Universidad Nacional de Ingenieria
Facultad de Ciencias
Sección de Post-grado y Segunda Especialización Profesional

Tesis para Optar el Grado de Maestro en Ciencias, Mención : Matemática Aplicada

Titulada:

Correspondencias y sus Aplicaciones

Presentado Por:
Eladio Teófilo Ocaña Anaya

Lima - Perú
2002

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio del análisis de correspondencias que bajo ciertas hipótesis esto repercute como una extención del análisis matamático clásico; en particular se estudia un resultado equivalente al teorema de la función implícita, cuya importancia es amplia por ejemplo cuando las restricciones de un problema de minimización forman un sistema de desigualdades. También describimos algunas condiciones impuestas a las funciones para la obtención del conjunto de puntos mínimos mediante límites de correspondencias.

Contenido

Introducción

En este trabajo haremos un estudio de aplicaciones punto a conjunto en espacios de Banach a los cuales llamaremos "correspondencias" teniendo como punto de partida el análisis matemático para aplicaciones punto a punto. Tratando que este trabajo sea autosuficiente, iniciamos el primer capítulo con las notaciones y definiciones que serán usadas a lo largo de este trabajo.
En el segundo capítulo hacemos un análisis de correspondencias iniciando con límites de sucesiones que convergen en el dominio, para luego definir la semicontinuidad superior e inferior de correspondencias. Estos conceptos no son los únicos que vamos a introducir, así que nuestro aporte es presentarlo dentro de una teoría que imita al análisis real clásico , en este capítulo también consideramos algunos ejemplos de correspondencias basado en los conos contingentes, conos tangente de Clarke y la variante de Rockafellar para el cono normal de Clarke. Con estos ejemplos sugerimos que los problemas donde el uso de estos conos es fundamental, pueden ser enfocados usando correspondencias.
En el tercer capítulo, presentamos una versión del teorema de la correspondencia implícita análogo al teorema de la función implícita para funciones.
En el cuarto capítulo comentamos algúnas aplicaciones con respecto al capítulo tres.
Finalmente en el capítulo cinco, iniciamos el estudio del problema de optimización clásica y presentamos resultados respecto a la existencia de soluciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo consideraremos las notaciones y definiciones que serán usadas en el desarrollo de este trabajo.

1.1 Notaciones y Conceptos Básicos

Sea X un espacio de Banach y $K \subset X$. Sabemos por el análisis clásico que en este tipo de espacios existen más de una topología, entre ellas tenemos:

- La topología fuerte, aquella que es inducida por la norma.
- La topología débil, aquella que es inducida por todas las funcionales lineales y contínuas.

En este trabajo sólo trataremos con la topología fuerte, es decir que todos los conceptos topológicos son dados en esta topología, por ejemplo "A es abierto" significa que A es abierto en la topología fuerte.

- X, Y, Z denotarán espacios de Banach, salvo que se diga lo contrario.
- Denotaremos por $B_X = B$ para la bola unitaria cerrada de X, es decir:

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

- Denotaremos por $cl(K)$, la clausura del conjunto K. Es fácil probar que $cl(K)$ es el menor conjunto cerrado que contiene al conjunto K, es decir :

$$cl(K) = \bigcap\{F \supset K : F \text{ es cerrado}\}$$

- Denotaremos por $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$, al espacio de todas las funcionales lineales $f : X \to \mathbb{R}$.

- Denotamos por X^*, al espacio dual topológico de X, es decir:

$$X^* := \{f \in \mathcal{L}(X;\mathbb{R}) : f \text{ es contínua}\}$$

- Denotaremos por B_{X^*} para la bola unitaria cerrada de X^*, es decir:

$$B_{X^*} := \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$$

- Si $f \in X^*$. Denotaremos por $\langle f, x\rangle = f(x)$, al producto dual de f en x.

- Denotaremos por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, a la recta real extendida.

- Denotaremos por $\mathbb{R}^+$, al conjunto de todos los números reales no negativos.

- Sean x, y elementos de X. Denotaremos por $[x, y]$, al segmento de x a y, es decir:

$$[x, y] := \{z = \lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in \mathbb{R}^+ \ , \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

- Denotaremos por $int(K)$, al interior del conjunto K, es decir:

$$int(K) := \{x \in K : \text{existe una vecindad } V \text{ de x tal que } V \subset K\}$$

  Es fácil ver que $int(K)$ es el mayor conjunto abierto contenido en el conjunto K, es decir:

$$int(K) := \bigcup\{A \subset K : A \text{ es abierto}\}$$

- Denotaremos por Co(K), la cápsula convexa del conjunto K, es decir:

$$co(K) := \{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : (\lambda_i, x_i) \in \mathbb{R}^+ \times K \,; i = 1, ..., n \,; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \,; n \in \mathbb{N}\}$$

  Es fácil probar que $co(K)$ es el menor conjunto convexo que contiene al conjunto K, es decir:

$$co(K) := \bigcap\{H \supset K : H \; es \; convexo\}$$

- Sea $x \in X$. Denotaremos por $[x, K]$, la cápsula convexa de $\{x\} \cup K$

- Sea $M \subset X$. Denotaremos por $[M, K]$, la cápsula convexa de $M \cup K$

- Denotaremos por K^c, al complemento del conjunto K, es decir:

$$K^c := \{x \in X : x \notin K\}$$

- Un subconjunto K de X es absorbente cuando $X = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda K$

- Un punto s está en el núcleo de K (denotado por $s \in core(K)$) cuando $K - s$ es absorbente.

- Sea $K \subset X$ y $x \in clK$. Denotaremos por $x' \to_K x$ la convergencia a x de elementos que están en K.

- Sean $x, y \in X$. Denotaremos por $d(x, y)$, la distancia de x a y, es decir:

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

- Sea $x \in X$. Denotaremos por $d(x, K)$, la distancia de x al conjunto K, es decir:

$$d(x, K) := \inf_{y \in K} d(x, y)$$

  Por convención, consideraremos

$$d(x, \emptyset) = +\infty$$

- Denotaremos por $B(K, r)$, la bola cerrada de radio $r > 0$ alrededor del conjunto K, es decir:

$$B(K, r) := \{x \in X : d(x, K) \leq r\}$$

- Denotaremos por $fron(K)$, la frontera del conjunto K, es decir:

$$fron(K) := cl(K) \setminus int(K) := \{x \in cl(K) : x \notin int(K)\}$$

Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

- Denotaremos por $supp(f)$ el soporte de la función f, es decir :

$$supp(f) := cl\{x \in X : f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

- Diremos que f es una función "campana", si f es una función real acotada tal que $supp(f)$ es acotado y no vacío.

- Denotaremos por $\liminf_{x' \to x} f(x')$, al límite inferior de la función f en el punto x.
- Denotaremos por $\limsup_{x' \to x} f(x')$, al límite superior de la función f en el punto x.
- Denotaremos por $\mathrm{Dom}(f)$, al dominio efectivo de f, es decir:
$$D(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$
- Denotaremos por $\mathrm{epi}(f)$, al epígrafo de la función f, es decir:
$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$
- Denotaremos por $L_f(\lambda)$, al subnivel de f en el nivel $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir:
$$L_f(\lambda) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$$
- Se dice que $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es una cota inferior de f sobre un conjunto E si $\alpha \leq f(x)$, $\forall x \in E$.
- Se dice que $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es la máxima cota inferior de f sobre un conjunto E si $\alpha = \inf_{x \in E} f(x)$.
- Sea $M \subset X$. Denotamos por $f|_M$, a la restricción de f en M, es decir:
$$f|_M : M \to \overline{\mathbb{R}}$$

Definición 1.1.1 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que la función f es semicontinua inferior (s.c.i) en X si para cada $x \in X$, se tiene:
$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x).$$

Proposición 1.1.1 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces:

1. f es s.c.i si y sólo si el *epi* f es cerrado en $X \times \mathbb{R}$.
2. f es s.c.i si y sólo si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $L_f(\lambda)$ es cerrado.
3. Si f_1 y f_2 son s.c.i, entonces $f_1 + f_2$ es s.c.i.
4. Si $(f_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones s.c.i, entonces la función f definida por
$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$
es s.c.i.
5. Sea E un conjunto compacto y f una función s.c.i en cada punto de E, entonces f alcanza su cota inferior en E.

Demostración: ver [1].

1.2 Elementos del Análisis Convexo

Definición 1.2.1 Sea C un subconjunto de X. Diremos que C es un conjunto convexo, si:

$$\forall\, x, y \in C \;;\; [x, y] \subseteq C$$

Definición 1.2.2 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f es una función convexa si $\forall\, x,y \in X$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{+}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Definición 1.2.3 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f es una función estrictamente convexa si $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{+}$ con $0 < \lambda < 1$ se tiene que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Proposición 1.2.1 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

1. Son equivalentes:
   (a) f es convexa
   (b) $epi(f)$ es un conjunto convexo
   (c) Dados α , β $\in \mathbb{R}$ y $\lambda \in]0,1[$, se tiene

   $$f((1-\lambda)x + \lambda y) \;\leq\; (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta \;,\; \forall\, x \;,\; \forall\, y \text{ donde } f(x) < \alpha \;,\; f(y) < \beta.$$

2. Si f es una función convexa; entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $L_f(\lambda)$ es convexo; pero el recíproco no es cierto.

3. Si f_1 y f_2 son funciones convexas, entonces $f_1 + f_2$ es convexo.

Demostración: ver [1]. □

Ejemplo 1.2.1 *Sea $K \subset X$. Definimos las siguientes funciones :*

$$I_K(x) = \begin{cases} 0, & si\; x \in K \\ +\infty, & si\; x \notin K \end{cases}$$

$$\chi_K = \begin{cases} 1, & si\; x \in K \\ 0, & si\; x \notin K \end{cases}$$

Estas son llamadas respectivamente función indicatríz y función caracteristica del conjunto K.

Proposición 1.2.2 Sea K un subconjunto de X, entonces:

1.– K es convexo si y sólo si I_K es convexa.

2.– K es cerrado si y sólo si I_K es s.c.i.

3.– K es abierto si y sólo si χ_K es s.c.i.

Demostración: ver [1]. $\square$

Definición 1.2.4 Un Hiperplano (afín) es un conjunto de la forma:

$$H(f,\alpha) = H = \{x \in X : \langle f, x \rangle = \alpha\}$$

donde $f \in X^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Un tal hiperplano separa X en dos semiespacios abiertos H_+ y H_- definidos como:

$$H_+ := \{x \in X : f(x) > \alpha\} \ , \ H_- := \{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

Similarmente se define los semiespacios cerrados inducido por $H(f,\alpha)$ como:

$$\overline{H_+} := \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \ , \ \overline{H_-} := \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

Definición 1.2.5 Un Hiperplano H separa a los conjuntos A y B en sentido amplio si

$$A \subset \overline{H_+} \ , \ B \subset \overline{H_-}$$

Además este Hiperplano separa A y B en sentido estricto si

$$A \subset H_+ \ , \ B \subset H_-$$

Teorema 1.2.1 (Teorema de separación amplia de Hahn - Banach)
Sean $A \subset X$ y $B \subset X$ dos conjuntos convexos no vacíos y disjuntos. Entonces existe un Hiperplano que separa A y B en sentido amplio.

Demostración: ver [1]. $\square$

Definición 1.2.6 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Decimos que f es cuasiconvexa si

$$x, y \in X \ , \ 0 \leq t \leq 1 \ \Rightarrow f(x + t(y-x)) \leq max[f(x), f(y)]$$

y es estrictamente cuasiconvexa si

$$x, y \in X \ , \ x \neq y \ , \ 0 < t < 1 \ \Rightarrow f(x + t(y-x)) \ < \ max[f(x), f(y)]$$

Proposición 1.2.3 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, son equivalentes:

1. f es cuasiconvexa en C
2. $L_f(\lambda)$ *es convexo* $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración: ver [2]. $\square$

Definición 1.2.7 Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Decimos que f es cuasiconcava si el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Proposición 1.2.4 Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
f es cuasiconcava si y sólo si $-f$ es cuasiconvexa.

