

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA
ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL



TÉSIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

TITULO

**Problema Restringido de tres Cuerpos y su Ampliación
al caso Tridimensional**

POR
RAFAEL DIEGO PEREZ COLLANTES

ASESOR
EDGARD VIDALON

LIMA – PERÚ
2011

RESUMEN

El presente trabajo se ha dividido en cuatro capítulos y varios apéndices:

En el primer capítulo se ha hecho una revisión crítica del problema restringido de los tres cuerpos, el cual consiste en un sistema de tres partículas de masas m_1 , m_2 y m_3 (en donde $m_3 \ll m_1, m_2$) en interacción gravitacional mutua. Se ha supuesto que la masa m_3 se mueve bajo la influencia de las masas m_1 y m_2 (llamados primarios) y que el movimiento de estos primarios, que corresponden a trayectorias circulares respecto a su centro de masa, no se ven influenciados por el movimiento de m_3 . Se ha hecho una descripción bidimensional del movimiento de m_3 y se ha encontrado sus ecuaciones diferenciales de movimiento.

En el segundo capítulo se ha ampliado el problema restringido de tres cuerpos al caso tridimensional. Se ha determinado de forma numérica la trayectoria que seguiría la partícula de masa m_3 influenciada por el movimiento de los primarios, en donde uno es una partícula y el otro un elipsoide achatado.

En el tercer capítulo se ha desarrollado el concepto de regularización, muy importante en el análisis numérico. En el problema restringido de tres cuerpos, usando el método de Levi-Civita sobre la base de la formulación Hamiltoniana. Se presentan los gráficos que muestran en el plano definido por unas nuevas coordenadas generalizadas las trayectorias regularizadas con uno de los primarios, así como las trayectorias no regularizadas con el otro primario.

En el cuarto capítulo se presentan las conclusiones y comentarios finales.

INDICE

Introducción	6
<u>Capítulo I</u>	
Análisis del problema restringido de tres cuerpos en el caso bidimensional	9
1.1 Introducción	9
1.2 Descripción del problema restringido de tres cuerpos.	9
1.3 Ecuaciones de movimiento en coordenadas rotantes	12
1.4 Energía mecánica de la partícula de masa m_3 en el sistema sinódico - constante de Jacobi	14
1.5 Ecuaciones de movimiento de la partícula de masa m_3 en coordenadas Adimensionales.	14
1.6 Calculo numérico de algunas trayectorias: órbitas periódicas en torno a un punto triangular de Lagrange.	18
<u>Capítulo II</u>	
Análisis del problema restringido de tres cuerpos en el caso tridimensional	26
2.1 introducción	26
2.2 Ecuaciones de movimiento de la partícula de masa m_3 en el sistema de referencia no inercial extendida a tres dimensiones.	26
2.3 Cálculo numérico de la trayectoria de la masa m_3 correspondiente al problema restringido de tres cuerpos ampliado a tres dimensiones.	28
2.4 Cálculo numérico de la trayectoria de m_3 bajo la influencia de dos primarios, en donde uno de ellos es puntual y el otro es un planeta en forma de elipsoide.	34
<u>Capítulo III</u>	
Regularización del problema restringido de tres cuerpos	
3.1 Introducción	39
3.2 Regularización de Levi - Cevita en el caso del problema restringido bidimensional.	39

3.3 Soluciones numéricas de las ecuaciones regularizadas	44
----------------------------------------------------------	----

Capítulo IV

Comentarios finales y Conclusiones	49
-------------------------------------------	----

4.1 Comentarios finales	49
-------------------------	----

4.2 Conclusiones	50
------------------	----

Apéndice 1 :	51
---------------------	----

Regularización en el problema de Kepler colineal

Apéndice 2:	54
--------------------	----

Regularización en el problema de Kepler (problema de dos cuerpos)

Apéndice 3:	60
--------------------	----

Movimiento en un sistema no inercial

Apéndice 4:	64
--------------------	----

Programa

Apéndice 5:	66
--------------------	----

Programa

Referencias Bibliográficas	69
-----------------------------------	----

Artículo	70
-----------------	----

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la presente tesis es estudiar de forma crítica el problema restringido de tres cuerpos, su extensión al caso tridimensional y el problema de regularización en el caso del problema restringido bidimensional de tres cuerpos.

En 1906 el astrónomo alemán Max Wolf descubrió el primer asteroide troyano, denominado asteroide 588, del planeta Júpiter. Desde entonces se ha reactualizado un viejo problema denominado de tres cuerpos, el cual ya había sido estudiado por Joseph Louis Lagrange habiendo determinado 5 puntos estacionarios en un sistema no inercial, donde dos de ellos son estables (puntos triangulares L4 y L5) [1].

En el análisis del problema restringido de tres cuerpos en el caso bidimensional se han encontrado las ecuaciones de movimiento, expresándose tanto en un sistema de coordenadas fijas (sideral) y en otro sistema de coordenadas rotantes (sinódico), obteniéndose en forma compacta y en coordenadas adimensionales. Se muestran algunas trayectorias obtenidas al resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales de movimiento, en donde al calcular la energía, se deduce que el método numérico 'no funciona'. Todas las ecuaciones de movimiento son acopladas y no lineales, por este motivo son resueltas numéricamente usando el método de Runge – Kutta mejorado mediante el programa MATLAB.

Se ha reproducido una parte del trabajo realizado por Victor Szebehely [11], que trata sobre las orbitas periódicas de gran amplitud que encierra a uno u otro punto triangular de Lagrange (L4 o L5)[8, apéndice 6]. Estas órbitas periódicas de amplitudes largas fueron encontradas por primera vez por F. R. Moulton en 1920 [11], siendo en ese entonces un trabajo controversial. El artículo del trabajo de Szebehely se reproduce a partir de la página 69.

En el segundo capítulo se ha extendido el problema restringido de tres cuerpos al caso tridimensional. La idea es reemplazar a uno de los primarios por otro que tenga la forma de un elipsoide achatado en la dirección Z. En la expansión del potencial gravitacional para este cuerpo se tomará el denominado término cuadrupolar, se escribirá las ecuaciones diferenciales de movimiento y se resolverán numéricamente. Todos los gráficos presentados están expresados en unidades arbitrarias.

Finalmente, con el objetivo de evitar 'las colisiones' con uno de los primarios se aplica la teoría de regularización de Levi – Civita, en el marco de la teoría de Hamilton, al estudio del problema restringido de tres cuerpos (caso bidimensional). La transformación de Levi-

Civita está basada en un adecuado cambio de coordenadas (definido por una función generatriz), la introducción de un tiempo ficticio y el espacio de fase extendido. Por esta razón se usa una transformación de coordenadas de tal modo que en las nuevas ecuaciones de movimiento no aparezca el problema anteriormente mencionado.

La ventaja de usar ecuaciones diferenciales ordinarias regularizadas es que se pueden aplicar cualquier condición inicial sin el temor que al usar métodos numéricos no sean correctas las soluciones, como sucede cuando se resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento singulares para trayectorias que pasan cerca a las partículas primarias. Un ejemplo de trayectorias cercanas a las partículas primarias son las trayectorias obtenidas por F. R. Moulton [11].

La teoría de la regularización tiene como objetivo reducir las ecuaciones diferenciales singulares (es decir, que tienen denominadores que pueden anularse) a ecuaciones diferenciales regulares (en donde, ya no hay denominadores que se anulen). Las transformaciones regularizantes son a menudo usadas en la Mecánica Celeste cuando dos o más cuerpos se aproximan demasiado o colisionan.

1 Análisis del problema restringido de tres cuerpos en el caso bidimensional

1.1 Introducción	9
1.2 Descripción del problema restringido de tres cuerpos.	9
1.3 Ecuaciones de movimiento en coordenadas rotantes	12
1.4 Energía mecánica de la partícula de masa m_3 en el sistema sinódico: constante de Jacobi	14
1.5 Ecuaciones de movimiento de la partícula de masa m_3 en coordenadas adimensionales.	14
1.6 Cálculo numérico de algunas trayectorias: órbitas periódicas en torno a un punto triangular de Lagrange.	18

1.1 Introducción

En este capítulo desarrollamos el problema restringido de tres cuerpos (que consiste en el movimiento de una tercera masa influenciada por dos masas puntuales (1 y 2) llamados primarios), determinando las ecuaciones diferenciales de movimiento en coordenadas cartesianas y usando un sistema de referencia no inercial. Se mencionan las condiciones en la que se basa este estudio. Nuestro interés está centrado en el estudio de trayectorias cerradas de la tercera masa, se considerará el problema en un sistema rotante y se definirá una constante de movimiento llamada energía generalizada o constante de Jacobi.

1.2 Descripción del problema restringido de tres cuerpos

Sean tres partículas de masas m_1 , m_2 y m_3 en interacción gravitacional mutua.

En este capítulo asumimos:

1. $m_3 \ll m_k$, donde $k = 1, 2$
2. Las partículas de masa m_1 y m_2 efectúan movimientos circulares respecto a su centro de masa. Esto es posible para un valor de energía que corresponda al movimiento ligado de los primarios. Recordando la teoría del problema de Kepler en el que el movimiento de la Tierra respecto al Sol es aproximadamente circular, esto corresponde a un cierto valor de energía negativa.
3. La partícula de masa m_3 se mueve en el mismo plano donde se mueven m_1 y m_2 . Esto se logra considerando una velocidad inicial de m_3 , contenida en el plano de movimiento.
4. El movimiento de m_3 es afectado por los movimientos de m_1 y m_2 ; pero el movimiento de m_3 no afecta al movimiento de m_1 y m_2 , debido a que $m_3 \ll m_k$, donde $k = 1, 2$.

A continuación se muestran los sistemas coordenados que utilizaremos (Fig. 1.1) y señalaré las posiciones de los primarios (de masas m_1 y m_2).

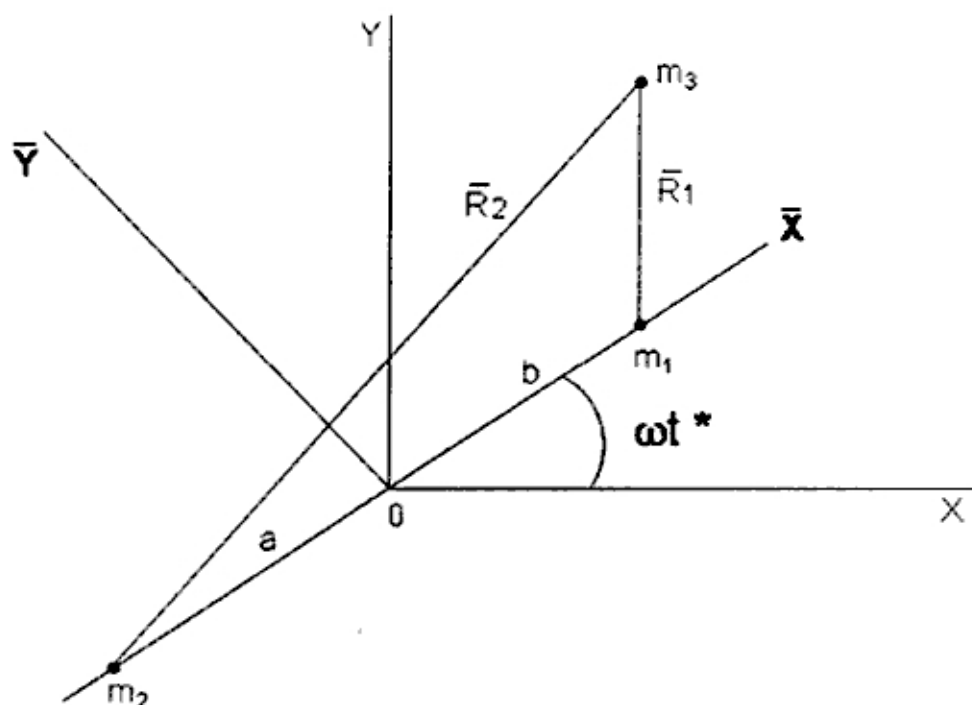


Fig. 1.1. El sistema $X Y$ es un sistema fijo inercial, tiene su origen en el centro de masa de m_1 y m_2 . El sistema $\bar{X} \bar{Y}$ es un sistema rotante (sinódico) con velocidad angular ω .

En el sistema de referencia no inercial (sinódico), las masas m_1 y m_2 se encuentran sobre el eje \bar{X} del sistema rotante.

Recordemos la expresión de la tercera ley de Kepler [1, 3]:

$$G(m_1 + m_2) = \omega^2 \ell^3, \quad (1.3)$$

donde ℓ es la distancia entre las partículas m_1 y m_2 , es decir $\ell = a + b$.

La relación (1.3) corresponde a la tercera Ley de Kepler.

Como el origen del sistema de referencia XY está en el CM de m_1 y m_2 , se tiene:

$$a = \frac{m_1}{M} \ell, \quad b = \frac{m_2}{M} \ell, \quad M = m_1 + m_2, \quad (1.4)$$

Como el sistema fijo es inercial, las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial V_3}{\partial X}, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{\partial V_3}{\partial Y}, \quad (1.5)$$

$V_3 = -V$, donde V : potencial gravitacional para m_3 debido a su interacción con m_1 y m_2 ,
luego

$$V_3 = \frac{Gm_1}{R_1} + \frac{Gm_2}{R_2}, \quad (1.6)$$

en donde

$$R_1 = \left[(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.7)$$

$$R_2 = \left[(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 \right]^{1/2},$$

Las coordenadas (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son las coordenadas de m_1 y m_2 respectivamente; (X, Y) corresponde a las coordenadas de la partícula de masa m_3 .

El movimiento de m_3 está restringido en el plano de las trayectorias descritas por m_1 y m_2 . Esto se logra dando ciertas condiciones iniciales adecuadas a m_3 .

