

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION DE POST-GRADO Y 2da. ESPECIALIZACION PROFESIONAL



**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS, MENCION: MATEMATICA APLICADA**

TITULADA:

**ADAPTABILIDAD DE MALLADOS POR APROXIMACION A LA
MECANICA DE UN FLUIDO**

PRESENTADA POR:

IRLA DORALIZA MANTILLA NUÑEZ

Lic. Matemáticas

LIMA - PERU

1999

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO 1 FUNDAMENTACION MATEMATICA	3
1.1 Espacios de Hilbert	4
1.2 Espacios $L^p(\Omega)$	7
1.3 Espacios de Sobolev	11
1.4 Valor de una función en el borde de Ω	14
CAPITULO 2 DESCOMPOSICION ORTOGONAL DE $[L^2(\Omega)]^n$	17
2.1 Formulación variacional de los problemas Dirchlet y Neumann	18
2.2 Formulación abstracta del Método de Elementos Finitos- MEF para problemas elípticos lineales	21
2.2.1 Problema continuo	21
2.2.2 Problema discreto	29
2.2.3 Interpretación geométrica y estimación de error de la solución aproximada	31
2.3 Campos vectoriales en $[L^2(\Omega)]^n$	33
2.4 Existencia y unicidad del potencial escalar de un campo vectorial	37
2.5 Valor de un campo vectorial sobre el borde de Ω	39
CAPITULO 3 ADAPTABILIDAD DE UN MALLADO	42
3.1 Planteamiento del problema de adaptación	43
3.2 Técnica de resolución	44
3.3 Implementación numérica	51
3.3.1 Discretización del problema variacional	51
3.3.2 Observaciones para la programación	52
CAPITULO 4 RESULTADOS NUMERICOS Y CONCLUSIONES	56
4.1 Experiencias numéricas	57
4.2 Evaluación cuantitativa	58
4.3 Conclusiones	60
CAPITULO 5 ANEXOS	61
Anexo 1 Programa de cálculo en FORTRAN	62
Anexo 2 Tabla de resultados y figuras	76
BIBLIOGRAFIA	103

RESUMEN

En este trabajo se plantea un método de adaptabilidad de mallados a un cierto estimador de error, conservando el número de grados de libertad y las conectividades de la malla original. El principio del método consiste en considerar los nodos del mallado original como las partículas de un fluido irrotacional y compresible, cuya compresibilidad local es proporcional a la desviación del error sobre su media (con lo que se consigue que, globalmente, el fluido sea incompresible).

Este método da lugar a la resolución de un problema de contorno elíptico lineal de tipo Neumann, el cual es discretizado mediante el Método de Elementos Finitos, sobre la malla inicial, sometido únicamente a la restricción de admisibilidad del mallado que incluye la no penetrabilidad de unos elementos en otros.

Se presentan algunos resultados numéricos relativos a funciones de error dadas a priori y se muestra la aplicación del método a un problema de interpolación con un estimador de error basado en el gradiente de la función interpolada. En la práctica computacional el método resulta de gran eficacia.

ABSTRACT

In this work is outlined an adaptability method of mesh to a certain estimator of mistake, preserving the number of degrees of freedom and the conectividades of the original mesh. The principle of the method consists of considering the nodos of the original mesh as the particles of a fluid irrotational and compresible, whose compresibilidad local is proportional to the desviation of the mistake on their mean (with what is procured that, globally, the fluid will be incompresible).

This method gives cause for the resolution of a problem of linear elliptical contour of type Neumann, the one which is discretizado through the Finite Elements Method, on the initial mesh, submitted solely to the admissibility restriction of the mesh that includes the not penetrability of some elements in other.

They are presented some numerical results related to given mistake functions a priori and is shown the application of the method to an interpolation problem with a estimator of mistake based on the gradient of the interpolated function. In practice computational the method results very effective.

INTRODUCCION

Para la resolución numérica de un problema de contorno bien sea mediante el Método de Elementos Finitos, Diferencias Finitas o Volúmenes Finitos, entre los objetivos fundamentales en la búsqueda de una mejor aproximación de la solución, están: la precisión de la solución y el tiempo de cálculo computacional.

En la discretización del método de aproximación, el tipo de mallado a utilizar influye directamente en la calidad de la solución del problema; por tanto, se dice que un mallado es óptimo si la distribución del error es uniforme en todos los elementos de dicha malla.

Una amplia formulación y discusiones puede encontrarse en [19] para Diferencias Finitas y en [4] para Elementos Finitos, donde se analizan cada caso con una técnica diferente. En la referencia [15] se propone que las coordenadas de la malla constituya una variable adicional del problema aproximado. El método de refinamiento resulta muchas veces no apropiado en la práctica, porque conduce a resolver grandes sistemas de ecuaciones algebraicas, aún tratándose del caso de un problema lineal.

Las técnicas de adaptabilidad utilizadas en [3] y [16], derivadas de consideraciones de tipo geométrico, implican la resolución de problemas de optimización relativos a la minimización de funcionales relacionadas con la suavidad y la ortogonalidad de la malla resultante. Los métodos propuestos en estas referencias respecto a la adaptabilidad de la malla inicial son buenos para mallas rectangulares del estilo de las utilizadas en diferencias finitas, pero no son aplicables a mallas con elementos finitos de tipo triangular. Además, la solución propuesta en dichas referencias se consigue mediante un método iterativo (gradiente conjugado u otro) el cual necesita un alto número de iteraciones para alcanzar un buen resultado.

En [12] se propone un método de minimización de una funcional relativa al "factor de calidad de la malla", que puede ser interpretado en términos de la mecánica de sólidos como "la integral de la energía de deformación" acumulada en el mallado. Este método es similar a la formulación de un problema de elasticidad no lineal, y su inconveniente radica en el amplio tiempo computacional de cálculo.

En la presente tesis, se propone una técnica de adaptabilidad de mallado, que consiste en fijar el número de nodos y elementos de la malla inicial. Este principio se basa en la similitud de sus coordenadas, al comportamiento de las partículas de un fluido irrotacional y localmente compresible.

Esta metodología tiene las siguientes ventajas:

* Es aplicable a un dominio con cualquier tipo de mallado, independientemente de sus propiedades correspondientes.

* El menor tiempo de cálculo computacional requerido, lo que favorece a la reducción del costo en la resolución del algoritmo de adaptabilidad.

El contenido consta de cinco capítulos. En el capítulo 1 se presenta la fundamentación matemática, allí se especifican las principales definiciones, teoremas y otros resultados sobre los espacios de Hilbert, los cuales constituyen la parte teórica para la formulación variacional del problema.

En el capítulo 2 se enfoca la formulación variacional de los problemas de contorno elípticos Dirichlet y Neumann y se comenta acerca de su resolución numérica de estos problemas, así como también se demuestra la existencia y unicidad de la solución. En este capítulo también se describe la descomposición vectorial del espacio $[L^2(\Omega)]^n$, lo que permite obtener la función escalar potencial de velocidad del flujo.

El capítulo 3, constituye el planteamiento del problema correspondiente al método de adaptabilidad de mallados a una función de error, en cuya resolución e implementación numérica implica la aproximación de un problema de contorno elíptico lineal de tipo Neumann homogéneo, para la obtención de las coordenadas de la malla adaptada.

En el capítulo 4 se presenta los resultados numéricos y las conclusiones. Allí se analiza la calidad de la malla invariante respecto a las conectividades de la malla original, mediante la estimación del denominado índice de efectividad. Los resultados numéricos obtenidos se han realizado con algunas funciones de prueba elegidas a priori como estimadores de error.

El capítulo 5 constituye los anexos, que incluyen los gráficos construidos y la tabla resumen de resultados.

CAPITULO 1
FUNDAMENTACION MATEMATICA

En este capítulo se dan algunos conceptos sobre los espacios de Hilbert, los mismos que son fundamentales en la teoría de la aproximación con el método de Elementos Finitos, lo cual forma parte del desarrollo de la presente tesis.

1.1 ESPACIOS DE HILBERT

Definición 1.1.1

Sea H un espacio vectorial normado real o complejo, se define el producto escalar $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ como una función de valor real, tal que a cada par de vectores $u, v \in H$, le asocia un escalar denotado por (u, v) y que satisface las siguientes propiedades:

- i) $(u, v) = \overline{(v, u)}$ $u, v \in H$, $\overline{(v, u)}$ es el número complejo conjugado de (v, u)
- ii) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ $u, v, w \in H$
- iii) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ $\alpha \in K$ $u, v \in H$
- iv) $(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$

Definición 1.1.2

Un espacio vectorial normado $(H, \|\cdot\|)$ donde toda sucesión (u_n) de Cauchy es convergente respecto a su norma $\|\cdot\|$, entonces se dice que este espacio es completo o de Banach.

Si un espacio vectorial normado H es completo, con la norma que cumple la condición $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, entonces se le define a H como un espacio de Hilbert.

Por ejemplo, el espacio \mathbb{R}^n con el producto escalar $(x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ es un espacio de Hilbert, es decir (\cdot, \cdot) genera una norma en este espacio, definida por:

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x^i x^i = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Recordaremos algunas otras normas en \mathbb{R}^n .

Sea $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un vector de \mathbb{R}^n

La longitud de un vector en \mathbb{R}^n representada por

$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ es llamada la norma Euclideana sobre el espacio \mathbb{R}^n , e indica la distancia del origen hacia el punto de aplicación de v .

La magnitud que generaliza el valor absoluto en \mathbb{R} , expresada por

$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$ viene a ser la norma conocida como Norma 1 de \mathbb{R}^n .

Otra norma sobre \mathbb{R}^n , llamada norma infinita, está dada por

$$\|v\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$$

Definición 1.1.3

Un subconjunto M de un espacio vectorial H , real o complejo, es convexo si $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M \quad \forall x, y \in M, \lambda \in (0, 1)$.

Si H es un espacio vectorial normado y M es un conjunto convexo cerrado no vacío de H , a cada $x \in H$ se le asocia su distancia a M , representada por

$$d(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Proposición 1.1.4 (Teorema de la proyección sobre un convexo cerrado)

Sea H un espacio de Hilbert y $S \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de H . Para cada $u \in H$, existe un único elemento $u_0 \in S$ tal que $\|u - u_0\| = \inf_{v \in S} \|u - v\|$ y expresa la proyección de u sobre S , siendo $u_0 = P(u) = P_S(u)$.

Demostración

Sea $\delta = d(x, S)$; $\delta = \inf_{v \in S} \|u - v\|$

1.1.i) Si $u \in S$, tomamos $u_0 = u$

1.1.ii) Supondremos entonces que $u \notin S$. Por definición de infimo, existe una sucesión (v_n) en S tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - v_n\| = \delta$.

Probaremos que (v_n) es una sucesión de Cauchy en H .

Sean $x = v_n - u$, $y = u - v_m$. Usando la ley del paralelogramo se obtiene:

$$\begin{aligned} \|(v_n - u) + (u - v_m)\|^2 + \|(v_n - u) - (u - v_m)\|^2 \\ = 2\|v_n - u\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= 2(\|v_n - u\|^2 + \|u - v_m\|^2) - \|v_n + v_m - 2u\|^2 \\ &= 2(\|v_n - u\|^2 + \|u - v_m\|^2) - 4\left\| \frac{v_n + v_m}{2} - u \right\|^2 \end{aligned}$$

$\frac{v_n + v_m}{2} \in S$, por ser convexo; luego:

$$\delta \leq \left\| \frac{v_n + v_m}{2} - u \right\|,$$

$$\|v_n - v_m\|^2 \leq 2(\|v_n - u\|^2 + \|u - v_m\|^2) - 4\delta^2 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|v_n - v_m\|^2 &\leq 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Luego, (v_n) es una sucesión de Cauchy, y como H es completo, existe $u_0 \in H$ tal que $v_n \rightarrow u_0$, siendo S cerrado se tiene que $u_0 \in S$ y $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - v_n\| = \|u - u_0\|$.

Unicidad de u_0

Supongamos que u_0, u_1 son puntos de S tales que $\|u - u_0\| = \|u - u_1\| = \delta$

de modo similar a la relación (*), entonces se obtiene que:

$$\|u_o - u_1\|^2 \leq 2 (\|u_o - u\|^2 + \|u - u_1\|^2) - 4\delta^2 = 0$$

luego $u_1 = u_o$.

Definición 1.1.5

Sea V un espacio de Hilbert. Una proyección $P : V \rightarrow V$ es un operador lineal tal que $P \circ P = P^2 = P$, y que satisface las siguientes propiedades:

- 1.1.a) $Pu = u, \forall u \in P(V)$.
- 1.1.b) $I - P$ también es una proyección
- 1.1.c) $Ker P = (I - P)(V), Ker(I - P) = P(V)$
- 1.1.d) $P(V) \cap Ker P = \{0\}$
- 1.1.e) $P(V) + Ker P = V$.

La proyección P se llama ortogonal si $(PV) \perp (I - P)(V)$.

Proposición 1.1.6.-Sea V un espacio de Hilbert real o complejo y M un subespacio cerrado de V . Entonces, la aplicación $P_M : V \rightarrow V$ es un operador lineal y continuo de la norma $\|P_M\| \leq 1$ en $\mathcal{L}(V, V)$. Será $\|P\| = 1$ si $M \neq \emptyset$ [10].

Si $Ker(P_M) = N$, entonces N es un subespacio vectorial cerrado suplementario de M en V tal que $N = M^\perp$, y además $V = M \oplus N$ [10].

Teorema 1.1.7

Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H . Si $u = u_o + u_1 \in M + M^\perp$ (descomposición ortogonal de u), $P_M : H \rightarrow H$ un operador lineal tales que $P_M(u) = u_o$ es el único elemento de M y $(u_o - u) \perp M$. Entonces:

- 1.1.I) P_M es el operador proyección ortogonal.
- 1.1.II) $[d(u, M)]^2 = \|u - P_M(u)\|^2$
- 1.1.III) $(P_M(u), u) = (u, P_M(u)) = \|P_M(u)\|^2$ [10]

Observación:

Si $u \in M$, entonces $u = u + 0 \in M + M^\perp$; luego $P_M(u) = u, \forall u \in M$
Además $d(u, M) = \|u\| \Leftrightarrow P_M(u) = 0, \Leftrightarrow u \in M^\perp$.

Nota: Sea H un espacio de Hilbert y $P : H \rightarrow H$ una proyección ortogonal. Si $M = P(H)$ entonces M es un subespacio cerrado de H .

En efecto: $M = P(H) = Ker(I - P)$ y $(I - P)$ es ortogonal.

Teorema 1.1.8

Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H . Entonces existe una única proyección ortogonal $P : H \rightarrow H$ tal que $P(H) = M$.

