

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

**SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA
ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL**



**Tesis para optar el Grado de Maestro en Ciencias,
mención en Matemática Aplicada**

**CONJUNTOS DE CANTOR
REGULARES EN BIFURCACIONES
HOMOCLINICAS Y APROXIMACIONES
DIOFANTICAS**

Presentado por:

BENITO LEONARDO OSTOS CORDERO

LIMA – PERU

2006

Universidad Nacional de Ingeniería
Sección de Posgrado y Segunda Especialización
Profesional

Maestría en Ciencias,
mención en Matemática Aplicada

Nombre del alumno : Benito Leonardo Ostos Cordero

Título de la tesis : Conjuntos de Cantor Regulares en Bifurcaciones
Homoclínicas y Aproximaciones Diofánticas

RESUMEN

En este trabajo presentamos el estudio de los conjuntos de Cantor dinámicamente definidos y sus aplicaciones en sistemas dinámicos y en la teoría de números.

En el estudio de sistemas dinámicos se presentan en forma natural estos conjuntos de Cantor por ejemplo si tomamos un punto fijo hiperbólico de tipo silla asociado a un conjunto básico, las intersecciones de la variedad estable (inestable) local del punto con el conjunto básico es un conjunto de Cantor dinámicamente definido. Introduciremos el concepto de intersección estable de conjuntos de Cantor dinámicamente definido. Probaremos que si los conjuntos de Cantor estable e inestable asociado a bifurcaciones homoclínicas tienen intersección estable, entonces existe un conjunto abierto en la línea de parámetros con densidad positiva en el valor de bifurcación inicial para lo cual los correspondientes difeomorfismos no son hiperbólicos (Teorema 17).

En la parte de la teoría de número demostraremos que si K_1 y K_2 son dos conjuntos de Cantor regulares de Gauss entonces la dimensión de Hausdorff de K_1 y K_2 es igual al mínimo entre uno y la suma de sus dimensiones de Hausdorff, (Proposición 18).

Lima, 24 de Julio del 2006

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Nociones básicas y definiciones	3
1.2. Subshifts de tipo finito	5
1.3. Introducción a las fracciones continuas	5
2. Conjuntos de Cantor Dinámicamente Definidos y Dimensión Fractal	9
2.1. Propiedad de distorsión limitada	16
2.2. Geometría límite	18
2.3. Invariantes numéricas de conjuntos de Cantor	22
2.3.1. Dimensión de Hausdorff	22
2.3.2. Capacidad límite	25
2.3.3. Espesor de un conjunto de Cantor	25
2.4. Conjuntos escalados	27
2.5. Propiedades de invariancia numérica	31
2.6. La topología $C^{1+\epsilon}$	37
2.7. Intersecciones de conjuntos de Cantor y diferencias aritméticas	38
3. Conjuntos de Cantor y Bifurcaciones homoclínicas	43
3.1. Introducción	43
3.2. Definiciones y algunos resultados	43
3.3. Consecuencia del desdoblamiento genérico de tangencias homoclínicas	53
4. Aplicación a los Espectros de Markov y Lagrange	57
4.1. Definiciones y enunciados	58
4.2. El Lema de Selección y sus consecuencias	59
4.3. Dimensión de Hausdorff y sumas aritméticas de conjuntos de Cantor de fracciones continuas	67

Introducción

En este trabajo estudiaremos conjuntos de Cantor especiales llamados conjuntos de Cantor dinámicamente definidos. Ellos son definidos por aplicaciones expansoras y tienen la propiedad de autosimilaridad: partes pequeñas de ellos son difeomorfos a partes grandes con alguna distorsión limitada.

Veremos que los conjuntos de Cantor dinámicamente definidos son utilizados en sistemas dinámicos y en algunos aspectos de la teoría de números.

En el capítulo 1 daremos algunas definiciones básicas que nos ayudarán a lo largo de este trabajo.

En el capítulo 2 definiremos los conjuntos de Cantor dinámicamente definidos y veremos las invariancias numéricas y sus relaciones con respecto a la suma o diferencia aritmética de dos conjuntos de Cantor. Veremos la geometría límite de un conjunto de Cantor regular, que es difeomorfo al Cantor original.

En el capítulo 3 vamos a utilizar estos resultados al estudio de las bifurcaciones homoclínicas en variedades de dimensión dos asociadas a conjuntos básicos tipo silla con dimensión de Hausdorff menor que uno. Tomaremos una familia uniparamétrica $\{\varphi_\mu; \mu \in \mathbb{R}\}$ de difeomorfismos en superficies que presenta una tangencia Homoclínica para $\mu = 0$ y es persistentemente hiperbólico para $\mu < 0$; la tangencia se desdobra en órbitas homoclínicas transversales para $\mu > 0$. Primero probaremos que si la capacidad límite del conjunto básico asociado con la tangencia homoclínica es menor que uno entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} m\left(\frac{B \cap [0, \delta]}{\delta}\right) = 0$, donde m denota la medida de Lebesgue y $B = \{\mu > 0; \varphi_\mu \text{ no es persistentemente hiperbólico}\}$. Este resultado nos dice que casi todos los φ_μ para μ cerca de cero son persistentemente hiperbólicos. Luego utilizaremos el concepto de intersección estable de dos conjuntos de Cantor regulares para probar que si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(\tilde{K}_1)_0$ interseca $(\tilde{K}_2)_0 + t$ establemente donde $(\tilde{K}_1)_0$ y $(\tilde{K}_2)_0$ son las linealizaciones de $(K_1)_0$ y $(K_2)_0$, respectivamente entonces el conjunto $\{\mu > 0; (K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset\}$ contiene un abierto con densidad positiva en $\mu = 0$. $(K_1)_\mu$ y $(K_2)_\mu$ son conjuntos de Cantor regulares difeomorfos a $K_\mu^s = W_{loc}^s(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$.

y $K_\mu^u = W_{loc}^u(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$.

En el capítulo 4 vamos a aplicar los conceptos y resultados del capítulo 2 a la teoría de números, específicamente al estudio de los espectros de Markov y Lagrange. Utilizaremos el resultado siguiente que dice que si K_1 y K_2 son conjuntos de Cantor regulares de clase \mathcal{C}^2 que satisfacen el Lema de recurrencia de escala, entonces tenemos $HD(K_1 + K_2) = \min\{1, HD(K_1) + HD(K_2)\}$, donde HD denota la dimensión de Hausdorff.

Aplicaremos este resultado a conjuntos de Cantor regulares definidos por restricciones de aplicaciones de Gauss $g : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ definida por $g(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ y sus dominios de Markov serán irracionales cuadráticas. Para eso probaremos que tales conjuntos de Cantor satisfacen el lema de recurrencia de escala, es decir, que no son esencialmente afines.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección pondremos las nociones y definiciones básicas que se utilizarán posteriormente en el desarrollo del trabajo

1.1. Nociones básicas y definiciones

Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, definimos lo siguiente:

1. ψ es una contracción si existe una constante $c \in]0, 1[$ tal que

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

El menor valor de c para el cual la desigualdad vale para todo $x, y \in \mathbb{R}$ es llamado el radio de contracción de ψ .

2. ψ es una función α -Hölder si, $\exists c > 0$ y $\exists 0 < \alpha < 1$ tal que:

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c\|x - y\|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R} .$$

3. ψ es una función bi-Lipchitz si existe $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ tal que:

$$c_1|x - y| \leq |\psi(x) - \psi(y)| \leq c_2|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Definición 1 Una semejanza de \mathbb{R} es cualquier composición de una traslación y/o una homotecia.

Sea \mathcal{A} el conjunto formado por subconjuntos compactos no vacíos en \mathbb{R} . Ahora definamos una métrica que haga de este conjunto un espacio métrico completo. La métrica es llamada métrica de Hausdorff.

Definición 2 Sea $A, B \in \mathcal{A}$ definimos la distancia $d(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset B_\delta \text{ y } B \subset A_\delta\}$, donde A_δ y B_δ es la delta vecindad de A y B respectivamente.

La delta vecindad de un conjunto A contenido en \mathbb{R} es definido como $A_\delta = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in A \text{ tal que } |x - y| < \delta\}$.

Teorema 1 El espacio métrico (\mathcal{A}, d) es un espacio métrico completo.

Demostración: Ver [12]. □

Definición 3 Un conjunto de Cantor K en \mathbb{R} es un conjunto compacto, totalmente desconexo (que no contiene intervalo) y todos sus puntos son puntos de acumulación.

Ejemplo 1 Sea $K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{3^n}, \sigma_n \in \{0, 2\}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$. Como se sabe de análisis real este conjunto es compacto, totalmente desconexo y todos sus puntos son puntos de acumulación, es decir, es un conjunto de Cantor. El conjunto K también es obtenido de la siguiente manera: del intervalo $[0, 1]$ retiramos su tercio central $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y obtenemos dos intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$; retiramos sus tercios centrales de estos intervalos y obtenemos cuatro intervalos cerrados $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $[\frac{8}{9}, 1]$; continuando este proceso, siempre retirando los tercios centrales de los intervalos restantes, obtenemos el conjunto K que viene a ser los puntos del intervalo $[0, 1]$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos retirados.

Sea $C^\alpha(I, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones α -Hölder definidos en el intervalo I con valores en \mathbb{R} . Definimos la norma C^α en este espacio de la siguiente manera

$$\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{x, y \in I} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

donde $\|f\|_\infty$ es la norma del supremo de f . Para $r = k + \alpha$, donde $\alpha \in (0, 1]$, $k \geq 1$ la C^r norma en el espacio vectorial $C^r(I, \mathbb{R})$ del conjunto de las funciones diferenciables hasta el orden k y cuya derivada k -ésima es una función α -Hölder, se define como sigue

$$\|f\|_{C^r} = \sum_{l=0}^{k-1} \|D^l f\|_\infty + \|D^k f\|_{C^\alpha}.$$

Para $r = \infty$, la C^∞ norma en el espacio $C^\infty(I, \mathbb{R})$ del conjunto de las funciones infinitamente diferenciables, se define como sigue

$$\|f\|_{C^\infty} = \sup\{\|D^l f\|_\infty\}.$$

1.2. Subshifts de tipo finito

Sea el conjunto finito $\{1, 2, \dots, n\}$ al cual asociamos la métrica $d(j, k)$ definido como

$$d(j, k) = \begin{cases} 0 & j = k \\ 1 & j \neq k. \end{cases}$$

En este espacio métrico cada punto es abierto y cerrado, y la topología definida por esta métrica es llamada la topología discreta.

Sea el conjunto de sucesiones unilaterales

$$\{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

al cual asociamos la métrica $d_1(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$.

Denotemos el espacio topológico $\Sigma_n = (\{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}, \tau_1)$, donde τ_1 es la topología inducida por d_1 . Este espacio topológico es compacto, totalmente desconexo y no tiene puntos aislados, es decir es un conjunto de Cantor.

Ahora definimos la aplicación shift de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma &: \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_n \\ x &\longmapsto \sigma(x) \end{aligned}$$

donde $\sigma(x)_i = x_{i+1}$, para todo $i \geq 0$. La aplicación shift es continua y sobreyectiva. El par (Σ_n, σ) es llamado shift unilateral de n símbolos.

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ de entradas 0 ó 1, definamos:

$$\Sigma_A = \{x \in \Sigma_n : A_{x_i, x_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

al cual llamaremos subshift unilateral de tipo finito definido por A o shift de Markov unilateral definido por A .

1.3. Introducción a las fracciones continuas

En esta sección veremos una manera de aproximar números reales por números racionales que son aproximaciones sorprendentemente buenas, además de ser conceptualmente simples. Estas aproximaciones serán llamadas fracciones continuas.

Sea $x \in \mathbb{R}$, definamos como $[x]$ al único entero tal que $[x] \leq x < [x] + 1$. Ahora podemos definir

$$\alpha_0 = x, a_n = [\alpha_n], \text{ y } \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si, para algún n , $\alpha_n = a_n$ tenemos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

caso contrario

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

La representación de arriba se llama la representación por fracciones continuas de x .

Ejemplo 2

$$1. x = \frac{89}{17} = 5 + \frac{4}{17} = 5 + \frac{1}{\frac{17}{4}} = 5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}} = [5; 4, 4]$$

$$2. x = \pi = 3,14159265 \dots = 3 + 0,14159265 \dots = 3 + \frac{1}{\frac{1}{0,14159265 \dots}} = 3 + \frac{1}{7 + 0,0625134 \dots} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{1}{0,0625134 \dots}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 \dots}} = \dots = [3; 7, 16, \dots].$$

Observación 1 Si $x \in \mathbb{Q}$ su representación en fracciones continuas siempre será finita debido al algoritmo de Euclides.

Consideremos ahora $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ y sean $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí tales que $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, $n \geq 0$. A partir de aquí todas las demostraciones están en [5].

Proposición 1 Las sucesiones (p_n) y (q_n) satisfacen la recurrencia $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$, y $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$, para todo $n \geq 0$. Tenemos además $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$. además de eso, $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

Corolario 1 Sean p_n y q_n como en la proposición anterior entonces $x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$

$$\text{y } \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se puede ver fácilmente que $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < x < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2 Sean p_n y q_n como en la proposición anterior entonces $|x - \frac{p_n}{q_n}| <$

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \forall n.$$

Observemos que $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$ cuanto mayor es a_{n+1} mejor será la aproximación $\frac{p_n}{q_n}$ de x . El próximo resultado nos dará explícitamente el error de aproximación de x por $\frac{p_n}{q_n}$.

Proposición 2 Sean p_n y q_n como en la proposición 1 entonces

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2},$$

donde $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]$.

Teorema 3 (Hurwitz-Markov) Para todo α irracional, $n \geq 1$ tenemos $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ para por lo menos un racional $\frac{p}{q} \in \{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\}$. En particular $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tiene infinitas soluciones racionales $\frac{p}{q}$ y $\sqrt{5}$ es el mayor número con esa propiedad. además para $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q^2}$ tiene finitas soluciones racionales para todo $\epsilon > 0$.

Ejemplo 3

1. $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \dots]$, por lo tanto

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}, \dots$$

2. $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$.

El siguiente teorema caracteriza las reducidas en términos del error reducido de la aproximación de x por p/q , el cual, es por definición la razón entre $|x - \frac{p}{q}|$ y $\frac{1}{q}$.

Teorema 4 Sea p_n y q_n como en la proposición 1 entonces $|q_n x - p_n| < |qx - p|$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $0 < q < q_n$, $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. además de eso, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $0 < q < q_{n+1}$.

Teorema 5 Si $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$ entonces $\frac{p}{q}$ es una reducida de la fracción continua de x .

Definición 4 Sea $x \in \mathbb{R}$ decimos que la fracción continua de x es periódica si $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y para algún $k \in \mathbb{N}^*$.

El siguiente teorema nos dice que los números reales con fracción continua periódica son exactamente las raíces de las ecuaciones de segundo grado con coeficientes enteros.

Teorema 6 Si x es irracional cuadrática, esto es, si x es un irracional del tipo $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}, s > 0$, entonces la fracción continua de x es periódica.

En este caso existe a, b, c enteros tales que $ax^2 + bx + c = 0$, con $b^2 - 4ac > 0$ y $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional.

Ejemplo 4 Sea $x = \frac{\sqrt{21} - 3}{6}$ un irracional cuadrático. Veamos que su descomposición en fracciones continuas es periódico.

Haciendo $\alpha_0 = x$ tendremos: $a_0 = [\alpha_0] = 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{\sqrt{21} + 3}{2}$, $a_1 = [\alpha_1] = 3$,
 $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{\sqrt{21} + 3}{6}$, $a_2 = [\alpha_2] = 1$, $\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{\sqrt{21} + 3}{2}$ y $a_3 = 3$. Luego
 $\frac{\sqrt{21} - 3}{6} = [0; 3, 1, 3, 1, 3, \dots]$ es una fracción continua de periodo 2.

Capítulo 2

Conjuntos de Cantor Dinámicamente Definidos y Dimensión Fractal

Sea K un conjunto de Cantor contenido en \mathbb{R} .

Definición 5 Una partición de Markov para un conjunto de Cantor K contenido en \mathbb{R} es un par (\mathcal{P}, ψ) donde $\mathcal{P} = \{K_1, K_2, \dots, K_k\}$ es una colección de intervalos cerrados y disjuntos tales que

1. La función ψ está definida en una vecindad de cada K_i , para $i \geq 1$,
2. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k K_i$ y $\partial K_i \subseteq K$,
3. Para cada $1 \leq i \leq k$, $\nu(K_i)$ es un intervalo, que es la envoltoria convexa de una colección finita de intervalos de la partición,
4. Para cada $1 \leq i \leq k$ y n suficientemente grande $\psi^n(K \cap K_i) = K$.

Definición 6 Un conjunto de Cantor $K \subseteq \mathbb{R}$ es dinámicamente definido (o regular) si:

1. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < |\lambda| < 1$ tal que $\lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$ es una vecindad de 0 en K , donde λ es llamado el factor de escalamiento de K ,
2. Existe partición de Markov (\mathcal{P}, ψ) para K ,
3. $\psi : K \rightarrow K$ es $C^{1+\epsilon}$ y es expansora. Esto significa que ψ puede ser extendida a una aplicación $C^{1+\epsilon}$ en una vecindad de K .

Observación 2 Estos conjuntos usualmente son llamados conjuntos de Cantor dinámicamente definidos de clase $\mathcal{C}^{1-\epsilon}$. De la misma manera se llaman conjuntos de Cantor dinámicamente definidos de clase \mathcal{C}^r , donde r es un número real mayor que uno, a aquellos Cantor dinámicamente definidos que provienen de funciones expansoras de clase \mathcal{C}^r .

Para el conjunto de Cantor K dinámicamente definido con partición de Markov (\mathcal{P}, ψ) , $\mathcal{P} = \{K_1, K_2, \dots, K_k\}$ y factor de escalamiento λ . Definamos K^0 como la clausura convexa de K_1, K_2, \dots, K_k .

$$K^1 = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k.$$

$$K^m = \psi^{-m+1}(K^1), m \geq 2.$$

Entonces $K = \bigcap_{m \geq 0} K^m$ es el Cantor dinámicamente definido. Aquí todas las componentes conexas de K^m me darán una nueva partición de Markov que se llamará partición de Markov en la m -ésima iteración.

El conjunto K también se puede expresar como $K = \bigcap_{n \geq 0} \psi^{-n}(\bigcup_{i=1}^k K_i)$. además para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $K + t = \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(\bigcup_{i=1}^k (K_i + t))$, donde $g(x) = \psi(x - t) + t$.

Definición 7 Decimos que un conjunto de Cantor dinámicamente definido es afín si la función expansora restringida a su dominio de Markov es afín y sobreyectiva. Si alguna de estas funciones no es sobreyectiva decimos que K es afín generalizado.

Como consecuencia de esto K es semejante (sin distorsión) a $K \cap K_i$, donde $1 \leq i \leq k$.

Proposición 3 Sea $K^0 = [a, b]$ y $K_1 = [a, x]$ y $\psi_1 : K_1 \rightarrow K^0$ creciente y sobreyectiva. En este caso, existe un difeomorfismo $\alpha : K^0 \rightarrow K^0$ con $\alpha'(a) = 1$, tal que $\alpha \circ \psi_1 \circ \alpha^{-1} : \alpha(K_1) \rightarrow K^0$ es lineal.

Demostración: Como $|\psi_1'(a)| > 1$, entonces $|(\psi_1^{-1})'(a)| < 1$. Definamos la siguiente aplicación

$$\alpha(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\psi_1^{-1})^n(z)}{((\psi_1^{-1})'(a))^n}.$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \alpha(\psi_1(z)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\psi_1^{-1})^n(\psi_1(z))}{((\psi_1^{-1})'(a))^n} = \frac{1}{(\psi_1^{-1})'(a)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\psi_1^{-1})^{n-1}(z)}{((\psi_1^{-1})'(a))^{n-1}} \\ &= \frac{1}{(\psi_1^{-1})'(a)} \alpha(z) \end{aligned}$$

luego $\alpha(\psi_1(z)) = \frac{1}{(\psi_1^{-1})'(a)}\alpha(z)$.

$$\alpha'(z) = \frac{d}{dz} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\psi_1^{-1})^n(z)}{((\psi_1^{-1})'(a))^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\psi_1^{-1})'(\psi_1^{-i}(z))}{((\psi_1^{-1})'(a))^n}$$

y como $\psi_1(a) = a$, entonces $\alpha'(a) = 1$.

además se tiene $\alpha \circ \psi_1 \circ \alpha^{-1}(z) = \frac{1}{(\psi_1^{-1})'(a)}z, \forall z \in \alpha(K_1)$. \square

En este caso el conjunto $\tilde{K} = \alpha(K)$ definido por las funciones $\tilde{\psi}_i = \alpha \circ \psi_i \circ \alpha^{-1} : \alpha(K_i) \rightarrow K_0$, es llamado la linealización de K . Por ejemplo si K es un conjunto de Cantor regular con partición de Markov (\mathcal{P}, ψ) , donde $P = \{K_1, K_2, \dots, K_k\}$, $\psi|_{K_i} = \psi_i$ y $K = \bigcap_{n \geq 0} \psi^{-n}(\bigcup_{i=1}^k K_i)$ entonces su linealización tendrá la partición de Markov $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\psi})$, donde $\tilde{P} = \{\alpha(K_1), \alpha(K_2), \dots, \alpha(K_k)\}$, $\tilde{\psi}|_{K_i} = \tilde{\psi}_i$ y $\tilde{K} = \alpha(K) = \bigcap_{n \geq 0} \tilde{\psi}^{-n}(\bigcup_{i=1}^k \alpha(K_i))$. además si λ es el factor de escalamiento de K también lo será de su linealización.

Daremos un ejemplo de un conjunto de Cantor $K \subset [0, 1]$ que no es regular. para ello utilizaremos el hecho que todo conjunto de Cantor regular tiene medida de Lebesgue cero. Para mayores detalles de está afirmación ver [9] pág. 81.

Ejemplo 5 Sea $a < \frac{1}{2}$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a^i = \frac{a}{1-a} < 1$.

Empecemos retirando de $[0, 1]$ un intervalo abierto de centro $\frac{1}{2}$ y longitud a . Retiramos del centro de cada uno de los dos intervalos cerrados restantes un intervalo abierto de longitud $\frac{a^2}{2}$, quedando cuatro intervalos cerrados. después de efectuada la n -ésima etapa de la construcción de K , restan 2^n intervalos cerrados, dos a dos disjuntos, de la misma longitud. En la $n + 1$ -ésima etapa consiste de retirar del centro de cada uno de ellos un intervalo abierto de longitud $\frac{a^{n+1}}{2^n}$. La suma de los intervalos retirados de $[0, 1]$ en la n -ésima etapa es igual a a^n .

El conjunto K es el que queda de $[0, 1]$ después de efectuadas todas las operaciones. Entonces la medida de K es igual a $1 - \sum_{i=1}^{\infty} a^i = \frac{1-2a}{1-a}$.

