiente manera:

- 1) Estimación de la rigidez inelástica instantánea de cada miembro (vigas, columnas, etc.).
- 2) Estimación de la rigidez estructural
  - Matriz de rigidez de vigas
  - Matriz de rigidez de columnas
  - Matriz de rigidez de piso
  - Matriz de rigidez de toda la estructura
- 3) Integración numérica de la ecuación gobernante

### 2.4.1 RIGIDEZ INELASTICA DEL MIEMBRO

Se determina aplicando el modelo de viga inelástica propuesto anteriormente.

## 2.4.2 ESTIMACION DE LA RIGIDEZ ESTRUCTURAL

Conocida la rigidez instantánea de cada miembro, calculamos seguidamente la matriz de rigidez de todo el pórtico, considerando las zonas rígidas en ambos extremos de cada miembro.

Para una porción de un pórtico plano deformado, tal como se indica en la figura tendremos lo siguiente:

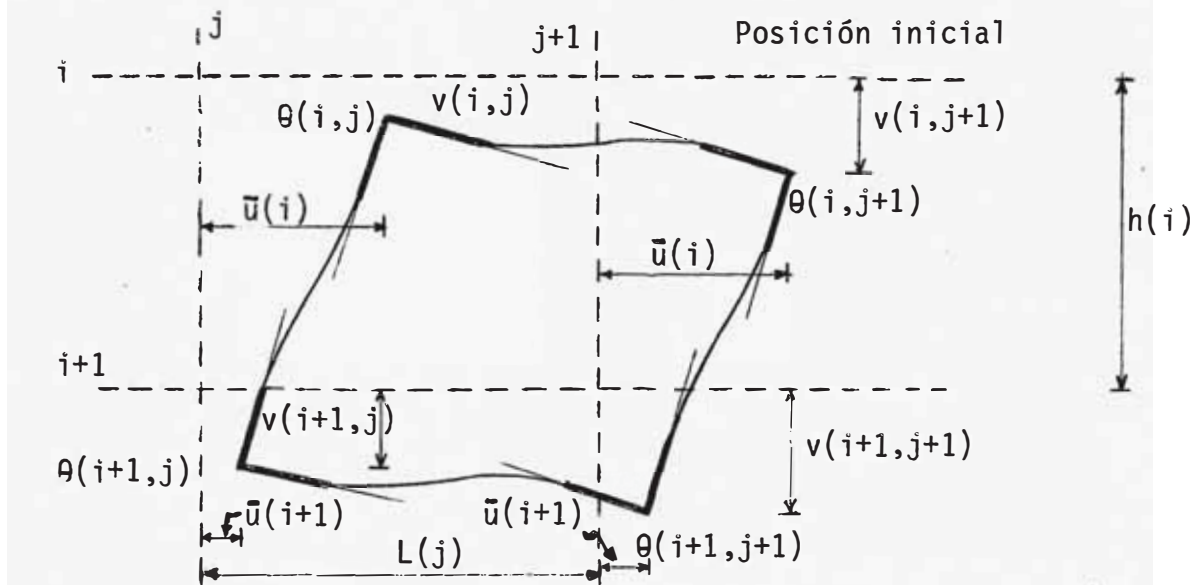


Fig. 2-8 : Porción de pórtico deformado

donde:

$i$  = nivel de piso

$j$  = línea de columna

$\bar{u}$  = desplazamiento horizontal; como consideramos que las vigas no se deforman en la dirección axial, " $\bar{u}$ " es igual para todas las columnas en cada nivel.

$v$  = desplazamiento vertical

$\theta$  = rotación

$F_x$  = Fuerza externa modal en la dirección horizontal ( $x$ )

$F_y$  = Fuerza externa modal en la dirección vertical ( $y$ )

$M$  = Momento en cada nudo.

a. - Matriz de Rigidez de vigas

- Para un elemento viga AB (cualquiera) del pórtico tendremos:

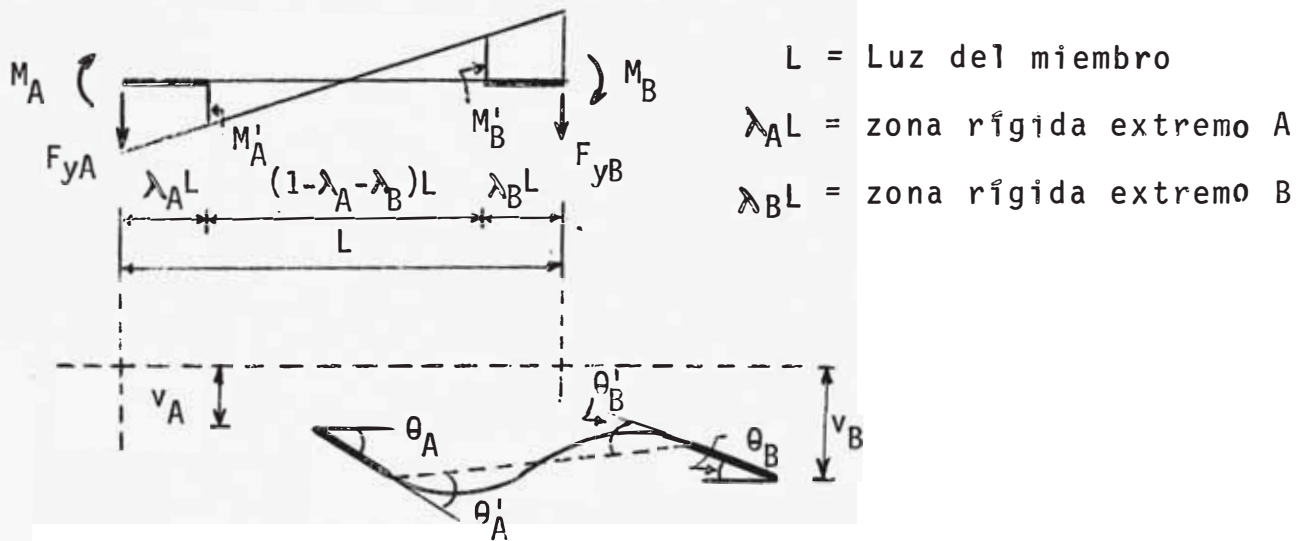
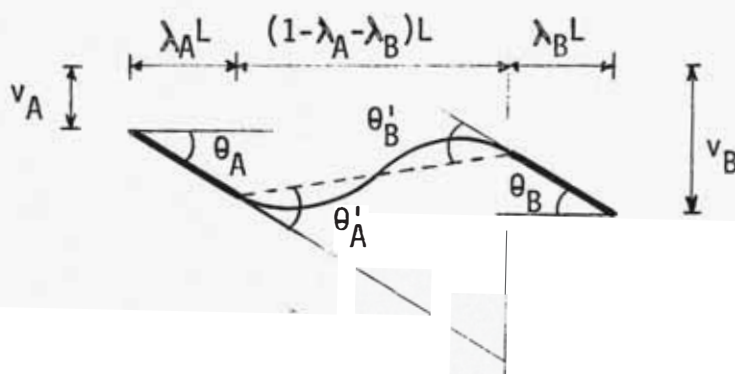


Fig. 2-9 : Fuerzas y desplazamientos de una viga.

- Por condición de compatibilidad de desplazamientos:



Por geometría:

$$\theta_A(1 - \lambda_B)L = \theta'_A(1 - \lambda_A - \lambda_B)L - (v_A - v_B) - \theta_B \lambda_B L$$

$$\theta_B(1 - \lambda_A)L = \theta'_B(1 - \lambda_A - \lambda_B)L + (v_B - v_A) - \theta_A \lambda_A L$$

Luego:

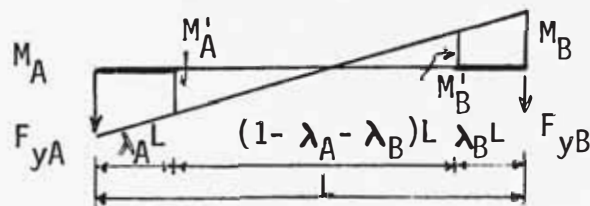
$$\theta'_A = \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)L} v_A + \frac{(1-\lambda_B)}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \theta_A - \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)L} v_B + \frac{\lambda_B}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \theta_B$$

$$\theta'_B = \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)L} v_A + \frac{\lambda_A}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \theta_A - \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)L} v_B + \frac{(1-\lambda_A)}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \theta_B$$

Ordenando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \theta'_A \\ \theta'_B \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1-\lambda_B & -\frac{1}{L} & \lambda_B \\ \frac{1}{L} & \lambda_A & -\frac{1}{L} & 1-\lambda_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_v} \begin{bmatrix} v_A \\ \theta_A \\ v_B \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

- Del equilibrio de fuerzas:



Por geometría:

$$\frac{M_A - M'_A}{M'_A + M'_B} = \frac{\lambda_A}{1-\lambda_A-\lambda_B}, \quad \frac{M_B - M'_B}{M'_A + M'_B} = \frac{\lambda_B}{1-\lambda_A-\lambda_B} \quad (a)$$

$$\frac{M_A - M'_A}{M_B - M'_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \rightarrow \begin{cases} M'_A = M'_A + \frac{\lambda_A}{\lambda_B}(M_B - M'_B) \\ M'_B = M'_B + \frac{\lambda_B}{\lambda_A}(M_A - M'_A) \end{cases} \quad (b)$$

De (a) y (b)

$$M_A = M'_A + \frac{\lambda_A(M'_A + M'_B)}{1-\lambda_A-\lambda_B} \rightarrow M_A = \frac{(1-\lambda_B)M'_A + \lambda_A M'_B}{1-\lambda_A-\lambda_B} \quad (c)$$

$$M_B = M'_B + \frac{\lambda_B (M'_B + M'_A)}{1 - \lambda_A - \lambda_B} \longrightarrow M_B = \frac{(1 + \lambda_A) M'_B + \lambda_B M'_A}{1 - \lambda_A - \lambda_B} \quad (d)$$

Asimismo:

$$F_{yA} = (M_A + M_B) / L = (M'_A + M'_B) \frac{1}{(1 - \lambda_A - \lambda_B) L} \quad (e)$$

$$F_{yB} = - (M_A + M_B) / L = - (M'_A + M'_B) \frac{1}{(1 - \lambda_A - \lambda_B) L} \quad (f)$$

Ordenando matricialmente (c,d,e,f) encontramos:

$$\begin{bmatrix} F_{yA} \\ M_A \\ F_{yB} \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 - \lambda_A - \lambda_B)} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 - \lambda_B & \lambda_A \\ -1/L & -1/L \\ \lambda_B & 1 - \lambda_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_A \\ M'_B \end{bmatrix}$$

$\longleftarrow \mathbb{B}_V^T \longrightarrow$

Finalmente la matriz de rigidez (instantanea) del elemento viga es:

$$\begin{bmatrix} \Delta F_{yA} \\ \Delta M_A \\ \Delta F_{yB} \\ \Delta M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{B}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_A \\ \Delta \theta_A \\ \Delta v_B \\ \Delta \theta_B \end{bmatrix}$$

$\longleftarrow \mathbb{K}_V \longrightarrow$

Donde:  $\begin{bmatrix} \mathbb{B}_V \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \lambda_A - \lambda_B} \begin{bmatrix} 1/L & 1 - \lambda_B & -1/L & \lambda_B \\ 1/L & \lambda_A & -1/L & 1 - \lambda_A \end{bmatrix}$

$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$  --- matriz de rigidez inelástica (instantánea) que fue de terminada anteriormente.

b.- Matriz de Rigidez de columnas

- Para un elemento columna AB (cualquiera) del pórtico, tendremos:

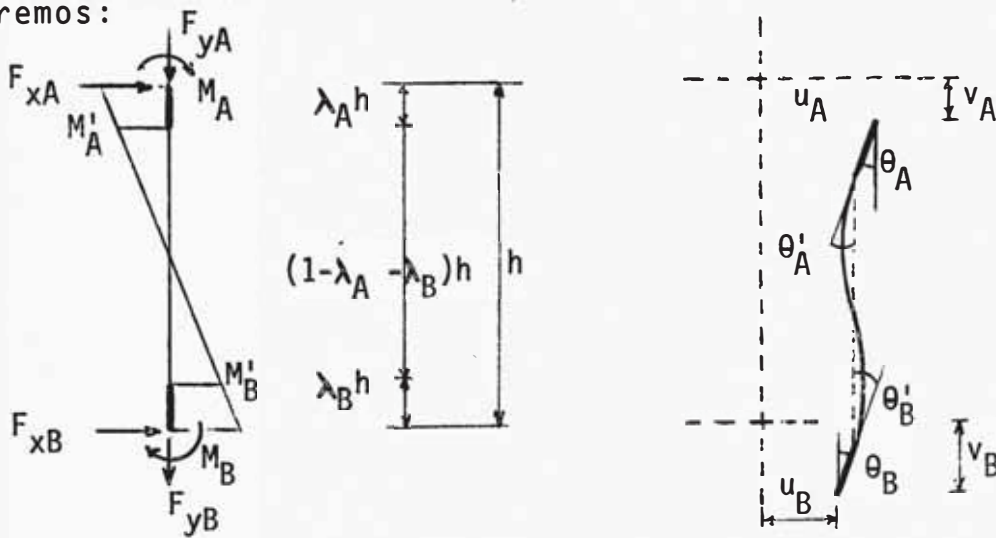


Fig. 2-10 : Fuerzas y desplazamientos de la columna

- Por condición de compatibilidad de desplazamientos:

En forma similar al caso anterior encontramos:

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta'_A \\ \theta'_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda'_A & 0 & 0 & \lambda'_A & 0 \\ -\frac{1}{h} & 0 & 1-\lambda_B & \frac{1}{h} & 0 & \lambda_B \\ -\frac{1}{h} & 0 & \lambda_A & \frac{1}{h} & 0 & 1-\lambda_A \end{bmatrix} \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \begin{Bmatrix} \bar{u}_A \\ v_A \\ \theta_A \\ \bar{u}_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

$\longleftarrow \mathbb{B}_C \longrightarrow$

$\delta$  = deformación axial columna  
 $\lambda' = (1-\lambda_A-\lambda_B)$



- Asimismo, del equilibrio de fuerzas:

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ M_A \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/h & -1/h \\ -1\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_B & \lambda_A \\ 0 & 1/h & 1/h \\ 1\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_B & 1-\lambda_A \end{bmatrix} \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \begin{Bmatrix} N \\ M_A' \\ M_B' \end{Bmatrix}$$

$\longleftarrow \mathbf{B}_c^T \longrightarrow$

N: Fuerza axial columna

- Luego, la matriz de rigidez del elemento columna es:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{xA} \\ \Delta F_{yA} \\ \Delta M_A \\ \Delta F_{xB} \\ \Delta F_{yB} \\ \Delta M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^T \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_A \\ \Delta v_A \\ \Delta \theta_A \\ \Delta \bar{u}_B \\ \Delta v_B \\ \Delta \theta_B \end{Bmatrix}$$

$\longleftarrow \mathbf{K}_c \longrightarrow$

donde:

$$\mathbf{B}_c = \frac{1}{(1-\lambda_A-\lambda_B)} \begin{bmatrix} 0 & -1\lambda' & 0 & 0 & 1\lambda' & 0 \\ -1/h & 0 & 1-\lambda_B & 1/h & 0 & \lambda_B \\ -1/h & 0 & \lambda_A & 1/h & 0 & 1-\lambda_A \end{bmatrix}$$

$K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{22}$ : elementos de la matriz de rigidez inelástica

$K_e = \frac{A \cdot E}{L}$ ; rigidez axial tratada como elastica.







