

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**

Sección de Posgrado y Segunda Especialización Profesional



Tesis para Optar el Grado Académico de
Maestro en Ciencias con mención en Matemática Aplicada

**Acerca de la Clasificación Topológica y
Diferenciable de Superficies Compactas**

Presentada por:

Dimas Percy Abanto Silva

LIMA - PERÚ

2009

Universidad Nacional de Ingeniería

Tesis de Maestría
en Matemática Aplicada

**Acerca de la Clasificación
Topológica y Diferenciable de
Superficies Compactas**

Perteneciente:

Abanto Silva, Dimas Percy

Asesor:

Dr. Jesús Zapata Samanez

2009

Este trabajo va dedicado a mis padres.

Introducción

El objetivo del presente trabajo es el desarrollo completo y autocontenido sobre la clasificación topológica y diferenciable de las superficies compactas, asunto de interés primario en el área de Topología y con aplicaciones fundamentales y variadas en todas las áreas de la Matemática y Física.

La clasificación topológica de las superficies compactas contenidas en el espacio tridimensional fue dada por Riemann y Jordan, aunque sus demostraciones no fueron satisfactorias. Ellos se basaban en resultados que parecían evidentes que luego ni ellos ni muchos matemáticos podían demostrarlos con la matemática que había hasta esos momentos. Tuvo que pasar mucho tiempo para que se llegará a tener la maquinaria necesaria para poder demostrar la clasificación topológica y mayor tiempo aún para la clasificación diferenciable.

El presente trabajo da una clasificación diferenciable de las superficies compactas (con borde o no) siguiendo métodos más sofisticados dentro de la Topología Diferencial. La Teoría de Morse que trata del estudio de curvas de nivel de funciones y la Teoría de ecuaciones sobre superficies nos proveen de las herramientas necesarias para la prueba completa de la clasificación de superficies compactas.

El teorema de la clasificación topológica es encontrado en muchas partes de la literatura matemática. Sin embargo lo mismo no ocurre con el teorema de clasificación diferenciable, en donde las pruebas que aparecen acostumbran a estar incompletas debido a las sofisticaciones descritas anteriormente. Esas dificultades son superadas en esta tesis.

Índice general

1. Topología cociente	6
1.1. Espacios cocientes	6
1.2. Aplicaciones de identificación	6
1.3. Ejemplos de espacios cocientes	8
1.4. Homotopía	9
1.4.1. Caminos	10
1.4.2. Primer grupo de homotopía	12
1.5. Equivalencias homotópicas	13
1.5.1. Ejemplos	13
1.6. Adjunción de espacios topológicos	14
1.7. Lemmas de Whitehead	14
2. Variedades diferenciables	18
2.1. Variedades suaves	18
2.2. Ejemplos	19
2.3. Aplicaciones diferenciables	19
2.4. Espacio tangente a una variedad en un punto	20
2.5. Fibrado tangente de una variedad	20
2.6. La derivada de una aplicación diferenciable	21
2.7. Orientación	21
2.8. Variedades con borde	23
2.9. El Pull-back de una orientación a partir de un difeomorfismo local entre variedades	24
2.10. Vectores que apuntan hacia afuera	25
2.11. Orientación inducida sobre el borde de una variedad orientada	26
2.12. Orientación del producto de variedades	27
2.13. Partición de la unidad	31
2.14. Subvariedades	34
2.15. Transversalidad	37
2.16. Variedad compactas	38
2.17. Cubrimiento doble orientado	39
3. Teoría de Morse	42
3.1. Lema de Morse	42
3.2. Gradiente de una función suave	45

3.3.	Existencia de funciones de Morse sobre variedades compactas	46
3.4.	Funciones de Morse y tipo de homotopía	50
3.5.	Aplicaciones	53
3.6.	Modificando funciones de Morse en superficies	57
4.	Isotopía	59
4.1.	Isotopía	59
4.2.	Pegando variedades	61
4.3.	Isotopías de discos	63
4.4.	Teorema de Reeb	65
5.	Teorema de clasificación de superficies diferenciables compactas	67
5.1.	Modelos de superficies	67
5.2.	Superficies orientables de género g	69
5.3.	Suma conexa	69
5.4.	Superficie no-orientable de género	69
5.5.	Teorema del disco	70
5.5.1.	Extensión de difeomorfismos	72
5.6.	Teorema de clasificación de superficies	74
6.	Conclusiones	84
7.	Recomendaciones	85

Capítulo 1

Topología cociente

1.1. Espacios cocientes

Sean X un espacio topológico y \sim una relación de equivalencia en él. Denotaremos por X/\sim el conjunto de clases de equivalencias definidas por esta relación de equivalencia sobre X .

Quisiéramos dar a X/\sim una topología lo suficientemente natural para que la aplicación proyección $\pi : X \rightarrow X/\sim$ ($\pi(x)$ es la clase de $x \in X$) sea continua, claramente la topología trivial haría esto y sería la topología más pequeña que cumple con este requerimiento. Si vamos en busca de la topología más grande (si lo hubiese) que hace a π continua, una propiedad que se pediría que tuviera esta topología sería la siguiente: si $A \subset (X/\sim)$ es tal que $\pi^{-1}(A)$ es un conjunto abierto de X entonces A está en esta topología.

Resulta pues que esa propiedad caracteriza una topología sobre X/\sim , esto es la colección

$$\{A \subset (X/\sim) / \pi^{-1}(A) \text{ es abierto en } X\}$$

es una topología sobre X/\sim . Además es la topología más grande sobre X/\sim que hace a π continua, en otras palabras, cualquier topología sobre X/\sim que hace a π continua está contenida en la colección de arriba.

De ahora en adelante trabajaremos con esta topología sobre X/\sim , llamada topología cociente. El espacio (X/\sim) es llamado espacio cociente.

Seguiremos llamando a $\pi : X \rightarrow (X/\sim)$ una aplicación cociente.

Debido a la sobreyectividad de una aplicación cociente tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1 *Si X es conexo, arco-conexo o compacto entonces X/\sim también lo es.*

1.2. Aplicaciones de identificación

Notemos que la aplicación vista $\pi : X \rightarrow (X/\sim)$ tiene las siguientes propiedades: continuidad, sobreyectividad, además si $A \subset (X/\sim)$ es tal que $\pi^{-1}(A)$ es abierto en X entonces A es abierto en (X/\sim) . Con esto tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1 Sea X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua, diremos que f es una aplicación de identificación si es sobreyectiva y cumple la siguiente propiedad: si $A \subset Y$ es tal que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto de X entonces A es abierto en Y .

Claramente toda aplicación cociente es una aplicación de identificación.

Además dada aplicación de identificación $f : X \rightarrow Y$, Y tiene la topología más grande que hace a la correspondencia $f : X \rightarrow Y$ continua (con la topología sobre X fija).

Es más se puede mostrar que existe una relación de equivalencia \sim sobre X y un homeomorfismo $h : Y \rightarrow (X/\sim)$ tal que $h \circ f : X \rightarrow (X/\sim)$ es $\pi : X \rightarrow (X/\sim)$.

Así en esencia una aplicación de identificación es una aplicación cociente y el espacio de llegada es un espacio cociente.

Lema 1.1 Una aplicación de identificación $f : X \rightarrow Y$ es en esencia una aplicación cociente, esto es, existe una relación de equivalencia \sim sobre X y un homeomorfismo $h : Y \rightarrow (X/\sim)$ tal que $h \circ f = \pi$.

Prueba:

Definimos sobre X la siguiente relación: dados $x, y \in X$ diremos que $x \sim z$ si y sólo si $f(x) = f(z)$. Claramente la relación anterior es de equivalencia. Definimos $h : Y \rightarrow (X/\sim)$ como: dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, así definimos $h(y) = \pi(x)$; por definición $h \circ f = \pi$, además h es inyectiva y como π es sobreyectiva h también lo es. Por lo expuesto, h es una biyección.

Veamos que h es una aplicación abierta. Sea $A \subset Y$ abierto entonces a partir de $f = h^{-1} \circ \pi$ tenemos $\pi^{-1}(h(A)) = f^{-1}(A)$ es abierto en X , luego $h(A)$ es abierto. Ahora veamos la continuidad de h ; si A es un conjunto abierto de (X/\sim) entonces $f^{-1}[h^{-1}(A)] = \pi^{-1}(A)$ es abierto de X , de allí como f es de identificación $h^{-1}(A)$ es abierto en Y . Por lo tanto h es un homeomorfismo.

□

Es por ello que utilizaremos aplicación cociente para nombrar a aplicaciones de identificación $f : X \rightarrow Y$, además diremos que Y es un espacio cociente o que tiene la topología cociente.

A partir de lo anterior tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.1 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación de identificación y sea \sim la relación de equivalencia generada por f , entonces (X/\sim) es homeomorfo a Y .

Existe un criterio útil para saber cuando una aplicación $g : Y \rightarrow Z$ entre espacios topológicos con Y espacio cociente, es continuo.

Proposición 1.2 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación de identificación y $g : Y \rightarrow Z$ otra aplicación donde Z es un espacio topológico. Si $g \circ f : X \rightarrow Z$ es continua, entonces g es continua.

Prueba:

En efecto se $A \subset Z$ abierto entonces $(g \circ f)^{-1}(A)$ es abierto en X , que es equivalente a que $f^{-1}[g^{-1}(A)]$ es abierto en X , como f es una aplicación de identificación se sigue que $g^{-1}(A)$ es abierto en Y , esto demuestra que g es continuo.

□

Observación: En la definición de aplicación de identificación se puede cambiar abierto por cerrado dando así una definición equivalente. Esto es

*Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ continua y sobreyectiva es de identificación si:
 $f^{-1}(A)$ es un conjunto cerrado de $X \Rightarrow$ que A es cerrado en Y .*

Existen muchas aplicaciones continuas sobreyectivas que son cocientes.

Proposición 1.3 *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada entonces f es una aplicación de identificación.*

Prueba:

Como para todo $A \subset Y$ se tiene que $f[f^{-1}(A)] = A$, debido a que f es sobreyectiva. En el primer caso cuando f es abierta tenemos, si $f^{-1}(A)$ es abierto entonces A es abierto; en el segundo cuando f es cerrada, si $f^{-1}(A)$ es cerrado entonces A es cerrado. Así en cualquier caso f es una aplicación cociente.

□

Una aplicación de identificación biyectiva es un homeomorfismo.

Proposición 1.4 *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación biyectiva y de identificación, entonces f es un homeomorfismo.*

Prueba:

Veamos que f es una aplicación abierta. Sea $A \subset X$ abierto, como f es inyectiva $f^{-1}[f(A)] = A$, luego debido a que f es una aplicación de identificación $f(A)$ es abierto en Y , por lo tanto f es un homeomorfismo.

□

1.3. Ejemplos de espacios cocientes

Recordemos que si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente entonces Y es homeomorfo al espacio X/\sim .

Sea D^2 : disco unitario cerrado de \mathbb{R}^2 .

Denotaremos $\vec{e}_1(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$, para todo $u \in \mathbb{R}$, y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

1. *La esfera es homeomorfa al espacio cociente obtenido de D^2 por la relación generada por $(x, y) \sim (-x, y)$ para todo $(x, y) \in S^1$.*

Definiendo $f : D^2 \rightarrow S^2$ como

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1-y^2}\vec{e}_1\left(\frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}\right) + y\vec{e}_3 & \text{si } y \neq \pm 1 \\ (0, 0, y) & \text{si } y = \pm 1, \end{cases}$$

Como f es una aplicación sobreyectiva, continua y cerrada, se tiene que f es una aplicación cociente.

Luego la relación de equivalencia generada por f en $\overline{B^2}$ es la misma enunciada al inicio. Así el espacio cociente en cuestión es homeomorfo a S^2 .

2. *El toro es homeomorfo al espacio cociente definido en $I \times I$ definido por la relación de equivalencia generada por $(t, 0) \sim (0, t)$, $(t, 1) \sim (1, t)$, ambos para todo $t \in [0, 1]$.*

Recordemos que el *Toro* es la superficie de revolución obtenida al girar respecto al eje Z la circunferencia dada por $\{(2 + \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))/t \in [0, 2\pi]\}$ que está en el plano XZ .

Sea $f : I \times I \rightarrow \text{Toro}$ definido por

$$f(s, t) = (2 + \cos(2\pi t))\vec{e}_1(2\pi s) + \sin(2\pi t)\vec{e}_3$$

Es una aplicación sobreyectiva, continua y cerrada, así f es una aplicación de identificación. Como la relación generada por f es la misma descrita en este ítem, el espacio cociente en cuestión es homeomorfo a la *Dona*.

3. *El espacio proyectivo es homeomorfo al espacio cociente obtenido de S^2 por la relación de equivalencia $x \sim -x$ para todo $x \in S^2$.*

Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ la restricción del mapeo cociente $\pi : R^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ canónico. Entonces f es desde ya continuo y también sobreyectivo, como S^2 es compacto entonces f es un mapeo cerrado. Así f es un mapeo de identificación, como la relación inducida por f es la misma dada en este ítem se sigue que el espacio cociente en cuestión S^2 / \sim es homeomorfo a \mathbb{P}^2 .

4. *Denotemos Z al espacio cociente del ítem anterior, entonces Z es homeomorfo al espacio cociente obtenido de $\overline{B^2}$ por la relación generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para todo $(x, y) \in S^1$. Luego este último espacio cociente será homeomorfo al plano proyectivo \mathbb{P}^2 .*

Sea $p : S^2 \rightarrow Z$ el mapeo cociente canónico del ítem 3, definimos $g : \overline{B^2} \rightarrow S^2$ por

$$g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

para todo $(x, y) \in \overline{B^2}$. Tenemos que $g(x, y), g(a, b)$ son l.d. si y solo si $(x, y) \in S^1$ y, o bien $(x, y) = (a, b)$ o bien $(a, b) = (-x, -y)$, definimos $f = p \circ g : \overline{B^2} \rightarrow Z$.

f es continuo, sobre y cerrado ya que $\overline{B^2}$ es compacto, así es de identificación. Como f genera la misma relación de equivalencia a la dada por este ítem, se sigue que la topología cociente dada es homeomorfa a Z . Luego, homeomorfa a \mathbb{P}^2 .

1.4. Homotopía

En esta sección I denotará al intervalo compacto $[0, 1]$.

Definición 1.2 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ mapeos continuos decimos que f y g son homotópicos si existe un mapeo continuo $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Cuando ocurre lo anterior se denota: $f \simeq g$. El mapeo H es llamado homotopía entre f y g .

1.4.1. Caminos

Definición 1.3 Un camino en X es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$.

Sea α un camino tal que $p = \alpha(0)$ y $\alpha(1) = q$, también se dice que α es un camino de X que va de p a q (p es llamado punto inicial o extremo inicial de α y q es llamado punto final o extremo final de α).

Definición 1.4 Sean α, β dos caminos en X con extremos iguales, i.e. $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$, decimos que α es homotópico a β con extremos fijos si existe una homotopía H entre α y β tal que $H(0, t) = \alpha(0) (= \beta(0))$ y $H(1, t) = \alpha(1) (= \beta(1))$ para todo $t \in [0, 1]$.

Cuando α y β son caminos homotópicos con extremos fijos lo denotaremos por $\alpha \simeq \beta$. Claramente si p, q son puntos de X está relación de ser homotópicos con extremos fijos p y q , define una relación de equivalencia en el conjunto de caminos de X que van de p a q , a este conjunto lo denotaremos por $C_{p,q}(X)$. Cuando $p = q$ lo denotaremos por $C_p(X)$.

Definición 1.5 Sean α, β dos caminos en X con $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos la concatenación de α con β , lo cual denotaremos como $\alpha * \beta$, como el siguiente camino

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq 1/2, \\ \beta(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Proposición 1.5 Si $\alpha \simeq \gamma$, $\beta \simeq \kappa$, $\alpha(1) = \beta(0) = q$ entonces $\alpha * \beta \simeq \gamma * \kappa$.

Prueba: Sea H la homotopía con extremos fijos entre α y γ , sea G la homotopía con extremos fijos entre β y κ , tenemos que $H(1, t) = q = G(0, t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces definimos $F : I \times I \rightarrow X$ como

$$F(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, t \in [0, 1], \\ G(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, t \in [0, 1] \end{cases},$$

que será una homotopía con extremos fijos entre $\alpha * \beta$ y $\gamma * \kappa$.

□

Definición 1.6 Sea $p \in X$ definimos $\epsilon_q : I \rightarrow X$ como $\epsilon_q(s) = q$ para todo $t \in [0, 1]$.

El siguiente lema será de gran ayuda para las proposiciones siguientes.

Lema 1.2 Sean α un camino de X , y $\phi : I \rightarrow I$ una función continua tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$ entonces $\alpha \circ \phi \simeq \alpha$.

Prueba: Sea $H : I \times I \rightarrow X$ definido por $\alpha((1-t)s + t\phi(s))$ para todo $(s, t) \in I \times I$. Entonces esto define una homotopía con extremos fijos entre α y $\alpha \circ \phi$.

□

Proposición 1.6 Sean α , β y γ caminos en X , con $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$. Entonces

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$$

Prueba: Definimos $\phi : I \rightarrow I$ como

$$\phi(s) = \begin{cases} s/2 & 0 \leq s \leq 1/2 \\ s - 1/4 & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ 2s - 1 & 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

entonces $\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ \phi$.

Por lo tanto se tiene que $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.

□

Proposición 1.7 Sean α un camino de X con punto inicial p y punto final(o terminal) q , entonces

1. $\alpha * \varepsilon_q \simeq \alpha$.
2. $\varepsilon_p * \alpha \simeq \alpha$.

Prueba:

1. Sea $\phi : I \rightarrow I$ definido como

$$\phi(t) = \begin{cases} 2s & 0 \leq s \leq 1/2, \\ 1 & 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

entonces $\alpha * \varepsilon_q = \alpha \circ \phi$. Luego por el lema anterior $\alpha * \varepsilon_q \simeq \alpha$.

2. Si definimos $\psi : I \rightarrow I$ como

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq 1/2, \\ 2s - 1 & 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

tenemos que $\varepsilon_p * \alpha = \alpha \circ \psi$. Luego por el lema anterior $\varepsilon_p * \alpha \simeq \alpha$.

□

Definición 1.7 Sea α un camino en X . Definimos el camino inverso de α , denotado por α^{-1} , como:

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$$

para todo $s \in I$.

Proposición 1.8 Sea α un camino de X entonces

1. $\alpha * \alpha^{-1} \simeq \varepsilon_p$.

2. $\alpha^{-1} * \alpha \simeq \varepsilon_q$.

Prueba:

1. Definiendo $H : I \times I \rightarrow X$ como

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(2ts) & 0 \leq s \leq 1/2, \\ \alpha(2t(1-s)) & 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

se tiene que H es una homotopía con extremos fijos entre ε_p y $\alpha * \alpha^{-1}$. Luego $\varepsilon_p \simeq \alpha * \alpha^{-1}$.

2. Tenemos que α^{-1} es un camino de X con punto inicial q entonces por lo anterior $\alpha^{-1} * (\alpha^{-1})^{-1} \simeq \varepsilon_q$ i.e., $\alpha^{-1} * \alpha \simeq \varepsilon_q$.

□

Claramente, si p, q son puntos de X , está relación de ser homotópicos con extremos fijos p y q , define una relación de equivalencia en el conjunto de caminos de X que van de p a q , al conjunto de clases de equivalencias lo denotaremos por $C_{p,q}(X)/\simeq$. Cuando $p = q$ denotaremos por $C_p(X)$ a $C_{p,p}(X)$.

1.4.2. Primer grupo de homotopía

Todas las proposiciones de la sub-sección anterior se han hecho para poder definir una operación de multiplicación $*$ en $C_p(X)/\simeq$ de la siguiente manera:

Para $[\alpha], [\beta] \in C_p(X)/\simeq$ definimos

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta];$$

esta operación está bien definida, además es asociativa. Tiene un elemento neutro $[\varepsilon_p]$ y para cada $[\alpha] \in C_p(X)$ se tiene que $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\varepsilon_p]$ y $[\alpha^{-1}][\alpha] = [\varepsilon_p]$.

Así $C_p(X)/\simeq$ con la operación ya descrita será un grupo al cual lo denotaremos por $\pi_1(X, p)$ y es llamado *Primer grupo de homotopía de X con punto base p* .

Dada una función continua $f : X \rightarrow Y$ y un punto $p \in X$ existe un homomorfismo inducido por f que va de $\pi_1(X, p)$ a $\pi_1(Y, q)$ donde $q = f(p)$, él cual es denotado por $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, q)$ que es definido luego, antes veremos que el primer grupo de homotopía es indistinto del punto base que se tome en espacios arco-conexos.

Dado un camino α de X que va de p a q existe un homomorfismo inducido por éste, $\hat{\alpha} : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$

Proposición 1.9 *El homomorfismo anterior $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo.*

Prueba: Si $\hat{\alpha}([\beta]) = [\varepsilon_q]$ entonces $\alpha^{-1} * \beta * \alpha \simeq \varepsilon_q$, luego $\beta \simeq \alpha * \alpha^{-1}$, así $[\beta] = [\varepsilon_p]$. Sea $[\gamma] \in \pi_1(X, q)$ entonces si $\beta = \alpha * \gamma * \alpha^{-1}$ tenemos que $\hat{\alpha}([\beta]) = [\gamma]$, por lo tanto $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo.

□

Así, si X es un espacio conexo por caminos, para todo $p, q \in X$: $\pi_1(X, p)$ es isomorfo a $\pi_1(X, q)$.

Definición 1.8 Sea X un espacio conexo por caminos. Decimos que X es simplemente conexo si $\pi(X, p)$ es un conjunto unipuntual para algún $p \in X$.

Claramente si ocurre lo anterior para un punto $p \in X$ entonces ocurrirá para todo $q \in X$, ya que siempre habrá un camino que une p con q . Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2 Sea X un espacio simplemente conexo, entonces cualquier par de caminos con extremos iguales son homotópicos con extremos fijos.

Prueba: Sean α, β dos caminos de X tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$ y $\alpha(1) = \beta(1)$ tenemos que $\alpha * \beta^{-1} \simeq \varepsilon_p$ ya que $\pi_1(X, p)$ es formado por una única clase, luego $\alpha \simeq \beta$.

□

Definición 1.9 Un lazo en $p \in X$ es un camino α de X tal que $\alpha(0) = p = \alpha(1)$, o más simplemente $\alpha \in C_p(X)$.

Proposición 1.10 Sea X un espacio simplemente conexo y $p \in X$, entonces un lazo en p es homotópico con extremos fijos a ε_p .

Prueba: Como X es simplemente conexo entonces $\pi_1(X, p) = \{[\varepsilon_p]\}$, luego si α es un lazo en p entonces $\alpha \in [\varepsilon_p]$, de allí se obtiene: $\alpha \simeq \varepsilon_p$.

□

Definición 1.10 Dado un lazo en p , decimos que es homotópicamente nulo si el lazo es homotópico con extremos fijos a ε_p .

Luego en un espacio simplemente conexo cualquier lazo en cualquier punto es homotópicamente nulo.

1.5. Equivalencias homotópicas

Definición 1.11 Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ es homotópico a id_X y $f \circ g$ es homotópico a id_Y .

La aplicación $g : Y \rightarrow X$ es llamada una inversa homotópica de f .

1.5.1. Ejemplos

Como ejemplos claros de equivalencias homotópicas son los homeomorfismos.

Otro ejemplo es la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

ya la aplicación inclusión

$$g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

es una inversa homotópica.

Corroboremos que es así. Por un lado tenemos que $f \circ g = id_{S^1}$; de otro lado si $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, entonces $g \circ f$ es homotópica a id_X por la homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ definida por

$$H(x, t) = \frac{((1-t) + t\|x\|)}{\|x\|} x.$$

1.6. Adjunción de espacios topológicos

Definición 1.12 Sean X e Y espacios topológicos, además sean A un subespacio de X y $f : A \rightarrow Y$ una función continua. Se denota por $Y \sqcup_f X$ al espacio cociente

$$((X \times \{1\}) \cup (Y \times \{0\})) / R$$

donde R es la relación generada en $(X \times \{1\}) \cup (Y \times \{0\})$ por:

$$(x, 1) \sim (f(x), 0) \text{ o más simple } x \sim f(x) \quad \forall x \in A.$$

Notación: $X + Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{0\})$.

La aplicación f es llamada *aplicación de adjunción*.

Esto es, si \sim es la relación de equivalencia generada entonces

$$Y \sqcup_f X := X + Y / \sim$$

Como un ejemplo de adjunción tenemos si $X = S^1 \times [0, 1]$, $Y = D^1 \times \{1\}$, $A = S^1 \times \{1\}$ y $f : A \rightarrow Y$ es dado por

$$f(z, 1) = (z, 1),$$

lo que se obtiene es un cilindro con la tapa superior adherida, lo cual es a su vez homeomorfo a un disco.

Otro ejemplo es la adjunción de 2 discos a través de sus bordes, uno puede imaginarse que lo que se obtiene es homeomorfo (o es, en el campo de la topología) una esfera.

1.7. Lemas de Whitehead

Proposición 1.11 Sean $\varphi_0, \varphi_1 : S^{n-1} \rightarrow X$ dos mapeos homotópicos, entonces la identidad $id : X \rightarrow X$ se extiende a una equivalencia homotópica $f : X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B}^n \rightarrow X \sqcup_{\varphi_1} \overline{B}^n$.

Prueba: Consideremos a $\varphi : S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow X$ una homotopía de φ_0 a φ_1 y definamos $f : X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B}^n \rightarrow X \sqcup_{\varphi_1} \overline{B}^n$ como

$$\begin{aligned} f([x, 0]) &= [x, 0], & x \in X, \\ f([u, 1]) &= [2u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ f([u, 1]) &= \left[\varphi_{2-2|u|} \left(\frac{u}{\|u\|} \right), 0 \right] & \frac{1}{2} \leq |u| < 1. \end{aligned}$$

de manera análoga definimos $g : X \sqcup_{\varphi_1} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}$

$$\begin{aligned} g([x, 0]) &= [x, 0], & x \in X, \\ g([u, 1]) &= [2u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ g([u, 1]) &= \left[\varphi_{2|u|-1} \left(\frac{u}{\|u\|} \right), 0 \right] & \frac{1}{2} \leq |u| < 1. \end{aligned}$$

Consideremos $g \circ f : X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}$

$$\begin{aligned} g \circ f([x, 0]) &= [x, 0], & x \in X, \\ g \circ f([u, 1]) &= [4u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{4}, \\ g \circ f([u, 1]) &= \left[\varphi_{4|u|-1} \left(\frac{u}{\|u\|} \right), 0 \right], & \frac{1}{4} \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ g \circ f([u, 1]) &= \left[\varphi_{2-2|u|} \left(\frac{u}{\|u\|} \right), 0 \right] & \frac{1}{2} \leq |u| < 1. \end{aligned}$$

Primero tenemos la homotopía $G : (X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}) \times [0, 1] \rightarrow X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}$

$$\begin{aligned} G([x, 0], s) &= [x, 0], & x \in X, \\ G([u, 1], s) &= [4u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{4}, \\ G([u, 1], s) &= \left[\varphi \left(\frac{u}{\|u\|}, (1-s)(4|u|-1) \right), 0 \right], & \frac{1}{4} \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ G([u, 1], s) &= [\varphi(u, (1-s)(2-2|u|)), 0] & \frac{1}{2} \leq |u| < 1; \end{aligned}$$

entre $g \circ f$ y el mapeo $h : X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}$

$$\begin{aligned} h([x, 0]) &= [x, 0], & x \in X, \\ h([u, 1]) &= [4u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{4}, \\ h([u, 1]) &= \left[\varphi \left(\frac{u}{\|u\|}, 0 \right), 0 \right], & \frac{1}{4} \leq |u| \leq 1; \end{aligned}$$

si $\eta : \overline{B^n} \rightarrow \overline{B^n}$ es definido por

$$\eta(u) = \begin{cases} 4u & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{u}{\|u\|} & \frac{1}{4} \leq |u| \leq 1, \end{cases}$$

entonces $h : X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}$ viene dado por

$$\begin{aligned} h([x, 0]) &= [x, 0], & x \in X, \\ h([u, 1]) &= [\eta(u), 1], & u \in \overline{B^n}, \end{aligned}$$

de allí si tomamos $H : (X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}) \times [0, 1] \rightarrow X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}$ como

$$\begin{aligned} H([x, 0], s) &= [x, 0], & x \in X, \\ H([u, 1], s) &= [(1-s)\eta(u) + su, 1], & 0 \leq |u| \leq 1, \end{aligned}$$

tenemos una homotopía de h a la identidad $id : X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n} \times [0, 1] \rightarrow X \sqcup_{\varphi_0} \overline{B^n}$.