Ejemplo 6 Sea $K_1 = [0, 1]$, $K_2 = [2, 3]$, $K_3 = [4, 5]$ y

$$\psi(x) = \begin{cases} 3(x-1)+5 & \text{si } x \in K_1 \\ 5(x-3)+5 & \text{si } x \in K_2 \\ 3(x-5)+3 & \text{si } x \in K_3. \end{cases}$$

como se muestra en la figura:

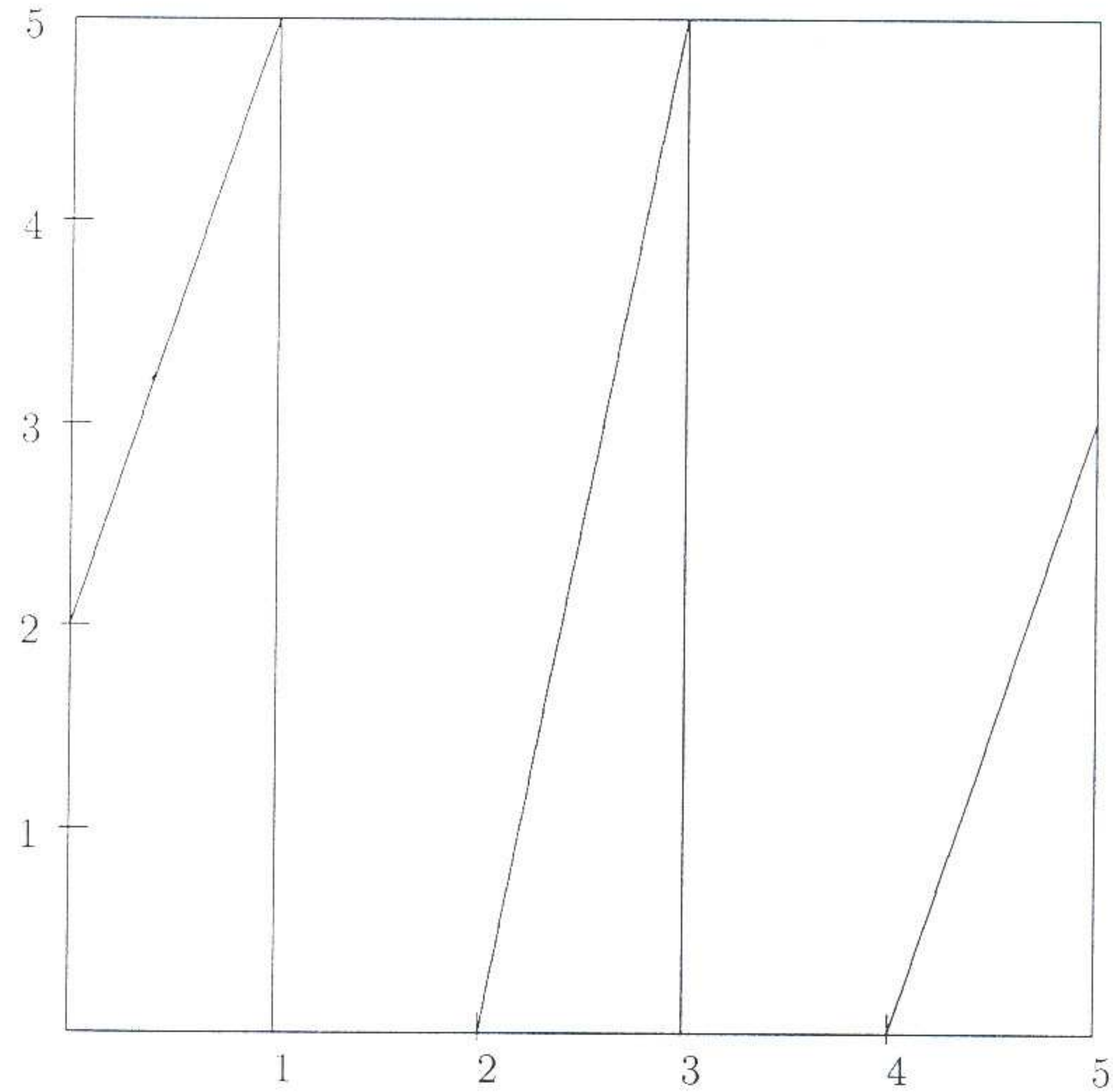


Figura 2.1

Tendremos:

$$\begin{aligned}
 K^0 &= [0, 5] \\
 K^1 &= [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \\
 K^2 = \psi^{-1}(K^1) &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \cup [2, \frac{11}{5}] \cup [\frac{12}{5}, \frac{13}{5}] \cup [\frac{14}{5}, 3] \cup [4, \frac{13}{3}] \cup [\frac{14}{3}, 5] \\
 K^3 = \psi^{-2}(K^1) &= [0, \frac{1}{15}] \cup [\frac{2}{15}, \frac{3}{15}] \cup [\frac{4}{15}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \cup [2, \frac{31}{15}] \cup [\frac{32}{15}, \frac{11}{5}] \\
 &\quad \cup [\frac{12}{5}, \frac{61}{25}] \cup [\frac{62}{25}, \frac{63}{25}] \cup [\frac{64}{25}, \frac{13}{5}] \cup [\frac{14}{5}, \frac{43}{15}] \cup [\frac{44}{15}, 3] \cup [4, \frac{37}{9}] \\
 &\quad \cup [\frac{38}{9}, \frac{13}{3}] \cup [\frac{14}{3}, \frac{71}{15}] \cup [\frac{72}{15}, \frac{73}{15}] \cup [\frac{74}{15}, 5]
 \end{aligned}$$

Así obtenemos $K^m = \psi^{-(m-1)}(K^1)$ para todo $m \geq 1$. Luego $K = \bigcap_{m \geq 0} K^m$ es un conjunto de Cantor regular con partición de Markov (\mathcal{P}, ψ) , donde $\mathcal{P} = \{[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]\}$ y ψ es como el inicio de este ejemplo.

Ejemplo 7 (α -Cantor central) Sea $K_1 = [0, \frac{1}{2}(1 - \alpha)]$, $K_2 = [\frac{1}{2}(1 + \alpha), 1]$ y $0 < \alpha < 1$.

Definimos la función expansora:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha}x & \text{si } x \in K_1 \\ \frac{2}{1-\alpha}(x - \frac{1}{2}(1 + \alpha)) & \text{si } x \in K_2. \end{cases}$$

cuyo gráfico es:

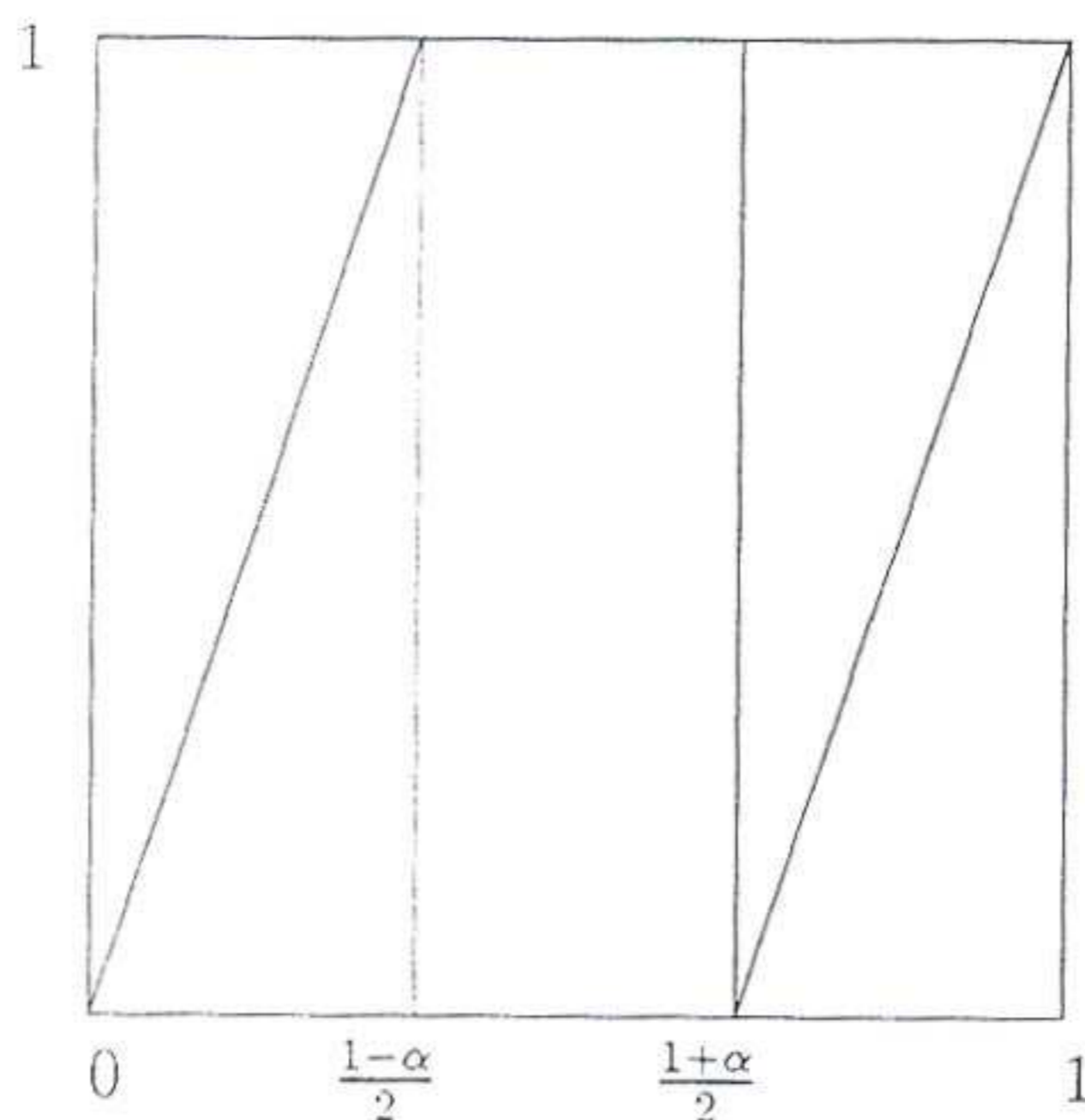


Figura 2.2

El conjunto de Cantor dinámicamente definido es $K_\alpha = \bigcap_{n \geq 0} \psi^{-n}(K_1 \cup K_2)$. El factor de escalamiento se toma como $\lambda = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ y es claro que $\lambda K_\alpha = [0, \frac{1}{2}(1 - \alpha)] \cap K_\alpha$.

Cuando $n = 1$ el conjunto de Cantor K_α está contenido en $K_1 \cup K_2$, que vienen a ser dos intervalos disjuntos cada una de longitud $\frac{1-\alpha}{2}$. Cuando $n = k$ el conjunto K_α está contenido en $\bigcap_{n=0}^k \psi^{-n}(K_1 \cup K_2)$, que vienen a ser la unión de 2^{k-1} intervalos disjuntos cada uno de longitud $(\frac{1-\alpha}{2})^{k+1}$. Luego $m(K_\alpha) \leq 2^k (\frac{1-\alpha}{2})^k = (1-\alpha)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y esto implica que $m(K_\alpha) = 0$.

El siguiente ejemplo nos permite generalizar el conjunto de Cantor definido en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 8 (p -Cantor central con índice α) Para cada entero $p \geq 1$ y cada sucesión $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de números reales con $0 < \alpha_j < \frac{1}{p}$, el conjunto p -Cantor central

con índice α , $K(\alpha, p)$, está definido como sigue: Primero retiramos del intervalo $[0, 1]$ p intervalos abiertos centrales cada uno de longitud α_1 y denotamos lo que queda por K_1 . Luego retiramos de cada componente conexa de K_1 , por decir, si J es uno de aquellos intervalos, retiramos p intervalos abiertos centrales cada uno de longitud $\alpha_2|J|$, y denotamos el resto por K_2 , y así proseguimos. Entonces $K(\alpha, p) = \bigcap_{n \geq 1} K_n$. Por ejemplo el conjunto de Cantor clásico que se obtiene en análisis real es $K(\alpha, p)$ donde $\alpha = (1/3, 1/3, \dots)$. Una cuestión no trivial acerca de estos conjuntos de Cantor es encontrar una condición sobre el índice α donde $K(\alpha, p)$ es dinámicamente definido. Evidentemente $K(\alpha, p)$ es afín si y solamente si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots$.

Para entender la estructura del conjunto de Cantor regular K podemos considerar la matriz de transición $B = (b_{ij})_{k \times k}$ asociada a $\mathcal{P} = \{K_1, K_2, \dots, K_k\}$ de la partición de Markov (\mathcal{P}, ψ) definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(K_i) \supset K_j \\ 0 & \text{si } \psi(K_i) \cap K_j = \emptyset. \end{cases}$$

A esta matriz le podemos asociar un shift de Markov Mixing de tipo finito, esto es un conjunto $\Sigma_B = \{\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{N}} : b_{\theta_i \theta_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}$ y una función shift unilateral $\sigma : \Sigma_B \rightarrow \Sigma_B$ definido por $\sigma((\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (\theta_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$.

Definición 8 Sea una palabra finita $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \in \{1, 2, \dots, k\}^m$, decimos que \underline{a} es una palabra de Σ_B si existe algún elemento de Σ_B que comience por \underline{a} . Ahora asociamos a la palabra finita \underline{a} el intervalo $K_{\underline{a}} = K_{a_1} \cap \psi^{-1}(K_{a_2}) \cap \dots \cap \psi^{-(m-1)}(K_{a_m})$, cuya longitud es denotado con $|K_{\underline{a}}|$.

Proposición 4 Sea (K, ψ) y (Σ_B, σ) como definido anteriormente entonces existe un homeomorfismo $h : \Sigma_B \rightarrow K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo, es decir $\psi \circ h = h \circ \sigma$.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\psi} & K \\ h \uparrow & \curvearrowright & h \uparrow \\ \Sigma_B & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_B \end{array}$$

Demostración: Sea $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \in \{1, 2, \dots, k\}^m$ una palabra de Σ_B entonces $K_{\underline{a}} \neq \emptyset$.

Por otro lado, de la expansividad de ψ se tiene que existe $\lambda < 1$ tal que para toda $\underline{a} \in \{1, 2, \dots, k\}^m$, palabra finita de Σ_B , $|K_{\underline{a}}| < \lambda^n |K|$.

Dado $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \Sigma_B$, para cada n definamos $\underline{\theta}^n = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$. Notamos que $\underline{\theta}^n$ es siempre una palabra de Σ_B . Se define la función $h : \Sigma_B \rightarrow K$ como

$h(\underline{\theta}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\underline{\theta}^n}$. Como $K_{\underline{\theta}^1} \supset K_{\underline{\theta}^2} \supset K_{\underline{\theta}^3} \supset \dots$ es una cadena de intervalos compactos no vacíos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} |K_{\underline{\theta}^n}| = 0$, entonces $h(\underline{\theta})$ es el único punto que pertenece a K .

Sea $x \in K$ entonces para todo $n \geq 0$ se tiene $\psi^n(x) \in K$. Luego para cada n existe $i_{n+1} \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\psi^n(x) \in K_{i_{n+1}}$. Definiendo $\underline{\theta} = (i_1, i_2, \dots)$ tenemos $h(\underline{\theta}) = x$, o sea que h es sobreyectiva.

Sea $h(\underline{\theta}) = h(\tilde{\underline{\theta}})$, donde $\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}} \in \Sigma_B$ entonces para cada $n \geq 0$ tenemos $\psi^n(h(\underline{\theta})) = \psi^n(h(\tilde{\underline{\theta}})) \in K_{\theta_n} \cap K_{\tilde{\theta}_n}$. Pero como estos conjuntos son disjuntos entonces para todo $n \geq 0$ tenemos $\theta_n = \tilde{\theta}_n$, o sea que $\underline{\theta} = \tilde{\underline{\theta}}$. Esto prueba que h es inyectiva.

Sea $x \in K$ y V una vecindad de x . Por ser h una aplicación sobreyectiva existe $\underline{\theta} \in \Sigma_B$ tal que

$$x = h(\underline{\theta}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\underline{\theta}^n}.$$

Como $K_{\underline{\theta}^1} \supset K_{\underline{\theta}^2} \supset K_{\underline{\theta}^3} \supset \dots \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\underline{\theta}^n}$ entonces existe m tal que $K_{\underline{\theta}^m} \subset V$ entonces:

$$C(1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \cap \Sigma_B \subset h^{-1}(V).$$

Ya que si $\underline{\alpha} \in C(1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \cap \Sigma_B$ entonces $h(\underline{\alpha}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\underline{\alpha}^n} \subset K_{\underline{\alpha}^m} = K_{\underline{\theta}^m} \subset V$.

Esto prueba que h es continua. De manera similar se prueba que h^{-1} es también continua y además es claro que $\psi \circ h = h \circ \sigma$. \square

Ejemplo 9 La matriz y el shift de markov asociados al conjunto de Cantor del ejemplo 5 es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\Sigma_B = \{\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}; b_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

De acuerdo en este ejemplo las palabras finitas de longitud 2 de Σ_B son $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ y $(3, 2)$ el cual están asociados los intervalos $K_{(1,2)}$, $K_{(1,3)}$, $K_{(2,1)}$, $K_{(2,2)}$, $K_{(2,3)}$, $K_{(3,1)}$ y $K_{(3,2)}$ y no son otra cosa que las componentes conexas de $K^2 = \psi^{-1}(K^1)$. De la misma manera las palabras finitas de longitud 3 son $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 2, 2)$, y $(3, 2, 3)$ el cual están asociados los intervalos $K_{(1,2,1)}$, $K_{(1,2,2)}$, $K_{(1,2,3)}$, $K_{(1,3,1)}$, $K_{(1,3,2)}$, $K_{(2,1,2)}$, $K_{(2,1,3)}$, $K_{(2,2,1)}$, $K_{(2,2,2)}$,

$K_{(2,2,3)}$, $K_{(2,3,1)}$, $K_{(2,3,2)}$, $K_{(3,1,2)}$, $K_{(3,1,3)}$, $K_{(3,2,1)}$, $K_{(3,2,2)}$, y $K_{(3,2,3)}$ y son también las componentes conexas de $K^3 = \psi^{-2}(K^1)$.

Ejemplo 10 La matriz y el shift de Markov asociados al conjunto de Cantor K_σ del ejemplo 6 es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\Sigma_B = \{\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}; b_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Observación 3 Sea $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ una palabra finita de Σ_B el cual hemos asociado el conjunto $K_{\underline{a}}$ como en la definición 8. Este conjunto corresponde a la m -ésima iterado en la construcción del conjunto de Cantor regular. además todas las palabras finitas de longitud m no serán otra cosa que la m -ésima partición de Markov en la construcción del conjunto de Cantor regular.

2.1. Propiedad de distorsión limitada

Esta propiedad nos permitirá ver que los conjuntos de Cantor dinámicamente definidos tienen cierta distorsión limitada, es decir partes pequeñas del conjunto de Cantor al iterarlos por la función expansora se mantienen relativamente cerca con una pequeña distorsión. En el caso de que la función expansora restringida al dominio de Markov es afín no va a tener distorsión como consecuencia geométrica del teorema.

Teorema 7 Sea K un conjunto de Cantor dinámicamente definido con aplicación expansora $\psi \in \mathcal{C}^{1+\epsilon}$. Entonces, dado un $\delta > 0$, existe un $c(\delta) > 0$ tal que para todo p, q y $n \geq 1$ con

1. $|\psi^n(p) - \psi^n(q)| < \delta$ y
2. el intervalo $[\psi^i(p), \psi^i(q)]$ está contenido en el dominio de ψ para todo $0 \leq i \leq n-1$

tenemos $|\ln |(\psi^n)'(p)| - \ln |(\psi^n)'(q)|| \leq c(\delta)$. además $c(\delta)$ converge a cero cuando $\delta \rightarrow 0$.

Demostración: Debido a que ψ es expansora, existe $\sigma > 1$ tal que $|\psi'(t)| > \sigma$. De esto tenemos

$$|\psi^i(p) - \psi^i(q)| \leq \delta \sigma^{i-n} \text{ para todo } i \leq n.$$

Como ψ es $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ y $|\psi'| > 1$ se tiene que $\ln|\psi'|$ es \mathcal{C}^ϵ . Entonces

$$\begin{aligned}
|\ln |(\psi^n)'(p)| - \ln |(\psi^n)'(q)|| &= \left| \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \psi'(\psi^i(p)) \right| - \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \psi'(\psi^i(q)) \right| \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \ln |\psi'(\psi^i(p))| - \ln |\psi'(\psi^i(q))| \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} c |\psi^i(p) - \psi^i(q)|^\epsilon \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} c \delta^\epsilon \sigma^{\epsilon(i-n)} \\
&\leq \frac{c \delta^\epsilon \sigma^{-\epsilon}}{(1 - \sigma^{-\epsilon})}.
\end{aligned}$$

De ahí se prueba tomando $c(\delta) = \frac{c \delta^\epsilon \sigma^{-\epsilon}}{1 - \sigma^{-\epsilon}}$. □

Consecuencia Geométrica del teorema: Tome V un intervalo pequeño abierto tal que $V \cap K \neq \emptyset$. Como ψ es topológicamente mixing, existe $n \geq 1$ tal que $\psi^n(V \cap K) = K$. Tome $q_0, q_1, q_2 \in V \cap K$ bastante cercanos mutuamente, así los intervalos $(\psi^i(q_0), \psi^i(q_j))$ están contenidos en el dominio de ψ para todo $0 \leq i \leq n-1$ y $j=1,2$. Por el teorema del valor medio existe $p \in (q_0, q_1), q \in (q_0, q_2)$ tal que

$$|\psi^n(q_0) - \psi^n(q_1)| = |q_0 - q_1| |(\psi^n)'(p)|$$

y

$$|\psi^n(q_0) - \psi^n(q_2)| = |q_0 - q_2| |(\psi^n)'(q)|.$$

Entonces por el teorema anterior tenemos

$$e^{-c} \left| \frac{q_0 - q_1}{q_0 - q_2} \right| \leq \frac{|\psi^n(q_0) - \psi^n(q_1)|}{|\psi^n(q_0) - \psi^n(q_2)|} \leq e^c \left| \frac{q_0 - q_1}{q_0 - q_2} \right|.$$

Esto nos dice que distancias relativas a una escala muy pequeña son a lo máximo distorsionadas por un factor constante en relación a distancias relativas correspondiente a una escala mayor y cada vez menos distorsionada si disminuimos el tamaño de la escala mayor.

2.2. Geometría límite

Ahora vamos a introducir el concepto de geometría límite de un conjunto de Cantor regular, que nos da información más precisa de la estructura local de un conjunto de Cantor regular. Sea K un conjunto de Cantor regular y Σ_B su shift de Markov asociado. Consideremos el shift dual asociado a Σ_B denotado por Σ_B^- , dado por:

$$\Sigma_B^- = \{\underline{\theta} = (\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0) \subset \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{N}}; b_{\theta_i, \theta_{i+1}} = 1, \forall i < 0\}.$$

Dados dos elementos distintos $\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}} \in \Sigma_B^-$, definamos:

$$\underline{\theta} \wedge \tilde{\underline{\theta}} = (\theta_{-n}, \theta_{1-n}, \dots, \theta_0) \in \{1, 2, \dots, k\}^{n+1},$$

donde n es tal que $\theta_{-j} = \tilde{\theta}_{-j} \forall 0 \leq j \leq n$ y $\theta_{-n-1} \neq \tilde{\theta}_{-n-1}$ y asociemos a Σ_B^- la siguiente distancia:

$$d(\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_0 \neq \tilde{\theta}_0 \\ |K_{\underline{\theta} \wedge \tilde{\underline{\theta}}}| & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

donde $K_{\underline{\theta} \wedge \tilde{\underline{\theta}}}$ es como en la definición 8.