$r_i^t, r_i^b$  : desplazamiento arriba y abajo del piso

- La matriz de rigidez de piso es entonces dada en la forma particionada, mediante la siguiente operación.

$$\begin{bmatrix} K_i^t & C_i \\ C_i^T & K_i^b \end{bmatrix} = [A_i]^T [B_i] [A_i] \dots\dots\dots (d)$$

$$\begin{bmatrix} K_i^t & C_i^T \\ C_i & K_i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^t & \vdots & A_i^b \end{bmatrix}^T [B_i] \begin{bmatrix} A_i^t & \vdots & A_i^b \end{bmatrix}$$

donde:  $B_i$  : matriz definida por la ecuación (a)

$A_i$  : matriz definida por la ecuación (b)

$C_i$  : matriz de acoplamiento al nivel  $i$

$K_i$  : matriz de rigidez al nivel  $i$

El simbolo T representa matriz transpuesta

- Cuando la rigidez del piso es expresada en esta forma, puede ser usada para determinar las fuerzas arriba y abajo del piso, en términos de los correspondientes desplazamientos

$$\begin{bmatrix} R_i^t \\ R_i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i^t & C_i \\ C_i^T & K_i^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i^t \\ r_i^b \end{bmatrix}$$

NOTA

Para el ejemplo propuesto se tendrá lo siguiente:

- Supongamos que las matrices de rigidez de cada miembro (vigas y columnas) sean las siguientes (para cada piso  $i$ ).

$$[K_c] = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_4 & K_7 & K_{11} & K_{16} \\ & K_3 & K_5 & K_8 & K_{12} & K_{17} \\ & & K_6 & K_9 & K_{13} & K_{18} \\ & & & K_{10} & K_{14} & K_{19} \\ & & & & K_{15} & K_{20} \\ & & & & & K_{21} \end{bmatrix}$$

donde:  $c^{kj}_n$   $n$  = posición del elemento en la matriz  
 $j$  = línea de columnas  
 $c$  = relativo a la columna

$$[K_v] = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_4 & K_7 & K_{11} \\ & K_3 & K_5 & K_8 & K_{12} \\ & & & K_9 & K_{13} \\ & & & K_{10} & K_{14} \\ & & & & K_{15} \end{bmatrix}$$

donde:  $v^{kj}_n$   $n$  = posición del elemento en la matriz  
 $j$  = entre línea columna  $j$  y  $j+1$   
 $v$  = relativo a la viga

- En forma directa se puede obtener :

$$\begin{bmatrix} K_i^t & C_i \\ C_i^T & K_i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [K_{v1}] & [K_{c1}] \\ [K_{c2}] & [K_{v2}] & [K_{c2}] \\ [K_{c3}] & [K_{c3}] & [K_{c3}] \\ [K_{c1}] & [K_{c2}] & [K_{c1}] \\ [K_{c2}] & [K_{c3}] & [K_{c2}] \\ [K_{c3}] & [K_{c3}] & [K_{c3}] \end{bmatrix}$$

- Asimismo, empleando la notación indicada, ésta matriz toma la siguiente forma :



d.- Matriz de Rigidez de toda la estructura

- La rigidez total de la estructura puede obtenerse por simple superposición de las rigideces de piso.

La rigidez total de la estructura en cualquier nivel "i" en general, es debido a lo siguiente:

$$[K_i] = [K_{i-1}^b] + [K_i^t] \quad (i = 1 \approx n)$$

- Luego, la matriz de rigidez incremental en la estructura es :

$$\begin{bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_3 \\ \vdots \\ \Delta R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & C_1 & & & & \\ C_1^T & K_2 & C_2 & & & \\ & C_2^T & K_3 & C_3 & & \\ & & & & & \\ & & & & C_{n-2}^T & K_{n-1} & C_{n-1} \\ & & 0 & & & & \\ & & & & & & C_{n-1}^T & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta r_n \end{bmatrix}$$

donde:

$$[R_i] = \begin{bmatrix} F_x(i) \\ F_y(i,1) \\ M(i,1) \\ \vdots \\ \vdots \\ F_y(i,3) \\ M(i,3) \end{bmatrix} \quad [r_i] = \begin{bmatrix} \bar{u}(i) \\ v(i,1) \\ \theta(i,1) \\ \vdots \\ \vdots \\ v(i,3) \\ \theta(i,3) \end{bmatrix}$$

- En forma abreviada :

$$[\Delta R] = [K] [\Delta r]$$



### 2.4.3 INTEGRACION NUMERICA DE LA ECUACION GOBERNANTE

Usando la matriz de rigidez instantánea de la estructura en cada etapa del cálculo según la técnica propuesta, basada en el nivel de esfuerzos de todos los miembros constituyentes en cada instante, la ecuación dinámica gobernante para el paso (r+1) es la siguiente:

$$[M] [\Delta \dot{r}]_K^{K+1} + [c]_K^{K+1} [\Delta \dot{r}]_K^{K+1} + [K]_K^{K+1} [\Delta r]_K^{K+1} + [F]_K = -[M] \{e\} \ddot{Y}_{K+1}$$

donde:

$[M]$  : matriz de masa concentrada de la estructura (sólo se considera inercias para fuerzas laterales).

$[c]_K^{K+1}$  : matriz de amortiguamiento instantáneo entre los pasos (K) y (K+1)

$[K]_K^{K+1}$  : matriz de rigidez instantánea entre los pasos (K) y (K+1)

$[F]$  : Fuerza de restauración en el paso K.

$[e]$  : vector unitario

$\ddot{Y}_{K+1}$  : aceleración en la base, en el paso (K+1)

$[r]$  : vector definido anteriormente

Esta ecuación será resuelta usando el método de integración numérica "step by step" considerando una variación de la aceleración. Existen varias variantes de este método (1,11,12). Nosotros emplearemos la variante de Wilson que utiliza un tipo de a-

mortiguación tipo Rayleigh (9)

$$[c]_K^{K+1} = \alpha [M] + \lambda [K]_K^{K+1}$$

donde:  $\alpha$  y  $\lambda$  son constantes que satisfacen la condición de ortogonalidad de modos.

Luego procedemos en la siguiente forma: (8)

- a) Conversión en pseudo matriz de rigidez
- b) Evaluación del pseudo vector fuerza incremental externo
- c) Calculo del pseudo vector de desplazamiento incremental
- d) Conversión en un vector de desplazamiento incremental real
- e) Evaluación de los valores de respuesta incrementales y totales en el piso (K+1)

Numéricamente, estos pasos son los siguientes:

ECUACION DINAMICA  $[M][\Delta \ddot{r}]_K^{K+1} + [c]_K^{K+1}[\Delta \dot{r}]_K^{K+1} + [K]_K^{K+1}[\Delta r]_K^{K+1} + [F]_K = -[M][e] \ddot{y}_{K+1}$

ALGORITMO PROPUESTO:  $[c]_K^{K+1} = \alpha [M] + \lambda [K]_K^{K+1}$

PASOS:

a)  $[\tilde{K}]_K^{K+1} = [K]_K^{K+1} + a_1 [M]$

$$\beta = 1/4$$

$$a_1 = \left( \frac{2}{\Delta t} + \alpha \right) / (2\beta \Delta t + \lambda)$$

$\Delta t$  = intervalo de tiempo

b)  $[\tilde{\Delta P}]_K^{K+1} = -[M][e]\ddot{y}_{K+1} - [F]_K + [M](a_2[\dot{r}]_K + a_3[\ddot{r}]_K)$

$$a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} + (\alpha - \lambda a_1) / \left( \frac{0.5}{\beta} - 1 \right)$$

$$a_3 = \frac{0.5}{\beta} - 1 + (\alpha - \lambda a_1) \left( \frac{0.25}{\beta} - 1 \right) \Delta t$$

$$c) \quad [\tilde{\Delta r}]_K^{K+1} = \{ [\tilde{K}]_K^{K+1} \}^{-1} [\tilde{\Delta P}]_K^{K+1}$$

$$d) \quad [\Delta r]_K^{K+1} = a_4 [\tilde{\Delta r}]_K^{K+1} + a_5 [\dot{r}]_K + a_6 [\ddot{r}]_K$$

$$a_4 = 2\beta \Delta t / (2\beta \Delta t + \lambda)$$

$$a_5 = \lambda \cdot (0.5/\beta - 1) a_4$$

$$a_6 = \lambda (0.25/\beta - 1) \Delta t \cdot a_4$$

$$[r]_{K+1} = [r]_K + [\Delta r]_K^{K+1}$$

$$[\dot{r}]_{K+1} = a_7 \cdot [\Delta r]_K^{K+1} + a_8 [\dot{r}]_K + a_9 [\ddot{r}]_K$$

$$a_7 = 0.5 / (\beta \Delta t)$$

$$a_8 = 1 - 0.5/\beta$$

$$a_9 = (1 - 0.25/\beta) \Delta t$$

$$[\ddot{r}]_{K+1} = a_{10} [\Delta r]_K^{K+1} + a_{11} [\dot{r}]_K + a_8 \cdot [\ddot{r}]_K$$

$$a_{10} = 1 / \{ \beta (\Delta t)^2 \}$$

$$a_{11} = - 1 / \{ \beta \Delta t \}$$

$$[F]_{K+1} = [F]_K + [K]_K^{K+1} [\Delta r]_K^{K+1}$$

# C A P I T U L O    I I I

## METODO SIMPLE DE ANALISIS

### 3.1 INTRODUCCION

A continuación presentamos un procedimiento para determinar las fuerzas de diseño de estructuras de concreto armado, correspondientes a un movimiento sísmico de características conocidas. Este método, denominado "Método de la Estructura Equivalente", reconoce la disipación de energía en el rango no-lineal de respuesta y utiliza modelos lineales (para el análisis y diseño) y espectros de respuesta (para representar al sismo dado). El método tiene por objeto establecer las resistencias mínimas que deben tener los miembros estructurales para que los desplazamientos de respuesta tolerable no sean excedidos.

La característica principal del método de la estructura equivalente es que nos proporciona una forma simple para tomar en cuenta la respuesta inelástica de estructuras de concreto armado de varios grados de libertad. Las ventajas específicas son las siguientes:

- 1) Uso de modelos de respuesta lineal para el análisis dinámico.

- 2) Cambio en los límites establecidos de respuesta tolerable en diferentes elementos de la estructura.
- 3) Consideración deliberada de los desplazamientos en el proceso de diseño (específicamente se intenta controlar los desplazamientos de entre pisos, lo cual es un parámetro para mantener los daños estructurales y no estructurales a un nivel económico mínimo (1)).
- 4) Presentación del concepto de coeficiente de daño (similar al concepto de ductilidad), con lo que se intenta prevenir el colapso (1).

## 3.2 HIPOTESIS BASICAS

Ha sido demostrado por Newmark (16) que hay tres reglas aproximadas para correlacionar la respuesta elástica de sistemas lineales (con periodos conocidos) y la respuesta inelástica de sistemas que han sobrepasado su límite de fluencia durante movimientos sísmicos severos:

- 1) El desplazamiento es conservado (constante) para sistemas con periodos relativamente altos.
- 2) La energía es conservada (constante) para sistemas con periodos pequeños.
- 3) La fuerza es conservada (constante) para sistemas con periodos muy pequeños.

Las tendencias anteriores para una respuesta máxima ~~no-lineal~~ durante sismos puede ser interpretada en términos de los mo-

de los lineales equivalentes que cumplen ciertas condiciones, lo que está asociado con el espectro del sismo considerado.

### 3.2.1 FUNDAMENTO DEL METODO PROPUESTO

De lo expuesto anteriormente podemos decir, que el método de las estructuras equivalente se basa fundamentalmente en la hipótesis de que la máxima respuesta inelástica de sistemas que han sobrepasado su límite de fluencia, puede ser determinada satisfactoriamente usando modelos lineales equivalentes con rigidez reducida y amortiguamiento incrementados, determinados como una función de los desplazamientos máximos alcanzados o relaciones de daño consideradas (14,15).

Podemos agregar a esto, que anteriormente ya se han propuesto otras aproximaciones para la representación lineal de una respuesta no-lineal, lo cual ha sido investigado en detalle por muchos investigadores.

### 3.2.2 CARACTERISTICAS DE LAS ESTRUCTURAS

En el presente estudio, se aplicará el método de la estructura equivalente a estructuras que satisfacen lo siguiente:

- 1) El sistema puede ser analizado en un plano vertical.
- 2) No hay cambios abruptos en la geometría o en la masa en todo lo alto de la estructura.
- 3) Las columnas, vigas y muros (representados como columnas) pueden ser diseñados con diferentes límites de respuesta



inelástica, pero los límites deben ser los mismos para todas las vigas y columnas en un piso dado.

- 4) Todos los elementos estructurales y las conexiones viga-columna deben estar reforzadas convenientemente para evitar una disminución significativa de su resistencia como resultado de cargas repetidas reversas o de desplazamientos inelásticos anticipados.
- 5) Los miembros no estructurales no interfieren con la respuesta estructural.

Estas hipótesis están basadas en estudios que se han realizado con estructuras a las cuales se les ha aplicado este método para ver su comportamiento y limitaciones.

### 3.2.3 ESPECTROS DE RESPUESTA CONSIDERADOS

El método requiere de un conjunto de espectros de respuesta suavizados que representen la intensidad y características de posibles sismos que se puedan presentar en el lugar donde se encuentra el edificio a analizar.

Con el objeto de aplicar el método propuesto, se ha seleccionado el espectro de respuesta suavizado (14) mostrado en la fig. 3-1a, para un amortiguamiento de 2% y 10%, el cual refleja los espectros de respuesta de seis registros de acelerogramas conocidos (dos componentes de los sismos El Centro 1940, Taft 1952 y Managua 1972) cuyas máximas aceleraciones fueron todas normalizadas a los mismos valores.