Las posiciones de las partículas 1 y 2 en función del tiempo, t^* (tiempo real), están dadas por:

$$X_1 = b \cos \omega t^* \quad , \quad Y_1 = b \sin \omega t^* \quad , \quad X_2 = -a \cos \omega t^* \quad e \quad Y_2 = -a \sin \omega t^* \quad (1.8)$$

Reemplazando (1.8) en (1.5), obtenemos:

$$\frac{d^2X}{dt^{*2}} = -G \left[m_1 \frac{(X - b \cos \omega t^*)}{R_1^3} + m_2 \left(\frac{X + a \cos \omega t^*}{R_2^3} \right) \right], \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^{*2}} = -G \left[m_1 \frac{(Y - b \sin \omega t^*)}{R_1^3} + m_2 \left(\frac{Y + a \sin \omega t^*}{R_2^3} \right) \right],$$

o

$$\frac{d^2X}{dt^{*2}} = \frac{\partial V_3}{\partial X}(X, Y, t^*) \quad y \quad \frac{d^2Y}{dt^{*2}} = \frac{\partial V_3}{\partial Y}(X, Y, t^*) \quad (1.10)$$

1.3 Ecuaciones de movimiento en coordenadas rotantes (sinódicas)

Recordemos que (\bar{X}, \bar{Y}) son las coordenadas en el sistema sinódico (rotante), mientras que (X, Y) son las coordenadas en el sistema sideral (fijo).

Las relaciones entre las componentes de las coordenadas descritas son:

$$X = \bar{X} \cos \omega t^* - \bar{Y} \operatorname{sen} \omega t^* \quad (1.11)$$

$$Y = \bar{X} \operatorname{sen} \omega t^* + \bar{Y} \cos \omega t^*$$

En forma compacta, se puede representar como $R = A \bar{r}$, donde $R = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\bar{r} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$ y

$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega t^* & -\operatorname{sen} \omega t^* \\ \operatorname{sen} \omega t^* & \cos \omega t^* \end{pmatrix}.$$

Extendamos esta representación al plano complejo.

Sea $Z = \zeta e^{i\omega t^*}$, donde $\zeta = \bar{X} + i\bar{Y}$ y $Z = X + iY$. Las expresiones de R_1 y R_2 son ahora $R_1 = |Z - Z_1|$ y $R_2 = |Z - Z_2|$ donde $Z_1 = b e^{i\omega t^*}$ y $Z_2 = -a e^{i\omega t^*}$.

$$\text{Entonces } R_1 = |\zeta - b| = [(\bar{X} - b)^2 + \bar{Y}^2]^{1/2},$$

$$R_2 = |\zeta + a| = [(\bar{X} + a)^2 + \bar{Y}^2]^{1/2},$$

El lado izquierdo de la ecuación (1.10) toma la forma

$$\frac{d^2 Z}{dt^{*2}} = \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^{*2}} + 2i\omega \frac{d\zeta}{dt^*} - \omega^2 \zeta \right) e^{i\omega t^*} \quad (1.12)$$

Transformando el lado derecho de las ecuaciones (1.10) e igualando a la ecuación (1.12), se obtiene:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^{*2}} + 2i\omega \frac{d\zeta}{dt^*} - \omega^2 \zeta = -G \left[m_1 \frac{(\zeta - b)}{|\zeta - b|^3} + m_2 \frac{(\zeta + a)}{|\zeta + a|^3} \right] \quad (1.13)$$

Desdoblado esta relación en términos de las coordenadas sinódicas, se encuentran las siguientes relaciones¹:

$$\frac{d^2\bar{X}}{dt^{*2}} + 2\omega \frac{d\bar{Y}}{dt^*} - \omega^2\bar{X} = -G \left[m_1 \frac{(\bar{X}-b)}{r_1^{-3}} + m_2 \frac{(\bar{X}+a)}{r_2^{-3}} \right], \quad \rangle \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^{*2}} + 2\omega \frac{d\bar{X}}{dt^*} - \omega^2\bar{Y} = -G \left[m_1 \frac{\bar{Y}}{r_1^{-3}} + m_2 \frac{\bar{Y}}{r_2^{-3}} \right].$$

Las relaciones (1.14) se pueden expresar como

$$\frac{d^2\bar{X}}{dt^{*2}} - 2\omega \frac{d\bar{Y}}{dt^*} = \frac{\partial V^*}{\partial \bar{X}}, \quad \rangle \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^{*2}} + 2\omega \frac{d\bar{X}}{dt^*} = \frac{\partial V^*}{\partial \bar{Y}}$$

donde

$$\frac{\partial V^*}{\partial \bar{X}} = \omega^2\bar{X} - G \left[m_1 \frac{(\bar{X}-b)}{r_1^{-3}} + m_2 \frac{(\bar{X}+a)}{r_2^{-3}} \right] \quad \rangle (1.16)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \bar{Y}} = \omega^2\bar{Y} - G \left[\frac{m_1\bar{Y}}{r_1^{-3}} + \frac{m_2\bar{Y}}{r_2^{-3}} \right]$$

De estas dos relaciones se encuentra

¹ Como es evidente las ecuaciones diferenciales de movimiento (1.15) se pueden obtener usando la ecuación:

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{V} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{V})$ donde \vec{V} es la velocidad de m_1 respecto al sistema de referencia no inercial y $\vec{\omega}$ la velocidad angular del sistema rotante.

$$V^* = \frac{\omega^2}{2} (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) + G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right). \quad (1.17)$$

1.4 Energía mecánica de la partícula de masa m_3 en el sistema sinódico - constante de Jacobi

Multiplicando la primera relación de (1.15) por $\frac{d\bar{X}}{dt^*}$ y la segunda por $\frac{d\bar{Y}}{dt^*}$ se obtiene al integrar, la llamada integral de Jacobi que esta relacionada a la 'conservación de la energía' (falsa energía) en el sistema rotante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\bar{X}}{dt^*} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{Y}}{dt^*} \right)^2 \right] &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial V^*}{\partial \bar{X}} d\bar{X} + \frac{\partial V^*}{\partial \bar{Y}} d\bar{Y} \right) = V^* - \frac{C^*}{2} \\ \rightarrow \bar{v}^2 &= 2V^* - C^* \rightarrow C^* = 2V^* - \bar{v}^2 \\ \rightarrow \bar{v}^2 &= \omega^2 (\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2) + 2G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - C^* \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde C^* es una constante de movimiento, llamada constante de Jacobi².

1.5 Ecuaciones de movimiento de la partícula de masa m_3 en coordenadas adimensionales

Consideremos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \xi = \frac{X}{\ell} \quad \eta = \frac{Y}{\ell} \quad t = \omega t^* \quad \mu_1 = \frac{m_1}{M} = \frac{a}{\ell} \\ \mu_2 = \frac{m_2}{M} = \frac{b}{\ell} \quad \rho_1 = \frac{R_1}{\ell} \quad \rho_2 = \frac{R_2}{\ell} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Usando la regla de la cadena, las ecuaciones (1.10) se transforman en

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (1.20)$$

² Se puede interpretar como una energía mecánica generalizada. En algunos textos como el de Física Teórica - Mecánica de Landau, lo demuestran de manera alternativa (ver apéndice 3).

$$\text{donde } \phi = \frac{V_1}{\ell^2 \omega^2} = \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \quad (1.21)$$

y

$$\rho_1^2 = (\xi - \mu_2 \cos t)^2 + (\eta - \mu_2 \sin t)^2, \quad \rangle \quad (1.22)$$

$$\rho_2^2 = (\xi + \mu_1 \cos t)^2 + (\eta + \mu_1 \sin t)^2,$$

$$\text{dado que } \frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M} = 1 \quad \text{luego} \quad \mu_1 + \mu_2 = 1 \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \left[\mu_1 \frac{(\xi - \mu_2 \cos t)}{\rho_1^3} + \mu_2 \frac{(\xi + \mu_1 \cos t)}{\rho_2^3} \right], \quad \rangle \quad (1.24)$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = - \left[\mu_1 \frac{(\eta - \mu_2 \sin t)}{\rho_1^3} + \mu_2 \frac{(\eta + \mu_1 \sin t)}{\rho_2^3} \right].$$

Estas son las ecuaciones expresadas en coordenadas adimensionales en el sistema de coordenadas inerciales (siderales).

Encontremos ahora las ecuaciones de movimiento en coordenadas adimensionales en el sistema sinódico (rotante). Para determinar estas ecuaciones definimos

$$x = \frac{\bar{X}}{\ell}, \quad y = \frac{\bar{Y}}{\ell}, \quad t = \omega t^* \quad \rangle \quad (1.25)$$

$$r_1 = \frac{\bar{r}_1}{\ell}, \quad r_2 = \frac{\bar{r}_2}{\ell}, \quad \mu_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{M}$$

donde $t = \frac{t^*}{2\pi T}$, donde T es el periodo de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento (1.15) se transforman en

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \bar{\Omega}_x, \quad (1.26)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \bar{\Omega}_y,$$

$$\text{donde } \bar{\Omega} = \frac{F^*}{\ell^2 \omega^2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}, \quad (1.27)$$

siendo F^* la expresión que se obtiene al reemplazar (1.19) en (1.17):

$$F^* = \frac{\ell^2 \omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\ell^2 \omega^2 \mu_1}{r_1} + \frac{\ell^2 \omega^2 \mu_2}{r_2},$$

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2, \\ r_2^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

La expresión (1.27) representa una energía potencial adimensional.

Adicionando una constante a $\bar{\Omega}$, no hacemos ningún cambio significativo en las ecuaciones de movimiento. Luego

$$\Omega = \bar{\Omega} + \frac{1}{2}\mu_1\mu_2, \quad (1.29)$$

resulta al reemplazar (1.26) en (1.29):

$$\Omega = \frac{1}{2}[\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2] + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2},$$

o equivalentemente

$$\Omega = \mu_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1} \right) + \mu_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.30)$$

Ahora las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad \Omega_x = \mu_1 \left[(x - \mu_2) r_1 - \frac{x}{r_1^3} \right] + \mu_2 \left[(x + \mu_1) r_1 - \frac{x}{r_2^3} \right] \quad \rangle \quad (1.31)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad \Omega_y = \mu_1 \left[r_1 y - \frac{y}{r_1^3} \right] + \mu_2 \left[r_2 y - \frac{y}{r_2^3} \right].$$

siendo la integral de Jacobi \bar{C} adimensional.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\bar{\Omega} - \bar{C} \quad \rightarrow \quad \bar{C} \equiv 2\bar{\Omega} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1.32)$$

Reemplazando (1.29) en (1.32), se obtiene

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C \quad (1.33)$$

$$\text{Donde } C = \bar{C} + \mu_1 \mu_2$$

$$\text{La energía generalizada se define como } E \equiv -C/2. \quad (1.34)$$

Para pasar al sistema fijo se efectúa la transformación de coordenadas

$$\xi = x \cos t - y \sin t \quad \rangle \quad (1.35)$$

$$\eta = x \sin t - y \cos t$$

Así obtenemos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{\xi} + \eta)^2 + (\dot{\eta} - \xi)^2 \quad (1.36)$$

De (1.33), (1.35) y (1.36) conseguimos

$$2\Omega - C = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \frac{2\mu_1}{\rho_1} + \frac{2\mu_2}{\rho_2} - \bar{C}.$$

Finalmente, la integral de Jacobi, en las coordenadas del sistema inercial (SIDERAL), es

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \frac{2\mu_1}{\rho_1} + \frac{2\mu_2}{\rho_2} - \bar{C}. \quad (1.37)$$

En este estudio se han obtenido las ecuaciones de movimiento en el sistema fijo (1.24) y rotante (1.31) expresadas en coordenadas adimensionales.

1.6 Cálculo numérico de algunas trayectorias: orbitas periódicas en torno a un punto triangular de Lagrange.

CASO 1:

En esta parte, reproduciré una parte del trabajo realizado por F. R. Moulton en 1920 [11], quien usó la integral de Jacobi como ‘instrumento’ para tener confianza en las soluciones numéricas, con esto encontró una familia de orbitas periódicas de gran amplitud que encierra a uno u otro punto triangular de Lagrange³ (L4 o L5) [2, 12]. Este trabajo fue reproducido por Víctor Szebehely [11]. Para hallar la trayectoria, he resuelto numéricamente las ecuaciones diferenciales de movimiento (1.31), usando el programa MATLAB.

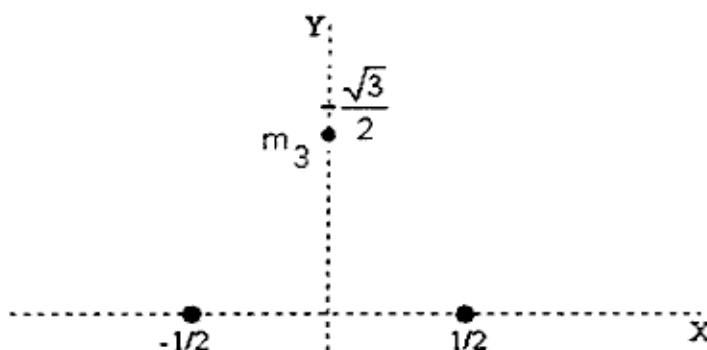


Fig. 1.2 Posición inicial de la masa m_3 .