Demostración

Sea $P_M : H \rightarrow H$ la proyección ortogonal definida en el Teorema 1.1.7; se tiene $P_M(H) = M$.

Sea $P : H \rightarrow H$ otra proyección ortogonal tal que $P(H) = M$. Entonces $P(H) \perp (I - P)(H) \stackrel{(1.1.c)}{\Rightarrow} M \perp (Ker P) \Rightarrow Ker(P) \subset M^\perp$.

Como $H = M + Ker P$, si $z \in M^\perp$, entonces $z = m + n$ con $m \in M$ y $n \in Ker P$; $0 = (z, m) = \|m\|^2 + \underbrace{(n, m)}_0 \Rightarrow m = 0$,

$\Rightarrow z = n \in Ker P$, luego $M^\perp \subset Ker P$, $\Rightarrow M^\perp = Ker P$.

Sea $u \in H$, $u = u_0 + u_1 \in M + M^\perp$.

$P_M(u) = u_0$; $Pu = Pu_0 + Pu_1$.

$Pu_0 = u_0$, pues $u_0 \in M = P(H)$

$Pu_1 = 0$, pues $u_1 \in M^\perp = Ker P$.

Por tanto $P_M = P$. \square

A continuación introduciremos los espacios funcionales que usaremos de manera natural en la formulación variacional de los problemas de contorno.

1.2 ESPACIOS $L^p(\Omega)$

Sean $\Omega \subset R^n$ un conjunto abierto y acotado de R^n , $\partial\Omega = \Gamma$ la frontera de Ω , la cual es suficientemente regular. Para un número real $p \in [1, \infty >$, si Ω es un conjunto medible, entonces $f : \Omega \rightarrow R$ tal que $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \forall x \in \Omega$ es una función medible.

Denotaremos por $\mathcal{M}^p(\Omega)$ el conjunto de funciones medibles sobre Ω .

Definición 1.2.1

Sea $f \in \mathcal{M}^p(\Omega)$ se define la relación \mathfrak{R} de la forma siguiente:

$f \mathfrak{R} g$ si y solo si $f(x) = g(x)$, $\forall g \in \mathcal{M}^p(\Omega)$ c.t.p Ω , excepto en un subconjunto de Ω de medida nula. La relación \mathfrak{R} es de equivalencia [8].

Sobre este conjunto se define la seminorma

$$N_p(f) = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \text{ para } f \in \mathcal{M}^p(\Omega).$$

Observación: $N_p(f) = 0$ no implica que $f = 0 \forall f \in \mathcal{M}^p(\Omega)$ [8].

Definición 1.2.2

Sobre el conjunto $\mathcal{M}^p(\Omega)$ definimos el conjunto de clases de funciones medibles, definidas sobre Ω denotado por

$$L^p(\Omega) = (\mathcal{M}^p(\Omega))/\mathfrak{R}$$

para las cuales se tiene que:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Entonces en el espacio $L^p(\Omega)$ definimos la norma $\|\cdot\|_{L^p}$

$$\|g\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \text{ donde } f \text{ es un elemento de la clase } g.$$

El conjunto $L^p(\Omega)$ con la norma $\|g\|_p$ es completo [10].

Se justifica que si $\{f_n\}$ es una sucesión de cauchy en $L^p(\Omega)$, entonces $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\Omega)$ con la norma $\|g\|_{L^p}$.

Al conjunto $L^p(\Omega)$ se le conoce como el espacio de funciones medibles y p -integrables sobre Ω .

En el presente trabajo se considera el espacio $L^p(\Omega)$ para el caso de $p = 2$,

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$ es llamado el espacio de funciones medibles de cuadrado integrable sobre Ω .

Sobre este espacio se define el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

que induce a la norma $\|f\|_{0,\Omega}$ definida por:

$$\|f\|_{0,\Omega} = \|f\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \forall f \in L^2(\Omega)$$

El espacio $L^2(\Omega)$ con la norma $\|f\|_{L^2(\Omega)} = (f, f)_{L^2(\Omega)}^{1/2}$, es completo. Entonces $L^2(\Omega)$ para la norma $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 1.2.3. Dado el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$, asociado a la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, entonces se tiene la siguiente desigualdad de Cauchy [9]

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Esto mismo se cumple para cualquier producto escalar asociado a su norma correspondiente.

1.2.4-Identificación de los elementos de $L^2(\Omega)$ en Distribuciones

Denotemos por $D(\Omega) = C_K^\infty(\Omega)$, el espacio de funciones infinitamente diferenciables y continuas sobre Ω con soporte sobre el conjunto compacto K . Sea $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, el conjunto clausura de Ω y $C^0(\bar{\Omega})$ el espacio de funciones continuas definidas sobre $\bar{\Omega}$. Con estas consideraciones se dan las siguientes definiciones.

Definición 1.2.5.-Una función $\varphi : R \rightarrow R$ se llama simple, si existe un número finito A_1, A_2, \dots, A_m de conjuntos medibles en R , disjuntos dos a dos, tales que:

1.2.i) φ es constante y diferente de cero en cada A_i ; es decir, existe un $a_i \in R$ tal que

$$\varphi(x) = a_i \text{ si } x \in A_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

$$1.2.ii) \varphi(x) = 0 \text{ si } x \notin \bigcup_{i=1}^m A_i$$

Toda función simple φ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\varphi = \sum_{i=1}^m a_i (\chi_{|_{A_i}}), \text{ donde } \chi_{|_{A_i}} \text{ es la función característica sobre el conjunto } A_i.$$

Teorema 1.2.6.- Sea $\Omega \subset R^n$ abierto y acotado entonces $\overline{D(\Omega)} = L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$)

Demostración

La demostración se realiza en varias etapas [10] :

1.2.A). Aproximación puntual de una función medible mediante funciones simples

1.2.B). Aproximación de una función medible y de soporte compacto mediante funciones continuas

1.2.C). La densidad del conjunto de funciones simples integrables en $L^p(\Omega)$

1.2.D). El conjunto de funciones de clase $C^k(\Omega)$ y de soporte compacto es denso en $L^p(\Omega)$.

1.2.E). El espacio $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$; $1 \leq p < \infty$.

Sea $K \subset \bar{\Omega}$ un conjunto compacto, denotemos por $D(\bar{\Omega}) = \bigcup_K C_K^\infty(\bar{\Omega})$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre $\bar{\Omega}$ con soporte compacto K .

Sea $R_+^n = \{x = (x', x_n) \in R^n, x_n > 0; x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$, si $\Omega = R_+^n$, entonces la frontera de Ω está dada por:

$$\partial\Omega = \{x = (x', x_n) \in R^n, x_n = 0\}.$$

El espacio de distribuciones está dado por el conjunto $D'(\Omega) = \mathcal{L}(D(\Omega), R)$, de formas lineales y continuas sobre $D(\Omega)$ en R .

Se usa la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para indicar la dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$; es decir, para una forma lineal y continua

$$\Lambda : D(\Omega) \longrightarrow R$$

se tiene que:

$$\Lambda(\varphi) = \langle \Lambda, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Sea $\varphi \in L^2(\Omega)$; esta función se puede identificar como una distribución mediante dualidad

$$\langle \Lambda\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)dx \quad \forall \psi \in D(\Omega).$$

Por tanto, se puede establecer una aplicación $L^2(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$ continua e inyectiva. Esta aplicación nos permite identificar las funciones del espacio $L^2(\Omega)$ como distribuciones.

Definición 1.2.7

Para φ en $L^2(\Omega)$, se identifica la primera derivada parcial perteneciente a $D'(\Omega)$ (en el sentido de las distribuciones) por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Lambda(\varphi)}{\partial x_i} \in D'(\Omega) \quad i = 1, \dots, n$$

Para que la derivada de una distribución coincida con la derivada clásica de una función de clase por lo menos C^1 , es preciso imponer la siguiente condición:

$$\left\langle \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \left\langle -\Lambda, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

1.3 ESPACIOS DE SOBOLEV

Con lo establecido anteriormente sobre la identificación de $L^2(\Omega)$, en $D'(\Omega)$, para $p = 2$ podemos introducir los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$, donde $m \geq 0$.

Definición 1.3.1.-Sea $\Omega \subset R^n$, se define el espacio de Sobolev de orden cero y el espacio de Sobolev de orden 1 sobre Ω respectivamente denotados por:

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega); \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, n; \nabla \varphi \in (L^2(\Omega))^n \right\},$$

donde: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ viene a ser la derivada distribucional para φ .

$H^1(\Omega)$ está dotado del producto escalar:

$$(\varphi, \psi)_{1,\Omega} = (\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)}$$
 es decir,

$$(\varphi, \psi)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} [\varphi \cdot \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi] dx \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega)$$

que induce a la norma :

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} = (\varphi, \varphi)_{1,\Omega}^{1/2} = \left[\int_{\Omega} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) dx \right]^{1/2} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Proposición 1.3.2

El espacio $H^1(\Omega)$ es completo con la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Demostración

Toda sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$ es convergente con la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$

En efecto:

Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } p, q \geq n_0 \Rightarrow \|\varphi_p - \varphi_q\|_{1,\Omega}^2 \leq \varepsilon$$

entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\varphi_n\} \text{ es de Cauchy en } L^2(\Omega) \\ \left\{ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right\} \text{ es de Cauchy en } L^2(\Omega) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

pero $L^2(\Omega)$ es completo, entonces $\varphi_n \rightarrow \varphi$
 converge en $L^2(\Omega)$, $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \rightarrow \varphi_i$ converge en $L^2(\Omega)$ para $i = 1, \dots, n$
 donde por dualidad la aplicación :

$$\Lambda : L^2(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$$

$$\varphi \rightarrow \Lambda \varphi$$

es lineal y continua. Entonces $\varphi_n \rightarrow \varphi$ converge en $D'(\Omega)$, y
 $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \rightarrow v_i$ converge en $D'(\Omega)$ para $i = 1, \dots, n$.

Se sabe también que,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : D'(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$$

$$\Lambda \rightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}$$

es lineal y continua, luego $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ en $D'(\Omega)$

entonces: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_i \in L^2(\Omega)$, puesto que $D'(\Omega)$ es un espacio de Hausdorff
 [18].

Por tanto, se tiene la convergencia $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $H^1(\Omega)$ para $\varphi \in H^1(\Omega)$, dado que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ en } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ en } L^2(\Omega) \end{array} \right\} \iff \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ en } H^1(\Omega)$$

Proposición 1.3.3. El espacio $H^1(\Omega)$ con la norma $\|\varphi\|_{1,\Omega}$ es un espacio de Hilbert.

Demostración

Para toda función φ en el espacio vectorial normado $H^1(\Omega)$, la norma definida por $\|\varphi\|_{1,\Omega} = (\varphi, \varphi)_{1,\Omega}^{1/2}$ donde $(\varphi, \varphi)_{1,\Omega}$ es el producto escalar de $H^1(\Omega)$, y de la proposición 1.3.2, se demuestra que $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 1.3.4.

Se define como la clausura de $D(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, a la relación expresada por

$$\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$$

donde:

$$H_0^1(\Omega) = \{ \psi \in H^1(\Omega) : \psi|_{\partial\Omega} = 0 \}, \text{ siendo } \partial\Omega = \Gamma \text{ la frontera de } \Omega.$$

El espacio de funciones $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado en $H^1(\Omega)$ y está dotado del producto escalar y de la norma de $H^1(\Omega)$ [5].

Nota. Si $\psi \in H_0^1(\Omega)$, entonces existe $\{\varphi_n\} \subset D(\Omega)$, tal que $\varphi_n \rightarrow \psi$, es decir converge en $H^1(\Omega)$ [7]. Como $H^1(\Omega)$ es de Hilbert, entonces $H_0^1(\Omega)$ es también de Hilbert.

Teorema 1.3.5 (Desigualdad de Poincaré)

Sea Ω es un conjunto abierto acotado en R^n , entonces \exists una cte. $C = C(\Omega)$ positiva tal que:

$$\|\varphi\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}; \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Definición 1.3.6

Si Ω es un abierto acotado en R^n , definimos la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ representada por

$$|\varphi|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Proposición 1.3.7

La seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ es una norma sobre el espacio $H_0^1(\Omega)$, y es equivalente a la norma inducida por $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Es una consecuencia del teorema de Poincaré, es decir

Para $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $|\varphi|_{1,\Omega} = 0 \Rightarrow \|\varphi\|_{1,\Omega} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Notar que:

$1 \in H^1(\Omega)$, entonces $1 \notin H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$.

Definición 1.3.8

En general, un espacio de Sobolev está definido por el conjunto $W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}$.

Cuando $p = 2$, se obtiene los espacios de Sobolev de orden m , $W^{m,2}(\Omega) \equiv H^m(\Omega)$, expresado por:

$$H^m(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega); \partial^\alpha \varphi \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m, \alpha \in (\mathbb{N})^m\}.$$

Este espacio $H^m(\Omega)$ está dotado del producto escalar $(\cdot, \cdot)_{m,\Omega}$ definido por

$$(\varphi, \psi)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int \partial^\alpha \varphi(x) \cdot \partial^\alpha \psi(x) dx; \varphi, \psi \in H^m(\Omega)$$

que induce a la norma $\|\varphi\|_{m,\Omega} = (\varphi, \varphi)_{m,\Omega}^{1/2}$

En caso particular, para $m = 1$, se tiene

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}$$

De igual manera, para $m = 2$ se tiene el espacio de Sobolev de orden 2

$$H^2(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega)\}$$

Se verifica que $(H^2(\Omega), \|\cdot\|_{2,\Omega})$ y $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$ son espacios de Hilbert [8].

El espacio $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$, expresa la clausura de $D(\Omega)$ respecto a $H^m(\Omega)$; y el dual está dado por el espacio $H^{-m}(\Omega)$. El espacio $H_0^m(\Omega)$, dotado de la norma

$$\|\varphi\|_{m,\Omega} = \sup_{\substack{v \in H_0^m(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\langle \varphi, v \rangle}{\|v\|_{m,\Omega}}$$

es un espacio de Hilbert [8]

1.4 VALOR DE UNA FUNCION EN EL BORDE DE Ω

Dada una función $\varphi \in H^1(\Omega)$, de frontera regular Γ , la cual es continua y al menos de clase C^1 .