Dado $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-$ y $n > 0$, definamos $\underline{\theta}^n = (\theta_{-n}, \dots, \theta_0)$ y $B(\underline{\theta}^n)$ una función afín sobreyectiva de $K_{\underline{\theta}^n}$ a K_{θ_0} tal que el difeomorfismo $k_n^\theta = B(\underline{\theta}^n) \circ f_{\underline{\theta}^n}$ preserva orientación, donde $f_{\underline{\theta}^n} = (\psi^n|_{K_{\underline{\theta}^n}})^{-1}$. Con esas definiciones, k_n^θ es un difeomorfismo de $K_{\underline{\theta}^n}$ en K_{θ_0} .

Observemos que $k_n^\theta(K \cap K_{\theta_0}) = B(\underline{\theta}^n)(f_{\underline{\theta}^n}(K \cap K_{\theta_0})) = B(\underline{\theta}^n)(K \cap K_{\underline{\theta}^n})$. De esto podemos interpretar que la imagen de $K \cap K_{\theta_0}$ por k_n^θ es una copia ampliada de $K \cap K_{\underline{\theta}^n}$.

Con estas notaciones tenemos el siguiente resultado que caracteriza las geometrías límite de un conjunto de Cantor regular:

Proposición 5 *Sea $r \in (1, +\infty)$, y K es un conjunto de Cantor regular de clase C^r como arriba, entonces:*

1. *Para cada $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-$ existe un difeomorfismo de clase C^r que preserva la orientación $k^\theta : K_{\theta_0} \rightarrow K_{\theta_0}$ tal que k_n^θ converge a k^θ en la topología C^α para todo $\alpha < r$ la convergencia es uniforme en una C^r -vecindad de ψ .*
2. *Sea $r \geq 2$ es un entero entonces k_n^θ converge a k^θ en $\text{Diff}_+^r(K_{\theta_0})$. además de eso, existe $C > 0$ tal que $\|k_n^\theta - k^\theta\|_{C^{r-1}} \leq C|K_{\underline{\theta}^n}|$.*

De la parte dos de la proposición anterior se sigue que $\underline{\theta} \longrightarrow k^{\underline{\theta}}$ es Lipschitziana, es decir,

$$\|k^{\underline{\theta}} - k^{\tilde{\theta}}\|_{C^{r-1}} \leq C d(\underline{\theta}, \tilde{\theta}),$$

para todo $\underline{\theta}, \tilde{\theta} \in \Sigma_B^-$. Daremos la idea de la prueba de esta proposición, la prueba completa puede encontrarse en D. Sullivan (véase [14]).

Demostración: La función $f_{\underline{\theta}^n}$ también se puede escribir como composición de funciones de la siguiente manera.

$$f_{\underline{\theta}^n} = (\varphi^n|_{K_{\underline{\theta}^n}})^{-1} = (\varphi^1|_{K_{\underline{\theta}^n}})^{-1} \circ (\varphi^2|_{K_{\underline{\theta}^{n-1}}})^{-1} \circ \cdots \circ (\varphi|_{K_{\underline{\theta}^1}})^{-1},$$

donde $\varphi^i|_{K_{\underline{\theta}^i}} : K_{\underline{\theta}^i} \longrightarrow K_{\underline{\theta}^{i-1}} \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Consideremos difeomorfismos afines $A_i : K_{\underline{\theta}^i} \longrightarrow K_{\theta_0}$ que preservan la orientación de g_i , donde $g_i = A_i \circ (\varphi^i|_{K_{\underline{\theta}^i}})^{-1} \circ A_{i-1}^{-1}$ para todo $1 \leq i \leq n$ y A_0 la función identidad entonces

$$A_n f_{\underline{\theta}^n} = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1.$$

Vamos a usar la propiedad de la distorsión limitada para demostrar que los difeomorfismos g_i , para i grande, están exponencialmente cerca de la identidad (de modo uniforme en $\underline{\theta}$), en las topologías indicadas, y por lo tanto la composición de ellos converge exponencialmente en esas topologías.

En efecto, de $A_i \circ f_{\underline{\theta}^i} = g_i \circ g_{i-1} \circ \cdots \circ g_{n+1} \circ A_n \circ f_{\underline{\theta}^n}$. Denotando con $G_{i,n+1} = g_i \circ g_{i-1} \circ \cdots \circ g_{n+1}$ tenemos que $G_{i,n+1} = A_i \circ f_{\underline{\theta}^i} \circ (f_{\underline{\theta}^n})^{-1} \circ A_n^{-1}$.

$$\begin{aligned} DG_{i,n+1}(a) &= D(A_i \circ f_{\underline{\theta}^i} \circ (f_{\underline{\theta}^n})^{-1} \circ A_n^{-1})(a) \\ &= DA_i \cdot D(f_{\underline{\theta}^i} \circ (f_{\underline{\theta}^n})^{-1})(A_n^{-1}(a)) \cdot DA_n^{-1} \\ &= \frac{DA_i}{DA_n} \cdot [D(f_{\underline{\theta}^i} \circ (f_{\underline{\theta}^n})^{-1})^{-1}(f_{\underline{\theta}^i} \circ (f_{\underline{\theta}^n})^{-1} \circ (A_n^{-1}(a)))]^{-1} \\ &= \frac{DA_i}{DA_n D(f_{\underline{\theta}^n} \circ (f_{\underline{\theta}^i})^{-1})(e)}. \end{aligned}$$

Donde $e = f_{\underline{\theta}^i} \circ (f_{\underline{\theta}^n})^{-1} \circ (A_n^{-1}(a)) \in K_{\underline{\theta}^i}$. Para n grande aplicando el Teorema de valor medio para derivadas existe $d \in K_{\underline{\theta}^i}$ tal que $D(f_{\underline{\theta}^n} \circ (f_{\underline{\theta}^i})^{-1})(d) = \frac{DA_i}{DA_n}$. Por lo tanto $DG_{i,n+1}(a) = \frac{D(f_{\underline{\theta}^n} \circ (f_{\underline{\theta}^i})^{-1})(d)}{D(f_{\underline{\theta}^n} \circ (f_{\underline{\theta}^i})^{-1})(e)} = \frac{D\psi^{i-n}(d)}{D\psi^{i-n}(e)}$. Aplicando la propiedad de la distorsión limitada se tiene:

$$e^{-c(\delta)} \leq DG_{i,n+1}(a) \leq e^{c(\delta)}$$

donde $\delta = |K_{\underline{\theta}^i}|$. Cuando n tiende al infinito $c(\delta)$ tiende a cero. Lo cual prueba que $G_{i,n}$ se acerca a la identidad cuando n es grande. Por otro lado

$$\begin{aligned}
|D(A_n f_{\underline{\theta}^n})(x) - D(A_{n-m} f_{\underline{\theta}^{n-m}})(x)| &= |DA_n \cdot Df_{\underline{\theta}^n}(x) - DA_{n+m} \cdot Df_{\underline{\theta}^{n-m}}(x)| \\
&= |DA_n \cdot Df_{\underline{\theta}^n}(x) - D(g_{n+m} \circ \dots \circ g_{n+1} \circ \\
&\quad A_n \circ f_{\underline{\theta}^n})(x)| \\
&= |DA_n \cdot Df_{\underline{\theta}^n}(x) - D(G_{n+m,n-1})(A_n(f_{\underline{\theta}^n}(x))) \cdot \\
&\quad DA_n \cdot Df_{\underline{\theta}^n}(x)| \\
&= |1 - D(G_{n+m,n+1})(A_n(f_{\underline{\theta}^n}(x)))| \cdot \\
&\quad |DA_n| \cdot |Df_{\underline{\theta}^n}(x)|
\end{aligned}$$

cuando n es grande y m arbitrario, esto prueba que $\{DA_n f_{\underline{\theta}^n}\}$ es una sucesión de Cauchy. Tomando $A_i = B(\underline{\theta}^i)$ tenemos que $Dk_n^\underline{\theta}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente a un l . Integrando $\int_a^x Dk_n^\underline{\theta} dx \rightarrow \int_a^x l dx$ y usando el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos $k_n^\underline{\theta} \rightarrow \int_a^x l dx$. Cuyo límite es denotado por $k^\underline{\theta}(x) = \int_a^x l dx$. \square

Definimos, para $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-$ el conjunto de Cantor $K^\underline{\theta} = k^\underline{\theta}(K \cap K_0)$. Los conjuntos $K^\underline{\theta}$ son conjuntos de Cantor regulares tan diferenciables como K . Estos conjuntos son llamados geometría límite de K .

Proposición 6 Sea $\underline{\theta} = (\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0) \in \Sigma_B^-$ y la aplicación afín sobreyectiva $F^\underline{\theta} : K_{\theta_0} \rightarrow k^{\sigma^{-1}(\underline{\theta})}(K_{\underline{\theta}^1})$ con la misma orientación que $(\psi|_{K_{\underline{\theta}^1}})^{-1}$, entonces $F^\underline{\theta} \circ k^\underline{\theta} = k^{\sigma^{-1}(\underline{\theta})} \circ (\psi|_{K_{\underline{\theta}^1}})^{-1}$.

Demostración: Por la proposición anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
(F^\underline{\theta} \circ k^\underline{\theta})(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F^\underline{\theta} \circ B(\underline{\theta}^n) \circ f_{\underline{\theta}^n})(t) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} F^\underline{\theta} \circ B(\underline{\theta}^n) \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-n}, \theta_{-n+1})}})^{-1} \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-n+1}, \theta_{-n+2})}})^{-1} \circ \dots \\
&\quad \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-2}, \theta_{-1})}})^{-1} \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-1}, \theta_0)}})^{-1}(t) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} B(\sigma^{-1}(\underline{\theta})^{n-1}) \circ f_{\sigma^{-1}(\underline{\theta})^{n-1}} \circ (\psi|_{K_{\underline{\theta}^1}})^{-1}(t) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} k^{\frac{\sigma^{-1}(\underline{\theta})}{n-1}} \circ (\psi|_{K_{\underline{\theta}^1}})^{-1}(t) \\
&= k^{\sigma^{-1}(\underline{\theta})} \circ (\psi|_{K_{\underline{\theta}^1}})^{-1}(t) \quad \forall t \in K_{\theta_0}.
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad se ha utilizado el hecho de que $(f_{\underline{\theta}^n})(t) = (\psi|_{K_{(\theta_{-n}, \theta_{-n+1})}})^{-1} \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-n+1}, \theta_{-n+2})}})^{-1} \circ \dots \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-2}, \theta_{-1})}})^{-1} \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-1}, \theta_0)}})^{-1}(t)$, donde $\psi|_{K_{(\theta_{-i}, \theta_{-i-1})}} : K_{(\theta_{-i}, \theta_{-i+1})} \rightarrow K_{\theta_{-i+1}}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como $\sigma^{-1}(\underline{\theta}) = (\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1})$, $\sigma^{-1}(\underline{\theta})^{n-1} = (\theta_{-n}, \dots, \theta_{-2}, \theta_{-1})$ y $f_{\sigma^{-1}(\underline{\theta})^{n-1}} = \psi|_{K_{(\theta_{-n}, \theta_{-n+1})}}^{-1} \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-n+1}, \theta_{-n+2})}})^{-1} \circ \dots \circ (\psi|_{K_{(\theta_{-2}, \theta_{-1})}})^{-1}(t)$ tenemos la tercera igualdad. Para las dos últimas igualdades utilizamos la definición de $k^{\frac{\sigma^{-1}(\underline{\theta})}{n-1}}$ y tomamos límite. □

Sea $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ una palabra finita de Σ_B con $\alpha_0 = \theta_0$, a partir de esta proposición podemos encontrar una transformación afín sobreyectiva $T^{\underline{\theta}\alpha} : k^{\underline{\theta}}(K_\alpha) \rightarrow K_{\alpha_n}$ tal que $k^{\underline{\theta}\alpha} = T^{\underline{\theta}\alpha} \circ k^{\underline{\theta}} \circ f_\alpha$ y concluir que pequeñas partes de la geometría límite intersecadas con algún intervalo de su construcción (i.e, $K^{\underline{\theta}} \cap k^{\underline{\theta}}(K_\alpha)$) es similar a otra geometría límite ($K^{\underline{\theta}\alpha}$). De igual manera el intervalo $k^{\underline{\theta}}(K_\alpha)$ es similar al intervalo K_{α_n} . Esto nos permite definir operadores de renormalización como sigue.

Sean K y K' dos conjuntos de Cantor regular definidos por ψ y ψ' con shifts asociados Σ_B y $\Sigma_{B'}$. Tomemos dos palabras finitas $\underline{\alpha} = (a_{-n}, a_{1-n}, \dots, a_0)$ de Σ_B y $\underline{\beta} = (b_{-m}, \dots, b_0)$ de $\Sigma_{B'}$ las cuales están asociados los intervalos $K_{\underline{\alpha}}$ y $K'_{\underline{\beta}}$ de K y K' , respectivamente. Podemos definir el operador de renormalización $F_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} : \Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}^- \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}^- \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la siguiente forma: dado $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}^- \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, consideremos los intervalos $k^{\underline{\theta}}(K_{\underline{\alpha}})$ y $\lambda k'^{\underline{\theta}'}(K'_{\underline{\beta}}) + t$ de la construcción de $K^{\underline{\theta}}$ y $\lambda K'^{\underline{\theta}'} + t$ y aplicamos a ambos la única transformación afín que preserva la orientación tal que la imagen de $k^{\underline{\theta}}(K_{\underline{\alpha}})$ es K_{α_0} y la imagen de $\lambda k'^{\underline{\theta}'}(K'_{\underline{\beta}}) + t$ es $\tilde{\lambda} K'_{b_0} + \tilde{t}$ para algún $(\tilde{\lambda}, \tilde{t}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Definimos $F_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) = (\underline{\theta}\alpha, \underline{\theta}'\beta, \tilde{\lambda}, \tilde{t})$.

El operador de renormalización será usado posteriormente en el Lema de Selección o también llamado Lema de Recurrencia de escala que garantiza lo siguiente: Si K no es esencialmente afín entonces, dado un conjunto $L \subset \Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}^- \times \mathbb{R}^*$ tal que, para un cierto $A > 0$ grande la medida del conjunto $\{\lambda \in [-A, A], (\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda) \notin L\}$ es uniformemente pequeña para todo $(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$, entonces existe un conjunto G contenida en una vecindad pequeña da L tal que, para todo $(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ la medida del conjunto $\{\lambda \in [-A, A], (\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda) \notin G\}$ es pequeña y G es un compacto muy recurrente a nivel de $\Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}^- \times \mathbb{R}^*$, lo que significa que, para cada punto de G existe muchos operadores de renormalización que, restringidos a coordenadas $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda)$ llevan ese punto en el interior de G .

La hipótesis de no ser esencialmente afín significa que existen $\underline{\theta}, \underline{\theta}' \in \Sigma_B^-$ y $x \in K^{\underline{\theta}}$ tal que $(k^{\underline{\theta}} \circ k^{\underline{\theta}'})''(x) \neq 0$, y muchos operadores de renormalización significa que

una proporción fija del número de todos los operadores de renormalización de una determinada orden de grandeza de escala.

2.3. Invariantes numéricas de conjuntos de Cantor

En esta sección K será un conjunto de Cantor contenido en \mathbb{R} . Para el caso de la dimensión Hausdorff, K puede considerarse cualquier conjunto contenido en \mathbb{R} .

2.3.1. Dimensión de Hausdorff

Dado un cubrimiento finito de K por intervalos abiertos $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ definimos el $\text{diam}(\mathcal{U}) = \max\{|U_i|, i \in I\}$, donde $|U_i|$ es la longitud de U_i . Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, definimos

$$\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{U}) = \sum_{i \in I} |U_i|^\alpha.$$

Para todo $\epsilon > 0$ consideremos :

$$\mathcal{H}_\epsilon^\alpha(K) = \inf\{\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ cubre } K, \text{diam}(\mathcal{U}) < \epsilon\}.$$

la α -medida de Hausdorff de K se define como:

$$m_\alpha(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^\alpha(K).$$

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7 *Sea K un conjunto como definido anteriormente, entonces:*

1. Si $K \subset K'$ entonces $m_\alpha(K) \leq m_\alpha(K')$.
2. Si $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos numerables entonces $m_\alpha(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_\alpha(K_i)$.
3. Para $\lambda > 0$ se tiene $m_\alpha(\lambda K) = \lambda^\alpha m_\alpha(K)$.
4. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de β -Hölder, entonces $m_{\frac{\alpha}{\beta}}(f(K)) \leq c^{\frac{\alpha}{\beta}} m_\alpha(K)$.
5. Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es una isometría entonces $m_\alpha(f(K)) = m_\alpha(K)$.

Demostración:

1. Sea \mathcal{U} un cubrimiento de K podemos extender a un cubrimiento \mathcal{U}' de K' . Luego $\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{U}) \leq \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{U}')$ y esto implica que $\mathcal{H}_\epsilon^\alpha(K) \leq \mathcal{H}_\epsilon^\alpha(K')$. Aplicando límite a esta desigualdad se obtiene $m_\alpha(K) \leq m_\alpha(K')$.
2. Sea \mathcal{U}_i un cubrimiento de K_i entonces $\cup_{i=1}^\infty \mathcal{U}_i$ es un cubrimiento de $\cup_{i=1}^\infty K_i$, y de ahí $\mathcal{H}_\epsilon^\alpha(\cup_{i=1}^\infty K_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}_\epsilon^\alpha(K_i)$. Por lo tanto se tiene $m_\alpha(\cup_{i=1}^\infty K_i) \leq \sum_{i=1}^\infty m_\alpha(K_i)$.
3. Como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\epsilon^\alpha(\lambda K) &= \inf\{\mathcal{H}^\alpha(\lambda \mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ cubre } K, \text{diam}(\mathcal{U}) < \epsilon\} \\
&= \inf\{\lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ cubre } K, \text{diam}(\mathcal{U}) < \epsilon\} \\
&= \lambda^\alpha \inf\{\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ cubre } K, \text{diam}(\mathcal{U}) < \epsilon\} \\
&= \lambda^\alpha \mathcal{H}_\epsilon^\alpha(K).
\end{aligned}$$

Entonces $m_\alpha(\lambda K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^\alpha(\lambda K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda^\alpha \mathcal{H}_\epsilon^\alpha(K) = \lambda^\alpha m_\alpha(K)$.

4. Como f es β -Hölder, entonces existe $c > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\beta \quad \forall x, y \in K.$$

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un δ -cubrimiento de K entonces $|f(K \cap U_i)| \leq c|U_i|^\beta < c\delta^\beta$. De aquí $\{f(K \cap U_i)\}$ es un $\epsilon = c\delta^\beta$ -cubrimiento de $f(K)$. Luego

$$\sum |f(U_i)|^{\alpha/\beta} \leq \sum c^{\alpha/\beta} |U_i|^\alpha = c^{\alpha/\beta} \sum |U_i|^\alpha.$$

Entonces $\mathcal{H}_\epsilon^{\alpha/\beta}(f(K)) \leq c^{\alpha/\beta} \mathcal{H}_\delta^\alpha(K)$. Como ϵ tiende a cero cuando δ tiende a cero se tiene lo deseado.

5. Es consecuencia inmediata de la parte 4.

□

Se puede probar fácilmente que existe un único número real llamado dimensión de Hausdorff de K , denotado por $HD(K)$, tal que para $\alpha < HD(K)$, $m_\alpha(K) = \infty$ y para $\alpha > HD(K)$, $m_\alpha(K) = 0$. Por lo tanto $HD(K)$ se puede definir:

$$HD(K) = \inf\{\alpha > 0 : m_\alpha(K) = 0\} = \sup\{\alpha > 0 : m_\alpha(K) = \infty\}.$$

A partir de esta definición tenemos el siguiente resultado.

Proposición 8 Sean K_1 y K_2 dos conjuntos como definidos anteriormente, entonces:

1. Si $K_1 \subset K_2$ entonces $HD(K_1) \leq HD(K_2)$.
2. Si $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos de \mathbb{R} entonces $HD(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{HD(K_i)\}$.
3. si K es un conjunto contable entonces $HD(K) = 0$.
4. Sea $K \subset \mathbb{R}$ y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función α -Hölder entonces $HD(f(K)) \leq \frac{1}{\alpha} HD(K)$.
5. Sea $K \subset \mathbb{R}$ tal que $HD(K) < 1$ entonces K es totalmente desconexo.
6. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función bi-Lipchitz, entonces $HD(f(K)) = HD(K)$.

Demostración:

1. Cuando $K_1 \subset K_2$ se tiene que $m_\alpha(K_1) \leq m_\alpha(K_2)$ entonces $\{\alpha > 0 : m_\alpha(K_1) = 0\} \supset \{\alpha > 0 : m_\alpha(K_2) = 0\}$ y de aquí se tiene $HD(K_1) \leq HD(K_2)$.
2. Como para todo $i \in \mathbb{N}$, $K_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ entonces $HD(K_i) \leq HD(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i)$ y de aquí $\sup_{i \in \mathbb{N}} HD(K_i) \leq HD(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i)$.
Por otro lado, si $HD(K_i) < \alpha$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $m_\alpha(K_i) = 0$ y además de $m_\alpha(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_\alpha(K_i)$ se tiene entonces $m_\alpha(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i) = 0$. Por causa de que α es una cota superior de $\{HD(K_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ y el supremo de este conjunto es la menor cota superior, entonces se tiene $HD(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} HD(K_i)$.
3. Como K es un conjunto contable se puede escribir $K = \{x_1, x_2, \dots\}$. Es claro que $HD(\{x_i\}) = 0$, entonces por lo anterior $HD(K) = HD(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}) = \sup_{i \in \mathbb{N}} HD(\{x_i\}) = 0$. Por lo tanto $HD(K) = 0$.
4. Sea $r > HD(K)$ (por lo tanto $m_r(K) = 0$). Entonces

$$m_{r\alpha^{-1}}(f(K)) \leq c^{r\alpha^{-1}} m_r(K) = 0.$$

Luego $m_d(f(K)) = 0$ para todo $d > \alpha^{-1} HD(K)$, lo que implica que

$$HD(f(K)) \leq \alpha^{-1} HD(K).$$

5. Sea $x, y \in K$ $x \neq y$ definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(z) = |x - z|$. Como $|f(z) - f(w)| = ||x - z| - |x - w|| \leq |z - w|$ entonces $HD(f(K)) \leq HD(K) < 1$. luego $m_1(f(K)) = 0$, y de esto la medida de Lebesgue de $f(K)$ es cero. Por lo tanto su complemento es denso.

Podemos elegir r en el complemento de $f(K)$ y $0 < r < f(y)$. Se tiene $K = \{z \in K : |z - x| < r\} \cup \{z \in K : |z - x| > r\}$, es decir, K es la unión disjunta de conjuntos abiertos. Por lo tanto x, y pertenecen a componentes conexas disjuntas de K .

6. Como f es bi-Lipchitz existe $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ tal que $c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \forall x, y \in K$. De aquí es claro que f y f^{-1} son 1-Hölder y utilizando la parte 4. de la proposición se tiene que $HD(f(K)) = HD(K)$.

□

Observación 4 Debido a la parte 6 de la proposición anterior se dice que la dimensión de Hausdorff es un invariante numérico.

2.3.2. Capacidad límite

Denotemos por $N_\epsilon(K)$ como el menor número de intervalos de longitud ϵ necesarios para cubrir K , entonces definimos la capacidad límite $d(K)$ del conjunto de Cantor K como :

$$d(K) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(K)}{-\ln \epsilon}.$$

Proposición 9 $d(K)$ es el ínfimo de los $d > 0$ tal que para algún $\epsilon_0 > 0$ y para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, K admite un cubrimiento por intervalos de tamaño ϵ con a lo más ϵ^{-d} elementos.

Demostración: La demostración es clara utilizando la definición de límite superior.
□

también se puede probar, utilizando la definición de capacidad límite, el siguiente hecho: si f es una función bi-lipchiz entonces $d(f(K)) = d(K)$. Por lo tanto también es un invariante numérico.