Demostración: ver [2]. $\square$

Ejemplo 1.2.2 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que:*

$$f(x) = \begin{cases} x, \ si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, \ si\ x \geq 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que f cuasiconvexa; pero no convexa. Luego la clase de funciones cuasiconvexas contienen estrictamente a la clase de funciones convexas.

Capítulo 2

Análisis de Correspondencias

2.1 Límites de Correspondencias

Empecemos definiendo una correspondencia de manera general.

Definición 2.1.1 Una correspondencia es una "función" $F : X \rightrightarrows Y$, donde a cada punto $x \in X$ le hace corresponder un subconjunto $F(x) \subseteq Y$.

- El subconjunto del espacio producto $X \times Y$ definido por

$$Graf(F) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

  Es llamado Gráfica de la correspondencia F.

- El dominio de F denotado por $Dom(F)$, es el conjunto de elementos $x \in X$ tal que $F(x)$ es no vacío, es decir:

$$Dom(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

- La imagen de F denotada por $Im(F)$ es la union de los $F(x)$, sobre todos los elementos $x \in X$, es decir:

$$Im(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

- Diremos que F es cónica cuando $F(x)$ es un cono para cada $x \in X$.

- Diremos que F es una correspondencia cerrada, si $F(x)$ es un conjunto cerrado para cada $x \in X$.

- Diremos que F es convexa cuando $F(x)$ es un conjunto convexo para cada $x \in X$.

Los límites de correspondencias serán muy usadas en este trabajo, por eso, debido a la flexibilidad de su manejo, utilizaremos como definición el equivalente a la definición usual (ver corolario 2.1.2 más adelante.)

Definición 2.1.2 Sea $F : X \rightrightarrows Y$ y $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ tal que $x_n \to x$.

$$\limsup_{n\to\infty} F(x_n) := \{y \in Y : \liminf_{n\to\infty} d(y, F(x_n)) = 0\}$$

Es el límite superior de F cuando $x_n \to x$.

$$\liminf_{n\to\infty} F(x_n) := \{y \in Y : \limsup_{n\to\infty} d(y, F(x_n)) = 0\} := \{y \in Y : \lim_{n\to\infty} d(y, F(x_n)) = 0\}$$

es el límite inferior de F cuando $x_n \to x$.

Dado $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ tal que $x_n \to x$. Si el límite inferior de F cuando $x_n \to x$ coincide con el límite superior de F cuando $x_n \to x$, entonces diremos que el límite de F cuando $x_n \to x$ existe y

$$\liminf_{n\to\infty} F(x_n) = \limsup_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Ejemplo 2.1.1 *Sea $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}^2$. Definamos $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ una correspondencia tal que para $\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$*

$$F(x_n) = \begin{cases} \{\frac{1}{n}\} \times [-1, 1], si\ n\ es\ par \\ \\ \{\frac{1}{n}\} \times [-1, 0], si\ n\ es\ impar. \end{cases}$$

De la definición se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} infF(x_n) = \{0\} \times [-1, 0]$$
$$\lim_{n\to\infty} supF(x_n) = \{0\} \times [-1, 1]$$

Proposición 2.1.1 Sea $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ tal que $x_n \to x$. Los límites superior e inferior de F cuando $x_n \to x$ son cerrados y satisfacen:

$$\lim_{n\to\infty} infF(x_n) \subset \lim_{n\to\infty} supF(x_n)$$

Demostración: ver [3]. $\square$

Corolario 2.1.1 Sea $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ tal que $x_n \to x$. Si $F(x_{n+1}) \subset F(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \bigcap_{n\geq 0} cl[F(x_n)]$$

Demostración: ver [3]. $\square$

Proposición 2.1.2 Sea $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ tal que $x_n \to x$ y $F : X \rightrightarrows Y$, entonces:

i) $\liminf\limits_{n\to\infty} F(x_n)$ es el conjunto de puntos límites de las sucesiones convergentes de la forma $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in F(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} F(x_n)$ es el conjunto de todos los puntos de acumulación de las sucesiones $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in F(x_n)$

Demostración: ver [3]. $\square$

Corolario 2.1.2

$$\lim_{n\to\infty} supF(x_n) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{N>0} \bigcup_{n\geq N} B(F(x_n), \epsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} infF(x_n) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{N>0} \bigcap_{n\geq N} B(F(x_n), \epsilon)$$

Demostración:

- $y \in \limsup\limits_{n\to\infty} F(x_n)$ si y sólo si $\forall\, \epsilon > 0$, $\forall\, N > 0$, $\exists\, n \geq N$ tal que $y \in B(F(x_n), \epsilon)$
  Así
  $y \in \limsup\limits_{n\to\infty} F(x_n)$ si y sólo si $\forall\, \epsilon > 0, y \in \bigcap\limits_{N>0} \bigcup\limits_{n\geq N} B(F(x_n), \epsilon)$.
  Por lo tanto
  $y \in \limsup\limits_{n\to\infty} F(x_n)$ si y sólo si $y \in \bigcap\limits_{\epsilon>0} \bigcap\limits_{N>0} \bigcup\limits_{n\geq N} B(F(x_n), \epsilon)$

- $y \in \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$ si y sólo si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, N > 0$ tal que $\forall\, n \geq N$, $y \in B(F(x_n), \epsilon)$
  Así
  $y \in \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$ si y sólo si $\forall\, \epsilon > 0, y \in \bigcup_{N>0} \bigcap_{n\geq N} B(F(x_n), \epsilon)$.
  Por lo tanto
  $y \in \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$ si y sólo si $y \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{N>0} \bigcap_{n\geq N} B(F(x_n), \epsilon)$

$\square$

Definición 2.1.3 Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. El límite superior de F en $x \in X$ es el conjunto:

$$\limsup_{x'\to x} F(x') := \{y \in X : \exists\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x\ (x_n \neq x)\ ,\ \exists\, y_n \in F(x_n)\ \mathit{tal\ que}\ y_n \to y\}.$$

y el límite inferior de F en $x \in X$ es el conjunto:

$$\liminf_{x'\to x} F(x') := \{y \in X : \forall\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x\ (x_n \neq x)\ ,\ \exists\, y_n \in F(x_n)\ \mathit{tal\ que}\ y_n \to y\}.$$

Proposición 2.1.3 *Sea* $S = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X : x_n \to x,\ x_n \neq x,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$, *entonces:*

$$\limsup_{x'\to x} F(x') := \bigcup_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in S} \limsup_{n\to\infty} F(x_n)$$

$$\liminf_{x'\to x} F(x') := \bigcap_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in S} \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$$

Demostración: Se sigue directamente de la definición. $\square$

Observación
La proposición anterior nos dice que pedir que $\liminf_{x'\to x} F(x') = \limsup_{x'\to x} F(x')$ es una condición muy restrictiva, ya que uno es intersección de conjuntos "pequeños" respecto al otro que es unión de conjuntos "grandes"; pero lo que sí se tiene es el siguiente resultado.

Corolario 2.1.3 $\liminf_{x'\to x} F(x') \subset \limsup_{x'\to x} F(x')$

Demostración: Por la proposición (2.1.1) sabemos que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S$ se tiene que $\liminf\limits_{n\to\infty} F(x_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} F(x_n)$. Luego

$$\bigcap_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in S} \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \subset \bigcup_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in S} \limsup_{n\to\infty} F(x_n).$$

Por la proposición anterior se tiene que

$$\liminf_{x'\to x} F(x') \subset \limsup_{x'\to x} F(x')$$

□

Definición 2.1.4 Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia.

1. Se dice que F es semicontinua superior (s.c.s) en $x \in Dom(F)$ si para todo conjunto abierto U conteniendo a $F(x)$ existe una vecindad abierta V de x tal que $x' \in V$ implica que $F(x') \subset U$.

2. Se dice que F es semicontinua inferior (s.c.i) en $x \in Dom(F)$ si y sólo si para todo $y \in F(x)$ y para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Dom(F)$, con $x_n \to x$ existe $y_n \in F(x_n)$ tal que $y_n \to y$.

Proposición 2.1.4 *Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. Sí $x \in Dom(F)$ y F es s.c.i en x, entonces $F(x) \subset \liminf\limits_{x'\to x} F(x')$*

Demostración: Sea $y \in F(x)$. Por la semicontinuidad inferior de F en x se tiene que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Dom(F)$ existe $y_n \in F(x_n)$ tal que $y_n \to y$. En particular, para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Dom(F)$ con $x_n \neq x$ existe $y_n \in F(x_n)$ tal que $y_n \to y$. luego por definición se tiene que $y \in \liminf\limits_{x'\to x} F(x')$ □

Proposición 2.1.5 Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia cerrada. Sí $x \in Dom(F)$ y F es s.c.s en x, entonces $\limsup\limits_{x'\to x} F(x') \subset F(x)$.

Demostración: Sea $y \in \limsup\limits_{x'\to x} F(x')$ entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S$ y $y_n \in F(x_n)$ tal que $y_n \to y$. Supongamos que $y \notin F(x)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $y \notin F(x) + \epsilon B$. Por otro lado, por la semicontinuidad superior de F en x, existe $\delta > 0$ tal que $\forall$ $x' \in B(x, \delta)$, $F(x') \subset F(x) + \frac{\epsilon}{2}B$, llegando así a una contradicción ya que esta última parte nos dice que $y_n \not\to y$. Por lo tanto

$$\limsup_{x'\to x} F(x') \subset F(x)$$

Observación
La hipótesis de ser cerrado en el punto x es necesaria, para esto consideremos $F:\mathbb{R}\rightrightarrows\mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x)=\begin{cases}\{x\}\times[-1,1], \text{ si } x\neq 0\\ \\ \{0\}\times(-1,1), \text{ si } x=0.\end{cases}$$

De la definición se sigue que:

$$\limsup_{x\to 0} F(x)=\{0\}\times[-1,1]$$

$$F(0)=\{0\}\times(-1,1)$$

2.2 Correspondencias Tangentes y Normales a un Subconjunto

Definición 2.2.1 (Correspondencia Contingente) Sea $K \subset X$. Se define la correspondencia contingente $T_K : X \rightrightarrows X$ como:

$$T_K(x) := \begin{cases} \{v : \liminf_{h \to 0^+} d(x + hv, K)/h = 0\} & \text{si } x \in cl(K) \\ \\ \emptyset & \text{si } x \notin cl(K) \end{cases}$$

Proposición 2.2.1 Sea $x \in cl(K)$. Son equivalentes:

1. $v \in T_K(x)$
2. $\exists\, h_n \to 0^+$ y $\exists\, v_n \to v$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x + h_n v_n \in K$
3. $v \in \limsup_{h \to 0^+} \dfrac{K - x}{h}$

Demostración: ver [3] □

Definición 2.2.2 (Correspondencia Tangente de Clarke) Sea $K \subset X$. Se define la correspondencia Tangente de Clarke $C_K : X \rightrightarrows X$ como:

$$C_K(x) := \begin{cases} \{v : \lim_{h \to 0^+,\, x' \to_K x} d(x' + hv, K)/h = 0\} & \text{si } x \in cl(K) \\ \\ \emptyset & \text{si } x \notin cl(K) \end{cases}$$

Proposición 2.2.2 Son equivalentes:

1. $v \in C_K(x)$
2. $\forall\, h_n \to 0^+$, $\forall\, x_n \to_K x$, $\exists\, v_n \to v$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n + h_n v_n \in K$
3. $v \in \liminf_{h \to 0^+, x' \to_K x} \dfrac{K - x'}{h}$

Demostración: ver [3] □

Proposición 2.2.3 Sea $K \subset X$ un subconjunto cerrado y no vacío con $x \in K$, la correspondencia tangente de Clarke $C_K(x)$ es cónica, convexa y cerrada.