Designaremos por:

ds como la medida de superficie sobre Γ ,

El espacio $L^2(\Gamma) = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ es medible y de cuadrado integrable sobre } \Gamma \text{ para la medida } ds\}$, dotado del producto escalar

$$(f, g)_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} (f \cdot g) ds, s \in \Gamma, \text{ y de la norma } \|f\|_{0,\Omega} = \|f\|_{L^2(\Gamma)} = [\int_{\Gamma} |f|^2 ds]^{1/2}.$$

En cada punto $s = (x_1, x_2) \in \Gamma$ se define, excepto en un conjunto de medida de superficie nula, una normal a Γ , la que se denotará por el vector unitario $n(s) = (n_1(s), n_2(s))$

1.4.1 Aplicaciones traza γ_0 y γ_1

Sea Ω un conjunto abierto acotado de frontera regular Γ (por ejemplo de clase C^1), $\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$ una aplicación lineal y continua tal que $\gamma_0\varphi = \varphi|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$ es lineal y continua, entonces la traza de φ sobre Γ indica el valor de φ sobre el borde Γ .

De la densidad de $D(\bar{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ [8], se puede ver que $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\|\gamma_0\varphi\|_{0,\Gamma} \leq c \|\varphi\|_{1,\Omega}$$

De la densidad de $D(\bar{\Omega})$ en $H^2(\Omega)$ [8], se obtiene la aplicación $\gamma_1 : D(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$, tal que

$$\gamma_1(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} n_i \in L^2(\Gamma)$$

donde $n = (n_1, n_2)$ es la normal exterior a la frontera de Ω .

Corolario 1.4.2

$$\text{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$$

Imagen(γ_0) = $H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$, la cual es un subespacio propio y denso, dotado de la norma $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$, dada por

$$\|\mu\|_{1/2,\Gamma} = \inf_{\substack{\varphi \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0\varphi = \mu}} \|\varphi\|_{1,\Omega}$$

Definición 1.4.3

Se define la completitud del espacio $L^2(\Gamma)$ como $H^{-1/2}(\Gamma)$, que corresponde al espacio dual de $H^{1/2}(\Gamma)$, que está dotado de la norma

$$\|g\|_{-1/2,\Gamma} = \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle g, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}}$$

Nota. $H^{1/2}(\Gamma)$ con la norma $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$, viene a ser un espacio de Hilbert [18]

Definición 1.4.4

El espacio $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ es un subespacio de $H^{-1/2}(\Gamma)$ definido por

$$H_0^{-1/2}(\Gamma) = \{g \in H^{-1/2}(\Gamma); \langle g, 1 \rangle = 0\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica el producto escalar extendido de $L^2(\Gamma)$ por dualidad entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$; es decir, si $g \in L^2(\Gamma)$, se puede identificar a $\langle g, \mu \rangle = \int_{\Gamma} g \cdot \mu dx$, $x \in \Gamma$, $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$.

1.4.5 Fórmulas de Green

Por la densidad de $D(\bar{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ y de las propiedades de extensión de $\varphi|_{\Gamma}$ por $\gamma_o(\varphi)$, se tiene la siguientes fórmulas de Green

1.4.i). Dado $\psi \in H^1(\Omega)$ se verifica $\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \psi dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma} \gamma_o(\varphi) \gamma_o(\psi) n_i ds$

Si $\varphi \in H^2(\Omega)$, entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$. Reemplazando φ por $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ y sumando para $i = 1, \dots, N$, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx = - \int_{\Omega} \Delta \varphi \cdot \psi dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \psi dx, \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

1.4.ii). Si tomamos ψ en $H^2(\Omega)$ y φ en $H^1(\Omega)$, se deduce la siguiente fórmula

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx = - \int_{\Omega} \varphi \cdot \Delta \psi dx + \int_{\Gamma} \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dx$$

De la diferencia entre 1.4.i) y 1.4.ii) se obtiene

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \Delta \psi dx - \int_{\Omega} \Delta \varphi \cdot \psi dx = \int_{\Gamma} \left[\varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right) - \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \right] dx$$

$$\forall \varphi, \psi \in H^2(\Omega)$$

CAPITULO 2

DESCOMPOSICION ORTOGONAL DE $[L^2(\Omega)]^n$

En este capítulo se plantea y desarrolla la existencia y unicidad de solución de los problemas de contorno Dirichlet (D) y Neumann (N), sobre un conjunto Ω abierto y acotado, de frontera continua y regular. Asimismo, se demostrará la existencia y unicidad de la descomposición vectorial del espacio $[L^2(\Omega)]^n$

Se desea encontrar una función u , tal que verifique:

$$(D) \begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = g \text{ sobre } \Gamma \end{cases} \quad (N) \begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \Gamma \end{cases}$$

Si $g = 0$ se dice que la condición de contorno Dirichlet o Neumann es homogénea, en caso contrario para $g \neq 0$, dicha condición de contorno será no homogénea.

2.1 FORMULACION VARIACIONAL DE LOS PROBLEMAS DIRICHLET - NEUMANN

2.1.1. Formulación débil del Problema Dirichlet

Una solución débil para (D), llamada la forma variacional del problema (D), es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_{\Omega} f \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} g v dx \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En el caso de que $f \in L^2(\Omega)$ y la condición de contorno sea de Dirichlet homogénea ($g = 0$) y si buscamos una función u suficientemente regular como solución débil (por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$), se procede de la siguiente forma:

$$- \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad , \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega), \text{ luego}$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v dx}_0 = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

finalmente se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por tanto, con estas condiciones se tiene la formulación débil del problema (D)

$$(VD) \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v d\sigma \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Por densidad se demuestra que esta igualdad es válida $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

Recíprocamente, si $u \in H_0^1(\Omega)$ y es solución de (VD) entonces u es solución para (D)

En efecto:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in D(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} \\ &= \langle f, v \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} \end{aligned}$$

entonces:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \right\rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)}$$

se puede deducir que en el sentido de las distribuciones, se obtiene (D)

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, v \rangle &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in D(\Omega) \Rightarrow -\Delta u = f \text{ en } D'(\Omega) \\ \text{donde } f &\in L^2(\Omega) \text{ y } -\Delta u \in L^2(\Omega), \\ \text{luego la ecuación} &\text{ tiene sentido c.t.p de } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Además el hecho de que $u \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que la condición de contorno $u = 0$ sobre Γ , satisface en el sentido de las trazas $\gamma_0 u = u|_{\Gamma} = 0$ en $L^2(\Gamma)$.

2.1.2 Formulación débil del Problema Neumann

Para el problema (N) analizaremos los casos homogéneo y no homogéneo respecto a la condición de contorno:

$$2.1.I). \text{ Dada } f \in L^2(\Omega) \text{ y } g = 0$$

$$(N)_1 \begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{cases}$$

Si u es suficientemente regular (por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$) se procede de la siguiente manera:

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

aplicando la fórmula de Green (1.4.i) y teniendo en cuenta la condición de contorno $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ en la ecuación:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v d\sigma = - \int_{\Omega} \Delta u v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

resulta entonces, $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$.

por tanto se tiene la siguiente formulación variacional para el problema (N).

$$(VN)_1 \left\{ \begin{array}{l} \forall v \in H^1(\Omega) \text{ hallar } u \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \end{array} \right.$$

Si u es solución clásica de (N) entonces u también es solución de (VN).

En efecto:

tomemos $u \in H^1(\Omega)$ que verifique (VN),

$$(\bullet) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in D(\Omega)$$

de la fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \cdot v dx$$

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) \cdot v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in D(\Omega).$$

$$\langle -\Delta u + u, v \rangle + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \cdot v dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in D(\Omega)$$

para que se verifique $-\Delta u + u = f$ en el sentido de distribuciones

$$-\Delta u + u = f \in D'(\Omega)$$

pero $f \in L^2(\Omega)$ entonces $(-\Delta u + u) \in L^2(\Omega)$.

se tiene que: $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx$, puesto que

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \nu dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

tomando $v = 1$ se tiene la condición de compatibilidad $\int_{\Omega} f dx = 0$ y existe solución única.

Podemos observar que en esta formulación variacional del problema desaparece la condición de contorno.

2.1.II). Para $f \in L^2(\Omega)$, $g \neq 0 \in L^2(\Gamma)$ y si el problema (N) esta dado por

$$(N)_2 \begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases}$$

la fórmula variacional que se obtiene es:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \nu ds = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

de la condición de contorno se tiene

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma} g \cdot \nu ds \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Si u es solución de este problema $u + c$ también es solución de (N) $\forall c \in R$ multiplicando por una función $v \in H^1(\Omega)$

tomando $v = 1 \in H^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g \cdot \nu ds = 0$, esta es la condición de compatibilidad

Es decir existe solución pero no existe unicidad

2.2 FORMULACION ABSTRACTA DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS ELIPTICOS LINEALES

2.2.1 Problema continuo

Teorema 2.2.A

2.2.a) Sea V un espacio de Hilbert

2.2.b) Con producto escalar $(\cdot, \cdot)_V$ y la V -norma correspondiente $\|\cdot\|_V$

2.2.c) Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ acotada (ó continua) sobre $V \times V$ ($\exists M < \infty$ tal que $|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$)

2.2.d) $l(\cdot) : V \rightarrow R$ una forma lineal continua sobre V , $l \in V'$ espacio dual de V .

Entonces por el teorema de Representación de Riez l puede ser representado unicamente por $l(v) = (u, v)$ para algún $u \in V$. Además $\|l\|_{V'} = \|u\|_V$ [17].

Definición 2.2.A1

Se dice que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica o coerciva sobre V , si existe $\alpha \geq 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V$.

Proposición 2.2.A2

Sea H un espacio de Hilbert y V un subespacio cerrado, supongamos que $a(.,.)$ es una forma bilineal simétrica, continua sobre H y coerciva sobre V . Entonces $(V, a(.,.))$ es un espacio de Hilbert.

Demostración

De la coercividad de $a(.,.)$ y para $v \in V$, tal que $a(v, v) = 0$, entonces $v \equiv 0$, pues la forma bilineal es un producto interno sobre V .

Sea $\|v\|_V = \sqrt{a(v, v)}$, supongamos que $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(V, \|v\|_V)$, entonces por la coercividad de $a(.,.)$, $\{v_n\}$ es también de Cauchy en $(H, \|v\|_H)$. Como H es completo, existe $v \in H$ tal que $v_n \rightarrow v$ con la norma $\|v\|_H$, y dado que V es cerrado en H , entonces $v \in V$.

$\|v - v_n\|_V \leq \sqrt{c_1} \|v - v_n\|_H$, pues $a(.,.)$ es acotado. Por tanto $\{v_n\} \rightarrow v$ con la norma $\|\cdot\|_V$, así $(V, \|\cdot\|_V)$ es completo. \square

En general, dado el funcional $l \in V'$, la formulación del problema variacional que reúne las condiciones dadas en 2.2.1 y 2.2.A1, es el siguiente:

$$(P) \begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que:} \\ a(u, v) = l(v) \forall v \in V \end{cases}$$

Si la forma bilineal $a(.,.)$ es simétrica, mediante el teorema de representación de Riesz, se verifica que este problema tiene solución única [17].

Observación

Si $a(.,.)$ es simétrica, para $u \in V$, entonces

$$\frac{1}{2}a(u, u) - l(u) = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - l(v) \right\}.$$

Un problema variacional donde $a(.,.)$ es no simétrica y a la vez reúne las condiciones dadas en 2.2.1. Entonces, de la proposición 2.2.1.B y por el teorema de aproximación de Galerkin, el problema variacional se puede formular como el problema aproximado

$$(P_h) \begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que:} \\ a(u_h, v) = l(v) \forall v \in V_h \end{cases}$$

Teorema 2.2.A3 (Lema de Lax-Milgram)

Con las hipótesis 2.2.a), 2.2.b) y 2.2.c) y sí la forma bilineal es no simétrica y satisface la definición 2.2.A1 (es decir que $a(.,.)$ es coerciva sobre V), se tiene que el problema (P_h) admite solución única. Además la aplicación lineal $l \rightarrow u$ es continua de V' en V .

Demostración

Sea (\cdot, \cdot) el producto escalar en V y V' el dual de V

$l \in V' \Rightarrow$ del teorema de Riez $\exists!$ L tal que $l(v) = (\tau l, v)_V \forall v \in V$

entonces existe una correspondencia biunívoca $\tau : l \rightarrow \tau l$ de V' sobre V , esta correspondencia es una isometría. Por notación usaremos $\tau l = L$

$$\|L\|_V = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{(L, v)}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{l(v)}{\|v\|} = \|l\|_{V'}$$

Por tanto $\|l\|_{V'} = \|L\|_V$. [*]

Fijando u dentro de V la forma lineal que aplica $v \rightarrow a(u, v)$ es continua sobre V .

entonces es un elemento de V' .

Aplicando nuevamente el teorema de Riesz, se tiene la existencia y unicidad de un elemento $Au \in V$ tal que:

$$(Au, v) = a(u, v) \forall v \in V$$

Entonces se ha definido el operador $A : V \rightarrow V$,

para u se tiene una aplicación Au , lineal y continua, tal que:

$$\|Au\|_V = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{(Au, v)}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \stackrel{(2.2.c)}{\leq} M \|u\|.$$

Luego el problema variacional (P) es equivalente al siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que} \\ Au = L \end{cases}$$

Ahora el teorema se reduce a demostrar que A es un operador biyectivo. En efecto:

De la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ se tiene que existe una constante α , tal que

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = (Av, v)_V \leq \|Av\| \cdot \|v\|, \forall v \neq 0$$

dividiendo por $\|v\|$, se tiene

$$\alpha \|v\| \leq \|Av\| \quad \forall v \in V \quad [+]$$

pero A es lineal y continúa, entonces es inyectiva.

Para probar que A sobreyectivo, es decir que $AV = V$, se verá que:

$$\begin{cases} i) AV \text{ es cerrado en } V \\ ii) (AV)^\perp = \{0\} \end{cases}$$

En el caso i), sea $w \in \overline{AV} \subset V$, es decir $\exists v_m \subset V$, tal que $w_m \subset AV$, $(w_m) \rightarrow w$ en V , entonces $w_m = Av_m$. En virtud de [+], se tiene que:

$$\begin{aligned} \|Av_m - Av_p\| &= \|A(v_m - v_p)\| \geq \alpha \|v_m - v_p\| \\ \Rightarrow v_m &\text{ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert } V \\ \Rightarrow v_m &\rightarrow v \text{ en } V. \end{aligned}$$

Por la continuidad de $A \Rightarrow Av_m = w_m \rightarrow Av = w \in AV$, ello prueba que AV es cerrado en V .

Para el caso ii), sea $v_0 \in (AV)^\perp$

$$\begin{aligned} \alpha \|v_0\|^2 &\leq a(v_0, v_0) = (Av_0, v_0) = 0 \\ \Rightarrow v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Sea $H = AV$, donde H es cerrado en V y $V = H \oplus H^\perp$, por tanto $V = A(V)$, con lo que se prueba que A es sobreyectiva.