Análogamente $f \circ g$ es homotópico a $id : X \sqcup_{\varphi_1} \overline{B^n} \times [0, 1] \rightarrow X \sqcup_{\varphi_1} \overline{B^n}$.

Así hemos probado que f es una equivalencia homotópica. Es claro que f es una extensión de la identidad id_X , con lo cual concluimos la prueba. □

Proposición 1.12 *Sea $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ un mapeo continuo y $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica. Entonces f se extiende a una equivalencia homotópica $\tilde{f} : X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n} \rightarrow Y \sqcup_{f\varphi} \overline{B^n}$.*

Prueba: Definamos $\tilde{f} : X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n} \rightarrow Y \sqcup_{f\varphi} \overline{B^n}$ como

$$\begin{aligned} \tilde{f}([x, 0]) &= [f(x), 0], & x \in X, \\ \tilde{f}([u, 1]) &= [u, 1], & u \in \overline{B^n}, \end{aligned}$$

y consideremos $g : Y \rightarrow X$ una inversa homotópica de f .

Análogamente definamos $\tilde{g} : Y \sqcup_{f\varphi} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{g f \varphi} \overline{B^n}$ como

$$\begin{aligned} \tilde{g}([x, 0]) &= [g(x), 0], & y \in Y, \\ \tilde{g}([u, 1]) &= [u, 1], & u \in \overline{B^n}, \end{aligned}$$

Sea $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una homotopía entre $g \circ f$ y $id : X \rightarrow X$ entonces $g f \varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ es homotópico a $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$, de allí que $id : X \rightarrow X$ se extiende a una equivalencia homotópica $h : X \sqcup_{g f \varphi} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n}$ dada por

$$\begin{aligned} h([x, 0]) &= [x, 0], & x \in X, \\ h([u, 1]) &= [2u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ h([u, 1]) &= \left[H \left(\varphi \left(\frac{u}{\|u\|} \right), 2 - 2|u| \right), 0 \right] & \frac{1}{2} \leq |u| \leq 1. \end{aligned}$$

Luego la aplicación $\tilde{\eta} = h \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} : X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n}$ tiene la siguiente regla de correspondencia

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}([x, 0]) &= [g \circ f(x), 0], & x \in X, \\ \tilde{\eta}([u, 1]) &= [2u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{\eta}([u, 1]) &= \left[H \left(\varphi \left(\frac{u}{\|u\|} \right), 2 - 2|u| \right), 0 \right], & \frac{1}{2} \leq |u| \leq 1. \end{aligned}$$

Consideremos la aplicación $G : (X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n}) \times [0, 1] \rightarrow X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n}$

$$\begin{aligned} G([x, 0], s) &= [H(x, s), 0], & x \in X, \\ G([u, 1], s) &= [2u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ G([u, 1], s) &= \left[H \left(\varphi \left(\frac{u}{\|u\|} \right), 1 - (1-s)(2|u| - 1) \right), 0 \right], & \frac{1}{2} \leq |u| \leq 1. \end{aligned}$$

que es una homotopía entre $\tilde{\eta}$ y $\zeta : X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n}$ definida por

$$\begin{aligned} \zeta([x, 0]) &= [x, 0], & x \in X, \\ \zeta([u, 1]) &= [2u, 1], & 0 \leq |u| \leq \frac{1}{2}, \\ \zeta([u, 1]) &= \left[\frac{u}{\|u\|}, 1 \right], & \frac{1}{2} \leq |u| \leq 1. \end{aligned}$$

Usando un mismo argumento como en la demostración de la proposición anterior tenemos que ζ es homotópica a la identidad $id : X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n}$.

Así $\tilde{\eta} = (h\tilde{g})\tilde{f}$ es homotópico a la identidad, esto es, se ha conseguido una inversa homotópica a la izquierda de f .

Vamos a mostrar que $\tau = h\tilde{g}$ es una inversa homotópica de \tilde{f} , para ello bastará mostrar que $\tilde{f}(h\tilde{g})$ es homotópico a la identidad.

Primero notemos que $\tilde{g}\tilde{f}$ es una inversa homotópica de h . En efecto, si $\tilde{k} : X \sqcup_{\varphi} \overline{B^n} \rightarrow X \sqcup_{gf\varphi} \overline{B^n}$ es una inversa homotópica de h entonces

$$(\tilde{g}\tilde{f})h \simeq k[(h\tilde{g})\tilde{f}]h \simeq k \circ id \circ h \simeq id.$$

Segundo, de manera análoga a lo que se hizo al inicio con f , existe¹ una inversa homotópica a la izquierda de \tilde{g} , digamos $k : X \sqcup_{gf\varphi} \overline{B^n} \rightarrow Y \sqcup_{f\varphi} \overline{B^n}$ tal que

$$k\tilde{g} \simeq id_{Y \sqcup_{f\varphi} \overline{B^n}},$$

entonces

$$\tilde{f}\tau = \tilde{f}(h\tilde{g}) \simeq k(\tilde{g}\tilde{f}h)\tilde{g} \simeq k \circ id \circ \tilde{g} \simeq id,$$

que es lo que queríamos mostrar.

Por lo tanto, \tilde{f} es una equivalencia homotópica que extiende a f .

□

¹Observse que la aplicación de adjunción φ fue cambiada por $f\varphi$

Capítulo 2

Variedades diferenciables

Sea M un espacio topológico, una *carta n -dimensional* (U, φ) sobre M es una par donde U es un conjunto abierto de M y $\varphi : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo entre U y un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$.

De ahora en adelante trabajaremos con espacios topológicos de Hausdorff con bases numerables.

2.1. Variedades suaves

Sean $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) dos cartas sobre M , decimos que son compatibles si una de las 2 condiciones siguientes es satisfecha:

1. $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, ó,
2. si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ entonces $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ es un difeomorfismo de clase C^∞ .

Sea M un espacio topológico de Hausdorff con base contable, decimos que una colección de cartas $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ n -dimensionales sobre M es un atlas n -dimensional sobre M si satisface las siguientes condiciones:

1. $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.
2. Cualquier par de elementos de \mathcal{A} son compatibles.

Si \mathcal{A} es atlas sobre M entonces la colección $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ formada por las cartas sobre M que son compatibles con cada elemento de \mathcal{A} es nuevamente un atlas de M , pero con la propiedad de que cualquier carta que satisfaga la condición de compatibilidad con $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ está en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Cualquier atlas que tenga esta última propiedad se llamará estructura diferenciable sobre M .

Una variedad es un par (M, Σ) donde M es un espacio topológico de Hausdorff con base contable y Σ es una estructura diferenciable.

Cabe aquí señalar que si nosotros tenemos ya un atlas \mathcal{A} , ya obtenemos una variedad cuya estructura diferenciable es compatible con el atlas dado, esta estructura diferenciable es justamente el atlas maximal $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

2.2. Ejemplos

La esfera: $M = S^n$ y el atlas formados por las cartas $\varphi_j^+ : U_j^+ \rightarrow B^n$, $j = 1, \dots, n+1$:

$$\varphi_j^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$$

donde $U_j^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n / x_j > 0\}$; y las cartas $\varphi_j^- : U_j^- \rightarrow B^n$, $j = 1, \dots, n+1$:

$$\varphi_j^-(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$$

donde $U_j^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n / x_j < 0\}$, es una variedad diferenciable.

El toro: $M = S^1 \times S^1$ con las cartas indexadas por $(p, q) \in M$

$$\varphi_{p,q} : (S^1 \setminus \{p\}) \times (S^1 \setminus \{q\}) \rightarrow I_p \times I_q,$$

donde I_p es la imagen de alguna función argumento fija arg_p definida en $S^1 \setminus \{p\}$ y

$$\varphi(z_1, z_2) = (arg_p(z_1), arg_q(z_2)),$$

es una variedad suave.

Convenciones:

1. $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$.
2. Cuando digamos diferenciable nos estaremos refiriendo a ser C^∞ -diferenciable.
3. Una variedad M es sobreentendida que es de dimensión n a menos que se indique lo contrario con un superíndice, por ejemplo, M^m indica que M es una variedad de dimensión m .

2.3. Aplicaciones diferenciables

Sean M^m , N^n variedades diferenciales y $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua, diremos que es *diferenciable* si para cada $p \in M$ es posible encontrar una carta (U, φ) de M en p y una carta (V, ψ) de N en $f(p)$ tal que $f(U) \subset V$ y la aplicación

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sea diferenciable.

La aplicación \tilde{f} es llamada representación local de f con respecto a las cartas (U, φ) de M y (V, ψ) de N .

Es fácil corroborar que si (U_1, φ_1) es una carta de M y (V_1, ψ_1) es una carta de N tales que $f(U_1) \subset V_1$ entonces $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ es de clase C^∞ .

Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo si existe una aplicación inversa $g : N \rightarrow M$ que es también diferenciable.

2.4. Espacio tangente a una variedad en un punto

Como nuestra variedad no está dentro de un espacio euclídeo usual vamos apelar al álgebra para definir el espacio tangente a una variedad M en un punto p de M , para ello sea $\Sigma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ la estructura diferenciable sobre M y $\Lambda_p := \{\alpha \in \Lambda / p \in U_\alpha\}$.

Vamos a definir una relación de equivalencia sobre $\Lambda_p \times \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

Sean $(\alpha, a), (\beta, b) \in \Lambda_p \times \mathbb{R}^n$ diremos

$$(\alpha, a) \sim_p (\beta, b) \text{ si y sólo si } d\varphi_{\alpha\beta(x)}(a) = b$$

donde $x = \varphi_\alpha(p)$.

La relación anterior es, de hecho, de equivalencia, además se puede dotar de una adición y una multiplicación por reales de la siguiente manera:

1. $[(\alpha, a)]_p + [(\beta, b)]_p := [(\beta, \varphi_{\alpha\beta(x)}(a) + b)]_p$, donde $x = \varphi_\alpha(p)$.
2. $\lambda \cdot [(\alpha, a)]_p := [(\alpha, \lambda a)]_p$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Luego

$$T_p M = \Lambda_p \times \mathbb{R}^n / \sim_p$$

es un espacio vectorial, el cual tiene como base para cada $\alpha \in \Lambda_p$ y cada base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n el siguiente conjunto

$$\{[(\alpha, v_1)]_p, \dots, [(\alpha, v_n)]_p\}.$$

$T_p M$ es llamado espacio tangente a M en p .

2.5. Fibrado tangente de una variedad

El fibrado tangente es la unión disjunta de todos los espacios tangentes con una topología natural y un atlas diferenciable asociado a la estructura diferenciable de la variedad M .

Así $TM = \{(p, v) / p \in M, v \in T_p M\}$. Recordemos que en superficies de \mathbb{R}^3 la carta del espacio tangente asociada a una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tenía la siguiente apariencia $T\varphi_\alpha : TU_\alpha \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^2$ con

$$T\varphi_\alpha(p, v) = (\varphi_\alpha(p), t_1, t_2)$$

donde $TU_\alpha = \{(p, v) \in TM / p \in U_\alpha\}$ y $v = t_1 \frac{\partial \varphi_\alpha^{-1}}{\partial x_1}(x) + t_2 \frac{\partial \varphi_\alpha^{-1}}{\partial x_2}(x)$.

Siguiendo la analogía vamos a definir mapeos asociados a las cartas φ_α 's, dado $\alpha \in \Lambda$ definimos $T\varphi_\alpha : TU_\alpha \rightarrow V_\alpha \mathbb{R}^n$ como

$$T\varphi_\alpha \left(p, \sum_{j=1}^n t_j [(\alpha, e_j)]_p \right) = (\varphi_\alpha(p), t_1, \dots, t_n),$$

está bien definida la aplicación ya que los coeficientes de un vector tangente respecto a una base son únicos. Es un hecho que los mapeos de transición son difeomorfismos de clase C^∞ .

Aún no hemos dado una topología a TM . En lo que sigue vamos a dar una topología bastante natural.

Siguiendo la analogía de superficies de \mathbb{R}^3 , deberíamos esperar que TM tuviera como abiertos a

$$T\varphi_\alpha(A_\alpha),$$

donde $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Es una verificación topológica que todos los conjuntos de esa forma (variando α también) forman una base para una topología en TM , que hace a todos los $T\varphi_\alpha$ homeomorfismos; además es Hausdorff y cumple el segundo axioma de numerabilidad. Luego

$$T\Sigma = \{(TU_{\alpha, T\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda},$$

es un atlas para TM . Así TM es una variedad diferenciable.

2.6. La derivada de una aplicación diferenciable

Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades, vamos a definir la derivada de f en el punto $p \in M$ de la siguiente manera:

Sean (U, φ) carta de M en p , (V, ψ) una carta de N en $f(p)$ tal que $f(U) \subset V$ y pongamos $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, $x = \varphi(p)$ entonces definimos

$$df_p([\alpha, a]_p) := [\beta, d\tilde{f}_x(a)]_{f(p)}.$$

Se demuestra fácilmente que $df_p([\alpha, a]_p)$ está bien definida y es más

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

es una aplicación lineal.

La aplicación $df : p \mapsto df_p$ es llamada *diferencial o derivada* de f .

2.7. Orientación

Dado un espacio vectorial de dimensión finita V , podemos definir una relación de equivalencia en el conjunto de bases ordenadas de V : diremos que 2 bases ordenadas de V son equivalentes si su matriz de cambio de coordenada (respecto a cualquier base) tiene determinante positivo.

Esto define un conjunto de clases de equivalencias que sólo constará de 2 elementos. Cualquiera de esos elementos es llamado una orientación de V . Dada una base ordenada (b_1, \dots, b_m) de V esto define una orientación $[b_1, \dots, b_m]$, que es la clase de (b_1, \dots, b_m) .

Definición 2.1 Una orientación de una variedad M es una correspondencia $p \mapsto \mathcal{O}_p$ que asocia a cada $p \in M$ una orientación en $T_p M$, de manera que para cada punto $q_0 \in M$ exista una carta (U, φ) en q_0 tal que $[d\varphi_q^{-1}(e_1), \dots, d\varphi_q^{-1}(e_m)] = \mathcal{O}_q$ para todo $q \in U$.

Proposición 2.1 Sea \mathcal{O} una orientación sobre M^m con $m \geq 1$ y consideremos la asignación \mathcal{O}^- definida por $p \mapsto \mathcal{O}_p^-$ para todo $p \in M$, entonces \mathcal{O}^- es una orientación sobre M

Prueba: Sea $p \in M$ y tomemos una carta (φ, U) de M en p tal que para todo $q \in U$

$$\mathcal{O}_q = [(\varphi^*e_1)_q, \dots, (\varphi^*e_m)_q].$$

Consideremos la reflexión en \mathbb{R}^m , $R: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $R(x_1, x_2, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m)$, esto invierte orientación, y también su derivada en cualquier punto. Notemos que R restringido a un abierto de \mathbb{R}^m es un difeomorfismo suave sobre su imagen que es un abierto de \mathbb{R}^m . Consideremos la carta $(R \circ \varphi, U)$ de M en p . Si $q \in U$ y $v \in \mathbb{R}^m$ se tiene

$$(R \circ \varphi)_q^*(v) = (d(R \circ \varphi(p)))^{-1}(v) = (d\varphi(p))^{-1}(Rv).$$

Luego como $R(e_j) = e_j$ para todo $j \in \{2, \dots, m\}$ y $R(e_1) = -e_1$, entonces, para todo $q \in U$

$$[((R \circ \varphi)^*e_1)_q, \dots, ((R \circ \varphi)^*e_m)_q] = [-(\varphi^*e_1)_q, \dots, (\varphi^*e_m)_q],$$

osea, invierte la orientación de \mathcal{O} en $q \in U$, luego

$$[((R \circ \varphi)^*e_1)_q, \dots, ((R \circ \varphi)^*e_m)_q] = \mathcal{O}_q^-.$$

Así, \mathcal{O}^- define una orientación en M .

□

Proposición 2.2 *Sea M una variedad suave y conexa, y sea \mathcal{O} una orientación sobre M . Si \mathcal{O}' es una orientación sobre M entonces o bien $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ o bien $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^-$.*

Prueba: Sea $p_0 \in M$, entonces como sólo hay 2 orientaciones posibles en $T_{p_0}M$ se tiene que $\mathcal{O}'_{p_0} = \mathcal{O}_{p_0}$ o $\mathcal{O}'_{p_0} = \mathcal{O}_{p_0}^-$. Vamos a suponer que $\mathcal{O}'_{p_0} = \mathcal{O}_{p_0}$ y mostrar que $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$; si $\mathcal{O}'_{p_0} = \mathcal{O}_{p_0}^-$, entonces una demostración similar muestra que $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^-$.

Sea $C = \{p \in M : \mathcal{O}'_p = \mathcal{O}_p\}$, este conjunto es no vacío ya que $\mathcal{O}'_{p_0} = \mathcal{O}_{p_0}$. se mostrará que es abierto y cerrado en M , luego como M es conexo y C no vacío se tendrá que $C = M$ y así la prueba de la proposición terminará.

C es abierto, debido a que si $p \in C$, tomemos un par de cartas (φ_1, U) , (ψ, U) de M en p , donde U es conexo, tal que para todo $q \in U$:

$$\mathcal{O}'_q = [(\varphi_1^*e_1)_q, \dots, (\varphi_1^*e_m)_q],$$

y

$$\mathcal{O}_q = [(\varphi_2^*e_1)_q, \dots, (\varphi_2^*e_m)_q],$$

entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es un difeomorfismo entre abiertos conexos con determinante positivo en $\varphi_1(p)$, por la conexidad del dominio, la continuidad del determinante y el hecho de que el determinante de un isomorfismo es no cero, entonces φ_1 y φ_2 inducen la misma orientación sobre M en U .

Veamos que φ_1 y φ_2 inducen la misma orientación sobre U . Sea $q \in U$, tenemos que el difeomorfismo $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U) \rightarrow \varphi_2(U)$ preserva la orientación, osea, el determinante de su derivada en cada punto es siempre positivo. Consideremos la base ordenada en T_qM , definida a partir de φ_2 : $\mathcal{B}_2 := \{(d\varphi_2(q))^{-1}(e_1), \dots, (d\varphi_2(q))^{-1}(e_m)\}$. Sea $A = (a_{ij}) \in M(m \times m; \mathbb{R})$ la matriz

que representa a la derivada de $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ en q , tenemos que $\det(A) > 0$. Luego $\varphi_1^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$, entonces la base ordenada de $T_q M$ determinada por φ_1 es:

$$\mathcal{B}_1 := \{(d\varphi_1(q))^{-1}(e_1), \dots, (d\varphi_1(q))^{-1}(e_m)\} = \{(d\varphi_2(q))^{-1}(Ae_1), \dots, (d\varphi_2(q))^{-1}(Ae_m)\}$$

$$\{(d\varphi_1(q))^{-1}(e_1), \dots, (d\varphi_1(q))^{-1}(e_m)\} = \left\{ \sum_{i=1}^m a_{i1} (d\varphi_2(q))^{-1}(e_1), \dots, \sum_{i=1}^m a_{im} (d\varphi_2(q))^{-1}(e_m) \right\}$$

Entonces la matriz de cambio de base en $T_q M$ (de \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_1) en la base en la base \mathcal{B}_2 es A , que tiene determinante positivo, por lo tanto inducen las mismas orientaciones.

De allí que

$$[(\varphi_1^* e_1)_q, \dots, (\varphi_1^* e_m)_q] = [(\varphi_2^* e_1)_q, \dots, (\varphi_2^* e_m)_q]$$

para todo $q \in U$, i.e.

$$\mathcal{O}'_q = \mathcal{O}_q,$$

para todo $q \in U$, así el abierto buscado es U .

Veamos ahora que C es cerrado. Sea $(p_n) \subset C$ tal que $p_n \rightarrow p \in M$, tomemos una vecindad conexa de p en M , entonces hay 2 posibilidades para \mathcal{O}'_p , es \mathcal{O}_p ó \mathcal{O}_p^- . Si fuera \mathcal{O}_p^- , como hemos proseguido como antes, podríamos encontrar un abierto conexo en M que contiene a p y que para todo $q \in U$:

$$\mathcal{O}'_q = \mathcal{O}_q^-,$$

pero hay puntos de M , p_n , que están en U tales que $\mathcal{O}'_{p_n} = \mathcal{O}_p$, osea, obtenemos una contradicción.

Así debemos tener de que $\mathcal{O}'_p = \mathcal{O}_p$. Esto concluye la demostración, porque C es no vacío y M conexo, entonces para todo $p \in M$: $\mathcal{O}'_p = \mathcal{O}_p$, i.e., $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$.

□

2.8. Variedades con borde

Las variedades que hemos estado estudiando son llamadas variedades sin borde, vamos ahora extender un poco la definición de variedad que hemos dado.

Sea $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$, de manera análoga definimos $\mathbb{R}_{\leq 0}$.

En la definición de carta m -dimensional $\varphi : U \rightarrow V$ donde V es un abierto de \mathbb{R}^m , podemos extender un poco más la definición permitiendo que V pueda ser también un abierto de $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ ó $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ a los cuales denotaremos por \mathbb{H}^m . Para eso necesitamos las siguientes extensiones de aplicación suave.

Definición 2.2 Sea A un subconjunto abierto de \mathbb{H}^m , diremos que la aplicación $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave si existe un abierto U de \mathbb{R}^m que contiene a A y una función suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F|_A = f$.

Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{H}^m y B un subconjunto abierto de \mathbb{H}^n . Diremos que una aplicación $f : A \rightarrow B$ es suave si vista como la aplicación de A a \mathbb{R}^n , esto es, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, es suave.

Definición 2.3 Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{H}^m o \mathbb{R}^m y B un subconjunto abierto de \mathbb{H}^m o \mathbb{R}^m . Diremos que la aplicación $f : A \rightarrow B$ es difeomorfismo si existe una aplicación suave $g : B \rightarrow A$ tal que $gf = id_A$ y $fg = id_B$.

Con esta extensión lo que pedimos es que el cambio de cartas sea un difeomorfismo, esto es si $\varphi_1 : U_1 \rightarrow A$ y $\varphi_2 : U_2 \rightarrow B$ son cartas donde A y B son abiertos de \mathbb{H}^m o \mathbb{R}^m , entonces $\varphi_1\varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ es un difeomorfismo.

Así lo que obtenemos es lo que comúnmente se llama variedad con borde. Además se puede definir el concepto de aplicación diferenciable, espacio tangente, difeomorfismo y orientación de la misma manera que se ha hecho para el caso de variedades sin borde.

Si $p \in M$ es tal que $\varphi(p) = (0, x_2, \dots, x_m)$ diremos que p es un punto del borde de M , note que esta definición es independiente de la carta en p que se toma gracias al teorema de la función inversa.

Ejemplos de variedades con borde son el disco cerrado $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ o la esfera en \mathbb{R}^3 : $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

De ahora en adelante las variedades que se estudiarán podrían tener borde, salvo que se mencione que la variedad no tiene borde.

2.9. El Pull-back de una orientación a partir de un difeomorfismo local entre variedades

Sean M^m y N^n variedades suaves con borde, $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo local, \mathcal{O} una orientación sobre N y $p \in M$. Sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$, $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$ bases ordenadas de $T_{f(p)}N$ que inducen la misma orientación en $T_{f(p)}N$ y $A = (a_{ij})$ la matriz cambio de base de \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 con respecto a la base \mathcal{B}_1 , entonces:

$$(f^*u_j)_p := (df_p)^{-1}(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}(df_p)^{-1}(v_i)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Luego la matriz cambio de base de $\{(f^*v_1)_p, \dots, (f^*v_m)_p\}$ a $\{(f^*u_1)_p, \dots, (f^*u_m)_p\}$ es A que tiene determinante positivo.

Así que

$$[(f^*v_1)_p, \dots, (f^*v_m)_p] = [(f^*u_1)_p, \dots, (f^*u_m)_p].$$

Podemos definir la aplicación $f^*\mathcal{O}$ en M cuya regla de correspondencia es $p \mapsto (f^*\mathcal{O})_p := [(f^*v_1)_p, \dots, (f^*v_m)_p]$, donde $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base positiva de $T_{f(p)}N$, esta definición no es ambigua, ya que si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base positiva de $T_{f(p)}N$ entonces hemos visto que

$$[(f^*v_1)_p, \dots, (f^*v_m)_p] = [(f^*u_1)_p, \dots, (f^*u_m)_p].$$

Es más, $f^*(\mathcal{O})$ define una orientación sobre M .

Sea $p \in M$, sea W un conjunto abierto de M que contiene a p tal que $f|_W : W \rightarrow f(W)$ es un difeomorfismo. Sea (ψ, V) una carta de N en $f(p)$ tal que:

1. $V \subset f(W)$.
2. Para todo $b \in V$:

$$\mathcal{O}_b = [(\psi^*(e_1))_b, \dots, (\psi^*(e_m))_b].$$

Luego, si $U := W \cap f^{-1}(V)$ entonces $(\psi \circ f, U)$ es una carta de M en p , y tenemos que para todo $q \in U$:

$$[((\psi \circ f)^*e_1)_q, \dots, ((\psi \circ f)^*e_m)_q] = [(f^*v_1)_q, \dots, \{(dfv_m)_q\}^*]$$

donde $v_j = (\psi^*(e_j))_{f(q)}$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. De allí que

$$[((\psi \circ f)^*e_1)_q, \dots, ((\psi \circ f)^*e_m)_q] = (f^*\mathcal{O})_q,$$

para todo $q \in U$, donde $(\psi \circ f, U)$ es una carta de M en p . Por lo tanto $f^*\mathcal{O}$ es una orientación sobre M . La orientación $f^*\mathcal{O}$ es denominada *pull-back de la orientación \mathcal{O}* por medio de f .

2.10. Vectores que apuntan hacia afuera

Sea M una variedad suave con borde, $p \in \partial M$. Si para alguna carta (φ, U) de M en p se tiene que $d\varphi_p(\nu) \notin \mathbb{H}^m$, entonces para cualquier carta (ψ, U_1) de M en p se tiene $d\psi_p(\nu) \notin \mathbb{H}^m$. En efecto, sea $W := U \cap U_1$. Existe un abierto V_1 de \mathbb{R}^m tal que $V_1 \cap \mathbb{H}^m = \psi(W)$ entonces $g := \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow V_1 \cap \mathbb{H}^m$ es un difeomorfismo, además $\varphi(p), \psi(p) \in \partial \mathbb{H}^m$. Si $\vec{d} := d\psi(p)(\nu) \in \mathbb{H}^m$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\lambda(t) := \psi(p) + t\vec{d} \subset V_1 \cap \mathbb{H}^m$ para $t \in [0, \delta[$, luego $\beta := g^{-1} \circ \lambda$ está bien definido y su derivada en $t = 0$ es $d\varphi_p(\nu)$, pero como

$$g^{-1} \circ \lambda(t) \in \mathbb{H}^m$$

para todo $t \in [0, \delta[$ entonces tiene a la primera coordenada mayor o igual a cero ($\beta(0) = \varphi(p)$ tiene la primera coordenada cero), luego su derivada, que es $d\varphi_p(\nu)$, tendrá como primera coordenada a un número real mayor o igual a cero. Esto último nos da una contradicción, ya que la primera coordenada de su límite, que es $d\varphi_p(\nu)$, es negativa. Por lo tanto, debemos de tener que $d\varphi_p(\nu) \notin \mathbb{H}^m$.

Definición 2.4 Sea M una variedad suave con borde y $p \in \partial M$. Decimos que $\nu \in T_p M$ apunta hacia afuera de M si para alguna carta (φ, U) de M en p se tiene que $d\varphi_p(\nu) \notin \mathbb{H}^m$.