Los primarios tienen masas iguales a $\mu = \frac{1}{2}$ y se encuentran estacionarios en el eje X del sistema sinódico (rotante). En el sistema fijo, estas masas están desplazándose sobre una misma circunferencia, manteniendo su distancia. La tercera masa se encuentra inicialmente sobre la coordenada Y en la posición $y = 0,858 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (siendo la posición de un punto de Lagrange igual a $P = (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$) y tiene sólo componente X de velocidad inicial igual a -0,029. El número de órbitas (N) se mostrará en los gráficos siguientes. **La constante de Jacobi (C) corresponde a 2,99.**

³ Véase la sección 7-6, Pág. 289

Los gráficos que a continuación se muestran (Fig. 1.3 a Fig. 1.7), están expresadas en coordenadas adimensionales (unidades arbitrarias) en el sistema sinódico (rotante), y fueron, obtenidos al resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento (1.31) con el programa MATLAB. Estos gráficos irán mostrando la trayectoria cerrada que sigue la masa m_3

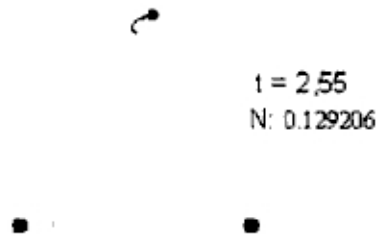


Fig. 1.3 La masa m_3 inicia su movimiento hacia la izquierda.

Como se puede apreciar en el gráfico anterior, la partícula 3 inicia su movimiento hacia la izquierda, luego hace un giro invirtiendo su dirección inicial de movimiento.

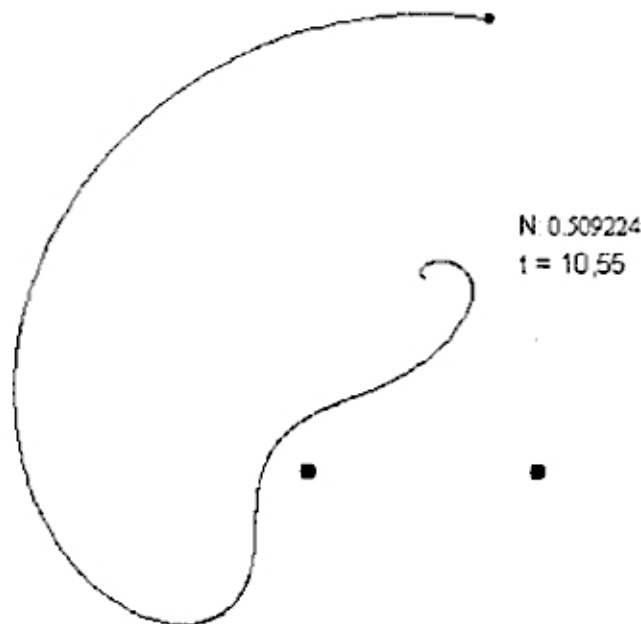


Fig. 1.4 La masa m_3 pasa cerca de uno de los primarios, luego se dirige hacia el otro.

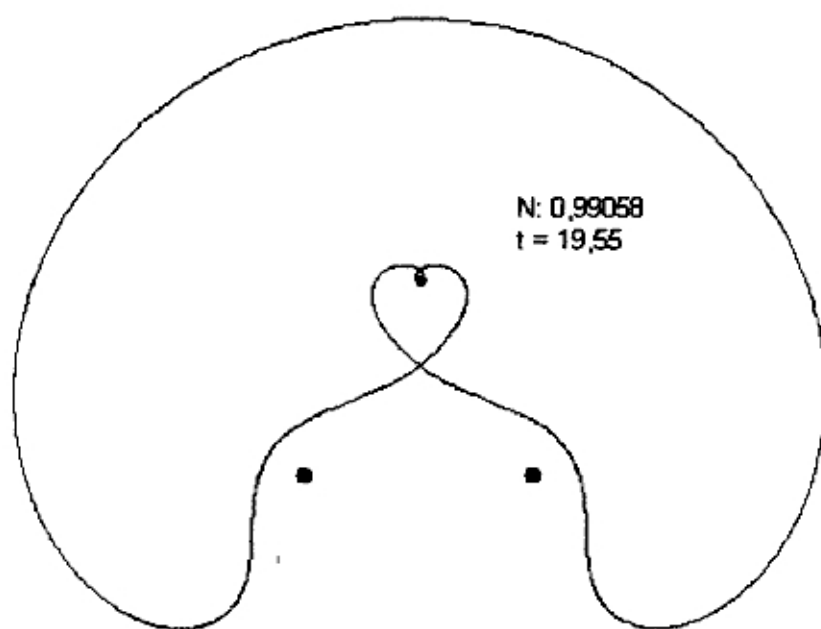


Fig. 1.5 La masa m_3 completa una órbita cerrada de gran amplitud.

Como puede apreciarse del dato de N , se tiene un ciclo, siendo el periodo aproximadamente de 19,55. Si se considera en el programa $t = 39,1$ (dos veces el periodo), se tiene 2 ciclos, repitiéndose la trayectoria.

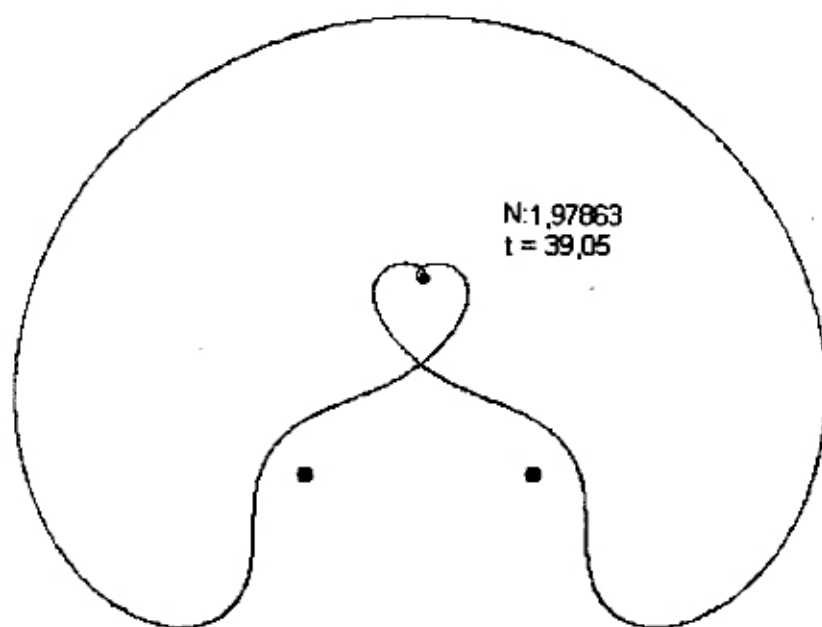


Fig. 1.6 La masa m_3 completa dos ciclos.

Reemplazando el valor de la constante de Jacobi para esta órbita, entonces de (1.34), se obtiene $E = -1.5$, valor que corresponde al calculado numéricamente, la cual es graficada en la Fig. 1.7.

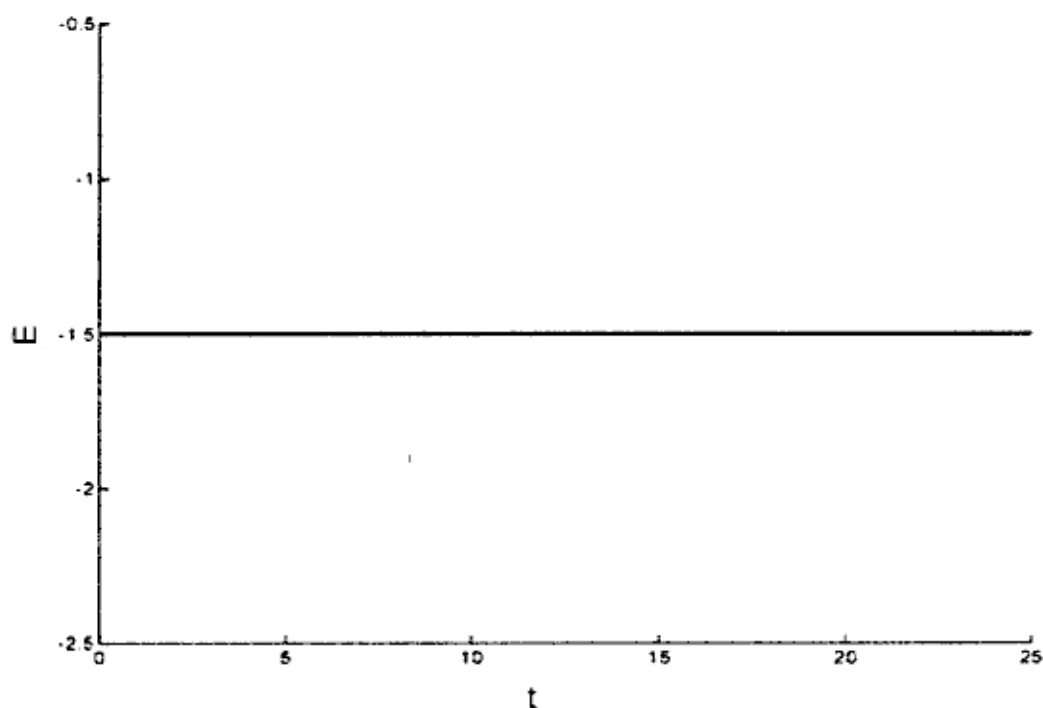


Fig. 1.7 Energía generalizada ($E = -C/2$) en función del tiempo. Como puede apreciarse, es una constante, lo que me permite validar la trayectoria mostrada en la Fig. 1.6.

En este gráfico la energía y el tiempo se encuentran expresados en unidades arbitrarias. Este resultado está en concordancia con el obtenido por Victor Szebehely [11].

CASO 2:

Consideremos ahora los siguientes datos iniciales para la partícula de masa m_3 : $x = 0$, $y = 0.12$, $V_x = -1.06006$ y $V_y = 0$. Como puede apreciarse de la fig. (1.8), la trayectoria es una curva cerrada (x e y están expresadas en unidades arbitrarias).

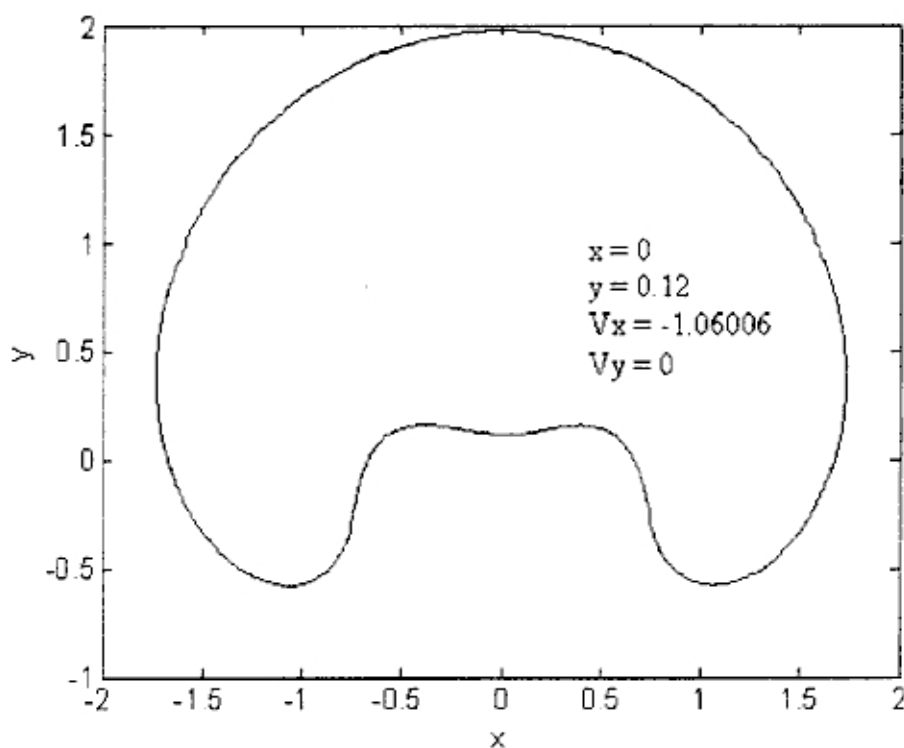


Fig. 1.8 Solución particular del problema restringido de tres cuerpos.

En la Fig. 1.9 se grafica la energía para $0 < t < 9$, en función del tiempo (en unidades arbitrarias), observándose que la energía generalizada se conserva, lo que valida la trayectoria hallada numéricamente, Fig. 1.8.

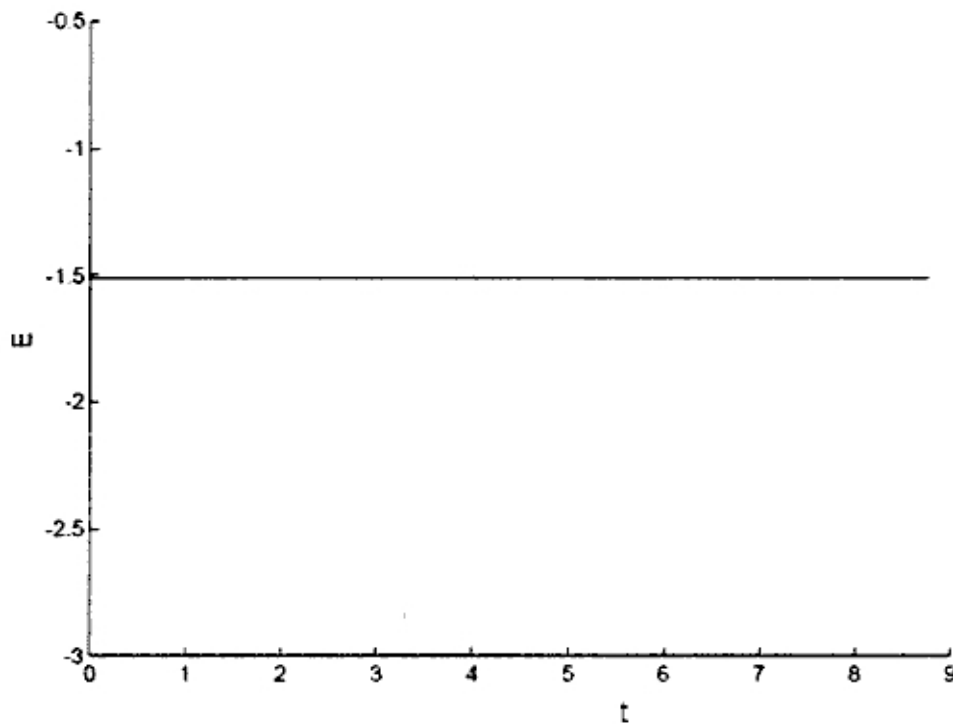


Fig. 1.9 Energía generalizada en función del tiempo (en unidades arbitrarias).