Se puede demostrar también que $A^{-1} : V \rightarrow V$ es continua dado que:

$$\begin{aligned} \|Av\| &\geq \alpha \|v\| \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow \|A^{-1}v\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|v\|, \text{ luego } A^{-1} \text{ es continua.} \end{aligned}$$

De todo lo dicho en [*] sobre l se deduce que la solución u del problema (P) verifica:

$$\|u\| = \|A^{-1}L\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\| = \frac{1}{\alpha} \|l\|. \square$$

Además, si $a(.,.)$ es simétrica, se tiene que

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u \in V, \forall v \in V$$

y se define el funcional $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$

para considerar que el problema dado es equivalente al problema de minimización

$$(PM) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que:} \\ F(u) = \inf_{v \in V} F(v) \end{cases}$$

Nota:

Si $a(.,.)$ es simétrica y coerciva, entonces el problema (PM) admite solución única $u \in V$, que es también solución del problema (P).

En efecto:

Sea $u \in V$ solución del problema (P) y w cualquier elemento de V ; por la simetría de $a(.,.)$

$$F(u+w) = \frac{1}{2}\{a(u,u) + 2a(u,w) + a(w,w)\} - \{l(u) + l(w)\} = \\ = F(u) + \{a(u,w) - l(w)\} + \frac{1}{2}a(w,w)$$

desde que u satisface el problema (P)

$$F(u+w) = F(u) + \frac{1}{2}a(w,w),$$

y de la coercividad de $a(.,.)$ se tiene que:

$$F(u+w) \geq F(u) + \frac{\alpha}{2} \|w\|^2.$$

$F : V \rightarrow R$ es una aplicación diferenciable en $u \in V$, según Gateaux, si existe $F'(u)$ talque $(F'(u), v) = a(u, v) - l(v) = 0 \Leftrightarrow a(u, v) = l(v)$

$$\forall v \in V; v \neq u$$

$$F(u) < F(v).$$

De la coercividad y continuidad de $a(.,.)$, se tiene

$$M \|u\| \geq l(u) = a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

obteniéndose la estimación para u , expresada por:

$$\|u\|_V \leq \frac{M}{\alpha}.$$

Unicidad del problema (VN₁)

Veremos solo en el caso del problema de Neumann no homogéneo.

Sea la forma bilineal $a(.,.)$ definida sobre $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow R$,

$a(.,.)$ no es $H^1(\Omega)$ -elíptica, puesto que:

$$\|\varphi\|_{1,\Omega}^2 = [\int_{\Omega} (\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) dx]^{1/2}, \text{ luego no existe } \alpha > 0 \text{ tal que:}$$

$$a(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \geq \alpha \|\varphi\|_{1,\Omega}^2. \text{ Por ello no se asegura la unicidad en } H^1(\Omega).$$

Para poder aplicar el teorema de existencia y unicidad de Lax-Milgram a este problema primeramente se darán los siguientes conceptos.

Definición 2.2.A4

Sea P_0 es el conjunto de polinomios de grado cero. Dado un espacio de funciones V , la clase de equivalencia de $u \in V$ en el espacio cociente V/P_0 se denotará por \dot{u} , expresado por

$$\dot{u} = \{u + c \text{ donde } c \in P_0\} \in V/P_0.$$

Haciendo $V = H^1(\Omega)$, se define el espacio cociente $H^1(\Omega)/P_0$ como el conjunto de elementos \dot{u} , donde \dot{u} es la clase de equivalencia perteneciente a $H^1(\Omega)/P_0$ que está dotado de la norma:

$$\|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/P_0} = \inf_{u \in \dot{u}, c \in R} \|u + c\|_{1,\Omega}.$$

Entonces, la formulación variacional en el espacio cociente es

$$(VN)_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{hallar } \dot{u} \in H^1(\Omega)/P_0 \\ \int_{\Omega} \nabla \dot{u} \nabla \dot{v} dx = \int_{\Omega} f \cdot \dot{v} dx + \int_{\Gamma} g \cdot \dot{v} ds \quad \forall \dot{v} \in H^1(\Omega)/P_0 \end{array} \right.$$

Proposición 2.2.A5

El espacio $H^1(\Omega)/P_0$ dotado de la norma del cociente $\|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/P_0}$ es un espacio de Hilbert.

Demostración

Como $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert

$$\Rightarrow \|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/P_0} = \inf_{u \in \dot{u}} \|u - \text{Pr}_{P_0}(u)\|_{1,\Omega};$$

$$\text{donde } \text{Pr}_{P_0}(u) = \frac{1}{\text{med}(\Omega)} \int_{\Omega} u dx$$

$$u - \text{Pr}_{P_0}(u) = \text{Pr}_{P_0^\perp}(u)$$

$$\|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/P_0} = \|\text{Pr}_{P_0^\perp}(u)\|$$

haciendo $P_0 = M$,

definimos una isometría de $H^1(\Omega)/M \rightarrow M^\perp$ tal que

$$\dot{u} \rightarrow \text{Pr}_{M^\perp}(u)$$

donde, $H^1(\Omega)/M$ está dotado del producto escalar

$$(\dot{u}, \dot{v})_{H^1(\Omega)/M} = (\text{Pr}_{M^\perp}(u), \text{Pr}_{M^\perp}(v))_{H^1(\Omega)}$$

$$(\dot{u}, \dot{u})_{H^1(\Omega)/M} = \|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/P_0}^2.$$

por tanto $V = H^1(\Omega)/M$ será un espacio de Hilbert.

Proposición 2.2.A6

Sea $l(\cdot)$ una forma lineal continua sobre el dual de $H^1(\Omega)$ tal que

$$l(s) = 0 \Rightarrow s = 0 \quad \forall s \in R.$$

Entonces la norma $\|u\|_V = [\|u\|_{1,\Omega}^2 + (l(u))^2]^{1/2}$ es equivalente sobre $H^1(\Omega)$ a la norma usual $\|u\|_{1,\Omega}$ [18].

Proposición 2.2.A7

La seminorma $|\dot{u}|_{1,\Omega}$ es una norma en el espacio cociente $H^1(\Omega)/P_0$, entonces las normas $\|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/P_0}$ y $|u|_{1,\Omega}$ son equivalentes.

Demostración:

Sea $|u|_{1,\Omega} = |\dot{u}|_{1,\Omega} \quad \forall u \in \dot{u}$

Si $|\dot{u}|_{1,\Omega} = 0 \Rightarrow \dot{u} = 0$ en $H^1(\Omega)/P_0$

Se probará que $(H^1(\Omega)/P_0, |u|_{1,\Omega})$ es un espacio completo

Sea (\dot{u}_n) una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)/P_0$ para la norma $|\cdot|_{1,\Omega}$ dado que $|\dot{u}_p - \dot{u}_q|_{1,\Omega} = |u_p - u_q|_{1,\Omega} \quad \forall u_p \in \dot{u}_p, \forall u_q \in \dot{u}_q$ construimos a partir de (\dot{u}_n) una sucesión (u_n^*) tal que:

$l(u_n^*) = 0 \quad \forall n$, donde $l(\cdot)$ es la forma lineal de la Proposición 2.2.A6.

Sea $u_n \in \dot{u}_n$, tomando $u_n^* = u_n - \frac{l(u_n)}{l(1)}$, entonces

$$l(u_n^*) = l(u_n) - \frac{l(u_n)}{l(1)} \cdot l(1) = 0$$

u_n^* es de Cauchy con la norma $|\cdot|_{1,\Omega}$,

$$|\dot{u}_p^* - \dot{u}_q^*|_{1,\Omega}^2 + l^2(u_p^* - u_q^*) = \|u_p^* - u_q^*\|_{1,\Omega}^2$$

Por la proposición 2.2.A6. (u_n^*) es de Cauchy en $H^1(\Omega)$, este espacio es completo con la norma $|\cdot|_{1,\Omega}$, entonces $\exists u^* \in H^1(\Omega)$ tal que $u_n^* \rightarrow u^*$ en $H^1(\Omega)$.

Se tiene también que $|\dot{u}_n - \dot{u}^*|_{1,\Omega} = |u_n^* - u^*|_{1,\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, de la continuidad $|\dot{v}|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)/P_0}$, entonces por el teorema de la aplicación abierta [10] y de la proposición 2.2.A6. se tiene la equivalencia de las normas $\|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/P_0}$ y $|u|_{1,\Omega}$.

Entonces se formula el siguiente problema:

$$(VN)^* \begin{cases} \text{Encontrar } \dot{u} \in H^1(\Omega)/P_0 \text{ tal que} \\ a(\dot{u}, \dot{v}) = l(\dot{v}) \quad \forall \dot{v} \in H^1(\Omega)/P_0 \end{cases}$$

Proposición 2.2.A8

El problema $(VN)^*$ tiene solución única $\dot{u} \in H^1(\Omega)/P_0$

Demostración

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma} g \cdot v ds \quad \forall v \in H^1(\Omega)/P_0.$$

$H^1(\Omega)/P_0$ es un espacio de Hilbert

Se demuestra:

i) La continuidad de $a(.,.)$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

Sustituyendo u por $u + s$ y v por $v + r$; s y $r \in R$

$$\int_{\Omega} \nabla(u + s) \cdot \nabla(v + r) dx \leq |u + s|_{1,\Omega} \cdot |v + r|_{1,\Omega} \leq \|u + s\|_{1,\Omega} \cdot \|v + r\|_{1,\Omega}$$

$$a(u, v) \leq \left[\inf_{s \in R} \|u + s\|_{1,\Omega} \cdot \inf_{r \in R} \|v + r\|_{1,\Omega} \right]$$

$$= \|u\|_{H^1(\Omega)/P_0} \|v\|_{H^1(\Omega)/P_0} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)/P_0$$

ii) La coercividad de $a(.,.)$:

De i) y la proposición 2.2.A6, se tiene que

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = |u|_{1,\Omega}^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)/P_0}^2$$

iii) La continuidad de l

$$|l(v)| = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma} g \cdot v ds \leq \|f\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma} \cdot \|v\|_{0,\Gamma}$$

$$\leq \left(\|f\|_{0,\Omega} + C \|g\|_{0,\Gamma} \right) \cdot \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

y sustituyendo v por $v + s$; $s \in R$ se tiene que:

$$l(v + s) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma} g \cdot v ds + \underbrace{\left(\int_{\Omega} f \cdot dx + \int_{\Gamma} g \cdot dx \right)}_{=0} = l(v)$$

asumimos que existe $C > 0$ tal que:

$$|l(v + s)| \leq \left(\|f\|_{0,\Omega} + C \|g\|_{0,\Gamma} \right) \cdot \|v + s\|_{1,\Omega}$$

tomando el infimo

$$|l(v + s)| \leq \left(\|f\|_{0,\Omega} + C \|g\|_{0,\Gamma} \right) \cdot \inf_{s \in R} \|v + s\|_{1,\Omega}$$

$$\Rightarrow l(v) \leq C^* \|v\|_{H^1(\Omega)/P_0}$$

Entonces por el teorema de Lax-Milgram y de i), ii) y iii) se tiene que existe solución única de la solución del problema (VN)*.

Observación. Supongamos que en el problema (VN)*

$f \in W^{m,p}(\Omega)$, $g \in W^{m+1-1/p,p}(\Gamma)$, donde $1 < p < \infty$.

Entonces $\hat{u} \in W^{m+2,p}(\Omega)/P_0$ y existe una constante $C > 0$, tal que

$$\|\hat{u}\|_{W^{m+2,p}(\Omega)/P_0} \leq C \{ \|f\|_{m,p,\Omega} + \|g\|_{m+1-1/p,p,\Gamma} \} \quad [16].$$

2.2.2 Problema discreto

Para la implementación computacional del Método de Elementos Finitos, MEF, en la resolución del problema variacional aproximado de

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)/P_0$$

se realiza lo siguiente:

Construcción del espacio de Elementos Finitos

Para construir el espacio finito de soluciones por el proceso del Método de Elementos Finitos, se considera una subdivisión de conjuntos abiertos $\{K_i\}$, sobre el dominio Ω , tales que:

a) $K_i \cap K_j = \emptyset$ si $i \neq j$

b) $\cup K_i = \bar{\Omega}$

Suponiendo que la subdivisión de Ω es una triangulación T_h tal que:

► $T_h = \{K_i\}$, formada por una colección de triángulos de frontera suave a trozos, de lados $a_K \leq b_K \leq c_K = h_K$, de área A_K perteneciente al intervalo $I = [\frac{1}{4}h_K^2 \text{sen}\theta_k, \sqrt{\frac{3}{4}}h_K^2]$, siendo, h_K la longitud del lado mayor y θ_k el ángulo más pequeño de cada triángulo, tal que $\min_K \theta_k = \alpha \in (0, 1)$

► Los nodos locales N_i , para $i = 1, 2, 3$, son los vértices de K_i , cuyas coordenadas cartesianas están dadas por el par (a_1^i, a_2^i) .

Cada elemento de la subdivisión está conformado de un conjunto finito-P1 de polinomios lineales, conocidas como funciones de forma sobre K , y de variables nodales $N = \{N_1, N_2, N_3\}$, que forman la base para el espacio dual de P1.

Entonces la terna (K, P_1, N) se denomina un Elemento Finito, el mismo que sirve para la construcción de un subespacio $V_h \subset V$, de dimensión finita, donde V es un espacio de Hilbert.

Sea $V_h = \{\varphi \in C^0(\bar{\Omega}) : \varphi|_K \in P_1\}$

donde el espacio P1 está dado por:

$$P_1 = \{\varphi : \varphi(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y, \forall x, y \in K, c_1, c_2, c_3 \in R\},$$

es un conjunto de funciones lineales y continuas a trozos. Por ejemplo, una base para este espacio es $\{1, x, y\}$ y la dimensión es $\dim[P_1(K)] = 3$.

$\varphi(N_i) = \varphi_i$ para $i = 1, 2, 3$ es el valor de la función φ en cada nodo del elemento y genera el número de grados de libertad para el vector solución.