Sean M^m una variedad suave, $p \in M$ y $\nu, \nu' \in T_p M$ vectores que apuntan hacia afuera. Sea $\{v_2, \dots, v_m\}$ una base de $T_p \partial M$ visto como subespacio de $T_p M$, entonces $[\nu, v_2, \dots, v_m] = [\nu', v_2, \dots, v_m]$. En efecto, sea (φ, U) una carta de M en p , entonces $d\varphi_p(v_2), \dots, d\varphi_p(v_m)\{0\} \in \times \mathbb{R}^{m-1}$ y generan $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Consideremos las bases en $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$:

$$\{d\varphi_p(\nu), d\varphi_p(v_2), \dots, d\varphi_p(v_m)\} \quad , \quad \{d\varphi_p(\nu'), d\varphi_p(v_2), \dots, d\varphi_p(v_m)\},$$

(recordemos que tanto $d\varphi_p(\nu)$ como $d\varphi_p(\nu')$ tienen a sus primeras coordenadas diferentes de cero). Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de cambio de base con respecto a la primera base. Como las

primeras coordenadas de $d\varphi_p(\nu)$ y $d\varphi_p(\nu')$ son negativas existe un $\lambda > 0$ tal que $d\varphi_p(\nu') - \lambda * d\varphi_p(\nu)$ tiene la primera coordenada 0, luego como $d\varphi_p(v_2), \dots, d\varphi_p(v_m)$ generan $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$, tomemos una combinación lineal de ellos de modo que:

$$d\varphi_p(\nu') - \lambda * d\varphi_p(\nu) = \sum_{i=2}^m b_i d\varphi_p(v_i).$$

Luego la matriz A es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{m-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ b_m & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que a partir

$$d\varphi_p(\nu') = d\varphi_p\left(\lambda * \nu + \sum_{i=2}^m b_i v_i\right),$$

obtenemos

$$\nu' = \lambda * \nu + \sum_{i=2}^m b_i v_i.$$

Como determinante de A es $\lambda > 0$ tenemos que

$$[\nu, v_2, \dots, v_m] = [\nu', v_2, \dots, v_m].$$

En la próxima sección definiremos una orientación en el borde de una variedad orientada.

2.11. Orientación inducida sobre el borde de una variedad orientada

Consideraremos inicialmente el caso de variedades de dimensión por lo menos dos.

Sea M variedad con borde y orientada. Sea \mathcal{O} la orientación de M , para cada $p \in \partial M$ se tiene lo siguiente: Si $\nu, \nu' \in T_p M$ son vectores que apuntan hacia afuera de M , y $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}, \{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ son bases ordenadas para $T_p \partial M$ tales que $[\nu, v_1, \dots, v_{m-1}] = [\nu', u_1, \dots, u_{m-1}]$, entonces

$$[v_1, \dots, v_{m-1}] = [u_1, \dots, u_{m-1}].$$

En efecto, tenemos lo siguiente

$$[\nu, v_1, \dots, v_{m-1}] = [\nu', u_1, \dots, u_{m-1}] = [\nu, u_1, \dots, u_{m-1}]$$

Luego si A_1 es la matriz de cambio de base de v_1, \dots, v_{m-1} a u_1, \dots, u_{m-1} respecto a la primera base, y si A es la matriz cambio de base de $\{\nu, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ a $\{\nu, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ respecto a la primera base, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de A es positivo, entonces también lo es de A_1 , por lo tanto

$$[v_1, \dots, v_{m-1}] = [u_1, \dots, u_{m-1}].$$

Podemos definir ahora la aplicación $\partial\mathcal{O}$ definida en ∂M cuya regla de asignación es $p \mapsto \partial\mathcal{O}p := [v_1, \dots, v_{m-1}]$, donde $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ es una base ordenada de $T_p\partial M$ para la cual existe un vector $v \in T_pM$ que apunta hacia afuera de M en p de manera que $\{v, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ es una base positiva de T_pM .

Veamos, que de hecho, $\partial\mathcal{O}$ es una orientación sobre ∂M .

Sea $p \in \partial M$, se sabe que existe una carta (φ, U) de M en p , con $\varphi(U) = \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ y $\varphi(U \cap \partial M) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ (aquí es justamente donde se utiliza la dimensión de M mayor que 1), tal que para todo $q \in U$:

$$\mathcal{O}_q = [(\varphi^*e_1)_q, \dots, (\varphi^*e_m)_q].$$

Sabemos que para todo $q \in U \cap \partial M$:

$$(\varphi^*e_1)_q$$

es un vector que apunta hacia afuera de M , luego para todo $q \in U \cap \partial M$:

$$\{(\varphi^*e_2)_q, \dots, (\varphi^*e_m)_q\},$$

de como orientación $(\partial\mathcal{O})_q$.

De allí, si $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ es la aplicación lineal definida por $\pi(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m)$, entonces la carta $(U \cap \partial M, \psi = \pi\varphi)$ de ∂M en p cumple que

$$[(\psi^*e_1)_q, \dots, (\psi^*e_{m-1})_q] = (\partial\mathcal{O})_q,$$

para todo $q \in U \cap \partial M$, por lo tanto $\partial\mathcal{O}$ es una orientación de ∂M .

Si la variedad M tiene dimensión 1 su borde será una variedad 0-dimensional, o sea, un conjunto discreto de puntos. Sea \mathcal{O} una orientación de M , la orientación inducida sobre su borde será una aplicación que hace corresponder a cada punto de ∂M el número +1 o menos 1, de la siguiente manera: sea $p \in \partial M$ entonces se sabe que existe una carta (U, φ) de M en p tal que para todo $q \in M$

$$[(\varphi^*e_1)_q] = \mathcal{O}_q,$$

si $(\varphi^*e_1)_p$ es un vector que apunta hacia afuera le asociaremos +1, caso contrario, la aplicación en p será -1.

2.12. Orientación del producto de variedades

Vamos ahora definir una orientación sobre el producto de dos variedades, una con borde y la otra sin borde.

Sean $(M, \mathcal{O}_M), (N, \mathcal{O}_N)$ variedades suaves y orientadas, y consideremos la variedad suave $M \times N$. Sea $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ la estructura diferenciable de M y $\{(\psi_\beta, V_\beta)\}_{\beta \in \Gamma}$ la estructura diferenciable de N .

Primero orientaremos a $M \times N$ cuando M es una variedad con borde y N es una variedad sin borde.

Para cada $(p, q) \in M \times N$ (aquí $p \in M$ y $q \in N$), el espacio tangente $T_{(p,q)}(M \times N)$ a $M \times N$ en (p, q) es identificado con $T_p M \times T_q N$ por medio del isomorfismo cuya regla de correspondencia es $[(a, b), (\alpha, \beta)]_{(p,q)} \mapsto [(a, \alpha)]_p, [(b, \beta)]_q$, donde $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in U_p$, $\beta \in U_q$ y (α, β) es el índice asociado a la carta $\zeta_{\alpha,\beta} : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \varphi(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta)$ de $M \times N$ en (p, q) definido por

$$\zeta_{\alpha,\beta}(p_1, q_1) := (\varphi_\alpha(p_1), \psi_\beta(q_1)),$$

para todo $p_1 \in U_\alpha$ y para todo $q_1 \in V_\beta$.

Luego definimos la aplicación $\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N$ definida en $M \times N$ por medio de la siguiente regla de correspondencia: Sean $\{v_1, \dots, v_m\}$, $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases positivas de $T_p M$ y $T_q N$ respectivamente, entonces se define

$$(\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N)_{(p,q)} = [(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)]$$

donde

$$(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)$$

son vistos como elementos de $T_{(p,q)}(M \times N)$. Esto está bien definido, ya que si $\{v'_1, \dots, v'_m\}$, $\{w'_1, \dots, w'_n\}$ son bases positivas en $T_p M$ y $T_q N$, respectivamente, dejemos que A_1 sea la matriz de cambio de base de la primera a la segunda de $T_p M$ respecto a la primera base, análogamente, sea A_2 la matriz de cambio de base de la primera base, $\{w_1, \dots, w_n\}$, a la segunda, $\{w'_1, \dots, w'_n\}$, con respecto a la primera base, entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de base de

$$\{(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\}$$

a

$$\{(v'_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w'_1), \dots, (0, w'_n)\}$$

con respecto a la base $\{(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\}$. Como los determinantes tanto de A_1 como de A_2 son positivos, se tiene que el cambio de base en $T_{(p,q)}(M \times N)$ es positivo. De ello, la aplicación está bien definida.

Es más, $\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N$ define una orientación sobre $M \times N$.

En efecto, sea $(\tilde{p}, \tilde{q}) \in M \times N$, entonces existen cartas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$, (ψ_β, V_β) de M y N respectivamente tales que $\tilde{p} \in U_\alpha$, $\tilde{q} \in V_\beta$, y además:

- Para todo $p \in U_\alpha$:

$$(\mathcal{O}_M)_p = [(\varphi_\alpha^* e_1)_p, \dots, (\varphi_\alpha^* e_m)_p].$$

- Para todo $q \in V_\beta$:

$$(\mathcal{O}_N)_q = [(\psi_\beta^* e_1)_q, \dots, (\psi_\beta^* e_n)_q].$$

Considerando la carta $(\varphi_\alpha, \psi_\beta) : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \varphi(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta)$ de $M \times N$ en (\tilde{p}, \tilde{q}) , tenemos lo siguiente, si $(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, entonces

$$(\varphi, \psi)^*(a, b)_{(p,q)} = [((a, b), (\alpha, \beta))]_{(p,q)}$$

el cual es identificado con $[(a, \alpha)]_p, [(b, \beta)]_q$ en $T_pM \times T_qN$.

Con esta identificación tenemos:

$$\left(((\varphi, \psi)^* e_1)_{(p,q)}, \dots, ((\varphi, \psi)^* e_{m+n})_{(p,q)} \right) = \left([(e_1, \alpha)]_p, 0, \dots, [(e_m, \alpha)]_p, 0, (0, [(e_1, \beta)]_q), \dots, (0, [(e_n, \beta)]_q) \right)$$

lo cual es a su vez igual a

$$\left((\varphi^* e_1)_p, 0, \dots, (\varphi^* e_m)_p, 0, (0, (\psi^* e_1)_q), \dots, (0, (\psi^* e_n)_q) \right).$$

Como

$$\{(\varphi^* e_1)_p, \dots, (\varphi^* e_m)_p\}$$

y

$$\{(\psi^* e_1)_q, \dots, (\psi^* e_n)_q\}$$

son bases positivas para T_pM y T_qN , respectivamente, entonces

$$\left[\left((\varphi, \psi)^* e_1 \right)_{(p,q)}, \dots, \left((\varphi, \psi)^* e_{m+n} \right)_{(p,q)} \right] = (\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N)_{(p,q)}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N$ es una orientación sobre $M \times N$.

Ahora orientaremos a $M \times N$ cuando M es una variedad sin borde y N es una variedad con borde.

Para cada $(p, q) \in M \times N$ (aquí $p \in M$ y $q \in N$), el espacio tangente $T_{(p,q)}(M \times N)$ a $M \times N$ en (p, q) es identificado con $T_pM \times T_qN$ por medio del isomorfismo cuya regla de correspondencia es $[(b, a), (\beta, \alpha)]_{(p,q)} \mapsto [(a, \alpha)]_p, [(b, \beta)]_q$, donde $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Lambda_p$, $\beta \in \Gamma_q$ y (β, α) es el índice asociado a la carta $\xi_{\beta, \alpha} : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \psi_\beta(V_\beta) \times \varphi(U_\alpha)$ de $M \times N$ en (p, q) definido por

$$\xi_{\beta, \alpha}(p_1, q_1) := (\psi_\beta(q_1), \varphi_\alpha(p_1)),$$

para todo $p_1 \in U_\alpha$ y para todo $q_1 \in V_\beta$.

Definimos de manera análoga la aplicación $\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N$ definida en $M \times N$ por medio de la siguiente regla de correspondencia: Sean $\{v_1, \dots, v_m\}$, $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases positivas de T_pM y T_qN respectivamente, entonces se define

$$(\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N)_{(p,q)} = [(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)]$$

donde

$$(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)$$

son vistos como elementos de $T_{(p,q)}(M \times N)$. Esto está bien definido, ya que si $\{v'_1, \dots, v'_m\}$, $\{w'_1, \dots, w'_n\}$ son bases positivas en T_pM y T_qN , respectivamente, dejemos que A_1 sea la matriz de cambio de base de la primera a la segunda de T_pM respecto a la primera base,

análogamente, sea A_2 la matriz de cambio de base de la primera base, $\{w_1, \dots, w_n\}$, a la segunda, $\{w'_1, \dots, w'_n\}$, con respecto a la primera base, entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de base de

$$\{(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\}$$

a

$$\{(v'_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w'_1), \dots, (0, w'_n)\}$$

con respecto a la base $\{(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\}$. Como los determinantes tanto de A_1 como de A_2 son positivos, se tiene que el cambio de base en $T_{(p,q)}(M \times N)$ es positivo. De ello, la aplicación está bien definida.

Y también, $\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N$ define una orientación sobre $M \times N$.

En efecto, sea $(p_0, q_0) \in M \times N$, entonces existen cartas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$, (ψ_β, V_β) de M y N respectivamente tales que $p_0 \in U_\alpha$, $q_0 \in V_\beta$, y además:

- Para todo $p \in U_\alpha$:

$$(\mathcal{O}_M)_p = [(\varphi_\alpha^* e_1)_p, \dots, (\varphi_\alpha^* e_m)_p].$$

- Para todo $q \in V_\beta$:

$$(\mathcal{O}_N)_q = [(\psi_\beta^* e_1)_q, \dots, (\psi_\beta^* e_n)_q].$$

Consideremos la carta $\xi_{\beta,\alpha} : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \psi_\beta(V_\beta) \times \varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $M \times N$ en (p_0, q_0) definido por

$$\xi_{\beta,\alpha}(p, q) := (\psi_\beta(q), \varphi_\alpha(p)).$$

Tenemos lo siguiente, si $(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$ y $(b, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, entonces

$$\xi_{\beta,\alpha}^*(b, a)_{(p,q)} = [(b, a), (\beta, \alpha)]_{(p,q)}$$

el cual es identificado con $([(a, \alpha)]_p, [(b, \beta)]_q)$ en $T_p M \times T_q N$.

Con esta identificación tenemos:

$$\begin{aligned} ((\xi_{\beta,\alpha}^* e_1)_{(p,q)}, \dots, (\xi_{\beta,\alpha}^* e_{m+n})_{(p,q)}) = \\ \left((0, [(e_1, \beta)]_q), \dots, (0, [(e_n, \beta)]_q), ([e_1, \alpha]_p, 0), \dots, ([e_m, \alpha]_p, 0) \right) \end{aligned}$$

lo cual es a su vez igual a

$$\left((0, (\psi^* e_1)_q), \dots, (0, (\psi^* e_n)_q), \left((\varphi^* e_1)_p, 0 \right), \dots, \left((\varphi^* e_m)_p, 0 \right) \right).$$

Como

$$\{(\varphi^* e_1)_p, \dots, (\varphi^* e_m)_p\}$$

y

$$\{(\psi^* e_1)_q, \dots, (\psi^* e_n)_q\}$$

son base positivas para $T_p M$ y $T_q N$, respectivamente, entonces

$$\left(\left((\varphi^* e_1)_p, 0 \right), \dots, \left((\varphi^* e_m)_p, 0 \right), \left(0, (\psi^* e_1)_q \right), \dots, \left(0, (\psi^* e_n)_q \right) \right)$$

es una base positiva para $M \times N$.

Vamos ahora suponer que al menos una de las variedades, M ó N , tenga dimensión par. Entonces la matriz cambio de base de $T_{(p,q)}$, de la base

$$\{ (0, (\psi^* e_1)_q), \dots, (0, (\psi^* e_n)_q), ((\varphi^* e_1)_p, 0), \dots, ((\varphi^* e_m)_p, 0) \}.$$

a la base

$$\{ ((\varphi^* e_1)_p, 0), \dots, ((\varphi^* e_m)_p, 0), (0, (\psi^* e_1)_q), \dots, (0, (\psi^* e_n)_q) \}$$

tiene determinante positivo, ya que es la composición de mn transposiciones.

De allí que:

$$[(\xi_{\beta,\alpha}^* e_1)_{(p,q)}, \dots, (\xi_{\beta,\alpha}^* e_{m+n})_{(p,q)}] = (\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N)_{(p,q)}.$$

Sin embargo, si M y N tienen dimensiones impares entonces el determinante es negativo. Luego

$$[(\xi_{\beta,\alpha}^* e_1)_{(p,q)}, \dots, (\xi_{\beta,\alpha}^* e_{m+n})_{(p,q)}] = (\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N)_{(p,q)}^-.$$

es decir, $(\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N)^-$ es una orientación¹ sobre $M \times N$, por lo tanto, $\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_N$ es una orientación sobre $M \times N$.

2.13. Partición de la unidad

Definición 2.5 Sea X un espacio topológico. Definimos el soporte de una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\text{sop}(f) = \overline{\{p \in X / f(p) \neq 0\}}.$$

Definición 2.6 Sea X un espacio topológico. Decimos que una colección de conjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X es localmente finita si para cada $p \in X$ existe una vecindad V de p en X tal que el conjunto

$$\{\alpha \in \Lambda / V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$$

es finito.

Es claro que si X es un espacio topológico con base numerable y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto localmente finito no trivial (esto es, todos los U_α 's son no-vacíos) entonces Λ es numerable, en efecto para cada $p \in M$ podemos hallar un abierto básico que contenga a p y tenga intersección no-vacía con sólo una cantidad finita de U_α 's, luego como M es la unión numerable de estos abiertos básicos resulta que Λ es la unión numerable de conjuntos finitos y así Λ es numerable.

Sea M^m una variedad suave, para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = B_3^m$ ó si $p \in \partial M$ $\varphi(U) = B_3^m \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1})$.

¹Nosotros habíamos definido la aplicación \mathcal{O} , lo que se está mostrando es que la aplicación \mathcal{O}^- es una orientación.

Si $\mathcal{V} = \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in \Gamma}$ es un atlas de M , entonces podemos conseguir un refinamiento de él: $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ (para cada $\alpha \in \Lambda$ existe un $\beta \in \Gamma$ tal que $U_\alpha \subset V_\beta$), tal que $\overline{U_\alpha}$ es compacto y Λ es numerable.

En efecto, esto resulta del hecho que una variedad es localmente compacta y tiene base numerable.

Proposición 2.3 *Si $\{(V_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in \Gamma}$ una atlas de M , entonces existe un refinamiento localmente finito $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que*

1. $\varphi_\alpha(U_\alpha) = B_3^m$ ó $B_3^m \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1})$.
2. $\{\varphi^{-1}(B_1^m)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento localmente finito.

Prueba:

Ya sabemos que podemos obtener un refinamiento $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ numerable de \mathcal{V} tal que $\overline{A_n}$ es compacto.

Sea $W_1 = A_1$ y $K_1 = \overline{A_1}$, como K_1 es compacto sea n_2 el menor entero tal que

$$K_1 \subset A_1 \cup \dots \cup A_{n_2}.$$

Sea $W_2 = A_1 \cup \dots \cup A_{n_2}$ y $K_2 = \overline{W_2}$, nuevamente tomemos el menor entero $n_3 > n_2$ tal que

$$K_2 \subset A_1 \cup \dots \cup A_{n_3}.$$

Y definamos $W_3 = A_1 \cup \dots \cup A_{n_3}$ y $K_3 = \overline{W_3}$.

Prosiguiendo de esta manera obtenemos una secuencia de abiertos W_n tales que

$$W_n \subset \overline{W_n} \subset W_{n+1},$$

y $K_n = \overline{W_n}$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para K_1 podemos encontrar un cubrimiento finito por cartas $\{(U_i^1, \varphi_i^1)\}_{i=1}^{j_1}$ tales que $\varphi_i^1(U_i^1) = B_3^m$ ó $\varphi_i^1(U_i^1) = B_3^m \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1})$, $U_i^1 \subset W_2$ para cada $i \in \{1, \dots, j_1\}$ y $\left\{ [\varphi_i^1]^{-1}(B_1^m) \right\}_{i=1}^{j_1}$ aun cubra K_1 .

Para $K_2 \setminus W_1$ podemos encontrar un cubrimiento finito por cartas $\{(U_i^2, \varphi_i^2)\}_{i=1}^{j_2}$ tales que $\varphi_i^2(U_i^2) = B_3^m$ ó $\varphi_i^2(U_i^2) = B_3^m \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1})$, $U_i^2 \subset W_3$ para cada $i \in \{1, \dots, j_2\}$ y $\left\{ [\varphi_i^2]^{-1}(B_1^m) \right\}_{i=1}^{j_2}$ aun cubra $K_2 \setminus W_1$.

Para $K_3 \setminus W_2$ podemos encontrar un cubrimiento finito por cartas $\{(U_i^3, \varphi_i^3)\}_{i=1}^{j_3}$ tales que $\varphi_i^3(U_i^3) = B_3^m$ ó $\varphi_i^3(U_i^3) = B_3^m \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1})$, $U_i^3 \subset W_4 \setminus K_1$ para cada $i \in \{1, \dots, j_3\}$ y $\left\{ [\varphi_i^3]^{-1}(B_1^m) \right\}_{i=1}^{j_3}$ aun cubra $K_3 \setminus W_2$.

Prosiguiendo de esta forma obtenemos:

Para $K_{n+1} \setminus W_n$ podemos encontrar un cubrimiento finito por cartas $\{(U_i^{n+1}, \varphi_i^{n+1})\}_{i=1}^{j_{n+1}}$ tales que $\varphi_i^{n+1}(U_i^2) = B_3^m$ ó $\varphi_i^{n+1}(U_i^2) = B_3^m \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1})$, $U_i^2 \subset W_{n+2} \setminus K_{n-1}$ para cada $i \in \{1, \dots, i_{n+1}\}$ y $\left\{ [\varphi_i^{n+1}]^{-1}(B_1^m) \right\}_{i=1}^{j_1}$ aun cubra $K_{n+1} \setminus W_n$.

Es claro que la colección $\{(U_i^n, \varphi_i^n)/n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq i \leq i_n\}$ cumple el primer ítem de la proposición, además es localmente finita ya que si $p \in M$, tenemos que existe un W_n tal que $p \in W_n$, luego $p \in K_n$, como

$$U_i^j \cap K_n = \emptyset$$

cuando $j \geq n+2$ e $i \in \{1, \dots, i_j\}$, se tiene que W_n sólo tiene intersección no-vacía con una cantidad finita de U_i^j 's.

Por lo tanto colección $\{(U_i^n, \varphi_i^n)/n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq i \leq i_n\}$ cumple el ítem 1 y el ítem 2 por construcción. □

Definición 2.7 Sea $\mathcal{V} = \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in \Gamma}$ una atlas de M . Diremos que una colección de aplicaciones suaves $\{\lambda_\alpha : M \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento \mathcal{V} si:

- Para todo λ_α existe un $\beta \in \Gamma$ tal que

$$\text{sop}(\lambda_\alpha) \subset V_\beta.$$

- La colección de soportes es localmente finito.
- Y se cumple

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha = 1.$$

En lo que sigue veremos que siempre sobre variedades existen particiones de la unidad.

Consideremos una función de clase suave $\lambda : B_3^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\lambda|_{\overline{B_1^m}} = 1$.
2. $1 < \lambda(x) < 1$ si $1 < \|x\| < 2$.
3. $\lambda(x) = 0$ si $x \in B_3^m \setminus \overline{B_2^m}$

Si de la colección anterior \mathcal{U} definimos para cada $\alpha \in \Lambda$ la aplicación $s_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$s_\alpha(p) = \begin{cases} \lambda(\varphi_\alpha(p)) & p \in U_\alpha, \\ 0 & p \in M \setminus \varphi_\alpha^{-1}(\overline{B_2^m}). \end{cases}$$

Claramente s_α es una aplicación diferenciable, además como sus soportes forman una colección localmente finita, está bien definida la aplicación

$$\sum_{\alpha} s_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R},$$

ya que si $p \in M$ entonces tomemos una vecindad V de p en M tal que $\{\alpha \in \Lambda/V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito, digamos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, entonces para todo $q \in V$ tenemos que $s_\alpha(q) = 0$ cuando $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ y así

$$\sum_{\alpha} s_\alpha(q) = s_{\alpha_1}(q) + \dots + s_{\alpha_k}(q),$$

para todo $q \in V$.

Como localmente $\sum_{\alpha} s_\alpha$ es la suma de aplicaciones diferenciables llegamos a que $\sum_{\alpha} s_\alpha$ es diferenciable.

Notemos también que $s > 0$ ya para todo $p \in M$ existe un $\alpha \in \Lambda$ tal que $p \in \varphi_\alpha^{-1}(B_1^m)$, luego $s_\alpha(p) = 1$. Así luego la aplicación $\lambda_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda_\alpha = \frac{s_\alpha}{\sum_{\alpha} s_\alpha}$$

es diferenciable para cada $\alpha \in \Lambda$, además

$$\sum_{\alpha} \lambda_\alpha = 1.$$

La colección de funciones $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es así una partición de la unidad subordinada al cubrimiento \mathcal{U} .

2.14. Subvariedades

En esta sección e_1, \dots, e_m denotarán los elementos de la base canónica de \mathbb{R}^m .

Definición 2.8 Sea $0 < k \leq m$. Diremos que $P \subset \mathbb{R}^m$ es una pieza diferenciable de dimensión k si existe un conjunto finito $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ tal que $P = \text{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ ó $P = \{t_1 e_{i_1} + \dots + t_k e_{i_k} / t_1 \geq 0 \text{ y } t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$.

Definición 2.9 Una subvariedad k -dimensional Q de M^m es un subconjunto de M tal que para cada $p \in Q$ existe una carta (U, φ) de M en p de manera que cumple una de las 2 condiciones siguientes:

- $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$, $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U \cap Q)$ es una pieza diferenciable de dimensión k de \mathbb{R}^m .
- $\varphi(U) = \mathbb{H}^m$, $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U \cap Q)$ es una pieza diferenciable de dimensión k de \mathbb{R}^m .

Notemos que la colección formado con todas las composiciones de la proyección $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ con las cartas de la definición de subvariedad hacen de Q una variedad.

Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación diferenciable:

- Diremos que $p \in M$ es un punto regular de f si df_p es sobreyectiva de allí que $m \geq n$. Diremos que $p \in M$ es un punto singular de f si no es un punto regular de f .

- Sea $c \in N$, diremos que c es un valor regular de f si $f^{-1}(\{c\})$ no contiene punto singulares (podría ser vacío), en otro caso diremos que es un valor singular

En la siguiente proposición supondremos que tanto M como N no tienen borde.

Proposición 2.4 Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, si $c \in f(M)$ es un valor regular, entonces $f^{-1}(\{c\})$ es una subvariedad de M .

Prueba: Sea $p \in Q = f^{-1}(\{c\})$, como df_p es sobreyectiva existen cartas (U, φ) de M en p y (V, ψ) de N en c con $\psi(c) = 0$ tal que $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) = (x_{m-n+1}, \dots, x_m)$ para todo $(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U)$.

Entonces $\varphi(Q \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, donde $k = m - n$. Por lo tanto $f^{-1}(\{c\}) \subset M$ es una subvariedad de dimensión $m - n$.

□

Supongamos que M y N no tengan borde.

Teorema 2.1 Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entonces el conjunto de valores singulares de f tiene medida cero en N .

Prueba:

Sean $m = \dim M$, $n = \dim N$, (U, φ) una carta de M y (V, ψ) una carta de N tales que $f(U) \subset V$. Si $\tilde{f} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la representación local de f , entonces φ lleva todos los puntos de U que son críticos para f en todos los puntos críticos de \tilde{f} y ψ lleva todos los valores críticos de $f|_U$ que están en V en todos los valores críticos de \tilde{f} . Por lo tanto, bastará probar que el conjunto de valores críticos de \tilde{f} tiene medida cero.

De aquí es claro que si $m < n$ entonces el resultado se sigue.

Así consideremos $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable donde $U \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y $m \geq n$. Vamos a mostrar que el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero.