En la figura 1.10 se observa que hay un cambio en la energía generalizada para un tiempo $t = 17.06$ (determinado por el programa). Esto corresponde a un acercamiento de la partícula de masa m_3 con uno de los primarios. Este resultado nos hace pensar que el método numérico realiza cálculos incorrectos debido al cambio abrupto de la energía.

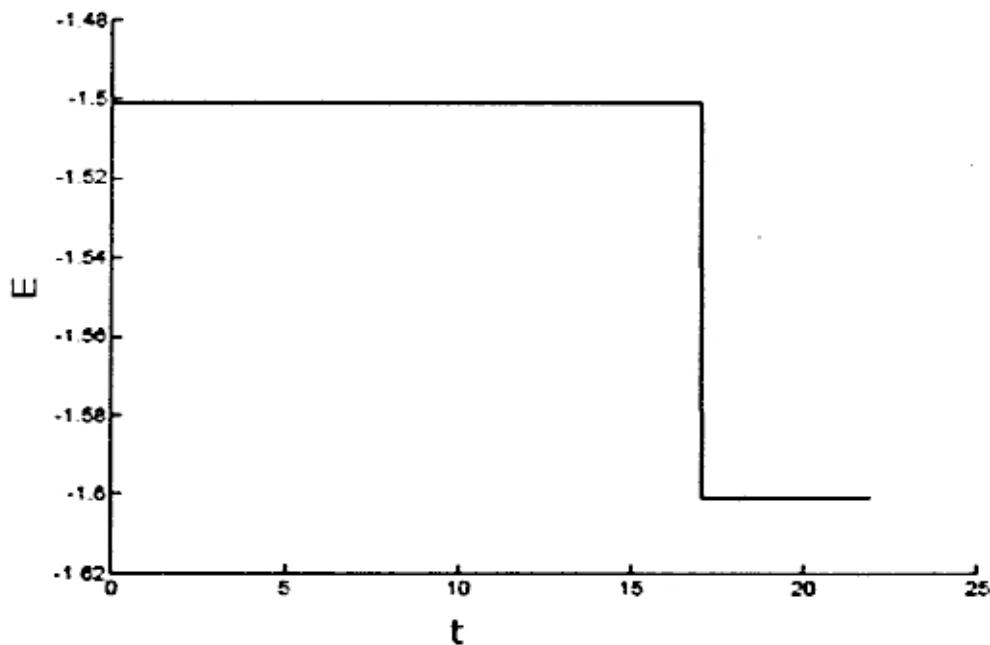


Fig. 1.10 Energía generalizada en función del tiempo (en unidades arbitrarias).

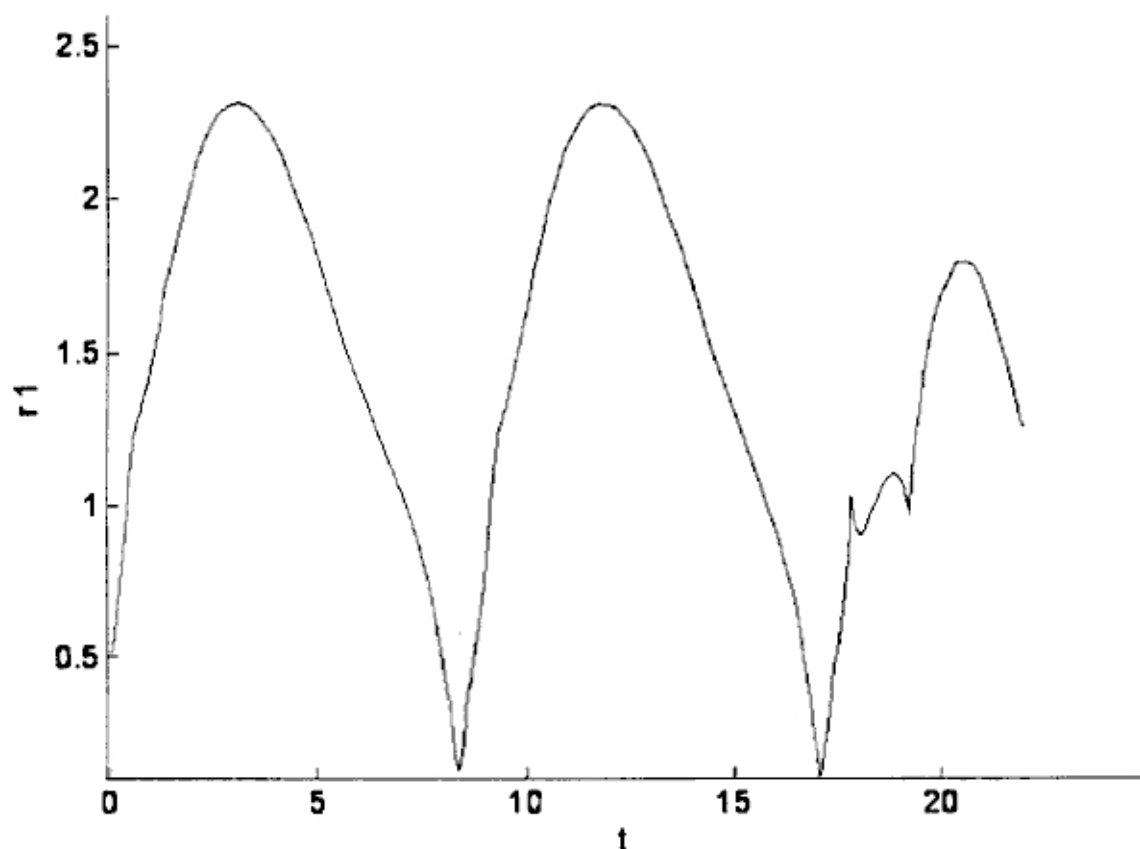


Fig. 1.11 Distancia de la masa m_3 al primario 1 en función del tiempo (en unidades arbitrarias). Se observan dos distancias mínimas.

En la Fig. 1.11 se tiene que para $t = 17.06$ hay un acercamiento mínimo al primario 1, correspondiente a una distancia 0.113, esto hace que la energía en el gráfico de la Fig. 1.10 presenta una discontinuidad. Esto evidencia la necesidad de considerar la teoría de regularización que la veremos en el capítulo 3. Para una distancia menor o igual a 0.113 (obtenida mediante el programa MATLAB) ya no se mantiene constante la energía generalizada inicial. Debo señalar que el cambio más significativo en la energía generalizada se da cuando la distancia es de 0.113.

2 Análisis del problema restringido de tres cuerpos en el caso tridimensional

2.1	Introducción	26
2.2	Ecuaciones de movimiento de la partícula de masa m_3 en el sistema de referencia no inercial extendida a tres dimensiones.	26
2.3	Cálculo numérico de la trayectoria de la masa m_3 correspondiente al problema restringido de tres cuerpos ampliado a tres dimensiones.	28
2.4	Cálculo numérico de la trayectoria de m_3 bajo la influencia de dos primarios, en donde uno de ellos es puntual y el otro es un planeta en forma de elipsoide.	34

2.1 Introducción

En este capítulo desarrollaremos el problema restringido de tres cuerpos en el caso tridimensional. El objetivo es estudiar de cómo cambia la trayectoria cerrada estudiada en el capítulo I al considerar que la partícula m_3 está localizada fuera del plano XY. Se verá también en que momento deja de ser constante la energía generalizada.

En la parte final de este capítulo reemplazaremos a uno de los primarios por otro que tenga la forma de un elipsoide achatado en la dirección z. En la expansión del potencial gravitacional para este cuerpo (ver [9]) tomaremos el término cuadrupolar, esto es posible bajo ciertas condiciones que la explicaremos en el desarrollo de este asunto. Calcularemos numéricamente la trayectoria de la masa m_3 para las condiciones iniciales similares a las usadas en el subcapítulo 1.6. Todos los gráficos presentados en este capítulo están expresados en unidades arbitrarias.

2.2 Ecuaciones de movimiento de la partícula de masa m_3 en el sistema de referencia no inercial extendida a tres dimensiones

De acuerdo a la expresión de Landau (ver apéndice 3) correspondiente a la lagrangeana (L) de una partícula de masa m en un sistema rotante con velocidad angular ω_0 se obtiene que:

$$L = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + m \omega_0[-y\dot{x} + x\dot{y}] + \frac{m}{2}[x^2 + y^2]\omega_0^2 - E_p(r) \quad (2.1)$$

donde el primer término corresponde a la energía cinética, el segundo es el término de Coriolis, el tercero es el denominado término centrífugo y $E_p(r)$ es la energía potencial gravitacional.

Usando el formalismo hamiltoniano, obtenemos de (2.1) la hamiltoniana (H), que resulta:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - V(q_1, q_2) \quad (2.2)$$

donde $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$, $q_1 = x$ y $q_2 = y$.

Esto corresponde al movimiento bidimensional de m_3 respecto de un sistema rotante.

Hagamos una extensión de (2.1) al caso tridimensional según la propuesta de Kustaanheimo - Stiefel [2]. Los términos de Coriolis y centrífugo de (2.1) lo mantendremos igual. En la expresión de la energía cinética debemos agregar $\dot{z}^2/2$ y en

la expresión de la posición debemos considerar la componente z. Obteniendo así una nueva lagrangeana (L') correspondiente al caso tridimensional:

$$L' = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] + m\omega_0[-y\dot{x} + x\dot{y}] + \frac{m}{2}[x^2 + y^2]\omega_0^2 - E_p(r),$$

con esto se obtiene la hamiltoniana en tres dimensiones:

$$H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - V(q_1, q_2, q_3) \quad (2.3)$$

donde $V(q_1, q_2, q_3)$ representa la energía potencial gravitacional en las nuevas coordenadas.

Este hamiltoniano está escrito en coordenadas generalizadas $(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3)$.

Aplicado a nuestro problema de tres cuerpos, el potencial V es:

$$V(q_1, q_2, q_3) = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (2.4)$$

$$\text{donde } r_1^2 \equiv (q_1 - \mu_1)^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad \text{y} \quad r_2^2 = (q_1 + \mu_2)^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (2.5)$$

De las ecuaciones de Hamilton⁴, aplicado a (2.3) se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 &= q_1 - \frac{\mu_1}{r_1^3}(q_1 - \mu_1) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(q_1 + \mu_2) \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 &= q_2 - \frac{\mu_1}{r_1^3}q_2 - \frac{\mu_2}{r_2^3}q_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\ddot{q}_3 = -\frac{\mu_1}{r_1^3}q_3 - \frac{\mu_2}{r_2^3}q_3.$$

$$\text{Sea } U \equiv \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad \text{y} \quad U_{q_i} \equiv \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad i = 1, 2 \text{ y } 3 \quad (2.6.1)$$

Entonces las ecuaciones de movimiento (2.6) se expresan en términos de U_{q_i} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 &= U_{q_1} \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 &= U_{q_2} \\ \ddot{q}_3 &= U_{q_3} \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁴ $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, donde $i = 1, 2, 3$

Estas ecuaciones de movimiento son similares a las trabajadas en el capítulo I correspondiente al caso bidimensional (ver (1.15)).

2.3 Cálculo numérico de la trayectoria de la masa m_3 correspondiente al problema restringido de tres cuerpos ampliado a tres dimensiones.

Resolviendo numéricamente con Matlab las ecuaciones (2.6), en donde se ha usado el integrador ODE113 (ver programa en el apéndice 5) que utiliza un paso variable, se ha obtenido la trayectoria mostrada en la Fig. 2.1 para un tiempo $0 < t < 12$, los primarios se encuentran en las posiciones $(-0.5, 0, 0)$ y $(0.5, 0, 0)$. Esta trayectoria es, por supuesto, la obtenida en el capítulo I, sólo que ahora esta representada en los ejes XYZ. Esta trayectoria se mantiene paralela al plano XY, lo que se aprecia, al rotar los ejes, observando la trayectoria desde el eje X o eje Y .

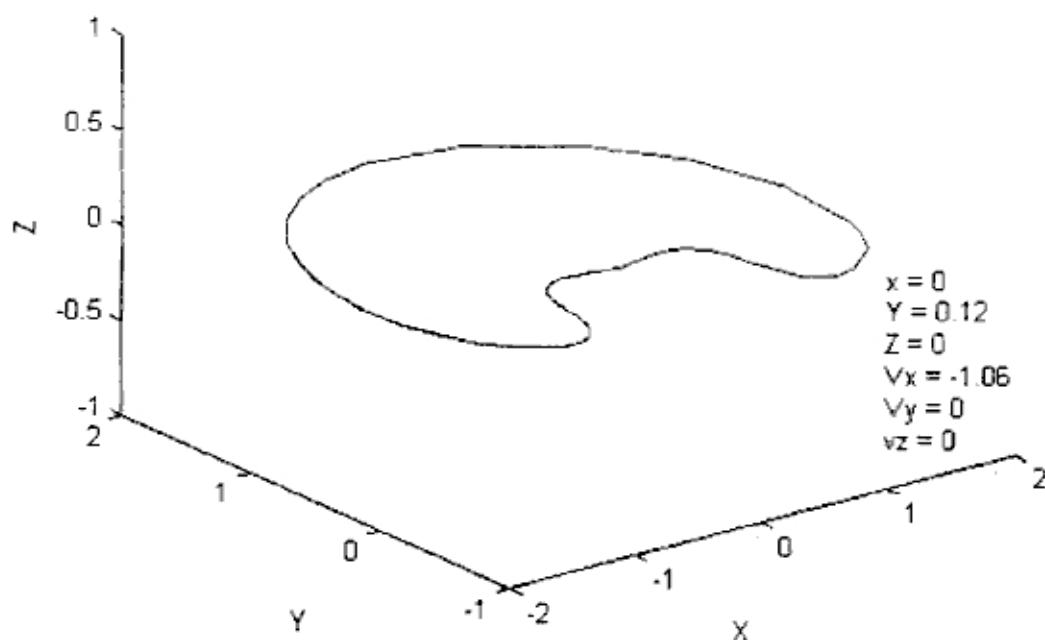


Fig. 2.1 Trayectoria de la partícula de masa m_3 . X Y Z están expresadas en unidades arbitrarias.