Demostración: ver [4] $\square$

Proposición 2.2.4 Sea $K \subset X$ un subconjunto cerrado y no vacío y sea $x \in K$. Son equivalentes:

1. $x \in intK$
2. $x \in K$ tal que $C_K(x) = X$

Demostración: ver [4] $\square$

Definición 2.2.3 (Correspondencia Normal de Clarke) Sea $K \subset X$. Se define la correspondencia normal de Clarke $N_K : X \rightrightarrows X^*$ como:

$$N_K(x) := [C_K(x)]^- = \{p \in X^* : \forall v \in C_K(x)\ ,\ \langle p, v\rangle \leq 0\}$$

Proposición 2.2.5 *La correspondencia normal de Clarke es cónica, convexa y cerrada.*

Demostración:

1.- es cónica debido a que $\langle p, v\rangle \leq 0$ si y sólo si $\langle \lambda p, v\rangle \leq 0$ para todo $\lambda > 0$.

2.- es convexa y cerrada debido a que para cada x, $N_K(x) := \bigcap_{v \in C_K(x)} H_v$ donde $H_v := \{p \in X^* : \langle p, v\rangle \leq 0\}$ es un conjunto convexo y cerrado.

$\square$

En lo que sigue de esta sección restringiremos el estudio sobre espacio Euclidiano.

Definición 2.2.4 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado y no vacío. Decimos que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es un normal proximal a K en un punto $\bar{x} \in K$ si para $t > 0$ suficientemente pequeño, el único punto de K más próximo a $\bar{x} + tv$ (en la norma euclidiana) es $\bar{x}$.

Definición 2.2.5 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado y no vacío. Decimos que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es un límite proximal normal a K en un punto $\bar{x} \in K$, si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ con $x_n \to \bar{x}$ y existen normales proximales v_n a K en x_n, tal que $v_n \to v$. Se define la correspondencia proximal $\widehat{N}_K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como:

$$\widehat{N}_K(x) := \begin{cases} \{v : v \text{ es límite proximal normal a } K \text{ en } \bar{x}\} & \text{si } x \in K \\ \emptyset & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

Proposición 2.2.6 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado, entonces

$$N_K(x) = clco\widehat{N}_K(x), \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración: ver [5] $\square$

Proposición 2.2.7 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado con frontera no vacía y $x \in fron(K)$, entonces:

$$N_K(x) \supsetneq \{0\}$$

Demostración: por la proposición (2.2.4) $C_K(x) \neq \mathbb{R}^n$. Teniendo en cuenta la proposición (2.2.3), se tiene la existencia de un vector $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H(f, \alpha)$ separa $C_K(x)$ y $\{x\}$ en sentido amplio. Luego v o $-v$ está en $N_K(x)$.
Es evidente de la definición que $0 \in N_K(x)$. Luego $N_K(x) \supsetneq \{0\}$ $\square$

Capítulo 3

Teorema de la Correspondencia Implícita

3.1 Preliminares

Definición 3.1.1 Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Gâteaux diferenciable en $x \in X$ si para cada $h \in X$

$$\langle f'(x), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \tag{3.1}$$

existe y es una función lineal contínua en h (es decir $f'(x) \in X^*$). $f'(x)$ es llamada la derivada de Gâteaux de f en x.
Si además el límite en (3.1) es uniforme en $h \in S_X$ (esfera unitaria en X), decimos que f es Fréchet diferenciable (F.D) en x. Equivalentemente, f es Fréchet diferenciable en x si $f'(x) \in X^*$ y

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - f'(x)y}{\|y\|} = 0$$

La funcional $f'(x)$ es llamada la derivada Fréchet de f en x.

Definición 3.1.2 Decimos que la norma $\|.\|$ de X es Fréchet diferenciable (o una F-norma) si $\|.\|$ es Fréchet diferenciable en todo $x \in X \setminus \{0\}$. Denotaremos por f_x la derivada de la norma $\|.\|$ en el punto x.

Proposición 3.1.1 Supongamos que X es un espacio de Banach con una F-norma, entonces para todo $x \in X \setminus \{0\}$, $f_x \in S_{X^*}$.

Demostración:

1.- Para $h \in S_X$, se tiene por la desigualdad triangular que

$$f_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} \leq 1.$$

2.- $f_x(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\|x + tx\| - \|x\|}{t} = \|x\|.$

Luego de (1) y (2) se tiene que $f_x \in S_{X^*}$. $\square$

Proposición 3.1.2 *La norma $\|.\|$ de X es Fréchet diferenciable en $x \in X$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad V de x tal que*

$$diam(\bigcup_{y \in V} \{f \in B_{X^*} : f(y) = \|y\|\}) < \epsilon$$

Demostración: ver [6] $\square$

Corolario 3.1.1 Supongamos que $\|.\|$ es una F-norma, entonces la aplicación $x \to f_x$ es contínua.

Demostración: Sean $x \in X \setminus \{0\}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sucesión en $X \setminus \{0\}$ tal que $x_n \to x$, y $\epsilon > 0$.
Por la proposición anterior, existe $\delta > 0$ tal que $diam(\bigcup_{y \in B(x,\delta)} \{f \in B_{X^*} : f(y) = \|y\|\}) < \epsilon$. Como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, $x_n \in B(x, \delta)$, luego (debido a que $f_{x_n}(x_n) = \|x_n\|$) se tiene que para $n \geq n_0$, $\|f_{x_n} - f_x\| < \epsilon$. $\square$

Proposición 3.1.3 Sea X un espacio de Banach con una F-norma, entonces X admite una función "campana" lipschitz continuamente Fréchet diferenciable.

Demostración: Sea $\|.\|$ una F-norma sobre X y $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $supp(\tau) = [1, 3]$. Por el corolario anterior, $\|.\|$ es continuamente Fréchet diferenciable sobre $X \setminus \{0\}$. Así la función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(x) = \tau(\|x\|)$ para $x \in X$ es una función "campana" lipschitz continuamente Fréchet diferenciable sobre X. $\square$

Definición 3.1.3 Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función s.c.i. Decimos que f es Fréchet-subdiferenciable y x^* es una Fréchet-subderivada de f en x, si existe una función g de clase C^1 tal que $\nabla g(x) = x^*$ y $f - g$ alcanza un mínimo local en x. Denotamos al conjunto de todas las Fréchet-subderivadas de f en x por $D_F f(x)$.

Definición 3.1.4 Sea $S \subset X$ un subconjunto cerrado. El cono Fréchet-normal a S en x está definido por:

$$N_F(S;x) := \begin{cases} D_F\delta_S(x) & \text{si } x \in S \\ \\ \emptyset & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Donde

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in S \\ \\ +\infty \; si \; x \notin S. \end{cases}$$

Observación

1. Veremos más adelante que el conjunto de puntos donde una función s.c.i es Fréchet subderivable es tan grande (en el sentido de densidad) como el tamaño del dominio de aquella función.

2. Si X un espacio de Banach con una F-norma, entonces:

$$x^* \in D_F f(x) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} inf \frac{f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle}{\|h\|} \geq 0$$

3. El cono Fréchet-normal a S en x es equivalente a $N_F(x, S) = conoD_F d(x, S)$.

4. Cuando una función tiene más de una variable, digamos $f = f(x, y)$, usamos $D_{F,x}$ para significar la subderivada parcial de f con respecto a la variable x.

5. Si f es convexa, entonces $D_F f(x)$ coincide con la subderivada clásica del análisis convexo.

Definición 3.1.5 Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia con gráfica cerrada e $y \in F(x)$. Decimos que x^* es una Fréchet coderivada de F en (x, y) correspondiente a y^* si:

$$(x^*, -y^*) \in N_F((x, y); Graf(F))$$

Denotamos al conjunto de coderivadas de F en (x, y) correspondiente a y^* por

$$D^* F(x; y)(y^*) = \{x^* : (x^*, -y^*) \in N_F((x, y), Graf(F))\}$$

Proposición 3.1.4 Dada una función $F : X \to Y$ Fréchet diferenciable, entonces

$$D^*F(x; F(x))(y^*) = (F'(x))^* y^*$$

.

Así la Fréchet coderivada es una extensión de la adjunta de la Fréchet derivada.
Demostración: ver [11] □

Lema 3.1.1 Sea $(Y, \|.\|_Y)$ un espacio de Banach de funciones reales continuas y acotadas sobre X tal que:

(a) Para todo $g \in Y$, $\|g\|_Y \geq \|g\|_\infty$.

(b) Para todo $g \in Y$ y $\forall u \in X$, $\|\tau_u g\|_Y = \|g\|_Y$, donde $\tau_u g(x) = g(u + x)$ $\forall x \in X$.

(c) Existe una función "campana" $b \in Y$.

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (s.c.i) tal que $-\infty < \inf_X f$ con $Dom(f) \neq \emptyset$. Entonces

$$\{g \in Y : \exists\, x_0 \in X;\ (f+g)(x_0) < (f+g)(x)\ , \forall x \in X \setminus \{x_0\}\}$$

es una G_δ(intersección numerable de abiertos) densa de Y.

Demostración: Consideremos

$$A_n = \{g \in Y : \exists\, x_0 \in X;\ (f+g)(x_0) < \inf_{x \in X \setminus B(x_0, \frac{1}{n})} (f+g)(x)\}$$

Afirmo que A_n es abierto y denso de Y.
En efecto:

i.- A_n es abierto.
En efecto.
Sea $g \in A_n$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que

$$\alpha = (f+g)(x_0) < \inf_{x \in X \setminus B(x_0, \frac{1}{n})} (f+g)(x) = \beta$$

Considerando $\epsilon = \frac{\beta - \alpha}{3}$, resulta que para todo $h \in Y$ con $\|h - g\|_Y < \epsilon$, (por hecho que $\|.\|_Y \geq \|.\|_\infty$ y por la desigualdad triangular):

1) $(f+h)(x_0) < \alpha + \epsilon$

2) $\inf_{x\in X\setminus B(x_0,\frac{1}{n})}(f+h)(x) \geq \beta - \epsilon$

De esto resulta que

$$(f+h)(x_0) < \inf_{x\in X\setminus B(x_0,\frac{1}{n})}(f+h)(x)$$

Luego la bola abierta en Y, $B(g,\epsilon) \subset A_n$.

ii.- Para ver que A_n es denso en Y, tomemos $g \in Y$ y $\epsilon > 0$. Necesitamos encontrar $h \in Y$ con $\|h\|_Y < \epsilon$ y $x_0 \in X$ tal que $(f+g+h)(x_0) < \inf_{x\in X\setminus B(x_0,\frac{1}{n})}(f+g+h)(x)$.