2.3.3. Espesor de un conjunto de Cantor

Un gap de K es una componente conexa del complemento de K . Todos los gaps de K son acotados salvo dos.

Sea U un gap acotado de K y sea $u \in \partial U$, por lo tanto $u \in K$. El puente de K en u se define como el mayor intervalo C tal que

1. $u \in \partial C$ y $C \cap U = \emptyset$; y
2. si $C \cap U' \neq \emptyset$, para algún gap U' entonces $l(U') < l(U)$.

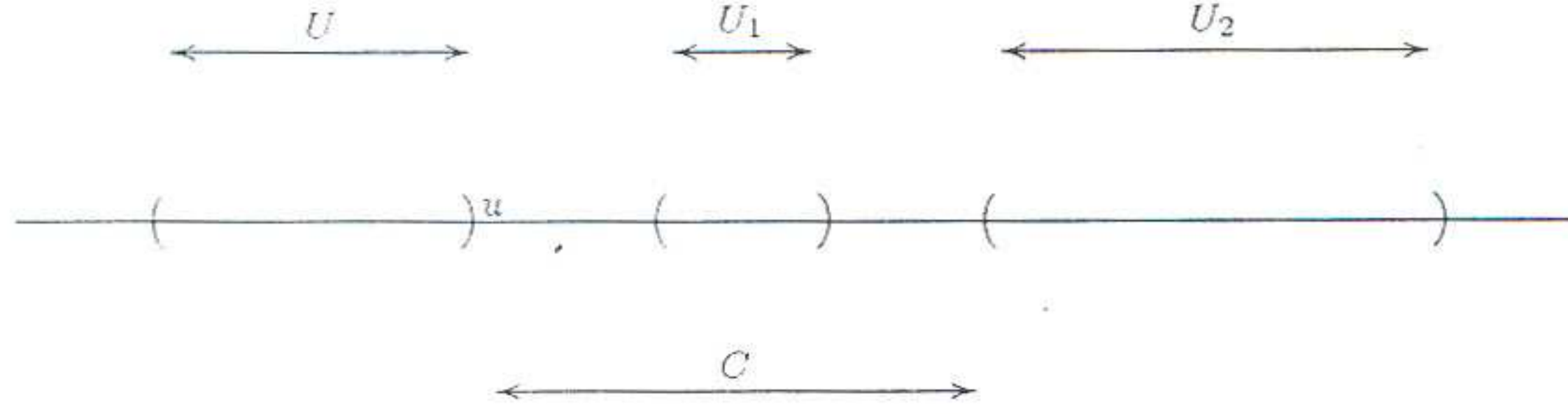


Figura 2.3

En la figura 2.3, U , U_1 y U_2 son gaps de K , $l(U_2) > l(U)$ y C es el puente de K en U . El espesor de K en u se define como

$$\tau(K, u) = \frac{l(C)}{l(U)}$$

y el espesor de K se define

$$\tau(K) = \inf\{\tau(K, u) : u \in \partial U, U \text{ es un gap acotado}\}.$$

Ejemplo 11 Vamos a ver que el conjunto α -Cantor central tiene dimensión de Hausdorff $HD(K_\alpha) = \frac{\ln 2}{-\ln(\frac{1-\alpha}{2})} = s$. En efecto, para todo $\beta > s$ tendremos

$$(2(\frac{1-\alpha}{2})^\beta)^i < (2(\frac{1-\alpha}{2})^s)^i = 1, \quad \forall i > 0.$$

Para $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $i > N$ se tiene $(\frac{1-\alpha}{2})^i < \epsilon$ entonces

$$0 \leq \mathcal{H}_\epsilon^\beta(K_\alpha) \leq \mathcal{H}_{(\frac{1-\alpha}{2})^i}^\beta(K_\alpha) \leq 2^i (\frac{1-\alpha}{2})^{i\beta}.$$

Como $\{(2(\frac{1-\alpha}{2})^\beta)^i\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión decreciente de términos positivos entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} (2(\frac{1-\alpha}{2})^\beta)^i = 0$. Esto demuestra que para todo $\epsilon > 0$ tenemos $\mathcal{H}_\epsilon^\beta(K_\alpha) = 0$. Entonces $m_\beta(K_\alpha) = \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{H}_\epsilon^\beta(K_\alpha) = 0$.

Para cualquier $\gamma < s$ tendremos: $(2(\frac{1-\alpha}{2})^\gamma)^i > 1$ para todo $i > 0$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} (2(\frac{1-\alpha}{2})^\gamma)^i = \infty$. Del límite tendremos que para cada $A > 0$ existe $N > 0$ tal que para todo

$i > N$ implica $(2(\frac{1-\alpha}{2})^\gamma)^i > A$. Como $\mathcal{H}_{(\frac{1-\alpha}{2})^i}^\gamma(K_\alpha) \leq 2^i(\frac{1-\alpha}{2})^{\gamma i}$ tomando N un poco mas grande si es necesario tendremos $\mathcal{H}_{(\frac{1-\alpha}{2})^i}^\gamma(K_\alpha) > A$ siempre que $i > N$. Para $A > 0$ existe $\epsilon_0 = (\frac{1-\alpha}{2})^{N+1}$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$ se tiene $\mathcal{H}_\epsilon^\gamma(K_\alpha) > A$. Esto demuestra que $m_\gamma(K_\alpha) = \lim_{\epsilon > 0} \mathcal{H}_\epsilon^\gamma(K_\alpha) = \infty$.

Se a probado que para todo $\beta > s$ que $m_\beta(K_\alpha) = 0$ y para todo $\gamma < s$ que $m_\gamma(K_\alpha) = \infty$. Esto prueba que $HD(K_\alpha) = s$.

Ejemplo 12 El conjunto α -Cantor central K_α tiene espesura $\tau(K_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$. En efecto, sea U un gap acotado de K_α . Sea i el mayor entero tal que $U \subseteq E_i$ entonces

$$l(U) = \alpha \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^i$$

y los puentes asociados a cada extremo de U tiene longitud $(\frac{1-\alpha}{2})^{i+1}$. así

$$\tau(K, u) = \frac{(\frac{1-\alpha}{2})^{i+1}}{\alpha(\frac{1-\alpha}{2})^i} = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$$

y por lo tanto

$$\tau(K_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2\alpha}.$$

2.4. Conjuntos escalados

Definición 9 Un conjunto de Cantor, o más generalmente, un subconjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}$, es escalado con factor de escalamiento $\lambda \in (0, 1)$ si $\lambda A \subset A$.

La capacidad límite de A , es $d(A) = d(A \cap [-r, r])$ para algún $r > 0$; debido al escalamiento, esta definición es independiente de r .

Notación

- $A^r = A \cap [-r, r]$.
- $A_\epsilon^r = A_\epsilon \cap [-r, r]$, donde A_ϵ es un ϵ -vecindad de A .

Lema 1 Sea A un conjunto escalado con capacidad límite $d(A)$, entonces para cualquier número $d'(A) > d(A)$ existe una constante a tal que A^r puede ser cubierto con a lo más $a(\frac{\epsilon}{r})^{-d'(A)}$ intervalos de longitud ϵ , donde $\epsilon < r$.

Demostración: Ver [9] pág. 207. □

Proposición 10 Sea A, B subconjuntos escalados de \mathbb{R} con capacidad límite $d(A)$ y $d(B)$ y sea k una constante fija. Para $r, \epsilon > 0$,

$$M_{r,\epsilon} = \{t \in [0, r] : A_{\epsilon \cdot r} \cap (B_{\epsilon \cdot r} + t) \cap [-kr, kr] \neq \emptyset\}.$$

Si $d(A) + d(B) < 1$, entonces para cada $\delta > 0$ existe un $\epsilon(\delta)$ tal que $\frac{1}{r} \cdot m(M_{r,\epsilon}) < \delta$.

Demostración: Dado cualquier $d'(A) > d(A)$ entonces por el lema anterior existe una constante a tal que $A^{(k+1)r}$ puede ser cubierto con a lo más $a \left(\frac{\epsilon \cdot r}{(k+1)r}\right)^{-d'(A)}$ intervalos de longitud $\epsilon \cdot r$, entonces $A_{\epsilon \cdot r}^{(k+1)r}$ puede ser cubierto con el mismo número de intervalos de longitud $3\epsilon r$. Del mismo modo dado $d'(B) > d(B)$, existe una constante b tal que $B_{\epsilon \cdot r}^{(k+1)r}$ puede ser cubierto con a lo más $b \left(\frac{\epsilon \cdot r}{(k+1)r}\right)^{-d'(B)}$ intervalos de longitud $3\epsilon r$. Elijamos $d'(A) + d'(B) < 1$.

Se tiene que $M_{r,\epsilon} \subset A_{\epsilon \cdot r}^{(k+1)r} - B_{\epsilon \cdot r}^{(k+1)r}$. así, $M_{r,\epsilon}$ puede ser cubierto con a lo más $a \cdot b \left(\frac{\epsilon \cdot r}{(k+1)r}\right)^{d'(A)-d'(B)}$ intervalos de longitud $6\epsilon \cdot r$. Luego

$$m(M_{r,\epsilon}) \leq 6rab \left(\frac{1}{k+1}\right)^{-d'(A)-d'(B)} \cdot \epsilon^{1-d'(A)-d'(B)},$$

entonces $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m(M_{r,\epsilon})}{r} = 0$. □

Definición 10 Decimos que una familia 1-paramétrica $A(\mu) \subset \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, de conjuntos escalados es continua s.Á:

1. Para cada $r > 0$, $\mu \rightarrow A(\mu) \cap [-r, r]$ es continua con respecto a la métrica de Hausdorff para subconjuntos compactos.
2. El factor de escalamiento $\lambda(\mu)$ de $A(\mu)$ es una función Lipchitz de μ .

Para una familia 1-paramétrica $A(\mu)$, $A(0)$ es simplemente denotado por A .

En los dos lemas que siguen la familia 1-paramétrica de conjuntos escalados que consideraremos será $A(\mu) = \{\lambda(\mu)^i : i \geq 0\} \cup \{0\}$.

Lema 2 Sea $p(\mu) = (\lambda(\mu))^i$ y $h = p(0)$. Elijamos un $\Delta\lambda$ pequeño tal que $\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(\lambda(0)+\Delta\lambda)}{\ln \lambda(0)}$, entonces para $|\lambda(\mu) - \lambda(0)| < \Delta\lambda$,

$$|p(\mu) - p(0)| \leq M(h, \lambda(0)) \cdot \Delta\lambda.$$

Donde $M(h, \lambda(0)) = \frac{\ln h}{\ln \lambda(0)} \left(\frac{h}{\lambda(0)}\right)^{1/2}$.

Demostración: Por un lado tenemos $|p(\mu) - p(0)| \leq i \cdot (\lambda(0) + \Delta\lambda)^{i-1} \cdot \Delta\lambda$.

Por otro lado como $i = \ln h / \ln \lambda(0)$ y $\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(\lambda(0) + \Delta\lambda)}{\ln \lambda(0)}$ reemplazando en la primera parte tenemos

$$\begin{aligned} |p(\mu) - p(0)| &\leq \frac{\ln h}{\ln \lambda(0)} \cdot e^{((\ln h - \ln \lambda(0))/\lambda(0)) \cdot \ln(\lambda(0) + \Delta\lambda)} \cdot \Delta\lambda \\ &\leq \frac{\ln h}{\ln \lambda(0)} \cdot \left(\frac{h}{\lambda(0)}\right)^{1/2} \cdot \Delta\lambda \end{aligned}$$

y esto es $|p(\mu) - p(0)| \leq M(h, \lambda(0)) \cdot \Delta(\lambda)$. \square

Lema 3 Para $\lambda(0)$ fijo y $h \in (0, 1)$ variable, $M(h, \lambda(0))$ tiene su máximo en $h = e^{-2}$ y

$$M(e^{-2}, \lambda(0)) < \frac{-1}{\ln \lambda(0) \cdot (\lambda(0))^{1/2}}.$$

Demostración: Derivando M con respecto a h tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dh} &= \frac{1}{h \cdot \ln \lambda(0)} \cdot \left(\frac{h}{\lambda(0)}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln h}{\ln \lambda(0)} \cdot \left(\frac{h}{\lambda(0)}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\lambda(0)} \\ &= \frac{1}{\ln \lambda(0)} \cdot \left(\frac{1}{h \cdot \lambda(0)}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln h}{\ln \lambda(0)} \cdot \left(\frac{1}{h \cdot \lambda(0)}\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\ln \lambda(0)} \cdot \left(\frac{1}{h \cdot \lambda(0)}\right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \ln h\right). \end{aligned}$$

Entonces la derivada de M con respecto a h es igual a cero si $1 + \frac{1}{2} \ln h = 0$, es decir, si $h = e^{-2}$. Como $M(1, \lambda(0)) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} M(h, \lambda(0)) = 0$ y $M(h, \lambda(0)) > 0$ para $h \in (0, 1)$ tendremos que $M(h, \lambda(0))$ tiene su máximo en $h = e^{-2}$. Luego

$$\begin{aligned} M(e^{-2}, \lambda(0)) &= \frac{\ln e^{-2}}{\ln \lambda(0)} \cdot \left(\frac{e^{-2}}{\lambda(0)}\right)^{1/2} \\ &= \frac{-2 \cdot e^{-1}}{(\lambda(0))^{1/2} \cdot \ln \lambda(0)} \\ &< \frac{-1}{\ln \lambda(0) \cdot (\lambda(0))^{1/2}}. \end{aligned}$$

\square

A partir de la demostración del lema anterior tenemos que para $r \leq e^{-2}$, el máximo de $M(h, \lambda(0))$, para $\lambda(0)$ fijo y $h \in (0, r]$ es obtenido para $h = r$ y este máximo es

$$M(r, \lambda(0)) = \frac{\ln r}{\ln \lambda(0)} \cdot \frac{r^{1/2}}{(\lambda(0))^{1/2}} \leq r^{1/3};$$

para está última desigualdad se asume que r es suficientemente pequeño, por decir $r \leq r_0$.

Proposición 11 *Sea $\{A(\mu)\}$ una familia 1-paramétrica continua de conjuntos escalados y sea $k > 0$ una constante fija. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe $r(\epsilon) > 0$ tal que para cada $0 < r < r(\epsilon)$.*

$$A_{r,\epsilon} \supset A(\mu) \cap [-(k+1)r, (k+1)r] \quad \forall 0 < \mu < r.$$

Demostración: Probaremos el teorema para el caso cuando $A(\mu) = \{(\lambda(\mu))^i : i \geq 0\} \cup \{0\}$. La prueba del caso general es parecida.

Como $\lambda(\mu)$ es una función de Lipschitz con respecto a μ entonces existe $l > 0$ tal que $|\lambda(\mu) - \lambda(0)| < l|\mu|$. Dado $\epsilon > 0$ elegimos $r(\epsilon)$ tal que $r(\epsilon)(k+1) < r_0$, $((k+1)r_\epsilon)^{1/3}l < \epsilon$ y $\Delta\lambda \leq l \cdot r$ para $r \leq r(\epsilon)$. De los dos Lemas anteriores tenemos:

$$A(\mu) \cap [-(k+1) \cdot r, (k+1)r] \subset A_{r\epsilon},$$

para todo $0 < \mu < r$ y $r < r(\epsilon)$. □

Proposición 12 *Sea $A(\mu)$ una familia 1-paramétrica continua de conjuntos escalados y sea $\psi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una familia 1-paramétrica continuo de C^1 -difeomorfismos, con $\psi_\mu(0) = 0$ y $\psi'_\mu(0) = 1$. Sea $k > 0$ una constante, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $r(\epsilon) > 0$ tal que*

$$A_{r,\epsilon}(\mu) \supset \psi_\mu(A(\mu)) \cap [-(k+1)r, (k+1)r] \quad \forall r, \mu \in [0, r(\epsilon)].$$

Demostración: La prueba es parecida a lo hecho anteriormente por que a partir de $\psi_\mu(0) = 0$ y $\psi'_\mu(0) = 1$, tenemos que para $\epsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que $|\frac{\psi_\mu(x) - x}{x}| < \epsilon$ siempre que $0 < |x| < \delta$. □

Combinando todas las proposiciones anteriores tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8 *Sean $A(\mu)$ y $B(\mu)$ dos familias 1-paramétricas continuas de conjuntos escalados tal que $d(A) + d(B) < 1$. Sea $\psi_\mu, \varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos familias 1-paramétricas continuas de C^1 -difeomorfismo tal que $\psi_\mu(0) = 0$ y $\varphi_\mu(0) = \mu$. Sea $k > 0$ una constante y*

$$M_{r,\epsilon} = \{\mu \in [0, r] : d(\psi_\mu(A(\mu)) \cap [-kr, kr], \varphi_\mu(B(\mu)) \cap [-kr, kr]) < \epsilon r\}.$$

Entonces, para cada $\delta > 0$, existe $\epsilon(\delta)$ tal que $\frac{m(M_{r,\epsilon(\delta)})}{r} < \delta$ para r suficientemente pequeño.

2.5. Propiedades de invariancia numérica

Ahora consideraremos la medida de Lebesgue de la diferencia de dos conjuntos de Cantor. Sean K_1, K_2 dos subconjuntos de \mathbb{R} , definimos su diferencia aritmética como $K_1 - K_2 = \{x - y : x \in K_1, y \in K_2\}$.

Tenemos la siguiente consecuencia para cualquier par de subconjuntos en \mathbb{R} :

1. K_1 tiene medida cero y K_2 es contable $\implies K_1 - K_2$ tiene medida cero;
2. K_1 es de primera categoría y K_2 es contable $\implies K_1 - K_2$ es de primera categoría;
3. K_1 y K_2 tienen medida positiva $\implies K_1 - K_2$ contiene un intervalo;
4. K_1 y K_2 son residuales $\implies K_1 - K_2 = \mathbb{R}$.

Proposición 13 Sean K_1, K_2 dos conjuntos de Cantor contenidos en \mathbb{R} con capacidad límite d_1 y d_2 . Si $d_1 + d_2 < 1$, entonces la medida de Lebesgue de la diferencia aritmética de K_1 y K_2 es cero.

Demostración: Sea d_1, d_2 números tales que $d_1 < d'_1, d_2 < d'_2$ con $d'_1 + d'_2 < 1$. Como $d_i = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(K_i)}{-\ln \epsilon} < d'_i$, se tiene que existe un ϵ_0 tal que $0 < \epsilon < \epsilon_0$ entonces $N_\epsilon(K_i) \leq \epsilon^{-d'_i}$, es decir, K_i puede ser cubierto $\epsilon^{-d'_i}$ intervalos de longitud ϵ . como la diferencia de intervalos de longitud ϵ es un intervalo de longitud 2ϵ , se tiene que $K_1 - K_2$ está contenido en $\epsilon^{-d'_1} \cdot \epsilon^{-d'_2}$ intervalos de longitud 2ϵ . La longitud total de esos intervalos es $2\epsilon^{1-d'_1-d'_2}$. Como $d'_1 + d'_2 < 1$, podemos hacer $2\epsilon^{1-d'_1-d'_2}$ arbitrariamente pequeño, por lo tanto la medida de Lebesgue de $K_1 - K_2$ es cero. \square

Definición 11 Sea U_1, U_2 gaps acotados de K_1, K_2 , decimos que (U_1, U_2) es un par de gap si U_2 contiene exactamente un punto de la frontera de U_1 y viceversa.

Lema 4 (Lema del gap) Sea K_1, K_2 dos conjuntos de Cantor contenidos en \mathbb{R} con espesores τ_1, τ_2 , respectivamente. Si $\tau_1 \cdot \tau_2 > 1$ entonces uno de los siguientes alternativas ocurre:

1. Existe gap U_2 de K_2 tal que $K_1 \subset U_2$, o
2. Existe gap U_1 de K_1 tal que $K_2 \subset U_1$, o
3. $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. En este caso $K_1 - K_2$ contiene intervalos no triviales.

Demostración: Supongamos que ninguno de los conjuntos de Cantor está contenido en un gap del otro y que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, entonces existe un par de gap. Dado un par de gap (U_1, U_2) , construimos o bien un punto en $K_1 \cap K_2$ o bien un par de gap diferente (U'_1, U_2) con $l(U'_1) < l(U_1)$ o bien un par de gap diferente (U_1, U'_2) con $l(U'_2) < l(U_2)$. Esto nos llevará a una contradicción, después de aplicar la construcción un número finito de veces encontramos un par de gap $(U_1^{(i)}, U_2^{(i)})$ tales que $l(U_1^{(i)})$ o $l(U_2^{(i)})$ decrece, y como la suma de las longitudes de los gaps limitadas es finita, ellas tienden a cero. Si suponemos que $l(U_1^{(i)})$ tiende a cero, tomamos un punto $q_i \in U_1^{(i)}, i \geq 1$, y elegimos un punto de acumulación q de $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$, es claro que $q \in K_1 \cap K_2$. En efecto, si q no pertenece a K_1 entonces existe un gap acotado U de K_1 tal que $q \in U$ y para i grande se tiene que $q_i \in U$, entonces para estos i -es se tiene que $U \cap U_1^{(i)} \neq \emptyset$ y esto es una contradicción debido a que dos gaps de un mismo conjunto nunca se intersecan. Si q no pertenece a K_2 entonces existe un gap acotado V de K_2 tal que tal que $q \in V$ y como para i grande se tiene que $q_i \in V$, entonces para esos i -es se tiene que $V \cap U_2^{(i)} \neq \emptyset$ (esto es por que $(U_1^{(i)}, U_2^{(i)})$ es un par de gap) y esto es una contradicción por ser gaps del mismo conjunto K_2 .

Sean C_i^l y C_i^r los puentes de K_i en los puntos fronteras de $U_i, i = 1, 2$ como se muestra en la figura 3.1

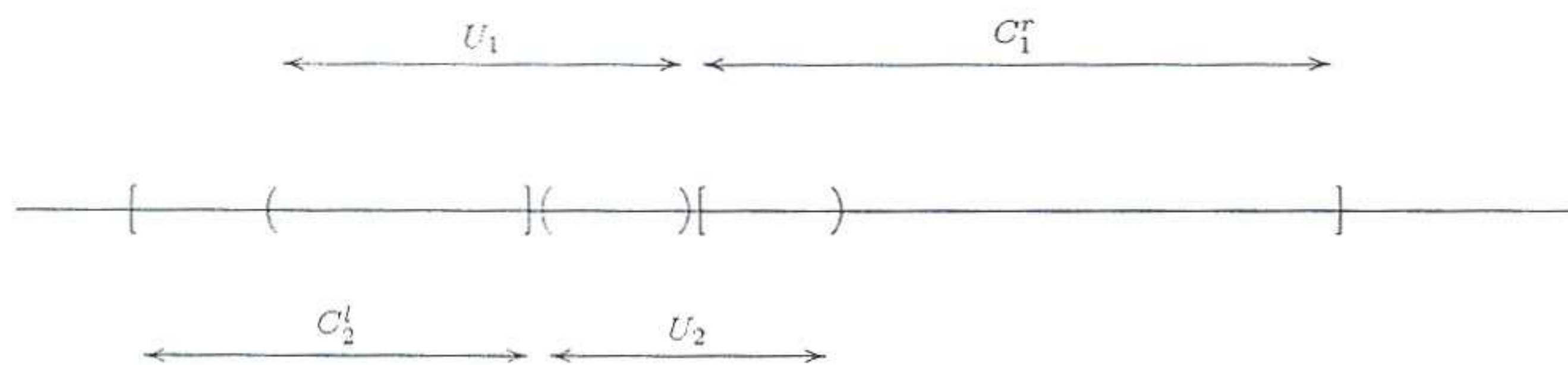


Figura 2.4

Como $\tau_1 \cdot \tau_2 > 1$ se tiene $\frac{l(C_1^r)l(C_2^l)}{l(U_1)l(U_2)} > 1$. Luego $l(C_1^r) > l(U_2)$ o $l(C_2^l) > l(U_1)$, o ambas desigualdades ocurren a la vez, de donde tenemos que el punto extremo derecho de U_2 está en C_1^r o el punto extremo izquierdo de U_1 está en C_2^l , o ambos casos ocurren a la vez. Sea u el punto extremo derecho de U_2 . Si $u \in K_1$, estamos listos, pues $u \in K_2$. Si u no pertenece K_1 , entonces u está contenido en un gap limitado U'_1 de K_1 , con $l(U'_1) < l(U_1)$ y (U'_1, U_2) es el par de gap buscado. \square

Observación 5 El lema de gap es usado en la mayoría de las veces de la siguiente manera: Sean K_1, K_2 dos conjuntos de Cantor contenidos en \mathbb{R} e I_1, I_2 los intervalos cerrados minimales tales que $K_1 \subset I_1, K_2 \subset I_2$. Decimos que K_1 y K_2 están entrelazados si, I_1 contiene exactamente un punto frontera de I_2 y este punto está en el

interior de I_1 y vice-versa.