Sea S el conjunto de puntos críticos de f . Definamos

$$S_1 := \left\{ p \in S \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, m\} \right\},$$

$$S_2 := \left\{ p \in S \mid \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_I}(p) \neq 0 \text{ para algún } I \text{ multi-índice con } |I| \leq \frac{m}{n} \right\} \text{ y}$$

$$S_3 := S \setminus S_2.$$

Claramente $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Vemos primero que $f(S_3)$ tiene medida cero.

Sea $p_0 \in S_3$ entonces todas sus derivadas parciales de f en p_0 de orden menor o igual a m/n son ceros, luego podemos encontrar una vecindad abierta U_0 de p_0 de modo que si $p, q \in U_0$ entonces

$$\|f(q) - f(p)\| \leq c\|q - p\|^a,$$

donde $c > 0$ y a es el menor entero mayor que m/n . Tomemos C un cubo cerrado centrado en p_0 que esté contenido en U_0 , digamos de lado r , luego sub-dividimos este cubo en k^m cubos

de lado r/k . De allí sea $\{C_l\}_{l \in L}$ la colección formada por los cubos pequeños que intersectan S_3 , claramente $|L| \leq k^m$. Sea $p_1 \in C_l \cap S_3$, entonces para todo $q \in C_l$

$$\|f(q) - f(p_1)\| \leq c\sqrt{m}^a \frac{r^a}{k^a}.$$

Luego tenemos que

$$\text{vol}(f(C_l)) \leq 2^n c^n \sqrt{m}^{na} \frac{r^{na}}{k^{na}},$$

sea $B = 2^n c^n \sqrt{m}^{na} r^{na}$, entonces

$$\text{vol}(f(C \cap S_3)) \leq \sum_{l \in L} \text{vol}(f(C_l)) \leq \sum_{l \in L} Bk^{-na} \leq |L|Bk^{-na},$$

así

$$\text{vol}(f(C \cap S_3)) \leq Bk^m k^{-na} = Bk^{m-na},$$

como $m - na < 0$, si $k \rightarrow \infty$, vemos que $\text{vol}(f(C \cap S_3)) = 0$. Como podemos cubrir a S^3 por una cantidad numerable de cubos C que cumplan lo mismo, se tiene que $f(S_3)$ es de medida 0.

Pasamos ahora a demostrar que $f(S_2)$ tiene medida cero.

Antes notemos que como $S_1 \subset S_2$, esto terminará la demostración.

La demostración se hará por inducción sobre m .

Notemos que en el caso $m = 1$ se tiene $n = 1$, así $S_2 = \emptyset$ luego queda demostrado el teorema.

Supongamos el teorema válido para $m \geq 1$. Y supongamos, ahora, que U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^{m+1} .

Veamos primero que $f(S_2 \setminus S_1)$ tiene medida cero.

Sea $p_0 \in S_2 \setminus S_1$ entonces existe una derivada parcial de algún f_k , donde $k \in \{1, \dots, n\}$, tal que

$$\frac{\partial^{|I|} f_k}{\partial x_I}(p_0) = 0,$$

con $|I| + 1 \leq m/n$ (esta desigualdad no será utilizada más adelante), y

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^{|I|} f_k}{\partial x_I} \right) (p_0) \neq 0,$$

para algún $j \in \{1, \dots, m+1\}$.

Fijemos I, k y pongamos

$$g = \frac{\partial^{|I|} f_k}{\partial x_I} : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si X sea el conjunto de puntos de U que verifican las mismas condiciones que p_0 con I, k fijos entonces localmente X es una variedad de dimensión m , de allí que por hipótesis de inducción $f(X)$ tiene medida cero, como $f(S_2 \setminus S_1)$ es solo la unión finita de conjuntos de la misma medida entonces es de medida cero.

Pasamos ahora a mostrar que $f(S_1)$ tiene medida cero.

Sea $p_0 \in S_1$ entonces tenemos que existen i, k tales que

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p_0) \neq 0,$$

haciendo cambios de coordenadas podemos suponer que

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}}(p_0) \neq 0$$

y además $p_0 = 0, f(0) = 0$.

Por el teorema local de sumersiones existen un abierto básico $A \times I \subset U$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ de $(0, 0)$, un abierto de W de $0 \in \mathbb{R}$ y un difeomorfismo $G : W \rightarrow A \times I$ tal que

$$f_n \circ G(x_1, \dots, x_m, s) = s.$$

Consideremos $g = f \circ G : A \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, tenemos

$$g(x_1, \dots, x_m, s) = (h_s(x_1, \dots, x_m), s).$$

Luego los puntos críticos de g son enviados en todos los puntos críticos de f sobre W debido a que G es un difeomorfismo:

$$g'(\cdot) = f'_{G(\cdot)} \circ G'(\cdot).$$

Como el gradiente de g_n en (x_1, \dots, x_m, s) es $(0, \dots, 0, 1)$ para todo $(x_1, \dots, x_m, s) \in A \times I$, tenemos que (x_1, \dots, x_m, s) es un punto crítico si y sólo si la función $h_s : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene a (x_1, \dots, x_m) como punto crítico, por la hipótesis de inducción $\mu_m(H_s) = 0$ donde H_s es el conjunto de valores críticos de h_s .

Sea S_g el conjunto de puntos críticos de g .

Se tiene

$$V = g(S_g) = \bigcup_{s \in I} H_s \times \{s\},$$

así por el teorema de Fubinni

$$\mu_{m+1}(V) = \int_I \mu_m(H_s) ds = 0.$$

Por lo tanto $f(W \cap S)$ tiene medida cero, de allí nuevamente se tiene que $f(S_1)$ tiene medida cero con lo cual se concluye la inducción. Y termina la demostración del teorema.

□

2.15. Transversalidad

En esta sección se considerarán variedades sin borde.

Sea A^r una subvariedad de N^n entonces $i : A \rightarrow N$ es un encaje, luego para cada $q \in A$ tenemos que la aplicación

$$di_q : T_q A \rightarrow T_q N$$

es inyectiva. Sabemos que existe una carta (V_β, ψ_β) de N en q cuya proyección a las primeras r coordenadas de la restricción de ψ_β a la parte común de su dominio con N da una carta de A . Si γ es el índice de esta carta en A entonces podemos identificar el vector tangente $[a, \gamma]_p \in T_q A$ con el vector tangente $[(a, 0), \beta] \in T_q N$ a través de di_q .

Así podemos ver a $T_q A$ como un sub-espacio vectorial de $T_q N$, que es lo que se hará en la siguiente definición.

Definición 2.10 Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, $K \subset M$ y A una subvariedad de N , decimos que f es transversal a A a lo largo de K si para cada $p \in K \cap f^{-1}(A)$ se cumple

$$df_p(T_p M) + T_{f(p)} A = T_{f(p)} N.$$

Proposición 2.5 Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación, A^r una subvariedad de N^r . Si f es transversal a A a lo largo de M entonces $f^{-1}(A)$ es una subvariedad de M y $\dim M - \dim f^{-1}(A) = \dim N - \dim A$.

Prueba: Sea $p \in f^{-1}(A)$ y consideremos una carta (V, ψ) de N en $f(p)$ de modo que la proyección de la restricción sobre A dé una carta sobre A , ahora tomemos una carta (U, φ) de M en p tal que $f(U) \subset V$ entonces la representación de f

$$\tilde{f} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

va a cumplir la siguiente propiedad que para todo $x \in \tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}^r \times \{0\})$

$$d\tilde{f}_x(\mathbb{R}^m) + \mathbb{R}^r \times \{0\} = \mathbb{R}^n.$$

Además $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}^r \times \{0\}) = \varphi(f^{-1}(A))$. Así lo que resta probar es $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}^r \times \{0\})$ es una subvariedad de \mathbb{R}^m de co-dimensión igual a $n - r$.

Sea $h = \pi \circ \tilde{f} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ la proyección de \tilde{f} a las últimas $n - r$ coordenadas, entonces la condición sobre \tilde{f} nos dice que $0 \in \mathbb{R}^{n-r}$ es un valor regular, además $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}^r \times \{0\}) = h^{-1}(\{0\})$, de allí que $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}^r \times \{0\})$ es una subvariedad de \mathbb{R}^m de co-dimensión igual a $n - r$.

□

2.16. Variedad compactas

Las variedades compactas pueden ser vistas como subvariedades de algún \mathbb{R}^n .

En efecto si $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^k$ es un atlas de la variedad compacta M^m , sea $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ una partición de la unidad subordinada a $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^k$, y definamos $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $i \in \{1, \dots, k\}$, como

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \lambda_i(p)\varphi_i(p) & p \in U_i, \\ 0 & p \notin \text{sop}(\lambda_i). \end{cases}$$

Luego la aplicación diferenciable $f : M \rightarrow (\mathbb{R}^m)^k \times \mathbb{R}^k$ definida por

$$f(p) = (\psi_1(p), \dots, \psi_k(p), \lambda_1(p), \dots, \lambda_k(p))$$

es una inmersión, además es inyectiva ya que si $p, q \in M$ son tales que $f(p) = f(q)$ entonces existe un λ_j tal que $\lambda_j(q) > 0$, luego $\lambda_j(p) > 0$, ya que $\lambda_j(p) = \lambda_j(q)$, luego $p, q \in U_j$. Como $\varphi_j(p) = \varphi_j(q)$ se sigue que $p = q$. Finalmente como M es compacto se sigue que f es un homeomorfismo sobre su imagen, por lo tanto f es un encaje.

Así, M se puede encajar en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n , donde $n = mk + k$.

2.17. Cubrimiento doble orientado

Sea M una variedad y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una estructura diferenciable sobre M , para cada $p \in M$ en $T_p M$ existen 2 orientaciones, denotemos por $\mathcal{O}_\alpha(p)$ la orientación de $T_p M$ definida por la base ordenada $\{(d\varphi_p)^{-1}e_1, \dots, (d\varphi_p)^{-1}e_m\}$ en $T_p M$.

Notación: \mathcal{O}_p denotará una orientación en $T_p M$ y $-\mathcal{O}_p$ denotará la otra orientación y diremos que es la orientación opuesta a \mathcal{O}_p en $T_p M$.

Para cada $\alpha \in \Lambda$ definamos

$$\mathcal{O}(U_\alpha) = \{(p, \mathcal{O}_\alpha(p)) / p \in U_\alpha\},$$

y formemos el conjunto

$$\mathcal{O}_M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{O}(U_\alpha),$$

notemos que \mathcal{O}_M es el conjunto

$$\bigsqcup_{p \in M} \{\text{las 2 orientaciones de } T_p M\}.$$

Sea $\pi : \mathcal{O}_M \rightarrow M$ la aplicación $\pi(p, \mathcal{O}_p) = p$

Vamos a dar una estructura diferenciable a \mathcal{O}_M .

Para cada $\alpha \in \Lambda$ definimos

$$\psi_\alpha : \mathcal{O}(U_\alpha) \rightarrow V_\alpha,$$

donde $V_\alpha = \varphi(U_\alpha)$, como

$$\psi_\alpha(p, \alpha(p)) = \varphi_\alpha(p).$$

La colección de biyecciones $\{(\mathcal{O}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ da a \mathcal{O}_M una estructura diferenciable (así una topología) que hace a \mathcal{O}_M una variedad diferenciable abstracta (un espacio topológico con una estructura diferenciable).

Veamos que $\pi : \mathcal{O}_M \rightarrow M$ es un cubrimiento de 2 hojas.

Para cada $p \in M$ tomemos un U_α tal que $p \in U_\alpha$, entonces si $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es definida por $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m)$ entonces $g \circ \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow g(V_\alpha)$ es una carta de M sobre U_α digamos (U_β, φ_β) tal que $\mathcal{O}_\beta(p)$ es la orientación opuesta (distinta) de $\mathcal{O}_\alpha(p)$ en $T_p M$ para cada $p \in U_\alpha$.

De lo anterior tenemos que

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \mathcal{O}(U_\alpha) \sqcup \mathcal{O}(U_\beta),$$

y es claro que $\pi|_{\mathcal{O}(U_\alpha)} : \mathcal{O}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$, $\pi|_{\mathcal{O}(U_\beta)} : \mathcal{O}(U_\beta) \rightarrow U_\alpha$ son homeomorfismos, luego π es una aplicación de cubrimiento con 2 hojas.

Como M es Hausdorff y tiene base numerable entonces también tiene estas propiedades \mathcal{O}_M , así M es una variedad diferenciable.

Además si M es conexa entonces \mathcal{O}_M tiene a lo más 2 componentes.

Proposición 2.6 *Sea M una variedad conexa: M es orientable si y sólo si \mathcal{O}_M tiene 2 componentes.*

Prueba:

Supongamos que M es orientable y tomemos un atlas diferenciable orientado $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ sobre M , esto es que sus cambios de coordenadas sea positivos, entonces \mathcal{O}_M es disconexa y así tiene 2 componentes, sino podemos tener una camino en \mathcal{O}_M que bajado a M por π sería un camino que haría que el atlas \mathcal{A} no sea orientado. Veamos esto.

Tomemos una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de \mathcal{A} y $p \in U_\alpha$. Por la conexidad de \mathcal{O}_M existe un camino $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_M$ que una $(p, \mathcal{O}_\alpha(p))$ con $(p, -\mathcal{O}_\alpha(p))$.

Sea $c : [0, 1] \rightarrow M$ el camino bajado a M , esto da un lazo en $p \in M$, luego existe una partición $\{0 = t_0 < \dots < t_k = 1\}$ de $[0, 1]$ tal que

$$c([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\alpha(i)},$$

donde $(U_{\alpha(i)}, \varphi_{\alpha(i)}) \in \mathcal{A}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\alpha(1) = \alpha(k) = \alpha$.

Se prueba usando la unicidad del levantamiento paso a paso que $f([t_{i-1}, t_i]) \subset \mathcal{O}(U_{\alpha(i)})$, con lo cual se llega a una contradicción ya que $\mathcal{O}(U_{\alpha(k)})$ no contiene a $(p, -\mathcal{O}_\alpha(p))$.

Como

$$\xi_1 = \pi|_{\mathcal{O}(U_{\alpha(1)})} \rightarrow U_{\alpha(1)}$$

es un difeomorfismo con $\xi_1(p, \mathcal{O}_\alpha(p)) = p$, tenemos que $\eta = \xi^{-1}(c|[0, t_1])$ es un levantamiento de $c|[0, t_1]$ con $\eta(0) = f(0)$, luego por unicidad del levantamiento $\eta = f|[0, t_0]$ y también se tiene que $f(t_1) \in \mathcal{O}(U_{\alpha(2)})$; repitiendo este procedimiento con $\xi_2 = \pi|_{\mathcal{O}(U_{\alpha(2)})} \rightarrow U_{\alpha(2)}$, y el camino $c|[t_1, t_2]$, obtenemos que $f([t_1, t_2]) \subset \mathcal{O}(U_{\alpha(2)})$, y así sucesivamente se obtiene que

$$f([t_{i-1}, t_i]) \subset \mathcal{O}(U_{\alpha(i)}).$$

Recíprocamente si \mathcal{O}_M tiene 2 componentes N_1, N_2 tenemos que $\pi : N_1 \rightarrow M$ es un difeomorfismo local biyectivo, esto es, un difeomorfismo. Como N_1 es orientable entonces M es orientable.

□

Definición 2.11 *Un lazo suave $c : [0, 1] \rightarrow M$ en $p \in M$ es llamado lazo desorientador en $p \in M$ si cualquier levantamiento en el cubrimiento doble orientado deja de ser un lazo.*

Es claro que la existencia de un lazo desorientador en una variedad revela que la variedad M es no orientable. También vale el recíproco, si M es no orientable entonces existe un lazo desorientador.

Proposición 2.7 *M es no orientable si y sólo si existe un lazo desorientador en M .*

La siguiente proposición se hará uso en el teorema de clasificación de superficies compactas no orientables.

Proposición 2.8 *Sea M una superficie conexa no-orientable, entonces M tiene un lazo desorientador $c : [0, 1] \rightarrow M$ simple regular.*

Prueba:

Tomemos un encaje $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_M$ suave con $f(0) = (p, \mathcal{O}_p)$ y $f(1) = (p, -\mathcal{O}_p)$. Sea $c = \pi \circ f : [0, 1] \rightarrow M$ el camino bajado a M , por ser π regular tenemos que c es regular.

Para cada $t \in [0, 1]$ existe un intervalo I_t abierto en $[0, 1]$ con $t \in I_t$ tal que $c|_{I_t}$ es un encaje suave. Usando la compacidad de $[0, 1]$, podemos extraer una cantidad finita de intervalos: $[0, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, 1]$ que cubran $[0, 1]$ de manera que $a_i < b_{i-1}$ para $i \in \{2, \dots, k\}$.

Si $c|_{[0, 1]}$ es inyectivo ya tenemos el camino requerido sino, existe $s \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $c|_{[0, b_s)}$ es inyectivo y $c|_{[0, b_{s+1}]}$ no es inyectivo. Sea $d \in (a_{s+1}, b_s)$, notemos que $K = c([0, d])$ es compacto disjunto de $c(d, b_s)$, tenemos que existe $r \in [b_s, b_{s+1})$ tal que $c(r) \in K$. Luego tomemos t^* el menor tiempo que está en $[b_s, r]$ tal que $c(t^*) \in K$.

Así existe $\tau \in [0, d]$ tal que $c(\tau) = c(t^*)$, notemos que $\tau < t^*$, además $c : [\tau, t^*] \rightarrow M$ es un lazo suave regular simple. Es desorientador ya que tiene un levantamiento que es la restricción de una aplicación inyectiva: $f|_{[\tau, t^*]}$. Esto concluye la demostración.

□

Capítulo 3

Teoría de Morse

3.1. Lema de Morse

Sea M una variedad suave y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, decimos que $p \in M$ es un punto crítico de f si $df_p = 0$. Si $p \in M$ es un punto crítico de f y (φ, U) es una carta de M en p , entonces $x := \varphi(p)$ es un punto crítico de $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$, debido a que $d(f \circ \varphi^{-1})(x) = df(p) \circ (d\varphi^{-1})(x) = 0$.

Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $a \in U$ un punto crítico de f , diremos que $a \in U$ es un punto crítico no-degenerado si la matriz hessiana de f en a es no singular. O equivalentemente, si la aplicación $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$g(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right),$$

tiene derivada invertible en $x = a$.

Observemos que un punto singular no-degenerado es aislado gracias al teorema de la función inversa. En efecto, dado U , f , a y g como el anterior párrafo, tenemos por el teorema de la función inversa que existe un abierto W de \mathbb{R}^n contenido en U , con $a \in W$ tal que $V := g(W)$ es abierto y $g : W \rightarrow V$ es un difeomorfismo, en particular inyectiva, luego df es cero en W sólo en a . De allí que f restricto a W sólo tiene a a como punto crítico.

Denotemos $H(f)(a)$ la matriz hessiana de f en a , sabemos que $H(f)(a)$ es simétrica, luego posee n autovalores reales contando sus multiplicidades. Cuando a es un punto crítico no-degenerado los autovalores son números reales distintos de cero, así definimos el índice de f en a como el número de autovalores, contando sus multiplicidades, negativos. O equivalentemente, es la mayor dimensión de los sub-espacios vectoriales V de \mathbb{R}^n tal que la forma cuadrática $Q(x) = xH(f)(a)x^t$, $x \in \mathbb{R}^n$, restricta a V es definida negativa.

Vamos ahora a definir el concepto de punto crítico no-degenerado e índice para funciones suaves cuyo dominio es una variedad suave, para ello necesitamos de la siguiente proposición.

Proposición 3.1 Sean U, V un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave,

$a \in U$ un punto crítico no-degenerado con índice k y $\phi : V \rightarrow U$ un difeomorfismo suave. Entonces $\phi^{-1}(a)$ es un punto crítico no-degenerado de $f \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ con índice k .

Prueba:

Calculemos $\frac{\partial^2 f \circ \phi}{\partial y_i \partial y_j}(y)$ donde $y \in V$ y $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Pongamos $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ y $x = \phi(y)$.

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial y_j}(y) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) \frac{\partial \phi_l}{\partial y_j}(y),$$

luego

$$\frac{\partial^2 f \circ \phi}{\partial y_i \partial y_j}(y) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \phi_l}{\partial y_j}(y) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial y_k \partial y_j}(y).$$

Sea $H(f)(x)$ el hessiano de f en x , entonces

$$\frac{\partial^2 f \circ \phi}{\partial y_i \partial y_j}(y) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \phi_l}{\partial y_j}(y) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial y_k \partial y_j}(y).$$

Es fácil ver que b es un punto crítico de $f \circ \phi$, luego si la expresión anterior ponemos $y = b$ tenemos

$$\frac{\partial^2 f \circ \phi}{\partial y_i \partial y_j}(b) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(a) \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \phi_l}{\partial y_j}(b).$$

Sea $H(f)(x)$ el hessiano de f en x , entonces

$$H(f \circ \phi)(b) = J\phi(b)^t H(f)(x) J\phi(b),$$

donde $J\phi(b)$ es la matriz jacobiana de ϕ en b y $J\phi(b)^t$ su transpuesta, como tanto $J\phi(b)$ como $H(f)(x)$ son invertibles se sigue que $H(f \circ \phi)(b)$ es invertible. Por lo tanto, b es un punto crítico no-degenerado para $f \circ \phi$.

Ahora veamos que el índice de $f \circ \phi$ en b es k .

Para ello bastará probar que $H(f \circ \phi)(b)$ restringido a un sub-espacio vectorial de \mathbb{R}^n de dimensión k es definida negativa. Sea V un sub-espacio vectorial de \mathbb{R}^n de dimensión k donde $H(f)(a)$ es definida negativa y consideremos el sub-espacio $W = J\phi^{-1}(V)$ de \mathbb{R}^n que es claramente de dimensión k , sea $y = x * (J\phi^{-1})^t$, donde $x \in V \setminus \{0\}$, entonces

$$yH(f \circ \phi)(b)y^t = xH(f)(a)x^t > 0.$$

Luego el índice k' de $f \circ \phi$ en b es mayor igual que k , utilizando el difeomorfismo ϕ^{-1} obtenemos $k' \leq k$; así $k = k'$

□

Gracias a la proposición anterior podemos definir que es un punto crítico no-degenerado para un función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre una variedad suave de la siguiente forma.

Definición 3.1 Sean M una variedad suave, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $a \in M$ un punto crítico de f , decimos que a es un punto crítico no-degenerado de f si para alguna carta (φ, U) de M en a , $\varphi(a)$ es un punto crítico no-degenerado de $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Y el índice de f en a es definido como el índice de $f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(a)$.

Veamos que si (ψ, V) es una carta de M en a , entonces también $\psi(a)$ es un punto crítico no degenerado de $f \circ \psi^{-1} : \psi(V) \rightarrow \mathbb{R}$. Esto es claro, debido a que $\phi = \varphi \circ \psi^{-1} : W_1 \rightarrow W_2$, donde $W_1 = \psi(U \cap V)$ y $W_2 = \varphi(U \cap V)$, es un difeomorfismo y

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ \phi$$

en W_1 , luego por la proposición anterior $\psi(a)$ es un punto crítico no-degenerado de $f \circ \psi : \psi(V) \rightarrow \mathbb{R}$ con el mismo índice.

Proposición 3.2 Sean U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^3 . Si $x_0 \in U$ es un punto crítico no degenerado, entonces existe un abierto $W \subset U$ que contiene a x_0 , un entorno abierto V de $0 \in \mathbb{R}^m$, una matriz real no singular $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ y un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ tales que

$$f \circ \varphi(y) - f(x_0) = \langle y, Ay \rangle.$$

Prueba: Primero supongamos que $x_0 = 0$.

Tomemos la expansión de Taylor de f de segundo orden en 0

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j \int_0^1 (1-t) \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(tx) dt,$$

Denotemos por $a_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(tx) dt$, y formemos así la matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ donde $i, j \in \{1, \dots, m\}$ y $x \in U$. Como $2A(x_0)$ es el Hessiano de f en x_0 , entonces $A(x) = A_0 B(x)$ donde $A_0 = A(0)$, $B(x)$ es suave y $B(x_0)$ es la identidad, luego existe una vecindad W_1 de x_0 dentro de U tal que $B(x)$ tiene raíz cuadrada¹ como una función suave, osea, $C(x)^2 = B(x)$ para todo $x \in W_1$ y $C : W_1 \rightarrow M(m \times m, \mathbb{R})$ suave, por el teorema de *Schwartz* $A(x)$ es simétrica, luego igualando a su transpuesta tenemos para $x \in W_1$

$$A_0 C^2(x) = C^*(x)^2 A_0,$$

las 2 matrices siguientes tienen cuadrados iguales

$$C^*(x) \quad A_0 C(x) A_0^{-1}$$

además en 0 son iguales a la identidad, entonces podemos restringir la vecindad W_1 aun más tal que la restricción de la raíz cuadrada sea inyectiva, luego

$$C^*(x) = A_0 C(x) A_0^{-1}.$$

¹Basta considerar la aplicación $C \mapsto C^2$, donde $C \in M(n \times n)$ y aplicar el teorema de la aplicación inversa en $C = I$. Luego $C(x)$ es la compuesta de esta inversa con $B(x)$.

Podemos escribir a f de la siguiente manera:

$$f(x) - f(x_0) = \langle x, A(x)x \rangle$$

luego

$$f(x) - f(x_0) = \langle x, (C(x)^*)^2 A_0 x \rangle$$

$$f(x) - f(x_0) = \langle C(x)x, C(x)^* A_0 x \rangle$$

$$f(x) = \langle C(x)x, A_0 C(x)x \rangle$$

Luego $\varphi : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $\varphi(x) = C(x)x$, es un difeomorfismo en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^m$ ya que su derivada en ese punto es $C(0)$ y esta matriz es invertible.

Para el caso general, primero tomemos la función $h : x \mapsto x + x_0$ que lleva el abierto $U_1 := U - \{x_0\}$ a U , luego consideremos $f \circ h : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$, ahora estamos en las condiciones del caso particular, el difeomorfismo requerido es la composición de h con el difeomorfismo del caso particular.

□

3.2. Gradiente de una función suave

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, es sabido que el gradiente de f en un punto $x \in U$ es el vector

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Queremos definir el mismo concepto cambiando U por una variedad suave $M \subset \mathbb{R}^m$.

Sean M una variedad suave, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $p \in M$, sabemos que $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal de $T_p M \subset \mathbb{R}^m$ que es de dimensión finita, luego existe un único $X(p) \in T_p M$ tal que $df_p v = \langle v, X(p) \rangle$ para todo $v \in T_p M$ (\langle, \rangle es el producto interno usual de \mathbb{R}^m restringido a $T_p M$). De allí, definimos el gradiente de f en p como

$$\nabla f(p) = X(p),$$

luego tenemos definido el campo sobre M , $grad(f) : M \rightarrow TM$

$$grad(f)(p) = (p, X(p)),$$

para todo $p \in M$.

Veamos que de hecho es suave.

Sea $p \in M$ y (φ, U) una carta de M en p . Como para todo $q \in U$, podemos obtener un sistema ortonormal en $T_q M$ $\{v_j(q)\}_{j=1}^n$ a partir de (φ, U) :

Sea $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Para cada $q \in U$, sea $\psi = \varphi^{-1}$ y $x = \varphi(q)$, tenemos que $\{d\psi(x)(e_j)\}_{j=1}^n$ es una base para T_pM , pongamos $b_j(q) = d\psi(x)(e_j)$. Luego utilizando el proceso de ortonormalización siguiente

$$\begin{aligned} v_1(q) &= \frac{1}{\|b_1(q)\|} b_1(q) \\ v_2(q) &= \frac{1}{\|(b_2(q) - \langle b_2, v_1(q) \rangle v_1(q))\|} (b_2(q) - \langle b_2, v_1(q) \rangle v_1(q)) \\ &\vdots \\ v_n(q) &= \frac{1}{\|b_n(q) - \sum_{j=1}^{n-1} \langle b_n, v_j(q) \rangle v_j(q)\|} \left(b_n(q) - \sum_{j=1}^{n-1} \langle b_n, v_j(q) \rangle v_j(q) \right), \end{aligned}$$

tenemos que

$$X(q) = \sum_{j=1}^n \langle X(q), v_j(q) \rangle v_j(q),$$

de allí que X es suave en U , por lo tanto $\text{grad}(f)$ es suave.