Existe una función "campana" b en Y tal que $b(0) > 0$, $\|b\|_Y < \epsilon$ y $b(x) = 0$ cuando $\|x\| > \frac{1}{n}$.
Como $f+g$ es acotado inferiormente, podemos encontrar $x_0 \in X$ tal que

$$(f+g)(x_0) < \inf_{x\in X}(f+g)(x) + b(0)$$

Sea $h(x) = -b(x-x_0)$. Por la condición (b) del lema, se tiene que $\|h\|_Y < \epsilon$
y

$$(f+g+h)(x_0) = (f+g)(x_0) - b(0) < \inf_{x\in X}(f+g)(x)$$

Por otro lado, si $x \in X\setminus B(x_0,\frac{1}{n})$, entonces $(f+g+h)(x) = (f+g)(x) \geq \inf_{x\in X}(f+g)(x)$.
En consecuencia $g+h \in A_n$ y esto muestra que A_n es denso en Y. Consecuentemente $G = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ es una G_δ-denso del espacio de Banach Y.
Afirmo que si $g \in G$, entonces $f+g$ alcanza su mínimo estricto sobre X.
En efecto:
Para cada $n \geq 1$, sea $x_n \in X$ tal que $(f+g)(x_n) < \inf_{x\in X\setminus B(x_n,\frac{1}{n})}(f+g)(x)$
De esto se tiene que $x_p \in B(x_n,\frac{1}{n})$ si $p \geq n$ (en caso contrario $(f+g)(x_n) < (f+g)(x_p)$. Por otro lado se tiene que $\|x_p - x_n\| > \frac{1}{n} > \frac{1}{p}$, entonces $x_n \notin B(x_p,\frac{1}{p})$, luego $(f+g)(x_p) < (f+g)(x_n)$, lo cual es contradictorio).
Así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy, convergiendo a x_∞. Usando s.c.i se tiene que

$$\begin{aligned}(f+g)(x_\infty) &\leq \liminf_{n\to\infty}(f+g)(x_n)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty}[\inf_{x\in X\setminus B(x_n,\frac{1}{n})}(f+g)(x)]\\ &\leq \inf\{(f+g)(x) : x \in X\setminus\{x_\infty\}\}\end{aligned}$$

Por lo tanto $f+g$ alcanza su mínimo en x_∞.
Supongamos que x_∞ no es mínimo estricto de $(f+g)$, entonces existe una sucesión

$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X con $y_n \not\to x_\infty$ tal que $(f+g)(y_n) \to (f+g)(x_\infty)$. Pasando a una subsucesión si es necesario, podemos asumir que $\exists\epsilon > 0$ tal que $\|y_n - x_\infty\| \geq \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Luego existe un entero $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_p - y_n\| > \frac{1}{p}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
En consecuencia

$$\begin{aligned} (f+g)(x_\infty) &\leq (f+g)(x_p) \\ &< \inf_{x\in X\setminus B(x_p,\frac{1}{p})} (f+g)(x) \\ &\leq (f+g)(y_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lo cual contradice a que $(f+g)(y_n) \to (f+g)(x_\infty)$.
Recíprocamente, si $f+g$ alcanza su mínimo estricto en x_0, entonces este x_0 muestra que $g \in A_n$, $\forall\ n$. □

Teorema 3.1.1 (Principio variacional diferenciable) Sea X un espacio de Banach con una F-norma y sea $f : X \to \overline{R}$ semicontinua inferior (s.c.i) acotada inferiormente. Entonces existe $\alpha > 0$ (que depende sólo de la norma) tal que $\forall\epsilon \in (0,1)$ y $\forall u$ satisfaciendo $f(u) < \inf_X f + \alpha\epsilon^2$, existe una función g sobre X Fréchet diferenciable y $v \in X$ tal que:

(i) La función $x \to f(x) + g(x)$ alcanza un mínimo global en $x = v$

(ii) $\|v - u\| < \epsilon$

(iii) $\text{máx}(\|g\|_\infty, \|g'\|_\infty) < \epsilon$.

De (i) y (iii) se deduce que $f(v) < \inf_X f + (\alpha + 2)\epsilon$

Demostración: Sea $Y = \{g : X \to \mathbb{R};\ g$ es continuamente F.D, con$\|g\|_\infty$ y $\|g'\|_\infty$ finito$\}$ y sea $\|g\|_Y = \text{máx}\ \{\|g\|_\infty, \|g'\|_\infty\}$, entonces $(Y, \|.\|_Y)$ es espacio de Banach.
Sean $b \in Y$ una función "campana" continuamente F.D con soporte en la bola unitaria y satisfaciendo $b(0) = 1$, $b_\epsilon(x) = b(\frac{x}{\epsilon})$ y $a_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{4\|b\|_Y}$.
Si $f(u) < \inf_X f + a_\epsilon$, entonces definiendo $h(x) = -3a_\epsilon b_\epsilon(x-u)$, se tiene por el lema anterior que existe $k \in Y$ y $v \in X$ tal que $\|k\|_Y < a_\epsilon$ y $(f+h+k)$ alcanza un mínimo en $x = v$
Definiendo $g(x) = h(x) + k(x)$, se tiene que (i) es satisfecho.
Además como $\|g\|_Y \leq \|h\|_Y + \|k\|_Y < \epsilon$, entonces (iii) es satisfecho.
Por otro lado

$$(f+g)(v) \leq (f+g)(u) = f(u) - 3a_\epsilon + k(u) < f(u) - 2a_\epsilon < \inf_X f - a_\epsilon.$$

Luego si $\|y - u\| \geq \epsilon$, entonces $(f+g)(y) = f(y) + k(y) \geq \inf_X f - a_\epsilon$
Esto implica que $\|u - v\| < \epsilon$ y muestra (ii). □

Teorema 3.1.2 *Sea X un espacio de Banach con una F-norma y sean $f_1, ..., f_N : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones s.c.i acotada inferiormente con*

$$\lim_{\eta \to 0} inf\{\sum_{n=1}^{N} f_n(y_n) : diam(y_1, ..., y_N) \leq \eta\} < +\infty$$

Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe x_n y $x_n^* \in D_F f_n(x_n), n = 1, ..., N$ satisfaciendo

$$diam(x_1, ..., x_N).max(1, \|x_1^*\|, ...\|x_N^*\|) < \epsilon, \tag{3.2}$$

y

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) < \lim_{\eta \to 0} inf\{\sum_{n=1}^{N} f_n(y_n) : diam(y_1, ..., y_N) \leq \eta\} + \epsilon \tag{3.3}$$

tal que

$$0 \in \sum_{n=1}^{N} x_n^* + \epsilon B \tag{3.4}$$

Demostración: Para $i \in \mathbb{R}$ e $i > 0$, definamos

$$w_i(y_1, ..., y_N) := \sum_{n=1}^{N} f_n(y_n) + i \sum_{n,m=1}^{N} \|y_n - y_m\|^2$$

y $M_i := \inf_{X^N} w_i$. Entonces M_i es creciente con i y es acotado superiormente por

$$\lim_{\eta \to 0} inf\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : diam(x_1, ..., x_N) \leq \eta\}$$

Sea $M = \lim_{i \to \infty} M_i$. Aplicando para cada i suficientemente grande el teorema (3.1.1) a la función w_i, obtenemos una función ϕ_i y $x_{n,i}$, $n = 1, ..., N$ tal que $w_i + \phi_i$ alcanza un mínimo global en $(x_{1,i}, ..., x_{N,i})$ con $\|\nabla \phi_i(x_{1,i}, ..., x_{N,i})\| < \frac{\epsilon}{N}$ y

$$w_i(x_{1,i}, ..., x_{N,i}) < \inf_{X^N} w_i + \frac{1}{i} \leq M + \frac{1}{i} \tag{3.5}$$

Para cada n, la función

$$y \to w_i(x_{1,i}, ..., x_{n-1,i}, y, x_{n+1,i}, ..., x_{N,i}) + \phi_i(x_{1,i}, ..., x_{n-1,i}, y, x_{n+1,i}, ..., x_{N,i}).$$

alcanza un mínimo local en $y = x_{n,i}$. Así, para cada $n = 1, ..., N$, existe

$$x_{n,i}^* := -\nabla_n \phi_i(x_{1,i}, ..., x_{N,i}) - 2i \sum_{m=1}^{N} \nabla \|.\|^2 (x_{n,i} - x_{m,i}) \in D_F f_n(x_{n,i}).$$

Sumando estas N inclusiones, resulta

$$\sum_{n=1}^{N} x_{n,i}^{*} := -\sum_{n=1}^{N} \nabla_n \phi_i(x_{1,i}, ..., x_{N,i}) - 2i \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \nabla\|.\|^2(x_{n,i} - x_{m,i})$$

observando que $\| - \sum_{n=1}^{N} \nabla_n \phi_i(x_{1,i}, ..., x_{N,i})\| \leq \epsilon$ y

$$\nabla\|.\|^2(x_{n,i} - x_{m,i}) + \nabla\|.\|^2(x_{m,i} - x_{n,i}) = 0 \ ,$$

obtenemos que

$$0 \in \sum_{n=1}^{N} x_{n,i}^{*} + \epsilon B_{X^*}.$$

Por definición de M_i tenemos

$$\begin{aligned} M_{\frac{i}{2}} &\leq w_{\frac{i}{2}}(x_{1,i}, ..., x_{N,i}) \\ &= w_i(x_{1,i}, ..., x_{N,i}) - \tfrac{i}{2} \sum_{n,m=1}^{N} \|x_{n,i} - x_{m,i}\|^2 \\ &\leq M_i + \tfrac{1}{i} - \tfrac{i}{2} \sum_{n,m=1}^{N} \|x_{n,i} - x_{m,i}\|^2 \end{aligned}$$

De donde

$$i \sum_{n,m=1}^{N} \|x_{n,i} - x_{m,i}\|^2 \leq 2(M_i - M_{\frac{i}{2}} + \frac{1}{i})$$

mostrando que

$$\lim_{i\to\infty} i \sum_{n,m=1}^{N} \|x_{n,i} - x_{m,i}\|^2 = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{i\to\infty} diam(x_{1,i}, ..., x_{N,i}) = 0$$

y

$$\lim_{i\to\infty} diam(x_{1,i}, ..., x_{N,i}).max(1, \|x_{1,i}^*\|, ...\|x_{N,i}^*\|) = 0$$

ya que

$$\|\nabla\|.\|^2(x_{n,i} - x_{m,i})\| \leq 2\|x_{n,i} - x_{m,i}\|$$

Así,

$$\begin{aligned} M &\leq \lim_{\eta\to 0} inf\{\sum_{n=1}^{N} f_n(y_n) : diam(y_1, ..., y_N) \leq \eta\} \\ &\leq \liminf_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x_{n,i}) = \liminf_{i\to\infty} w_i(x_{1,i}, ..., x_{N,i}) \leq M \end{aligned}$$

□

Observación

- La condición de los $f_1, ..., f_N : X \to \overline{\mathbb{R}}$ de ser acotadas inferiormente y la condición

$$\lim_{\eta \to 0} inf\{\sum_{n=1}^{N} f_n(y_n) : diam(y_1, ..., y_N) \leq \eta\} < +\infty$$

en el teorema anterior no puede ser suprimida. Por ejemplo, necesitamos sólo considerar funciones sobre $\mathbb{R}$ tales como $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = 0$, la cual no satisface la conclusión del teorema ya que f_1 no es acotada; y también funciones como $f_1(x) = \delta_{\{0\}}(x)$ y $f_2(x) = \delta_{\{1\}}(x)$, que no satisface la conclusion del teorema, debido a que

$$\lim_{\eta \to 0} inf\{f_1(y_1) + f_2(y_2) : \|y_1 - y_2\| \leq \eta\} = +\infty$$

- La conclusión (3.2) solo nos dice que los puntos x_n están cerca unos a otros; en contraste con el teorema (2.4) de [7] donde muestra que estos puntos están cerca a un punto donde la suma alcanza su mínimo (bajo hipótesis adicionales). Obsérvese que este también nos dá el control del "tamaño" de las subderivadas envuelta en la suma.

En aplicaciones es frecuente tener información de la localización de los puntos x_n. Ilustremos esto por el siguiente ejemplo.