El efecto del amortiguamiento en la respuesta espectral es bastante importante en el análisis de respuesta lineal equivalente. Aunque toma valores muy dispersos en la respuesta real, se ha asumido que la aceleración de respuesta de diseño para cualquier factor de amortiguamiento "b", puede ser relacionado con la respuesta para b=2% usando la ecuación 1. (Ver fig. 3-1b).

$$\frac{\text{Aceleración respuesta para } b \%}{\text{Aceleración respuesta para } b=2\%} = \frac{8}{6+100 b} \quad (1)$$

Al escoger el espectro de respuesta se ha puesto mayor consideración al comparar los valores calculados para b=0.10 que para b=0.02, ya que los valores de los coeficientes de amortiguamiento son del orden de 0.1 más que de 0.01 para aplicaciones típicas del método de la estructura equivalente. También se ha hecho un esfuerzo para seleccionar las curvas de diseño y para expresarlas de una manera simple.

### 3.2.4 APLICACION AL DISEÑO

Al analizar la respuesta de la estructura equivalente, si su resistencia es dada de antemano, se puede encontrar la relación de daño final en forma iterativa de manera que la relación de daño asumida iguale la relación de daño calculada a partir del desplazamiento máximo estimado y de la relación fuerza-desplazamiento especificada. Por otro lado, si se asume inicialmente la

relación de daño, el desplazamiento máximo estimado junto con la relación de daño determina la resistencia aproximada que se requiere para producir la relación de daño asumida. Esto provee un procedimiento para la determinación de las fuerzas de diseño para relaciones de daño permisibles.

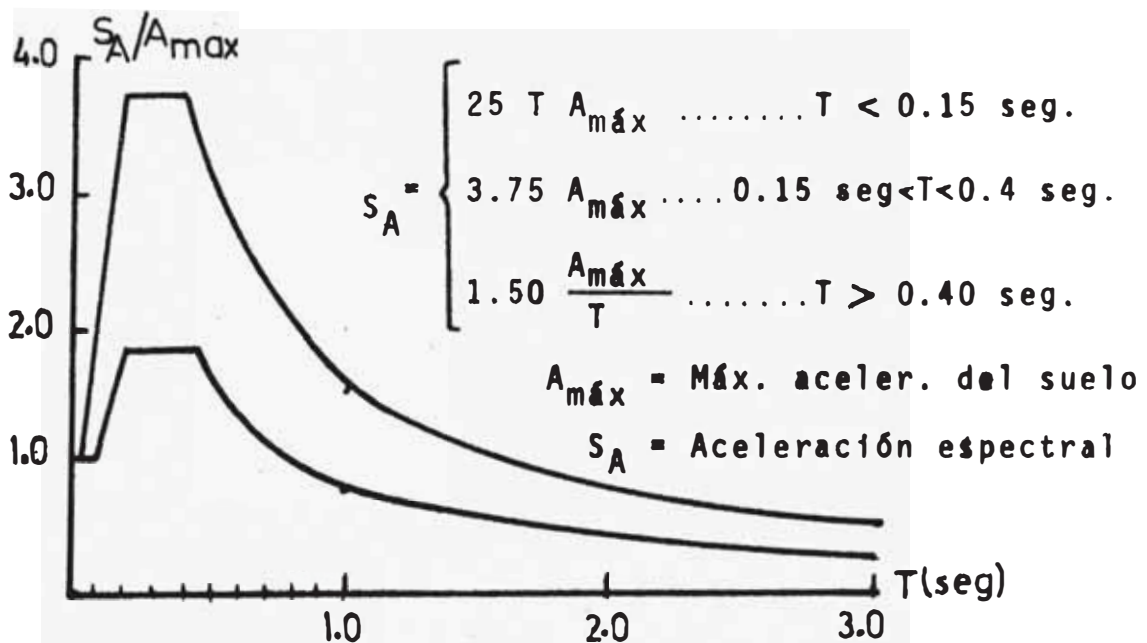


Fig. 3-1a : Espectro de diseño para  $b = 2\%$

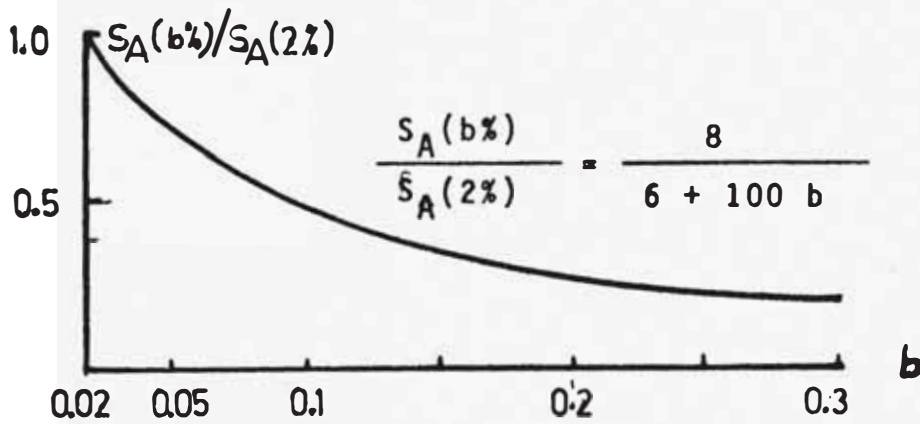


Fig. 3-1b : Efecto del amortiguamiento en la respuesta espectral.

Fig. 3-1 : Espectro de respuesta suavizado de diseño

### 3.3 DESCRIPCION DEL METODO

Las características principales del método de la estructura equivalente son:

- a) Definición de un pórtico equivalente con sus propiedades de rigidez diferenciando del pórtico real (original).
- b) Cálculo de las fuerzas de diseño a partir de un análisis espectral modal (o de un análisis tiempo-historia lineal para un sismo dado).

Estas operaciones pueden ser divididas en los siguientes pasos:

- 1) Basados en los límites tolerables de respuesta inelástica, determinar las rigideces de los miembros del pórtico equivalente.
- 2) Calcular las frecuencias modales y factores de amortiguamiento para la estructura equivalente.
- 3) Determinar las fuerzas de diseño.

También se ha asumido que las dimensiones preliminares de los miembros de la estructura son conocidos de antemano a partir de un análisis de cargas verticales.

#### 3.3.1 ESTRUCTURA EQUIVALENTE

Las rigideces flexionantes de los elementos de la estructura equivalente están relacionados con aquellas rigideces de los e

elementos de la estructura real (original) mediante la ecuación 2.

$$(EI)_{s_i} = (EI)_{a_i} / u_i \quad (2)$$

donde:  $(EI)_{s_i}$  = rigidez flexionante del elemento  $i$ , de la estructura equivalente.

$(EI)_{a_i}$  = rigidez flexionante del elemento  $i$ , de la estructura agrietada.

$u_i$  = "relación de daño" tolerable del elemento  $i$  que ha sido seleccionado para el análisis.

La interpretación física de la relación de daño para la condición particular de una viga de concreto armado sujeta a momentos antisimétricos, es ilustrada en la fig. 3-2. La curva llena en la fig. 3-2c representa la relación entre el momento aplicado,  $M$ , y la rotación extrema,  $\theta$ , causada por deformación por flexión en la viga. Se observa que la relación de daño,  $u$ , es comparable al término ductilidad.

Los valores de  $u$  para los elementos estructurales dependen de la naturaleza, costo y función del edificio así como del tipo y detalle de los elementos. En este estudio no pretendemos dar los valores de  $u$ ; y para proseguir con el método propuesto, asumiremos que las relaciones de daño son 1 para columnas y 6 para vigas. Con esto se presenta que la energía sea disipada primeramente por las vigas, lo que es más fácil de obtener mediante los detalles sísmicos adecuados.

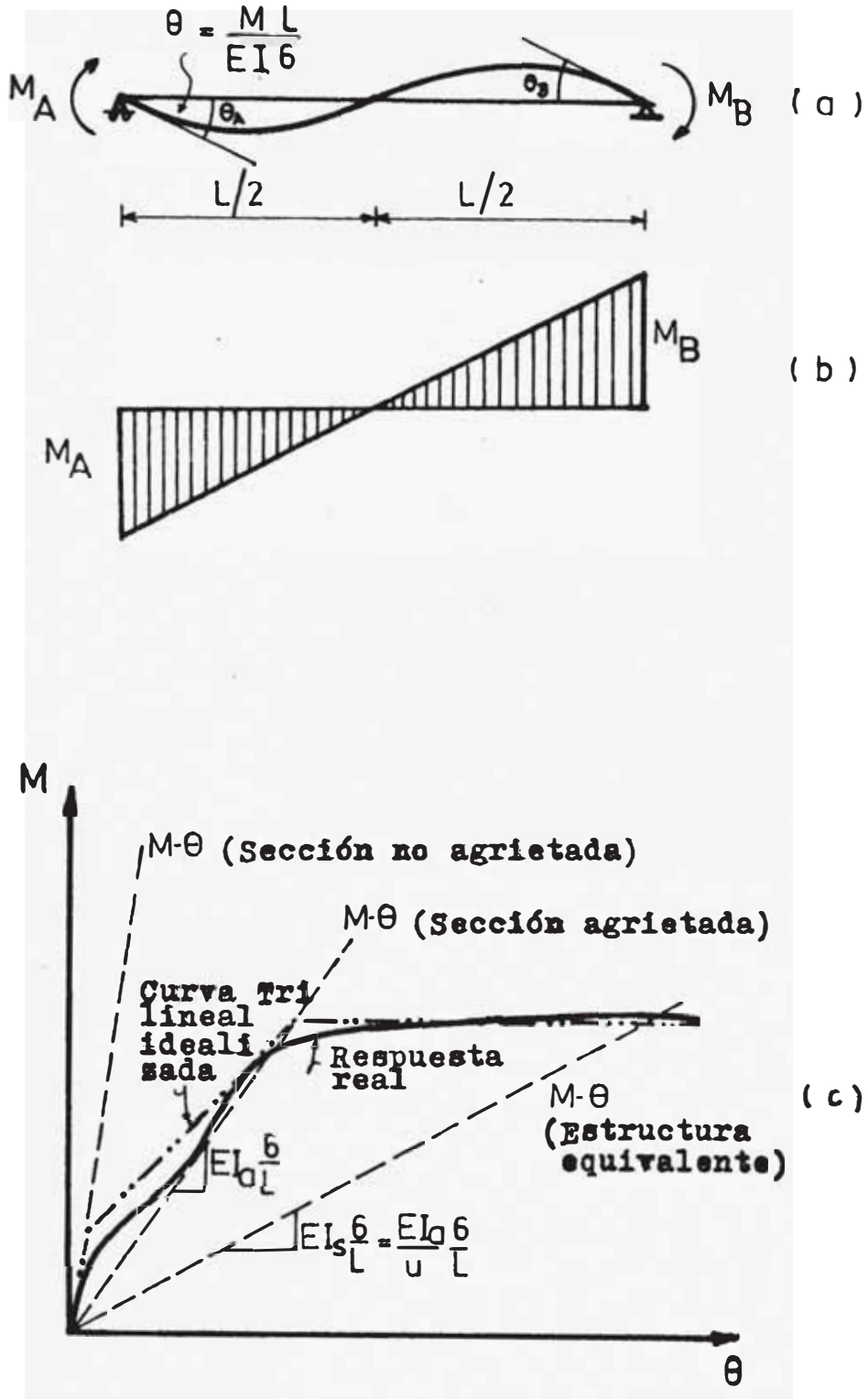


Fig. 3-2 : Interpretación de la relación de daño



### 3.3.2 FRECUENCIAS, FORMAS MODALES Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO

Los periodos, frecuencias, formas modales y factores de amortiguamiento para la estructura equivalente son obtenidos a partir de un análisis de respuesta lineal.

Ha sido mostrado (13) que el amortiguamiento para un sistema lineal equivalente puede obtenerse aplicando la ecuación 3, la cual representa un rango más que un valor preciso.

$$b_s = 0.2(1-1/\sqrt{u}) + 0.02 \quad \text{-----} \quad (3)$$

donde:  $b_s$ : factor de amortiguamiento equivalente  
 $u$ : relación de daño

La ecuación 3 está basada en el análisis del factor de amortiguamiento substituto definido por la ec. 4, en la que se supone que la energía sísmica es enteramente disipada por un amortiguador viscoso imaginario asociado con la velocidad horizontal de la masa soportada por el pórtico.

Se tiene:

$$2w_s b_s \int \dot{x}^2 dt = -\int m \ddot{y} dx = -\int m \ddot{y} \frac{dx}{dt} dt = -\int_0^T m \ddot{y} \dot{x} dt \quad \text{-----} \quad (a)$$

Energía sísmica

$$\bar{W} = \int F_a dx = \int c \dot{x} dx = \int c \dot{x}^2 dt = m \int \frac{c}{m} \dot{x}^2 dt = m \cdot 2b_s \cdot w \int \dot{x}^2 dt \quad (b)$$

Energía disipada

(1 = 2) 
$$b_s = -\int_0^T \ddot{y} \dot{x} dt / 2w_s \int \dot{x}^2 dt \quad \text{-----} \quad (4)$$

Si los miembros individuales de una estructura son diseñados con diferentes valores de  $u$ , los valores individuales de  $b_s$  tienen que ser combinados para obtener un valor suavizado (reducido) de  $b_s$  para ser usado en el análisis modal. En el método de la estructura equivalente esto es hecho asumiendo que cada elemento contribuye al factor de amortiguamiento modal en proporción a su energía de deformación flexionante relativa, asociada con la forma modal.

$$b_m = \frac{\sum_i P_i}{\sum_i P_i} \cdot b_{si} \quad (5)$$

$$P_i = \frac{L}{6(EI)_{si}} (M_{Ai}^2 + M_{Bi}^2 - M_{Ai} \cdot M_{Bi}) \quad (6)$$

donde :  $b_m$  = factor de amortiguamiento reducido para el modo  $m$

$L$  = longitud del elemento  $i$  de la estructura

$(EI)_{si}$  = rigidez del elemento  $i$  de la estructura equivalente

$M_{Ai}, M_{Bi}$  = momentos en los extremos del elemento  $i$  de la estructura equivalente para el modo  $m$  (Se obtiene realizando un análisis modal lineal con  $S_A = 1.0 g.$ )

### 3.3.3 FUERZAS DE DISEÑO Y DESPLAZAMIENTOS

Las fuerzas de diseño de los miembros individuales están basados en la siguiente fórmula :

$$F_i = \frac{1}{2}(F_{irss} + F_{iabs}) \quad (7)$$

donde:  $F$  : fuerza de diseño del elemento  $i$

$F_{irss}$ : raíz media cuadrática de los valores conocidos para cada modo

$F_{iabs}$ : suma de los valores absolutos de los valores conocidos para cada modo

Los valores de los momentos reales en los extremos de los miembros se obtienen a partir de los valores conocidos calculados para  $S_A = 1.0g$ , amplificados por la respectiva aceleración espectral con el valor de  $b$  adecuado.