En la Fig. 2.2 se muestra la trayectoria que describe m_3 en el espacio, en este gráfico se ha considerado $z = 0.001$, a diferencia del gráfico de la Fig. 2.1 en donde $z = 0$. Al rotar los ejes, mediante el programa MATLAB, viendo desde arriba, se observa su proyección que corresponde a la trayectoria obtenida en la Fig. 2.1.

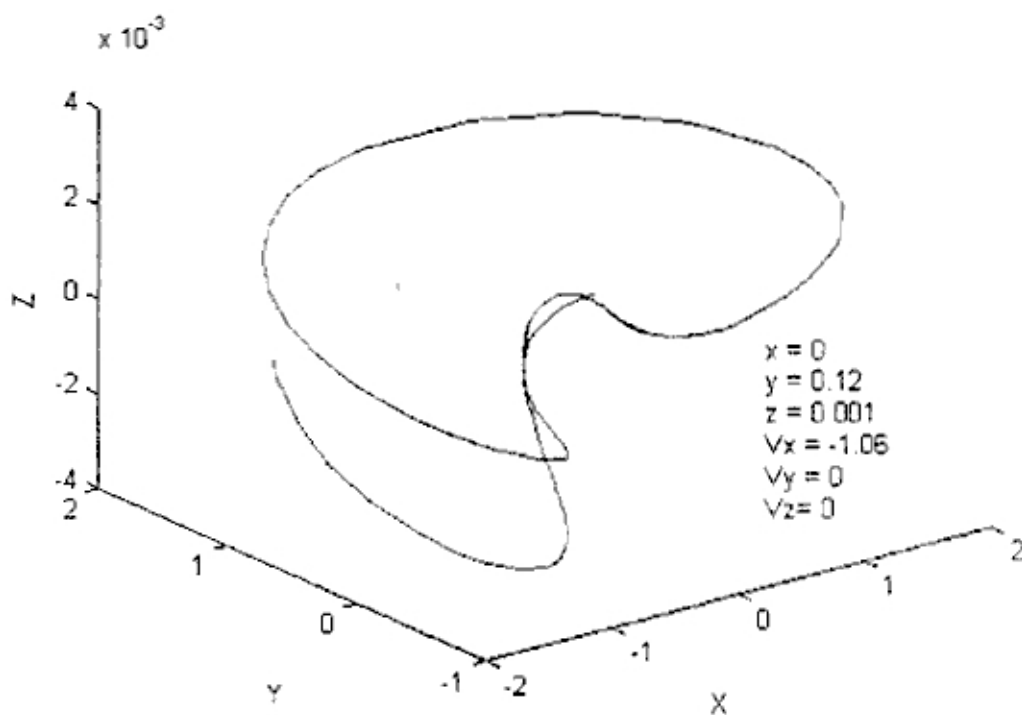


Fig. 2.2 Trayectoria de la masa m_3 en tres dimensiones. Se ha ubicado inicialmente a la masa m_3 fuera del plano $Z = 0$.

El hacer pequeños cambios en las condiciones iniciales tanto en el problema bidimensional como en el problema tridimensional, se observa que las trayectorias no experimentan cambios significativos, esto evidencia la estabilidad de estas trayectorias. Desde el punto de vista analítico resulta más complejo hacer este estudio, esto podría ser tema de otra tesis.

En la Fig. 2.3 se muestra que la energía generalizada para $0 < t < 12$ correspondiente a la trayectoria dada en la Fig. 2.2 es constante.

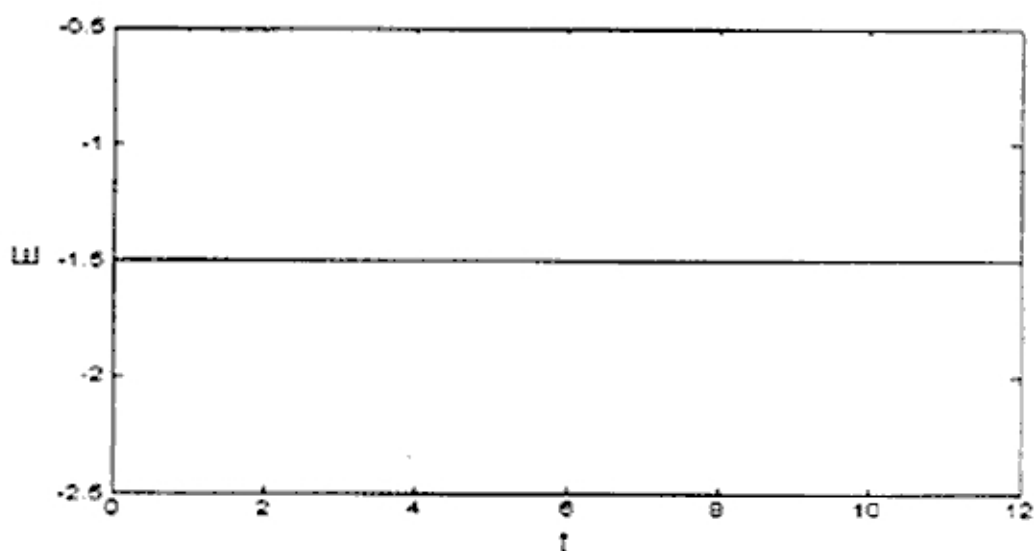


Fig. 2.3 Energía generalizada en función del tiempo en unidades arbitrarias; se aprecia que es constante, lo que valida la trayectoria.

A continuación, consideramos la trayectoria entre $t = 0$ y $t = 20$ (ver Fig. 2.4).

En el gráfico de la Fig. 2.4 se muestra la trayectoria de m_3 en el cual se observa una aproximación sospechosa. De hecho solo una parte de esta trayectoria es válida, como lo corrobora el gráfico de la energía generalizada en función del tiempo (ver Fig. 2.5) en el cual vemos que la energía es constante de $t = 0$ a $t = 18$. En la Fig. 2.6 donde graficamos la distancia de la masa m_3 al primario 1 versus el tiempo se puede apreciar que para $t = 18$ la partícula de masa m_3 está muy cerca al primario 1.

Estas observaciones permiten justificar la realización de procesos de regularización para modificar las ecuaciones que tomen en cuenta el acercamiento de m_3 a cualquiera de los primarios y se libre del problema que la energía mecánica no sea constante.

Debo señalar además que la trayectoria del movimiento en tres dimensiones cambia poco respecto de la trayectoria en el plano (ver Fig. 2.4).

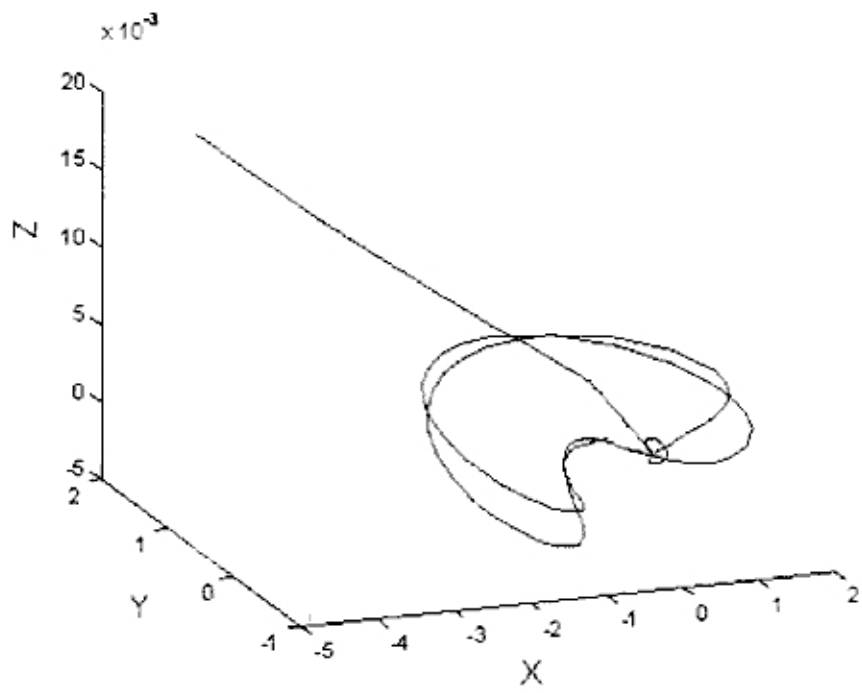


Fig. 2.4 Trayectoria de la masa m_3 . Se observa un acercamiento sospechoso de la masa m_3 al primario 1.

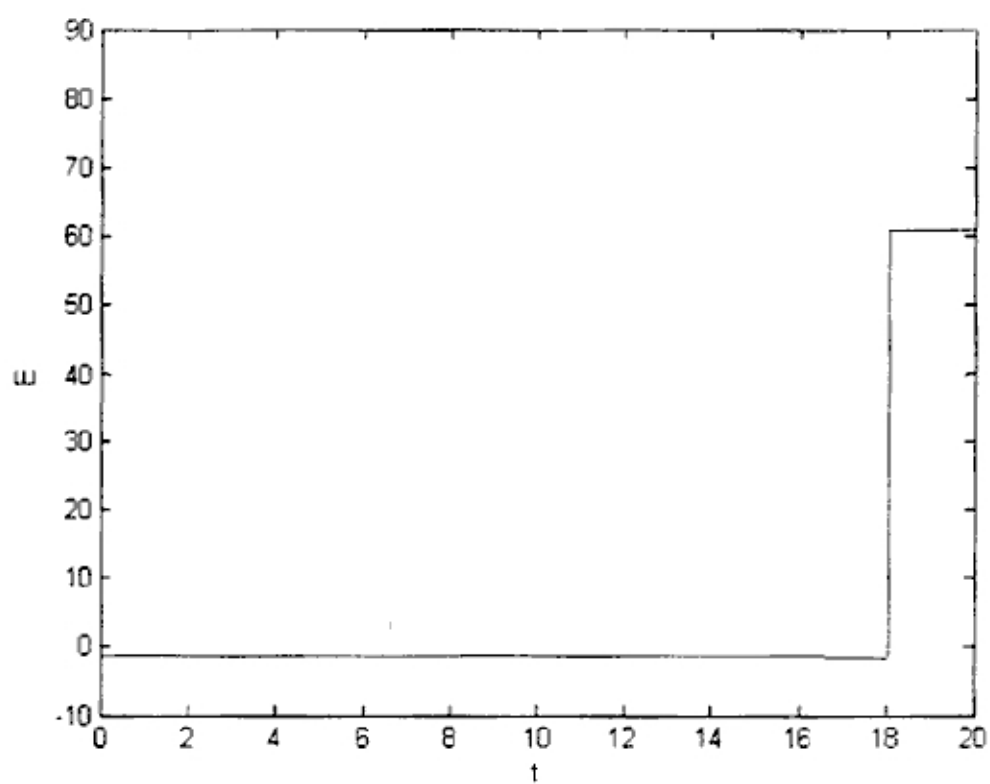


Fig. 2.5 Energía generalizada en función del tiempo. En $t = 18$ hay un cambio en la energía.

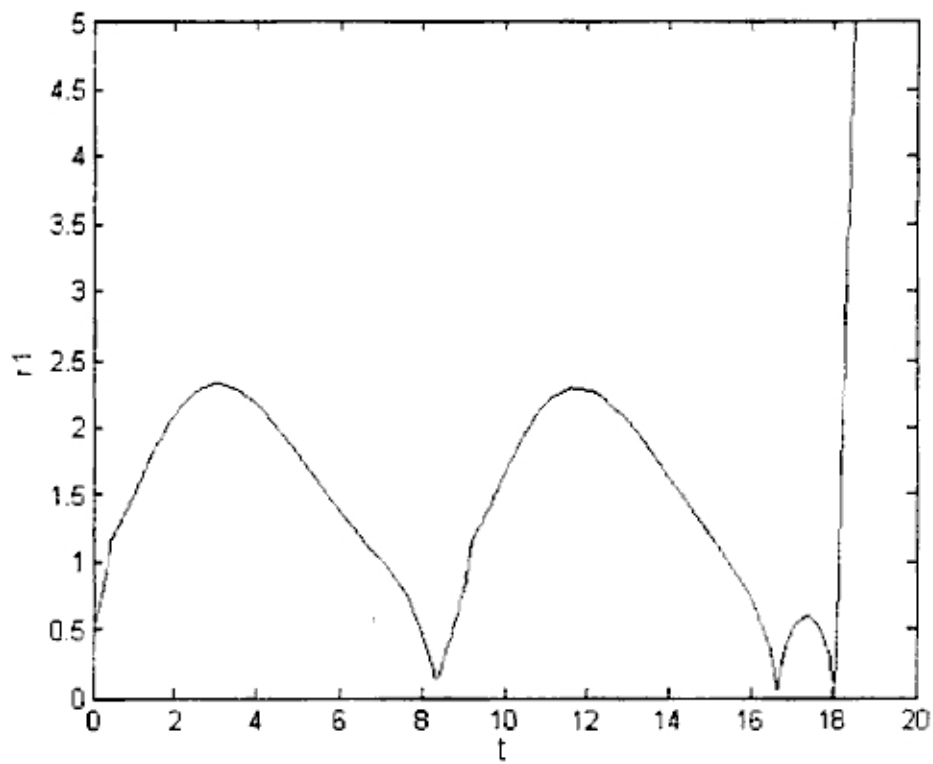


Fig. 2.6 Distancia de la masa m_3 al primario 1 en función del tiempo.