Ejemplo (Densidad de los puntos subdiferenciables)

Sea X un espacio de Banach con una F-norma, y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función s.c.i, entonces $dom(D_F f)$ es denso en $dom(f)$.
En efecto:
Sea $x \in dom(f)$ y $\epsilon > 0$ tal que $f|_{x+2\epsilon B}$ es acotado inferiormente. Aplicando el teorema (3.1.2) a $f_1 = f + \delta_{x+2\epsilon B}$ y $f_2 = \delta_{\{x\}}$, nos da la existencia de x_1, x_2 tal que $\|x_1 - x_2\| < \epsilon$, $0 \in D_F f_1(x_1) + D_F f_2(x_2) + \epsilon B_{X^*}$ y $f_1(x_1) + \delta_{\{x\}}(x_2) < f(x) + \epsilon$. La última desigualdad implica que $x_2 = x$ y por tanto x_1 está en el interior de $x + 2\epsilon B$, así $D_F f_1(x_1) = D_F f(x_1)$. Por lo tanto $dom(D_F f)$ es denso en $dom(f)$.

3.2 Desigualdad de valor medio Multidireccional

El teorema de la desigualdad de valor medio para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en el segmento $[x, y] \subset \mathbb{R}^n$ afirma que existe $z_{x,y}$(que depende de x e y) en $[x, y]$ tal que

$$\langle f'(z_{x,y}), y - x\rangle \geq f(y) - f(x) \tag{3.6}$$

Ahora sean A e B dos subconjuntos compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supóngase que $f|_B \equiv 1$ y $f|_A \equiv 0$, entonces para cualquier $x \in A$, $y \in B$, se sigue de la desigualdad (3.6) que para algún $z_{x,y}$ en el segmento $[x, y]$ se tiene

$$\langle f'(z_{x,y}), y - x\rangle \geq 1$$

Si además A y B son convexos, entonces existe un punto z (independiente de x e y) que está en $[A, B]$ tal que

$$\langle f'(z), y - x\rangle \geq 1, \ \forall\ (x, y) \in A \times B$$

En [8] encontramos una extención de lo anterior, que afirma:

Sea X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continuamente Fréchet diferenciable. Si A y B son dos subconjuntos convexos, cerrados, acotados y no vacíos de X en la que al menos uno es compacto, entonces se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe un punto $z \in [A, B]$ tal que

$$\inf_B f - \sup_A f < \langle f'(z), y - x\rangle + \epsilon, \ \forall\ (x, y) \in A \times B$$

En lo que vienen a continuación son dos resultados que extienden lo anterior debilitando la regularidad de la función.
En el primero, f es considerado convexa y continua y en el segundo resultado f es considerado semicontinua inferior.

Teorema 3.2.1 Sea X un espacio de Banach y sea Y un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de X. Sea también $x \in X$ y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y continua tal que es acotada inferiormente sobre $[x, Y]$ con

$$\inf_{y \in Y} f(y) - f(x) > r$$

Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $z \in [x, Y]$ y $z^* \in \partial f(z)$ (la subdiferencial convexa de f en z), tal que

$$r < \langle z^*, y - x\rangle + \epsilon\|y - x\|, \ y \in Y$$

Además, podemos elegir z satisfaciendo

$$f(z) < \inf_{[x,Y]} f + |r| + \epsilon$$

Demostración:

1.- caso especial:
Empecemos considerando el caso especial cuando

$$\inf_{y \in Y} f(y) - f(x) > 0$$

Sea $\bar{f} := f + \delta_{[x,Y]}$. Entonces $\bar{f}$ es acotada inferiormente sobre X. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que

$$\epsilon < \inf_{y \in Y} f(y) - f(x)$$

Aplicando el principio variacional de Ekeland's a $\bar{f}$ (ver [9]) encontramos z tal que

$$\bar{f}(z) < \inf \bar{f} + \epsilon \tag{3.7}$$

y

$$\bar{f}(w) \geq \bar{f}(z) - \epsilon\|w - z\| \, \forall w \in X \tag{3.8}$$

De esta manera

$$u \to f(u) + \delta_{[x,Y]}(u) + \epsilon\|u - z\|$$

alcanza un mínimo en z. Por la desigualdad (3.7), $\bar{f}(z) < +\infty$ y en consecuencia $z \in [x, Y]$. Como $[x, Y]$ es convexa, aplicando la regla de la suma para la subdiferencial convexa (ver [10]), existe $z^* \in \partial f(z)$ tal que $0 \leq \langle z^*, w - z\rangle + \epsilon\|w - z\|$, para todo $w \in [x, Y]$. Usando un menor ϵ al inicio si es necesario tenemos, para $w \neq z$

$$0 < \langle z^*, w - z\rangle + \epsilon\|w - z\|, \; \forall w \in [x, Y] \setminus \{z\} \tag{3.9}$$

Además por la desigualdad (3.7) tenemos $f(z) = \bar{f}(z) \leq f(x) + \epsilon < \inf_Y f$, así $z \notin Y$. De esta manera podemos escribir $z = x + \bar{t}(\bar{y} - x)$ donde $\bar{y} \in Y$ y $\bar{t} \in [0, 1)$. Reemplazando $w = y + \bar{t}(\bar{y} - y)$ (para cualquier $y \in Y$) en la ecuación (3.9), resulta que:

$$0 < \langle z^*, y - x\rangle + \epsilon\|y - x\|. \tag{3.10}$$

2.- El caso general:

Consideremos $X \times \bar{\mathbb{R}}$ con la norma $\|(x,r)\| = \|x\| + |r|$. Tomando un $\epsilon' \in (0, \epsilon/2)$ suficientemente pequeño tal que

$$\inf_{y \in Y} f(y) - f(x) > r + \epsilon'$$

y definiendo $F(z,t) := f(z) - (r+\epsilon')t$, tenemos que F es convexa, continua en $X \times \mathbb{R}$ y es acotada en $[(x,0), Y \times \{1\}]$. Además,

$$\inf_{Y \times \{1\}} F = \inf_{Y} f - (r + \epsilon') > f(x) = F(x,0)$$

Aplicando el caso especial probado arriba con f, x y Y reemplazado por F, $(x,0)$ y $Y \times \{1\}$ respectivamente, concluimos que existe $(z,s) \in [x,0), Y \times \{1\}]$ y $z^* \in \partial f(z)$ satisfaciendo

$$f(z) - (r+\epsilon')s < \inf_{(w,t) \in [(x,0), Y \times \{1\}]} (f(w) - (r+\epsilon')t) + \epsilon' ,$$

es decir

$$f(z) < \inf_{(w,t) \in [(x,0), Y \times \{1\}]} (f(w) - (r+\epsilon')(t-s)) + \epsilon' \leq \inf_{[x,Y]} f + |r| + \epsilon$$

tal que, para todo $y \in Y$,

$$\begin{aligned} 0 &< \langle z^*, y - x \rangle - (r + \epsilon') + \epsilon'(\|y - x\| + 1) \\ &= \langle z^*, y - x \rangle - r + \epsilon' \|y - x\| \\ &\leq \langle z^*, y - x \rangle - r + \epsilon \|y - x\|. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2 Sea Y un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio de Banach con una F-norma X y $x \in X$. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función s.c.i. Supongamos que para algún $h > 0$, f es acotado inferiormente sobre $[x, Y] + hB$ y además

$$\lim_{\eta \to 0} \inf_{y \in [Y + \eta B]} f(y) > f(x).$$

Entonces, existe $\bar{h} > 0$ tal que, para cualquier $\epsilon > 0$, existen $u \in [x, Y]$ con $d(u, Y) > h$, $z \in u + \epsilon B$ y $z^* \in D_F f(z)$ tal que:

(i) $\|z^*\|.\|u - z\| < \epsilon$

(ii) $0 \leq \langle z^*, w - u \rangle + \epsilon \|w - u\| \; \forall w \in [x, Y]$

(iii) $0 < \langle z^*, y - x\rangle + \epsilon\|y - x\| \; \forall y \in Y$.

Además podemos elegir z satisfaciendo

(iv) $f(z) < \lim_{\eta\to 0} \inf_{[x,Y]+\eta B} f + \epsilon$.

Demostración: Sea $\bar{f} = f + \delta_{[x,Y]+hB}$. Entonces $\bar{f}$ es acotada inferiormente sobre X. Fijemos $\bar{h} \in (0, h/2)$ tal que $\inf_{y\in[Y+2\bar{h}B]} f(y) > f(x)$. Sin perdida de generalidad podemos asumir $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < min\{\inf_{y\in[Y+2\bar{h}B]} f(y) - f(x), \bar{h}\}.$$

Aplicando el teorema (3.1.2) a $f_1 = \bar{f}$ y $f_2 = \delta_{[x,Y]}$, se tiene la existencia de z y de u con $\|z - u\| < \epsilon$, $z^* \in D_F\bar{f}(z) = D_F f(z)$ y $u^* \in N_F(u, [x, Y])$ satisfaciendo

$$max(\|z^*\|, \|u^*\|)\|z - u\| < \epsilon \tag{3.11}$$

y

$$f(z) < \lim_{\eta\to 0} \inf_{[x,Y]+\eta B} f + \epsilon \leq f(x) + \epsilon \tag{3.12}$$

tal que

$$\|z^* + u^*\| < \epsilon \tag{3.13}$$

Ahora, como $[x, Y]$ es convexa, $N_F(u, [x, Y])$ coincide con el cono normal de $[x, Y]$ en u en el sentido del análisis convexo. Así, $u^* \in N_F(u, [x, Y])$ implica que

$$\langle u^*, w - u\rangle \leq 0, \; \forall w \in [x, Y] \tag{3.14}$$

Luego de (3.13) y (3.14) se tiene

$$0 < \langle z^*, w - u\rangle + \epsilon\|w - u\|, \; \forall w \in [x, Y] \setminus \{u\} \tag{3.15}$$

lo cual implica (ii). Además se tiene que $d(u, Y) \geq \bar{h}$; por que de otro modo tendríamos que $d(z, Y) \leq 2\bar{h}$ y $f(z) \geq \inf_{y\in Y+2\bar{h}B} f(y) > f(x) + \epsilon$ lo cual contradice (3.12). Sea $u = x + \bar{t}(\bar{y} - x)$ y $w = y + \bar{t}(\bar{y} - y) \neq u$ (para cualquier $y \in Y$). Reemplazando estas dos últimas expresiones en (3.15), tenemos que:

$$0 < \langle z^*, y - x\rangle + \epsilon\|y - x\|$$

ya que $1 - \bar{t} > 0$. De esta manera, se tiene (iii). □

Corolario 3.2.1 Sea Y un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de X y $x \in X$ y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función s.c.i. Supongamos que para algún $h > 0$, f es acotado inferiormente sobre $[x, Y] + hB$ y además

$$\lim_{\eta \to 0} \inf_{y \in [Y + \eta B]} f(y) - f(x) > r.$$

Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $z \in [x, Y] + \epsilon B$ y $z^* \in D_F f(z)$ tal que

$$r < \langle z^*, y - x \rangle + \epsilon \|y - x\| \; \forall y \in Y.$$

Además podemos elegir z satisfaciendo

$$f(z) < \lim_{\eta \to 0} \inf_{[x,Y]+\eta B} f + |r| + \epsilon.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y $\epsilon' \in (0, \epsilon/2)$ suficientemente pequeño tal que

$$\lim_{\eta \to 0} \inf_{y \in [Y + \eta B]} f(y) - f(x) > r + \epsilon'.$$

Tomando la norma euclidiana en $X \times \mathbb{R}$, es decir $\|(x,t)\| = \sqrt{\|x^2\| + t^2}$. Definamos $F(z,t) := f(z) - (r + \epsilon')t$. Obviamente F es semicontínua inferior sobre $X \times \mathbb{R}$ y acotada inferiormente sobre $[(x,0), Y \times \{1\}] + hB_{X \times \mathbb{R}}$. Además

$$\lim_{\eta \to 0} \inf_{Y \times \{1\} + \eta B_{X \times \mathbb{R}}} F = \lim_{\eta \to 0} \inf_{Y + \eta B} f - (r + \epsilon') > f(x) = F(x, 0).$$