La búsqueda del valor de las constantes c_1 , c_2 y c_3 conducen a la resolución de un sistema de ecuaciones de orden 3. Reemplazando las coordenadas de cada nodo $\varphi(a_1^i, a_2^i) = \varphi_i = c_1 + c_2(a_1^i) + c_3(a_2^i)$ para $i = 1, 2, 3$; formándose el sistema de ecuaciones para las variables c_1 , c_2 y c_3

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & 1 \\ a_1^3 & a_2^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

Aplicando la Regla de Cramer, este sistema tiene solución única si el determinante

$$\det B = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & 1 \\ a_1^3 & a_2^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1^1 \cdot a_2^2 - a_1^2 \cdot a_2^1) + (a_1^2 \cdot a_2^3 - a_1^3 \cdot a_2^2) + (a_1^3 \cdot a_2^1 - a_1^1 \cdot a_2^3) \neq 0$$

siendo

$$\frac{1}{2} \det B = \text{área}(K)$$

entonces se buscan las funciones $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ de interpolación, tales que satisfacen $\chi_i(N_j) = \delta_{ij}$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

y $\sum_{i=1}^3 \chi_i(N_j) = 1$

Si φ_h satisface el problema (P_h) , en particular podemos tomar $\psi = \chi_j$ y se puede ver que φ_h también satisface el siguiente problema $(P_h)'$:

$$(P_h)' \begin{cases} \text{Hallar } \varphi_h \in V_h \\ a(\varphi_h, \chi_j) = l(\chi_j) \quad j = 1, \dots \end{cases}$$

donde:

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^3 \varphi_i c_i, \text{ es la solución aproximada en cada elemento de } \Omega_h.$$

Reemplazando φ_h en la ecuación de $(P_h)'$, se puede escribir como:

$\sum_{i=1}^M a(\chi_i, \chi_j) \varphi_i = l(\chi_j)$, siendo M el número de nodos. Esta relación de igualdad determina un sistema lineal de ecuaciones algebraicas de la forma

$$A\xi = b$$

donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes del sistema, $b = (b_i)$ es el vector fuente

y $\xi = (\varphi_i)$ es el vector de las variables, para $i = 1, \dots, M$. Siendo M el índice de los nodos globales de la triangulación T_h .

$$a_{ij} = \sum_{K \in T_h} a^K(\chi_i, \chi_j) = \sum_{K \in T_h} \int \{\nabla \chi_i \cdot \nabla \chi_j\} dx$$

$$b_i = \sum_{K \in T_h} b_i^K = \sum_{K \in T_h} \int (f \cdot \chi_i) dx + \int_{K \cap \Gamma} (g \cdot \chi_i) ds$$

Integrando numéricamente sobre cada triángulo se obtiene la matriz de coeficientes A .

Si la forma bilineal es simétrica y coerciva conduce a una matriz de coeficientes simétrica, definida positiva y no singular. Esta condición asegura la existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones algebraicas.

Luego el sistema de ecuaciones para $(P_h)'$, tiene solución única y se obtiene al resolver $A\xi = b$.

En la práctica el sistema no se resuelve directamente con esta matriz de coeficientes A , pues no sería económico por que es muy grande y dispersa con muchos elementos cero.

Por tanto se realiza previamente una factorización y luego un almacenamiento en forma de perfil o de banda, dependiendo de los coeficientes no nulos de las filas en la matriz A , para así aplicar un método directo de solución

2.2.3 INTERPRETACION GEOMETRICA Y ESTIMACION DE ERROR DE LA SOLUCION APROXIMADA

Sea $V_h \subset V$ el espacio de soluciones finitas, entonces φ_h es la proyección ortogonal (con el producto escalar de V), de la solución exacta φ sobre V_h ; es decir, que $\varphi_h \in V_h$ es la solución más próxima a φ con la norma $\|\cdot\|_V$

Estimación de error 2.2.C1

Se elige un $\psi = \varphi_h$ en el problema (P_h) , por la coercividad de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y de la continuidad de la forma lineal $l(\cdot)$, existen las constantes $\alpha, C > 0$ tales que:

$$\alpha \|\varphi_h\|_V^2 \leq a(\varphi_h, \varphi_h) = l(\varphi_h) \leq C \|\varphi_h\|_V$$

donde $\|\varphi_h\|_V \neq 0$, entonces dividiendo por este término, se obtiene:

$$\|\varphi_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha}$$

Teorema 2.2.C2

Dados el problema continuo (A) y el problema discreto (B)

$$(A) \begin{cases} a(\varphi, \psi) = l(\psi) \\ \forall \psi \in V \end{cases} \quad (B) \begin{cases} a(\varphi_h, \psi) = l(\psi) \\ \forall \psi \in V_h \end{cases}$$

Si $\varphi \in V$ es la solución de (A) y $\varphi_h \in V_h$ es la solución de (B), donde $V_h \subset V$.
Entonces

$$\|\varphi - \varphi_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|\varphi - \psi\|_V \quad \forall \psi \in V_h.$$

Demostración

Como $V_h \subset V$, tomemos en particular

$$a(\varphi, w) = l(w) \quad \forall w \in V_h, \text{ de la sustracción}$$

$$a(\varphi - \varphi_h, w) = 0 \quad \forall w \in V_h$$

Para $\psi \in V_h$ arbitrario, definimos $w = \varphi_h - \psi \Rightarrow w \in V_h$,

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \varphi_h - w}$$

De la coercividad y continuidad de la forma bilineal $a(.,.)$ existen las constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que:

$$\alpha \|\varphi - \varphi_h\|_V^2 \leq \beta \|\varphi - \varphi_h\|_V \|\varphi - \psi\|_V,$$

dividiendo por $\|\varphi - \varphi_h\|_V \neq 0$ en ambos lados de la desigualdad, se tiene que,

$$\|\varphi - \varphi_h\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha} \|\varphi - \psi\|_V, \quad \forall \psi \in V_h. \quad \square$$

La estimación que se muestra en el teorema 2.2.C2, es una estimación cualitativa.

Para obtener una estimación cuantitativa se elige una función apropiada $\psi \in V_h$ y luego estimamos $\|\varphi - \psi\|_V$. Generalmente se elige una función de la forma $\psi = \pi_h \varphi$, donde $\pi_h \varphi \in V_h$ puede ser la función interpolante lineal a trozos $\varphi_h^*(N_i) = \pi_h \varphi$, donde N_i es un nodo de la malla para $i = 1, \dots, nv$.

Se puede estimar el error $\varphi - \pi_h \varphi$ sobre cada triángulo K . Veremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.C3

Sea $K \in \Upsilon_h$ un triángulo con vértices $N_i, i = 1, 2, 3$. Dado $\psi \in V_h$, la interpolante $\pi\psi \in P_1(K)$ definido por $\pi\psi = \psi(N_i), i = 1, 2, 3$. Entonces existe una constante C tal que:

$$\|\psi - \pi\psi\|_{L^2(K)} \leq C.h^2 |\psi|_{H^1(K)},$$

donde:

h_K = es la longitud del mayor lado de K

$$h = \max_{K \in \Upsilon_h} h_K \text{ [5].}$$

2.3. CAMPOS VECTORIALES EN $[L^2(\Omega)]^n$

En esta sección se describen algunos subespacios de $[L^2(\Omega)]^n$ para luego definir la descomposición vectorial de sus elementos, para ello introducimos los siguientes resultados:

Sea $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in [D'(\Omega)]^n$, definimos el operador divergencia $div : [D'(\Omega)]^n \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que: para $v \in [D'(\Omega)]^n$, se tiene que:

$$div.v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

Notar que: Para $\Omega \subset R^n$ acotado, de frontera regular Γ ,

Si $\varphi \in L^2(\Omega)$, $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right) \in [L^2(\Omega)]^n$, para $i = 1, 2, \dots, n$

entonces

$$div(\nabla\varphi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} = \Delta\varphi$$

Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ (inyección continua), entonces el espacio $[L^2(\Omega)]^n$ es un subespacio de $[D'(\Omega)]^n$ [17]. Entonces es posible introducir la siguiente definición.

Definición 2.3.1

Definimos el espacio Divergencia como el conjunto expresado por

$$H(div; \Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^n; div.v \in L^2(\Omega); i = 1, \dots, n\}$$

el cual está dotado de la norma:

$$\|v\|_{H(div; \Omega)} = \{\|v\|_{0, \Omega}^2 + \|div.v\|_{0, \Omega}^2\}^{1/2}.$$

Proposición 2.3.2

El espacio $H(div; \Omega)$ con la norma $\|v\|_{H(div; \Omega)}$ es un espacio de Banach [7].

Proposición 2.3.3

El espacio $\overline{H(div; \Omega)}$, es un subespacio convexo y cerrado en $[L^2(\Omega)]^n$ [7].

Dado que $H(div; \Omega) = [L^2(\Omega)]^n$ es un espacio de Banach para la norma $\|v\|_{H(div; \Omega)}$, existe una sucesión $(v_m) \subset H(div; \Omega)$ de cauchy la cual converge a

$v \in [L^2(\Omega)]^n$ con la norma $\|v\|_{H(\text{div};\Omega)}$ [9]. Por tanto $H(\text{div};\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 2.3.4

$D'(\bar{\Omega})]^n$ es denso en $H(\text{div};\Omega)$

Entonces, se puede ver que $[H^1(\Omega)]^n \subset H(\text{div};\Omega) \subset [L^2(\Omega)]^n$ [9].

Consideremos los siguientes resultados:

Proposición 2.3.5

La aplicación $\gamma_n : [D(\bar{\Omega})]^n \rightarrow L^2(\Gamma)$; definida como la traza normal

$$(\gamma_n v) = v \cdot n \quad a.e. \Gamma$$

puede ser extendida por continuidad a una aplicación lineal y continua denotada por:

$$\gamma_n : H(\text{div};\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

Demostación

Sea $\varphi \in D(\bar{\Omega})$ y $v \in [D(\bar{\Omega})]^n$, por la fórmula de Green se tiene:

$$(v, \nabla \varphi) + (\text{div}.v, \varphi) = \int_{\Gamma} (\varphi v \cdot n) ds$$

Como $D(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ entonces esta igualdad es válida también para $\varphi \in H^1(\Omega)$ y $v \in [D(\bar{\Omega})]^n$.

γ_n es lineal y continua con la norma de $H(\text{div};\Omega)$ y como $[D(\bar{\Omega})]^n$ es denso en $H(\text{div};\Omega)$ entonces por el Teorema 2.3.4, con la norma de $H(\text{div};\Omega)$ y la norma de $H^1(\Omega)$, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_{\Gamma} (\varphi v \cdot n) ds \right| \leq \|v\|_{H(\text{div};\Omega)} \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \forall v \in [D(\bar{\Omega})]^n \quad (*)$$

Sea $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$, entonces existe un elemento $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\varphi = \mu$ restringido a Γ . A su vez, por la desigualdad anterior (*) implica:

$$\left| \int_{\Gamma} (\mu v \cdot \mathbf{n}) ds \right| \leq \|v\|_{H(\text{div}; \Omega)} \|\mu\|_{1/2, \Gamma} \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma), \forall v \in [D(\tilde{\Omega})]^n.$$

Por tanto $\gamma_{\mathbf{n}}$ se extiende de manera única a una aplicación lineal y continua denotada como $\gamma_{\mathbf{n}}$, tal que

$$\|\gamma_{\mathbf{n}}\|_{-1/2, \Gamma} = \|v \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2, \Gamma} \leq \|v\|_{H(\text{div}; \Omega)} \quad \forall v \in H(\text{div}; \Omega)$$

Si $\gamma_{\mathbf{n}} \in \mathcal{L}(H(\text{div}; \Omega), H^{-1/2}(\Gamma))$ entonces

$$\|\gamma_{\mathbf{n}}\|_{\mathcal{L}(H(\text{div}; \Omega), H^{-1/2}(\Gamma))} \leq 1. \quad \square$$

Por extensión $\gamma_{\mathbf{n}} v = v \cdot \mathbf{n}$ es llamada componente normal de v sobre Γ .

Del teorema 2.3.4 y de la proposición 2.3.5 se deduce la siguiente fórmula:

$$(\text{div} \cdot v, \varphi) = (v, \nabla \varphi) + \langle v \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\Gamma}$$

$$\forall v \in H(\text{div}; \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En consecuencia de lo anterior, se puede extender la derivada normal para el operador laplaciano, obteniéndose la siguiente fórmula:

$$(\nabla \varphi, \nabla \psi) = -(\Delta \varphi, \psi) + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}, \psi \right\rangle_{\Gamma} \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

Siendo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\Delta \varphi \in L^2(\Omega)$ y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

Nota

En adelante, se denotará por $v \cdot \mathbf{n}$ en vez de $\gamma_{\mathbf{n}}(v)$.

Proposición 2.3.6

Rango($\gamma_{\mathbf{n}}$) = $H^{-1/2}(\Gamma)$, y

$$\|\gamma_{\mathbf{n}}\|_{\mathcal{L}(H(\text{div}; \Omega), H^{-1/2}(\Gamma))} = 1$$

Demostración:

Sea $\mu^* \in H^{-1/2}(\Gamma)$ se debe demostrar que para $v \in H(\text{div}; \Omega)$ y $v \cdot \mathbf{n} = \mu$ sobre Γ , entonces $\|v \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2, \Gamma} \geq \|v\|_{H(\text{div}; \Omega)}$.

Para ello se considera el siguiente problema:

$$(N_\varphi) \begin{cases} \text{Hallar } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ -\Delta\varphi + \varphi = 0 \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mu \text{ sobre } \Gamma \end{cases}$$

Como se observó anteriormente, si $\mu \neq 0$, (N_φ) es un problema de Neumann no homogéneo y tiene solución única $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Si $v = \nabla\varphi$. Entonces $v \in H(\text{div}; \Omega)$ y $v \cdot n = \mu$

Además $\|\varphi\|_{1,\Omega}^2 = \langle \mu, \varphi \rangle_\Gamma \leq \|\mu\|_{-1/2,\Gamma} \|\varphi\|_{1,\Omega}$.

Como $\text{div} \cdot v = \Delta\varphi$, se tiene que:

$$\|v\|_{H(\text{div};\Omega)} \leq \|\mu\|_{-1/2,\Gamma} = \|v \cdot n\|_{-1/2,\Gamma}. \quad \square$$

Proposición 2.3.7

$$\text{Ker}(\gamma_n) = H_0(\text{div}; \Omega) = \{u \in H(\text{div}; \Omega); u \cdot n|_\Gamma = 0\}$$

Demostración

Para demostrar $\text{Ker}(\gamma_n) \subset H_0(\text{div}; \Omega)$, $[D(\Omega)]^n$ es denso en $\text{Ker}(\gamma_n)$, luego aplicamos la propiedad de densidad usada en el teorema 2.3.1, se demuestra que $H_0(\text{div}; \Omega) \subset \text{Ker}(\gamma_n)$ como una consecuencia inmediata de la fórmula dada en la proposición 2.3.5 y de ambas inclusiones, se tiene la igualdad. \square

Definición 2.3.8

Considerando que $H_0(\text{div}; \Omega) = \overline{[D(\Omega)]^n}^{H(\text{div};\Omega)}$, se define el conjunto:

$$H = \{u \in H_0(\text{div}; \Omega); \text{div}(u) = 0\}$$

H es un subespacio cerrado de $[L^2(\Omega)]^n$.