3.3. Existencia de funciones de Morse sobre variedades compactas

Proposición 3.3 *Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Para cada $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ definimos $f^c : U \rightarrow \mathbb{R}$ como*

$$f^c(x) := f(x) + \sum_{i=1}^m c_i x_i,$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in U$. Entonces para casi todo $c \in \mathbb{R}^m$ se tiene que f^c es una función de Morse.

Prueba: Definimos la aplicación $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ como

$$g(x) := \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right),$$

para todo $x \in U$. Por el Teorema 2.1 el conjunto de valores críticos de g tiene medida cero en \mathbb{R}^m , luego casi todo $c \in \mathbb{R}^m$ es valor regular de g .

Ahora bien, si $c \in \mathbb{R}^m$ es tal que $-c$ es un valor regular de g , tenemos lo siguiente: sea $x \in U$ un punto crítico de f^c (si es que existe), entonces $\nabla f^c(x) = \nabla f(x) + c = 0$, luego $g(x) = -c$. Como $-c$ es un valor regular de g se tiene que $Jg(x)$ es una matriz invertible, como $Jg(x)$ es la matriz Hessiana de f^c (como uno lo puede verificar con mucha facilidad) se tiene que x es un punto crítico no-degenerado de f^c , esto es, f^c es un función de Morse.

Por lo tanto, para casi todo $c \in \mathbb{R}^m$ se tiene que f^c es una función de Morse.

□

Cabe aquí señalar que la proposición anterior vale también para abiertos U de \mathbb{H}^m , en efecto, existe un abierto \tilde{U} de \mathbb{R}^m que contiene a U y una función suave $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_U = f$, luego para casi todo $c \in \mathbb{R}^m$

$$F^c,$$

es una función de Morse en \tilde{U} , así para casi todo $c \in \mathbb{R}^m$

$$f^c : U \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función de Morse en U .

Sean $f, g : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves y $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua positiva, diremos que la distancia entre f y g es menor a ϵ si $|f - g| < \epsilon$.

Teorema 3.1 *Sea $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave definida en una variedad compacta sin borde M^m y $\epsilon > 0$, entonces existe una función de Morse $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ cuya distancia con f es menor a ϵ , esto es,*

$$|f - g| < \epsilon.$$

Prueba:

Podemos suponer que M es una subvariedad de algún espacio euclídeo \mathbb{R}^n , ver Sección 2.16.

Dado $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ consideremos la función $f^c : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f^c(x) = f(x) + c_1x_1 + \dots + c_nx_n,$$

donde $x \in M$. Claramente f es suave.

Sea $p \in M$, sabemos que existe una vecindad abierta U de p en \mathbb{R}^n tal que $U \cap M$ es el gráfico de una aplicación diferenciable, esto es, existen un conjunto de índices $\{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$, un conjunto abierto W de \mathbb{R}^m y una aplicación suave $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, tal que si

$$\{j_1 < \dots < j_{n-m}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$$

y

$$\text{graf}(\xi) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / u := (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in W, (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}}) = \xi(u)\}$$

entonces

$$\text{gráf}(\xi) = U \cap M.$$

Sea $\psi : W \rightarrow U \cap M$ la función definida por $\psi_{i_l}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = x_{i_l}$ donde $l \in \{1, \dots, m\}$ y en otro caso, definimos $\psi_{j_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = \xi_k(u)$, donde $k \in \{1, \dots, n - m\}$ y $u = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$.

Podemos cubrir a M por una cantidad numerable de estas vecindades U 's. A este cubrimiento lo denotaremos por \mathcal{U} .

Fijemos por un momento $c_{j_1}, \dots, c_{j_{n-m}}$ y consideremos la función suave f^{c^2} en donde $c^2 = (0, \dots, c_{j_1}, \dots, 0, \dots, c_{j_{n-m}}, \dots, 0)$, esto es $c^2_{j_k} = c_{j_k}$ (cuando $k \in \{1, \dots, n - m\}$) y en otro caso $c^2_i = 0$.

Usando la carta (U, ψ^{-1}) , donde $U \in \mathcal{U}$, tenemos la representación local de f^{c^2}

$$\tilde{f}^{c^2} = \tilde{f} + c_{j_1}x_{j_1} + \dots + c_{j_{n-m}}x_{j_{n-m}},$$

por la proposición anterior, para casi todo $c^1 = (c_{i_1}, \dots, c_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$ tenemos que

$$\widetilde{f^{c^2}} + c_{i_1}x_{i_1} + \dots + c_{i_m}x_{i_m} = \widetilde{f^c},$$

donde $c = (c_1, \dots, c_n)$, es una función de Morse en U , esto es,

$$X_{c^2} := \{(c_{i_1}, \dots, c_{i_m}) \in \mathbb{R}^m / \text{si } c = (c_1, \dots, c_n) \text{ entonces } f^c \text{ es una función de Morse en } U\}$$

tiene medida cero en \mathbb{R}^m .

Luego $X = \{c \in \mathbb{R}^n / f^c \text{ es una función de Morse en } U\}$ tiene medida cero.

Denotemos tal X por X_U , como

$$A := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} X_U$$

es una unión numerable de conjuntos de medida cero en \mathbb{R}^n , se tiene que esta unión es de medida cero en \mathbb{R}^n .

Sea $c \in \mathbb{R}^n \setminus A$ lo suficientemente pequeño de manera que

$$\|c\| \cdot \text{máx}\{\|x\| / x \in M\} < \epsilon,$$

entonces $f^c : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse, ya que lo es sobre cada $U \in \mathcal{U}$, y dista de f menos de ϵ . Tomando $g := f^c$ terminamos la prueba del teorema.

□

Es sabido que los puntos críticos de una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ son aislados, y pueden 2 puntos críticos distintos tener valores vía f iguales. La siguiente proposición muestra que podemos variar f a una función de Morse g de manera que en cada uno de sus conjuntos de nivel sólo hay a lo más un punto crítico. Más preciso

Teorema 3.2 *Sea M^m una variedad sin borde y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua entonces existen una función de Morse $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ que dista de f menos que ϵ tal que cada uno de sus conjuntos de nivel tiene a lo más un punto crítico. De manera más precisa:*

Prueba: Como el conjunto de sus puntos críticos de f es discreto se tiene que este conjunto es numerable. Además existen cartas de Morse (U, φ) en torno de cada punto crítico disjuntas entre si, que forman una colección numerable y localmente finita.

Una carta de Morse (U, φ) de tal colección tiene un punto crítico $p \in M$ de algún índice k , además cumple $\varphi(U) = B_{3r}^m$ (donde $r > 0$), $\varphi(p) = 0$ y

$$f\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = f(p) + x_1^2 + \dots + x_{m-k}^2 - (x_{m-k+1}^2 + \dots + x_m^2),$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in U$

Enumeremos el conjunto de puntos críticos de f con los números naturales.

Sea p el primer punto de esta enumeración, y consideremos una carta de Morse (U, φ) en torno de p como la descrita anteriormente.

Vamos a variar f en U , de la siguiente manera: sea $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la función suave que es 1 en $[-r, r]$, mientras que fuera de $(-4r, 4r)$ es 0, además $-R \leq \lambda'(t) \leq 0$, donde $R > 0$, para todo $t \in [r, 4r]$.

Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $|c| < R^{-1}$, entonces la función $f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f_1(p) = f(p) + c\lambda(\|\varphi(p)\|^2),$$

para $p \in U$, y en $M \setminus \varphi^{-1}(D_{2r}^m)$ como f , es claramente bien definida y suave.

En $M \setminus \varphi^{-1}(B_{2r}^m)$ la función f_1 es de Morse; veamos que en U sólo tiene a p como punto crítico y este a su vez es no-degenerado de índice k .

En la carta (U, φ) tenemos que la función f_1 tiene la siguiente expresión:

$$f_1\varphi^{-1}(x) = f(p) + x_1^2 + \cdots + x_{m-k}^2 - (x_{m-k+1}^2 + \cdots + x_m^2) + c\lambda(\|x\|^2),$$

para todo $x \in B_{3R}^m$, luego

$$\begin{aligned} \nabla(f_1\varphi^{-1})(x) &= [1 + c\lambda(\|x\|^2)](2x_1, \dots, 2x_{m-k}, 0, \dots, 0) \\ &\quad + [1 - c\lambda(\|x\|^2)](0, \dots, 0, 2x_{m-k+1}, \dots, 2x_m), \end{aligned}$$

como $|c\lambda(\|x\|^2)| < 1$, tenemos que $\nabla(f_1\varphi^{-1})(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, además como en una vecindad de p , la función f_1 es una traslación de f se tiene que $0 = \varphi(p)$ es un punto crítico no-degenerado.

Nótese que la variación f_1 es una función de Morse con los mismos puntos críticos (y del mismo tipo) de f .

Ahora bien, como la imagen vía f de los otros puntos críticos es un conjunto numerable de \mathbb{R} , podemos elegir un c de manera que $f_1(p) = f(p) + c$ no este en ese conjunto numerable y además f_1 diste de f menos que $\epsilon/2^1$, procediendo de manera inductiva: si uno ya tiene una variación de f_i de f_{i-1} en la carta de Morse del i -ésimo punto crítico que lleva los i primeros puntos críticos en valores distintos entre si, con el procedimiento anterior uno hace una variación a f_i en torno de el abierto de Morse del $i+1$ -ésimo punto crítico, digamos f_{i+1} , de manera que esta variación diste menos que $\epsilon/2^{i+1}$ de f_i , además toma en los $i+1$ primeros puntos críticos valores distintos entre si.

En caso que conjunto de puntos críticos es finito el proceso anterior es finito y es claro que se obtiene la aplicación requerida.

Caso contrario definimos $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(q) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(q),$$

donde $q \in M$, esta aplicación es bien definida ya que si $q \in M$ existe un abierto V de M que contiene a q que intersecta sólo a una cantidad finita de abiertos de Morse U 's, luego existe un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_i|_V = f_{i_0}|_V$, para todo $i \geq i_0$, de esta manera se tiene que g es una función suave la cual es localmente Morse por lo tanto Morse. Como la distancia entre f_{i+1} y f_i es menor que $\epsilon/2^{i+1}$ se tiene que g dista de f menos que ϵ . Nótese que en realidad podemos decir que las perturbaciones que se han hecho han sido en conjuntos compactos que están contenidos en los abiertos de Morse, luego como estos abiertos forman una colección localmente finita, tenemos que f ha sido variada en un conjunto cerrado C (unión de una colección localmente finita de compactos) que está en la unión de los abiertos de Morse U 's.

Así g es igual a f en $M \setminus C$. También por construcción g tiene en cada abierto de Morse el mismo punto crítico de f con igual índice, ya que si p es el i_0 -ésimo punto crítico y U el abierto de Morse asociado tenemos que

$$f_i|U = f_{i_0}|U$$

para todo $i > i_0$, esto es, no se ha variado f_i en U , luego

$$g|U = f_{i_0}|U,$$

de allí se sigue, que en U , la función g tiene únicamente un punto crítico que coincide con el punto crítico de f además de tener el mismo índice.

Por construcción g lleva puntos críticos distintos en valores distintos. En efecto sea $p, q \in M$ puntos críticos de g , luego de f , entonces p es el i -ésimo punto crítico de f y q es el j -ésimo punto crítico de f , sabemos que si $k > i, j$ entonces f_k no son variados en los abiertos de Morse que contienen a p y a q , luego $g(p) = f_k(p)$ y $g(q) = f_k(q)$, como f_k tiene la propiedad de llevar los primeros k -puntos críticos en valores distintos, tenemos que $g(p) \neq g(q)$. Esto concluye la demostración. □

3.4. Funciones de Morse y tipo de homotopía

Sean M una variedad suave, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ definimos

$$M^c := \{p \in M / f(p) \leq c\}.$$

Teorema 3.3 Sean M una variedad suave, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $[a, b]$ un intervalo compacto no-degenerado. Si $f^{-1}([a, b])$ es un conjunto compacto de M que no contiene puntos críticos, entonces M^a es difeomorfo a M^b . Además, M^a es un retracto por deformación de M^b .

Prueba:

Como el conjunto de puntos críticos de f es cerrado y disjunto del compacto $K := f^{-1}([a, b])$, sea $W \subset M$ una vecindad abierta relativa compacta de K tal que \overline{W} no tiene puntos críticos de f . Nuevamente consideremos una vecindad V de K tal que $\overline{V} \subset W$, claramente \overline{V} es compacto.

Consideremos una función suave $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda \equiv 1$ en \overline{V} y $\lambda \equiv 0$ en $M \setminus W$. Luego, definimos el siguiente campo $X : M \rightarrow TM$ como

$$X(p) = \frac{\lambda}{\langle grad(f)(p), grad(f)(p) \rangle} grad(f)(p),$$

cuando $p \in W$ y $X(p) = 0$ cuando $p \in M \setminus \overline{V}$. Claramente X es un campo suave con soporte compacto, luego su flujo φ tiene como dominio $M \times \mathbb{R}$.

Sea $p \in M$ fijo y consideremos la curva $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(t) := f(\varphi(t, p)),$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Si para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t_0) \in f^{-1}([a, b])$ entonces

$$\frac{d\gamma_p}{dt}(t_0) = \langle \text{grad}(f)(\varphi(p, t_0)), X(\varphi(t_0, p)) \rangle = 1.$$

Luego el difeomorfismo $h : M \rightarrow M$ definido por $h(p) = \varphi(p, b-a)$ lleva todo M^a en todo M^b y la inversa de h análogamente lleva todo M^b en todo M^a . Por lo tanto M^a es difeomorfa a M^b .

Veamos ahora que M^a es un retracto por deformación de M^b . Sea $r : M^b \times [0, 1] \rightarrow M$ definido por

$$r(p, t) = \begin{cases} p & \text{si } f(p) \leq a \\ \varphi(p, t(a - f(p))) & \text{si } a \leq f(p) \leq b. \end{cases}$$

Entonces $r(p, 0) = p$ para todo $p \in M$ y r_1 es un retracto de M^b en M^a .

□

Teorema 3.4 *Sea $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, $c \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Si $f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ es compacto y sólo tiene a un punto crítico $p \in M$ y además es un punto crítico no-degenerado de índice r , entonces existe un $0 < \delta < \epsilon$ tal que $M^{c+\delta}$ tiene el mismo tipo de homotopía de la adjunción de $M^{c-\delta}$ con una célula de dimensión r .*

Prueba: Como $p \in M$ es un punto crítico no-degenerado de f de índice r existe una carta (U, φ) de M en p tal que $\varphi(p) = 0$ y $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} : B^r \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la siguiente expresión

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = c - (x_1^2 + \dots + x_r^2) + x_{r+1}^2 + \dots + x_m^2$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U)$.

Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y $B_{\sqrt{2\delta}}^m \subset \varphi(U)$.

Consideremos la r -célula $B_r = \varphi^{-1}(\overline{B_{\sqrt{\delta}}^r} \times \{0\})$. Sea $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

1. $\lambda(0) > \delta$.
2. $\lambda = 0$ en $[2\delta, +\infty)$.
3. $-1 < \lambda' \leq 0$ sobre \mathbb{R} .

Para simplificar la notación sea

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_r) &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_r^2} \\ v(y_1, \dots, y_{m-r}) &= \sqrt{y_1^2 + \dots + y_{m-r}^2} \end{aligned}$$

donde $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ y $(y_1, \dots, y_{m-r}) \in \mathbb{R}^{m-r}$.

Definamos la función $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ como aquella que coincida con f fuera de U y dentro de U como

$$g(q) = f(q) - u^2(\varphi(q)) + v^2(\varphi(q)) + \lambda(u^2(x_1(q), \dots, x_r(q)) + 2v^2(x_{r+1}(q), \dots, x_m(q)))$$

donde $(x_1(q), \dots, x_m(q)) = \varphi(q)$. Claramente $g \leq f$.

Esta función es diferenciable y en U

$$g = c - u^2(x_1, \dots, x_r) + v^2(x_{r+1}, \dots, x_m) - \lambda(u^2(x_1, \dots, x_r) + 2v^2(x_{r+1}, \dots, x_m)).$$

Se tiene que $g((-\infty, c + \delta]) = M^{c+\delta}$, debido que en

$$\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / x_1^2 + \dots + x_r^2 + 2x_{r+1}^2 + \dots + 2x_m^2 \leq 2\delta\})$$

uno tiene que

$$f \leq c - u^2 + v^2 \leq c + \frac{1}{2}u^2 + v^2 \leq c + \delta$$

También los puntos críticos de g coinciden con los de f . En efecto como g coincide con f fuera de U veamos los puntos críticos de g en f . gracias a la expresión anterior de g en U , tenemos que la expresión local de g en la carta (U, φ)

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x_1, \dots, x_m) &= c - u^2(x_1, \dots, x_r) + v^2(x_{r+1}, \dots, x_m) \\ &\quad - \lambda(u^2(x_1, \dots, x_r) + 2v^2(x_{r+1}, \dots, x_m)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Su gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla g(x_1, \dots, x_m) &= [-1 - \lambda](2x_1, \dots, 2x_r, 0, \dots, 0) \\ &\quad + [1 - \lambda](0, \dots, 0, 2x_{r+1}, \dots, 2x_m). \end{aligned} \quad (3.2)$$

De allí que $\nabla g(x_1, \dots, x_m) = 0$ si y sólo si $(x_1, \dots, x_m) = 0$.

Ahora bien como $g \leq f$ y $g^{-1}((-\infty, c + \delta]) = M^{c+\delta}$ se tiene que

$$g([c - \delta, c + \delta]) \subset f([c - \delta, c + \delta]).$$

Luego el posible punto crítico de g dentro de $g([c - \delta, c + \delta])$ sería p , sin embargo

$$g(p) = c - \lambda(0) < c - \delta,$$

de allí que $g^{-1}([c - \delta, c + \delta])$ no tiene puntos críticos, además es compacto entonces $g^{-1}((-\infty, c - \delta])$ es difeomorfo a $g^{-1}((-\infty, c + \delta])$, es decir a $M^{c+\delta}$.

Tenemos que $M^{c-\delta} \subset g^{-1}((-\infty, c - \delta])$, además

$$B_r \subset g^{-1}((-\infty, c - \delta]),$$

en efecto, si $q \in B_r$ entonces su u es menor o igual que $\sqrt{\delta}$ y su v es cero, luego

$$g(q) = c - u^2 - \lambda(u^2),$$

y $\lambda(u^2) \geq \delta - u^2$ ya que sino se tendría por el teorema del valor medio

$$-1 < \frac{\lambda(u^2) - \lambda(0)}{u^2} < \frac{\delta - u^2 - \delta}{u^2} = -1,$$

lo cual es una contradicción.

Vamos a ver que $A = g^{-1}((-\infty, c-\delta])$ se puede retractar a $M^{c-\delta} \cup B_r$. Sea $r : A \times [0, 1] \rightarrow A$ definida para cada $s \in [0, 1]$:

Si $q \in A \setminus \varphi\left(B_{\sqrt{2\delta}}^m\right)$ cono $r(q, s) = q$.

Si $q \in A \cap \varphi\left(B_{\sqrt{2\delta}}^m\right)$ lo definimos en partes:

1. Su u es menor o igual que $\sqrt{\delta}$ como

$$r(q, s) = \varphi^{-1}(u(x_1(q), \dots, x_r(q)), su(x_{r+1}(q), \dots, sx_r(m))).$$

2. Su u es mayor o igual que $\sqrt{\delta}$ y cumple $v^2 + \delta \geq +u^2$ como

$$\varphi^{-1}\left((x_1(q), \dots, x_r(q), 0, \dots, 0) + \left[1 - s + s \frac{\sqrt{u^2 - \delta}}{v}\right] (0, \dots, 0, x_{r+1}(q), \dots, x_m(q))\right),$$

donde lo que esta entre comillas es bien definida cuando $v = 0$, tomando límite se tiene que $u^2 \rightarrow \delta$.

3. Su u es mayor o igual que $\sqrt{\delta}$ y cumple $v^2 + \delta \leq u^2$ como

$$r(q, s) = q.$$

La aplicación r es continua, $r_1 = id_A$ y r_0 es una retracción entre A en $M^{c-\delta} \cup B$. Por lo tanto $M^{c+\delta}$ tiene el mismo tipo de homotopía de $M^{c-\delta} \cup B_r$.

□

3.5. Aplicaciones

Definimos

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\},$$

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| < r\},$$

$$D_r := \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq r\},$$

donde $r > 0$.

Definición 3.2 Sean M una variedad suave y $f : M \rightarrow [a, b]$ (con $a < b$) una función de Morse, diremos que es admisible si a, b son valores regulares de f y $\partial M = f^{-1}(\{a, b\})$.

Lema 3.1 Sea M una superficie conexa y compacta, y $f : M \rightarrow [0, 1]$ una función de Morse admisible con un único punto crítico. Si el punto crítico es de índice 0 entonces es un mínimo global.

Prueba:

Sea $p \in M$ el único punto crítico f y $c = f(p)$. Tenemos que $0 < c < 1$ a partir de que f es una función de Morse admisible.

Como p tiene índice 0 existe una carta (U, φ) de M en p tal que $\varphi(U) = B_{\sqrt{3r}}$ donde $r > 0$ y $c + 3r < 1$, $\varphi(p) = 0$ y para todo $(x, y) \in B_{\sqrt{3r}}$

$$f\varphi^{-1}(x, y) = c + x^2 + y^2.$$

Sea $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la función definida por

$$\lambda(t) = g(2r + t)g(2r - t),$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es definida por

$$g(t) = \frac{\xi(t)}{\xi(t) + \xi(r - t)},$$

y

$$\xi(t) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{t}) & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Entonces la función $g : M \rightarrow (-\infty, 1]$ definida como f en $M \setminus \varphi(D_R)$, donde $R \in (\sqrt{2r}, \sqrt{3r})$, y en U (usando coordenadas):

$$g(x, y) = c + x^2 + y^2 - (1 + c)\lambda(x^2 + y^2),$$

es bien definida de clase C^∞ , además sólo tiene un único punto crítico (el mismo que f) el cual es no-degenerado y de mínimo.

Tenemos que $g^{-1}((-\infty, 0)) \subset U$ es difeomorfo a B_1 . Considerando ahora $\tilde{M} = M \setminus g^{-1}((-\infty, 0))$, notamos que \tilde{M} es una superficie con borde, cuyo borde es el mismo de M aumentado en una más (recordemos que cada componente de una superficie con borde es difeomorfa a S^1). Además \tilde{M} es conexa.

Luego si consideramos $g : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$, vemos que es una función de Morse admisible sin puntos críticos. Así \tilde{M} es difeomorfo a $g^{-1}(\{1\}) \times [0, 1]$, como \tilde{M} es conexo resulta que $g^{-1}(\{1\})$ tiene una componente.

Como $g^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{1\})$, tenemos que $f^{-1}(\{1\})$ tiene una componente, de otro lado, a partir de que $g^{-1}(\{1\})$ es difeomorfo a $g^{-1}(\{0\})$ y de que el número de componentes de $g^{-1}(\{0\})$ es el número de componentes de $f^{-1}(\{0\})$ más 1, tenemos que el número de componentes de $f^{-1}(\{0\})$ es 0.

Así f no alcanza su mínimo en $f^{-1}(\{0\})$ ya que este último conjunto es vacío, por lo tanto p es un mínimo global de f .

□

Teorema 3.5 Sean M una superficie conexa y compacta, y $f : M \rightarrow [0, 1]$ una función de Morse admisible con un único punto crítico. Si el punto crítico es de índice 0 entonces M es una superficie difeomorfa al disco D^2 .

Prueba:

Sea $p \in M$ el único punto crítico f y $c = f(p)$. Tenemos que $0 < c < 1$ a partir de que f es una función de Morse admisible.

Como p tiene índice 0 existe una carta (U, φ) de M en p tal que $\varphi(U) = B_{2r}$ donde $r > 0$ y $c + 4r^2 < 1$, $\varphi(p) = 0$ y para todo $(x, y) \in B_{2r}$

$$f\varphi^{-1}(x, y) = c + x^2 + y^2.$$

Además si $q \in M \setminus U$, entonces $f(q) \geq c + 4r^2$.

Ya que si existe $q \in M \setminus U$ tal que $f(q) < c + 4r^2$, tomando $K = M \setminus U$, tenemos que $f|_K$ alcanza su mínimo para un $q_0 \in K$ y $f(q_0) < c + 4r^2$.

Notemos ahora que q_0 es un mínimo de $f|_{[M \setminus \varphi(D_{\sqrt{T}})]}$ donde $T \in (f(q_0) - c, 4r^2)$, como $c \leq f(q_0) \leq f(q) < c + 4r^2 < 1$, tenemos que $q_0 \notin \partial M$ (notemos que $[M \setminus \varphi(D_{\sqrt{T}})]$ es un conjunto abierto de M) así q_0 es un punto crítico de f lo cual es una contradicción.

Como f alcanza su máximo, este estará en $f^{-1}(\{1\})$, luego sabemos $f^{-1}((-\infty, c + r^2])$ es difeomorfo a $f^{-1}((-\infty, 1])$ que es M .

Como $f^{-1}((-\infty, c + r^2]) \subset U$, tenemos que

$$\varphi(f^{-1}((-\infty, c + r^2/2])) = D_r^2.$$

Así M es difeomorfa al disco D^2 .

□

Teorema 3.6 Sean M una superficie conexa y compacta, y $f : M \rightarrow [a, b]$ una función de Morse admisible con un único punto crítico. Si el punto crítico es un punto silla entonces M es homeomorfa a la adjunción de un cilindro por su borde superior con un rectángulo a través de sus lados opuestos.

Prueba:

Sea $p \in M$ el único punto crítico de f , supongamos que $f(p) = 0$.

Tomemos una carta de Morse (U, φ) de M en p tal que $\varphi(U) = B_{\sqrt{3r}}$ con $r > 0$ y $a < -5r < 5r < \min\{b, 1\}$, $\varphi(p) = 0$ y para todo $(x, y) \in B_{\sqrt{3r}}$:

$$f\varphi^{-1}(x, y) = x^2 - y^2.$$

Sea $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la función definida por

$$\lambda(t) = \begin{cases} (2r)e^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{t-2r}\right) & \text{si } t < 2r, \\ 0 & \text{si } t \geq 2r. \end{cases}$$

Notemos que

- $\lambda(0) = 2r$
- $-1 < \lambda'(t) < 0$ si $t < 2r$.

Sea $g : M \rightarrow [a, b]$ la función definida en $M \setminus \varphi^{-1}(D_{\sqrt{R}})$ donde $R \in (2r, 3r)$ como f y en U como (utilizando coordenadas):

$$g(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2)$$

para todo $(x, y) \in B_{\sqrt{3r}}$. Esta es una función bien definida, de clase C^∞ que cumple lo siguiente:

1. $g^{-1}((-\infty, r])$ no tiene puntos críticos.
2. $g^{-1}((-\infty, r]) \subset f^{-1}((-\infty, r])$.
3. $g^{-1}(\{a\}) = f^{-1}(\{a\})$, $g^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(\{b\})$.
4. g tiene un único punto crítico, el cual es silla.

Pongamos $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 \leq 2r\}$ y sea $N = \{p \in \varphi^{-1}(\mathcal{E}) / g(p) \geq r \text{ y } f(p) \leq r\}$, claramente

$$f^{-1}((-\infty, r]) = g^{-1}((-\infty, r]) \cup N.$$

Veamos que N es homeomorfo a un rectángulo.