Aplicando el teorema anterior con f, x y Y reemplazado por F, $(x, 0)$ y $Y \times \{1\}$ respectivamente, nos da la existencia de $(z, s) \in [(x,0), Y \times \{1\}] + \epsilon B_{X \times \mathbb{R}}$, $z^* \in D_F f(z)$ satisfaciendo

$$f(z) - (r + \epsilon')s < \lim_{\eta \to 0} \inf_{(w,t) \in [(x,0), Y \times \{1\}] + \eta B_{X \times \mathbb{R}}} (f(w) - (r + \epsilon')t) + \epsilon'$$

es decir

$$\begin{aligned} f(z) &< \lim_{\eta \to 0} \inf_{(w,t) \in [(x,0), Y \times \{1\}] + \eta B_{X \times \mathbb{R}}} (f(w) - (r + \epsilon')(t - s)) + \epsilon' \\ &\leq \lim_{\eta \to 0} \inf_{[x,Y]+\eta B} f + |r| + \epsilon \end{aligned}$$

tal que, para todo $y \in Y$

$$\begin{aligned} 0 &< \langle z^*, y - x \rangle - (r + \epsilon') + \epsilon' \sqrt{\|y - x\|^2 + 1} \\ &\leq \langle z^*, y - x \rangle - r + \epsilon' \|y - x\| \\ &\leq \langle z^*, y - x \rangle - r + \epsilon \|y - x\|. \end{aligned}$$

$\square$

Observación

- El término $\epsilon\|y-x\|$ en el corolario (3.2.1) no puede ser suprimida, para ello consideremos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=e^x$ y $Y=\mathbb{R}$, $x=0$

- Cuando Y es acotado es fácil ver que $\epsilon\|y-x\|$ en el corolario (3.2.1) es redundante.
  En efecto:
  si
  $$\lim_{\eta\to 0}\inf_{y\in[Y+\eta B]} f(y)-f(x)>r$$
  entonces existe $\delta>0$ tal que
  $$\lim_{\eta\to 0}\inf_{y\in[Y+\eta B]} f(y)-f(x)>r+\delta.$$
  Luego para cualquier $\epsilon>0$, existe $z\in[x,Y]+\epsilon B$ y $z^*\in D_F f(z)$ tal que
  $$r+\delta<\langle z^*,y-x\rangle+\epsilon\ \forall y\in Y.$$
  Si consideramos $0<\epsilon<\delta$, entonces
  $$r+\epsilon<r+\delta<\langle z^*,y-x\rangle+\epsilon.$$
  De esta manera se tiene que $r<\langle z^*,y-x\rangle\ \forall y\in Y$.

Teorema 3.2.3 (Principio de Decrecimiento)
Sea X un espacio de Banach con una F-norma y sea $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ una función semicontínua inferior acotada inferiormente. Supóngase que para cualquier $x\in B_r(\bar{x})$, $\xi\in D_F f(x)$ implica que $\|\xi\|>\sigma>0$. Entonces
$$\inf_{x\in B_r(\bar{x})} f(x)\leq f(\bar{x})-\sigma r.$$

Demostración: Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $r=1$, $\bar{x}=0$. Supongamos que la conclusión es falso, entonces se tendría que
$$\inf_{x\in B_1(0)}(f(x)-f(0))>-\sigma.$$
Si tomamos $\epsilon>0$ suficientemente pequeño tal que
$$\inf_{x\in B_{1-\epsilon}(0)}(f(x)-f(0))>-\sigma+\epsilon\sigma.$$

se tendría (aplicando el corolario anterior y teniendo en cuenta la segunda observación última con $Y = B_{1-\epsilon}(0)$ y $x = 0$) la existencia de $z \in B_1(0)$ y $z^* \in D_F f(z)$ tal que

$$\langle z^*, y\rangle < \sigma - \epsilon\sigma, \ \forall y \in B_{1-\epsilon}(0)$$

ya que

$$\lim_{\eta \to 0} \inf_{x \in [B_{1-\epsilon}(0) + \eta B_1(0)]} (f(x) - f(0)) > -\sigma + \epsilon\sigma.$$

Luego

$$\langle z^*, \frac{y}{1-\epsilon}\rangle < \frac{\sigma - \epsilon\sigma}{1-\epsilon} = \sigma, \ \forall y \in B_{1-\epsilon}(0)$$

por lo tanto

$$\|z^*\| \leq \sigma.$$

Llegando así a una contradicción.

3.3 Teorema de la Correspondencia Implícita

En esta sección probaremos el teorema de la correspondencia implícita para la inclusión

$$0 \in F(x,p) \tag{3.16}$$

donde $F : X \times Y \rightrightarrows Z$. Caracterizaremos la coderivada de la correspondencia implícita en términos de F. En este sentido, nuestro teorema de la correspondencia implícita corresponde al teorema de la función implícita clásica, lo cual no sólo da la existencia, si no que también formula su derivada.
El teorema de la Correspondencia implícita es un resultado de mucha importancia cuando se quiere resolver un problema de minimización con restricciones.
Cuando F es una función, entonces (3.16) se convierte en hallar solución para

$$F(x,p) = 0 \tag{3.17}$$

Lo cual podríamos expresarlo en un sistema de ecuaciones

$$f_i(x,p) = 0, \; i = 1, ..., n \tag{3.18}$$

cuando Z tiene dimención n y las f_i son las componentes de F.
Ahora si $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1, con $(\bar{x}, \bar{p})$ solución de (3.17) y las derivadas parciales de los f_i, $i = 1, ...n$, con respecto a $x \in R^n$ son linealmente independientes, entonces el teorema de la función implícita clásica nos dice que existe una vecindad de $\bar{p}$ denotada por $(V(\bar{p}))$ en $\mathbb{R}^p$ tal que para $p \in V(\bar{p})$ existe una única solución $x = g(p)$ para (3.18); además la función $g : (V(\bar{p})) \to g(V(\bar{p}))$ es de clase C^1 y

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(g(p),p)}{\partial x_k} \frac{\partial g_k(p)}{\partial p_j} = -\frac{\partial f_i(g(p),p)}{\partial p_j}, \; i = 1, ..., n \; , \; j = 1, ..., p.$$

Sin embargo, el teorema de la función implícita clásica no pude dar solución al sistema de desigualdad tal como

$$f_i(x,p) \le 0, \; i = 1, ..., n \tag{3.19}$$

tal sistema son de igual importancia cuando se trata por ejemplo con problemas de minimización con restricciones. Aquí para resolver este problema tenemos ya la necesidad de introducir correspondencia. En efecto, si $H(x,p) = \{(y_1, ..., y_n) : y_i \ge f_i(x,p) \; , i = 1, ..., n\}$ entonces el problema (3.19) se convierte en el problema de dar solución a (3.16).

Teniendo en cuenta esta última parte, probaremos el teorema general de correspondencia implícita reduciendo esto al siguiente teorema de correspondencia implícita para $f(x,p) \leq 0$. Denotaremos a esta correspondencia implícita por G, es decir:

$$G(p) := \{x : f(x,p) \leq 0\}.$$

Teorema 3.3.1 Sean X e Y dos espacios de Banach con F-normas respectivas y U un conjunto abierto de $X \times Y$. Supongamos que $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ satisface las siguientes condiciones:

(i) existe $(\bar{x}, \bar{p}) \in U$ tal que $f(\bar{x}, \bar{p}) \leq 0$.

(ii) $p \to f(\bar{x}, p)$ es semicontinua superior en $\bar{p}$.

(iii) para cualquier p fijo cerca de $\bar{p}$, $x \to f(x,p)$ es semicontinua inferior.

(iv) existe un $\sigma > 0$ tal que, para cualquier $(x,p) \in U$ con $f(x,p) > 0, \xi \in D_{F,x}f(x,p)$ implica que $\|\xi\| \geq \sigma$.

Entonces existen dos conjuntos abiertos $W \subset X$ y $V \subset Y$ conteniendo a $\bar{x}$ y $\bar{p}$ respectivamente tal que:

(a) para cualquier $p \in V$, $W \cap G(p) \neq \emptyset$

(b) para cualquier $p \in V$ y $x \in W$,

$$d(x, G(p)) \leq \frac{f_+(x,p)}{\sigma}$$

donde $f_+(x,p) := \max\{0, f(x,p)\}$

(c) Para cualquier $(x,p) \in W \times V$ con $x \in G(p)$,

$$D^*G(p;x)(x^*) = \{p^* : (-x^*, p^*) \in cono D_F f_+(x,p)\}$$

Demostración:
Sea r' un número positivo tal que $B_{r'}(\bar{x}) \times B_{r'}(\bar{p}) \subset U$ y sea $r = r'/3$. Como $f(\bar{x}, p)$ es semicontinua superior en $\bar{p}$ y $f(\bar{x}, \bar{p}) \leq 0$ existe una vecindad abierta V de $\bar{p}$ tal que $V \subset B_{r'}(\bar{p})$ y $p \in V$ $f(\bar{x}, p) < r\sigma$.
Mostraremos que V y $W := int B_r(\bar{x})$ satisfacen la conclusión del teorema.
Sea p un elemento arbitrario de V. Mostraremos que $W \cap G(p) \neq \emptyset$.

En efecto, si este no es el caso, entonces $f(x,p) > 0$ para cualquier $x \in B_\tau(\bar{x})$ y cualquier $\tau < r$. Ahora eligiendo τ suficientemente cerca a r tal que $f(\bar{x},p) < \tau\sigma$ y haciendo uso del teorema(3.2.3) tenemos

$$0 \leq \inf_{x \in B_\tau(\bar{x})} f(x,p) \leq f(\bar{x},p) - \tau\sigma < 0$$

lo cual es contradictorio.
Para mostrar (b), consideremos $x \in W$ y $p \in V$. Si $B(x, f_+(x,p)/\sigma) \not\subset intB(\bar{x}, r')$ entonces $\|x - \bar{x}\| + f_+(x,p)/\sigma \geq r'$ o $f_+(x,p)/\sigma \geq 2r$. Como la conclusión (a) implica que $d(x, G(p)) < 2r$, entonces se verifica (b). Ahora si $B(x, f_+(x,p)/\sigma) \subset intB(\bar{x}, r')$ y tomando $\tau > f_+(x,p)/\sigma$ tal que $B(x,\tau) \subset intB(\bar{x}, r')$, se tiene (debido a que $f(x,p) < \tau\sigma$ y usando argumento similar a la prueba de (a)) que existe $z \in B(x,\tau)$ tal que $f(z,p) \leq 0$. Así $d(x, G(p)) < \tau$. Haciendo $\tau \to f_+(x,p)/\sigma$ tenemos nuevamente (b).
Para verificar (c). Consideremos el par (x,p) con $x \in W \cap G(p)$ y sea $p^* \in D^*G(p;x)(x^*)$. Entonces

$$(p^*, -x^*) \in N_F((p,x); Graf(G)) = \bigcup_{k>0} kD_F d((p,x), Graf(G)).$$

Por definición existe una función g de clase C^1 con $g'(p,x) = (p^*, -x^*)$ y una constante positiva k tal que, para cualquier (q,y) en una vecindad de (p,x), tenemos

$$\begin{aligned} g(q,y) &\leq g(p,x) + kd((q,y), Graf(G)) \\ &\leq g(p,x) + kd((y, G(q)) \\ &\leq g(p,x) + (k/\sigma) f_+(y,q). \end{aligned}$$

Así $(q,y) \to [(k/\sigma) f_+(y,q) - g(q,y)]$ alcanza un mínimo local en (p,x), es decir $(-x^*, p^*) \in (k/\sigma) D_F f_+(x,p)$.
Esto establece que

$$D^*G(p;x)(x^*) \subset \{p^* : (-x^*, p^*) \in conoD_F f_+(x,p)\}$$

La inclusión inversa se sigue directamente de la desigualdad $\delta_{graf(G)} \geq kf_+$ para cualquier $k > 0$. □

Capítulo 4

Ejemplos de Aplicación

El análisis funcional es un caso particular (en ciertos casos) del análisis más general de multifunciones con gráficas convexas. Desde este punto de vista haremos simplificaciones significante de la prueba de algunos resultados clásicos.