2.4 Cálculo numérico de la trayectoria de m_3 bajo la influencia de dos primarios, en donde uno de ellos es puntual y el otro es un planeta en forma de elipsoide homogéneo.

En esta sección reemplazaremos el primario 1 puntual por un cuerpo elipsoidal homogéneo de revolución achatado en la dirección Z (ver Fig. 2.6.1), se tomó $a = b$ y $\frac{c}{a} = 0.9$. Se considera que los valores de los semiejes a , b y c son pequeños comparados con ℓ (distancia entre los primarios) y además se supone que aún el movimiento relativo de m_1 y m_2 es una circunferencia.

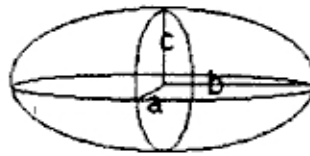


Fig. 2.6.1 Elipsoide achatado cuyos semiejes tienen valores a , b y c .

Para el caso que el centro del elipsoide esté en el origen de coordenadas, se demuestra que el potencial de este cuerpo elipsoidal está dado por [9]:

$$V = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{(a^2 - c^2)Gm_1}{10r^5} [r^2 - 3z^2] - \frac{3(a^2 - c^2)^2 Gm_1}{280r^9} [3r^4 - 30r^2z^2 + 35z^4] \quad (2.8)$$

donde el primer término se denomina monopolar ($n = 0$), el segundo cuadripolar ($n = 2$) y el tercero octopolar ($n = 4$). Los términos como el dipolar ($n = 1$) y otros correspondientes a n impar son iguales a cero, véase la demostración en la referencia [9].

En la expresión (2.8) sólo basta considerar hasta el término cuadripolar para $c/a = 0.9$ porque al comparar los ordenes de magnitud entre el término cuadripolar y el octopolar se tiene que el primero es aproximadamente 163 veces el segundo⁵ [9].

Las ecuaciones de movimiento la obtendremos de (2.7), sólo tenemos que agregar en la expresión de U (2.6.1) el término cuadripolar de (2.8) (segundo término).

$$U \equiv \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{(a^2 - c^2)\mu_1}{10r_1^5} [r_1^2 - 3z^2]$$

debo señalar que el término cuadripolar agregado ya se ha expresado en coordenadas adimensionales, por ello aparece μ_1 .

⁵ Si tomamos los datos de nuestro planeta, resulta que el término cuadripolar es 472 veces el octopolar [9].

Las ecuaciones diferenciales de movimiento son:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{\mu_1}{r_1^3}(x - \mu_1) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x + \mu_2) - \frac{(a^2 - c^2)\mu_1}{10} \left(\frac{3}{r_1^{5/2}} - \frac{15z^2}{r_1^{7/2}} \right) (x - \mu_1)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{\mu_1}{r_1^3}y - \frac{\mu_2}{r_2^3}y - \frac{(a^2 - c^2)\mu_1}{10} \left(\frac{3}{r_1^{5/2}} - \frac{15z^2}{r_1^{7/2}} \right) y \quad (2.9)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu_1}{r_1^3}z - \frac{\mu_2}{r_2^3}z - \frac{(a^2 - c^2)\mu_1}{10} \left(\frac{3}{r_1^{5/2}} - \frac{15z^2}{r_1^{7/2}} \right) z$$

donde $r_1 = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2}$

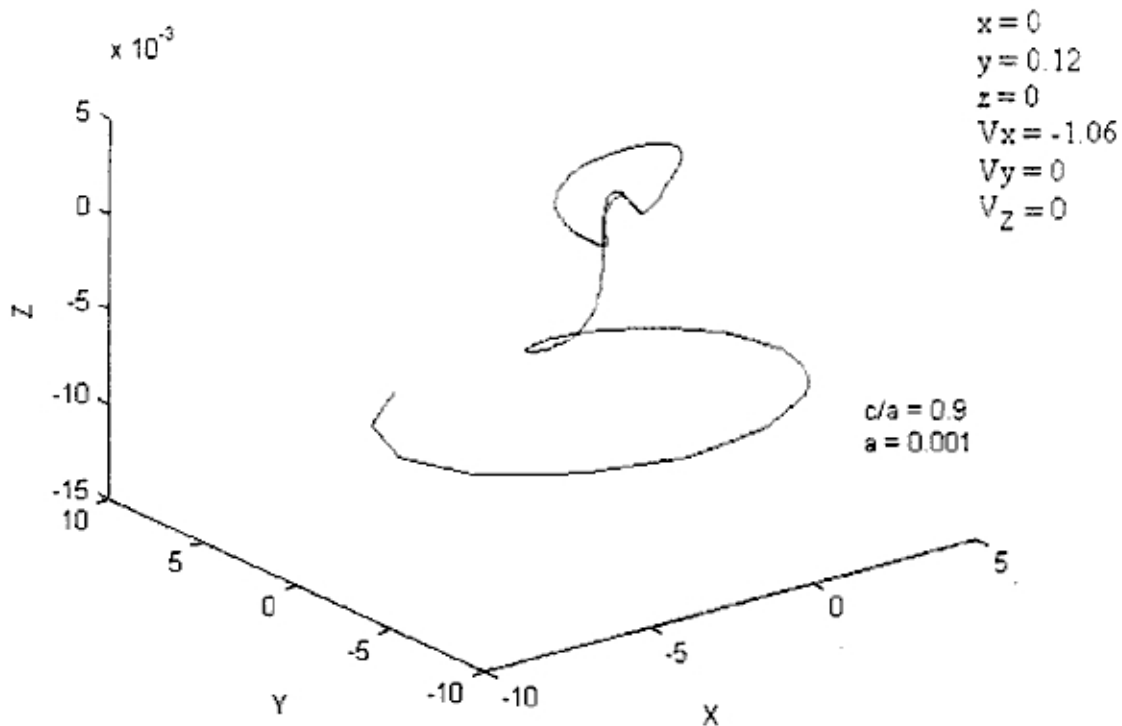


Fig. 2.7 Trayectoria de la masa m_3 en tres dimensiones para $0 < t < 18$.

Si observamos desde el eje Z la trayectoria mostrada en la Fig. 2.7 veremos la trayectoria mostrada en la Fig. 2.1. Se aprecia en la Fig. 2.8 una discontinuidad en la energía para $t = 8.1$.

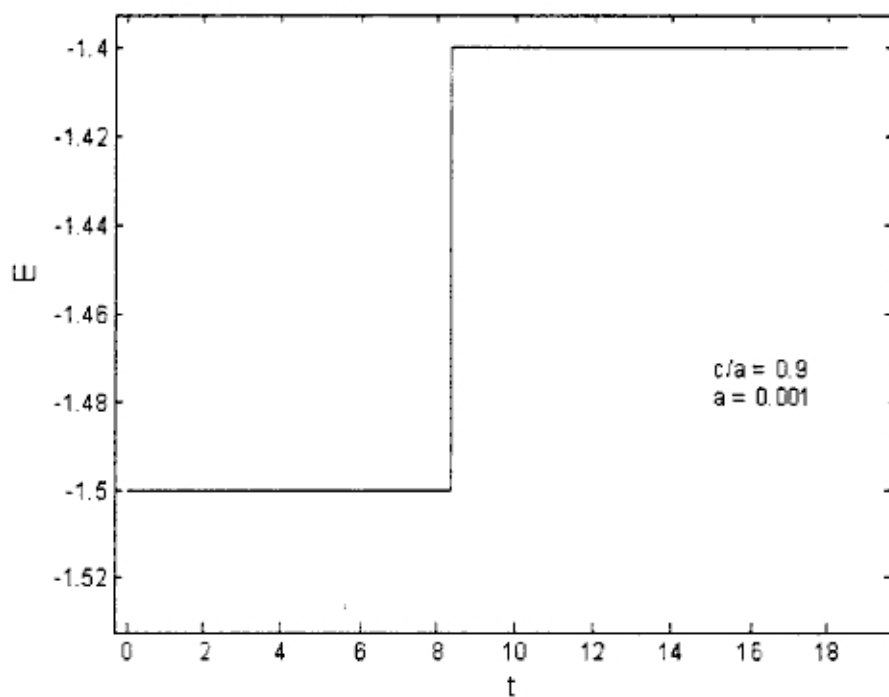


Fig. 2.8 Energía generalizada en función del tiempo para $0 < t < 18$.

En la Fig. 2.9 se muestra la distancia de m_3 en función del tiempo, se puede apreciar que para el tiempo 8.1 existe un acercamiento al primario 1.

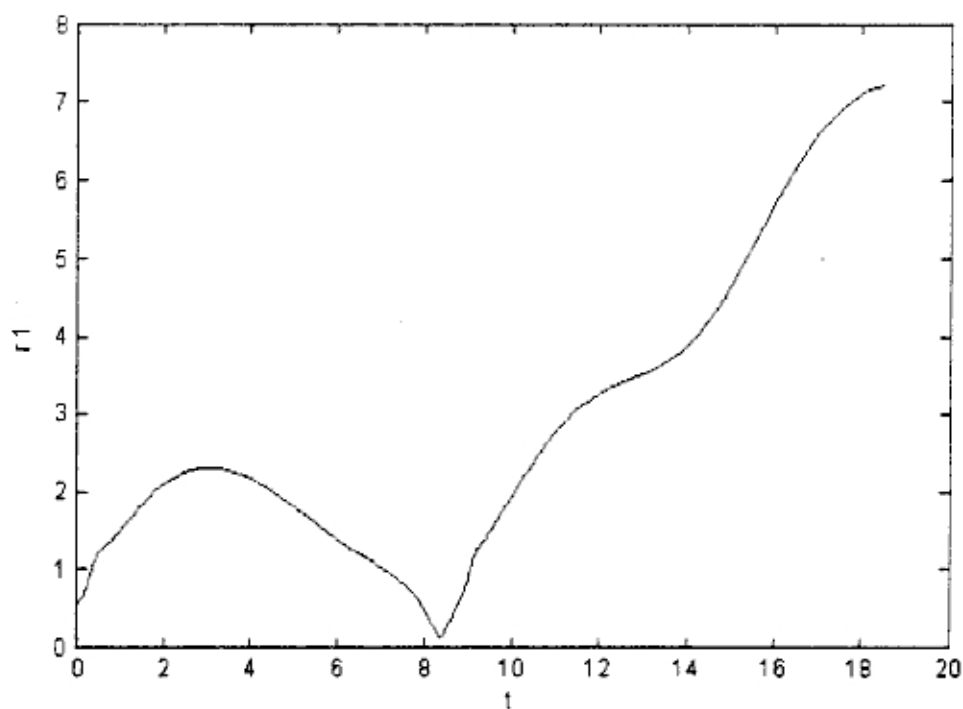


Fig. 2.9 Distancia de la masa m_3 a la masa m_1 en función del tiempo.

Con relación a la diferencia entre este caso en donde el primario 1 es un elipsoide achatado y el otro caso en el que los dos primarios son puntuales podemos decir que no hay una diferencia marcada en ambos casos, es decir el término cuadrupolar se está comportando como una perturbación. Pero la energía no se conserva, hay un salto para $t \approx 8,1$, esto sucede por el acercamiento de la partícula de masa m_3 a m_1 .

Mostramos que para ciertas trayectorias a pesar de que usamos un óptimo método numérico Runge – Kutta con paso variable, se cometen errores. Esto sucede porque hay términos en las ecuaciones diferenciales de movimiento que se hacen muy grandes cuando la distancia entre m_3 y las otras partículas tiende a cero, por esto cambiamos las ecuaciones diferenciales de movimiento mediante una transformación de coordenadas, proceso conocido como regularización.

3 Regularización del problema restringido de tres cuerpos

3.1 Introducción	39
3.2 Regularización de Levi - Cevita en el caso del problema restringido bidimensional.	39
3.3 Soluciones numéricas de las ecuaciones regularizadas	44

3.1 Introducción

Se le dice regularización al proceso de modificar las ecuaciones de movimiento en el problema de tres cuerpos usando un cambio de variable tal que en las nuevas ecuaciones diferenciales no aparezcan factores que tiendan al infinito cuando la masa en movimiento m_3 se acerca a uno de los primarios.

En este capítulo consideramos la regularización de Levi – Civita [2] correspondiente al problema de tres cuerpos bidimensional, en donde regularizaremos ‘las colisiones’ de la partícula de masa m_3 con uno de los primarios. En los apéndices 1 y 2 se considera el problema de regularización con uno de los primarios en el caso del problema de dos cuerpos correspondiente al problema unidimensional y bidimensional respectivamente. Apreciaremos la utilidad del proceso de regularización resolviendo numéricamente las ecuaciones diferenciales de movimiento.

3.2 Regularización de Levi - Cevita en el caso del problema restringido bidimensional

Consideremos el problema restringido de tres cuerpos estudiado en el capítulo 1. Se demuestra que la hamiltoniana que describe el movimiento del tercer cuerpo en una referencia rotante corresponde a (ver apéndice 3):

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - V(q_1, q_2) \quad (3.1)$$

donde p_1, p_2 y q_1, q_2 corresponden a las coordenadas generalizadas del momentum y de las posiciones respectivamente.