Si Ω es un subconjunto conexo en R^n se define el ortogonal de H por el conjunto:

$$H^\perp = \{\nabla\varphi; \varphi \in H^1(\Omega)\}$$

Observación

En vista del teorema 2.3.4, resulta que H^\perp es un subespacio cerrado de $[L^2(\Omega)]^n$. Si $u \in H$ resulta de la fórmula de la proposición 2.3.5:

$$(u, \nabla\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

2.3.9 Espacio rotacional $H(\text{rot}; \Omega)$

Sea Ω una región acotada en R^n , para $n = 2, 3$. Se define el operador rotacional en el sentido de las distribuciones $\varphi \in D'(\Omega)$ y $v \in [D'(\Omega)]^2$ por:

$$rot.\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right),$$

$$rot.v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

Notar que el rotacional de un campo vectorial bidimensional es una función escalar.

Cuando $n = 3$, se define el rotacional de la distribución $v \in [D'(\Omega)]^3$ por

$$rot.v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

y satisface las siguientes identidades:

$$rot(rot.\varphi) = -\Delta \varphi \quad n = 2$$

$$rot(rot.v) = -\Delta v + \nabla(div.v) \quad n = 2, 3.$$

El espacio rotacional se define por:

$$H(rot; \Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^n; rot.v \in [L^2(\Omega)]^n\}$$

el cual está dotado de la norma:

$$\|v\|_{H(rot;\Omega)} = \{\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|rot.v\|_{0,\Omega}^2\}^{1/2},$$

con la que constituye un espacio de Banach [9].

definimos también el conjunto:

$$H_0(rot; \Omega) = \overline{(D(\Omega))^n}^{H(rot;\Omega)}$$

2.4 EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL POTENCIAL ESCALAR DE UN CAMPO VECTORIAL

A continuación se describe los resultados fundamentales que garantizan la existencia y unicidad de la función escalar potencial de un campo vectorial.

Teorema 2.4.1

Sean $\Omega \subset R^n$ una región de frontera regular y $u \in [L^2(\Omega)]^n$, un campo vectorial que satisface la siguiente ecuación:

$$rot.u = 0 \text{ en } \Omega$$

entonces, existe una única función $\varphi \in H^1(\Omega)$, tal que:

$$u = \nabla\varphi$$

La demostración de este teorema se da en [9].

Según este teorema se puede dar otra caracterización al subespacio:

$$H^\perp = \{v \in [L^2(\Omega)]^n, rot.v = 0\} = Ker(rot)$$

y como consecuencia se tiene que $\forall u \in H$, si $rot.u = 0 \Rightarrow u = 0$.

Por lo dicho anteriormente, es posible la descomposición del espacio $[L^2(\Omega)]^n$ como la suma directa de los subespacios H y H^\perp . Es decir:

$$[L^2(\Omega)]^n = H \oplus H^\perp$$

y la definición de sus elementos lo demuestra el siguiente teorema.

2.4.2 Teorema de la Descomposición en $[L^2(\Omega)]^2$

Sea $v \in [L^2(\Omega)]^2 = H \oplus H^\perp$. Entonces v tiene la siguiente descomposición:

$$2.4.a) \quad v = \nabla\varphi + rot.\psi$$

donde $\varphi \in H^1(\Omega)$, es la solución única del problema variacional:

$$2.4.b) \quad \begin{cases} (\nabla\varphi, \nabla\mu) = (v, \nabla\mu) \\ \forall \mu \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

y $\psi \in \Psi$ es la única solución del problema

$$2.4.c) \quad \begin{cases} (rot.\psi, rot.\omega) = (v - \nabla\varphi, rot.\omega) \\ \forall \omega \in \Psi \end{cases}$$

Donde $\Psi = \{\omega \in H^1(\Omega); \omega|_{\Gamma} = 0\}$,

Demostración

Para $v \in [L^2(\Omega)]^2$, el problema 2.4.b) tiene una solución única $\varphi \in H^1(\Omega)/P_0$. Esta solución satisface $\Delta\varphi = div(v)$ en $H^{-1}(\Omega)$.

Como $(v - \nabla\varphi) \in H(div; \Omega)$; de la fórmula de Green aplicada a 2.3.b) se obtiene:

$0 = (v - \nabla\varphi, \nabla\mu) = \langle (v - \nabla\varphi) \cdot \mathbf{n}, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^1(\Omega)$
 $\Rightarrow (v - \nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} = 0$ en $H^{-1/2}(\Gamma)$. Es decir que $(v - \nabla\varphi) \in H$
 Por tanto existe una función $\psi \in \Psi$ que verifica las fórmulas 2.3.a) y 2.3.c).

□

Observación

2.4.i) Cuando $u \in H(\text{div}; \Omega)$, el problema 2.3.b) tiene la siguiente interpretación

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \text{div}(u) \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \eta_2 = u \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma \end{cases}$$

Si u pertenece unicamente a $[L^2(\Omega)]^2$ y φ es irrotacional, entonces se cumple la propiedad

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \text{div}(u) \\ u &= \nabla\varphi. \end{aligned}$$

2.4.ii) Sea $\Omega \subset R^2$ abierto, acotado y de frontera regular. Dados los conjuntos
 $U = H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$
 $W = H(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Si $v \in U$, entonces v puede ser expresado como:

$$v = \nabla\varphi + \text{rot}.\psi$$

donde φ es solución única del problema

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \text{div}.v \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{cases}$$

y ψ es la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \text{rot}.v \text{ en } \Omega \\ \psi = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{cases}$$

2.5 VALOR DE UN CAMPO VECTORIAL EN EL BORDE DE Ω

Sea el vector $w = (-v_2, v_1) \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que $v = (v_1, v_2) \in H(\text{rot}; \Omega)$ y $\tau = (-\eta_2, \eta_1)$ es un vector tangente unitario a Γ , talque:

$$w \cdot \mathbf{n} = -v \cdot \tau$$

donde $\mathbf{n} = (\eta_1, \eta_2)$ representa el vector normal exterior a Γ .

Definición 2.5.1

Se define la traza de un campo vectorial como la aplicación $\gamma_\tau : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continua, tal que $\gamma_\tau(v) = v \cdot \mathbf{n}$ viene a ser el valor de v en la frontera de Ω , donde $v \in H(\text{div}; \Omega)$.

Esta aplicación satisface las siguientes propiedades:

P1) $[D(\bar{\Omega})]^2$ es denso en $H(\text{rot}; \Omega)$

P2) La aplicación γ_τ restringido a Γ y definida sobre $[D(\bar{\Omega})]^2$ es una aplicación lineal y continua y puede ser extendida, desde el espacio $H(\text{rot}; \Omega)$ hacia el espacio $H^{-1/2}(\Gamma)$.

P3) El espacio $H_0(\text{rot}; \Omega) = \ker \gamma_\tau$

P4)-Se puede escribir la fórmula de Green en $H(\text{rot}; \Omega)$ como:

$$(v, \text{rot} \cdot \varphi) - (\text{rot} \cdot v, \varphi) = - \langle v \cdot \tau, \gamma_0 \varphi \rangle_\Gamma \quad \forall v \in H(\text{rot}; \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Proposición 2.5.2

Dada la función $g \in [H^{1/2}(\Gamma)]^n$, tal que

$$\int_\Gamma g \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

Entonces, existe una función u en $[H^1(\Omega)]^n$ [9], tal que:

$$\text{div} \cdot u = 0 \text{ en } \Omega$$

$$u = g \text{ sobre } \Gamma$$

Proposición 2.5.3

Una condición necesaria y suficiente para que una función $v \in [H^1(\Omega)]^2$, es que verifique las siguientes condiciones:

$$\text{div}(v) = 0 \text{ en } \Omega,$$

$$\int_\Gamma v \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

$\Rightarrow \exists! \psi \in H^2(\Omega)$ tal que:

$$v = \text{rot} \cdot \psi$$

cuyas componentes de v son $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ y $-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ respectivamente

$$v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}},$$

$$v \cdot \tau = - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}, \tau = (-\eta_2, \eta_1).$$

Observación

Se puede ver que de lo anteriormente visto se deduce:

- 1) $[H^1(\Omega)]^2 \subset H(\text{div}; \Omega) \subset [L^2(\Omega)]^2$
- 2) Las funciones $\text{rot.}(\psi)$ y $\nabla\varphi$ son ortogonales en $[L^2(\Omega)]^2$.
- 3) $v = \nabla\varphi \iff \text{rot.}(v) = 0$
- 4) $v = \text{rot.}(\psi) \iff \text{div}(v) = 0$
- 5) Si $u \in H(\text{div}; \Omega) \Rightarrow \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = u \cdot \mathbf{n} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$

CAPITULO 3
ADAPTABILIDAD DE UN MALLADO

En el presente capítulo se plantea y desarrolla el método de adaptabilidad de mallados, materia del presente trabajo, el cual está asociado a un determinado estimador de error, fijando el número de grados de libertad y las conectividades de la malla inicial.

El principio de éste método consiste en considerar los nodos del mallado inicial, como el comportamiento de las partículas de un fluido irrotacional y compresible. Se plantea que la compresibilidad local es proporcional a la desviación del error sobre su media.

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE ADAPTACION

Sea Ω un dominio abierto y acotado de R^n sobre el que se plantea la resolución aproximada de un cierto problema de contorno lineal o no lineal.

Supongamos que se dispone de un mallado M_x de Ω con elementos finitos, en el cual se resuelve un problema de contorno.

También se dispone de la estimación local del error cometido en la aproximación del problema dado sobre M_x . Esta estimación del error estará dado por la función $w(x)$, tal que:

$$\begin{aligned} w : \bar{\Omega} &\longrightarrow R^+ \\ x &\longrightarrow w(x) \end{aligned}$$

w es una función definida sobre la malla M_x , bien en los elementos o en los nodos del mallado y $w \in L^2(\Omega)$.

El problema consiste en hallar un mallado M_y de Ω adaptado al estimador de error $w(x)$, tal que cumpla las siguientes condiciones:

(C₁) M_y conserve el número de nodos y elementos de M_x , así como las conectividades entre nodos y elementos.

(C₂) M_y sea un mallado admisible de Ω , que significa la no penetración de unos elementos en otros y la no degeneración.

(C₃) Sobre el mallado M_y se obtenga una mejor distribución de la función w .

3.2 TECNICA DE RESOLUCION

Para $n = 2$, Ω abierto y acotado en R^2 , se considera el mallado M_x cuyas coordenadas de cada nodo son $\{x_j = (x_1, x_2)\}$, $j = 1, \dots, N$, una función $w(x)$ que representa la estimación local de error en M_x . Se desea obtener un mallado que se adapte a $w(x)$ el mismo que se denotará por M_y .

Se considera que cada uno de los N -nodos del mallado M_x , de coordenadas $\{x_j\}$, se asemejan al comportamiento de las partículas de un fluido irrotacional y localmente compresible, de modo que la localización de los N -nodos del mallado M_y , de coordenadas $\{y_j\}$, estarán dadas por las traslaciones siguientes:

$$y_j = x_j + \gamma u_j \quad j = 1, \dots, N \quad (3.2.1)$$

donde u_j designa la "velocidad" de desplazamiento de la partícula j . El parámetro homogéneo $\gamma > 0$ es el que dimensionalmente representa a un incremento de tiempo que tarda el nodo x_j para llegar al nuevo lugar nodo y_j con velocidad u_j .

Considerando en un medio continuo (3.2.1), se obtiene:

$$y = x + \gamma u \quad \forall x \in \bar{\Omega} \subset R^2, \gamma > 0 \quad (3.2.2)$$

La función $y : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, tal que $x \rightarrow y(x)$ la matriz Jacobiana de y , verifica la siguiente condición:

$$D[J(y)] = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ = 1 + \gamma \left(\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) + \\ \gamma^2 \left(\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) > 0$$

Es decir, que el determinante de $J[y]$ evaluado en todos los nodos del mallado M_x se reduce al polinomio cuadrático en γ , $D(\gamma, u_h(x))$, donde:

$$D(\gamma, u_h(x)) = 1 + \gamma \operatorname{div}(u_h(x)) + \gamma^2 \det(\tilde{\nabla} u_h(x)) > 0 \quad \forall x \in \tilde{\Omega}_h \quad (3.2.3)$$

y cuyos coeficientes del polinomio se denotarán por

$$q(x) = \operatorname{div}(u_h(x)) \text{ y } p(x) = \det(\tilde{\nabla} u_h(x)).$$

La existencia de las raíces reales de este polinomio, asegurará el cumplimiento de la condición (C₂).

Entonces el problema consiste en determinar el campo de velocidades admisibles $u \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ asociado a las "partículas del fluido" sobre la malla M_x de Ω .

Considerando la irrotacionalidad del fluido, el campo vectorial u , entonces:

$$\operatorname{rot}.u = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.2.4)$$

Esta hipótesis, se formula tanto con el objetivo de no distorsionar excesivamente la malla original (eliminando posibles rotaciones de la misma), como con la intención de usar el teorema (2.3.B1). Este resultado demuestra que si el campo vectorial de velocidad u tiene rotacional nulo, entonces existe una función escalar del potencial de flujo φ tal que:

$$u = \nabla \varphi \quad (3.2.5)$$

Con el propósito de verificar la condición (C₃) del enunciado del problema, se asume que el fluido es localmente compresible, con una compresibilidad local proporcional a la desviación del error sobre su media. De ésta hipótesis se deduce el siguiente problema:

Hallar $u \in H(\operatorname{div}; \Omega)$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(u(x)) = f(x) \text{ en } \Omega \\ u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{cases} \quad (3.2.6.a)$$

De la ecuación (3.2.5) y asumiendo que $f \in L^2(\Omega)$, entonces reemplazando en la ecuación (3.2.6a), es posible encontrar una función φ , tal que:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nabla \varphi) &= -\Delta \varphi \\ \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

lo cual conduce a la formulación del problema de Neumann homogéneo:

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} &= 0 \text{ sobre } \Gamma \end{aligned} \quad (3.2.6.b)$$

donde:

$$f(x) = w(x) - \hat{w} \quad (3.2.7)$$

$$\hat{w} = \frac{1}{\text{med}(\Omega)} \int_{\Omega} w(x) dx \quad (3.2.8)$$

\mathbf{n} es la normal unitaria exterior a Ω en su frontera Γ . La condición sobre su frontera asegurará que los nodos de la malla M_x que se encuentran sobre la frontera Γ , permanecerán también en la frontera de la malla M_y .