4.1 Teorema de la aplicación abierta

Teorema 4.1.1 Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia con $Graf(F)$ convexa y cerrada. Supongamos que $y_0 \in \text{core}[F(X)]$. Entonces F es abierto en y_0, esto es, para cualquier $x_0 \in F^{-1}(y_0)$ y cualquier $\eta > 0$,

$$y_0 \in intF(x_0 + \eta B_X)$$

Demostración: Sea $T : X \times Y \to Y$ un operador lineal definido por $T(x, y) = y$ y sea $A := GrafF$. Es claro que necesitamos sólo mostrar que $T|_A$ es abierto en (x_0, y_0). Como

$$T(A - (x_0, y_0)) = F(X) - y_0$$

es absorbente y A es convexo y cerrado, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon B_Y \subset clT((A - (x_0, y_0)) \cap B_{X \times Y}).$$

Mostraremos que $T(x_0, y_0) + (\epsilon\eta/2)B_Y \subset T(((x_0, y_0) + \eta B_{X\times Y}) \cap A)$. Sea $z \in T(x_0, y_0) + (\epsilon\eta/2)B_Y$ y sea $h(x, y) := \|T(x, y) - z\|$. Aplicando el teorema (3.2.1) a h con $C := ((x_0, y_0) + \eta B_{X\times Y}) \cap A$ y el punto (x_0, y_0) vemos que existe $u \in ((x_0, y_0) + \eta B_{X\times Y}) \cap A$ y $u^* \in \partial h(u)$ tal que

$$\inf_C h - h(x_0, y_0) - \epsilon\eta/4 \leq \langle u^*, (x, y) - (x_0, y_0)\rangle, \ \forall (x, y) \in C \tag{4.1}$$

Afirmo que $h(u) = 0$.
Supongamos que eso no ocurre, entonces tendríamos que $u^* = T^*y^*$ con $y^* \in \partial\|.\|(T(u) - z)$ siendo un vector unitario (ver [11]). Entonces reescribiendo la ecuación (4.1) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_C h \leq h(x_0, y_0) + \epsilon\eta/4 + \langle y^*, T((x, y) - (x_0, y_0))\rangle \\ &\leq \epsilon\eta/2 + \epsilon\eta/4 + \langle y^*, T((x, y) - (x_0, y_0))\rangle,\ \forall(x, y) \in ((x_0, y_0) + \eta B_{X\times Y}) \cap A. \end{aligned}$$

Observando que $\eta\epsilon B_Y \subset clT((A - (x_0, y_0)) \cap \eta B_{X\times Y})$, el infimo del lado derecho de la ecuación anterior es $-\epsilon\eta/4$. lo cual es una contradicción.
Luego $h(u) = 0$ y así $T(u) = z$. □

4.2 Funciones convexas acotadas

Proposición 4.2.1 Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y semicontínua inferior, entonces f es continua en cualquier punto del núcleo de su dominio.

Demostración: Sea $F : X \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ una correspondencia definida por $F(x) := f(x) + [0, +\infty)$. Entonces F y F^{-1} son correspondencias cuyas gráficas son convexas y cerradas. Sea $\bar{x} \in \text{core}[dom(f)] = \text{core}[F^{-1}(\mathbb{R})]$. Por el teorema 4.1.1, se tiene que F^{-1} es abierta en $\bar{x}$. Ahora consideremos cualquier intervalo abierto (a, b) que contenga a $f(\bar{x})$. La semicontinuidad inferior de f implica que $\{x : f(x) \leq a\}$ es cerrado. Así $\bar{x}$ está en el interior de

$$f^{-1}((a, b)) = F^{-1}((a, b)) \setminus \{x : f(x) \leq a\}.$$

Por lo tanto, f es contínua en $\bar{x}$. □

4.3 Principio de la acotación uniforme

Proposición 4.3.1 Sea $\Im$ un conjunto de operadores lineales acotados de X en Y tal que para cada $x \in X$, $\sup\{\|Ax\| : A \in \Im\} < +\infty$. Entonces $\sup\{\|A\| : A \in \Im\} < +\infty$.

Demostración: Definamos

$$f(x) := \sup\{\|Ax\| : A \in \Im\}$$

Entonces f es convexa y semicontía inferior. Como $f(x) < +\infty$ para todo $x \in X$, por la proposición anterior f es contínua. En particular existe un $\eta > 0$ tal que $\sup\{f(x) : x \in \eta B_X\} < +\infty$. Entonces

$$\sup\{\|A\| : A \in \Im\} = \sup\{\|Ax\| : A \in \Im, x \in B_X\}$$

$$= \frac{1}{\eta}\sup\{\|Ax\| : A \in \Im, x \in \eta B_X\} = \frac{1}{\eta}\sup\{f(x) : x \in \eta B_X\} < +\infty.$$

□

4.4 Teorema de cubrimiento Abierto

Sabemos por un teorema del análisis clásico (Teorema del Rango). Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 (donde U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$) y $f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$, entonces f es una aplicación abierta en una vecindad de x.
De manera más general. Si X e Y son espacios de Banach y $f : X \to Y$ es una aplicación de clase C^1 con $f'(x)X = Y$, entonces f es una aplicación abierta en una vecindad de x. Este último (llamado teorema de Liusternik) está estrechamente relacionado con el teorema de cubrimiento abierto que enunciaremos en seguida:

Teorema 4.4.1 Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia y sea $U \subset X \times Y$ un conjunto abierto tal que:

i.- $\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in U$ tal que $\bar{y} \in F(\bar{x})$

ii.- F es semicontínua superior

iii.- $\exists\, \sigma > 0$ tal que $\forall(x, y) \in U$, $y \notin F(x)$ $\xi \in D_F f_0(x)$ implica que $\|\xi\| \geq \sigma$.

(Para cada $y \in Y$, definimos $f_y : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_y(x) := d(y, F(x))$).
Entonces, existe un conjunto abierto W conteniendo a $\bar{x}$ tal que para todo $B_r(\bar{x}) \subset W$,

$$intB_{\sigma r}(\bar{y}) \subset F(B_r(\bar{x}))$$

Demostración: Sea $\bar{F}(x, y) = F(x) - y$ y $f(x, y) = f_y(x)$ entonces tenemos:

i.- $\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in U$ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

ii.- $y \to f(\bar{x}, y)$ es contínua (en particular s.c.s).

iii.- para y fijo cerca de $\bar{y}$, $x \to f(x,y)$ es s.c.i.

iv.- $\exists\sigma > 0$ tal que para cualquier $(x,y) \in U$con $f(x,y) > 0$, $\xi \in \partial_{F,x} f(x,y)$implica que $\|\xi\| \geq \sigma$.

Luego por el teorema (3.3.1), existen conjuntos abiertos W y V tal que cumplen (a), (b) y (c) de aquel teorema. Tomando W pequeño si es necesario, podemos asumir que $B_r(\bar{x}) \subset W$ implique que $B_{r\sigma}(\bar{y}) \subset V$.
Ahora como $G(y) := F^{-1}(y) := \{x : y \in F(x)\}$ y $d(0, \bar{F}(x,y)) = d(0, F(x) - y) = d(y, F(x))$ es lipschitziana en y con constante 1, se tiene que $y \in int[B_{\sigma r}(\bar{y})]$ implica que $y \in V$ y $d(\bar{x}, F^{-1}(y)) \leq f(\bar{x}, y)/\sigma = d(y, F(\bar{x}))/\sigma = [d(y, F(\bar{x})) - d(\bar{y}, F(\bar{x}))]/\sigma \leq [\|y - \bar{y}\|]/\sigma < r$.

Por lo tanto

$$intB_{\sigma r}(\bar{y}) \subset F(B_r(\bar{x}))$$

Capítulo 5

L_f - Correspondencias

5.1 definiciones

En esta sección estudiaremos un caso particular de correspondencia donde sus valores de esta son subniveles de funciones con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ definidas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.1.1 Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$.
Definimos la correspondencia de subnivel asociada a f como:

$$L_f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$$

tal que

$$L_f(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq f(x)\}$$

De esta manera podemos definir las siguientes correspondencias:
$T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tal que:

$$T(x, y) := \begin{cases} T_{L_f(x)}(y) & \text{si } y \in cl(L_f(x)) \\ \emptyset & \text{si } y \notin cl(L_f(x)) \end{cases}$$

y

$C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tal que:

$$C(x, y) := \begin{cases} C_{L_f(x)}(y) & \text{si } y \in cl(L_f(x)) \\ \emptyset & \text{si } y \notin cl(L_f(x)) \end{cases}$$

Llamados cono Contingente y cono Tangente de Clarke, respectivamente.

Veamos ahora algunas condiciones suficientes impuestas sobre f de manera que las correspondencias tangentes definidas anteriormente sean iguales.

Proposición 5.1.1 Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función cuasiconvexa. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$T(x,\bar{x}) = C(x,\bar{x}) = cl[\bigcup_{h>0}[\frac{L_f(x)-\overline{x}}{h}]]$$

donde $\overline{x} \in fron(L_f(x))$ (si $fron[L_f(x)] \neq \emptyset$)

Demostración: Probaremos que $\bigcup_{h>0}[\frac{L_f(x)-\overline{x}}{h}] \subset C(x,\bar{x})$

En efecto:

Sea $v = \frac{(y-\overline{x})}{h}$ un elemento de $\bigcup_{h>0} \frac{L_f(x)-\overline{x}}{h}$. Consideremos las sucesiones $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0+$ y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to_{L_f} \overline{x}$.Vemos que $v_n = \frac{(y-x_n)}{h} \to v$ y que

$$x_n + h_n v_n = [(1-\frac{h_n}{h})x_n + \frac{h_n}{h}] \in L_f(x)$$

Ya que esto es combinación convexa de elementos de $L_f(x)$ (que es convexo). Luego se tiene que $v \in C(x,\bar{x})$. Como $C(x,\bar{x})$ es cerrado, se tiene que $cl[\bigcup_{h>0} \frac{L_f(x)-\overline{x}}{h}] \subset C(x,\bar{x})$, de esta manera $cl[\bigcup_{h>0} \frac{L_f(x)-\overline{x}}{h}] = C(x,\bar{x})$.Concluyendo así la proposición.
□

Proposición 5.1.2 Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$T(x,\bar{x}) = C(x,\bar{x})$$

donde $\bar{x} \in fron(L_f(x))$ (si $fron[L_f(x)] \neq \emptyset$) con $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$

Demostración: Como $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, podemos suponer que $\frac{\partial f}{\partial e_n}(\bar{x}) \neq 0$, luego por el teorema de la función implícita, existen abiertos $B = B(\bar{x}^*, \epsilon) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y $I = I(\bar{x}_n) \subset \mathbb{R}$, con $\bar{x}_n$: n-ésima componente de $\bar{x}$ y $\bar{x}^* = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{n-1})$ tal que $f^{-1}(f(\bar{x})) \cap [B \times I]$

es el gráfico de una función $\xi : B \to I$ de clase C^1.De esta manera $(y, \xi(y))$ está en la frontera de $L_f(x)$. Lugo $E = epi\xi \cap [B \times I] \subset L_f(x)$ ó $H = (epi\xi)^c \cap [B \times I] \subset L_f(x)$ Coincidiendo de esta manera todos los conos tangentes en los puntos $(y, \xi(y))$ con $y \in B$. □

Observación.
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Entonces para cada $\bar{x} \in fron(L_f(x))$ tal que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ se tiene lo siguiente:

1.- Debido a que $\bar{x} \in fron(L_f(x))$, $\bar{x}$ no es máximo local.