El potencial V está dado por $V(q_1, q_2) = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$ donde μ_1 y μ_2 son las masas

adimensionales de los primarios, situados en las posiciones $r_1 = \left[(q_1 - \mu_1)^2 + q_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ y

$$r_2 = \left[(q_1 + \mu_2)^2 + q_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Consideremos una transformación canónica de (p_1, p_2, q_1, q_2) a las nuevas variables (P_1, P_2, Q_1, Q_2) con una función generatriz de la forma

$$\chi(p_1, p_2, Q_1, Q_2) = p_1 \alpha(Q_1, Q_2) + p_2 \beta(Q_1, Q_2) \quad (3.2)$$

para algunas funciones α y β definidas como sigue; para regularizar las colisiones con el primario P_1 ⁶:

$$\begin{aligned} \alpha(Q_1, Q_2) &= Q_1^2 - Q_2^2 + \mu_1 \\ &\text{y} \\ \beta(Q_1, Q_2) &= 2Q_1 Q_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

De la teoría de las transformaciones canónicas tenemos las ecuaciones características asociadas, donde hemos tomado como nuestra función generatriz a la expresión (3.2), luego

$$q_1 = \frac{\partial \chi}{\partial p_1} = \alpha(Q_1, Q_2)$$

$$q_2 = \frac{\partial \chi}{\partial p_2} = \beta(Q_1, Q_2)$$

$$P_1 = \frac{\partial \chi}{\partial Q_1} = p_1 \frac{\partial \alpha}{\partial Q_1} + p_2 \frac{\partial \beta}{\partial Q_1}$$

$$P_2 = \frac{\partial \chi}{\partial Q_2} = p_1 \frac{\partial \alpha}{\partial Q_2} + p_2 \frac{\partial \beta}{\partial Q_2}$$

El término $q_2 p_1 - p_2 q_1$ expresado en función de las nuevas variables corresponde a

$$q_2 p_1 - p_2 q_1 = \frac{1}{2\Gamma} \left[P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (\alpha^2 + \beta^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \quad (3.4)$$

$$\text{donde } \Gamma \equiv 4(Q_1^2 + Q_2^2) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial Q_1} \right)^2 \quad (3.5)$$

El Hamiltoniano transformado se convierte en

$$\tilde{H}(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = \frac{1}{2\Gamma} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (\alpha^2 + \beta^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (\alpha^2 + \beta^2) \right] - \tilde{V}(Q_1, Q_2),$$

donde $\tilde{V}(Q_1, Q_2) = V(\alpha(Q_1, Q_2), \beta(Q_1, Q_2))$. Las ecuaciones de movimiento en la dinámica de Hamilton toman la forma

⁶ Por otra parte para regularizar las colisiones con el otro primario P_2 se tomarán

$$\alpha(Q_1, Q_2) = Q_1^2 - Q_2^2 - \mu_2 \quad \text{y} \quad \beta(Q_1, Q_2) = 2Q_1 Q_2.$$

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= \frac{1}{2\Gamma} \left[2P_1 + \frac{\partial}{\partial Q_2} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \\
 \dot{Q}_2 &= \frac{1}{2\Gamma} \left[2P_2 - \frac{\partial}{\partial Q_1} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \\
 \dot{P}_1 &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_1} \\
 \dot{P}_2 &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_2}
 \end{aligned}
 \quad \rangle \quad (3.6)$$

Ahora consideramos al tiempo t como una coordenada canónica, luego al espacio (\bar{Q}, t, \bar{P}, T) se le dice espacio de fase extendido, donde T es el momentum conjugado de t , el nuevo hamiltoniano lo expresamos por:

$$H_{\text{ext}} = T + \frac{1}{2\Gamma} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (\alpha^2 + \beta^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (\alpha^2 + \beta^2) \right] - \tilde{V}(Q_1, Q_2)$$

A continuación introduciremos el tiempo ficticio 's' relacionado al tiempo ordinario t por

$$dt = \Gamma ds.$$

donde Γ está definido en (3.5).

Definamos un nuevo hamiltoniano⁷ H_{ext}^* ,

$$\begin{aligned}
 H_{\text{ext}}^* &\equiv \Gamma H_{\text{ext}} = \Gamma T + \frac{1}{2} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (\alpha^2 + \beta^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \\
 &- \Gamma \tilde{V}(Q_1, Q_2)
 \end{aligned}
 \quad (3.7)$$

Definamos la función $\sigma(Q_1, Q_2) \equiv \alpha(Q_1, Q_2) + i\beta(Q_1, Q_2)$, entonces $|\sigma|^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Las ecuaciones de Hamilton con respecto al tiempo ficticio están dadas por

$$\dot{Q}_1 = P_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Q_2} |\sigma|^2$$

$$\dot{Q}_2 = P_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Q_1} |\sigma|^2$$

$$t' = \Gamma$$

⁷ De igual forma se procedió en el desarrollo de la regularización de dos cuerpos en el caso unidimensional (ver apéndice 1)

$$\begin{aligned}
 P_1' &= -T \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_1} - \frac{1}{2} \left[P_1 \frac{\partial^2 |\sigma|^2}{\partial Q_1 \partial Q_2} - P_2 \frac{\partial^2 |\sigma|^2}{\partial Q_1^2} \right] + \frac{\partial}{\partial Q_1} (\Gamma \tilde{V}) \\
 P_2' &= -T \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_2} - \frac{1}{2} \left[P_1 \frac{\partial^2 |\sigma|^2}{\partial Q_2^2} - P_2 \frac{\partial^2 |\sigma|^2}{\partial Q_2 \partial Q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial Q_2} (\Gamma \tilde{V}) \\
 T' &= 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $Q_i' = \frac{\partial Q_i}{\partial s}$ y $P_i' = \frac{\partial P_i}{\partial s}$

De la última relación, se obtiene que $T = \text{cte}$ y $T = -\tilde{H}$ (véase el apéndice 2).

La singularidad aparece en el término $\frac{\partial}{\partial Q_j} (\Gamma \tilde{V})$ ($j = 1, 2$) para los posibles acercamientos con el primario 2; pero ya no con el primario 1.

A continuación encontraremos las ecuaciones correspondientes a Q_1' y Q_2' , a partir de las ecuaciones (3.8):

Dado que $|\sigma|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\alpha = Q_1^2 - Q_2^2 + \mu_1$ y $\beta(Q_1, Q_2) = 2Q_1Q_2$, expresemos Q_1' , Q_2' , P_1' y P_2' en términos de Q_1 , Q_2 , P_1 y P_2 :

$$Q_1' = P_1 - 2Q_1^2Q_2 + 2Q_2^3 + 2\mu_1Q_2 \tag{3.9}$$

$$Q_2' = P_2 - (Q_1^2 - Q_2^2 + \mu_1)2Q_1 - 2Q_1Q_2^2 = P_2 - 2Q_1^3 - 2Q_1Q_2^3 - 2Q_1\mu_1$$

$$P_1' = -T \frac{a}{\partial Q_1} (4Q_1^2 + 4Q_2^2) - \frac{1}{2} \left[P_1 \frac{\partial^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{\partial Q_1 \partial Q_2} - P_2 \frac{\partial^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{\partial Q_1^2} \right] + 4 \frac{a}{\partial Q_1} \{ (Q_1^2 + Q_2^2) \tilde{V} \}$$

$$= -8TQ_1 - 4P_1Q_1Q_2 + 12P_2Q_1^2 - 4P_2Q_2^2 + \frac{4(2Q_1)\mu_2}{\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_2 + \mu_1) + (\mu_1 + \mu_2)^2}}$$

$$\frac{2(Q_1^2 + Q_2^2)\mu_2 \{ 4Q_1^3 + 4Q_2^2Q_1 - 8Q_1(\mu_2 + \mu_1) \}}{\left(\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_2 + \mu_1) + (\mu_1 + \mu_2)^2} \right)^3}$$

$$P_2' = -8TQ_2 - 2P_1Q_1^2 - 6P_1Q_2^2 - 2\mu_1P_1 + 4P_2Q_1Q_2 +$$

$$\frac{4(2Q_2)\mu_2}{\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_2 + \mu_1) + (\mu_1 + \mu_2)^2}} -$$

$$-2\mu_2(Q_1^2 + Q_2^2) \frac{\{4Q_1^2Q_2 + 4Q_2^3 + 4Q_2(\mu_1 + \mu_2)\}}{\left(\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_2 + \mu_1) + (\mu_1 + \mu_2)^2}\right)^3}$$

Ahora derivemos Q_1' y Q_2' respecto del tiempo ficticio 's', obteniéndose:

$$Q_1'' = -8TQ_1 - 4P_1Q_1Q_2 + 12P_2Q_1^2 - 4P_2Q_2^2 +$$

$$\frac{8Q_1\mu_2}{\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_2 + \mu_1) + (\mu_1 + \mu_2)^2}} -$$

$$\frac{2\mu_2(Q_1^2 + Q_2^2)\{4Q_1^3 + 4Q_2^2Q_1 - 8Q_1(\mu_1 + \mu_2)\}}{\left(\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_2 + \mu_1) + (\mu_1 + \mu_2)^2}\right)^3} +$$

$$4Q_1Q_1'Q_2 + 2Q_2Q_1'^2 + 6Q_2^2Q_2' - 2\mu_1Q_2' \quad (3.10)$$

$$Q_2'' = -8TQ_2 - 2P_1Q_1^2 - 6P_1Q_2^2 - 2\mu_1P_1 + P_2Q_1Q_2 +$$

$$\frac{8\mu_2Q_2}{\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2)^2}} -$$

$$2\mu_2(Q_1^2 + Q_2^2) \frac{\{4Q_1^2Q_2 + 4Q_2^3 + 4Q_2(\mu_1 + \mu_2)\}}{\left(\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 2(Q_1^2 - Q_2^2)(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2)^2}\right)^3} -$$

$$6Q_1^2Q_1' - 2Q_1Q_2'^2 - 2Q_12Q_2Q_2' - 2\mu_1Q_1' \quad (3.11)$$

En las ecuaciones (3.10) y (3.11) reemplazamos P_1 y P_2 (despejados de (3.9)), consiguiendo estas ecuaciones en la forma $Q_1'' = F(Q_1, Q_2)$ y $Q_2'' = G(Q_1, Q_2)$.

3.3 Soluciones numéricas de las ecuaciones regularizadas

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) se han resuelto numéricamente usando el programa de MATLAB presentado en el apéndice 2. Dado que el sistema de ecuaciones es de orden 2, se ha realizado la siguiente sustitución:

$$\begin{array}{lcl} u_1 = Q_1 & & u_1' = u_2 \\ u_2 = Q_1' & \Rightarrow & u_2' = Q_1'' \\ u_3 = Q_2 & & u_3' = u_4 \\ u_4 = Q_2' & & u_4' = Q_2'' \end{array}$$

Los primarios están situados ahora en (0,0) y (1,0) (estas posiciones se obtienen de (3.3)).

Se resolvieron las ecuaciones diferenciales de movimiento numéricamente para dos casos:

1) En este caso la condición inicial para Q_1 corresponde a un valor cercano al primario 1:

$$Q_1 = 0.1, \quad Q_2 = 0, \quad P_1 = -0.1 \text{ y } P_2 = 0.$$

2) En este caso la condición inicial para Q_1 corresponde a un valor cercano al primario 2:

$$Q_1 = 0.9, \quad Q_2 = 0, \quad P_1 = 0.1 \text{ y } P_2 = 0.$$

En la Fig. 3.1 se tiene la trayectoria para el caso 1 y la Fig. 3.2 se tiene la trayectoria para el caso 2, en el nuevo plano Q_1 y Q_2 (las nuevas coordenadas regularizadas); las ecuaciones resueltas numéricamente corresponden a (3.8) para $0 < s < 0.2$, y en los apéndices 4 y 5 se muestra el programa hecho en MATLAB.

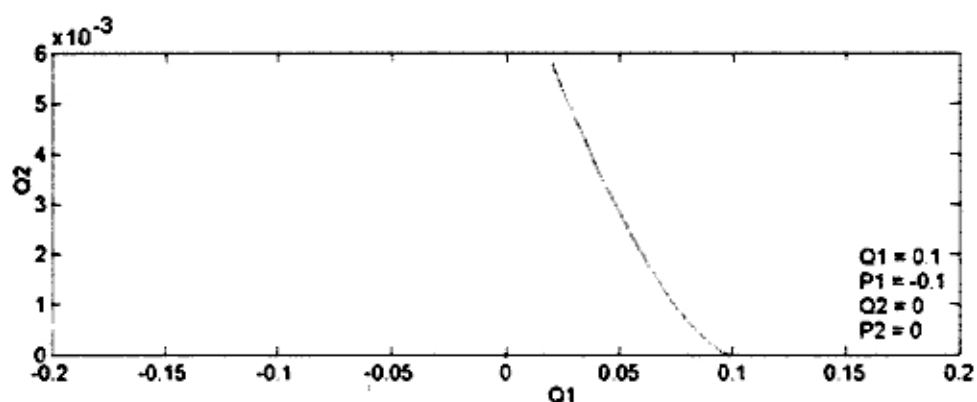


Fig. 3.1 Trayectoria regularizada, con el primario 1, para $0 < s < 0.2$.