Si $\tau(K_1)\tau(K_2) > 1$ y K_1, K_2 están entrelazados, entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Como el entrelazamiento de conjuntos es una propiedad abierta, se sigue que si $\tau(K_1)\tau(K_2) > 1$, entonces $K_1 - K_2$ tiene puntos interiores.

Teorema 9 *Sea K_1, K_2 conjuntos de Cantor en \mathbb{R} con $HD(K_1) + HD(K_2) > 1$ entonces $K_1 - \lambda K_2$ tiene medida de Lebesgue positiva para casi todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

En el caso de que los conjuntos de Cantor sean dinámicamente definidos tenemos el siguiente resultado.

Teorema 10 *Si K_1, K_2 son conjuntos de Cantor regulares, tal que $HD(K_1) + HD(K_2) = 1$, entonces para casi todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $K_1 + \lambda K_2$ es un conjunto de Cantor con medida de Lebesgue cero.*

Estos teoremas se pueden demostrar utilizando un teorema más fuerte (Teorema 11), para ello consideremos lo siguiente:

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, sea $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ tal que $\lambda = -\tan \theta$. Sea el vector $V_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ y definamos la proyección π_θ que lleva puntos del plano sobre recta que contiene el vector v_θ , es decir L_θ . Como podemos identificar \mathbb{R} con L_θ por $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \cdot v_\theta$ entonces podemos considerar $\pi_\theta(k_1, k_2) = \cos \theta \cdot k_1 + \sin \theta \cdot k_2 \quad \forall (k_1, k_2) \in \mathbb{R}$. Es claro que $\pi_\theta(K_1 \times K_2) = \cos \theta(K_1 - \lambda K_2)$.

Por otro lado, también se utiliza que $HD(K_1 \times K_2) \geq HD(K_1) + HD(K_2)$. La igualdad se da en el caso en que K_1 y K_2 son conjuntos de Cantor regulares (ver[1]).

Teorema 11 *Si $K \subset \mathbb{R}^2$ tal que $HD(K) > 1$ y $\pi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $\pi_\theta(K)$ tiene medida de Lebesgue positiva para casi todo $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$.*

Para la demostración del teorema utilizaremos el siguiente lema; pero antes daremos la definición de soporte de una medida: El soporte de una medida de Borel μ denotado por $supp(\mu)$ se define como el más pequeño conjunto cerrado s tal que $\int f d\mu = 0$ para toda función continua f que es cero en s .

Lema 5 *Sea η medida finita con soporte compacto en \mathbb{R} y $\widehat{\eta}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixp} d\eta(x)$, para $p \in \mathbb{R}$. Si $0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\eta}(p)|^2 dp < \infty$, entonces $m(supp(\eta)) > 0$.*

Demostración: Como $\widehat{\eta}$ es cuadrado integrable entonces $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixp} \widehat{\eta}(p) dp$ está bien definido, es una función cuadrado integrable en \mathbb{R} y $d\eta = \varphi dx$.

además,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)} d\eta(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixp} \widehat{\eta}(p) dp \right) d\eta(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixp} d\eta(x) \right) \overline{\widehat{\eta}(p)} dp \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\eta}(p) \overline{\widehat{\eta}(p)} dp = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\eta}(p)|^2 dp
\end{aligned}$$

así, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\eta}(p)|^2 dp > 0$ y como el $\text{supp}(\varphi) = \text{supp}(\eta)$ entonces $m(\text{supp}(\eta)) > 0$ \square

Demostración del Teorema 11: Sea $d = HD(K) > 1$. Primero asumiremos que $0 < m_d(K) < \infty$ y que para algún $c > 0$

$$m_d(K \cap B_r(x)) \leq cr^d \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \text{ y } 0 < r \leq 1. \quad (*)$$

Considere la medida finita $\mu(A) = m_d(A \cap K)$, para A subconjunto medible de \mathbb{R}^2 . Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, sea μ_θ una medida en \mathbb{R} tal que $\int f d\mu_\theta = \int f \circ \pi_\theta d\mu$ para cada función continua f . Veamos que $\text{supp}(\mu_\theta) \subset \pi_\theta(K)$.

En efecto, sea f una función continua tal que $f|_{\pi_\theta(K)} = 0$ entonces utilizando el hecho de que $\mu(\mathbb{R}^2 - K) = 0$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_\theta = \int_{\mathbb{R}^2} f \circ \pi_\theta d\mu = \int_{K \cup (\mathbb{R}^2 - K)} f \circ \pi_\theta d\mu = \int_K f \circ \pi_\theta d\mu + \int_{\mathbb{R}^2 - K} f \circ \pi_\theta d\mu = 0$$

y como $\text{supp}(\mu_\theta)$ es el menor conjunto cerrado con esa propiedad, se tiene que $\text{supp}(\mu_\theta) \subset \pi_\theta(K)$.

Para concluir la prueba sólo nos queda por probar que $m(\text{supp}\mu_\theta) > 0$ para casi todo θ . Por el lema anterior debemos probar que para casi todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ se tiene $0 < \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 dp < \infty$.

En efecto, $\widehat{\mu}_\theta(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixp} d\mu_\theta(x)$, entonces

$$|\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ip(v-u) \cdot v_\theta} d\mu(u) d\mu(v).$$

Como $v_{\theta+\pi} = -v_\theta$, tenemos lo siguiente:

$$|\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 + |\widehat{\mu}_{\theta+\pi}(p)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\cos p(v-u) \cdot v_\theta) d\mu(u) d\mu(v).$$

y así

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\cos p(v-u) \cdot v_\theta) d\mu(u) d\mu(v) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{2\pi} (\cos p(v-u) \cdot v_\theta) d\theta \right) d\mu(u) d\mu(v) \end{aligned}$$

introduciendo la función de Bessel $J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta$, tenemos

$$\int_0^{2\pi} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J_0(p\|v-u\|) d\mu(u) d\mu(v).$$

Integrando y usando el teorema de Fubinni

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta dp &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-a}^a J_0(p\|v-u\|) d\theta d\mu(u) d\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{-a\|v-u\|}^{a\|v-u\|} J_0(z) dz \right) \frac{1}{\|v-u\|} d\mu(u) d\mu(v). \end{aligned}$$

Se conoce que $\int_{-\infty}^{\infty} J_0(z) dz < \infty$, entonces

$$\int_{-a}^a \int_0^{2\pi} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta dp \leq A \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu(u) d\mu(v)}{\|v-u\|}$$

para algún $A > 0$ independiente de a . Fijemos $\alpha \in (0, 1)$ y utilizando (*) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu(u)}{\|v-u\|} &= \int_{\|v-u\| \geq 1} \frac{d\mu(u)}{\|v-u\|} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha^n \leq \|v-u\| < \alpha^{n-1}} \frac{d\mu(u)}{\|v-u\|} \\
&\leq \mu(\mathbb{R}^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\|v-u\| < \alpha^{n-1}} \frac{1}{\alpha^n} d\mu(u) \\
&\leq \mu(\mathbb{R}^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} \mu(B_{\alpha^{n-1}}(v)) \\
&\leq \mu(\mathbb{R}^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} c(\alpha^{n-1})^d \\
&\leq \mu(\mathbb{R}^2) + c \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n+(n-1)d} \\
&\leq \mu(\mathbb{R}^2) + \frac{c}{\alpha - \alpha^d}.
\end{aligned}$$

Entonces, integrando tenemos $\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\|u-v\|} d\mu(u) d\mu(v) \leq \mu(\mathbb{R}^2) [\mu(\mathbb{R}^2) + \frac{c}{\alpha - \alpha^d}] < \infty$. Usando el teorema de Fubini y haciendo $a \rightarrow +\infty$, tenemos

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 dp d\theta \leq A \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\|u-v\|} d\mu(u) d\mu(v) < \infty$$

y así $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 dp < \infty$ para casi todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Por otro lado tenemos $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 dp > 0$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, caso contrario si existe algún θ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_\theta(p)|^2 dp = 0$, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 0$, entonces $\varphi = 0$ en casi todo punto. Desde que $d\mu_\theta(x) = \varphi(x)dx$ entonces $\mu_\theta(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} d\mu_\theta = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 0$. Esto implica que $0 = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_\theta = \int_{\mathbb{R}^2} f \circ \pi_\theta d\mu$ para todo f y esto implica que $\mu(\mathbb{R}^2) = 0$, lo cual es una contradicción.

Hasta aquí se ha probado el teorema cuando K es d -medida de Hausdorff positivo, finito y satisface la condición (*). Ahora el caso general se reducirá a esto. Si $m_d(K) = \infty$ tome $1 < d' < d$ tal que $0 < m_{d'}(K') < \infty$ para $K' \subset K$ y que la condición (*) sea satisfecha. Tal K' existe debido al Teorema 5.6 de [1] pág. 69. Entonces el argumento de arriba puede ser usado para K' en lugar de K y d' en lugar de d para concluir que $\pi_\theta(K')$ tiene medida de Lebesgue positiva para casi todo θ , así lo mismo ocurre para $\pi_\theta(K)$. \square

Otros resultados garantizan, para un conjunto de Cantor dinámicamente definido, que su dimensión de Hausdorff y la capacidad límite coinciden y además estas dimensiones se encuentran contenidas estrictamente en el intervalo $(0, 1)$. Por lo tanto su

medida de Lebesgue es cero (ver [9]). Además si consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ entonces $f(K_1 \times K_2) = K_1 + K_2$, y como K_1 y K_2 son conjuntos de Cantor dinámicamente definidos entonces $HD(K_1 \times K_2) = HD(K_1) + HD(K_2)$. Por lo tanto, debido a que f es una función Lipschitz se tiene $HD(f(K_1 \times K_2)) \leq HD(K_1 \times K_2) = HD(K_1) + HD(K_2)$, es decir, $HD(K_1 + K_2) \leq HD(K_1) + HD(K_2)$.

2.6. La topología $C^{1+\epsilon}$

Esta topología nos permitirá decir cuando dos conjuntos de Cantor dinámicamente definidos están próximos.

Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de Cantor con aplicación expansora ψ y partición de Markov (\mathcal{P}, ψ) , donde $\mathcal{P} = \{K_1, \dots, K_l\}$. Supongamos que ψ es $C^{1+\epsilon}$ con constante de Hölder C , i.e., $|\psi'(p) - \psi'(q)| \leq C |p - q|^\epsilon$ para todo p, q en una vecindad de K . Decimos que un conjunto de Cantor \tilde{K} está cerca de K , si \tilde{K} posee aplicación expansora $\tilde{\psi}$ y partición de Markov $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\psi})$, donde $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_l\}$ tal que

1. $\tilde{\psi}$ es $C^{1+\tilde{\epsilon}}$, y C^1 -cerca a ψ , además $\tilde{\psi}$ tiene constante de Hölder \tilde{C} tal que: $(\tilde{\epsilon}, \tilde{C})$ cerca de (ϵ, C) .
2. $(\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_l)$ está cerca de (K_1, \dots, K_l) , en el sentido que los correspondientes puntos extremos son próximos.

Sea $K_i = [a_i, b_i]$ y $\tilde{K}_i = [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ y $r = (r_1, r_2, \dots, r_{2l+2})$ donde las componentes de r son reales positivos.

Definimos la vecindad básica en el conjunto de los Cantor dinámicamente definidos:

$$\mathcal{V}(K, r) = \{\tilde{K} : \|\tilde{\psi} - \psi\|_{C^1} < r_1, \|(\tilde{\epsilon}, \tilde{C}) - (\epsilon, C)\| < r_2, |\tilde{a}_j - a_j| < r_j, j = 3, \dots, l+2, |\tilde{b}_j - b_j| < r_j, j = l+3, \dots, 2l+2\}.$$

De manera similar podemos definir vecindades básicas para pares de conjuntos de Cantor dinámicamente definidos.

Proposición 14 *Para conjuntos de Cantor próximos K y \tilde{K} como arriba, existe un homeomorfismo $h : K \rightarrow \tilde{K}$, C^0 -próximo de la identidad, tal que $\tilde{\psi} \circ h = h \circ \psi$. Más aún, h es Hölder continua.*

Demostración: Notemos primero que debido a la proximidad supuesta en la definición

$$\psi(K_i) \cap K_j \neq \emptyset \iff \tilde{\psi}(\tilde{K}_i) \cap \tilde{K}_j \neq \emptyset.$$

De esto se sigue que, dado $x \in K$, $\exists \tilde{x} \in \tilde{K}$ tal que $\tilde{\psi}^n(\tilde{x}) \in \tilde{K}_i \iff \psi^n(x) \in K_i$, para todo $n \geq 0$. Como $\tilde{\psi}$ es expansora, \tilde{x} debe ser único, definimos $h(x) = \tilde{x}$. Es claro que $\tilde{\psi} \circ h = h \circ \psi$. Por construcción análoga obtenemos h^{-1} . Luego h es un homeomorfismo y es fácil ver que es \mathcal{C}^0 -próximo de la identidad. \square

Esta topología nos permite controlar la distorsión de K y \tilde{K} . En particular si K tiene distorsión pequeña entonces \tilde{K} también, porque está suficientemente próximo de K .

2.7. Intersecciones de conjuntos de Cantor y diferencias aritméticas

En esta sección abordaremos conceptos relacionados con la diferencia aritmética como intersección estable e intersección extremo estable que posteriormente veremos la utilidad en bifurcaciones homoclínicas en superficies.

Definición 12 Decimos que dos conjuntos de Cantor dinámicamente definidos K_1, K_2 tienen intersección estable si existe una vecindad $U \ni (K_1, K_2)$ en la topología $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ tal que para todo par $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) \in U$ se tiene que $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \neq \emptyset$.

Existen relaciones entre los conceptos de diferencia aritmética y de intersección estable.

Proposición 15 Sean K_1, K_2 dos conjuntos de Cantor regulares. Entonces tenemos:

1. si K_1 interseca K_2 establemente, entonces $K_1 - K_2$ contiene intervalo,
2. si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que K_1 interseca $(K_2 + t)$ establemente entonces $t \in \text{int}(K_1 - K_2)$.

Demostración: Para la primera afirmación existe una vecindad $U = \mathcal{V}(K_1, r) \times \mathcal{V}(K_2, r)$ de (K_1, K_2) tal que para todo $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$, se tiene $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \neq \emptyset$.

Como K_2 es un conjunto de Cantor regular tenemos una partición de Markov $\{K_{21}, K_{22}, \dots, K_{2k}\}$ con transformación expansora ψ , constantes de Hölder (ϵ, C) . Entonces

$$K_2 + t = \bigcap_{n \geq 0} \tilde{\psi}^{-n} \left(\bigcup_{i=1}^k (K_i + t) \right),$$

donde $\{K_{21} + t, K_{22} + t, \dots, K_{2k} + t\}$ es la partición de Markov de $K_2 + t$ con transformación expansora $\tilde{\psi}(x) = \psi(x - t) + t$ y constantes de Hölder (ϵ, C) .

Tomando $|t| < r$ es claro que $K_2 + t \in \mathcal{V}(K_2)$ y esto implica que $K_1 \cap (K_2 + t) \neq \emptyset$, es decir que $K_1 - K_2$ contiene un intervalo.

La prueba de la segunda afirmación es análoga. □

Ejemplo 13 Consideremos los conjuntos de Cantor K_α definidos en el ejemplo 7 del capítulo 2. Su dimensión de Hausdorff es $HD(K_\alpha) = -\frac{\ln 2}{\ln(\frac{1-\alpha}{2})}$ y su espesura es $\tau(K_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$.

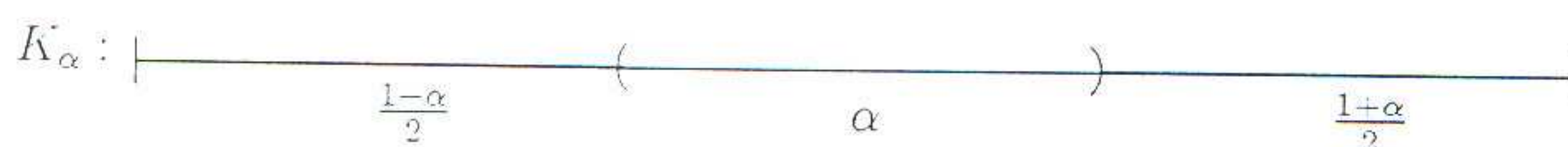


Figura 2.5

Si, $\alpha > \frac{1}{2}$ tendremos $HD(K_\alpha) < \frac{1}{2}$, y la medida de $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ es cero. En efecto, como $K_\alpha \subset \bigcap_{n=0}^k \psi^{-n}(K_1 \cup K_2)$ que viene a ser la unión de 2^{k+1} intervalos disjuntos cada

uno de longitud $(\frac{1-\alpha}{2})^{k+1}$, entonces $\lambda K_\alpha \subset \lambda \bigcap_{n=0}^k \psi^{-n}(K_1 \cup K_2) = \bigcap_{n=0}^k \psi^{-n}(\lambda K_1 \cup \lambda K_2)$ viene a ser la unión disjunta de 2^{k+1} intervalos cada uno de longitud $\lambda(\frac{1-\alpha}{2})^{k+1}$. Así $K_\alpha - \lambda K_\alpha \subset \bigcap_{n=0}^k \psi^{-n}(K_1 \cup K_2) - \bigcap_{n=0}^k \psi^{-n}(\lambda K_1 \cup \lambda K_2)$ viene a ser $2^{k+1} 2^{k+1}$ intervalos de longitud $(\frac{1-\alpha}{2})^{k+1} + \lambda(\frac{1-\alpha}{2})^{k+1}$ y la longitud total de estos intervalos es

$$2^{k+1} \cdot 2^{k+1} \left(\left(\frac{1-\alpha}{2} \right)^{k+1} + \lambda \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)^{k+1} \right) = (2(1-\alpha))^{k+1} (1 + \lambda)$$

luego $m(K_\alpha - \lambda K_\alpha) \leq (2(1-\alpha))^k (1 + \lambda)$; para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $m(K_\alpha - \lambda K_\alpha) = 0$; para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha < \frac{1}{3}$, $\tau(K_\alpha) > 1$ y $(K_\alpha, \lambda K_\alpha)$ tiene intersección estable, cuando intercalamos, donde $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ contiene intervalo, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (debido al Lema de Gap).

Veamos que cuando $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, $K_\alpha - K_\alpha$ tiene medida nula, pero existen intervalos de valores de λ (que dependen de α) para los cuales $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ contiene un intervalo. En efecto, consideremos el conjunto $K = K_\alpha \times K_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ y la proyección $\pi(x, y) = x - y$, que viene a ser la proyección del plano sobre la recta que contiene el

vector $(1, -1)$.

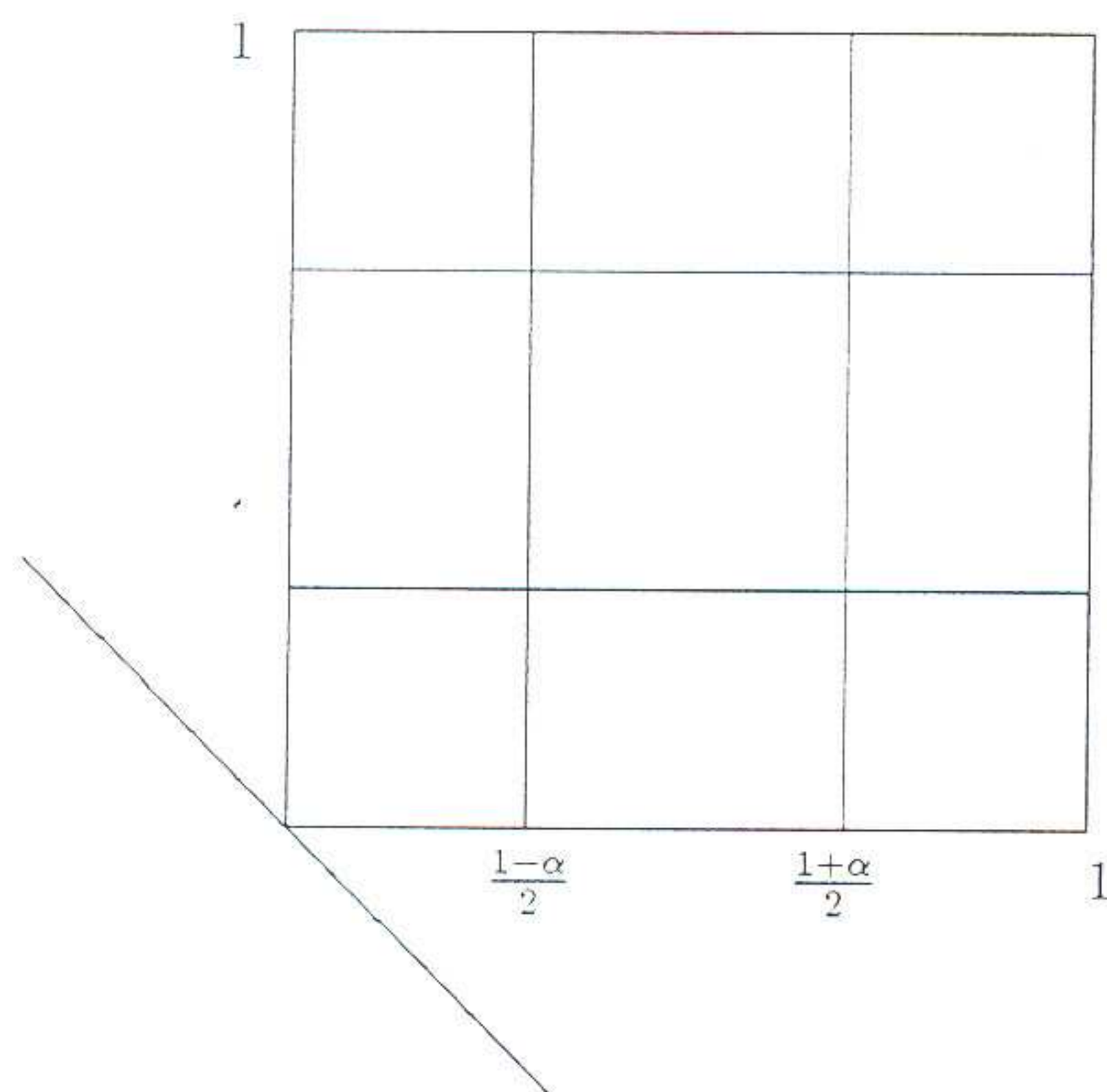


Figura 2.6

Esta recta se puede considerar como si fuera $\mathbb{R} \times 0$, entonces $\pi(K) = K_\alpha - K_\alpha$. En la primera etapa de la construcción de $K_\alpha \times K_\alpha$ sobran 4 cuadrados congruentes, siendo que el canto inferior izquierdo se proyecta exactamente sobre el canto superior derecho. así, por la autosemejanza de los K_α la construcción continúa como si ellos fuesen un solo cuadrado. Como $\alpha > \frac{1}{3}$, la proyección en la primera etapa de construcción consiste de tres intervalos disjuntos $[-1, -\alpha] \cup [\frac{\alpha-1}{2}, \frac{1-\alpha}{2}] \cup [\alpha, 1]$. A partir de ahí la diferencia se construye como un conjunto de cantor afín, que tiene medida nula y dimensión de Hausdorff menor que 1.