Además para reducir el riesgo de la excesiva acción inelástica de las columnas, los momentos de diseño para estos elementos son amplificados por un factor de 1.2.

Asimismo, los desplazamientos se obtienen realizando un análisis modal lineal y siguiendo el mismo criterio anterior para considerar el efecto de cada modo. Debe recordarse que

$$X_{\alpha}^i = FPM_i \theta_{\alpha}^i \frac{SA_i}{w_i^2} \quad (8)$$

### 3.4 EJEMPLO DE APLICACION

Para ilustrar el método propuesto, analizaremos un pórtico de tres pisos y una cruzía, cuyas características están indicadas en la figura 3-3a.

Además consideraremos:

$$E = 210 \text{ Tn/cm} \quad (\text{Módulo de Elasticidad concreto})$$

$$A_{\text{máx}} = 0.3g \quad (\text{Máxima aceleración en la base})$$

a) Determinación de la estructura equivalente:

Estructura original:

$$I_c = \frac{1}{12}(60)(60)^3 = 1'080,000 \text{ cm}^4$$

$$I_v = \frac{1}{12}(45)(75)^3 = 1'582,030 \text{ cm}^4$$

Estructura agrietada:

$$I_c = 1'080,000/2 = 540,000 \text{ cm}^4 \quad \text{Se asume } I_c(\text{agriet.})/I_c(\text{orig}) = 1/2$$

$$I_v = 1'582,030/3 = 527,343 \text{ cm}^4 \quad \text{Se asume } I_v(\text{agriet.})/I_v(\text{orig.}) = 1/3$$

Estructura equivalente:

$$I_c = 540,000/1 = 540,000 \text{ cm}^4 \quad (\text{Se asume } u_{col} = 1)$$

$$I_v = 527,343/6 = 87,890 \text{ cm}^4 \quad (\text{Se asume } u_{vig} = 6)$$

Por tanto, los valores de momentos de inercia de la estructura equivalente son:

$$I_c = 540,000 \text{ cm}^4$$

$$I_v = 87,890 \text{ cm}^4$$

Asimismo, aplicando la ecuación 3 determinamos:

$$b_{sc} = 0.2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1}} \right] + 0.02 = 0.02$$

$$b_{sv} = 0.2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \right] + 0.02 = 0.14$$

b) Determinación de períodos y formas de modo:

Los períodos y formas de modo correspondientes son calculados para la estructura equivalente efectuando un análisis dinámico lineal.

- Cálculo de la matriz de rigidez

Trabajaremos con una matriz de rigidez reducida (en la que se ha considerado la influencia de los giros en los nudos). Esta matriz se obtiene aplicando fórmulas del análisis estructural y para el sistema de coordenadas indicado en la fig. 3-3c su valor es el siguiente:

$$[K]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} [K_{11}]_{3 \times 3} & [K_{12}]_{3 \times 6} \\ [K_{21}]_{6 \times 3} & [K_{22}]_{6 \times 6} \end{bmatrix} \text{ ----- matriz de rigidez completa}$$

Luego:

$$[K^*]_{3 \times 3} = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \text{ -- matriz de rigidez reducida}$$

Después de efectuar los cálculos indicados, obtenemos el valor de  $[K^*]$  con el que efectuaremos los análisis correspondientes:

$$[K] = [K^*] = \begin{bmatrix} 119.316 & -68.873 & 17.672 \\ -68.873 & 71.933 & -28.350 \\ 17.672 & -28.350 & 14.864 \end{bmatrix} \text{ en Tn/cm}$$

- Cálculo de la matriz de masa

$$W_{p1so} = 32^T \rightarrow m = W/g = 32/980 = 0.0326 \text{ Tn/cm /seg}^2$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0326 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0326 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0326 \end{bmatrix} \text{ en Tn/cm/seg}^2$$

- Cálculo de períodos, formas de modo y F.P.M<sub>i</sub>

Efectuando un análisis matricial y aplicando la ecuación de frecuencia  $| [K] - w^2[M] | = 0$ , encontramos los siguientes resultados:

Modo	w(rad/seg)	T(seg)	Nivel	Forma modo	F.P.M <sub>i</sub>
1	6.886	0.912	3	1.000	1.287
			2	0.591	
			1	0.193	
2	30.632	0.205	3	-0.766	0.474
			2	1.000	
			1	0.923	
3	73.051	0.086	3	0.242	0.315
			2	-0.737	
			1	1.000	

Nota: si trabajamos con el modelo cortante, el valor de  $[K]$  es el siguiente:

$$[K] = [K_{11}] = \begin{bmatrix} 151.465 & -75.733 & 0 \\ -75.733 & 151.465 & -75.733 \\ 0 & -75.733 & 75.733 \end{bmatrix} \text{ en Ton/cm}$$



c) Determinación de los factores de amortiguamiento suavizados (reducidos)  $b_m$

Inicialmente debemos hacer un análisis modal para calcular los cortantes en la base, las fuerzas sísmicas por piso y finalmente los momentos modales (relativos, considerando  $S_A = 1g$ ). Seguidamente aplicamos la ecuación 5 para determinar los correspondientes valores de  $b_m$ .

- Cálculo de respuesta para una aceleración espectral de  $1g$

Aplicaremos las siguientes fórmulas:

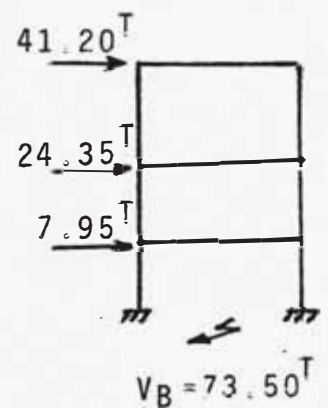
$$V_B^i = FPM_i \times (\sum m_\alpha \phi_\alpha^i) S_A \quad \text{----- cortante en la base}$$

$$F_K^i = V_B^i \frac{\phi_K^i m_K}{\sum \phi_\alpha^i m_\alpha} \quad \text{----- Fuerza sísmica de piso}$$

Luego, para cada modo tendremos los siguientes valores:

Modo 1  $V_B = (1.287)(0.0582)(980 \text{ cm/seg}^2) = 73.50^T$

$F_K = 73.50 \frac{\phi_K m_K}{\sum \phi_\alpha m_\alpha}$			
Nivel	$\phi_\alpha$	$\phi_\alpha \cdot m_\alpha$	F
3	1.000	0.0326	41.20
2	0.591	0.0193	24.35
1	0.193	0.0063	7.95
		0.0582	

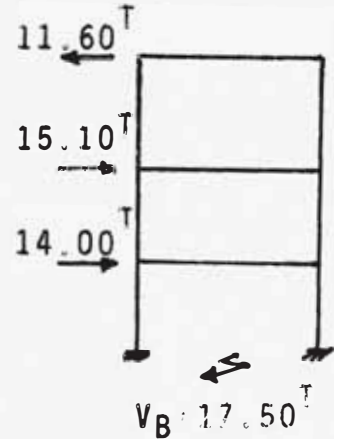


Modo 2

$$V_B = (0.474)(0.0377)(980 \text{ cm/seg}^2) = 17.50^T$$

$$F_K = 17.50 \frac{\phi_K m_K}{\sum \phi_\alpha m_\alpha}$$

Nivel	$\phi_\alpha$	$\phi_\alpha m_\alpha$	F
3	-0.766	-0.0250	-11.60
2	1.000	0.0326	15.10
1	0.923	0.0301	14.00
		0.0377	

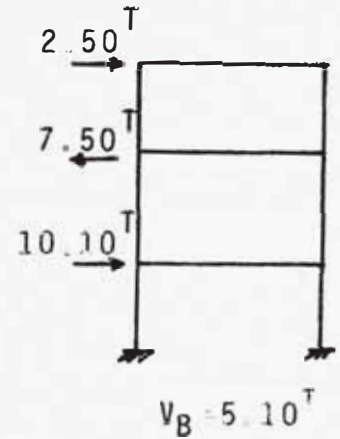


Modo 3

$$V_B = (0.315)(0.0165)(980 \text{ cm/seg}^2) = 5.10^T$$

$$F_K = 5.10 \frac{\phi_K m_K}{\sum \phi_\alpha m_\alpha}$$

Nivel	$\phi_\alpha$	$\phi_\alpha m_\alpha$	F
3	0.242	0.0079	2.50
2	-0.737	-0.0240	-7.50
1	1.000	0.0326	10.10
		0.0165	



Con estos valores conocidos de las fuerzas sísmicas por piso (para cada modo) realizamos un análisis estructural para obtener los valores de los momentos modales en cada elemento. Los resultados obtenidos pueden observarse en la fig. 3-3d.

- Cálculo de  $b_m$

Conocidos los valores de  $M_A$  y  $M_B$  para cada elemento (para cada modo), calculamos seguidamente los valores correspondientes de  $b_m$ . Para efectuar este cálculo utilizaremos el siguiente cuadro:

Modo	Elemento	Nivel	$M_A$ (Tn-m)	$M_B$ (Tn-m)	$P_i$ (Tn-m)	$\Sigma P_i$ (Tn-m)	$P_i / \Sigma P_i$
1	Viga	3	46.72	46.12	143.8860	441.6819	0.550
		2	52.33	52.33	180.5154		
		1	42.18	42.18	117.2805		
	Columnas	3	-21.26	-46.72	15.9226	360.9838	0.450
		2	-77.08	-31.07	43.7652		
		1	-156.18	34.90	301.2960		
						<u>802.6657</u>	
2	Viga	3	-4.35	-4.35	1.2474	1.8701	0.202
		2	-2.05	-2.05	0.2770		
		1	2.29	2.29	0.3457		
	Columnas	3	14.78	4.35	1.6789	7.3867	0.798
		2	6.96	-12.73	2.9013		
		1	-19.63	-9.25	2.8065		
						<u>9.2568</u>	
3	Viga	3	0.49	0.49	0.0158	0.0186	0.039
		2	-0.20	-0.20	0.0026		
		1	-0.06	-0.06	0.0002		
	Columnas	3	-3.63	-0.49	0.1129	0.4531	0.961
		2	4.42	3.83	0.1676		
		1	-4.06	-4.36	0.1726		
						<u>0.4717</u>	

Del cuadro anterior obtenemos:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3
$\Sigma P_{vigas} / \Sigma P_{vig+col}$	0.550	0.202	0.039
$\Sigma P_{vigas} / \Sigma P_{vig+col}$	0.450	0.798	0.961

Luego, los factores de amortiguamiento modales para las estructuras equivalente son :

$$b_1 = 0.14 \times 0.550 + 0.02 \times 0.450 = 0.086 \longrightarrow b_1 = 8.6\%$$

$$b_2 = 0.14 \times 0.202 + 0.02 \times 0.798 = 0.044 \longrightarrow b_2 = 4.4\%$$

$$b_3 = 0.14 \times 0.039 + 0.02 \times 0.961 = 0.025 \longrightarrow b_3 = 2.5\%$$

d) Determinación de las fuerzas de diseño :

Primeramente calculamos la aceleración espectral para cada modo, usando el factor de amortiguamiento adecuado (además se considera  $A_{m\acute{a}x} = 0.3g$ ).

Modo 1 :  $T = 0.912$  seg.

$$S_A(b = 2\%) = \frac{1.5 A_{m\acute{a}x}}{T} = \frac{1.5 \times 0.3g}{0.912} = 0.393g \quad (T > 0.4 \text{ seg})$$

$$S_A(b = 8.6\%) = \frac{8 \times 0.493g}{6 + 100 \times 0.086} = 0.27g$$

$$\therefore S_{A1} / g = 0.27$$

Modo 2 :  $T = 0.205$  seg.

$$S_A(b = 2\%) = 3.75 A_{m\acute{a}x} = 3.75 \times 0.3g = 1.125g \quad (0.15 \text{ seg} \leq T \leq 0.4 \text{ seg})$$

$$S_A(b = 4.4\%) = \frac{8 \times 1.125g}{6 + 100 \times 0.44} = 0.87g$$

$$\therefore S_{A2} / g = 0.87$$

Modo 3 :  $T = 0.086$  seg.

$$S_A(b = 2\%) = 2.5 \times T \times A_{m\acute{a}x} = 2.5 \times 0.086 \times 0.39g = 0.645g$$

$$S_A(b = 2.5\%) = \frac{8 \times 0.645g}{6 + 100 \times 0.025} = 0.61g$$

$$\therefore S_{A3} / g = 0.61$$



Entonces los momentos reales son calculados usando los valores de momentos indicados en la fig. 3-3d modificados por la adecuada aceleración espectral de diseño. Así obtenemos:

Modo	Elemento	Nivel	$M_A$ (Tn-m)	$M_B$ (Tn-m)
1	Viga	3	12.61	12.61
		2	14.13	14.13
		1	11.39	11.39
	Columnas	3	-5.74	-12.61
		2	-20.81	-8.39
		1	-42.17	9.42
2	Viga	3	-3.78	-3.78
		2	-1.78	-1.78
		1	1.99	1.99
	Columnas	3	12.86	3.79
		2	6.06	-11.08
		1	-17.08	-8.05
3	Viga	3	0.30	0.30
		2	-0.12	-0.12
		1	-0.04	-0.04
	Columnas	3	-2.21	-0.30
		2	2.70	2.34
		1	-2.48	-2.66

Finalmente, los momentos de diseño son calculados usando la ecuación 7, los resultados son los siguientes (Ver fig. 3-3e).

Elemento	N	Momentos Máximos (Tn-m)			$F_{irss}$ (Tn-m)	$F_{iabs}$ (Tn-m)	$\frac{1}{2}(F_{irss} + F_{iabs})$ (Tn-m)	$F_{diseño}$ (Tn-m)
		Modo 1	Modo 2	Modo 3				
Viga	3	12.61	-3.78	0.30	13.17	16.69	14.93	14.93
	2	14.13	-1.78	-0.10	14.24	16.03	15.14	15.14
	1	11.39	1.99	-0.04	11.56	13.42	12.49	12.49
Columnas	3	-12.61	12.86	-2.21	18.15	27.68	22.92	27.50
	2	-20.81	-11.08	2.70	23.73	34.59	29.16	34.99
	1	-42.17	-17.08	-2.66	45.58	61.91	53.75	64.50

El factor 1.2 es usado para las columnas únicamente para obtener los valores finales de momentos de diseño.