Claramente N es homeomorfo a

$$\tilde{N} = \{(x, y) \in \mathcal{E} / x^2 - y^2 \leq r \leq x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2)\}.$$

La función $h : \tilde{N} \rightarrow [-\sqrt{r}, \sqrt{r}] \times [-1, 1]$ dada por

$$h(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{r}}\right)^2}}, \frac{y}{\sqrt{r} \sqrt{\frac{L^{-1}\left[-2r\left(\frac{k^2-r}{k^2+2r}\right)] - k^2}{k^2+2r}}}\right),$$

donde $k = \frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{r}}\right)^2}}$ y $L(\alpha) = \left(\frac{k^2-r}{k^2+2r}\right)\alpha + \lambda(\alpha)$ con $\alpha \in [0, 2r]$, es un homeomorfismo con inversa

$$h^{-1}(k, t) = \left(k \sqrt{\frac{L^{-1}\left[-2r\left(\frac{k^2-r}{k^2+2r}\right)\right] + 2r}{k^2 + 2r}}, t \sqrt{r} \sqrt{\frac{L^{-1}\left[-2r\left(\frac{k^2-r}{k^2+2r}\right)\right] - k^2}{k^2 + 2r}} \right).$$

Esto muestra que N es homeomorfo a un rectángulo.

De otro lado como g es una función de Morse admisible con un único punto crítico que es silla resulta que el número de componentes conexas de $g^{-1}(\{a\})$ es a lo más 2, ya que M es conexa y el punto silla puede a lo más unir 2 componentes de $g^{-1}((-\infty, r])$.

Si $g^{-1}(\{a\})$ tiene 2 componentes entonces $f^{-1}((-\infty, r])$ es la adjunción de 2 cilindros a través de sus respectivos bordes superiores con los lados de N (para asegurar la conexidad de M).

Notemos ahora que $f^{-1}(\{r\})$ es homeomorfo a S^1 , luego podemos asumir sin pérdida de generalidad (cambiando f por $-f$ si fuera necesario) que $f^{-1}(\{a\})$ tiene sólo una componente.

Luego M es la adjunción de un cilindro con un rectángulo juntando los lados opuestos del rectángulo con el borde superior del cilindro en partes disjuntas.

□

3.6. Modificando funciones de Morse en superficies

Sea M una superficie suave y $f : M \rightarrow [a, b]$ una función de Morse admisible. Sea $p \in M$ un mínimo local de f .

Si $a < c < f(p)$ entonces se puede modificar a f en una vecindad de p a una función de Morse admisible \tilde{f} tal que p siga siendo un mínimo local de \tilde{f} con $\tilde{f}(p) = c$ y en la vecindad solo se tiene a p como punto crítico.

En efecto, sabemos que existe una carta de Morse $(\varphi = (x, y), U)$ en p tal que $\varphi(U) = B_R^2$, $\varphi(p) = 0$ y

$$f\varphi^{-1}(x, y) = f(p) + x^2 + y^2,$$

para todo $(x, y) \in B_R^2$.

Sea $r = \frac{R^2}{3}$, se sabe que existe una función suave $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\lambda \equiv 1$ en $[-r, r]$, mientras que fuera de $[-2r, 2r]$ es 0 y además $\lambda'(t) \leq 0$ en \mathbb{R}^+ .

Sea $\tilde{f} : M \rightarrow [a, b]$ definida en U como

$$f(p) + x(p)^2 + y(p)^2 + [c - f(p)] \cdot \lambda(\|(x(p), y(p))\|^2),$$

y fuera de $\varphi^{-1}(D_{\sqrt{2r}}^2)$ como f , esto está bien definido ya que en la parte común de las definiciones dadas es igual a f . Nótese que $\tilde{f}(p) = c$ y como $\tilde{f}\varphi^{-1}$ es radialmente no-decreciente se tiene $\tilde{f}(U) \subset [c, b]$.

Veamos que en U la función \tilde{f} tiene un único punto crítico. La derivada de $\tilde{f}\varphi^{-1}$ es

$$2(x, y) [1 + (c - f(p))\lambda'(\|(x, y)\|^2)],$$

donde $(x, y) \in B_R^2$, como $[c - f(p)] \cdot \lambda'(\|(x, y)\|^2) \geq 0$, se tiene que p es el único punto crítico en U , además como

$$\tilde{f}\varphi^{-1}(x, y) = f(p) + x^2 + y^2 + (c - f(p)),$$

para todo $(x, y) \in \varphi^{-1}(D_{\sqrt{r}}^2)$, tenemos que p es un punto crítico no-degenerado de mínimo. Así la función $\tilde{f} : M \rightarrow [a, b]$ es la función de Morse admisible buscada.

Cabe resaltar que si $f^{-1}(\{a\})$ es vacío podemos tomar cualquier $c < f(p)$ para obtener una función de Morse admisible $\tilde{f} : M \rightarrow [c-1, b]$ con las propiedades mencionadas anteriormente.

Proposición 3.4 *Sea M una superficie conexa y compacta, y $f : M \rightarrow [a, b]$ una función de Morse con 3 puntos críticos. Si 2 puntos críticos son de mínimo para f y el tercero es silla, entonces $f^{-1}(\{b\})$ es un círculo y $f^{-1}(\{a\})$ es vacío.*

Prueba: Como f alcanza su máximo, este no lo hará en ningún punto del interior de M , luego lo alcanza en su borde. De ello $f^{-1}(\{b\})$ es no vacío, sino $f^{-1}(\{a\})$ contendría al punto de M donde f alcanza su máximo y así $f \equiv a$, lo cual es una contradicción. Así $f^{-1}(\{b\})$ es no vacío.

Por lo que hemos al inicio de esta sección, si $\alpha < a$ podemos variar f en vecindades de los mínimos, homeomorfas a discos abiertos, para obtener una función de Morse $\tilde{f} : M \rightarrow (-\infty, b]$ tal que f en sus mínimos sea α . Luego $B := \tilde{f}^{-1}((-\infty, a]) \setminus f^{-1}(\{a\})$ es una superficie cuyo borde es 2 círculos.

Sea $S := M \setminus \tilde{f}^{-1}(-\infty, a)$, luego $\tilde{f} : S \rightarrow [a, b]$ es una función de Morse admisible con solamente un punto crítico, el cual es silla, sabemos que $\tilde{f}^{-1}(\{a\})$ es la unión disjunta de $f^{-1}(\{a\})$ con 2 círculos (que son el borde de B). A partir de la Proposición 2, el borde de S tiene a lo más 3 componentes. Como ∂S es unión de $f^{-1}(\{b\})$ (el cual es no vacío y así tiene al menos una componente) con $\tilde{f}^{-1}(\{a\})$ el cual tiene por lo menos 2 componentes resulta que $f^{-1}(\{b\})$ tiene sólo una componente y $f^{-1}(\{a\})$ es vacío. Esto concluye la demostración

□

Tenemos la siguiente proposición que será importante más adelante en el Teorema 5.2.

Proposición 3.5 *Sea M una superficie conexa, compacta y suave, y sea $f : M \rightarrow [a, b]$ una función de Morse admisible con sólo 3 puntos críticos de los 2 puntos críticos son de mínimo para f y el tercero es silla. Dados $c_1, c_2 < 0$ podemos modificar a f a una función de Morse admisible \tilde{f} con sus mismos puntos críticos de mínimo y de silla tal que los valores que tome en sus mínimos sean c_1 y c_2 mientras que en el punto silla es 0.*

Prueba: Sean $q_1, q_2 \in M$ los puntos de mínimo de f y p el punto silla de f .

Sin pérdida de generalidad, trasladando si fuera necesario, podemos asumir el valor que toma f en el punto silla es 0 (así $a < 0 < b$), sabemos por la Proposición 3.4 que $f^{-1}(\{a\})$ es vacío, así sea $k > 0$ lo suficientemente grande para que $c_1 k < f(q_1)$ y $c_2 k < f(q_2)$, aplicando lo hecho anteriormente en vecindades disjuntas de los estos puntos de mínimo (que no contengan a q), obtenemos una función de Morse admisible $f_1 : M \rightarrow [\alpha, b]$, donde $\alpha < \min\{c_1 k, c_2 k\}$, cuyos valores de mínimo son $c_1 k$ y $c_2 k$, luego $\tilde{f} := \frac{1}{k} f_1 : M \rightarrow [\alpha, \frac{b}{k}]$ es la función de Morse admisible requerida.

□

Capítulo 4

Isotopía

4.1. Isotopía

Definición 4.1 *Dados dos encajes diferenciables $f : M \rightarrow N$ y $g : M \rightarrow N$, decimos que son isotópicos si existe una aplicación diferenciable $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$, llamada isotopía, tal que su rastro $\hat{F} : M \times [0, 1] \rightarrow N \times [0, 1]$, definido por*

$$(F(p, s), s),$$

para todo $(p, s) \in M \times [0, 1]$, es un encaje suave.

De la definición anterior resulta que cada $s \in [0, 1]$, la aplicación $F_s : M \rightarrow N$ definida por

$$F_s(p) = F(p, s),$$

para todo $p \in M$, es un encaje diferenciable.

Cuando M es compacta, se tiene que F es una isotopía si y sólo si F_s es un encaje suave para todo $s \in [0, 1]$.

La relación de ser isotópicos es una relación equivalencia en el espacio $Enc^\infty(M, N)$ de encajes diferenciables de M en N .

Definición 4.2 *Sea M una variedad diferenciable y $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ una aplicación diferenciable, decimos que F es una difeotopía de M si para cada $s \in [0, 1]$ la aplicación F_s es un difeomorfismo y $F_0 = id_M$.*

Claramente una difeotopía es una isotopía, en este caso entre la identidad id_M y el difeomorfismo F_1 , aún más, el rastro de F : \hat{F} , es un difeomorfismo local sobreyectivo, que como es inyectivo, es un difeomorfismo.

Veamos como obtener difeotopías a través de campos vectoriales dependientes del tiempo.

Definición 4.3 *Sea $X : M \times [0, 1] \rightarrow TM$ una aplicación diferenciable, decimos que X es un campo dependiente del tiempo si para cada $s \in [0, 1]$ la aplicación $X_s : M \rightarrow TM$ definida por $X_s(p) = X(p, s)$ es un campo diferenciable sobre M .*

Sea M una variedad riemanniana, diremos que un campo X dependiente del tiempo sobre M es de velocidad acotada si es acotado el campo X .

Proposición 4.1 Sea $X : M \times [0, 1] \rightarrow TM$ un campo dependiente del tiempo con velocidad acotada. Entonces existe una difeotopía $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que para cada $p \in M$ se tiene

$$dF_{(p,s)}(0 \times 1) = X(F(p, s), s).$$

Además esta difeotopía es única .

Prueba: Sea $Y : M \times [0, 1] \rightarrow TM \times T\mathbb{R}$ el campo definido por $Y(p, s) = (X(p, s), 1)$, claramente es de velocidad acotada. Luego los intervalos maximales para $(p, s) \in M \times [0, 1]$ son cerrados en $[0, 1]$.

Sea $G : \Omega \rightarrow M \times [0, 1]$ el flujo del campo Y , entonces

$$G(p, s, t) = (H(p, s, t), s + t),$$

de allí que para todo $p \in M$ tenemos $I(p, 0) = [0, 1]$ (intervalos maximales). Si definimos $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ como

$$F(p, t) = H(p, 0, t),$$

tenemos que, por construcción, que $F_0(p) = H(p, 0, 0) = p$ y para cada $t \in [0, 1]$, $F_t(p) = H(p, 0, t)$ cumple la relación

$$G_t(p, 0) = (H(p, 0, t), t),$$

o sea puede ser visto como un difeomorfismo entre $M \times \{0\}$ y $M \times \{t\}$.

La unicidad de la isotopía F es debida a la unicidad de las soluciones del campo Y que pasan por puntos del conjunto $M \times \{0\}$.

□

Vale también que si tenemos una difeotopía F entonces está define un campo dependiente del tiempo sobre M que cumple la relación de la proposición. En efecto, tan sólo definamos

$$X(q, s) = dF_{(F_s^{-1}(q), s)}(0 \times 1),$$

llamaremos a este campo: *campo definido por la isotopía F* .

Ahora definamos isotopías de subvariedades diferenciables de una variedad diferenciable M .

Definición 4.4 Sea A una subvariedad diferenciable de M y $F : A \rightarrow M$ una isotopía. Diremos que F es una isotopía en M si F_0 es la inclusión.

Si es M una variedad riemanniana, diremos la isotopía en F en M es de velocidad acotada si existe una cota común para los campos

$$dF_{(p,\cdot)}(0 \times 1)$$

definidos sobre las curvas $F(p, \cdot)$, $p \in A$. Esto es la aplicación $G : A \times [0, 1] \rightarrow TM$ definida por

$$G(p, s) = dF_{(p,s)}(0 \times 1)$$

es acotada.

Proposición 4.2 Sea $F : A \times [0, 1] \rightarrow M$ una isotopía en M de velocidad acotada con A subvariedad diferenciable y cerrada de M . Si $F(A \times [0, 1]) \subset \text{int}(M)$ ó $F(A \times [0, 1]) \subset \partial M$ entonces existe una vecindad abierta U de A en M y una isotopía $G : U \times [0, 1] \rightarrow M$ en A con velocidad acotada tal que G restricto a $A \times [0, 1]$ es F .

Prueba: Sin pérdida de generalidad supongamos que $F(A \times [0, 1]) \subset \text{int}(M)$. Sea $C = \hat{F}(A \times [0, 1]) \supset A$, entonces C es una subvariedad cerrada de $\text{int}(M) \times [0, 1]$. Luego tenemos un campo dependiente del tiempo sobre C

$$\tilde{X} : C \times [0, 1] \rightarrow TM$$

definido por

$$\tilde{X}(q, s) = dF_{(F_s^{-1}(q), s)}(0 \times 1),$$

para $(q, s) \in C \times [0, 1]$.

Este campo puede ser extendido a una vecindad U de C en $\text{int}(M)$ y por construcción del nuevo campo $X : U \times [0, 1] \rightarrow TV$, éste tendrá velocidad acotada. Así de esto obtenemos una difeotopía $G : U \times [0, 1] \rightarrow U$ que por unicidad de las soluciones del campo \tilde{X} es igual a F en $A \times [0, 1]$.

Asimismo G puede ser visto como una isotopía $G : U \times [0, 1] \rightarrow M$ en M , así obtenemos el resultado buscado.

□

Teorema 4.1 Sea A un subconjunto cerrado de M , U una vecindad abierta de A y $F : U \times [0, 1] \rightarrow M$ una isotopía en M con velocidad acotada. Si $\hat{F}(U \times [0, 1])$ es un conjunto abierto de $M \times [0, 1]$ entonces existe una difeotopía $G : M \times [0, 1] \rightarrow M$ en M con velocidad acotada tal que G restricto a $A \times [0, 1]$ es F .

Prueba: Consideremos el campo asociado a F , sobre $V = \hat{F}(U \times [0, 1]) \subset M \times [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \tilde{X} : V &\rightarrow TM \\ (q, s) &\mapsto dF_{(F_s^{-1}(q), s)}(0 \times 1) \end{aligned}$$

Luego, como $C = \hat{F}(A \times [0, 1])$ es un conjunto cerrado de $M \times [0, 1]$ y $C \subset V$, podemos obtener un nuevo campo X sobre $M \times [0, 1]$ que coincida con \tilde{X} en una vecindad abierta de C contenida en V y es cero fuera de V , además de ser acotado.

Del campo X obtenemos una difeotopía G sobre M , esta difeotopía (por construcción del campo X) es igual a F en una vecindad abierta de $A \times [0, 1]$. Esto concluye la prueba.

□

4.2. Pegando variedades

Sean M^m y N^m variedades diferenciables y supongamos que sus bordes son difeomorfos a través de el difeomorfismo $h : \partial M \rightarrow \partial N$, vamos a dar una estructura diferenciables sobre la adjunción $N \cup_f M$ de manera que las inclusiones sean encajes.

Para ello tomemos vecindades collares $f : \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$, $g : \partial N \times (-1, 0] \rightarrow N$ para M y N respectivamente, luego sean $C_M = \text{Im}(f)$, $C_N = \text{Im}(g)$. Tenemos que $W = C_M \cup C_N$ visto en la adjunción $N \sqcup_h M$ es una vecindad abierta de ∂M (o ∂N) visto como subconjunto de la adjunción.

Esta vecindad es homeomorfa a $\partial M \times (-1, 1)$ a través del homeomorfismo:

$$\begin{aligned} H(p, s) &= f(p, s) & p \in \partial M, s \in [0, 1), \\ H(p, s) &= g(f(p), s) & p \in \partial M, s \in (-1, 0]. \end{aligned}$$

Además $\partial M \times (-1, 1)$ es una variedad diferenciable difeomorfa a $\partial N \times (-1, 1)$, luego podemos darle a W la estructura diferenciable inducida de $\partial M \times (-1, 1)$.

Consideremos $\mathcal{A}_{M'}$, $\mathcal{A}_{N'}$ y \mathcal{A}_W las estructuras diferenciables sobre $\text{int}M$, $\text{int}N$ y W respectivamente entonces debido a que en las restricciones a intersecciones comunes dos a dos son compatibles, existe una estructura diferenciable \mathcal{A} sobre $N \cup_h M$ que contiene a todas ellas.

Así, hemos obtenido una estructura diferenciable sobre $N \cup_h M$ que hacen que las inclusiones naturales sean encajes diferenciables.

Notemos que la variedad construida no tiene borde.

Gracias al resultado de la sección anterior, si cambiamos los collares obtenemos una nueva variedad que es difeomorfa a la construida aquí.

La próxima proposición muestra que si existe otro difeomorfismo $k : \partial M \rightarrow \partial N$ que es isotópico a h entonces la variedad resultante es difeomorfo al original construido con h .

Proposición 4.3 *Sea $k : \partial M \rightarrow \partial N$ un difeomorfismo isotópico a h entonces $N \sqcup_k M$ es difeomorfo a $N \sqcup_h M$.*

Prueba: Tenemos que $k^{-1}h : \partial M \rightarrow \partial M$ es un difeomorfismo isotópico a la identidad en ∂M , luego utilizando una vecindad collar $\xi : \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$ obtenemos el siguiente difeomorfismo $F : \text{Im}(\xi) \rightarrow \text{Im}(\xi)$

$$F(\xi(p, s)) = \xi(k^{-1}h(p), s)$$

que es isotópico a la identidad.

Luego está isotopía genera un campo que depende del tiempo en una vecindad abierta del borde de M de allí podemos hallar un campo dependiente del tiempo sobre M que coincida con el original campo en una vecindad de ∂M . De allí obtenemos un difeomorfismo $M \rightarrow M$ que coincide con $k^{-1}h$ en ∂M .

Sea $H : M \rightarrow M$ el difeomorfismo que se extiende de $k^{-1}h$ y definamos $G : N \sqcup_h M \rightarrow N \sqcup_k M$ como

$$\begin{aligned} G(p) &= H(p) & p \in M, \\ G(q) &= q & q \in N, \end{aligned}$$

entonces G es un homeomorfismo, que lleva de manera difeomorfa M en M y N en N , además en ∂M es un difeomorfismo sobre su imagen, así $N \sqcup_h M$ es difeomorfo a $N \sqcup_k M$.

□

Proposición 4.4 Sean M, N variedades diferenciables sin borde. Sean M_1, M_2 subvariedades cerradas de M con $M_1 \cup M_2 = M$, además sean N_1, N_2 subvariedades cerradas de N con $N_1 \cup N_2 = N$ tales que

$$M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2,$$

$$N_1 \cap N_2 = \partial N_1 = \partial N_2.$$

Sea $h : M \rightarrow N$ un homeomorfismo que lleva M_1 difeomórficamente sobre N_1 y también lleva M_2 difeomórficamente sobre N_2 . Entonces existe un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ tal que f restricto a M_1 es h y $f(M_2) = N_2$. En particular M es difeomorfo a N .

Prueba: Sea U una vecindad tubular de $\partial M_1 = \partial M_2$ en M , luego esto nos da un collar para ∂M_1 que vía h se convierte en un collar para ∂N_1 , como N no tiene borde, podemos extender este collar a través de una partición de la unidad a una vecindad tubular de $h(\partial M_1) = \partial N_1 = \partial N_2$. De aquí obtenemos una vecindad collar η_1 para ∂N_2 .

Luego, también U nos da una vecindad collar η_2 para N_2 a través del difeomorfismo $h|_{M_2}$. Como cualquier par de vecindades tubulares son isotópicas, tenemos una isotopía entre η_1 y η_2 . Sea $F : N_2 \rightarrow N_2$ el difeomorfismo tal que $F\eta_1 = \eta_2$ y deja fijo $N_2 \setminus V$, donde V es una vecindad de η_1 .

Luego componiendo F con $h|_{M_2} \rightarrow M_2$, obtenemos un difeomorfismo $f' : M_2 \rightarrow N_2$ que se pega con $h|_{M_1} \rightarrow N_1$ de manera que el homeomorfismo formado $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo con las propiedades buscadas.

□

4.3. Isotopías de discos

Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, D^k denotará el disco k -dimensional del espacio euclídeo k -dimensional.

Teorema 4.2 Sean $f, g : D^m \rightarrow M^m$ dos encajes diferenciables tales que $f(D^m), g(D^m) \subset \text{int}(M)$. Si ocurre uno de los casos siguientes

1. M es orientable y tanto f como g preservan orientación o ambas invierten,
2. M es no orientable,

entonces f y g son isotópicos, donde la isotopía es dada con soporte compacto.

Prueba: Como M es conexa por caminos existe un camino diferenciable $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tal que

$$\alpha(0) = f(0) \quad \text{y} \quad \alpha(1) = g(0),$$

luego tenemos la isotopía $F : \{0\} \times [0, 1] \rightarrow M$

$$F(0, s) = \alpha(s)$$

entre $f|_{\{0\}}$ y $g|_{\{0\}}$. Así como $\{0\}$ es compacto existe una isotopía ambiente con soporte compacto entre estas aplicaciones. Luego podemos asumir que $f(0) = g(0)$, ya que si \tilde{F} es la isotopía ambiente entonces $\tilde{F}(f(\cdot), 1)$ es un encaje isotópico a f tal que $\tilde{F}(f(0), 1) = g(0)$.

Tomemos una carta (U, φ) de M en $f(p)$ de modo que $U = \mathbb{R}^n$ y $\varphi(f(p)) = 0$.

Dado $\epsilon \in (0, 1]$, existe una isotopía entre f y f_ϵ , donde $f_\epsilon(x) = f(\epsilon x)$, $x \in D^m$, para ello basta tomar la isotopía

$$f((1-s)x + s\epsilon x)$$

donde $x \in D^m$ y $s \in [0, 1]$. Luego podemos asumir que f tiene imagen dentro de U al igual que g .

Notemos que sobre U hay 2 orientaciones, luego fijando la orientación sobre U inducida por \mathbb{R}^m a través de la carta, podemos hablar de si f preserva o no orientación, si por ejemplo preservará, vemos si g también preserva. De dato tenemos que si M es orientable entonces g también preserva orientación, si M es no orientable entonces podría ser que g no preservará orientación, para este último caso existe una isotopía con un encaje $g' : D^m \rightarrow M$ que invierte orientación, luego podemos tomar a este último encaje como el encaje g . En cualquier caso podemos hacer que o bien ambas preserven orientación o bien ambas inviertan orientación.

Supongamos el primer caso, el otro caso se trata de manera similar.

Bastará probar que φf y φg son isotópicos.

Veamos que un encaje $h : D^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $h(0) = 0$ es isotópico a la restricción de una transformación lineal. En efecto, sea la isotopía

$$H(x, s) = \int_0^1 dh(stx)(x)dt$$

esto es

$$\begin{aligned} H(x, s) &= \frac{h(sx)}{s} \quad s > 0, \\ H(x, 0) &= dh(0)(x). \end{aligned}$$

Luego asumiremos que φf y φg son restricciones de isomorfismos. Luego el hecho de que ambos preserven orientación, se traduce en que ambos tienen determinante positivo, luego como $GL_n^+(\mathbb{R})$ es arco-conexo, existe un camino γ en este espacio que une ambos encajes. Luego a partir de esto se obtiene la isotopía con soporte compacto entre φf y φg .

□

Teorema 4.3 *Sea M^m una variedad conexa sin borde y $f_1, f_2, g_1, g_2 : D^m \rightarrow M$ encajes diferenciables tales que*

$$Im(f_1) \cap Im(f_2) = \emptyset,$$

$$Im(g_1) \cap Im(g_2) = \emptyset.$$

Si ocurre uno de los 2 casos siguientes

1. M orientable y tanto f_i como g_i preservan orientación o invierten, $i = 1, 2$.
2. M es no orientable.

entonces existe un difeomorfismo $F : M \rightarrow M$ tal que $F \circ f_1 = g_1$ y $F \circ f_2 = g_2$.

Prueba: Por el teorema anterior f_1 y g_1 son isotópicos, luego existe un difeomorfismo $F_1 : M \rightarrow M$ tal que $F_1 f_1 = g_1$ isotópico a la identidad, luego tenemos los encajes

$$g_2, F_1 f_2 : D^m \rightarrow M \setminus Im(g_1)$$

nuevamente aplicando el teorema anterior existe un difeomorfismo $F_2 : M \setminus Im(g_1) \rightarrow M \setminus Im(g_1)$ isotópico a la identidad con soporte compacto tal que $F_2(F_1 f_2) = g_2$. Este difeomorfismo se extiende a todo M dejando $Im(g_1)$ quieto, sea este difeomorfismo \tilde{F}_2 isotópico a la identidad. Luego $F = \tilde{F}_2 F_1$ es un difeomorfismo isotópico a la identidad tal que

1. $F(f_1) = \tilde{F}_2(g_1) = g_1$.
2. $F(f_2) = F_2 F_1 f_2 = g_2$.

□

4.4. Teorema de Reeb

Proposición 4.5 Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ un difeomorfismo suave, entonces f es isotópico a la identidad o a la aplicación conjugación $z \mapsto \bar{z}$.

Prueba: Supongamos que $f : S^1 \rightarrow S^1$ preserva orientación, entonces existe un difeomorfismo creciente $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(e^{it}) = e^{ir(t)}$ y $r(t + 2\pi) - r(t) = 2\pi$.

Sea $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por

$$G(s, t) = \exp[i((1-s)t + sr(t))],$$

claramente la aplicación es suave y cumple $G(s, t + 2\pi) = G(s, t)$, luego esto da una aplicación suave $F : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1$ tal que

$$G(s, t) = F(s, e^{it})$$

para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $F_0 = id_{S^1}$.
2. $F_1 = f$.
3. $\hat{F} : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ es un difeomorfismo suave.

Por lo tanto f es isotópico a la identidad en S^1 .

Si f invierte orientación, tenemos que \bar{f} preserva orientación, luego \bar{f} es isotópico a la identidad, de allí f es isotópico a la conjugación $g : S^1 \rightarrow S^1$

$$g(z) = \bar{z}.$$

□

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse sobre una superficie compacta sin borde y además tiene sólo 2 puntos críticos (su mínimo y su máximo) entonces M es conexa, ya que caso contrario como sus componentes son compactas tendríamos al menos 4 puntos críticos (2 por cada componente).

Proposición 4.6 Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse sobre una superficie sin borde y compacta. Si la función de Morse tiene sólo 2 puntos críticos (su mínimo y su máximo) entonces M es difeomorfa a la esfera S^2 .

Prueba:

Sean $a < b$ sus valores de máximo y mínimo, respectivamente, que toma f . Sea $c \in (a, b)$, ya sabemos que $f^{-1}(-\infty, c]$ y $f^{-1}[c, +\infty)$ son difeomorfos a discos, digamos D_1, D_2 (discos unitarios cerrados de \mathbb{R}^2), sea $h : S^1 \rightarrow S^1$ la identificación de sus bordes a través de $f^{-1}(\{c\})$. Claramente h es un difeomorfismo suave y M es difeomorfo $D_1 \sqcup_h D_2$ (usando el lema de suavización).

Notemos que podemos asumir que h preserva orientación, ya que en caso contrario debido a que $g : D_0 \rightarrow D_1$ (D_0 es el disco unitario cerrado de \mathbb{R}^2) dado por $g(z) = \bar{z}$ es un difeomorfismo que invierte la orientación de $\partial D_1 = S^1$, podemos tomar D_0 en vez de D_1 y la identificación sería hg que preserva orientación (restricto a $S^1!$).

Así M es difeomorfa a $D_1 \sqcup_{id_{S^1}} D_2$, por ello M es difeomorfa a la esfera S^2 .