Figura 2.7

Si la proyección de la primera etapa de construcción de $K_\alpha \times (\lambda K_\alpha)$ fuera sobreyectiva sobre el intervalo $[-\lambda, 1]$, por el mismo argumento de la autosemejanza, las proyecciones de todas las etapas serán sobreyectivas, y tendremos $\pi(K_\alpha \times (\lambda K_\alpha)) = K_\alpha - \lambda K_\alpha = [-\lambda, 1]$. Vamos a determinar cuándo ocurre esto:

$$\begin{aligned} \pi(K_\alpha \times (\lambda K_\alpha)) &= [-\lambda, \frac{1-\alpha}{2} - \lambda(\frac{1+\alpha}{2})] \cup [\frac{1+\alpha}{2} - \lambda, 1 - \lambda(\frac{1+\alpha}{2})] \\ &\cup [-\lambda(\frac{1-\alpha}{2}), \frac{1-\alpha}{2}] \cup [\frac{1+\alpha}{2} - \lambda(\frac{1-\alpha}{2}), 1], \end{aligned}$$

que es igual al intervalo $[-\lambda, 1]$ si

$$\left(\frac{1-\alpha}{2} - \lambda\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda, \quad 1 - \lambda\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \geq -\lambda\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

y

$$\frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

ó

$$\left(\frac{1-\alpha}{2} - \lambda\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) \geq -\lambda\left(\frac{1-\alpha}{2}\right), \quad \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda$$

y

$$1 - \lambda\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

es decir $(\lambda \geq \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ y $\lambda \leq 1)$ ó $(\lambda \leq \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ y $\lambda \geq \alpha)$. Como $\alpha > \frac{1}{3}$, $\frac{2\alpha}{1-\alpha} > 1$ la primera posibilidad nunca ocurre. Como $\alpha < 1/2$, el intervalo $[\alpha, \frac{1-\alpha}{2\alpha}]$ es no vacío, es el intervalo de los valores de λ para los cuales $K_\alpha - \lambda K_\alpha = [-\lambda, 1]$. Por la autosemejanza, si $\lambda \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [(\frac{1-\alpha}{2})^k \alpha, (\frac{1-\alpha}{2})^k \alpha \cdot \frac{1-\alpha}{2\alpha}]$, $K_\alpha - \alpha K_\alpha$ contendrá un intervalo.

Ejemplo 14 Definamos el conjunto de Cantor K como $K = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{9^n}; \delta_n \in \{0, 4, 6, 8\}\}$.
Tenemos

$$\begin{aligned} K + K &= \{x + y : x \in K, y \in K\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{9^i} : \mu_i \in \{0, 4, 6, 8\} + \{0, 4, 6, 8\} \right\} \\ &= \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K - K &= \{x - y : x \in K, y \in K\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{9^i} : \lambda_i \in \{0, 4, 6, 8\} - \{0, 4, 6, 8\} \right\} \\ &= \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}. \end{aligned}$$

así, $K + K = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_i}{9^i}, \tilde{\mu}_i \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$, que es un conjunto de Cantor afín, de medida cero y dimensión de Hausdorff menor que 1, pero

$$K - K = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_i}{9^i}, \tilde{\lambda}_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\} = [-1, 1].$$

Por tanto, $K + K$ tiene medida cero mientras que $K - K$ es un intervalo.

Teorema 12 *Suponga que existe un abierto U de pares de conjuntos de Cantor tal que si $(K_1, K_2) \in U$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces K_1 no tiene intersección estable con $K_2 + t$. Entonces existe un conjunto residual $R \subset U$ tal que si $(K_1, K_2) \in R$ implica que $\text{int}(K_1 - K_2) = \emptyset$.*

Demostración: Sea $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ una enumeración de los racionales, y sea $U_n = \{(K_1, K_2) \in U : K_1 \cap (K_2 + r_n) = \emptyset\}$. Por hipótesis, U_n es denso y es claramente es abierto con respecto a la topología dada por la métrica de Hausdorff. En efecto, veamos que el complemento de U_n es cerrado ($\overline{U_n^c} = U_n^c$). Para esto, sea $(K_1, K_2) \in \overline{U_n^c}$ entonces existe una sucesión $\{(K_1)_m, (K_2)_m\}_{m \geq 0} \subset U_n^c$ tal que $\{(K_1)_m, (K_2)_m\}_{m \geq 0}$ converge a (K_1, K_2) con la métrica de Hausdorff. Si $(K_1) \cap (K_2 + r_n) = \emptyset$ tenemos $\epsilon > 0$ y pequeño tal que $(K_1)_\epsilon \cap (K_2 + r_n)_\epsilon = \emptyset$ y $d(K_1, (K_1 + r_n)) > \epsilon > 0$, donde d es la métrica de Hausdorff. Para $\epsilon > 0$ existe $m_0 > 0$ tal que para todo $m \geq m_0$ se tiene $d((K_1)_m, K_1) < \epsilon$ y $d((K_2)_m, K_2) < \epsilon$, y esto implica $(K_1)_m \subset (K_1)_\epsilon$ y $(K_2)_m \subset (K_2)_\epsilon$. Entonces

$$(K_1)_m \cap ((K_2)_m + r_n) \subset ((K_1)_\epsilon) \cap (K_2 + r_n)_\epsilon = \emptyset.$$

Luego $(K_1)_m \cap ((K_2)_m + r_n) = \emptyset$ y esto es una contradicción por que $((K_1)_m, ((K_2)_m + r_n)) \in U_n^c$. así $(K_1) \cap (K_2 + r_n) \neq \emptyset$, es decir $(K_1, K_2 + r_n) \in U_n^c$.

Por lo tanto, tomando $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, se tiene que R es residual. Si $(K_1, K_2) \in R$ entonces $K_1 \cap (K_2 + t) = \emptyset$, para todo $t \in \mathbb{Q}$ y esto implica que $(K_1 - K_2) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, es decir, $\text{int}(K_1 - K_2) = \emptyset$. \square

Capítulo 3

Conjuntos de Cantor y Bifurcaciones homoclínicas

3.1. Introducción

Sea $\{\varphi_\mu; \mu \in \mathbb{R}\}$ una familia uniparamétrica de difeomorfismos de clase \mathcal{C}^2 en una superficie M (i.e, M es una variedad de dimensión 2) que presenta una tangencia homoclínica para $\mu = 0$ y es persistentemente hiperbólico para $\mu < 0$. La tangencia se desdobra en órbitas homoclínicas transversales para $\mu > 0$. Se conoce que tal proceso implica muchos cambios de la estructura dinámica no importa cuan pequeño se tome el rango del parámetro en torno a cero. Veremos que cuando la suma de la capacidad límite estable e inestable de un conjunto básico es menor que uno la medida relativa del conjunto de bifurcación es muy pequeña y asintóticamente tiende a cero cuando el parámetro tiende a cero. El conjunto de bifurcación es definido como el conjunto de los $\mu > 0$ para los cuales φ_μ no es persistentemente hiperbólico.

Veremos también que el estudio de bifurcaciones homoclínicas lleva en forma natural al estudio de intersecciones de conjuntos de Cantor regular. En esta parte del trabajo utilizaremos el concepto de intersección estable y veremos la relación que existe entre intersección estable y dinámica hiperbólica.

3.2. Definiciones y algunos resultados

Dado un difeomorfismo $\varphi : M \xrightarrow{\mathcal{C}^k} M$ de una superficie y p un punto fijo hiperbólico φ , definamos

$$W^s(p) = \{x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = p\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M : \lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi^n(x) = p\}.$$

Estos conjuntos son variedades unidimensionales inmersas inyectivamente en M llamadas variedades estables e inestables del punto p . además, si p es de tipo silla (es decir, $d_p f$ tiene un autovalor en módulo menor que uno y el otro autovalor en módulo es mayor que uno) se pueden construir foliaciones estables \mathcal{F}^s e inestables \mathcal{F}^u en una vecindad del punto p , tal que estas foliaciones sean invariantes, transversales en la vecindad, la hoja estable que pasa por el punto p está contenida en $W^s(p)$ y la hoja inestable que pasa por el punto p está contenida en $W^u(p)$. Si φ es de clase \mathcal{C}^2 , entonces las foliaciones \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u son de clase \mathcal{C}^1 y si φ es de clase \mathcal{C}^3 , entonces las foliaciones \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u son de clase $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$. Para una construcción geométrica usando el λ -lema puede encontrarse en [9] pág 156.

Definición 13 Decimos que x es un punto homoclínico asociado a p si $x \neq p$ y si $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$. Decimos que x es un punto transversal homoclínico si $W^s(p)$ y $W^u(p)$ se intersecan transversalmente en x (i.e. $T_x(M) = T_x(W^s(p)) + T_x(W^u(p))$), caso contrario x es llamado tangencia homoclínica.

Definición 14 Un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ es un conjunto hiperbólico para φ si $\varphi(\Lambda) = \Lambda$, y existe una descomposición $T_x(M) = E_x^s \oplus E_x^u$ para cada $x \in \Lambda$ tal que

1. La descomposición depende continuamente de x ,
2. $d\varphi(E_x^s) = E_{\varphi(x)}^s$ y $d\varphi(E_x^u) = E_{\varphi(x)}^u$,
3. Existe una constante $\sigma > 1$ y $C > 0$ tal que para cada $v \in E_x^u$ y $n > 0$,

$$\|d\varphi^n(v)\| \geq C\sigma^n \|v\|,$$

y tal que para cada $v \in E_x^s$ y $n > 0$,

$$\|d\varphi^n(v)\| \leq C^{-1}\sigma^{-n} \|v\|.$$

aquí, $\| \cdot \|$ denota la norma de los vectores tangentes a M con respecto a una métrica Riemanniana fija sobre M .

El siguiente teorema nos muestra la estabilidad de conjuntos hiperbólicos contenidos en una variedad.

Teorema 13 Sea M una variedad, $\varphi : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de clase C^k ($k \geq 1$) y Λ un conjunto hiperbólico para φ . Entonces existe una vecindad \mathcal{N} de φ en $\text{Dif}^k(M)$ tal que para todo $\psi \in \mathcal{N}$ existe un único homeomorfismo $h_\psi : \Lambda \rightarrow M$ C^0 -cerca de la inclusión $i : \Lambda \rightarrow M$, tal que $\Lambda_\psi = h_\psi(\Lambda)$ es un conjunto hiperbólico para ψ y $\psi \circ h_\psi = h_\psi \circ \varphi$ sobre Λ . La conjugación h_ψ es Hölder continua. Es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{h_\psi} & \Lambda_\psi \\ \varphi \downarrow & \curvearrowright & \psi \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{h_\psi} & \Lambda_\psi. \end{array}$$

además, si Λ es un conjunto maximal φ -invariante en una vecindad U de Λ , entonces Λ_ψ es un conjunto maximal ψ -invariante en U .

La idea de la demostración del teorema es usar continuación de puntos fijos hiperbólicos en espacios de Banach. Para mayores detalles ver [9] pág. 157 ó [13] pág 101.

Sea Λ un conjunto hiperbólico y sea $x \in \Lambda$, definamos

$$W^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi^n(y), \varphi^n(x)) = 0\}$$

$$W^u(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow -\infty} d(\varphi^n(y), \varphi^n(x)) = 0\},$$

estos conjuntos son variedades C^k , si φ es un difeomorfismo de clase C^k . La unión de esas variedades forman foliaciones $\mathcal{F}^s(\Lambda)$ y $\mathcal{F}^u(\Lambda)$ de clase C^k y son φ -invariantes.

Definición 15 Sea $\varphi : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de clase C^k ($k \geq 1$), un subconjunto compacto $\Lambda \subset M$ es un conjunto básico si es un conjunto hiperbólico transitivo y maximal invariante.

1. Decimos que Λ es no trivial si no consiste de una única órbita periódica.
2. Decimos que Λ es un atractor (resp. un repulsor) si las hojas $\mathcal{F}^s(\Lambda)$ (resp. $\mathcal{F}^u(\Lambda)$) cubren una vecindad de Λ ; de otro modo decimos que Λ es de tipo silla o herradura.

En el caso en que φ sea un difeomorfismo de clase C^3 y como M es una superficie las hojas de las foliaciones estables e inestables puede ser extendidas a una vecindad de Λ , la cual denotaremos con \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u respectivamente, y son foliaciones φ -invariantes de clase $C^{1+\epsilon}$, es decir lleva hojas en hojas y las proyecciones a lo largo de las hojas en una sección transversal local es de clase C^1 con derivada Hölder continua. Para mayores detalles ver [2].

Ahora definamos dimensión estable e inestable de un conjunto básico Λ . Dado $x \in \Lambda$, sean $y \in W^s(x)$ y Σ_y una pequeña sección transversal a $W^s(x)$, con $y \in \Sigma_y$. denotemos por $A_y = \mathcal{F}^s(\Lambda) \cap \Sigma_y$, de hecho se toma $\Sigma_y \cap W_\delta^s(z)$, $z \in \Lambda$, donde $W_\delta^s(z)$ es un disco δ -disco centrado en z . La capacidad límite estable de Λ es definido por $d^s(\Lambda) = d(A_y)$. Es importante notar que $d^s(\Lambda)$ no depende de la elección del punto sobre la hoja estable ni de la sección transversal elegida para calcularla, pues \mathcal{F}^s es $\mathcal{C}^{1-\epsilon}$ y la capacidad límite es invariante por homeomorfismos lipschitzianos. De manera similar se define la capacidad límite inestable $d^u(\Lambda)$ para el conjunto básico Λ . Si Λ es un conjunto básico de tipo silla no trivial A_y es un conjunto de Cantor, así $0 \leq d^s(\Lambda) \leq 1$.

Definición 16 Decimos que $x \in M$ es no errante si para toda vecindad U de x en M existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Se denota por $\Omega(\varphi)$ el conjunto de puntos no errantes. Si $\Omega(\varphi)$ es hiperbólico, se dice que φ es hiperbólico.

Se demuestra fácilmente que el conjunto no errante es cerrado y φ -invariante.

Definición 17 Decimos que φ es Ω -estable si para todo $\tilde{\varphi}$ cercano a φ existe un homeomorfismo $h : \Omega(\varphi) \rightarrow \Omega(\tilde{\varphi})$ tal que $h \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ h$.

Definición 18 Decimos que φ es persistentemente hiperbólico si todo $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$) cerca de φ es también hiperbólico.

En el caso en que $\Omega(\varphi)$ es hiperbólico y como M es una superficie se tiene que $\overline{\text{per}(\varphi)} = \Omega(\varphi)$. En una variedad M de dimensión arbitraria cuando $\Omega(\varphi)$ es hiperbólico y $\overline{\text{per}(\varphi)} = \Omega(\varphi)$ se dice que M satisface el axioma A . En este caso se tiene que $\Omega(\varphi) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cdots \Lambda_n$, donde los Λ_i son conjuntos básicos disjuntos dos a dos [ver 13]. Esta descomposición de $\Omega(\varphi)$ es llamada descomposición espectral. Ahora podemos dar la siguiente definición.

Definición 19 Sea $\varphi : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) definido en una superficie cerrada M . Decimos que φ (ó $\Omega(\varphi)$) tiene ciclo si existen conjuntos básicos $\Lambda_i = \Lambda_{i_1}, \Lambda_{i_2}, \dots, \Lambda_{i_k} = \Lambda_i$, $k \geq 2$ tal que $W^u(\Lambda_{i_j}) \cap W^s(\Lambda_{i_{j+1}}) \neq \emptyset \forall j = 1, 2, \dots, k-1$.

Teorema 14 Si $\varphi : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) definido en una superficie cerrada M es persistentemente hiperbólico, entonces φ no tiene ciclos. Por lo tanto es Ω -estable.

Demostración: Suponiendo que φ tiene ciclo, entonces existe una cadena de conjuntos básicos de la descomposición espectral de $\Omega(\varphi)$, $\Lambda_i = \Lambda_{i_1}, \Lambda_{i_2}, \dots, \Lambda_{i_k} = \Lambda_i$, $k \geq 2$ tal que $W^u(\Lambda_{i_j}) \cap W^s(\Lambda_{i_{j+1}}) \neq \emptyset \forall j = 1, 2, \dots, k-1$. Por [11] se conoce

que si $\tilde{\varphi}$ cerca de φ en el sentido \mathcal{C}^k , entonces existe un conjunto básico Λ de $\tilde{\varphi}$ y conjuntos básicos $\tilde{\Lambda}_j \subsetneq \Lambda$ tal que $\tilde{\Lambda}_j$ cercano a Λ_{i_j} . Es decir, tenemos nuevos puntos periódicos lo cual no puede ocurrir por la continuación hiperbólica (Teorema 13) y esto contradice el hecho de que φ es persistentemente hiperbólico. \square

Definición 20 Una filtración para un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ es una familia finita M_1, M_2, \dots, M_k de subvariedades con borde y con la misma dimensión que M , tal que

1. $M_1 = M$ y $M_{i-1} \subset \text{int}M_i \forall 1 \leq i < k$
2. $\varphi(M_i) \subset \text{int}M_i \forall 1 \leq i \leq k$.

Los conjuntos abiertos $L_i = \text{int}(M_i - M_{i+1})$ son los niveles de la filtración (el conjunto $M_{k+1} = \emptyset$).

Teorema 15 Si φ es hiperbólico, $\overline{\text{per}(\varphi)} = \Omega(\varphi)$ y tiene la propiedad de no-ciclo, entonces admite una filtración tal que cada pieza básica coincide con el conjunto de órbitas contenidos en el mismo nivel.

Tenemos,

$$\Lambda_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(L_i) \text{ para todo } i.$$

Sea g cualquier difeomorfismo \mathcal{C}^k -cerca de f . Entonces M_1, M_2, \dots, M_k es también una filtración para g , por lo tanto, $\Omega(g)$ está contenido en $\Lambda_1(g) \cup \dots \cup \Lambda_k(g)$, donde

$$\Lambda_i(g) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(L_i)$$

por el Teorema 13 $f|_{\Lambda_i}$ es conjugado a $g|_{\Lambda_i(g)}$. Entonces, cada Λ_i está contenido en $\Omega(g)$ y $f|_{\Omega(f)}$ es conjugado a $g|_{\Omega(g)}$. así, f es Ω -estable, en el sentido \mathcal{C}^k .

Ejemplo 15 Vamos a construir un difeomorfismo en la esfera S^2 cuyo conjunto de puntos no errantes es infinito.

Tomemos un rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $mnpq$ tal que f transforma dicho rectángulo en una herradura como se muestra en la figura:

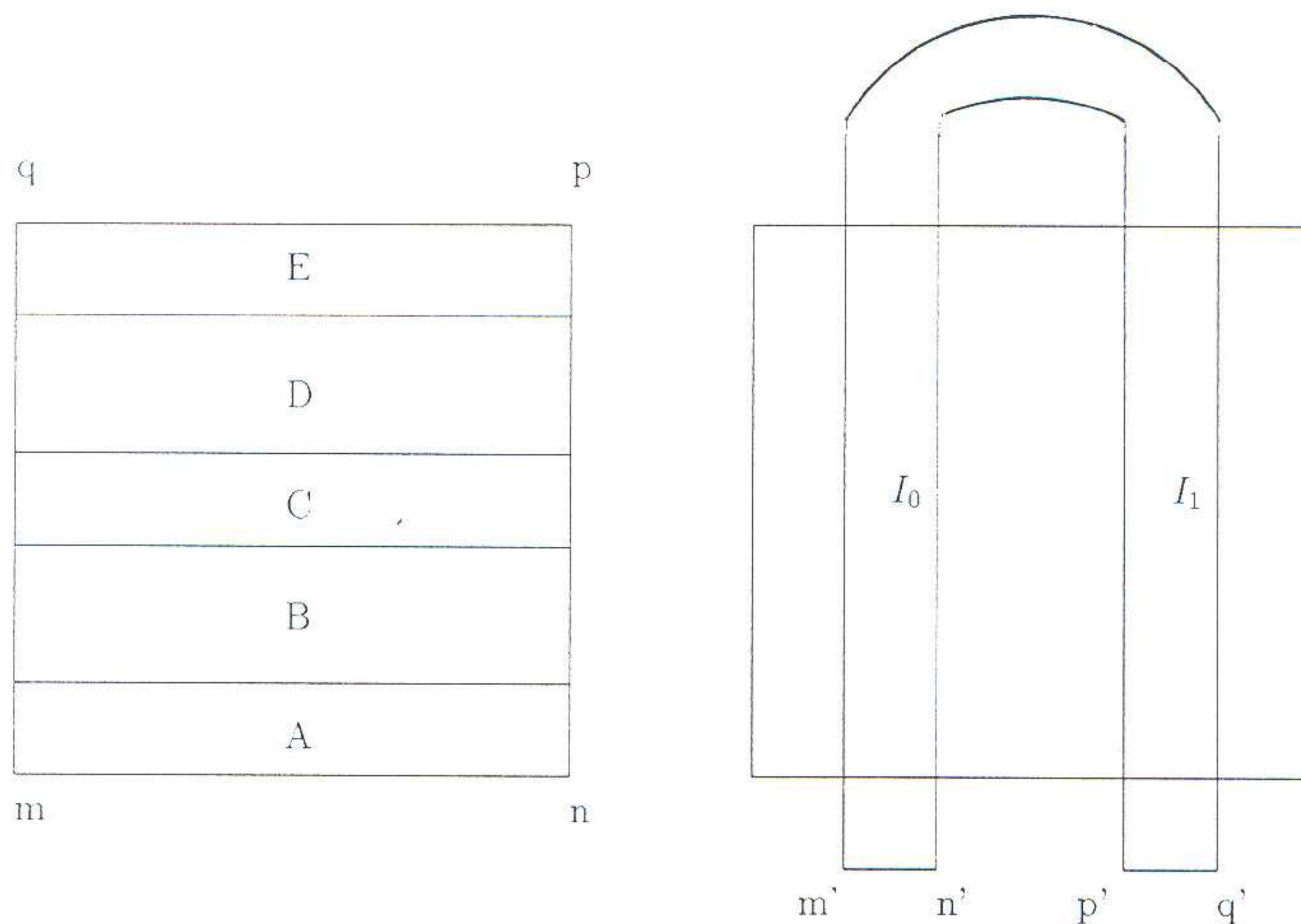


Figura 3.1

Donde $f(m) = m'$, $f(n) = n'$, $f(p) = p'$, $f(q) = q'$, $f(Q) \cap Q$ posee dos componentes conexas I_0 e I_1 y las restricciones de $f : f^{-1}(I_0) = B \rightarrow I_0$, $f : f^{-1}(I_1) = B \rightarrow I_1$ son aplicaciones afines que contraen horizontalmente y expanden verticalmente.