Se debe notar que el momento de diseño real (durante sismos) depende también de los factores de carga considerados necesarios en relación al sismo expresado, a la esperada calidad de la construcción y al nivel de esfuerzos de diseño.

e) Determinación de los desplazamientos laterales

Los desplazamientos laterales del pórtico son obtenidos realizando un análisis lineal modal de la estructura equivalente, con los apropiados factores de amortiguamiento  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  y las correspondientes aceleraciones espectrales.

Los valores así obtenidos (en cm.) pueden verse en el siguiente cuadro.

Nivel	$X_{\text{Modo1}}$	$X_{\text{Modo2}}$	$X_{\text{Modo3}}$	$X_{\text{rSS}}$	$X_{\text{abs}}$	$X_{\text{piso}}$	$X_{\text{entrep}}$	$X_{\text{ep/h}}$
3	7.18	-0.33	0.01	7.19	7.52	7.36	2.88	0.009
2	4.24	0.43	-0.03	4.26	4.70	4.48	2.84	0.009
1	1.39	0.40	0.04	1.45	1.83	1.64	1.64	0.005

Como se esperaba, el primer modo gobierna la respuesta.

Se considera además que la deflexión de piso del orden de 1/100 de la altura de piso durante sismos puede ser tolerable usando detalles estructurales sísmicos adecuados.



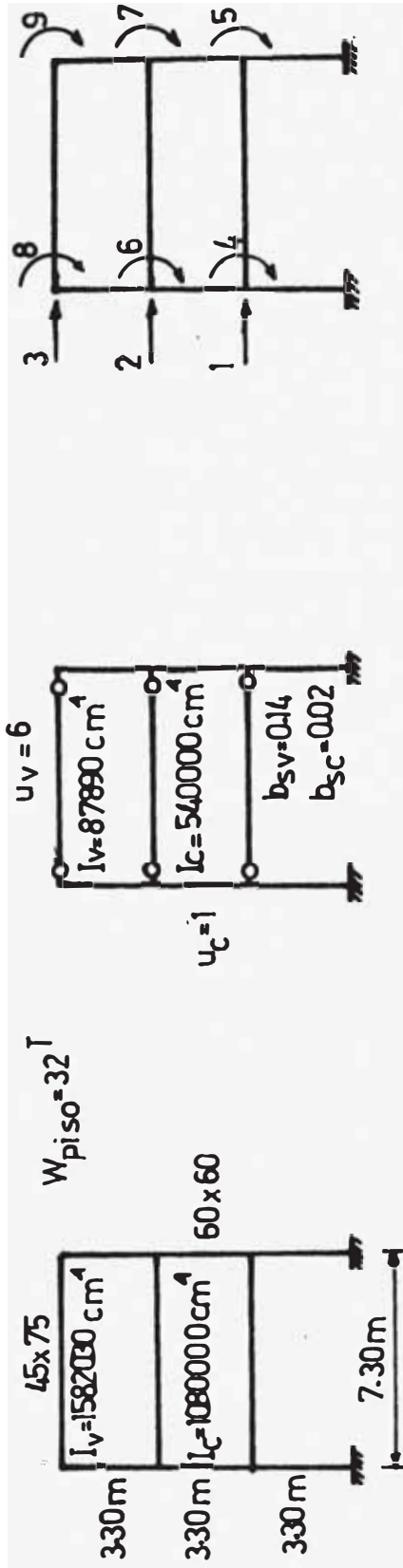


Fig. 3-3b : Estructura equivalente

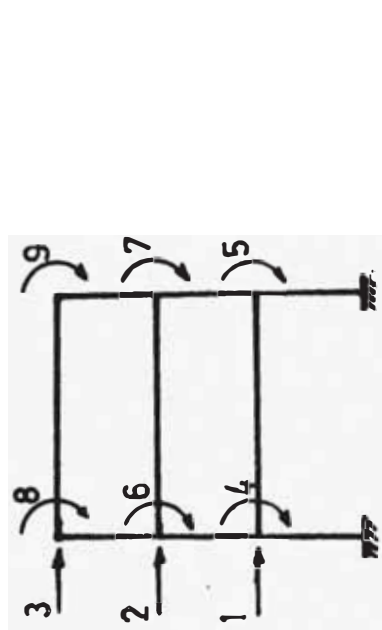


Fig. 3-3c : Sistema de coordenadas para calcular la matriz de rigidez reducida de la estructura equivalente.

Fig. 3-3a : Estructura original

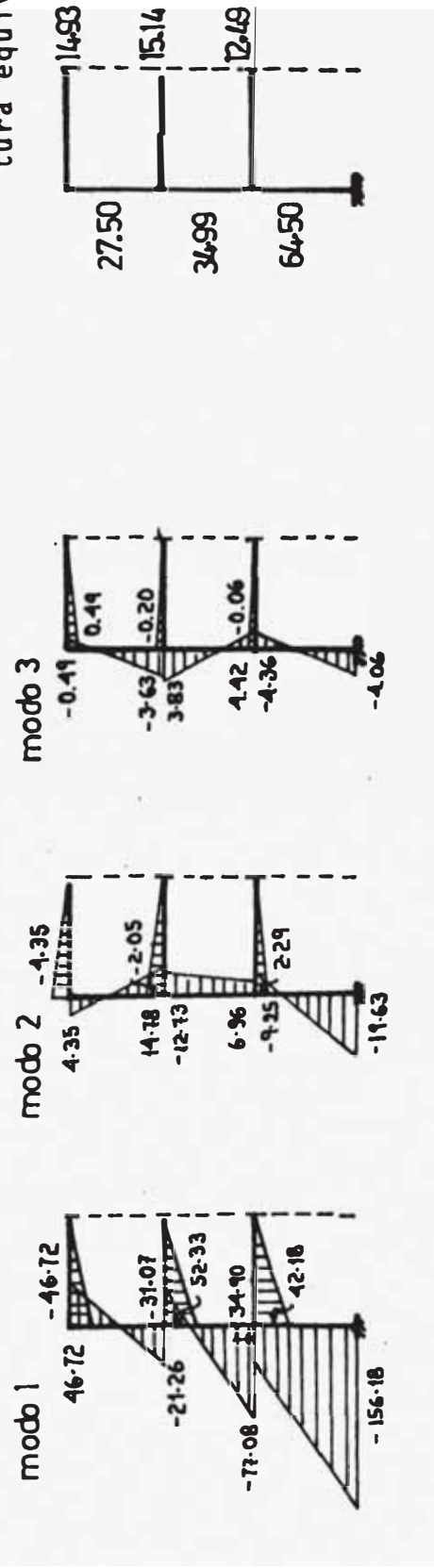


Fig. 3-3d : Momentos modales para la estructura equivalente para una aceleración espectral de 1.0 g. (T-m).

Fig. 3-3e : Momento de diseño (T-m)

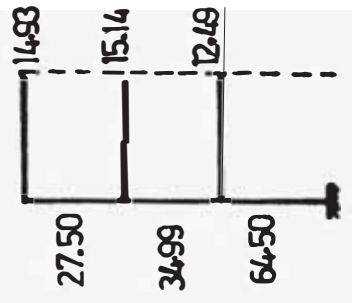


Fig. 3-3 : Datos del ejemplo de aplicación

## C A P I T U L O    I V

### ANALISIS INELASTICO DE EDIFICACIONES DE CONCRETO ARMADO EMPLEANDO PROGRAMAS DE COMPUTACION

#### 4.1 INTRODUCCION

La respuesta dinámica de estructuras durante movimientos sísmicos severos es el problema que ha concitado la atención de muchos investigadores en años recientes. Debido a la introducción de técnicas de computación en los pasados años se ha podido realizar numerosas investigaciones sobre la respuesta sísmica de estructuras en el rango tanto elástico como inelástico. Estas investigaciones empiezan con la idealización del modelo estructural, el cual con el desarrollo de la investigación y la acumulación de datos cada vez puede llegar a ser más complicado.

En este capítulo se presentará el método de análisis dinámico empleando el "modelo cortante" de la estructura, el cual es usado frecuentemente para simplificar el análisis inelástico de estructuras (consiste en un sistema masa-resorte con un grado de libertad por piso). El programa de computación empleado para aplicar este método de análisis está escrito en FORTRAN IV y es capaz de analizar estructuras hasta de 55 pisos; los resultados incluyen el cálculo de eigen values y eigen vectors así como análisis de res-

puesta tiempo-historia tanto para el caso de análisis lineal como no-lineal, además considera diversas condiciones de apoyo en la base. También explicaremos brevemente como se calculan los parámetros iniciales a usarse en el análisis y como trabaja el programa de computación empleado.

## 4.2 HIPOTESIS Y DETERMINACION DE LOS PARAMETROS INICIALES A USARSE EN EL ANALISIS (MODELO CORTANTE)

Un análisis riguroso requiere enorme cantidad de memoria y tiempo de computación. Con el objeto de efectuar un diseño sismo-resistente ó al evaluar la respuesta sísmica de edificios existentes es deseable contar con métodos simplificados de análisis. Con este propósito aquí desarrollamos el "modelo cortante" el cual en la práctica es exclusivamente usado cuando se requiere el análisis inelástico.

### 4.2.1 HIPOTESIS BASICAS DEL MODELO

La respuesta dinámica de una estructura de varios pisos es muy compleja. Teóricamente el movimiento sísmico del suelo induce en la estructura tres componentes de traslación y tres de rotación. Para reducir estas componentes de movimiento, de manera que se pueda obtener el modelo cortante, se consideran frecuentemente las siguientes hipótesis (1,9).

- 1) Los desplazamientos verticales son despreciables para fines de análisis.

2) El movimiento del suelo sólo ocurre en una dirección.

3) Los giros en los niveles de piso son despreciables.

Bajo estas condiciones la estructura puede ser modelada como un sistema masa-resorte con masas concentradas a nivel de piso unidas por resortes cortantes y con un grado de libertad por piso (fig. 4-1). Se observa entonces que la deformación por corte es la parte más importante en la respuesta.

El modelo cortante es probablemente bastante realístico para edificios típicos, al menos en la etapa preliminar de diseño. Para mejorar la precisión de los resultados se supone además que el modelo cortante, se puede aplicar a edificios con relación de rigideces de vigas a columnas entre 0.1 y 10 tal como lo demuestra Watabe (19). Es decir:

$$0.10 \leq p = \frac{\sum I_v/L_v(\text{piso})}{\sum I_c/L_c} \leq 10$$

$I_v, I_c$ : Inercia de vigas y columnas

$L_v, L_c$ : Longitud de vigas y columnas

$p$  : Relación de rigideces

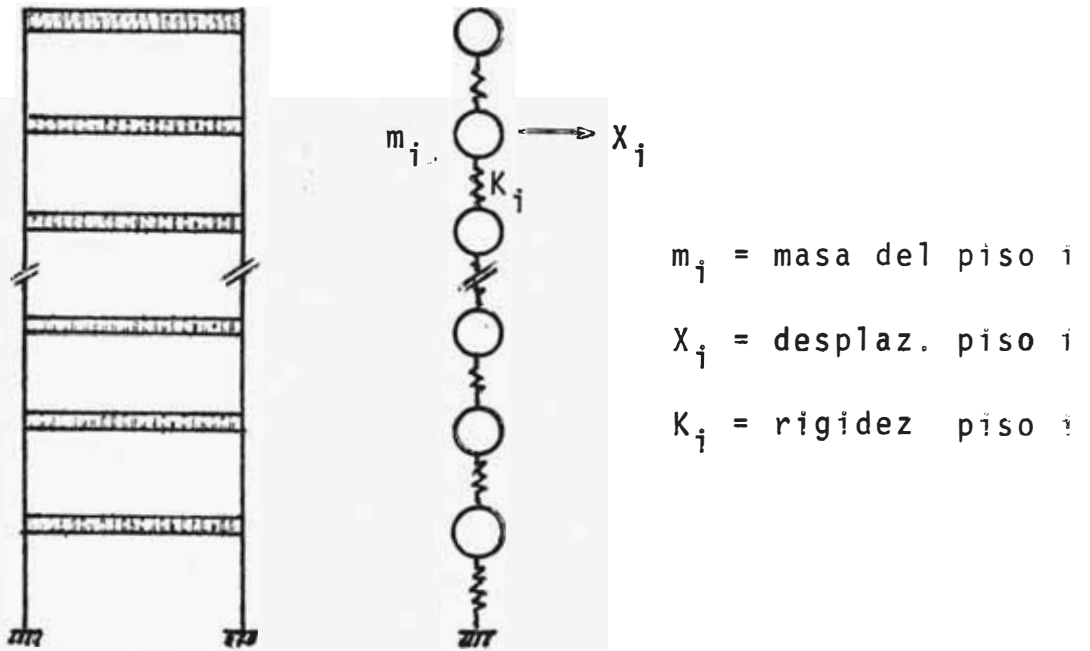


Fig. 4-1 : Modelo de edificio (Tipo Cortante)

#### 4.2.2 FUNCION DE RESISTENCIA

Una parte importante de este modelo de edificio es el caracter de la relación fuerza-deformación de los resortes (por piso). Se han hecho varias aproximaciones de este comportamiento, cada una no reclamando superioridad sobre el otro por muchas razones. Nosotros utilizaremos el modelo de resorte trilineal (fig. 4-2) el cual representa en forma bastante aproximada el comportamiento real de la estructura.