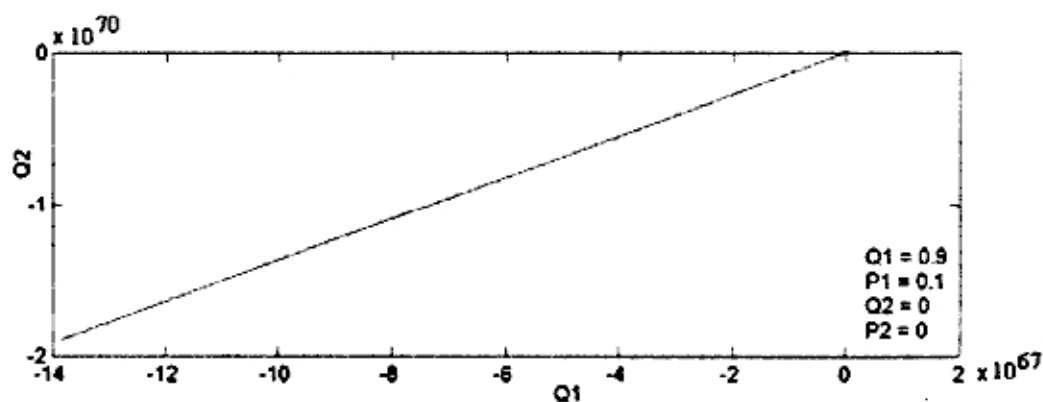


Fig. 3.2 Trayectoria no regularizada, con el primario 2, para $0 < s < 0.2$.

La trayectoria de la Fig. 3.1 se ha obtenido dando condiciones iniciales cerca al primario 1, se aprecia que la trayectoria en el plano Q1 Q2 para $0 < \text{tiempo ficticio (s)} < 0.2$ está acotada, mientras que dando condiciones iniciales cerca al primario 2 se obtiene una trayectoria no acotada (Fig. 3.2). Esto nos muestra la regularización solo con el primario 1, que corresponde a la regularización de Levi Civita.

En las Fig. 3.3 y Fig. 3.4 se muestran las 'energías' calculadas con la evaluación de H_{ext} (ver (3.7)): En la Fig. 3.3 se ve que la energía se modifica poco, esto corresponde a la trayectoria regularizada; en cambio en la Fig. 3.4 se aprecia que existe un salto en la 'energía', esto corresponde a la trayectoria no regularizada.

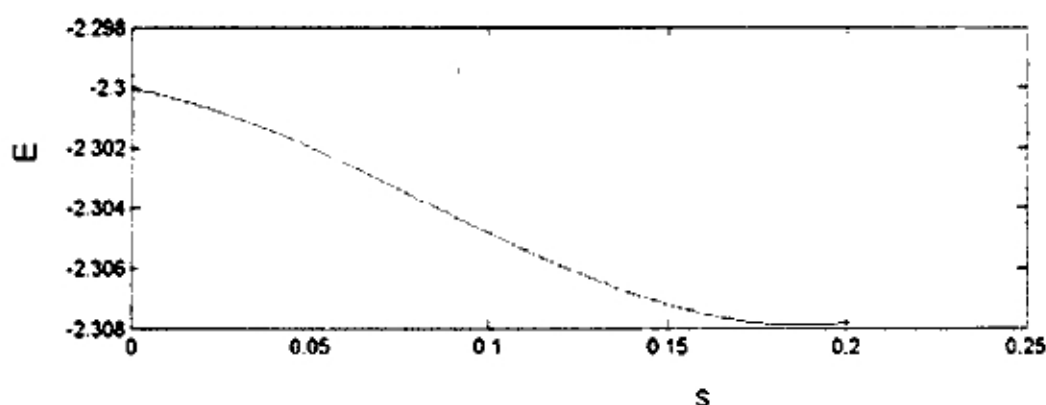


Fig. 3.3 Energía generalizada en función del tiempo ficticio 's', correspondiente al primario 1.

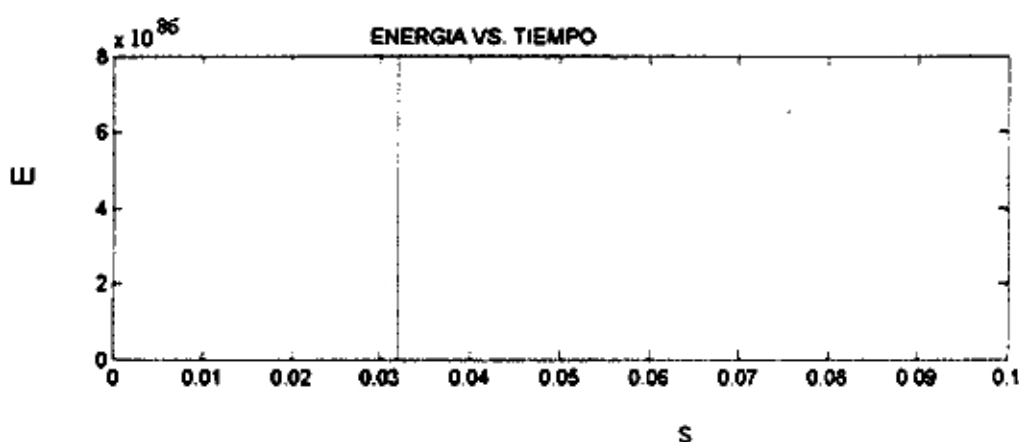


Fig. 3.4 Energía generalizada en función del tiempo ficticio 's', correspondiente al primario 2.

En la Fig. 3.5 se tiene la trayectoria regularizada desde $s = 0$ hasta $s = 1$ considerando las mismas condiciones que en la Fig. 3.1. En la Fig. 3.6 se observa que para $s = 1$ la energía da un salto, lo que significaría que ya no es válida la trayectoria trazada por el programa. Esto sucede porque la regularización de Levi - Civita es una regularización local, solo regulariza las 'colisiones' con uno de los primarios. Una regularización global, que regularice simultáneamente a los dos primarios es más compleja, esto podría plantearse como un futuro trabajo de investigación.

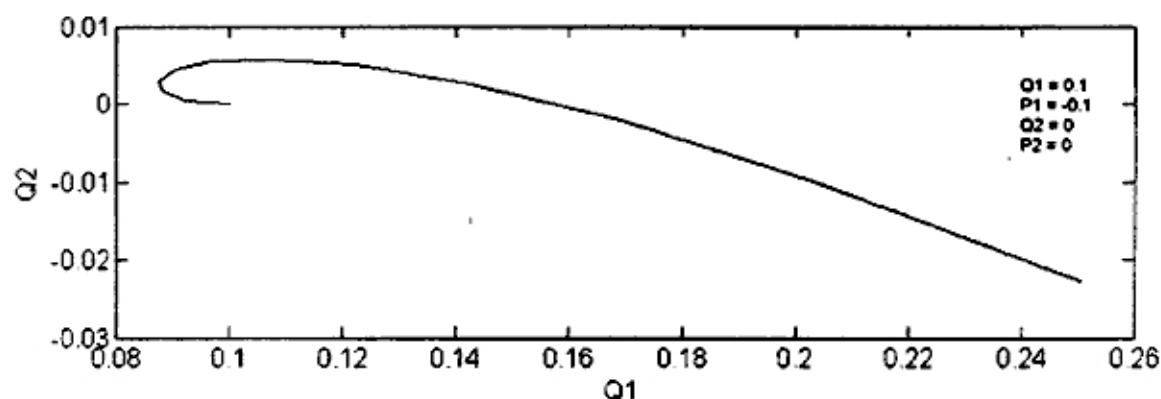


Fig. 3.5 Trayectoria regularizada en el plano $Q1 Q2$, con relación al primario 1.

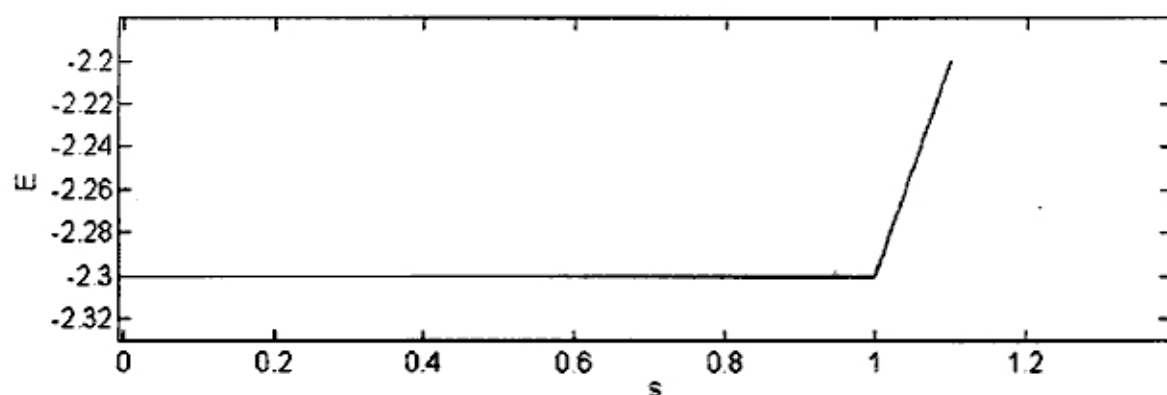


Fig. 3.6 Energía generalizada en función del tiempo ficticio 's'.

4 COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

4.1 Comentarios finales	49
4.2 Conclusiones	50

4.1 Comentarios finales

Dadas ciertas condiciones iniciales para la partícula de masa m_3 , en torno a un punto triangular de Lagrange, se ha verificado una parte del trabajo de Victor Szebehely [11] sobre la existencia de orbitas periódicas de gran amplitud,

Se ha extendido el problema restringido al caso tridimensional, obteniéndose las ecuaciones de movimiento respectivas (ver (2.6)). Se ha obtenido la trayectoria del cuerpo de masa m_3 influenciado por dos primarios, en donde uno de los primarios puntiformes se ha reemplazado por un elipsoide achatado (Fig. 2.6). Las ecuaciones de movimiento para este caso son las expresiones dadas en (2.9).

Bajo ciertas condiciones iniciales en el problema restringido de tres cuerpos, el tercer cuerpo podría acercarse bastante y producirse una colisión con uno de los primarios. Esto hace que el programa (desarrollado en MATLAB, apéndice 4 y 5) que determina la trayectoria se interrumpa y en el cálculo de la energía generalizada se obtengan resultados inesperados. A partir de ese momento la trayectoria que calcula el programa no corresponde a la realidad. El procedimiento de Levi-Civita soluciona en parte el problema porque regulariza el problema solo con uno de los primarios (gráficos 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4); por ello se le denomina transformación local. Mas allá del problema físico planteado, el problema de regularización constituye un tema importante en métodos numéricos porque permite reducir ecuaciones diferenciales singulares a ecuaciones diferenciales regulares. En el presente trabajo se usó la transformación de Levi-Civita que permite regularizar las trayectorias de forma que desaparezca la singularidad en las ecuaciones de movimiento del tercer cuerpo. De esta forma se ha reconocido el concepto de regularización como de vital importancia para el análisis numérico de las ecuaciones de movimiento, esto representa un aporte de esta tesis.

Por otro lado, el formalismo Hamiltoniano resulta muy conveniente para tratar el problema de regularización ya que a través de una función generatriz adecuada se puede transformar el Hamiltoniano en otro que permita resolver el problema a través de las nuevas ecuaciones de movimiento.

Otro aporte de esta tesis es el uso de subrutinas del Matlab como el ODE45, ODE113 que encuentra soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales de movimiento no lineales y acopladas utilizando un paso variable.

4.2 CONCLUSIONES

Concluimos que los métodos numéricos, como el de Runge – Kutta de paso variable, no siempre dan resultados correctos en las ecuaciones diferenciales de movimiento. Esto se debe a que bajo ciertas condiciones iniciales en el problema restringido de tres cuerpos, el cuerpo de masa m_3 podría acercarse bastante a uno de los primarios y producirse un resultado no válido en el cálculo de la trayectoria. Esto lo hemos analizado en los capítulos I (sección 1.6) y II (sección 2.3).

Cuando uno de los cuerpos primarios no es una masa puntual, la trayectoria de la partícula de masa m_3 , es perturbada por los términos de la expansión multipolar, especialmente el término cuadrupolar correspondiente a la contribución al potencial representado por un elipsoide achatado. Esto lo estudiamos en el capítulo II (sección 2.4).

Es posible transformar las ecuaciones diferenciales de movimiento expresadas en coordenadas cartesianas en otras ecuaciones diferenciales de movimiento en donde no existan términos ‘singulares’. Esto se estudió en el capítulo III (sección 3.2 y 3.3).

Referencias Bibliográficas

- [1] Victor Szebehely, Theory of Orbits, 1967. Academic Press New York and London
- [2] Alessandra Celletti, Stability and Chaos in Celestial Mechanics. Springer 2009
- [3] H. Goldstein, Mecánica Clásica, Editorial Reverte S.A., 2^{da} Edición. (1994)
- [4] D. Boccaletti y G. Pucacco.:1996, Theory of Orbits. Volume 1: Integrable Systems and Non-Perturbative Methods, Springer-Verlag, Berlín.
- [5] R. Broucke y D. Boggs: 1975, 'Periodic orbits in the planar general three-body problem', Celest. Mech. 11, 13-38.
- [6] A. Chenciner y R. Montgomery: 2000, 'A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses', Ann. Math. 152, 881-901
- [7] Aquiles Arauco Benavides, Tesis: Análisis numérico del movimiento, de un caso particular del problema restringido de los tres cuerpos. UNI Facultad de Ciencias, Lima Perú, 2009.
- [8] E.P. Axionov, El Problema de los tres cuerpos _Enciclopedia de Matemáticas, edit Mir-Moscu, 1978
- [9] Fredy Miguel Loayza Cordero, Tesis de Maestría: Movimiento de un satélite alrededor de un planeta achatado.
- [10] Jerry B. Marion, Dinámica Clásica de las partículas y Sistemas, Reverté, edición en español, España, 1992.
- [11] Victor Szebehely , The Astronomical Journal, volume 72, number 3 abril 1967
- [12] Keith R. Symon, Mecánica, Aguilar, edición española 1974