Ahora extendemos este mapeo al disco D^2 en D^2 añadiendo dos semidiscos arriba y abajo de Q como se muestra en la figura 3.2. La imagen del semidisco inferior Δ esta contenido en Δ y la extensión de f a Δ es elegido contractiva. Así f restringido a Δ tiene un único punto fijo p_1 lo cual es todo el conjunto no errante contenido en Δ y es un poso.

Añadiendo una fuente en el punto antipodal de S^2 , p_2 , podemos extender f a un difeomorfismo de S^2 en S^2 .

Entonces tendremos una filtración M adaptada a $f : S^2 \rightarrow S^2$:

$$\emptyset = M_0 \subset \Delta = M_1 \subset D^2 = M_2 \subset S^2 = M_3$$

y además $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Delta) = \{p_1\}$, $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(S^2 - D^2) = \{p_2\}$.

También tendremos que $\Omega(f) = p_1 \cup p_2 \cup \{\Omega(f) \cap Q\}$ y $\Lambda = \Omega(f) \cap Q$ es un conjunto hiperbólico mas aún es un conjunto básico tipo herradura.

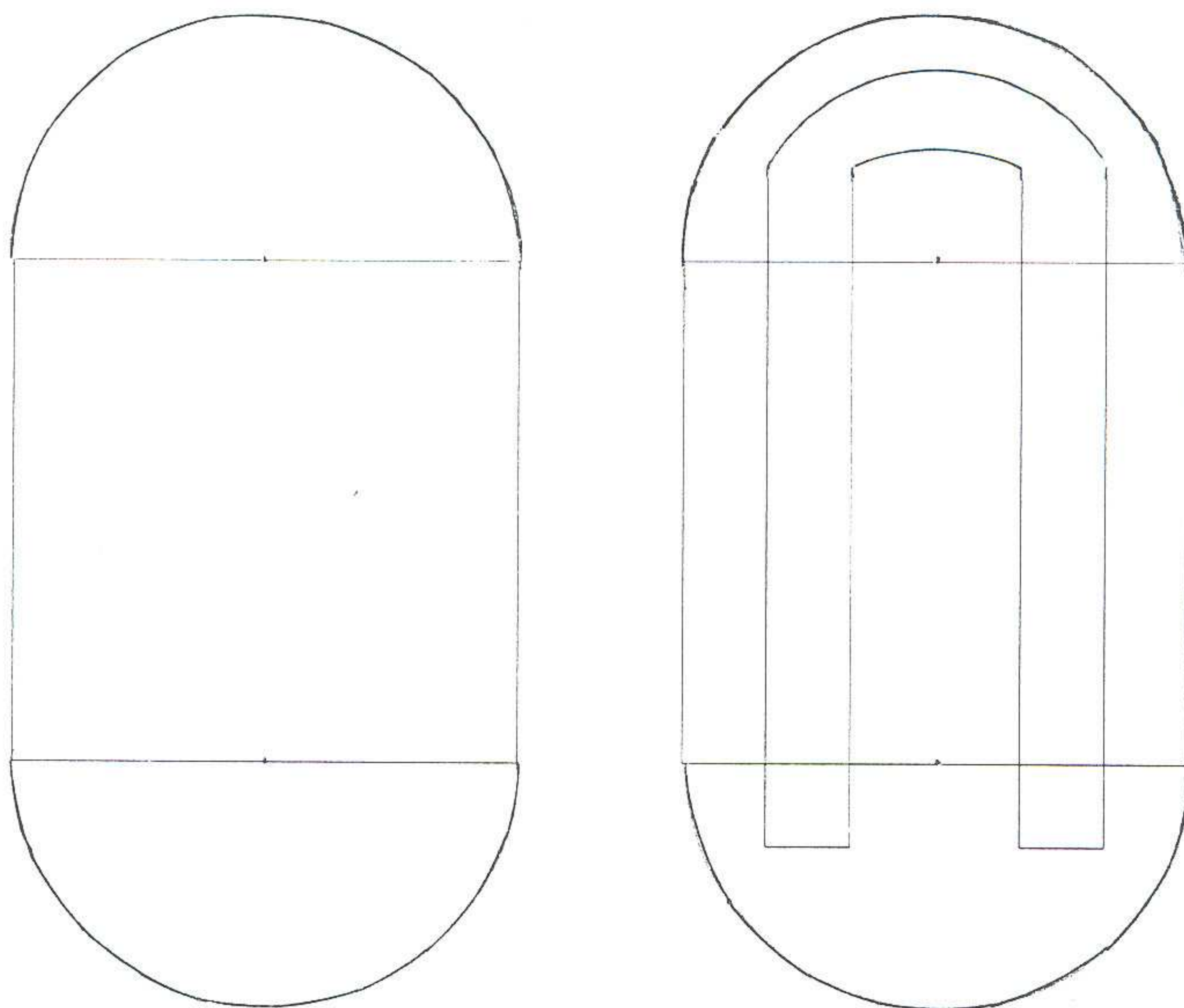


Figure 3.2

Definición 21 Una familia a 1-parámetro (φ_μ) de difeomorfismos en una superficie cerrada M tiene una Ω -explosión homoclínica en $\mu = 0$ si

1. Para $\mu < 0$, φ_μ es persistentemente hiperbólico.
2. Para $\mu = 0$, $\Omega(\varphi_0) = \tilde{\Omega}(\varphi_0) \cup \mathcal{O}$, donde el conjunto hiperbólico $\tilde{\Omega}(\varphi_0) = \lim_{\mu \neq 0} \Omega(\varphi_\mu)$ y \mathcal{O} es una órbita de tangencia homoclínica asociada a un punto fijo silla p . además el producto de los valores propios de $d\varphi_0$ es diferente de 1 en norma.
3. $W^s(p)$ y $W^u(p)$ tiene tangencias cuadráticas en los puntos de \mathcal{O} con desdoblamiento genérico; \mathcal{O} es la única órbita de tangencias entre las variedades estables e inestables de órbitas periódicas de φ_0 .

Cuando decimos que $W^s(p)$ y $W^u(p)$ tiene tangencias cuadráticas en los puntos de \mathcal{O} con desdoblamiento genérico significa que existen coordenadas (x_1, x_2) , μ -dependiente

en una vecindad de la órbita de tangencia, tal que en esas coordenadas, tenemos:

$$W^s(p_\mu) = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$$

$$W^u(p_\mu) = \{(x_1, x_2) : x_2 = ax_1^2 + b\mu\}, a \neq 0, b \neq 0.$$

Consecuencias:

1. Como para $\mu < 0$, φ_μ es persistentemente hiperbólico, existen conjuntos básicos $\Lambda_i(\mu)$ dependiendo continuamente de μ tal que $\Omega(\varphi_\mu)$ es unión disjunta de esos conjuntos básicos.
2. Podemos aún considerar conjuntos básicos $\Lambda_i(\mu)$ para μ positivo y pequeño como continuación de $\Lambda_i(0)$ en el siguiente modo: Si elegimos vecindades $V_i \supset \Lambda_i(0)$ tal que $\Lambda_i(0) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_0^n(V_i)$, entonces tomamos $\Lambda_i(\mu) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_\mu^n(V_i)$. Se puede ver que $\Lambda_i(\mu)$ es hiperbólico y $\varphi_\mu|_{\Lambda_i(\mu)}$ es conjugado a $\varphi_0|_{\Lambda_i(0)}$.
3. $p = \lim_{\mu \nearrow 0} p(\mu)$ donde $p(\mu) \in \Lambda_i(\mu)$ para algún conjunto básico $\Lambda_i(\mu)$.

Notación

- Denotemos $\Lambda_i(0) = \lim_{\mu \nearrow 0} \Lambda_i(\mu)$ simplemente por Λ , al cual llamamos conjunto básico asociado con la tangencia homoclínica \mathcal{O} .
- Denotemos con el índice i_0 , al punto silla $p_\mu \in \Lambda_{i_0}(\mu)$.
- Denotemos por $B = \{\mu > 0 : \varphi_\mu \text{ no es persistentemente hiperbólico}\}$, al cual llamamos conjunto de bifurcación.

En el siguiente teorema veremos que la medida relativa del conjunto de bifurcación es muy pequeña, asintóticamente tendiendo a cero con el diámetro del parámetro. Aquí daremos una idea de la prueba. La demostración completa puede ser encontrada en [9] pág. 211-221.

Teorema 16 *Sea $\{\varphi_\mu : \mu \in \mathbb{R}\}$ una familia de difeomorfismo de clase C^2 definida en M^2 con una Ω -explosión homoclínica en $\mu = 0$. Suponga que $d^s(\Lambda) + d^u(\Lambda) < 1$, donde Λ es el conjunto básico de φ_0 asociado a la tangencia homoclínica.*

Entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(B \cap [0, \delta])}{\delta} = 0$.

Demostración: Como para $\mu < 0$, φ_μ es persistentemente hiperbólico, entonces φ_μ no tiene ciclos. Podemos asumir que $W^u(\Lambda_i(\mu)) \cap W^s(\Lambda_l(\mu)) = \emptyset \quad \forall i < l$ (*). también

se puede probar en $\mu = 0$, φ_0 no tiene ciclos.

Todos los conjuntos básicos $\Lambda_i(\mu)$ son abiertos en $\Omega(\varphi_\mu)$ para $\mu \leq 0$ excepto para $\Lambda_{i_0}(0)$ (conjunto básico que contiene a $p \in \Lambda_{i_0}(0)$) entonces $\varphi_0|_{\Lambda_i(0)}$ es conjugado a $\varphi_\mu|_{\Lambda_i(\mu)} \forall i$ y $\mu < 0$. Por lo tanto, los conjuntos básicos considerados aquí son abiertos en el conjunto no errante o son homeomorfos a uno que tiene esta propiedad.

Como tenemos $W^s(\Lambda_{i_0}(0)) = W^s(\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O})$ y $W^u(\Lambda_{i_0}(0)) = W^u(\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O})$ sustituyendo $\Lambda_{i_0}(0)$ por $\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$ entonces aún se sigue (*), luego existe una filtración $M_1 \subset M_2 \subset M$ tal que

1. M_i es cerrado.
2. $M_1 \subset \text{int}M_2$
3. $\varphi(M_i) \subset \text{int}(M_i)$
4. $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(M_2 - M_1) = \Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$.

Esto significa que para cualquier vecindad pequeña U de $\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$, existe un entero $n(U)$ tal que para cada punto de x que no pertenece a U , $\varphi^{n(U)}(x)$ o $\varphi^{-n(U)}(x)$ está en el complemento de $M_2 - \text{int}(M_1)$.

Para μ cercano de cero aún tenemos esta propiedad para φ_μ en lugar de φ . Esto significa que para cualquier vecindad U de $\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$, existe $\mu_0(U) > 0$ tal que para cualquier $\mu \in [0, \mu_0(U)]$, se tiene $\Omega(\varphi_\mu) \cap (M_2 - M_1) \subset U$. así, para el resto de la demostración podemos restringir nuestra atención a tal vecindad U , restringiendo μ a $[0, \mu_0(U)]$.

Como φ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^2 , existen foliaciones \mathcal{F}_μ^s y \mathcal{F}_μ^u definidas en una vecindad de $\Lambda(\mu)$ de clase \mathcal{C}^1 . Son \mathcal{C}^1 en el sentido de que las direcciones tangentes dependen \mathcal{C}^1 sobre $x \in M$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Para x en el dominio de definición de estas foliaciones, $E_\mu^s(x)$ y $E_\mu^u(x)$ denotan los espacios tangentes de las hojas de \mathcal{F}_μ^s y \mathcal{F}_μ^u que pasa por x . Desde que $p_\mu \in \Lambda(\mu)$, \mathcal{F}_μ^s y \mathcal{F}_μ^u son ambos definidos en una vecindad de p_μ . Tomemos r y q dos puntos de la órbita de tangencia en $W_{loc}^u(p)$ y $W_{loc}^s(p)$. Extendemos el dominio de \mathcal{F}_μ^u a lo largo de $W^u(p_\mu)$ hasta quedar incluida en una vecindad de r ; esta extensión se obtiene con algunas iteraciones positivas de φ_μ en \mathcal{F}_μ^u . también podemos extender el dominio de \mathcal{F}_μ^s hasta quedar incluido en una vecindad de q , aquí usamos las iteraciones negativas de φ_μ . Cerca de r y para μ pequeño existe una curva l_μ de clase \mathcal{C}^1 . donde las hojas de las foliaciones \mathcal{F}_μ^s y \mathcal{F}_μ^u

son tangentes.

Sea $A(\mu) = (W^s(p_\mu) \cap \Lambda_{i_0}(\mu)) \cup \mathcal{O}_\mu^s$, donde \mathcal{O}_μ^s es la φ_μ -órbita del punto $q_\mu \in W_{loc}^s(p_\mu)$ dependiendo continuamente de μ y tal que $q_0 = q$. $B(\mu) = (W^u(p_\mu) \cap \Lambda_{i_0}(\mu)) \cup \mathcal{O}_\mu^u$, donde \mathcal{O}_μ^u es la φ_μ -órbita del punto $r_\mu \in W^u(p_\mu)$ dependiendo continuamente de μ y tal que $r_0 = r$. Podemos observar que $A(\mu)$ y $B(\mu)$ son conjuntos escalados con factor de escalamiento $|\lambda_\mu|$ y $|\sigma_\mu|^{-1}$, esto debido a que podemos identificar $W^s(p_\mu)$ y $W^u(p_\mu)$ con \mathbb{R} y además $\varphi_\mu|_{W^s(p_\mu)}$ (resp. $\varphi_\mu|_{W^u(p_\mu)}$) se puede hacer un cambio de coordenadas en una vecindad de p_μ y escribir $\varphi_\mu = \lambda_\mu x$ (resp. $\varphi_\mu = \sigma_\mu^{-1}x$). Sean $\tilde{A}(\mu)$ y $\tilde{B}(\mu)$ las proyecciones de $A(\mu)$ y $B(\mu)$ a lo largo de las hojas inestables y estables en l_μ respectivamente. Podemos notar que las proyecciones a lo largo de las hojas son de clase \mathcal{C}^1 así que $\tilde{A}(\mu)$ y $\tilde{B}(\mu)$ son semejantes a los conjuntos $\psi_\mu(A(\mu))$ y $\varphi_\mu(B(\mu))$ al final de la sección de conjuntos escalados visto en el capítulo anterior.

Sea $F_\mu \subset W^s(p_\mu)$ un dominio fundamental y sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Entonces existe una vecindad pequeña U de $\Lambda_{i_0}(0) \cup \mathcal{O}$ y $\mu_1 > 0$ tal que para $0 < \mu < \mu_1$, siempre que para algún $x \in F_\mu$ la hoja $\mathcal{F}_\mu^u(x) \cap U \neq \emptyset$, entonces $x \in {}_\epsilon A(\mu)$, donde ${}_\epsilon A(\mu) = \{x : \exists x' \in A(\mu) \text{ tal que } d(x, x') < \epsilon d(p_\mu, x')\}$. Este conjunto es llamado ϵ -vecindad escalada del conjunto $A(\mu)$.

Asumimos que para μ_1 pequeño y U también pequeño como arriba existe $0 < \mu < \mu_1$, $\Omega(\varphi_\mu) \setminus \tilde{\Omega}(\varphi_\mu) \subset U$. La componente de U que contiene r se denota U_r ; $\pi_{s,\mu}$ y $\pi_{u,\mu}$ denotan las proyecciones de U_r sobre $W_{loc}^s(p_\mu)$, $W_{loc}^u(p_\mu)$ a lo largo de las hojas \mathcal{F}_μ^u y \mathcal{F}_μ^s . Entonces, los puntos no errantes de φ_μ para $0 < \mu < \mu_1$ cerca de r , están contenidos en,

$$U_r \cap \pi_{s,\mu}^{-1}({}_\epsilon A(\mu)) \cap \pi_{u,\mu}^{-1}({}_\epsilon B(\mu)),$$

para alguna constante K y $0 < \mu < \mu_1$,

$$(\Omega(\varphi_\mu) \cap U_r) \subset U_r \cap \pi_{s,\mu}^{-1}({}_\epsilon A(\mu)) \cap [-K\mu, K\mu] \cap \pi_{u,\mu}^{-1}({}_\epsilon B(\mu)) \cap [-K\mu, K\mu].$$

Ahora daremos una estimación de la distancia entre las intersecciones de l_μ con $\pi_{s,\mu}^{-1}({}_\epsilon A(\mu)) \cap [-K\mu, K\mu]$ y con $\pi_{u,\mu}^{-1}({}_\epsilon B(\mu)) \cap [-K\mu, K\mu]$, el cual denotaremos ${}_\epsilon \tilde{A}^{K\mu}(\mu)$ y ${}_\epsilon \tilde{B}^{K\mu}(\mu)$

Para estimar esto necesitamos en las consideraciones de arriba, ϵ y μ_1 variable. La posible elección de μ_1 depende de

$$B_{\mu,\epsilon} = \{\mu' \in (0, \mu) : d({}_\epsilon \tilde{A}^{K\mu}(\mu'), {}_\epsilon \tilde{B}^{K\mu}(\mu')) < \epsilon\mu\}.$$

Podemos notar que este conjunto es cercano a la definición de $M_{r,\epsilon}$ de la sección de conjuntos escalados. \square

3.3. Consecuencia del desdoblamiento genérico de tangencias homoclínicas

Sea q un punto de tangencia homoclínica asociada a un punto silla p de un difeomorfismo φ de una superficie cerrada M . Si $p \in \Lambda$, donde Λ es un conjunto básico no trivial de tipo silla, consideremos: $K^s = W_{loc}^s(p) \cap \Lambda$ y $K^u = W_{loc}^u(p) \cap \Lambda$. Como se sabe, estos conjuntos son conjuntos de Cantor regulares (ver [9] pág. 54). Desdobleemos la tangencia por medio de una familia genérica φ_μ ($\varphi_0 = \varphi$) de difeomorfismos, tenemos una línea de tangencia l transversal a $W^s(p)$ pasando por q (l es el conjunto de puntos de tangencia entre las foliaciones estables \mathcal{F}^s e inestables \mathcal{F}^u de Λ).

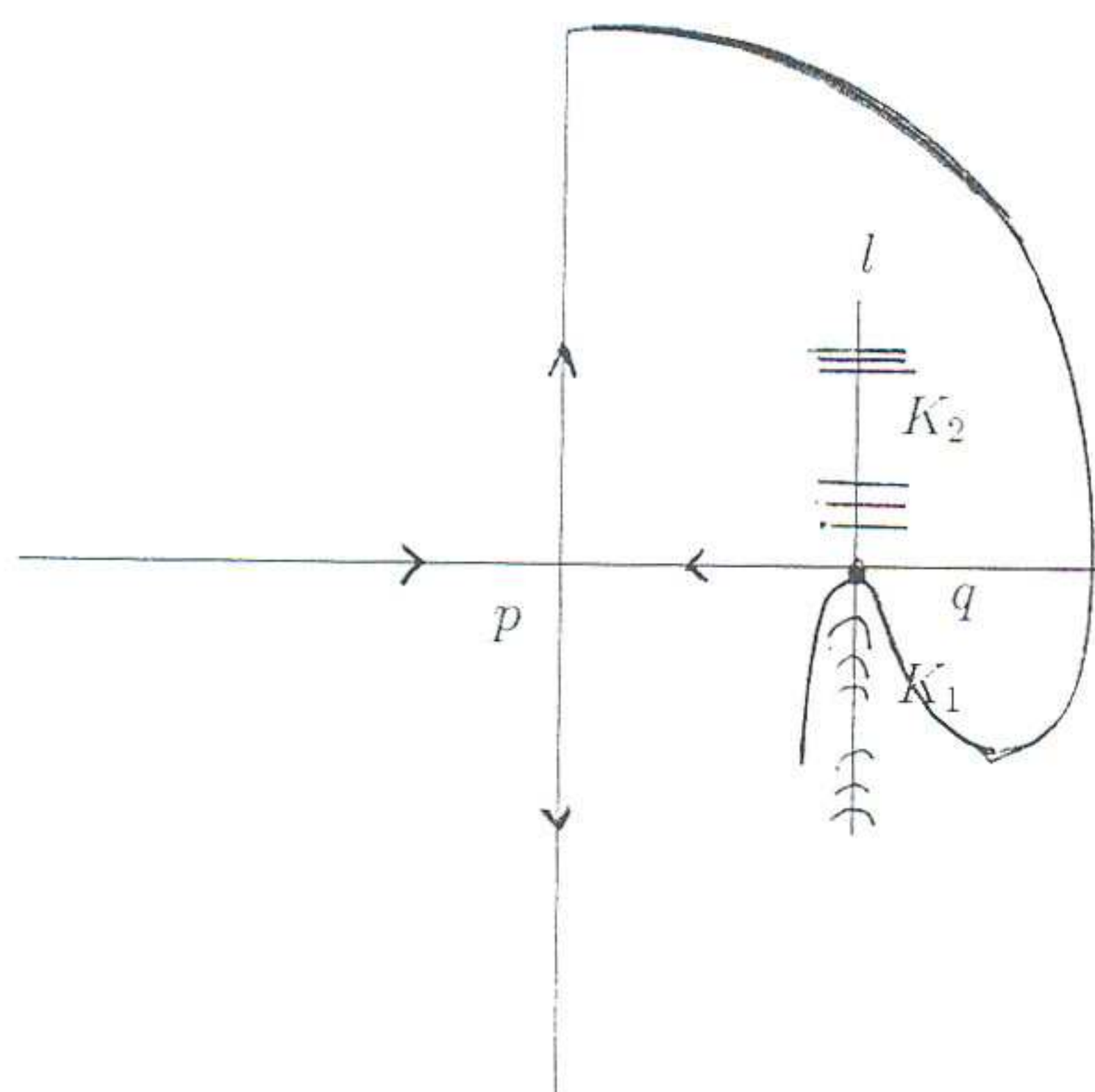


Figura 3.3

Para $\mu = 0$, tenemos $(K_1)_0 = l \cap \mathcal{F}^u(\Lambda)$ y $(K_2)_0 = l \cap \mathcal{F}^s(\Lambda)$ que son conjuntos de Cantor regulares difeomorfos a K^s y K^u .

Para $\mu \neq 0$, sea $p_\mu \in \Lambda_\mu$ punto silla del conjunto básico Λ_μ (la continuación hiperbólica de Λ), l^μ es la línea de tangencia formada por \mathcal{F}_μ^s y \mathcal{F}_μ^u en Λ_μ . Sea $K_\mu^s = W_{loc}^s(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$, $K_\mu^u = W_{loc}^u(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$, $(K_1)_\mu = l^\mu \cap \mathcal{F}_\mu^u(\Lambda)$ y $(K_2)_\mu = l^\mu \cap \mathcal{F}_\mu^s(\Lambda)$. Los dos últimos conjuntos de Cantor regulares son difeomorfos a K_μ^s y K_μ^u respectivamente.

Si $(K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset$, estaremos creando nuevas tangencias entre \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u , en el caso en que φ_μ no sea persistentemente hiperbólico. Con algunas hipótesis genéricas podemos concluir (tal vez via reparametrización) que el par $((K_1)_\mu, (K_2)_\mu)$ está próximo al par $((K_1), (K_2) + \mu)$ lo que nos lleva a indagar sobre el tamaño del conjunto $\{\mu : K_1 \cap (K_2 + \mu) \neq \emptyset\} = K_1 - K_2$. Esta diferencia es la diferencia aritmética. Existen resultados parciales sobre ese problema (vea capítulo anterior).