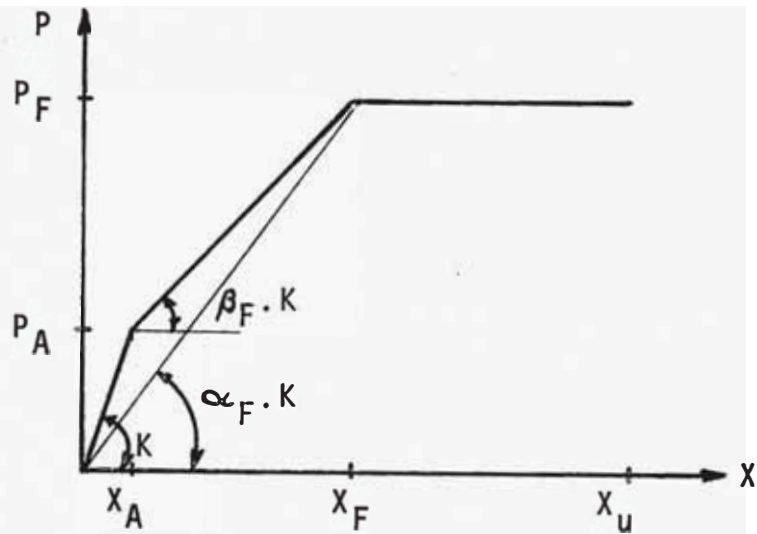


Fig. 4-2 : Curva trilineal de piso

En caso de estructuras de concreto armado, se deben determinar los siguientes parámetros para estimar la curva tri-lineal de piso:

- fuerza de corte de fluencia ----- ( $P_F$ )
- fuerza de corte de agrietamiento ---- ( $P_A$ )
- rigidez elástica ----- ( $K$ )
- rigidez elasto-plástica ----- ( $\beta_F K$ )

Hay varias alternativas para determinar estos parámetros, pero ninguno de ellos a pesar de lo sofisticado que sea, mejora la precisión del modelo cortante (20). Por esto, nosotros usaremos una técnica simple desarrollada por Muto, la cual permite hacer cálculos manuales. En este método, bastante conservador, se procede de la siguiente forma:



a) Cálculo de la fuerza de corte de fluencia ( $P_F$ )

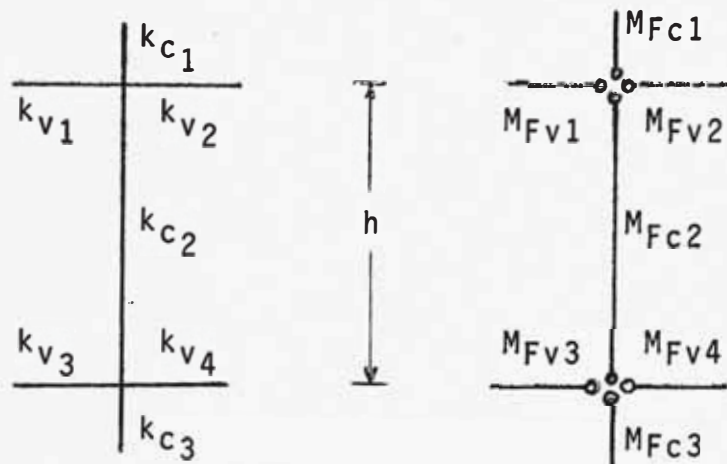
En cada piso se determina la suma de los momentos de fluencia de vigas y columnas para cada nudo.

1) Si  $\sum M_{F.col} < \sum M_{F.vig}$   $\longrightarrow$  falla columna

2) Si  $\sum M_{F.col} > \sum M_{F.vig}$   $\longrightarrow$  falla viga

En el primer caso la fuerza de corte de fluencia de piso es igual a la suma de los momentos de fluencia superior e inferior de todas las columnas del piso dividido entre la altura de piso.

En el segundo caso los valores de momentos de fluencia de vigas son distribuidos a las columnas en proporción a su rigidez elástica. Luego en cada nudo se compara este valor distribuido a la columna con su valor conocido  $M_{F.col}$ , y se adopta el menor valor. Entonces, la fuerza de corte de fluencia de piso es igual a la suma de estos momentos de fluencia superior e inferior de todas las columnas de piso dividido entre la altura de piso



Donde :  $k = I/L$

$M_F$  = Momento de fluencia que se calcula para cada elemento, aplicando las ecuaciones empíricas del capítulo II.

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_{Fv1} + M_{Fv2}) > (M_{Fc1} + M_{Fc2}) \Rightarrow M_{Fcs} = M_{Fcs} \\ (M_{Fv1} + M_{Fv2}) < (M_{Fc1} + M_{Fc2}) \Rightarrow M_{Fcs} = \text{Min} \left[ M_{Fc2}, (M_{Fv1} + M_{Fv2}) \frac{k_{c2}}{k_{c1} + k_{c2}} \right] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_{Fv3} + M_{Fv4}) > (M_{Fc2} + M_{Fc3}) \Rightarrow M_{Fci} = M_{Fc2} \\ (M_{Fv3} + M_{Fv4}) < (M_{Fc2} + M_{Fc3}) \Rightarrow M_{Fci} = \text{Min} \left[ M_{Fc2}, (M_{Fv3} + M_{Fv4}) \frac{k_{c2}}{k_{c2} + k_{c3}} \right] \end{array} \right.$$

$$P_F (\text{piso}) = \frac{M_{Fcs} + M_{Fci}}{h}$$

b) Cálculo de la fuerza de corte de agrietamiento ..( $P_A$ )

Se sigue el mismo procedimiento que el caso anterior, pero en este caso se trabajan con los valores de los momentos de agrietamiento de todos los elementos.

c) Cálculo de la rigidez elástica ..( $K$ )

En este caso se puede aplicar el método "D" del Dr. Muto o cualquier otra técnica de análisis elástico.

d) Cálculo de la rigidez elasto-plástica ..( $\beta_F K$ )

Como se conoce  $K$ , es suficiente calcular el valor  $\beta_F$  (de cada elemento) el cual es definida aplicando fórmulas empíricas (Cap II):

$$\beta_F = \frac{1 - M_A/M_F}{1 - \alpha_F M_A/M_F} \alpha_F$$

$\alpha_F$ : factor de reducción de rigidez

$M_A$ : momento agrietamiento

$M_F$ : momento fluencia

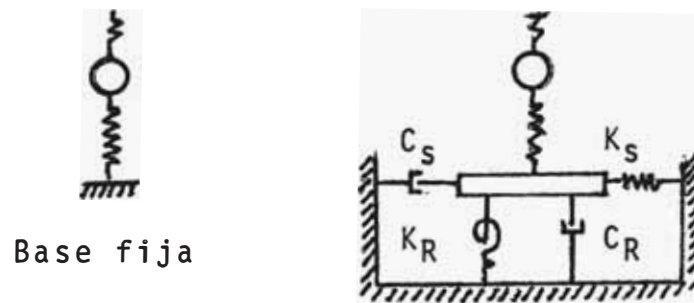
### 4.3 BREVE EXPLICACION DE LOS PROGRAMAS DE COMPUTACION

El programa de computación usado para el presente análisis dinámico es el programa FRAME 3 que fue escrito en lenguaje FORTRAN IV por Chiba y T. Hatori (Japón).

#### 4.3.1 BASE TEORICA DEL PROGRAMA

En este análisis las estructuras son tratadas sólo como "modelos cortantes", porque para las estructuras en general, la expansión de las ecuaciones llega a ser molesto, y la capacidad así como el tiempo de computación son demasiado grandes. El modelo es el mostrado en la fig. 4-1

Asimismo se debe agregar que el programa funciona para modelos dinámicos en que se considera los efectos de desplazamiento (Sway) y rotación (Rocking) en la base, aparte del caso general de base fija.



Con desplazamiento y rotación en la base

Fig. 4-3 : Condición de Apoyo

El programa calcula los valores de eigen value y eigen vector S usando el método de GIVENS-HOUSHOLDER. Para esto resuelve la siguiente ecuación de vibración libre no amortiguada:

$$[M] [\ddot{X}] + [K] [X] = [0]$$

El análisis dinámico considera la respuesta lineal y no lineal de estructuras. La ecuación de vibración del "modelo cortante" para el sistema de masa concentradas es la siguiente:

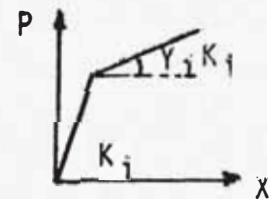
$$m_i \ddot{X}_i(t) + c_i [\dot{X}_i(t) - \dot{X}_{i-1}(t)] - c_{i+1} [\dot{X}_{i+1}(t) - \dot{X}_i(t)] + K_{wi} [X_i(t) - X_{i-1}(t) - E_i] - K_{w(i+1)} [X_{i+1}(t) - X_i(t) - E_{i+1}] + f_i = -m_i \ddot{X}_G(t)$$

donde:

$m_i$  : masa del piso  $i$

$c_i$  : amortiguación del piso  $i$

$K_{wi}$  : const. resorte del piso  $i$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Región elástica: } K_{wi} = K_i \\ \text{Región plástica: } K_{wi} = Y_i K_i \end{array} \right.$



$X_i$  : desplazamiento relativo respecto a la base (piso  $i$ )

$E_i$  : deflexión permanente del piso  $i$

$f_i$  : fuerza de fluencia del piso  $i$

En el caso de análisis lineal ( $E_i = f_i = 0$ ) se puede usar dos métodos:

- Método análisis modal..... Amortiguamiento proporcional  $[C] = \alpha [K]$
- Método Step by Step..... Amortiguamiento no proporcional

En el caso de análisis inelástico se trabaja con dos tipos de relación fuerza-deformación (bilineal y trilineal), y se emplea el método de aceleración lineal (Step by Step).

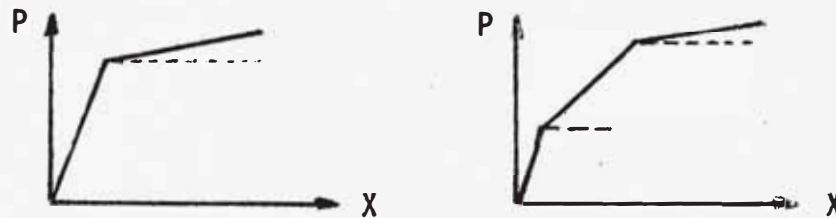


Fig. 4-4 : Relaciones fuerza-deformación consideradas.

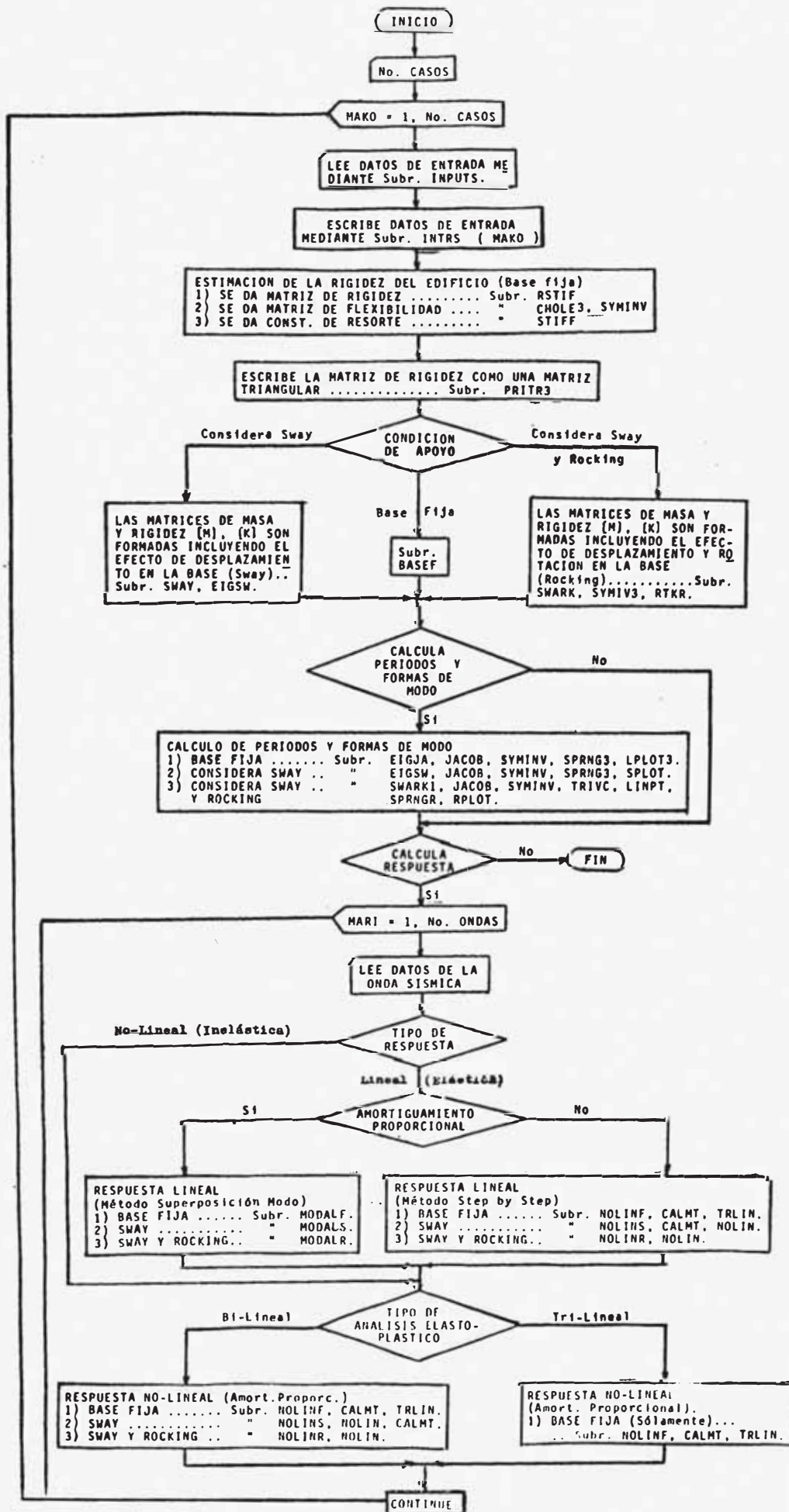
La respuesta sísmica es calculada empleando el método tiempo-historia, tanto para el análisis lineal como no lineal, para un movimiento sísmico del terreno dado.

El programa funciona para un número máximo de 55 pisos que es lo que permite usar el computador IBM 360 con que cuenta la UNI, además se ha tenido que usar el sistema de Overlay para poder trabajar con el programa en vista de que la memoria total que ocupa es demasiado grande.

Nota.- Mayor información de este programa puede encontrarse en el Departamento de Estructuras de la UNI, donde está preparado el programa para ser usado con fines de investigación.