Como podemos observar en el problema (3.2.6), si se quiere encontrar la solución en un espacio funcional dotado de cierta regularidad (C^1 , C^2 , etc.), no se conoce ningún resultado general del Análisis Funcional que proporcione la existencia y unicidad de solución del problema clásico. Pero se dispone de un teorema conocido como el teorema de Lax-Milgram, que asegura la existencia y unicidad de solución para el problema variacional. Por ello surge la necesidad de una formulación que cumpla las hipótesis de este teorema.

Considerando los resultados vistos en el capítulo 2 se dará la siguiente formulación variacional del problema planteado.

3.2.1 Formulación variacional

Considerando que el estimador de error $w \in L^2(\Omega)$, entonces se ha de buscar el vector velocidad u en el espacio $H(\text{div}, \Omega)$

Mediante el teorema de descomposición de $[L^2(\Omega)]^2$ así como de (3.2.4), (3.2.6), (3.2.7) y (3.2.8), se deduce la existencia de un único potencial escalar $\varphi \in H^1(\Omega)$ que verifica el problema variacional siguiente:

$$a(\varphi, \psi) = l(\psi) \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad (3.2.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} a(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \psi dx \\ l(\psi) &= \int_{\Omega} f \psi dx \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Dado que de (3.2.7) y (3.2.8)

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} [w(x) - \hat{w}] dx = \int_{\Omega} w(x) dx - \hat{w} \int_{\Omega} dx = \int_{\Omega} w(x) dx - \int_{\Omega} w(x) dx = 0$$

se obtiene la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0 \quad (3.2.11)$$

con este resultado sobre Ω , indica que, el fluido es globalmente incomprensible.

Por tanto el problema (3.2.6.b) con la formulación variacional (3.2.9) y (3.2.10) admite solución sobre el espacio:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \{ \psi \in H^1(\Omega) \text{ tal que: } \int_{\Omega} \chi(x) \psi(x) dx = 0 \} \\ \text{donde } \chi &\in L^2(\Omega) \text{ es de media no nula en } \Omega, \chi \neq 0 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

En estas condiciones, para la resolución del problema original, es posible plantear el siguiente problema continuo (P.C.):

(P.C.):

Dado $\theta \in (0, 1)$ y $w \in L^2(\Omega)$, hallar

$y_{(\theta)} \in H(\text{div}, \Omega)$ solución de:

$$y = x + \gamma(\theta)u \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (3.2.13)$$

donde:

(i) $u \in H(\text{div}; \Omega)$ viene dada por:

$$u = P_{H(\text{div}, \Omega)}(\nabla \varphi) \quad (3.2.14)$$

siendo $\varphi \in V(\Omega)$ la solución única del problema variacional lineal:

$$a(\varphi, \psi) = l(\psi) \quad \forall \psi \in V(\Omega) \quad (3.2.15)$$

(ii) $\gamma(\theta) \in R_+$ viene dada por:

$$\gamma(\theta) = \inf_{\delta \in R_+} G(\theta) \quad (3.2.16)$$

siendo:

$$G(\theta) = \{ \delta \in R_+ \text{ talque } D(\delta, u_h(x)) = \theta \quad \forall x \in \bar{\Omega}_h \} \quad (3.2.17)$$

Observaciones

1). El operador $P_{H(\text{div}, \Omega)}(\nabla \varphi)$ es el operador de proyección de $[L^2(\Omega)]^2$, sobre $H(\text{div}, \Omega)$. Este operador está bien definido al ser $H(\text{div}, \Omega)$ un subespacio cerrado y convexo en $[L^2(\Omega)]^2$ [9].

Mediante este operador se obtiene la solución u_h en cada nodo, mientras que con el operador $\text{div}u$ se obtendrá el valor de u_h en cada elemento.

2). Se puede ver que para $\theta \in (0, 1)$, el conjunto $G(\theta)$ definido en (3.2.17) es no vacío. En efecto, este conjunto es acotado dado que u_h pertenece a un espacio de dimensión finita, por tanto tiene un máximo y un mínimo; además la ecuación cuadrática para δ , obtenida a partir de la ecuación discreta $D(\delta, u_h(x)) = \theta$, tiene soluciones reales.

3). Como consecuencia de las observaciones 1) y 2), se deduce que el problema (PC) admite una única solución para todo $\theta \in (0, 1)$.

4). El parámetro $\theta \in (0, 1)$, tiene un significado geométrico; es decir, representa el área mínima de los elementos del mallado M_y .

3.2.2 Formulación abstracta del método de elementos finitos

La resolución aproximada del problema (PC) mediante el método de elementos finitos conformes se aborda de la siguiente manera:

El conjunto $G_h(\theta)$ (equivalente discreto del conjunto $G(\theta)$) se construye en dimensión finita, mediante la resolución de una ecuación definida en (3.2.17), sobre cada elemento de la malla M_x .

Para la construcción del operador de proyección discreto asociado a (3.2.14) se obtiene sin dificultad, ya que con el método de elementos finitos P_1 de Lagrange basta con resolver el siguiente problema variacional lineal:

Hallar $u \in H(\text{div}, \Omega) \subset [L^2(\Omega)]^2$ solución de la ecuación $(u, v)_{[L^2(\Omega)]^2} = (P_u \nabla \varphi, v)_{[L^2(\Omega)]^2}$, es equivalente a obtenerla de la ecuación variacional :

$$\int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot v \, dx \quad \forall v \in H(\text{div}, \Omega) \tag{3.2.18}$$

la que a nivel discreto, mediante un promediado de la función $\nabla \varphi$ sobre los nodos de la malla es:

$$u_i = \frac{\int_{\Omega} \nabla(\varphi) \chi_i \, dx}{\int_{\Omega} \chi_i \, dx} = \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}(i)} (\nabla \varphi)_T \cdot \text{med}(T)}{\sum_{T \in \mathcal{T}(i)} \text{med}(T)} \tag{3.2.19}$$

donde $\mathcal{T}(i)$ es el conjunto de elementos $T \in M_x$ que rodean al nodo i y χ_i es una función de la base de P_1 de Lagrange del espacio $H_h^1(\Omega)$ (Aproximación en dimensión finita de $H^1(\Omega)$) asociado al nodo i ($i = 1, \dots, N$).

A esta etapa le sigue una etapa de interpolación dada por:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \chi_i(x) \tag{3.2.20}$$

En la práctica, en vez de resolver el problema lineal (3.2.15), puede optarse por resolverse una versión penalizada que consiste en elegir un parámetro $0 < \varepsilon \leq 1$ y se tiene el siguiente problema: Hallar $\varphi_{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$ solución de:

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi \cdot \psi \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \psi \, dx \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \tag{3.2.21}$$

$$= a(\varphi, \psi) + \varepsilon(\varphi, \psi) = (f, \psi)$$

La existencia de solución queda garantizada con la condición de compatibilidad $\int_{\Omega} f dx = 0$

La ventaja de trabajar con (3.2.21) en vez de (3.2.15) es la de no tener que modificar las funciones de forma del espacio aproximador $H_h^1(\Omega)$. La solución única de (3.2.21) es de medida nula en Ω , es decir se deduce que

$$\int_{\Omega} (\varphi_{\varepsilon}) dx = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} f dx \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (3.2.22)$$

El problema (3.2.21), su forma variacional aproximada cumple las condiciones del teorema de existencia y unicidad de Lax Milgram, en efecto: $V_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, es un subespacio de $H^1(\Omega)$. Entonces si se considera $\varphi_h \in V_h(\Omega)$, $\varphi_{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$, donde $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Entonces $V_h(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, definida por el producto escalar sobre $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ es continua y acotada, y la forma lineal $l(\cdot)$ continua y acotada sobre el dual de $H^1(\Omega)$.

De la Proposición 2.2.A6) la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ dada por

$$\begin{aligned} a(\psi, \psi) &= \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \psi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \psi \cdot \psi dx \\ &= |\psi|_{1,\Omega}^2 + \varepsilon \cdot \|\psi\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Sobre $H^1(\Omega)$, el dominio Ω es un abierto acotado, entonces por el teorema de la desigualdad de Poincaré, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^2 dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \\ \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \int_{\Omega} \psi^2 dx &\geq C^{-1} \min(1, \varepsilon) \{ |\psi|_{1,\Omega}^2 + \|\psi\|_{0,\Omega}^2 \} \\ &\geq 1/2 C^{-1} \min(1, \varepsilon) \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \\ \Rightarrow a(\psi, \psi) &\geq \alpha \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Con este resultado se verifica que la forma bilineal es coerciva.

Por lo que puede verse, del resultado en 3.2.22 y la coercividad de la forma bilineal, el problema aproximado penalizado tiene solución única.

3.3 IMPLEMENTACION NUMERICA

Las etapas para la construcción de la solución numérica mediante el método de elementos finitos son:

i) Formulación del problema variacional aproximado, es decir

$$a(\varphi_h, \psi) = l(\psi) \tag{3.3.1}$$

$$a(\varphi_h, \psi) = \int_K \nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi_h \cdot \psi dx, \forall \psi \in H_h^1(\Omega)$$

$$l(\psi) = \int_K f \cdot \psi dx \quad \forall \psi \in H_h^1(\Omega)$$

ii) Construcción del espacio de elementos finitos mediante las funciones de forma que constituye la discretización del problema variacional en el espacio aproximador.

iii) Búsqueda de las funciones de interpolación, que servirán de aproximación del problema discreto al problema continuo.

iv) Resolución del sistema algebraico de ecuaciones lineales generado.

v) Salida de Resultados

3.3.1 Discretización del problema Variacional

Sea Υ_h una triangulación en el interior de Ω

$\Upsilon_h = \{K_1, \dots, K_m\}$ de triángulos K_i , donde

$$\Omega = \bigcup_{K \in \Upsilon_h} K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$$

tal que $K_i \cap K_j = \emptyset$ o un vértice o una arista.

Introducimos el parámetro $h = \max(h_K)$; h_K , es la longitud del lado mayor del triángulo K .

Tomando como $V \subset H^1(\Omega)$, $V_h = \{\varphi_h \in C^0(\Omega), \varphi_h|_K \text{ continua a trozos, de medida nula}\}$ los subespacios de V , forman una familia de subespacios de dimensión finita, los que dependen del parámetro $h > 0$.

A cada subespacio $V_h \subset H^1(\Omega)$ se le asocia el problema aproximado

$$(P_h) \begin{cases} \text{Encontrar } \varphi_h \in V_h \\ a(\varphi_h, \psi) = (f, \psi) \quad \forall \psi \in V_h \end{cases}$$

Se ha visto que este problema aproximado tiene solución una única φ_h solución de (P_h) , por el teorema de Lax-Milgram y de la desigualdad de Poincaré. Se busca φ_h , suficientemente regular tal que la función φ_h satisface la condición de Neumann

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial \mathbf{n}} \text{ aproximadamente, es decir } \frac{\partial \varphi_h}{\partial \mathbf{n}} \rightarrow 0 \text{ sobre } \Gamma$$

En la práctica esta condición $\frac{\partial \varphi_h}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre la frontera, por lo que no aparece en la fórmula variacional discreta.

3.3.2 Observaciones para la programación

El programa principal está constituido por 6 subprogramas:

Subprograma 1

El dominio de cálculo Ω se ha considerado de forma rectangular $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$, con un mallado inicial T_h , con triángulos K_k . Los nodos de la malla vienen a ser los vértices N_i de los triángulos K_k que van desde $i = 1, nv$ y $k = 1, nt$, siendo nt el número de elementos y nv el número global de vértices.

La matriz de conectividad entre los nodos y elementos esta dada por:

$$\text{nov}(i, 1) = i + (j - 1)(N + 1)$$

$$\text{nov}(i, 2) = i + j(N + 1) + 1$$

$$\text{nov}(i, 3) = i + (j - 1)(N + 1) + 1$$

En detalle se presenta en el anexo 2.

Subprograma 2

Se pretende hallar el valor de φ_h en cada subespacio de dimensión finita V_h para obtener la base de funciones de forma lineal $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$.

Supongamos que, $\varphi_h(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y$, es una solución finita, entonces en cada nodo se obtiene:

$$\varphi_{1h} = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1,$$

$$\varphi_{2h} = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2,$$

$$\varphi_{3h} = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3$$

De este sistema se determina los parámetros c_j , para $j = 1, 2, 3$.

$$c_1 = \frac{1}{2A_K}(\varphi_{1h}(x_2y_3 - x_3y_2) + \varphi_{2h}(x_3y_1 - y_3x_1) + \varphi_{3h}(x_1y_2 - x_2y_1))$$

$$c_2 = \frac{1}{2A_K}(\varphi_{1h}(y_2 - y_3) + \varphi_{2h}(y_3 - y_1) + \varphi_{3h}(y_1 - y_2))$$

$$c_3 = \frac{1}{2A_K}(\varphi_{1h}(x_3 - x_2) + \varphi_{2h}(x_1 - x_3) + \varphi_{3h}(x_2 - x_1))$$

A partir de estos valores se obtienen las funciones de aproximación $\chi_i = \chi(x, y)$, que son polinomios de grado 1, llamadas funciones de forma o de interpolación lineal de Lagrange.

$$\chi_1(x, y) = \frac{1}{2A_K}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$\chi_2(x, y) = \frac{1}{2A_K}[(x_3y_1 - y_3x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$\chi_3(x, y) = \frac{1}{2A_K}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

donde A_K = área de cada triángulo K_k

Estas funciones satisfacen:

$\chi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, donde $N_j = (x_j, y_j)$ son las coordenadas de cada nodo.

$$\sum_{i=1}^3 \chi_i(N_j) = 1$$

Entonces (P_h) se puede escribir como el problema discreto:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \varphi_h \in V_h \\ a(\varphi_h, \chi_i) = (f, \chi_i) \quad \forall \chi_i \in V_h \end{cases}$$

En forma global se debe encontrar un vector $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M] \in R^M$, tales que:

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{j=1}^M \xi_j \chi_j$$

ξ_j es el valor de φ_ε en cada nodo, que determina el número de grados de libertad y satisface el sistema de ecuaciones originados a partir del problema variacional discreto:

$$\begin{aligned} A\xi &= b \\ A &= (a_{ij}), \quad b = (b_1, \dots, b_M) \\ a_{ij} &= \sum_{K \in T_h} a_{ij}^K, \quad b_i = \sum_{K \in T_h} b_i^K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_K \{ \nabla \chi_i \cdot \nabla \chi_j + \varepsilon(\chi_i \chi_j) \} dx \\ b_i^K &= \int_K (f \cdot \chi_i) dx = \int_K (w(x) - \hat{w}) \chi_i dx \end{aligned}$$

Integrando numéricamente

Para $K = 1, \text{nt}$

$$a_{ij}^K = \int_K \{ \nabla \chi_i \cdot \nabla \chi_j + \varepsilon(\chi_i \chi_j) \} dx = \sum_{K \in T_h} \{ \text{área}(k) \cdot \nabla \chi_i \cdot \nabla \chi_j \} + \varepsilon \int_K \chi_i \chi_j dx$$

Por la regla de Simpson se obtiene la matriz de masa:

$$\varepsilon \int_K \chi_i \chi_j dx = \frac{\text{área}(K)}{12} \sum_{i=1}^3 \{ \chi_i(N_k) \chi_j(N_k) + 1 \}$$

$$\text{donde } \chi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Así se obtiene la matriz de rigidez, la cual es simétrica y definida positiva [18].