2.- Los conos en el punto $(x, \bar{x})$ no siempre coinciden. Para ver esto, tomemos $f(x, y) = x^2 - y^2$ y consideremos los conos en el punto $\overline{(x, y)} = (0, 0) = (x, y)$

5.2 Aplicaciones

En lo que continúa de esta sección veremos algunas relaciones existentes entre límites de correspondencia y la correspondencia misma de subniveles asociada a una función s.c.i.

Observación
Si $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ es s.c.i, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $L_f(x)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$

Lema 5.2.1 $\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$ es un conjunto no vacío $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Mas aun se tiene que

$$\bar{x} \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$$

Demostración: Sea $x_n \to \bar{x}(x_n \neq \bar{x})$. Debido a que $x_n \in L_f(x_n)$, se tiene que $d(\bar{x}, L_f(x_n)) \leq |\bar{x} - x_n|$. De esta manera $\lim_{n \to +\infty} d(\bar{x}, L_f(x_n)) = 0$
Luego por definición

$$\bar{x} \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$$

□

Proposición 5.2.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i. Si $(x, f(x))$ es un punto de acumulación de la $Graf(f)$, Entonces:

$$\liminf_{y \to x} L_f(y) \subseteq L_f(x)$$

Demostración: Si $y \in \liminf_{y \to x} L_f(y)$ entonces $\forall \ \{x_n\}_n \to x$, $\exists \ y_n \in L_f(x_n)$ tal que $y_n \to y$
Además si $(x, f(x))$ es un punto de acumulación de la $Graf(f)$, entonces existe $(x_n, f(x_n))$ tal que $x_n \to x$ $(x_n \neq x)$ y $f(x_n) \to f(x)$. De esta manera existe $y_n \in F(x_n)$ tal que $y_n \to y$
Ahora como f es semicontinua en y, se tiene:

$$f(y) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \ = \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \ = \ f(\bar{x})$$

Así:

$$\liminf_{y \to x} L_f(y) \ \subseteq L_f(x)$$

□

Observación

- La condición de ser $(x, f(x))$ punto de acumulación de la $Graf(f)$ es esencial, ya que si

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, \ si \ x > 0 \\ -x+1, \ si \ x < 0 \\ \frac{1}{2}, \ si \ x = 0. \end{cases}$$

  Entonces se tendría que :
  $F(0) = \ \{0\} \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$ y $\liminf_{x \to 0} F(x) = \{0\} \cup [1, +\infty)$

Proposición 5.2.2 Dada una funció $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. Entonces:

$$L_f(\bar{x}) \bigcap B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq \limsup_{x \to \bar{x}} L_f(x)$$

Para un cierto $\epsilon = \epsilon(f, \bar{x}) > 0$

Demostración:

1. supongamos que $\bar{x}$ no es un máximo local y sea $w \in F(\bar{x})$, entonces:
   (a) $\exists \ (x_n) \to \bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) < f(x_n) \ foralln \in \mathbb{N}$
   (b) $f(w) \leq f(\bar{x})$
   de (a) y (b), se tiene que $f(w) < f(x_n)$, luego tomando $y_n = w$(ya que $w \in F(x_n)$) se tiene que $w \in \limsup_{x \to \bar{x}} F(x)$.
   De esta manera tomamos $\epsilon = +\infty$

2. Si $\bar{x}$ es un máximo local de la función f, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall\ y \in B(\bar{x}, \epsilon)$ se tiene que $f(y) \leq f(\bar{x})$. Luego $F(\bar{x}) \cap B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq \limsup\limits_{x \to \bar{x}} F(x)$.

$\square$

Teorema 5.2.1 Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo global de f si y sólo si

$$\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $w \in \bigcap\limits_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$ entonces para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to \bar{x}$ se tiene que $w \in L_f(x_n)$, esto es $\lim\limits_{n \to +\infty} d(w, L_f(x_n)) = 0$, lo cual implica que $w \in \liminf\limits_{x \to \bar{x}} L_f(x)$. Ahora como $\liminf\limits_{x \to \bar{x}} L_f(x) \subset L_f(\bar{x})$ y $L_f(\bar{x}) = \bigcap\limits_{y \in \mathbb{R}^n} F(y)$, entonces se tiene que $\liminf\limits_{x \to \bar{x}} L_f(x) \subset \bigcap\limits_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$. De esta manera $\liminf\limits_{x \to \bar{x}} L_f(x) = \bigcap\limits_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$

($\Leftarrow$) Se sabe que $\bar{x} \in \liminf\limits_{x \to x} L_f(x)$ (lema 3.1), entonces $\forall\ x \in\ \mathbb{R}^n$ se tiene que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ ya que $\bar{x}$ pertenece a la intersección.

$\square$

Corolario 5.2.1 $\bar{x}$ es mínimo local si y sólo si $\exists\ \epsilon > 0$ tal que

$$\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) = \bigcap_{y \in B(\bar{x}, \epsilon)} L_f(y)$$

Demostración: Similar al anterior. $\square$

Proposición 5.2.3 Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ s.c.i. Supongamos que existe un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que cumple las condiciones siguientes:

i.- $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es p.a de la $Graf(f)$

ii.- $\bar{x} \in fron[L_f(\bar{x})]$.

Entonces:

$$\bar{x} \in fron\,[\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)]$$

Demostración: Se sabe por el lema 5.2.1 que $\bar{x} \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.
Ahora supongamos que $\bar{x} \in int[\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)]$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) \subseteq L_f(\bar{x})$. De esta manera $\bar{x} \notin fron[L_f(\bar{x})]$, lo cual contradice la hipótesis. □

Proposición 5.2.4 Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ s.c.i. y estrictamente cuasiconvexa, entonces:

1.- Si $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es aislado de la $graf(f)$, entonces $\bar{x}$ es mínimo global.

2.- Si $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es punto de acumulación de la $graf(f)$, entonces

$$\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) = L_f(\bar{x})$$

Demostración:

1. Por s.c.i. se tiene que existe $B = B(\bar{x}, \delta)$ tal que $\forall y \in B$, $f(y) > f(\bar{x})$. De esta manera
$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < f(\bar{x}) + \epsilon\} \bigcap B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{x}\}$$
para algún $\epsilon > 0$, $\delta = \delta(\epsilon) > 0$
Luego por cuasiconvexidad estricta, se tiene que $\bar{x}$ es mínimo global de f.

2. Por la semicontinuidad de f, sólo resta probar que $L_f(\bar{x}) \subset \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

   Sea $y \in L_f(\bar{x})$ y $(x_n) \to \bar{x}$ $(x_n \neq \bar{x})$, entonces:

   (a) Si $f(y) = f(\bar{x})$, se tiene:

      i. si $f(x_n) > f(\bar{x})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $L_f(\bar{x}) \subset L_f(x_n)$. De esta manera tomando $y_n = y$, se tiene que $y \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$

      ii. si $f(x_n) = f(\bar{x})$, entonces $L_f(\bar{x}) = L_f(x_n)$. De esta manera también tomando $y_n = y$, se tiene que $y \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$

iii. si $f(x_n) < f(\bar{x})$, entonces como y no es mínimo, existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$ tal que $f(y_n) < f(y)$
Luego por semicontinuidad inferior, se tiene que

$$f(y) \leq \liminf_n f(y_n) \ y \ f(\bar{x}) \leq \liminf_n f(x_n)$$

es decir existen los límites

$$f(y) = \lim_n f(y_n) \ = \ \lim_n f(x_n) \ = \ f(\bar{x})$$

De esta manera existen $n, m, p > N$ para todo $N > N_0$ (N_0 prefijado) tal que $f(x_n) < f(y_n) < f(x_p)$, luego $y_n \in L_f(x_n)$. Por lo que $d(y, L_f(x_n)) \leq d(y, y_n) \to 0$.
Por lo tanto $y \in \liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)$

(b) Si $f(y) < f(\bar{x})$, entonces repitiendo los procedimientos anteriores sólo probaremos el caso cuando $f(x_n) < f(\bar{x})$
Por s.c.i. de f se tiene que $f(\bar{x}) = \lim_n f(x_n)$. De esta manera para $n > N$ (con N prefijado) $f(y) < f(x_n) < f(\bar{x})$, de donde $y \in F(x_n)$ para $n > N$.
Tomando $y_n = y$ con $n > N$, se tiene que $y \in \liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)$.

Luego de a), b) y teniendo en cuenta la semicontinuidad inferior de f, se tiene que $L_f(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)$. $\square$

Proposición 5.2.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ s.c.i y estrictamente cuasiconvexa y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto donde f no alcanza su mínimo. Si para todo $\bar{y} \in fron[\liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)]$ se cumple que

$$[\bar{y} - N_{\liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)}(\bar{y})] \bigcap [\bigcap_{x\in R^n} L_f(x)] \ = \ \emptyset$$

Entonces

$$\bigcap_{x\in R^n} L_f(x) \ = \ \emptyset$$

Demostración: Si $\bigcap_{x\in R^n} L_f(x) \ \neq \ \emptyset$, entonces por la cuasiconvexidad estricta, se tiene

$$\bigcap_{x\in R^n} L_f(x) \ = \ \{\xi\} \subset L_f(\bar{x})$$

Ahora como $\bar{x} \in fron[L_f(\bar{x})]$, entonces existe $\bar{y} \in fron[L_f(\bar{x})]$ tal que

$$0 < \|\xi - \bar{y}\| = \min_{y \in fron[L_f(\bar{x})]} d(\xi, y) \ \leq \|\xi - \bar{x}\|.$$

Afirmo que: $v = \bar{y} - \xi \in N_{\liminf\limits_{x \to \bar{x}} L_f(x)}(\bar{y})$

En efecto:
Es fácil ver por la convexidad de $L_f(\bar{x})$ que v es normal proximal a $L_f(\bar{x})$ en $\bar{y}$. De esta manera, por la proposición 5.2.4, se tiene:

$$[\bar{y} - N_{\liminf\limits_{x \to \bar{x}} L_f(x)}(\bar{y})] \bigcap [\bigcap_{x \in R^n} L_f(x)] \ \neq \ \emptyset$$

Referencias

[1] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Masson Editeur, de Paris. (1983).

[2] J. P. Crouzeix. *Generalized Convexity and Generalized Monotonicity.* Monogafías del IMCA No. 17 (2000).

[3] J. P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston . (1990).

[4] R. T. Rockafellar. *Clarke's Tangent Cones and the Boundaries of Closed Sets in* $\mathbb{R}^n$. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications Vol.3, No. 1, pp.145-154 (1979).

[5] R. T. Rockfellar. *Extensions of Subgradient Calculus with Applications to Optimization.* Nonlinear Analysis Vol.9, No. 7, pp.665-698 (1985).

[6] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer, New York (1998).

[7] Yu. S. Ledyaev and Qiji J. Zhu. *Implicit Multifunction Theorems.* Set Valued Analysis 7, pp.209-238 (1999).

[8] F. H. Clarke e Yu. S. Ledyaev. *Mean value inequalities.* Proceedings of the AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Vol.122, No. 4, pp.1075-1083 (1994).

[9] I. Ekeland. *On the Variational Principle.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 47, pp.324-353 (1974).

[10] J. F. Bonnans and A. Shapiro. *Pertubation Analysis of Optimization Problems.* Springer, New York (2000).

[11] A. D. Ioffe. *Approximate subdifferentials and applications 3: the metric theory.* MATHEMATIKA A JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS Vol.36, part 1, No. 71, pp.1-38 (1989).