#### 4.3.2 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA

EL PROGRAMA FRAME3 CONSTA DE UN PROGRAMA PRINCIPAL Y 33 SUBROUTINAS. EL DIAGRAMA DE FLUJO GENERAL ES EL SIGUIENTE :





Análisis Vigas

Nudo	$M_{VA}$	$M_{VF}$	$\alpha_{VF}$	$\lambda$	$M_{VA}$	$M_{VF}$	$\beta_{FV}$	
2	7.5	39.3	0.288	0.056	7.94	41.6	0.246	Pórtico Principal
3	7.0	32.4	0.230	0.056	7.42	34.3	0.190	
4	6.5	25.4	0.173	0.056	6.89	26.0	0.133	
5	6.5	25.4	0.173	0.056	6.89	26.0	0.133	
6	6.6	29.6	0.203	0.056	6.99	31.4	0.165	
7	7.0	33.5	0.261	0.056	7.41	35.5	0.218	
10	6.5	34.8	0.255	0.066	6.96	37.3	0.218	
11	6.3	31.0	0.254	0.066	6.75	33.2	0.214	
12	6.0	28.2	0.254	0.066	6.42	30.2	0.185	
13	6.0	28.2	0.224	0.066	6.42	30.2	0.185	
14	6.3	31.0	0.254	0.066	6.75	33.2	0.214	
15	6.5	34.8	0.255	0.066	6.96	37.3	0.218	

Análisis Columnas

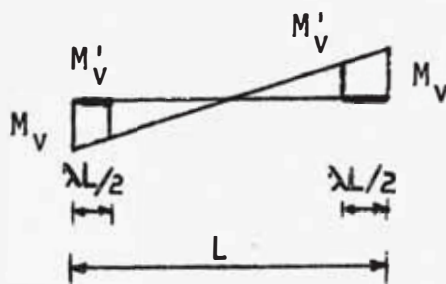
Nudo	$M'_{CA}$	$M'_{CF}$	$\alpha_{CF}$	$\nabla$	$M_{CA}$	$M_{CF}$	$\beta_{FC}$
2	15.9	52.5	0.193	0.150	18.70	61.76	0.143
3	11.2	30.0	0.138	0.150	13.20	35.29	0.091
4	9.2	25.0	0.127	0.150	10.82	29.41	0.084
5	10.5	27.5	0.153	0.150	12.35	32.35	0.100
6	13.4	37.5	0.166	0.150	15.76	44.12	0.113
7	23.0	62.5	0.220	0.150	27.06	73.53	0.151
10	14.6	40.0	0.153	0.137	16.92	46.35	0.103
11	10.2	27.5	0.127	0.137	11.82	31.86	0.084
12	8.2	23.8	0.127	0.137	9.50	27.58	0.084
13	9.2	25.0	0.127	0.137	10.66	28.97	0.084
14	12.0	32.5	0.127	0.137	13.90	37.66	0.086
15	30.6	56.3	0.191	0.137	35.46	65.24	0.130

P.P.

P.S.

Nota

1)



$$M_V = \frac{M'_V}{(1-\lambda)}$$

$$\lambda = (7/8) \cdot d$$

2) Los valores indicados anteriormente se han obtenido aplicando las ecuaciones empíricas indicadas en el capítulo II.

Análisis Pórtico Principal

a),b) Cálculo Cortantes (Tn)

Seguimos el criterio indicado anteriormente y encontramos lo siguiente:

Nudo	AGRIETAMIENTO			FLUENCIA		
	M <sub>VA</sub>	M <sub>CA</sub>	M <sub>A</sub>	M <sub>VF</sub>	M <sub>CF</sub>	M <sub>F</sub>
1		15.9	15.9		52.5	52.5
2	7.94	18.70	3.97	41.6	61.76	20.8
3	7.42	13.18	3.71	34.3	35.29	17.25
4	6.89	10.82	6.89	26.0	29.41	26.00
5	6.89	12.35	12.35	26.0	32.35	32.35
6	6.99	15.76	6.99	31.4	44.12	31.40
7	7.41	27.06	7.41	35.5	73.53	35.50
8		23.00	23.00		62.50	62.50
9		14.60	14.60		40.0	40.00
10	6.96	16.92	3.49	37.3	46.35	18.65
11	6.75	11.82	3.38	33.2	31.86	16.60
12	6.42	9.50	6.42	30.2	27.58	15.10
13	6.42	10.66	10.66	30.2	28.97	28.97
14	6.75	13.90	6.75	33.2	37.66	33.20
15	6.96	35.46	6.96	37.3	65.24	37.30
16		30.60	30.60		56.30	56.30

Luego :

Nivel	P <sub>A</sub> (Tn)	P <sub>F</sub> (Tn)	
1	28.73	97.99	P.
2	12.62	59.91	P.
3	17.11	61.09	
1	21.06	60.26	P.
2	7.84	40.29	S.
3	10.57	35.88	

c) Cálculo rigideces

Para el pórtico longitudinal analizado, y siguiendo la técnica mostrada en el Capítulo III encontramos la matriz de rigidez reducida de esta estructura cuyo valor es el siguiente:

$$[K] = \begin{bmatrix} 216 & -120 & 22.3 \\ -120 & 179 & -84.9 \\ 22.3 & -84.9 & 65.9 \end{bmatrix} \text{ Tn/cm}$$

Es suficiente dar como dato este valor al programa, pues éste calcula las constantes de resorte propias de cada piso conociendo  $[K]$ .

d) Cálculo rigidez elasto-plástica

Como se indicó anteriormente en este caso es suficiente calcular los valores  $\beta_F$  de cada elemento y de aquí se obtiene el valor  $\beta_F K$  del piso.

En este caso  $\beta$  se ha tomado como el promedio de los valores  $\beta_F$  de los elementos que intervienen en el análisis (con su  $M_{Fres}$  respectivo) por piso.

Así hemos obtenido:

$$\beta_1 = 0.189$$

$$\beta_2 = 0.205$$

$$\beta_3 = 0.147$$

Resumen datos para el programa

Nivel	m(Tn/cm/seg <sup>2</sup> )	h(cm)	[K]	P <sub>A</sub> (Tn)	P <sub>F</sub> (Tn)	β <sub>F</sub>
3	0.154	350	$[K] = \begin{bmatrix} 216 & \text{Simétrico} \\ -120 & 179 \\ 22.3 & -84.9 & 65.9 \end{bmatrix}$	17.11	61.09	0.147
2	0.154	350		12.62	59.91	0.205
1	0.154	350		28.73	97.99	0.189

El sismo empleado ha sido "El Centro NS 1940", se ha considerado una aceleración en la base de 300 gals y un amortiguamiento de la estructura de 5%.

Los resultados más importantes que se han obtenido son:

$$[K] = \begin{bmatrix} 216 & & \\ -120 & 179 & \\ 22.3 & -84.9 & 65.9 \end{bmatrix}$$

Piso	K(Tn/cm)	m(Tn/cm/seg <sup>2</sup> )
3	40.25	0.154
2	44.45	0.154
1	67.54	0.154



Modo	1	2	3
w(1/seg)	8.293	26.862	46.913
T(seg)	0.758	0.234	0.134
Forma modo	3	1.250	-0.329
	2	0.921	0.277
	1	0.409	0.387

Nivel	Análisis elástico		Análisis inelástico	
	Max desplaz. relativo (cm)	Max. cortante (Tn)	Max desplaz. relativo (cm)	Max. cortante (Tn)
3	2.35 (2.23)	99.97 (2.22)	-0.956 (2.07)	-20.25 (2.07)
2	3.37 (2.23)	154.36 (2.22)	-3.232 (2.03)	-39.48 (2.03)
1	2.48 (2.67)	171.173 (2.68)	2.49 (4.42)	55.12 (4.42)

Dividiendo los valores de los máximos cortantes elásticos entre los valores de los máximos cortantes inelásticos (ductilidad), obtenemos :

Nivel	Ductilidad
3	4.94
2	3.91
1	3.10

Nota : Los valores entre paréntesis indican el tiempo de ocurrencia en segundos.



RESULTADOS DEL PROGRAMA DE COMPUTACION

```
UU      UU      NNN      NN      IIIIIIIII
UU      UU      NNNN     NN      II
UU      UU      NN  NN    NN      II
UU      UU      NN  NN    NN      II
UU      UU      NN  NN    NN      II
UU      UU      NN  NN    NN      II
UUUUUUUU NN      NNN      IIIIIIIII
```

```
*****
*****
*****
***
***
***      ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS      ***
***
***
*****
*****
*****      NOMBRE DEL TRABAJO      *****
***
***
***      ESTRUCTURA DE TRES PISOS Y TRES CRUJIAS      ***
***
***
*****
*****
*****      CARACTERISTICAS DEL ANALISIS      *****
***
***
***      SOLUCION DEL 1 DE 1 CASOS DE CALCULO      (ONDA NO. = 1)      ***
***
***      INFORMACION DE RIGIDEZ      ***
***      LA MATRIZ DE RIGIDEZ ES DADA      ***
***
***      CONDICIONES DE APOYO      ***
***      BASE FIJA      ***
***
***      PROBLEMA DE VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS      ***
***      SE CALCULA EIGEN VALUF Y EIGEN VECTOR      ***
***
***      TIPO DE RESPUESTA      ***
***      RESPUESTA LINEAL Y NO LINEAL (TRI-LINEAL)      ***
***
***      TIPO DE AMORTIGUAMIENTO      ***
***      AMORTIGUAMIENTO PROPOPCIONAL      ***
***      LINEAL      ANALISIS MODAL      ***
***      NO LINEAL      STEP BY STEP      ***
***
***      FUENTE DE ENTRADA DE LA ONDA SISMICA      ***
***      LA ONDA SISMICA ES LFIDA DE TARJETAS      ***
***
*****
*****
*****
```

\*\*\*\*\* EIGEN VALUE AND EIGEN VECTOR \*\*\*\*\*

TRIANGULAR MATRIX

0.216E 03  
 -0.120E 03 0.179E 03  
 0.223E 02 -0.849E 02 0.659E 02

STORY NO.	SPRING CONST.	MASS
3	0.40248E 02	0.15400E 00
2	0.44451E 02	0.15400E 00
1	0.67540E 02	0.15400E 00

OMEGA (1/SEC) T (SEC) BETA  
 0.829E 01 0.758E 00 0.125E 01

N	MODE SHAPE	BETA*U
3	0.100E 01	0.125E 01
2	0.737E 00	0.921E 00
1	0.323E 00	0.404E 00



MODE = 1

OMEGA (1/SEC) T (SEC) BETA  
 0.269E 02 0.234E 00 -0.329E 00

N	MODE SHAPE	BETA*U
3	0.100E 01	-0.329E 00
2	-0.841E 00	0.277E 00
1	-0.118E 01	0.387E 00



MODE = 2

OMEGA (1/SEC) T (SEC) BETA  
 0.469E 02 0.134E 00 0.787E-01

N	MODE SHAPE	BETA*U
3	0.100E 01	0.787E-01
2	-0.252E 01	-0.198E 00
1	0.265E 01	0.209E 00



MODE = 3

STORY= 3 NMODE= 3 I WAVE= 2 PDATA= 1000  
 TAU= 0.010 SCALE= 300.000 HG= 0.050 PRITP= 2.500

STORY	MASS	HEIGHT
3	0.154	350.000
2	0.154	350.000
1	0.154	350.000

MODE	1	2	3
OMEGA	8.293	26.862	46.913
PERIOD	0.758	0.234	0.134
STORY			
3	1.250	-0.329	0.079
2	0.921	0.277	-0.198
1	0.404	0.387	0.209

\*\*\*\*\* THE RESULT OF RESPONSE (BASE FIXED) \*\*\*\*\*  
**ELASTIC ANALYSIS**

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC.**2)			
2.500	69.067			
STORY	ACCEL. (CM/SEC.**2)	VELOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	RFDISP. (CM)
3	184.581	-48.942	-4.319	-0.817
2	379.867	-41.297	-3.502	-1.755
1	371.206	-19.790	-1.747	-1.747
STORY	SHEAR FORCE (TON)		OVER TURNING MOMENT (TON*M)	
3	28.425		99.689	
2	86.925		403.726	
1	144.091		909.043	

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC.**2)			
5.000	134.035			
STORY	ACCEL. (CM/SEC.**2)	VELOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	RFDISP. (CM)
3	-269.234	19.956	2.796	0.832
2	-115.072	9.533	1.964	1.191
1	68.510	1.835	0.774	0.774
STORY	SHEAR FORCE (TON)		OVER TURNING MOMENT (TON*M)	
3	-41.462		-145.117	
2	-59.183		-352.258	
1	-44.633		-522.471	

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC.**2)			
7.500	-28.132			
STORY	ACCEL. (CM/SEC.**2)	VELOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	RFDISP. (CM)
3	-11.618	-30.450	0.455	0.142
2	6.721	-21.459	0.313	0.179
	-8.463	-8.826	0.134	0.134
STORY	SHEAR FORCE (TON)		OVER TURNING MOMENT (TON*M)	
3	-1.789		-6.262	
2	-0.754		-8.902	
1	-2.057		-16.103	

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC.**2)			
10.000	52.975			
STORY	ACCEL. (CM/SEC.**2)	VELOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	RFDISP. (CM)
3	33.922	-0.696	-0.925	-0.179
2	74.776	-1.406	-0.746	-0.384
1	68.667	-1.320	-0.361	-0.361
STORY	SHEAR FORCE (TON)		OVER TURNING MOMENT (TON*M)	
3	5.224		18.284	
2	16.739		76.872	
1	27.314		172.471	

MAX. GROUND ACCEL. (CM/SEC.**2)	TIME (SEC.)			
300.000	2.020			
STORY	MAX. ACCEL. (CM/SEC.**2)	TIME (SEC.)	MAX. VELOC. (CM/SEC.)	TIME (SEC.)
3	649.156	2.220	80.638	2.100
2	464.806	2.530	55.231	2.100
1	371.206	2.500	24.861	2.470
STORY	MAX. DISP. (CM)	TIME (SEC.)	MAX. RFDISP. (CM)	TIME (SEC.)
3	8.026	2.230	2.351	2.230
2	5.675	2.230	3.365	2.230
1	2.478	2.670	2.478	2.670
STORY	MAX. SHEAR FORCE (TON)	STORY SHEAR CO.	TIME (SEC.)	
3	99.970	0.662	2.220	
2	154.360	0.511	2.220	
1	171.173	0.378	2.680	
STORY	MAX. OVER TURNING MOMENT (TON*M)	TIME (SEC.)		
3	349.895	2.220		
2	890.154	2.220		
1	1411.983	2.220		

\*\*\*\*\* INPUT DATA \*\*\*\*\* WAVE= SISMO EL CENTRO NS 1940

STORY= 3 NL= 1 NTYPE= 1 ITRAT= 1 I WAVE= 2 NSUB= 20 NDATA= 1000  
 TAU= 0.010 SCALE= 300.000 DEL= 0.050 HG= 0.050 OMEGA= 8.293 PRITN= 2.500

STORY	MASS	HEIGHT	SPRING CONST.	YK	YK1	YQ	YQ1
3	0.154	350.000	40.248	0.147	0.0	17.110	61.090
2	0.154	350.000	44.451	0.205	0.0	12.620	59.910
1	0.154	350.000	67.540	0.189	0.0	28.730	97.990

\*\*\*\*\* THE RESULT OF RESPONSE (BASE FIXED) \*\*\*\*\*  
**INELASTIC ANALYSIS**

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC**2)				
2.500	69.067				
STORY	ACCFL. (CM/SEC.**2)	VFLOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	REDISP. (CM)	
3	-15.631	-4.722	-0.174	-0.156	
2	-16.797	-14.254	-0.018	0.395	
1	207.104	-12.814	-0.413	-0.413	