Para obtener el vector de cargas (segundo miembro del sistema de ecuaciones), se ha considerado la interpolación sobre el baricentro de cada triángulo. En este caso las funciones de aproximación son constantes a trozos. Cada componente del vector de cargas está dada por:

$$b_i^K = \int_K (f \cdot \chi_i) dx = f_K \int_K \chi_i dx = f_K \left(\frac{\text{área}(K)}{3} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_K = w(k) - \hat{w}$$

donde

$$w(k) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{área}(K) \cdot w(K)$$

$$\hat{w} = \frac{1}{\text{med}(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{área}(K) \cdot w(K) \right)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, previamente se almacena la matriz A en forma de perfil, luego se aplica el método de Cholesky, obteniéndose así la solución aproximada para la función potencial de flujo.

Subprograma 3

Se efectúa el cálculo de $\nabla \varphi_h(x, y)$, considerando las mismas funciones de interpolación lineal de la base de V_h . Así se obtiene el valor de u_h .

En la misma subrutina se calcula ∇u_h , $\det(\tilde{\nabla} u_h(x))$ y $\text{div}(u_h)$.

Subprograma 4

Se realiza el cálculo de $\gamma(\theta)$, la misma que se obtiene de la discretización de la ecuación cuadrática $p_i \delta^2 + q_i \delta + r = 0$, donde:

$$p_i = \det(\tilde{\nabla} u_h(x)), \quad q_i = \text{div}(u_h(x)), \quad r = (1 - \theta)$$

Subprograma 5

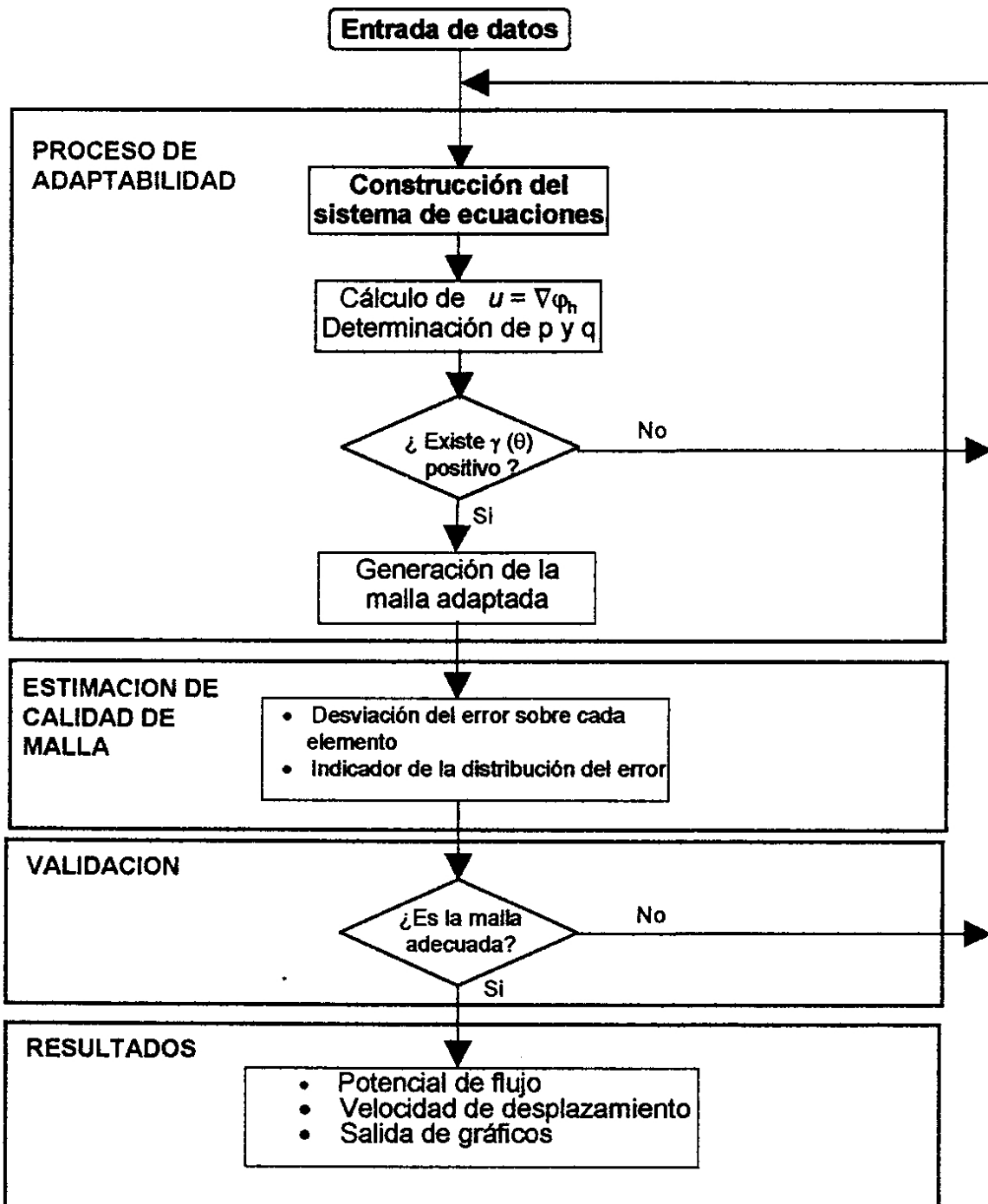
De la discretización de la fórmula 3.13, se calcula las coordenadas de los nodos del nuevo mallado.

$$\{Y_i\} = \{X_i\} + \delta u_i.$$

Subprograma 6

Se calcula el índice de efectividad.

Estos subprogramas se han estructurado mediante el siguiente diagrama de flujo



CAPITULO 4
RESULTADOS NUMERICOS Y CONCLUSIONES

4.1 EXPERIENCIAS NUMERICAS

4.1.1 Datos de entrada

Como datos de entrada se han considerado:

Los dominios Ω_1 y Ω_2 , en los que se realiza la triangulación Υ_h , con $\theta \in < 0, 1 >$, donde:

Para $\Omega_1 = \{(x, y) \in R^2, 0 \leq x, y \leq 1\}$

se ha elegido las siguientes funciones $w(x)$, como estimadores de error dadas a priori:

$$w_1(x, y) = 1 - \text{sen}(2\pi x)\text{sen}(2\pi y) \text{ o}$$

$$w_2(x, y) = 1 + \text{sen}(4\pi(y - x))$$

y el parámetro de penalización con valor $\varepsilon = 10^{-6}$

Para $\Omega_2 = \{(x, y) \in R^2, -2 \leq x, y \leq 2\}$

se ha elegido como la función estimador de error a $w_3(x, y) = \|\nabla g(x, y)\|$, donde

$$g(x, y) = \tanh(3(x^2 + y^2 - 1)) + \tanh(3(-x - y))$$

y el parámetro de penalización con valor de $\varepsilon = 10^{-3}$.

4.1.2 Resultados numéricos

En el Anexo 1 se muestra gráficamente los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo, que constituyen:

- Las mallas iniciales
- La interpolación de w_1 , w_2 y de w_3 sobre los mallados iniciales.
- Las líneas de corriente del potencial de flujo
- El campo de velocidades
- Las mallas adaptadas a los respectivos estimadores de error

Así mismo, se presenta una tabla resumen de los resultados que indican la calidad de las mallas adaptadas.

En el Anexo 2 se presenta la codificación de toda la implementación numérica, realizada en lenguaje de programación FORTRAN POWER STATION.

Para la generación de gráficos se ha utilizado los programas TECPLOT y MATLAB.

4.2 EVALUACION CUANTITATIVA

Para evaluar la calidad de la malla resultante mediante el método de adaptabilidad presentado, se toman en cuenta los siguientes conceptos:

4.2.1 Desviación del error sobre cada elemento

Sea $d : M \rightarrow R$, la desviación del error en cada triángulo de la malla que va definido por:

$$d(k_i) = \int_{K_i} w(x)dx - \hat{d}$$

donde $\hat{d} = \frac{\|1\|}{nt} \cdot \left(\sum_{i=1}^{nT} \int_{K_i} w(x)dx \right)$.

Entonces el vector $d(M)$ tiene componentes

$$d(M) = \begin{pmatrix} d(k_1) \\ d(k_2) \\ \vdots \\ d(k_{nt}) \end{pmatrix}, \text{ donde } nt \text{ es el número de triángulos de la malla.}$$

4.2.2 Indicador de la distribución del error

El grado de la calidad de la malla adaptada se mide mediante el indicador de la distribución del error, el cual está expresado por:

$$I_{\|d\|} = 1 - \frac{\|d(M_y)\|}{\|d(M_x)\|}$$

donde M_y representa la malla adaptada y M_x representa la malla inicial.

Dadas las siguientes normas en R^{nt} :

$$\|d\|_1 = \sum_{i=1}^{nT} |d(k_i)|$$

$$\|d\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{nT} |d(k_i)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|d\|_\infty = \text{Max}_{i=1, nt} |d(k_i)|$$

Este indicador de error tiene la siguiente evaluación:

1.- Si $I_{\|d\|} < 0$, indica que en la malla adaptada la distribución del error no es mejor que en la inicial.

2.- Si $I_{\|d\|} = 0$, indica que en la malla adaptada sigue tan igual la distribución del error como en la malla inicial.

3.- Si $I_{\|\cdot\|} \in (0, 1)$, indica que en la malla adaptada se ha mejorado la distribución del error

4. Si $I_{\|\cdot\|} = 1$, indica que la calidad de la malla adaptada es óptima, es decir que la distribución del error es uniforme en todos los elementos de la malla.

4.3 CONCLUSIONES

1.- El índice de efectividad, mostrado en el Anexo 1, indica la importancia del parámetro $\theta \in (0, 1)$ en el proceso de adaptabilidad del mallado a la función de error, puesto que el valor que se elija influirá en la calidad del mallado.

2.- Se puede decir que el costo computacional del proceso de adaptabilidad depende del tiempo de cálculo en la resolución del problema variacional discreto en la malla inicial.

3.- La adaptación de la malla al estimador de error, permite que al aplicar en cualquier problema de contorno resuelto por elementos finitos, los elementos de la malla inicial no necesariamente pueden ser triangulares. Ello, dado que como datos de entrada solo es necesario las conectividades de la malla inicial, el estimador de error y los parámetros ε y θ .

4.- Esta metodología se puede aplicar con mayor ventaja frente a cualquier otra alternativa en problemas de mecánica de fluidos, cuando se requiere de una mejor aproximación.

5.- Sobre el plano discreto, si se utilizan los elementos finitos P1 (triángulos de 3 nodos en R^2) en la definición del mallado original M_x , el valor de $\theta \in (0, 1)$ representa el área mínima que se permite para cada elemento de la malla adaptada. Con lo que se concluye geoméricamente, que este parámetro es el que regula el mayor o menor grado de adaptación del mallado resultante al estimador de error.

6.- Los estimadores de error, usados en el problema, dan una idea de como crece o decrece el error al variar la malla, sin necesidad de un cálculo sobre la misma. En todos los ejemplos analizados, se puede apreciar que los mallados resultantes agrupan sus nodos en la vecindad de la función con mayor desviación de error.

BIBLIOGRAFIA

- [1] **BABUSKA, I. y RHEINBOLDT, W.**- A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. Journal Num. Meth. Eng.*, 12, 1597-1615, (1978).
- [2] **BANK, R. E.**- Analysis of a local a posteriori error estimate for elliptic equations. Accuracy estimates and adaptive refinements in FE computations. Ed. John Wiley, New York (1986).
- [3] **BRACKBILL, J.U. y SALTZMAN, J.S.**- Adaptive zoning for singular problems in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 46, 342-368, (1982).
- [4] **CAREY, G.F. y ODEN, J.T.**- Finite elements: Computational aspects. Prentice-Hall, (1984).
- [5] **CLAES JOHNSON.** Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Studentlitteratur, Lund, (1994).
- [6] **MANTILLA, I y DE VICENTE, S.**- Adaptabilidad de Mallados, Publicaciones; Dpto. de Matemática, Universidad de Oviedo (1997).
- [7] **DUVAUT, J. y LIONS, L.** - Inequalities in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, (1976)
- [8] **BUGEDA, G.**-Estimación y corrección del error en el análisis estructural por el MEF. Publicación del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona (1995).
- [9] **GIRAULT, V. y RAVIART, P.A.**- Finite element approximation of the Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, (1981).
- [10] **BREZIS, H.** Análisis funcional- Teoría y aplicaciones Alianza Editorial,S.A. (1984).
- [11] **REDDY J. N.**- An introduction to the finite element method.-. McGraw-Hill Book Company, (1985).
- [12] **JACQUOTTE, O.P. y CABELLO, J.**-Une méthode de construction de maillages tridimensionnels fondée sur un principe variationnel. *La Recherche Aérospatiale*, 4, 7-19, (1990).
- [13] **MENENDEZ, O.; VALDEZ, J. y VEGA, L.**- Resolución de Grandes Sistemas de ecuaciones lineales. Publicaciones Universidad de Oviedo Nro. 17 (1995)

- [14] **MILLER, K. y MILLER, R.N.**- Moving finite elements. I SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 18, 1019-1032 (1981).
- [15] **MILLER, K.**- Moving finite elements, II SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol.18, 1032 (1981).
- [16] **PARDANANI, A. y CAREY, G.F.**- Optimization of computational grids. Numerical methods for partial differential equations, Vol. 4, 95-117 (1988).
- [17] **PIRONNEAU, O.**- Méthodes des éléments finis pour les fluides. Masson, Paris, (1988).
- [18] **RAVIART, G. y THOMAS J. M.**- Introducción al Analyse Numérique des Equations Aux Dérivees Partielles. Masson, Paris, (1983).
- [19] **THOMPSON, J.F., WARSI, Z.U.A. y MASTIN, C.W.**- Numerical grid generation. Foundations and aplicaciones. North-Holland, New York, (1985).