□

Capítulo 5

Teorema de clasificación de superficies diferenciables compactas

5.1. Modelos de superficies

Sea M una superficie y $f : \{-1, 1\} \times D^2 \rightarrow \text{int}M$ un encaje. Si $W = \text{Im}(f)$ entonces $M \setminus \text{int}(W)$ puede ser pensado como si a la superficie M se le han hecho 2 huecos y estos huecos tienen borde, luego pegamos el cilindro $[-1, 1] \times S^1$ a este conjunto a través del difeomorfismo $f : \{-1, 1\} \times S^1 \rightarrow \partial W$, esto es

$$(M \setminus \text{int}(W)) \cup_f ([-1, 1] \times S^1),$$

tendremos que a W “se le ha pegado una asa”.

Esta superficie será denotada por $M[f]$ y se dirá que a M se le ha puesto una asa. O también que $M[f]$ es obtenida por cirugía de M a través de f .

Del capítulo anterior si existe otro encaje $g : \{-1, 1\} \times D^2 \rightarrow \text{int}M$ que es isotópico a f entonces las superficies obtenidas tienen estructuras difeomorfas, esto es

$$M[f] \text{ difeomorfo a } M[g].$$

Proposición 5.1 *Si M es no-orientable entonces todas las superficies obtenidas poniendo a M una asa son difeomorfas.*

Prueba: En, efecto, veamos que si $f, g : \{-1, 1\} \times D^2 \rightarrow \text{int}M$ son los encajes entonces $M[f]$ es difeomorfo a $M[g]$. Para ello solo bastará ver que f y g sean isotópicos.

Sean $f_1(x) = f(-1, x)$, $f_2(x) = f(1, x)$, $g_1(x) = g(-1, x)$ y $g_2(x) = g(1, x)$ para todo $x \in D^2$, entonces existe un difeomorfismo $F : M \rightarrow M$ isotópico a la identidad tal que $Ff_i = g_i$, $i = 1, 2$, de aquí obtenemos que $Ff = g$, por lo tanto f y g son isotópicos.

□

Demos a $[-1, 1] \times S^1$ la orientación inducida por el producto e induzcamos la orientación sobre su borde $\{-1, 1\} \times S^1$. Consideremos el encaje $f : \{-1, 1\} \times S^1 \rightarrow \text{int}(M)$ donde M es orientable. Diremos f es un encaje orientable si existe una orientación sobre M de manera que f preserva orientación.

Proposición 5.2 $M[f]$ es orientable si y sólo si f es un encaje orientable.

Prueba: Si $M[f]$ es orientable entonces $M' = M \setminus \text{int}(W)$ es orientable como $f(\{-1\} \times S^1)$ es orientable y $M' \cap f(\{-1\} \times S^1)$ es conexo (homeomorfo a S^1) se sigue que $M \setminus f(\{1\} \times S^1)$ es orientable, nuevamente haciendo lo mismo obtenemos que M es orientable.

Recíprocamente, si f es un encaje orientable, demos a M una orientación de manera que f preserva orientación, luego tomemos atlas orientados sobre M y $[-1, 1] \times S^1$, y un atlas orientado a una vecindad sobre $f(\{-1, 1\} \times D^1)$ (visto en $M[f]$) heredado de $[\{-1, 1\} \times S^1] \times (-1, 1)$ (por el homeomorfismo obtenido por vecindades collares) de manera que tengan cambios de coordenadas positivos con los 2 primeros atlas, esto nos da una estructura diferenciable sobre $M[f]$ que es orientado.

□

Diremos que una variedad conexa orientable es reversible si existe un difeomorfismo que invierte orientación (fijada una orientación).

Recordemos que las variedades conexas orientables sólo tienen 2 orientaciones.

Proposición 5.3 Sea M una superficie conexa reversible y $f, g : \{-1, 1\} \times D^2 \rightarrow \text{int}(M)$ encajes diferenciables. Si f y g son encajes orientables entonces $M[f]$ es difeomorfo a $M[g]$.

Prueba:

Si f, g preservan orientación entonces se tiene el resultado. Si, digamos, f preserva y g no (invierte orientación). Sea h un difeomorfismo que invierta orientación, entonces $M[f]$ es difeomorfo a $M[hg]$. También $M[hg]$ es difeomorfo a $M[g\alpha]$ donde $\alpha(t, (x, y)) = (t, (-x, y))$ para todo $(t, (x, y)) \in \{-1, 1\} \times D^2$.

Como $g^{-1}g\alpha = \alpha$ en $\{-1, 1\} \times S^1$ se extiende a un difeomorfismo sobre $[-1, 1] \times S^1$, sea este β , podemos definir el siguiente homeomorfismo $F : M[\alpha g] \rightarrow M[g]$

$$\begin{aligned} F(p) &= p & p \in M, \\ F(x) &= \beta(x) & x \in [-1, 1] \times S^1. \end{aligned}$$

Luego de esto obtenemos que $M[g\alpha]$ es difeomorfo a $M[g]$.

□

Proposición 5.4 Si M es una superficie conexa reversible y f encaje orientable entonces $M[f]$ es reversible.

Prueba: Sea M orientada de modo que f preserva orientación.

Sea $\alpha : [-1, 1] \times D^2 \rightarrow [-1, 1] \times D^2$ definido por

$$\alpha(t, (x, y)) = (t, (-x, y))$$

y $h : M \rightarrow M$ un difeomorfismo que invierte orientación. Entonces $h\alpha|_{\{-1, 1\} \times D^2}$ preserva orientación, así existe un difeomorfismo isotópico a la identidad tal que $F : M \rightarrow M$ tal que $Fh\alpha = f$ en $\{-1, 1\} \times D^2$.

Definamos $H : M[f] \rightarrow M[f]$ como

$$\begin{aligned} H(p) &= h(p) & p \in M \\ H(x) &= \alpha(x) \end{aligned}$$

□

5.2. Superficies orientables de género g

Definición 5.1 *Definimos una superficie orientable de género $g \geq 0$ ($g \in \mathbb{Z}$) de manera inductiva:*

- *Decimos que una superficie es una superficie orientable de género 0 si es difeomorfa a S^2 .*
- *Decimos que una superficie es una superficie orientable de género $g + 1$, donde $g \geq 0$ ($g \in \mathbb{Z}$), si es difeomorfa a la cirugía de una superficie orientable de género g , digamos M , por medio de un encaje orientable $f : S^0 \times D^2 \rightarrow M'$.*

Notemos que una superficie orientable de género g es una superficie conexa, compacta, orientable y sin borde. Más adelante veremos que toda superficie con estas características es una superficie orientable de género.

A partir de la fórmula que relaciona características de Euler :

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B),$$

donde $A \cup B$ es una superficie compacta y A, B son dos sub-variedades compactas de $A \cup B$ de modo que $A \cap B$ es una sub-variedad uni-dimensional de $A \cup B$; obtenemos que la característica de Euler de una superficie orientable de género $g \geq 0$ ($g \in \mathbb{Z}$) es $2 - 2g$.

Luego superficies orientables de géneros distintos no son difeomorfas.

5.3. Suma conexa

Definición 5.2 *La suma conexa de 2 superficies M, N superficies sin bordes a través de un encaje suave $f : S^0 \times D^2 \rightarrow \text{int}(M \sqcup N)$ es simplemente la cirugía de $M \sqcup N$ a través de f .*

Si una de las superficies es no orientable entonces $M \sqcup N$ es no orientable, luego si se tomará otro encaje suave la suma conexa obtenida sería difeomorfa a la primera suma conexa. Luego denotaremos esta suma por $M \# N$.

Si ambas superficies son no-orientables entonces su suma conexa es no-orientable. Ya que si su suma conexa es orientable digamos $M \# N$, podemos tomar la parte de M en $M \# N$ (que sería orientable), y luego utilizar parte del encaje de la cirugía (o su conjugado) para pegar el disco contenido en M cuyo interior había sido sacado en el proceso de cirugía. Así obtenemos nuevamente M , que sería orientable lo cual es una contradicción.

Si M y N son conexas, entonces $M \# N$ es claramente conexa. También si M y N son superficies compactas entonces $M \# N$ es compacta.

5.4. Superficie no-orientable de género

Definición 5.3 *Dado un número natural g , decimos que una superficie es una superficie no-orientable de género g si es la suma conexa de g planos proyectivos.*

Como las superficies envueltas son no-orientables resulta que la definición no es inconsistente. Dos superficies no-orientables de igual género son difeomorfas.

Como el plano proyectivo es conexo, compacto, no-orientable y sin borde, resulta que una superficie no-orientable de género es una superficie conexa, compacta, no-orientable y sin borde.

Un plano proyectivo es la adjunción de un disco con una banda de Möbius a través de sus bordes. Luego si M es una superficie no-orientable sin borde y P es el plano proyectivo entonces

$$M \# P \text{ es difeomorfo } (M \setminus \text{int}(A)) \cup_f B,$$

donde A es un disco en M , B una banda de Möbius y $f : \partial A \rightarrow \partial B$ es un difeomorfismo (∂B es difeomorfo a S^1).

Como la banda de Möbius tiene característica 0 (usando triangulaciones), utilizando la fórmula de características tenemos que la característica de una superficie no-orientable de género g , donde $g \in \mathbb{N}$, es $2 - g$.

Así 2 superficies no-orientables con géneros diferentes dan superficies no-difeomorfas.

Una superficie no orientable de género 2 es llamada botella de Klein, está es difeomorfa a la cirugía de S^2 a través de un encaje $f : S^0 \times D^2 \rightarrow S^2$ que no es orientable, esto es si sobre $S^0 \times S^1$ tenemos la orientación inducida (como borde) de $[-1, 1] \times S^1$ y también sobre S^2 fijamos una orientación, entonces $f|_{\{-1\}} \times S^1 \rightarrow S^2$ preserva orientación y $f|_{\{1\}} \times S^1 \rightarrow S^2$ invierte, o viceversa.

Si M es una superficie no orientable sin borde entonces $M[f]$ independe, hablando en la categoría diferenciable, del encaje tomado. Además $M[f]$ es no-orientable.

Podemos tomar a f de modo que $f(S^0 \times D^2)$ está contenido en un disco de M , luego $M[f]$ es difeomorfa a $M \# S^2[g]$ donde g puede o no ser orientable, si es orientable, podemos hacer que sea no-orientable, viendo $g : -1 \times S^1 \rightarrow S^2$ como una aplicación sobre $M[f]$, luego ésta es isotópica a otra que cambia g_1 que cambia la induce la orientación opuesta a la que induce g . Así podemos supones ya que g es no orientable y de allí tener que $M[f]$ es difeomorfa a $M \# K$, donde K es una botella de Klein.

Así, si a una superficie no-orientable de género g se coloca una asa, entonces la superficie resultante es una superficie no orientable de genera $g+2$. Luego si se le colocan k asas tenemos una superficie no-orientable de género $g + 2k$.

Si tenemos una superficie de género g , entonces la suma conexa con un proyectivo da un proyectivo que se le han puesto k asas luego lo que resulta es una superficie no-orientable de género $1 + 2g$.

5.5. Teorema del disco

Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^2.$$

Su gradiente es

$$\nabla g(x, y) = (x^3 - x^2 - 2x, 2y) = (x[x^2 - x - 2], 2y), \quad (5.1)$$

luego sus puntos críticos son $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Calculemos ahora su hessiano

$$H(g)(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 2x - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En los puntos críticos $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$ tenemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego son punto críticos no degenerados. Además $(-1, 0)$ y $(2, 0)$ son mínimos estrictos locales, mientras que $(0, 0)$ es un punto silla. Así g es una función de Morse.

$$\text{Tenemos que } g(-1, 0) = \frac{-5}{12}, \quad g(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad g(2, 0) = \frac{-8}{3}.$$

Si $c > 0$ entonces c es un valor regular, luego $g^{-1}(\{c\})$ es una variedad diferenciable de dimensión 1, nuestro objetivo es mostrar que es sólo una curva, esto es, tiene sólo una componente conexa.

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} g(x, y) = +\infty$, tenemos que g es propia, luego si $b > a > 0$ tenemos que $g^{-1}([a, b])$ es compacto y no contiene puntos críticos, así $g^{-1}(\{a\})$ es difeomorfo a $g^{-1}(\{b\})$.

Hecho esto, veamos que $g^{-1}(\{c\})$ es conexo para algún $c > 0$.

Para ello primero veamos $g^{-1}(\{0\})$, este conjunto de nivel esta formado por la gráfica de las siguientes 2 funciones:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{-x^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 \right)} \\ y_2(x) &= -y_1(x), \end{aligned}$$

donde x es tal que $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 \leq 0$, esto es,

$$\frac{1}{4} \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{10}{9} \leq 0,$$

así $x \in \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10} \right]$. Notemos que

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10} < -2 + \frac{2}{3} < -1$$

y

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10} > 2 + \frac{2}{3} > 2.$$

Luego la gráfica de y_1 y la gráfica de y_2 encierran a los puntos donde g alcanza sus mínimos locales, además $g^{-1}(\{0\})$ es conexo debido a que es la unión de 2 conjuntos conexos con intersección no vacía: las gráficas de y_1 y la gráfica de y_2 , $(0, 0)$ está en la intersección de la gráfica de y_1 con la gráfica de y_2 .

Análogamente, si $c > 0$ entonces $g^{-1}(\{c\})$ es formado por 2 gráficas de funciones continuas $w_1, w_2 = -w_1$, sólo que esta vez tendremos que

$$w_1 = \sqrt{y_1^2 + c} > y_1 \tag{5.2}$$

en $\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10} \right]$, de manera similar su dominio de definición es un intervalo, cuyos extremos son ceros de w_1 , luego $g^{-1}(\{c\})$ es conexo porque es la unión de 2 conjuntos conexos con intersección no vacía.

Cabe resaltar que $g^{-1}(\{c\})$ es una curva cerrada que encierra no sólo a los puntos donde g alcanza sus mínimos locales sino también encierra el punto silla $(0, 0)$ por la ecuación (5.2).

Vamos ahora con nuestro primer resultado:

Teorema 5.1 *Si $c > 0$ entonces $g^{-1}((-\infty, c])$ es difeomorfo al disco.*

Prueba: Acotemos algo antes. Como $g^{-1}(\{c\})$ es una variedad diferenciable de dimensión 1, la cual es compacta y conexa, entonces $g^{-1}(\{c\})$ es difeomorfa al disco.

Luego bastará tomar $(0, 0)$ que está en el interior de $g^{-1}(\{c\})$ y unir a través de segmentos con punto de $g^{-1}(\{c\})$ para obtener un homeomorfismo. Para el difeomorfismo debemos tener que el segmento no sea tangente a $g^{-1}(\{c\})$. Supongamos que el punto de corte es (x, y) , como $\nabla g(x, y)$ no es tangente a $f^{-1}(\{c\})$ en (x, y) , bastará ver que $\langle (x, y), \nabla g(x, y) \rangle \neq 0$ para tener que los segmentos no son tangentes a $g^{-1}(\{c\})$.

De la ecuación (5.1) tenemos que

$$\langle (x, y), \nabla g(x, y) \rangle = x^2(x - 2)(x + 1) + 2y^2,$$

Luego si $(x > 2)$ ó $(x < -1)$ ó $y > \frac{3}{2}$, tenemos lo requerido.

Así si consideramos la disco cerrada $D^2[3]$ de radio 3 en el plano, tenemos que $g(D^2[3])$ es compacto luego existe un $C > 0$ tal que $C \notin g(D^2[3])$. De allí que $g^{-1}(\{C\})$ es la curva la cual no es tangente a los segmentos que salen de $(0, 2)$, luego $g^{-1}((-\infty, C])$ es difeomorfo al disco cerrado unitario de \mathbb{R}^2 .

Como entre c y C no hay valores críticos, siendo g propia, tenemos que $g^{-1}((-\infty, c])$ es difeomorfo a $g^{-1}((-\infty, C])$, así $g^{-1}((-\infty, c])$ es difeomorfo al disco.

□

5.5.1. Extensión de difeomorfismos

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $p \in M$ denotamos por $\mathcal{O}(p)$ la órbita de p asociada al campo X . Dado $A \subset M$ definimos el saturado de A como

$$A^* = \bigcup_{p \in A} \mathcal{O}(p).$$

Diremos que $B \subset M$ es saturado si $B = B^*$.

Sean $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves definidas en las variedades riemannianas M_1, M_2 , respectivamente, y sean $X_1 : M_1 \rightarrow TM_1$, $X_2 : M_2 \rightarrow TM_2$ sus campos gradientes asociados.

Para cada $p \in M_1$ denotemos por $\mathcal{O}_1(p)$ la órbita de p asociada al campo X_1 , análogamente definimos $\mathcal{O}_2(p)$ para $p \in M_2$.

Sean U_1 y U_2 abiertos de M_1 y M_2 , respectivamente.

Diremos que un difeomorfismo suave $G : U_1 \rightarrow U_2$ preserva conjuntos de nivel si:

$$f_2 G = f_1|_{U_1}.$$

Diremos que un difeomorfismo suave $G : U_1 \rightarrow U_2$ preserva órbitas si para cada $p \in U_1$:

$$G(\mathcal{O}_1(p) \cap U_1) = \mathcal{O}_2(G(p)) \cap U_2.$$

Proposición 5.5 Sea $g : U_1 \rightarrow U_2$ un difeomorfismo suave que preserva conjuntos de nivel y órbitas. Si para cada $p \in U_1$:

$$f_1(\mathcal{O}_1(p)) = f_2(\mathcal{O}_2(g(p))),$$

entonces $g : U_1 \rightarrow U_2$ se extiende a un difeomorfismo suave $h : U_1^* \rightarrow U_2^*$ que también preserva conjuntos de nivel y órbitas.

Prueba:

Notación: $g_p = g(p)$ para cada $p \in U_1$.

Notemos que si V_1 es el conjunto de puntos de U_1^* donde el campo X_1 no se anula entonces V_1 es abierto y saturado en M_1 , además $U_1^* = V_1 \cup U_1$. Definiremos una aplicación suave $h : V_1 \rightarrow U_2^*$ que coincida con $g : U_1 \rightarrow U_2$ en $V_1 \cap U_1$.

Denotemos por φ el flujo asociado al campo X_1 , y por ϕ al flujo asociado al campo X_2 .

Sea $q \in V_1$, como $V_1 \subset U_1^*$ existe un $p \in U_1$ tal que $q \in \mathcal{O}_1(p)$, luego como g preserva conjuntos de nivel tenemos que $g(p)$ es un punto regular de X_2 . Notemos que $f_1(\varphi(\cdot, p))$ es una aplicación (estrictamente) creciente al igual que $f_2(\phi(\cdot, g_p))$.

Como $f_1(\mathcal{O}_p) = f_2(\mathcal{O}_2(g_p))$ denotemos por $\tau : f_1(\mathcal{O}_1(p)) \rightarrow \mathbb{R}$ a la inversa de $f_2\phi(\cdot, g_p)$. Definimos

$$h(q) = \phi(\tau(f_1(q)), g_p).$$

Esta aplicación es bien definida ya que si $q \in \mathcal{O}_1(\tilde{p})$ para algún $\tilde{p} \in U_1$, entonces

$$\mathcal{O}_2(g_{\tilde{p}}) \cap U_2 = g(U_1 \cap \mathcal{O}_1(\tilde{p})) = g(\mathcal{O}_1(p) \cap U_1) = \mathcal{O}_2(g_p) \cap U_2,$$

luego $\mathcal{O}_2(g_{\tilde{p}}) = \mathcal{O}_2(g_p)$. De allí no es difícil mostrar que

$$\phi(\tilde{\tau}(f_1(q)), g_{\tilde{p}}) = \phi(\tau(f_1(q)), g_p).$$

Por construcción h preserva conjuntos de nivel

$$f_2h = f_1|_{V_1}.$$

La aplicación $h : V_1 \rightarrow U_2^*$ es suave debido a que φ_t es un difeomorfismo local, al teorema del flujo tubular y al hecho de que g preserva conjuntos de nivel.

De otro lado, para cada $q \in V_1$:

$$h(\mathcal{O}_1(q)) = \mathcal{O}_2(h(q)),$$

(para ellos basta tomar $p \in U_1 \cap \mathcal{O}_1(q)$ y notar que $\mathcal{O}_1(p) = \mathcal{O}_1(q)$), o sea, h preserva órbitas.

Veamos que h coincide con g en $V_1 \cap U_1$; sea $p \in U_1 \cap V_1$ entonces

$$h(p) = \phi(0, g_p) = g(p),$$

esto prueba que podemos extender g a una aplicación que lo seguiremos denotando por $h : U_1^* \rightarrow U_2^*$. Como esta aplicación es inyectiva sobre las curvas integrales y lleva curvas integrales distintas en curvas integrales distintas se tiene que es inyectiva y sobreyectiva; debido al hecho que $h|_{V_1}$ preserva conjuntos de nivel y órbitas se tiene derivada regular en todo punto (o sea un isomorfismo en cada punto). Así h es de hecho un difeomorfismo. □

Teorema 5.2 *Sea M una superficie conexa, compacta y suave, y sea $f : M \rightarrow [a, b]$ una función de Morse admisible con sólo 3 puntos críticos. Si 2 puntos críticos son de mínimo para f y el tercero es silla entonces M es difeomorfa al disco compacto D .*

Demostración: Debido a la Proposición 3.4 tenemos que $f^{-1}(\{a\})$ es vacío y $f^{-1}(\{b\})$ es un círculo. Sean $q_1, q_2 \in M$ los puntos de mínimo y $p \in M$ el punto silla.

Consideremos la aplicación g dada al inicio de la Sección 5.5. Podemos suponer (ver Proposición 3.5) que $f(p) = g(0) = 0$, $f(q_1) = g(-1)$ y $f(q_2) = g(2)$.

Consideremos un difeomorfismo¹ $\varphi : V \rightarrow U$ de un disco abierto de \mathbb{R}^2 , centrado en 0, a un abierto U de M que contiene a p tal que

$$f \circ \varphi = g \quad \text{en } V.$$

Y demos a M una métrica de manera que φ es una isometría (reduciendo V y U). Luego, por la Proposición 5.5, tenemos una extensión de φ en los saturados de V y U .

Seguiremos denotando por φ a esta extensión $\varphi : V^* \rightarrow U^*$. Ver figura 1 y 2.

Esta extensión nos da un difeomorfismo entre arcos cercanos a puntos de mínimos, luego una extensión a los círculos correspondientes de esta restricción.

De allí haremos dos extensiones: una será la extensión k sobre los discos cerrados que contienen los puntos de mínimo (ver figura 3 y 4); y la otra será la extensión h que es sobre los saturados de los círculos (ver figura 5), notes que φ y h coinciden la parte común del dominio de φ y h . Luego definiendo el homeomorfismo $H : \varphi^{-1}(\{b\}) \rightarrow M$ como siendo φ ó h fuera de los discos de mínimo y como k en los discos de mínimo (ver figura 6), obtenemos un difeomorfismo por partes que por la Proposición 4.4 obtenemos un difeomorfismo entre el disco y M . Esto concluye la prueba.

Nota: En las siguientes páginas se muestran las figuras con las extensiones hechas y el homeomorfismo H .

5.6. Teorema de clasificación de superficies

Teorema 5.3 *Sea M una superficie conexa, compacta y orientable y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse admisible con un único punto crítico. Si el punto crítico es silla entonces M es difeomorfa a H_2 .*

Prueba: Supongamos que $f : M \rightarrow [-\epsilon, \epsilon]$ donde $\epsilon > 0$ y $f(\partial M) \subset \{-\epsilon, \epsilon\}$ y f envía el punto crítico en 0. Entonces ∂M consta de 3 componentes (3 círculos): $f^{-1}(\{-\epsilon\})$ tiene 2 componente y $f^{-1}(\{\epsilon\})$ tiene 1 componente, o, bien $f^{-1}(\{-\epsilon\})$ tiene 1 componente y $f^{-1}(\{\epsilon\})$ tiene 2 componente.

Supongamos el primer caso, entonces podemos pegar a M a través de su borde inferior con 2 discos para obtener una superficie conexa, compacta y orientable, de manera que podemos

¹El difeomorfismo se logra componiendo la inversa de un carta de Morse para f , en torno de p , con una carta de Morse para g , en torno de $0 \in \mathbb{R}^2$.

Figura 1

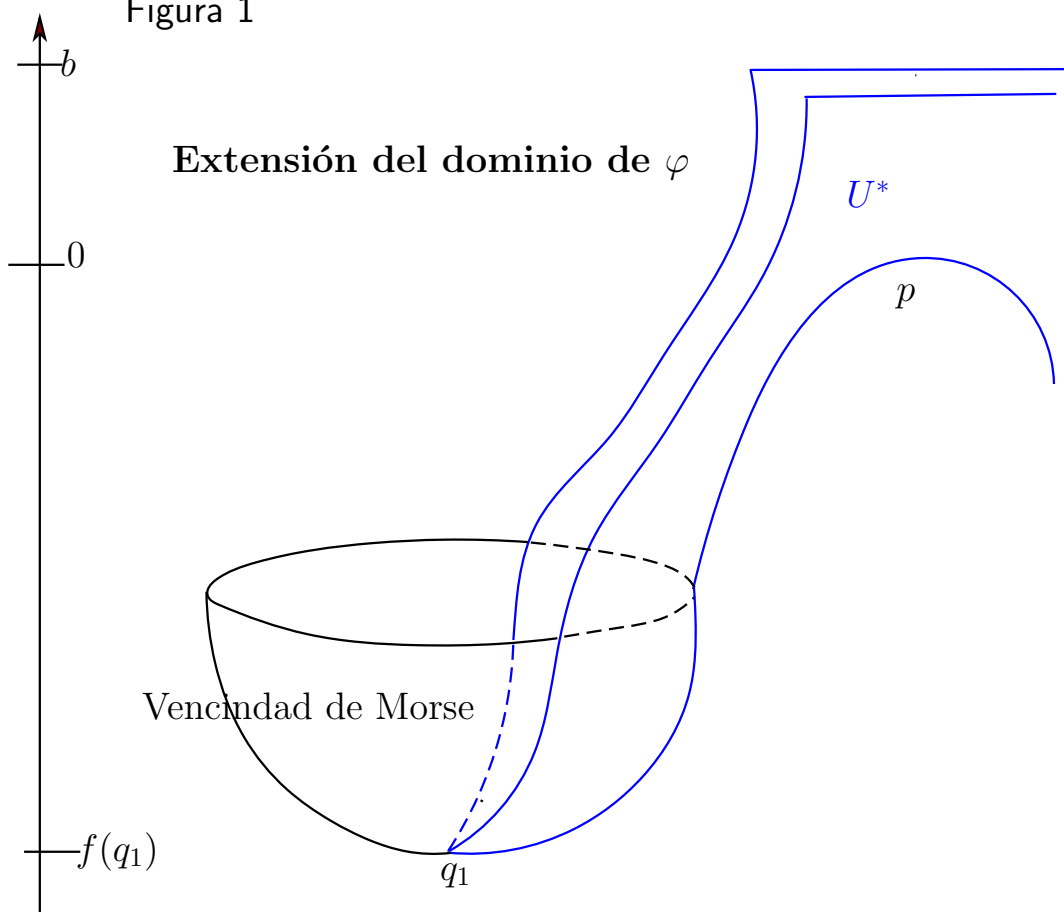


Figura 2

El saturado de U cerca de q_1

U_1 : Vecindad de Morse en q_1 .