STORY	SHEAR FORCE (TON)	OVER TURNING MOMENT (TON*M)
3	-2.219	-7.767
2	5.766	12.414
1	-16.464	-45.210

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC**2)				
5.000	134.035				
STORY	ACCFL. (CM/SEC.**2)	VELOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	REDISP. (CM)	
3	-54.968	6.916	0.695	0.481	
2	-9.149	0.085	0.214	-0.447	
1	104.694	-7.223	0.661	0.661	

STORY	SHEAR FORCE (TON)	OVER TURNING MOMENT (TON*M)
3	5.150	18.025
2	5.957	38.874
1	-0.366	37.592

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC**2)				
7.500	-28.132				
STORY	ACCFL. (CM/SEC.**2)	VELOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	REDISP. (CM)	
3	23.654	-0.862	0.513	-0.019	
2	50.776	-2.298	0.532	0.039	
1	27.386	1.026	0.493	0.493	

STORY	SHEAR FORCE (TON)	OVER TURNING MOMENT (TON*M)
3	-4.340	-15.190
2	-9.680	-49.071
1	-16.516	-106.876

TIME (SEC.)	ACC. GROUND (CM/SEC**2)				
10.000	52.975				
STORY	ACCFL. (CM/SEC.**2)	VELOC. (CM/SEC.)	DISP. (CM)	REDISP. (CM)	
3	-43.383	-3.335	1.195	0.220	
2	-34.927	-5.289	0.976	0.457	
1	31.808	-4.240	0.519	0.519	

STORY	SHEAR FORCE (TON)	OVER TURNING MOMENT (TON*M)
3	5.733	20.065
2	12.606	64.187
1	10.599	101.283

MAX. GROUND ACCFL. (CM/SEC.**2)	TIME (SEC.)
300.000	2.020

STORY	MAX. ACCFL. (CM/SEC.**2)	TIME (SEC.)	MAX. VELOC. (CM/SEC.)	TIME (SEC.)
3	140.958	2.030	-40.538	1.880
2	173.533	2.560	-36.974	1.880
1	378.064	2.280	14.584	2.360

STORY	MAX. DISP. (CM)	TIME (SEC.)	MAX. REDISP. (CM)	TIME (SEC.)
3	5.918	4.460	-0.956	2.070
2	5.214	4.450	-3.232	2.030
1	2.493	4.420	2.493	4.420

STORY	MAX. SHEAR FORCE (TON)	STORY SHEAR CO.	TIME (SEC.)
3	-20.250	-0.134	2.070
2	-39.482	-0.131	2.030
1	55.124	0.122	4.420

STORY	MAX. OVER TURNING MOMENT (TON*M)	TIME (SEC.)
3	-70.876	2.070
2	-206.252	2.030
1	373.534	4.420

## C A P I T U L O   V

### DISCUSION DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se ha hecho un planteamiento general y se ha descrito en forma breve algunas de las técnicas más conocidas de análisis inelástico de estructuras, especialmente de concreto armado. Ellas difieren en la aproximación básica para idealizar el comportamiento histerético de los miembros estructurales y en el grado de sofisticación en la formulación de la solución de las técnicas propuestas. Estos modelos requieren del uso de la computadora debido a lo laborioso de los cálculos que se deben realizar en cada caso, y por lo tanto generalmente se limita su uso a estructuras especiales, ya que para estructuras importantes generalmente se utilizan métodos elásticos de análisis tiempo-historia y para edificaciones comunes se prefiere usar métodos cuasi-estáticos que generalmente están incluidos en los Códigos de Diseño sismo-resistentes.

Se ha tratado de considerar modelos estructurales representativos de diseño en nuestro medio e igualmente datos característicos de los movimientos sísmicos del terreno.

Se observa que el método riguroso de análisis inelástico permite determinar de una manera bastante real el comportamiento dinámico de la estructura (mecanismo de colapso) en un intervalo de tiem-

po considerado y para un movimiento sísmico dado.

En el caso del método simple de análisis se ha permitido una respuesta esencialmente elástica en las columnas y se ha dejado que la energía sísmica sea disipada en forma de deformación plástica por las vigas, lo cual parece ser una manera efectiva de conseguir un diseño sismo-resistente en edificios altos. De esta manera se puede evitar las fuerzas excesivas en las columnas.

Para la determinación de los elementos de la matriz de rigidez del sistema masa-resorte se ha considerado la influencia de la flexión, al menos en el rango elástico, al trabajar con matrices de rigideces reducidas que permitan la interacción viga-columna, y se ha visto como éstas matrices difieren algunas veces muy apreciablemente con el valor de las matrices de rigideces que consideran únicamente la influencia de corte, lo que naturalmente influye en el cálculo de los períodos y formas de modo de vibración. Así, se tiene que los períodos fundamentales de los modelos cortantes tradicionales son menores que aquellos de los modelos cortantes en que se ha hecho un refinamiento para tener en cuenta la flexión de vigas, a causa del error involucrado en la determinación de la rigidez de corte elástica.

Al analizar la estructura como un modelo cortante se observa que los parámetros que sirven para determinar el comportamiento tri-lineal por piso de la estructura de concreto armado analizada, dependen del grado de refuerzo, del tipo de concreto empleado, así como de las características mismas de la sección transversal



de los elementos estructurales.

Del análisis efectuado, se ve que los pórticos típicos del modelo considerado con vigas de pisos comunes fallan en la mayoría de los casos por falla tipo viga-débil, admitiéndose que hay también varios pórticos que fallan en algunos casos por falla tipo columna-débil, ó falla mixta.

Los resultados de la estructura analizada de 3 pisos y 3 cru-  
jias, demuestran cómo un sismo particular puede afectar un modelo específico de estructuras, y es improbable deducir de estos resultados el comportamiento de otros sistemas estructurales para el mismo movimiento sísmico. Así mismo, los resultados en el comportamiento del modelo son válidos para este sismo ú otros similares y no se puede predecir su comportamiento para otros sismos de características diferentes.

Analizando los resultados del análisis inelástico del modelo considerado, se aprecia que sus desplazamientos son menores a los correspondientes a la fluencia, estando por lo tanto en la zona comprendida entre el punto de agrietamiento y el punto de fluencia del modelo (en cada nivel). Este resultado concuerda con el criterio japonés, que considera que una estructura analizada para un sismo moderado (300 gals) no debe llegar al punto de fluencia, esperándose sí, que para sismos con aceleraciones mayores en la base se pueda sobrepasar el límite de fluencia. Este criterio de análisis y diseño es el que en los últimos años está ganando mayor aceptación por los investigadores.

Es interesante observar que en la estructura analizada los desplazamientos máximos obtenidos por un análisis elástico tiempo-historia son del mismo orden de magnitud que los obtenidos por un análisis inelástico-tri-lineal. Estos resultados son compatibles con el criterio de igualdad de desplazamientos, de Newmark.

Se ha hecho un cálculo aproximado del coeficiente de ductilidad de la estructura analizada dividiendo los valores de los cortantes máximos elásticos entre los cortantes máximos inelásticos, y se observa que los valores calculados de ductilidad varían en cada nivel de la estructura (es mayor en los pisos superiores) y no son constantes tal cómo se plantea en los códigos corrientes de diseño. Este valor además de las propiedades estructurales depende de la intensidad del sismo dado. O sea, en las normas sísmicas aparte de ver el criterio de estructuración se debe tener en cuenta la ubicación de los elementos en elevación.

Debe aclararse que generalmente se considera como definición de ductilidad a la relación entre el máximo desplazamiento y el desplazamiento de fluencia de la estructura, lo que es bastante visual cuando se considera tipos de relación fuerza-deformación bilineales. En cambio en caso de considerar curvas tri-lineales en los que hay una zona bastante amplia entre el agrietamiento y la fluencia, esta definición no es muy clara, por esto sería mejor considerar una ductilidad que esté definida por la relación entre la máxima fuerza elástica y la máxima fuerza inelástica.

La respuesta de estructuras de concreto armado durante movimientos sísmicos severos es influenciada por dos fenómenos básicos: la reducción de la rigidez y el aumento en la capacidad de disipación de energía. Cuando el sismo excita la estructura, para mayores desplazamientos su rigidez aumenta y su capacidad de absorción de energía aumenta. Ambos efectos pueden ser relacionados con los desplazamientos obtenidos.

Se debe tener en cuenta que los modos de mecanismo de falla bajo cargas estáticas y dinámicas son diferentes y pueden variar de acuerdo a la distribución de fuerzas laterales o tipos de excitación.

En el análisis también debe temerse en cuenta el tipo de relación esfuerzo-deformación considerada, puesto que los resultados obtenidos varían con el tipo de relación asumida. Se ha visto que en la mayoría de los casos la curva tri-lineal da mejores resultados que la curva bi-lineal. También es necesario considerar el efecto del comportamiento histerético de los miembros estructurales

Considerando que actualmente hay infinidad de edificios muy altos en zonas sísmicas densamente pobladas, el riesgo de pérdidas de vidas y los riesgos económicos son demasiado graves. Por esto para mejorar el nivel de conocimientos acerca de **comportamiento** de la estructura durante sismos severos, se hace necesario realizar ensayos para ver la verdadera capacidad de absorción de energía de los sistemas estructurales usuales en nuestro medio, según

el estado de arte del análisis sísmico. Las herramientas para tales análisis constantemente son refinadas y mejoradas y se ve que hay un progreso constante en estas investigaciones.

Hay un buen conocimiento acerca del comportamiento dinámico de estructuras de concreto armado, sin embargo este conocimiento es muy pobre ó no existe cuando se trata de estructuras hechas con otros materiales. Por tanto es necesario estudiar y conocer también el comportamiento dinámico de las construcciones tradicionales (albañilería, madera, adobe, etc.) que son muy usadas en nuestro medio, y que en varios casos han fallado durante sismos severos. Esto puede lograrse, si aprovechamos los estudios que actualmente se están realizando con estos materiales en nuestro país, puesto que una vez que estén bien definidas sus características, se les puede analizar aplicando los conocimientos anteriores, ya que los métodos propuestos son generales y se pueden extender a diversos tipos de sistemas estructurales.

Al estudiar una estructura, generalmente se le trata como un arreglo de pórticos planos independientes (en la dirección del sismo), y no se considera la interacción entre los mismos elementos de un pórtico y entre pórtico y pórtico, es decir, no se puede conocer con certeza su grado de monolitismo como conjunto estructural, lo que naturalmente influenciará en su comportamiento durante un sismo severo.

Otros tópicos de análisis para futuros estudios, podrían ser

los siguientes:

- Influencia de la flexión bi-axial, debido a que la excitación sísmica generalmente ocurre en dos direcciones.
- Efecto de la velocidad con que se incrementa la fuerza-sísmica, así como los cambios de dirección ocurridos.
- Efecto de la fuerza axial.
- Efecto de la rigidez de losa del techo.
- Efecto de los muros de corte.
- Efecto de la variación de rigidez en la variación de ductilidad.
- Influencia del modo de vibración elástica en la respuesta inelástica

## BIBLIOGRAFIA

1. J.E. Isbell and J.M. Biggs  
Inelastic Design of Building Frames To Resist Earthquakes.  
M.I.T. - S.D.D.A. - Report No. 12, 1974
2. H. Umemura, H. Aoyama, and H. Takizawa  
Analysis of the Behavior of Reinforced Concrete Structures  
During Strong Earthquakes Based on Empirical Estimation of  
Inelastic Restoring Force Characteristics of Members.  
Fifth World Conference on Earthquake Engineering, Rome 1973.
3. Haruo Takizawa  
Non-Linear Models for Simulating The Dynamic Damaging pro-  
cess of Low-Rise Reinforced Concrete Buildings During Seve-  
re Earthquakes, Earthquake Engineering and Structural Dyna-  
mics, Vol. 4, 1975.
4. Hiroyuki Aoyama  
Nonlinear Response Analysis of Reinforced Concrete Structu-  
res. A note for the Lecture at Fourth Regional Seminar on  
Earthquake Engineering, September 13-25, 1976, Istanbul, Tur-  
key.
5. Haruo Takizawa  
Notes on Some Basic Problems in Inelastic Analysis of Pla-  
nar R/C Structures.  
Trans. of A.I.J., No. 240, Feb. 1976.
6. R.W. Clough, K.L. Benuska & E.L. Wilson  
Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings.  
Proc. of III-WCEE, New Zealand, 1965. 1
7. R.W. Clough, E.L. Wilson & I.P. King  
Large Capacity Multistory Frame Analysis Programs  
Procc. of ASCE, Vol. 89, ST4, 1963.



8. Haruo Takizawa.  
Análisis Inelástico de Estructuras de C.A. (publicación en Japonés) Concrete Journal, Vol. 11, No. 2, June 1973, Japan Concrete Institute.
9. J. Ferry Borges and A. Ravara  
Earthquake Engineering  
Lisboa, November 1969.
10. N.M. Newmark.  
A Method of Computation for Structural Dynamics.  
Proc. of ASCE, Vol. 85, EM3, 1959.
11. E.L. Wilson, I. Farhoomand and K.J. Bathes  
Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures.  
Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.1, 1973.
12. K.J. Bathe and E.L. Wilson  
Stability and Accuracy Analysis of Complex Structures.  
Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.1, 1973.
13. Polat Gulkan and Mete A. Sozen  
Inelastic Responses of Reinforced Concrete Structures To Earthquake Motions.  
ACI JOURNAL, December 1974.
14. Akenori Shibata and Mete A. Sozen  
The Substitute Structure Method for Earthquake-Resistant Design of Reinforced Concrete Frames.  
University of Illinois, October 1974.
15. Akenori Shibata and Mete A. Sozen  
Use of Linear Models in Design To Reflect The Effect of Non-linear Response.  
Review, University of Hawaii, Honolulu, Hawaii, August 18-20, 1975.
16. N.M. Newmark and E. Rosenblueth  
"Fundamentals of Earthquake Engineering"  
Prentice Hall, 1971.

17. Shunsuke Sugano and Itsuji Koreishi  
An Empirical Evaluation of Inelastic Behavior of Structural  
Elements in Reinforced Concrete Frames Subjected to Lateral  
Forces.  
Proc. V-WCEE, Rome 1973.
  
18. Hajime Humemura and Hiroyuki Aoyama  
Evaluation of Inelastic Seismic Deflection of Reinforced  
Concrete Frames Based on the Tests of Members.  
Proc. N WCEE, Japan 1969.
  
19. Makoto Watabe  
Aseismic Structural Systems for Buildings.  
Technocrat, Vol. 7.
  
20. Hiroyuki Aoyama  
Simple Non-Linear Models for the Seismic Response of R.C.  
Buildings.  
Review, Honolulu, Hawaii, 18-20, August, 1975.