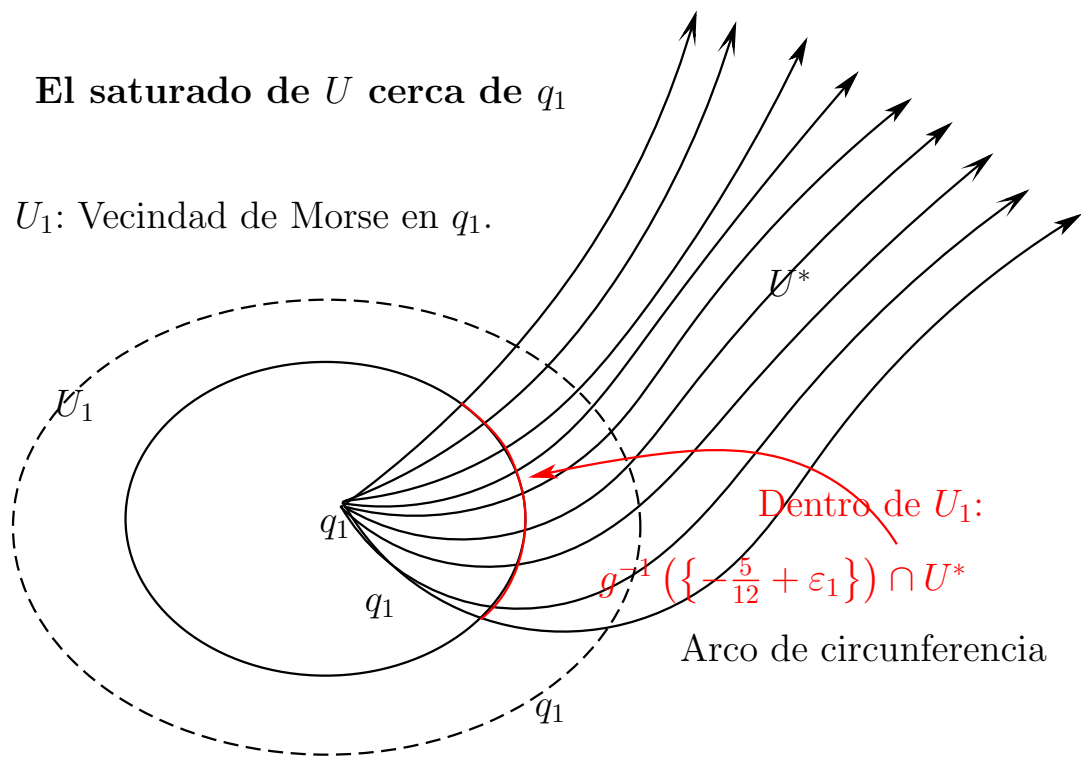


Figura 3

Difeomorfismo entre pares de circunferencias

U_1 : vecindad de Morse en torno de q_1 .

U_2 : vecindad de Morse en torno de Q_2 .

V_1 : vecindad de Morse en torno de $(-1, 0)$.

V_2 : vecindad de Morse en torno de $(2, 0)$.

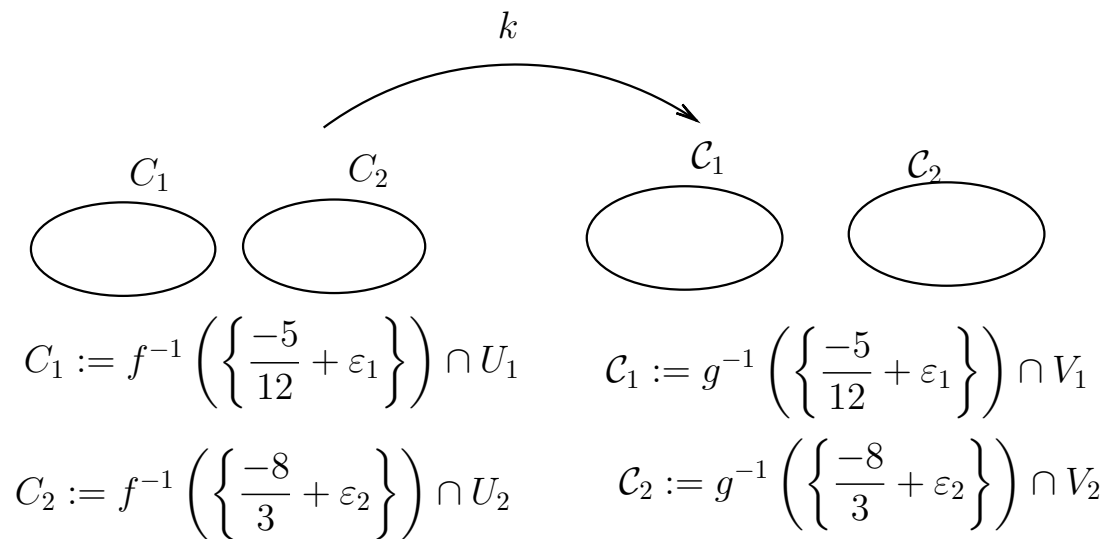
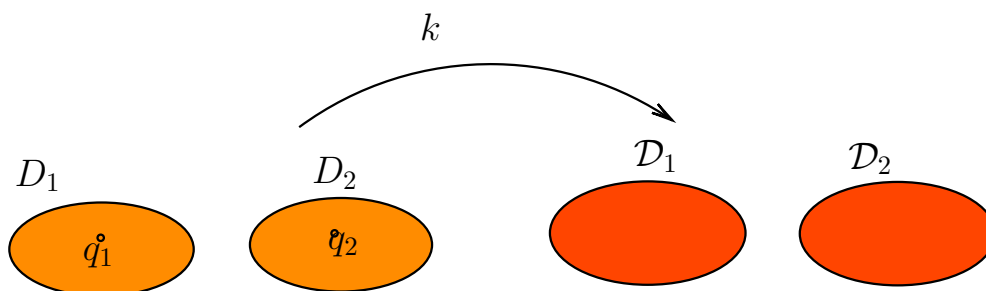


Figura 4

Difeomorfismo entre discos



D_1 :=Disco contenido en la vecindad de Morse U_1 .

\mathcal{D}_1 :=Disco contenido en la vecindad de Morse V_1 .

D_2 :=Disco contenido en la vecindad de Morse U_2 .

\mathcal{D}_2 :=Disco contenido en la vecindad de Morse V_2 .

extender f sobre estos discos a una función diferenciable g que tienen en cada disco sólo un punto crítico en su centro que serán no-degenerados de mínimo local.

Sea S la superficie obtenida, luego $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse admisible con sólo 3 puntos críticos: 2 de mínimo local y 1 es un punto silla, así S es un disco. Por lo tanto M es un disco con 2 huecos.

En el segundo caso, tomando el negativo llegamos al primer caso y así nuevamente llegamos a que M es difeomorfa a un disco con 2 huecos.

□

Figura 5

Extensión de $C_1 \cup C_2$
sobre sus saturados

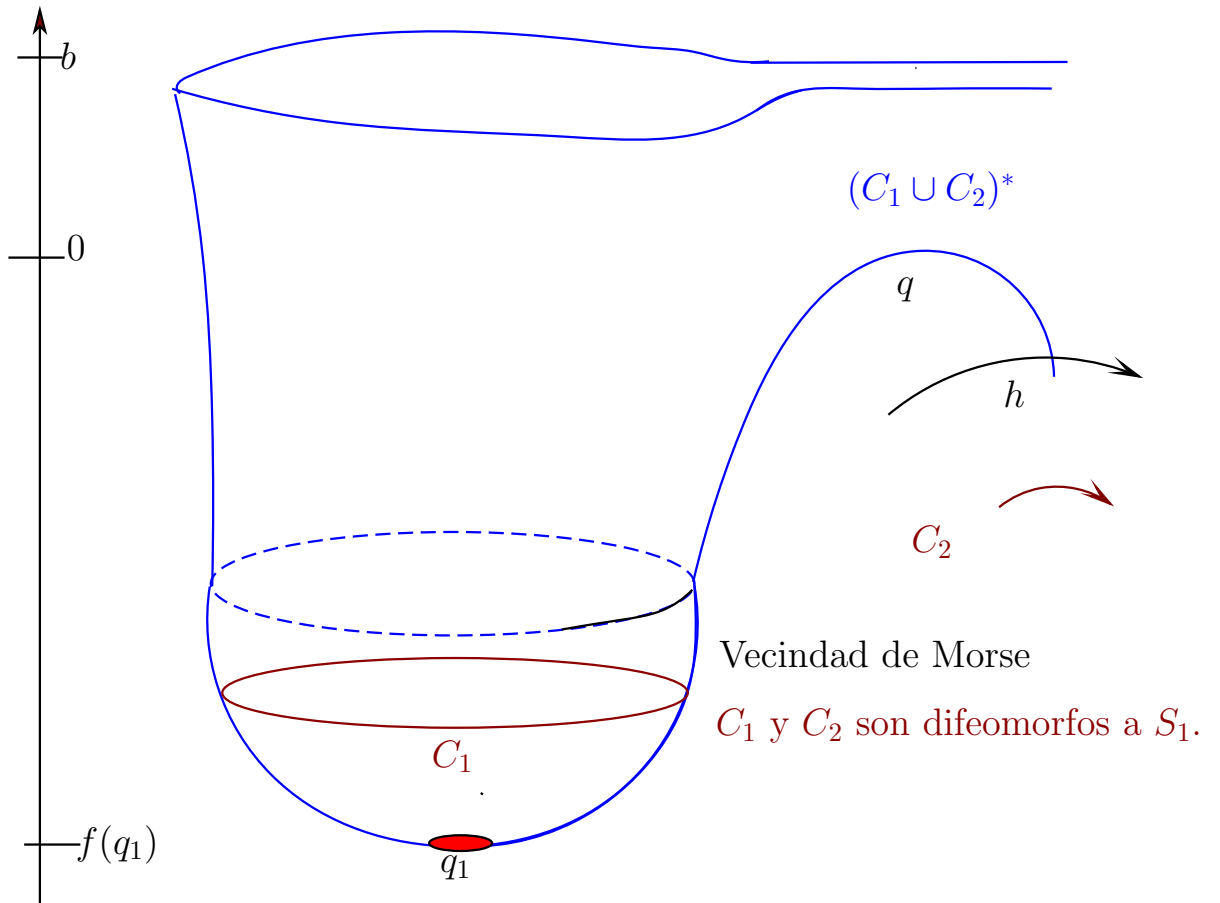
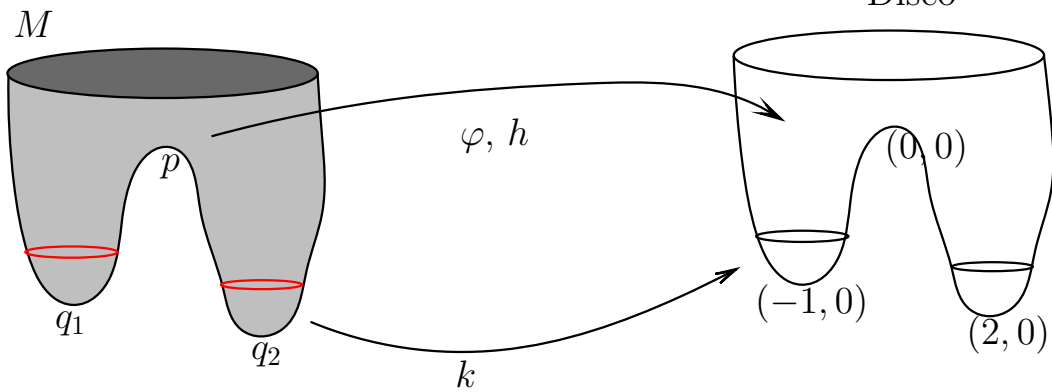


Figura 6

La aplicación H es definida por partes.



Teorema 5.4 Sea M una superficie conexa, compacta y orientable. Supongamos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse admisible con un único punto silla. Vale que:

1. Si M no tiene borde entonces M es difeomorfa a S^2 .
2. Si M tiene borde entonces M es difeomorfa o al disco D^2 , o al cilindro H_1 ($S^1 \times [0, 1]$) o al disco con 2 huecos H_2 .

Prueba: Si f solo tiene un punto crítico, entonces M es difeomorfa a H_2 como hemos visto.

Supongamos que f tiene otros puntos críticos a parte del punto silla, entonces esos puntos serán puntos de máximo local y mínimo local para f .

Como f es una función de Morse admisible existe un intervalo $[a, b]$ ($a < b$) tal que $f(M) \subset [a, b]$ y $\partial M \subset f^{-1}(\{a, b\})$, donde a, b son valores regulares de f . Así $f(\text{int}M) \subset (a, b)$.

Consideremos esos otros puntos críticos; para cada uno de esos puntos tomemos una vecindad de Morse tipo disco abierto y disjuntas entre si, luego para cada disco abierto tomemos un disco contenido en él. Si el punto tomado es de mínimo local podemos perturbar f dentro del disco de modo que siga habiendo en el centro un mínimo local (y no otro punto crítico en el disco) pero con un valor ligeramente debajo de a . Si el punto crítico es un máximo local se perturba f de manera similar, cambiando lo de mínimo por máximo y lo de valor ligeramente debajo de a por valor ligeramente por encima de b .

Ahora bien, si quitamos $f^{-1}(-\infty, a)$ y $f^{-1}(b, \infty)$ obtenemos una superficie conexa, compacta y orientable S . Tenemos que $f|_S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse admisible. con un único punto crítico, además este punto es silla, así S es difeomorfa a H_2 , luego pegando los discos (o el disco) a través de sus bordes para obtener M , tenemos que M es difeomorfa o a H_1 o a D^2 o a la esfera S^2 .

Si M es difeomorfa a H_2 entonces f no tiene otros puntos críticos que el punto silla. Como sus valores máximo y mínimo lo alcanza en puntos del borde, resulta que $f|_{\partial M}$ no es constante. Así si $f|_{\partial M}$ es constante entonces M no es difeomorfa a H_2 .

En conclusión: si M no tiene borde entonces M es difeomorfa a S^2 ; si M tiene borde entonces M es difeomorfa o al disco, o al cilindro o al disco con 2 huecos; y si $f|_{\partial M}$ es constante entonces f no es difeomorfa a H_2 .

□

Observación: Notemos, a partir de la prueba, que:

- Si f tuviera no tuviera otro punto crítico a parte del silla entonces M es difeomorfa a H_2 .
- Si f tuviera solo un punto crítico a parte del silla entonces M es difeomorfa al cilindro H_1 .
- Si f tuviera 2 puntos críticos a parte del punto silla entonces M es difeomorfa al disco H_0 .
- Finalmente si f tuviera otros 3 puntos críticos a parte del punto silla entonces M es difeomorfa a la esfera S^2 .

Teorema 5.5 Sea M una superficie sin borde, orientable, conexa y compacta, entonces existe un número entero $g \geq 0$ tal que M es una superficie orientable de género g .

Prueba: Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse admisible, que existe por el Teorema 3.1, y n el número de puntos sillars. Supongamos que f ha sido tomada de modo que en puntos críticos diferentes f toma valores diferentes. La prueba se hará por inducción sobre el número de puntos sillars n .

Si no tiene puntos sillars entonces f solo tiene puntos críticos de máximo local y mínimo local (recordemos que M es compacta y f continua). Dotemos a M de una métrica riemanniana, luego consideremos las trayectorias que pasan por $M \setminus \{\text{puntos críticos de mínimo local de } f\}$ del campo ∇f , naturalmente estas órbitas van hacia los puntos de máximo local, y los puntos de máximo local son atractores, luego cada una de esta trayectorias van hacia un único punto crítico de máximo. Por la continuidad del flujo, podemos decir que el conjunto de puntos de $M \setminus \{\text{puntos críticos de mínimo local de } f\}$ cuyas trayectorias van hacia un punto crítico de máximo local (fijo) es un conjunto abierto. Luego $M \setminus \{\text{puntos críticos de mínimo local de } f\}$ se descompone en conjuntos disjuntos abiertos; como este conjunto es conexo tenemos que sólo hay un punto de máximo local. De manera análoga se muestra que sólo hay un punto de mínimo local de f , por lo tanto debido al teorema de Reeb, M es una superficie difeomorfa a la esfera. Así M es una superficie orientable de género 0.

Supongamos que el teorema es cierto cuando f tiene $n \geq 0$ puntos sillars.

Ahora supongamos que f tiene $n + 1$ puntos sillars, podemos suponer que los valores de f en puntos críticos de máximo local son mayores al valor máximo que toma f en los puntos sillars, de modo análogo podemos suponer que los valores de f en puntos de mínimo local son menores al valor mínimo que toma f en los puntos sillars.

Sea $p \in M$ el punto silla donde f alcanza su mínimo valor entre los valores que toma sobre los puntos sillars, sea $a = f(p)$ y $b > a$ de modo que $f^{-1}[a, b]$ sólo contiene a un punto crítico: p , así b es un valor regular sobre la superficie sin borde M . Notemos que $S = f^{-1}(-\infty, b]$ es una superficie con borde y compacta, cuyo borde es $f^{-1}(\{b\})$, sea V la componente conexa de S (que es compacta) que contiene a p , luego $f|_S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse admisible de definida sobre una superficie compacta orientable que tiene un único punto silla, así V es difeomorfa o a D^2 o al disco con un hueco H_1 (que es difeomorfo al cilindro $S^1 \times [0, 1]$) o al disco con 2 huecos H_2 .

Como f restricto al borde de V es constante b , V no es difeomorfa al disco con 2 huecos H_2 . Así V es difeomorfa al disco o al cilindro $S^1 \times [0, 1]$.

Podemos decir que $M \setminus V$ es M extraído un disco o una asa.

Si V es un disco, entonces se puede definir una función suave $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide con f en $M \setminus V$ y que en V tenga un punto crítico no-degenerado de mínimo local, luego g será una función de Morse con n puntos sillars, que por la hipótesis de inducción resulta ser una superficie orientable con género.

En el otro caso, en el que V es difeomorfo a un cilindro, si consideramos la adjunción de $M' = M \setminus \text{int}(V)$ (tiene como borde a 2 círculos) con 2 discos a través de su bordes, que denotaremos por N , podemos obtener una función suave $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que g en M' es igual a f y en cada uno de los discos tenga a un punto crítico no degenerado de mínimo local.

Claramente M es la adjunción de N con una asa, como $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse con n puntos críticos se sigue que N es una superficie con género, luego también lo es M .

□

Teorema 5.6 *Si M una superficie orientable con género g , entonces existen g círculos disjuntos en M de manera que M menos esos círculos es conexo, pero que $g+1$ círculos disjuntos sobre M no tienen esta propiedad, esto es, M menos $g+1$ círculos disjuntos en M es desconexo.*

Prueba: Si el género es 0, entonces M es difeomorfa a la esfera, luego un círculo en M da origen a 2 componentes, así M menos un círculo es desconexo.

Supongamos que la superficie M tenga género $g \geq 1$ y que C_1, \dots, C_k (donde $k \in \mathbb{N}$) son círculos disjuntos en M de manera que M menos esos círculos es aun conexo.

Como C_1, \dots, C_k son disjuntos podemos tomar vecindades tubulares compactas disjuntas N_1, \dots, N_k de C_1, \dots, C_k , respectivamente, difeomorfas a $S^1 \times [-1, 1]$ (correspondiendo $S^1 \times \{0\}$ con el respectivo círculo). Luego M menos el interior de esas vecindades tubulares da una superficie conexa, compacta y con borde a $2k$ círculos, luego podemos tapar esos huecos con $2k$ discos y así obtener una superficie S sin borde.

Claramente M es la adjunción de S con k asas, sea h el género de S , entonces $g = h + k$, así $k \leq g$. También como M es la esfera con g asas, de cada asa podemos extraer un círculo sin que al final quede una superficie desconexa. Esto concluye la prueba.

□

Teorema 5.7 (Teorema de clasificación para superficies conexas, compactas y orientables) *Sea M una superficie conexa, compacta y orientable cuyo borde consta de k círculos entonces M es difeomorfa a una superficie con género quitando el interior de k discos disjuntos.*

Prueba: Como M tiene como borde a k círculos disjuntos podemos adjuntarle k discos a través de sus bordes, luego obtenemos una superficie sin borde, orientable, conexa y compacta; de allí que la superficie obtenida es una superficie orientable con género.

A partir de esto, tenemos que M es difeomorfa a una superficie orientable con género menos el interior de k discos disjuntos.

□

Proposición 5.6 *Si M una superficie no-orientable, entonces M contiene en su interior una banda de Möbius.*

Prueba: Tomemos un lazo regular e inyectivo $\alpha : S^1 \rightarrow \text{int}(N)$ que invierta orientación, luego α es un encaje. Entonces $S = \alpha(S^1)$ es una subvariedad de $\text{int}(N)$, consideremos una vecindad tubular compacta W de S en $\text{int}(N)$, entonces W es una subvariedad de N difeomorfa a una banda de Möbius. Caso contrario sería un cilindro, luego α no invertiría orientación.

□

Proposición 5.7 *Sea N una superficie conexa, compacta y no-orientable. Entonces existe un único número natural b tal que M contiene b bandas de Möbius disjuntas y no $b+1$ bandas de Möbius disjuntas.*

Prueba: Ya sabemos que N contiene al menos una banda de Möbius.

Sea $\pi : \tilde{N} \rightarrow N$ el cubrimiento doble orientado de N que como ya sabemos \tilde{N} es orientada. Como N es no orientable se tiene que \tilde{N} es conexo. También \tilde{N} es compacto por se la fibra finita.

Sea $g \geq 0$ el género de \tilde{N} (o de la superficie orientada con género que quitada una cantidad finita una cantidad finita de interiores de discos disjuntos, da una superficie difeomorfa a \tilde{N}).

Si B es una banda de Möbius de N entonces $\pi^{-1}(B)$ es un cilindro en \tilde{N}

Sean B_1, \dots, B_k bandas de Möbius disjuntas en N , donde k es un natural, entonces

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right)$$

son k cilindros disjuntos de \tilde{N} , de aquí obtenemos k círculos disjuntos en \tilde{N} .

Si $b \geq g + 1$, entonces

$$\tilde{N} \setminus \pi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{g+1} B_i\right) = \pi^{-1}\left(N \setminus \bigcup_{i=1}^{g+1} B_i\right)$$

es desconexo, luego $N \setminus \bigcup_{i=1}^k B_i$ es una superficie orientable. De allí no se puede tomar más bandas de Möbius. Por lo tanto $b = g + 1$.

Así existe un número natural $b \leq g + 1$ tal que N contiene c bandas de Möbius disjuntas pero no $b + 1$ bandas de Möbius disjuntas.

□

Definición 5.4 Al número b del teorema anterior llamamos número de Möbius de la superficie conexa, compacta y no-orientable N .

Teorema 5.8 Sea N una superficie conexa, compacta, no-orientable y sin borde con número de Möbius b , entonces N es una superficie no-orientable de género b .

Prueba: Si quitamos a N el interior de b bandas de Möbius disjuntas, la superficie resultante N' es conexa, compacta y orientable, cuyo borde consta de b círculos, podemos adjuntar b discos a N' a través de su borde para obtener una superficie S sin borde, conexa, compacta y orientable.

Sea g el género de la superficie S . Tenemos que N es el crosscap de S con b bandas de Möbius, es decir es la una superficie no-orientable de género b que se le ha puesto g asas, luego el resultado es una superficie no-orientable de género $b + 2g$.

Entonces el número de Möbius de N es mayor o igual a $b + 2g$.

Como el número de Möbius de N es b , tenemos $b + 2g \leq b$, así $g = 0$. Por lo tanto S es una esfera. De ello se tiene que N es una superficie no orientable de género b .

□

Teorema 5.9 (Teorema de clasificación de superficies conexas, compactas y no-orientables) Sea M una superficie conexa, compacta, no-orientable, cuyo borde consta de k círculos, entonces M es difeomorfa a una superficie no-orientable con género quitándole el interior de k discos disjuntos.

Capítulo 6

Conclusiones

Esta clasificación de superficies compactas nos sirve para dar una imagen geométrica de los objetos que se están trabajando cuando uno trata con superficies de Riemann compactas, ya que estas superficies son superficies compactas orientables.

Una aplicación importante que se hace del teorema de clasificación es en el cálculo de $\pi_{n+2}(S^n)$ cuando $n > 3$, aquí este grupo es isomorfo a cierto grupo de cobordismo framed como puede ser visto en un trabajo de [Tapia].

La clasificación de superficies compactas sin borde pasa por construcciones en las cuales intervienen superficies compactas con borde, sin embargo como los bordes son solo una cantidad finita de circunferencias no hay tantas variantes como lo podría haber si trabajamos con variedades compactas de dimensión 3. Esto es debido a que el borde de variedades de dimensión 3 tiene muchas más posibilidades en lo que podrían ser sus componentes, ya que como hemos visto pueden ser una esfera, un toro, o un poco más general una esfera con g asas en el caso orientable; mientras que en el caso de tener componentes no-orientables ellas podrían ser un plano proyectivo, una botella de Klein, o más general una esfera con b cross-caps.

Aún no hay un teorema de clasificación para variedades compactas de dimensión 3, sin embargo en el año 2004 ha sido probado en una serie de 3 artículos de Perelman la conjetura de Poincaré de en dimensión 3:

Sea M una variedad compacta, conexa y sin borde con el mismo tipo de homotopía de la esfera de dimensión 3, entonces M es homeomorfa a la esfera.

Cabe decir que está Conjetura, llamada *Conjetura de Poincaré*, demoró casi 100 años en demostrarse.

En cuanto a la clasificación de variedades compactas de dimensión mayor o igual que 4 es notable saber que tal clasificación no existe debido a un resultado de Markov (éste a su vez apoyado en un resultado de Adyan), el cual dice que no existe un proceso algorítmico con el cual saber si 2 variedades compactas son homeomorfas o difeomorfas, el interesado de este resultado puede revisar el libro de [Fomenko].

Capítulo 7

Recomendaciones

Existe en la literatura matemática algunos libros donde se demuestra la clasificación diferenciable de variedades diferenciables de dimensión 1, uno de ellos es el libro de [Milnor], *Topology from Differentiable Viewpoint*, allí se demuestra tanto en el caso sin borde como con borde.

En el caso de superficies de Riemman, esto es, variedades complejas de dimensión uno, un toro puede tener una cantidad no contable de estructuras complejas, el interesado puede leer el libro de [Foster]. Allí también se muestra que las únicas superficies de Riemann simplemente conexas son el plano, el disco abierto y la esfera de Riemman.

Un estudio de la topología de variedades de dimensión 3 puede ser visto el libro de [Fomenko]; en este mismo libro se demuestra que una 3-variedad compacta, conexa, sin borde y simplemente conexa es homotópicamente equivalente a una esfera de dimensión 3.

Acerca de la imposibilidad de clasificar variedades compactas de dimensión mayor que 3 esto es un resultado que también puede ser visto en el libro de Fomenko.

En dimensión 4 existen variedades compactas simplemente conexas con una cantidad infinita numerable de estructuras diferenciables no difeomorfas entre si, es más el propio espacio euclídeo \mathbb{R}^4 tiene una cantidad infinita no-numerable de estructuras diferenciables. Para el estudio de 4-variedades se usa herramientas más sofisticadas como es *Teoría de Gauge* como puede verse en el libro de [Donaldson].

En dimensión 5 existe una clasificación de variedades simplemente conexas cuya prueba usa herramientas de topología algebraica como Clases características, más información de esto puede ser encontrado en [Barden]. Cabe acotar aquí que si una variedad compacta de dimensión mayor o igual a 5 tiene el mismo tipo de homotopía de la esfera entonces ella es homeomorfa a la esfera; una demostración de este resultado, demostrado por S. Smale, puede ser visto en [Kosinski].

Bibliografía

- [Abraham, R.,1994] Abraham, R., Marsden, J. (1994) *Manifolds, tensor analysis and applications*. Springer.
- [Barden, D.,1965] Barden, D. (1965) *Simply Connected Five-Manifolds*. The Annals of Mathematics - 2nd Ser., Vol. 82, No. 3.
- [Donaldson, A.,1997] Donaldson, S., Kronheimer (1997) *the geometry of 4-manifolds*. Oxford University Press.
- [Fomenko, A.,1987] Fomenko, A. (1987) *Differential geometry and topology*. Consultants Bureau.
- [Foster, O.,1981] Foster, O. (1987) *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer.
- [Gredon, G.,1997] Bredon, G. (1997) *Topology and geometry*. Springer.
- [Kosinski, A.,1993] Kosinski, A. (1993) *Differential manifolds*. Academic Press.
- [Hirsch, M.,1994] Hirsch, M. (1994) *Differential topology*. Springer: Graduate text in Mathematics.
- [Lee, J.,2000] Lee, J. (2000) *Introduction to topological manifolds*. Springer.
- [Milnor, J.,1965] Milnor, J. (1965) *Topology from Differentiable Viewpoint*. Princeton University press.
- [Tapia, C.,2010] Carlos, T. (2010) *Teoría de Cobordismo y Grupos de Homotopías de esferas*. Tesis de Maestría PUCP.