Ahora veremos una relación entre intersección estable y dinámica:

Teorema 17 *En el caso de bifurcaciones homoclínicas, si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(\tilde{K}_1)_0$ interseca $((\tilde{K}_2)_0 + t)$ establemente, donde $(\tilde{K}_1)_0$ y $(\tilde{K}_2)_0$ son las linealizaciones de $(K_1)_0$ y $(K_2)_0$, respectivamente entonces el conjunto $\{\mu > 0 : (K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset\}$ contiene un abierto con densidad positiva en $\mu = 0$.*

Para hacer esta prueba necesitamos los siguientes lemas.

Lema 6 *Sea $(K_1)_\mu, (K_2)_\mu, \tilde{K}_\mu^s$ y \tilde{K}_μ^u como en el inicio de esta sección, entonces existen difeomorfismos $(\tilde{h}_1)_\mu$ y $(\tilde{h}_2)_\mu$ tal que $(K_1)_\mu = (\tilde{h}_1)_\mu(\tilde{K}_\mu^s)$ y $(K_2)_\mu = (\tilde{h}_2)_\mu(\tilde{K}_\mu^u)$.*

Demostración: Como \tilde{K}_μ^s y \tilde{K}_μ^u son las linealizaciones de los conjuntos de Cantor K_μ^s y K_μ^u , entonces existen difeomorfismos f_μ y g_μ tal que

$$K_\mu^s = f_\mu(\tilde{K}_\mu^s) \quad \text{y} \quad K_\mu^u = g_\mu(\tilde{K}_\mu^u) \quad \text{con} \quad f'_\mu(0) = g'_\mu(0) = 1.$$

Por lo dicho al principio de esta sección $(K_1)_\mu$ es difeomorfo a K_μ^s y $(K_2)_\mu$ es difeomorfo a K_μ^u , entonces existen difeomorfismos $(h_1)_\mu$ y $(h_2)_\mu$ que varían $C^{1+\epsilon}$ -continuamente con μ tal que

$$(K_1)_\mu = (h_1)_\mu(K_\mu^s) \quad \text{y} \quad (K_2)_\mu = (h_2)_\mu(K_\mu^u).$$

Si $(\tilde{h}_1)_\mu = (h_1)_\mu \circ f_\mu$ y $(\tilde{h}_2)_\mu = (h_2)_\mu \circ g_\mu$, entonces $(K_1)_\mu = (\tilde{h}_1)_\mu(\tilde{K}_\mu^s)$ y $(K_2)_\mu = (\tilde{h}_2)_\mu(\tilde{K}_\mu^u)$. \square

Lema 7 *Sea $(\lambda_1)_\mu$ y $(\lambda_2)_\mu$ los autovalores de $d\varphi_\mu(p_\mu)$. Dado un $\delta > 0$ pequeño, $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_1^m \lambda_2^n - 1| < \delta$ y para $\mu \in (\lambda_2^{-n}(t - \epsilon), \lambda_2^{-n}(t + \epsilon))$, entonces $\frac{\lambda_1^m}{(\lambda_1)_\mu^m}$ y $\frac{\lambda_2^n}{(\lambda_2)_\mu^n}$ están cerca de 1 cuando m y n es grande. Donde $t, \epsilon > 0$ reales fijos.*

Demostración: De $\mu \in (\lambda_2^{-n}(t - \epsilon), \lambda_2^{-n}(t + \epsilon))$ tenemos $|\mu| < (\epsilon + |t|)\lambda_2^{-n}$ y de $|\lambda_1^m \lambda_2^n - 1| < \delta$ se tiene $\lambda_2^{-n} < \frac{1}{1-\delta}\lambda_1^m$. Por la diferenciabilidad de (φ_μ) en relación a μ deducimos que existe $K > 0$ tal que

$$|(\lambda_i)_\mu - \lambda_i| \leq k|\mu| \quad , \quad i = 1, 2.$$

Luego:

$$|(\lambda_1)_\mu - \lambda_1| \leq K|\mu| \leq K'\lambda_2^{-n} \leq K''\lambda_1^m,$$

donde K, K', K'' son constantes, entonces $(\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1}) - (1 \pm K''\lambda_1^{m-1})$ cercano a cero cuando m es grande y $\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1} \leq (1 + K''\lambda_1^{m-1})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1}\right)^m - (1 \pm K''\lambda_1^{m-1})^m &= \left(\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1} - (1 \pm K''\lambda_1^{m-1})\right) \cdot \\ &\quad \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1}\right)^{m-1-i} (1 \pm K''\lambda_1^{m-1})^i \\ &\leq \left(\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1} - (1 \pm K''\lambda_1^{m-1})\right) \cdot (m(1 \pm K''\lambda_1^{m-1})^{m-1}) \end{aligned}$$

luego $(\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1})^m - (1 \pm K''\lambda_1^{m-1})^m$ tiende a cero cuando m tiende al infinito. Entonces $(\frac{(\lambda_1)_\mu}{\lambda_1})^m$ cercano a $(1 \pm K''\lambda_1^{m-1})^m$ y esto es cercano a 1 cuando m es grande. Por lo tanto, $(\frac{\lambda_1^m}{(\lambda_1)_\mu^m})$ es cercano a 1 cuando m es grande. De manera similar se prueba $\frac{\lambda_2^n}{(\lambda_2)_\mu^n}$ es cercano a 1 cuando n tiende al infinito. \square

Lema 8 Si $(\tilde{h}_1)_\mu$ y $(\tilde{h}_2)_\mu$ son como en el Lema 6 y $(\tilde{h}_1)_\mu(0) = \mu$ y $(\tilde{h}_2)_\mu(0) = 0$. Entonces $(\tilde{h}_1)_\mu(x)$ está cerca de $ax + \mu$ y $(\tilde{h}_2)_\mu(x)$ está cerca de bx cuando x está cerca de cero. Donde $a = (\tilde{h}_1)'_0(0)$ y $b = (\tilde{h}_2)'_0(0)$.

Demostración: Haciendo $G(\mu, x) = (\tilde{h}_1)_\mu(x)$ y $H(\mu, x) = (\tilde{h}_2)_\mu(x)$, utilizando la diferenciabilidad de estas funciones tenemos

$$\begin{aligned} G(\mu, x) &= G(0, 0) + \frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0) \cdot \mu + \frac{\partial G}{\partial x}(0, 0) \cdot x + r(\mu, x) \\ &= (\tilde{h}_1)'_0 x + \mu + r(\mu, x). \end{aligned}$$

Es decir $(\tilde{h}_1)_\mu(x)$ está cerca de $ax + \mu$ cuando x está cerca de 0. De la misma manera se puede probar que $(\tilde{h}_2)_\mu(x)$ está cerca de bx cuando x está cerca de 0. \square

Demostración del Teorema 17: Como $(\lambda_1)_\mu \cdot K_\mu^s \subset K_\mu^s$ y $(\lambda_2)_\mu^{-1} \cdot K_\mu^u \subset K_\mu^u$ donde $(\lambda_1)_\mu$ y $(\lambda_2)_\mu$ son los autovalores de $d\varphi_\mu(p_\mu)$ con $|(\lambda_1)_\mu| < 1 < |(\lambda_2)_\mu|$, entonces

$$(\lambda_1)_\mu \cdot \tilde{K}_\mu^s \subset \tilde{K}_\mu^s \quad \text{y} \quad (\lambda_2)_\mu^{-1} \cdot \tilde{K}_\mu^u \subset \tilde{K}_\mu^u.$$

Por hipótesis del teorema, $(\tilde{K}_1)_0$ interseca $((\tilde{K}_2)_0 + t)$ establemente entonces $t \in \text{int}((\tilde{K}_1)_0 - (\tilde{K}_2)_0)$. Es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que si $t' \in \mathbb{R}$ y $|t' - t| < \epsilon$ entonces

$$(\tilde{K}_1)_0 \cap ((\tilde{K}_2)_0 + t') \neq \emptyset.$$

Supongamos, tal vez vÃ¡a una reparametrizaci3n de la familia (φ_μ) , que $(\tilde{h}_1)_\mu(0) = \mu$ y $(\tilde{h}_2)_\mu(0) = 0$. Aplicando los Lemas 7 y 8 se tiene

$$\begin{aligned} (\lambda_1)_\mu^{-m} (\tilde{h}_1)_\mu ((\lambda_1)_\mu^m \tilde{K}_\mu^s) &\text{ es } \mathcal{C}^{1+\epsilon} \text{ cercano a } a\tilde{K}_0^s + \lambda_1^{-m}\mu \text{ y} \\ (\lambda_1)_\mu^{-m} (\tilde{h}_2)_\mu ((\lambda_2)_\mu^{-n} \tilde{K}_\mu^u) &\text{ es } \mathcal{C}^{1+\epsilon} \text{ cercano a } b\tilde{K}_0^u. \end{aligned}$$

Como $a\tilde{K}_0^s = (\tilde{K}_1)_0$ y $b\tilde{K}_0^u = (\tilde{K}_2)_0$ entonces tenemos

$$((\lambda_1)_\mu^{-m} (\tilde{h}_1)_\mu ((\lambda_1)_\mu^m \tilde{K}_\mu^s), (\lambda_1)_\mu^{-m} (\tilde{h}_2)_\mu ((\lambda_2)_\mu^{-n} \tilde{K}_\mu^u))$$

es $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ cercano a $((\tilde{K}_1)_0 + \lambda_1^{-m}\mu, (\tilde{K}_2)_0)$. as\u00ed

$$(\lambda_1)_\mu^{-m} (\tilde{h}_1)_\mu ((\lambda_1)_\mu^m \tilde{K}_\mu^s) \cap (\lambda_1)_\mu^{-m} (\tilde{h}_2)_\mu ((\lambda_2)_\mu^{-n} \tilde{K}_\mu^u) \neq \emptyset,$$

esto equivale a lo siguiente

$$(\tilde{h}_1)_\mu ((\lambda_1)_\mu^m \tilde{K}_\mu^s) \cap (\tilde{h}_2)_\mu ((\lambda_2)_\mu^{-n} \tilde{K}_\mu^u) \neq \emptyset. \quad (\star)$$

Por otro lado tenemos $(\lambda_1)_\mu^m \tilde{K}_\mu^s \subset \tilde{K}_\mu^s$ y $(\lambda_2)_\mu^{-n} \tilde{K}_\mu^u \subset \tilde{K}_\mu^u$ y esto implica

$$(\tilde{h}_1)_\mu ((\lambda_1)_\mu^m \tilde{K}_\mu^s) \cap (\tilde{h}_2)_\mu ((\lambda_2)_\mu^{-n} \tilde{K}_\mu^u) \subset (K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu.$$

Usando (\star) concluimos que $(K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset$, para todo $\mu \in (\lambda_2^{-n}(t - \epsilon), \lambda_2^{-n}(t + \epsilon))$ y para n suficientemente grande.

Para concluir que $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(\{\mu \in [0, \delta] : (K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset\})}{\delta} > 0$ basta probar que:

1. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $K \in \mathbb{N}$ existen m con $K \leq m \leq K + N$ y $n \in \mathbb{N}$ con $|\lambda_1^m \lambda_2^n - 1|$ suficientemente peque\u00f1o, pero esto se sigue del siguiente hecho
2. Existen $N', N'' \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_1^{N'} \lambda_2^{N''}$ esta muy pr\u00f3ximo de 1 (pues esto equivale a $N' \ln \lambda_1 + N'' \ln \lambda_2$ cercano a cero, lo que se puede obtener tanto si $\ln \lambda_1 / \ln \lambda_2$ fuera irracional (por el teorema de Dirichlet) o racional. En el caso racional $\ln \lambda_1 / \ln \lambda_2 = -p/q, p, q \in \mathbb{N}$ podemos tomar $N' = q$ y $N'' = p$).

En efecto, para probar 1 a partir de 2, observemos que $\lambda_1^{N'} \lambda_2^{N''} = \lambda_1^\tau$ con τ muy peque\u00f1o. Tenemos dos casos:

Si $\tau = 0$: Tome $N = N', m = KN'$ y $n = KN''$ ($K \in \mathbb{N}$).

Si $\tau \neq 0$: Tome $\tilde{N} = \lfloor \frac{1}{|\tau|} \rfloor + 1, \tilde{N} = N' \tilde{N}, m = N' \lfloor \frac{K}{\tilde{N}} \rfloor - K \frac{\tau}{|\tau|}$ y $n = N'' \lfloor \frac{K}{\tilde{N}} \rfloor$ ($K \in \mathbb{N}$).

□

Observaci3n 6 En la hip\u00f3tesis de este Teorema podemos suponer que $(\tilde{K}_1)_0$ y $(\tilde{K}_2)_0$ est\u00e1n contenidos en \mathbb{R} , estando $(\tilde{K}_1)_0$ contenido en \mathbb{R}_+ y $(\tilde{K}_2)_0$ en \mathbb{R}_- .

Capítulo 4

Aplicación a los Espectros de Markov y Lagrange

Markov probó en el año 1879 que el espectro de Lagrange L intersecado con el intervalo abierto $(-\infty, 3)$ es $L \cap (-\infty, 3) = \{k_1 = \sqrt{5} < k_2 = 2\sqrt{2} < k_3 = \frac{\sqrt{221}}{5} < \dots\}$, donde k_n es una sucesión que converge a 3 tal que $k_n^2 \in \mathbb{Q}$ para todo n . Posteriormente L. Marshall Hall en el año 1947 probó que L contiene una semirrecta (por ejemplo $[6, +\infty)$), y G. Freiman determinó en 1975 la mayor semirrecta que está contenida en L , esto es $[4 + \frac{253589820+283748\sqrt{462}}{491993569}, \infty)$. Estos dos últimos resultados se basan en el estudio de sumas de conjuntos de Cantor regulares, cuya relación con el espectro de Lagrange tiene su origen en la fórmula de $k(\alpha)$ que es definido como el supremo de los $k > 0$ tal que la desigualdad $|\alpha - p/q| < \frac{1}{kq^2}$ se cumple para infinitos pares (p, q) de enteros; y el espectro de Lagrange L es definido como el conjunto de los $k(\alpha) < \infty$ tal que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

En este capítulo veremos que si K_1 y K_2 son conjuntos de Cantor regulares de clase \mathcal{C}^2 que satisfacen la hipótesis del Lema de Selección, entonces tenemos $HD(K_1 + K_2) = \min\{1, HD(K_1) + HD(K_2)\}$. Luego usaremos este resultado para conjuntos de Cantor regulares definidos por la función de Gauss que tiene relación con las fracciones continuas. Estos conjuntos de Cantor serán llamados Conjuntos de Cantor de Gauss y veremos que los mismos contienen conjuntos de Cantor completos de Gauss definidos como $K(B) = \{[0; \beta_1, \beta_2, \dots]; \beta_i \in B, \forall i \in \mathbb{N}\}$, donde B es un conjunto finito de sucesiones finitas de enteros positivos y tendremos $HD(K_1(B) + K_2(B')) = \min\{1, HD(K_1(B)) + HD(K_2(B'))\}$.

4.1. Definiciones y enunciados

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos el número $k(\alpha)$ por

$$k(\alpha) = \sup\{k > 0 : |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{kq^2} \text{ tiene una infinidad de soluciones racionales } \frac{p}{q}\}.$$

Se puede ver que:

1. $k(\alpha) = \limsup_{p, q \in \mathbb{Z}} (|q(q\alpha - p)|^{-1})$
2. $k(\alpha) \geq \sqrt{5}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $k(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \sqrt{5}$.
4. $k(\alpha) = +\infty$ para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

La primera es consecuencia de la siguiente definición de límite superior:

$$\limsup_{p, q \in \mathbb{Z}} (|q(q\alpha - p)|^{-1}) = \inf_{n \geq 1} \{\sup\{(|q(q\alpha - p)|^{-1}) : |p| \geq n, |q| \geq n\}\}.$$

la segunda y tercera es consecuencia del teorema Hurwitz-Markov visto en el capítulo 1, Teorema 3.

Sea $L = \{k(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ y } k(\alpha) < +\infty\}$, el cual llamaremos el espectro de Lagrange. Si la fracción continua de α es $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ entonces tenemos la siguiente fórmula de $k(\alpha)$:

$$k(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n),$$

donde $\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ y $\beta_n = [0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]$.

Esto se prueba utilizando

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})q_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

que puede encontrarse en la proposición 2 del capítulo 1. Esta última fórmula de $k(\alpha)$ implica que tenemos la siguiente proposición con respecto al espectro de Lagrange.

Proposición 16 Sea $\Sigma = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de las secuencias bi-infinitas de enteros positivos, y sea $\underline{\theta} = (\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$. Definamos $l(\underline{\theta}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_n + \tilde{\beta}_n$, donde $\tilde{\alpha}_n = [\theta_n; \theta_{n-1}, \dots]$ y $\tilde{\beta}_n = [0; \theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots]$ entonces $L = \{l(\underline{\theta}) : \underline{\theta} \in \Sigma\}$.

Demostración: Sea $x \in L$ entonces existe $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $x = k(\alpha) < \infty$.
 Expresando α en fracciones continuas tenemos $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, donde $a_i \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \geq 1$. además como $k(\alpha)$ es finito se tiene que las componentes de α en fracciones continuas toman valores de un subconjunto finito de \mathbb{N} . Definiendo $\underline{\theta} = (\dots, a_3, a_2, a_1, a_2, a_3, \dots)$ tenemos

$$\tilde{\alpha}_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$$

y

$$\tilde{\beta}_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_2, \dots].$$

Entonces como podemos observar, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ y $\beta_n, \tilde{\beta}_n \in I_{(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)}$, para todo $n \geq 2$. Como la longitud de este intervalo se va reduciendo a medida que n tiende al infinito entonces β_n y $\tilde{\beta}_n$ se van acercando cada vez más. Esto prueba que $x = k(\alpha) = l(\underline{\theta})$. es decir, $L \subset \{l(\underline{\theta}) : \underline{\theta} \in \Sigma\}$.

Sea $x \in \{l(\underline{\theta}) : \underline{\theta} \in \Sigma\}$ entonces $x = l(\underline{\theta})$ para algún $\underline{\theta} = (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$. Definiendo $\alpha = [\theta_0; \theta_1, \theta_2, \dots]$ y utilizando los mismos argumentos de los pasos anteriores se tiene que $x = l(\underline{\theta}) = k(\alpha)$, es decir, $\{l(\underline{\theta}) : \underline{\theta} \in \Sigma\} \subset L$. \square

Otro conjunto de números reales que será de nuestro interés es el espectro de Markov

$$M = \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n + \tilde{\beta}_n : \tilde{\alpha}_n = [a_n; a_{n+1}, \dots] \tilde{\beta}_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots] \right\}.$$

El espectro de Markov tiene la siguiente interpretación aritmética:

$$M = \left\{ \left(\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |f(x,y)| \right)^{-1} : f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, b^2 - 4ac = 1 \right\}.$$

Se puede ver fácilmente que L y M son conjuntos cerrados en \mathbb{R} y que $L \subset M$.

4.2. El Lema de Selección y sus consecuencias

Fijemos una constante grande c_0 . Definamos el conjunto $\Sigma(\rho)$ como el conjunto de las palabras $\underline{a} \in \Sigma_B$ (el shift asociado a un conjunto de Cantor regular K) tal que $c_0^{-1}\rho \leq |K_{\underline{a}}| \leq c_0\rho$. A tales elementos los llamaremos longitud aproximable ρ o ρ -descomposición. Está claro que la cardinalidad de $\Sigma(\rho)$ es del orden ρ^{-d} , donde $d = HD(K)$.

Sea K un conjunto de Cantor regular, decimos que no es esencialmente afín si existen $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1 \in \Sigma_B^-$ con $\theta_0^0 = \theta_0^1$ y $x_0 \in k^{\underline{\theta}^1}(K \cap K_{\theta_0^0})$ tal que $|D \ln D(k^{\underline{\theta}^1} \circ (k^{\underline{\theta}^0})^{-1})(x_0)| \neq 0$.

además definamos para R positivo y suficientemente grande el conjunto $J_R = [-R, -R^{-1}] \cup [R^{-1}, R]$.

Lema 9 (Lema de Selección) Sean K y K' dos conjuntos de Cantor definidos por ψ y ψ' de clase C^2 con shifts asociados Σ_B y $\Sigma_{B'}$. además K no es esencialmente afín y tomemos $\rho > 0$. Si $E = \{E(\underline{a}, \underline{a}'), (\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)\}$ es una familia de subconjuntos de J_R tal que $m(J_R - E(\underline{a}, \underline{a}')) < \delta$, donde δ es una constante pequeña. entonces existe una familia de subconjuntos de J_R , $E^* = \{E^*(\underline{a}, \underline{a}')\}$ tal que:

1. para todo $(\underline{a}, \underline{a}')$, $E^*(\underline{a}, \underline{a}')$ está contenido en una $C\rho$ vecindad de $E(\underline{a}, \underline{a}')$, donde C es una constante.
2. si $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ y $\lambda \in E^*(\underline{a}, \underline{a}')$, podemos hallar por lo menos $c\rho^{-(d+d')}$ pares de $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$, con $\underline{b}, \underline{b}'$ comenzando con la última letra de $\underline{a}, \underline{a}'$ respectivamente, tal que, si $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-, \underline{\theta}' \in \Sigma_{B'}^-$ terminan con $\underline{a}, \underline{a}'$ respectivamente y $F_{\underline{b}, \underline{b}'}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda) = (\tilde{\theta}, \tilde{\theta}', \tilde{\lambda})$ entonces $(\tilde{\lambda} - \rho, \tilde{\lambda} + \rho) \subset E^*(\underline{b}, \underline{b}')$.

Para la prueba de este lema vamos a necesitar algunas notaciones y definiciones, luego probaremos una proposición que nos permitirá demostrar el Lema de selección.

Sea A un alfabeto finito y Λ un conjunto finito y una aplicación $\Lambda \rightarrow A \times A$ definida como $\lambda \mapsto (\alpha(\lambda), \omega(\lambda))$. Definimos $\Lambda_i^j = \{\lambda, \alpha(\lambda) = i, \omega(\lambda) = j\}$, $\Lambda_i = \{\lambda, \alpha(\lambda) = i\}$, $\Lambda^j = \{\lambda, \omega(\lambda) = j\}$ y $\Lambda^{(2)} = \{(\lambda, \lambda'), \alpha(\lambda') = \omega(\lambda)\}$. también sea $N_i^j = \#\Lambda_i^j$, $N_i = \#\Lambda_i$ y $p_i^j = N_i^{-1} N_i^j$. Asumiremos que existe $p^* > 0$ tal que $p_i^j \geq p^*$ para todo i, j .

La matriz estocástica (p_i^j) (es decir, es una matriz con entradas no negativas y la suma de sus filas es igual a uno) tiene autovector a la izquierda $(p^i)_{i \in \Lambda}$ satisfaciendo

$$\sum_i p^i p_i^j = p^j \geq p^* \quad y \quad \sum_i p^i = 1.$$

Si ponemos

$$p_\lambda^{\lambda'} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(\lambda) \neq \alpha(\lambda') \\ N_i^{-1} & \text{si } \omega(\lambda) = \alpha(\lambda') = i \in A, \end{cases}$$

y $p^\lambda = N_j^{-1} p^j$, $\lambda \in \Lambda_j$ entonces $(p_\lambda^{\lambda'})_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2}$ es otra vez una matriz estocástica con autovector a la izquierda (p^λ) . además para $\lambda' \in A$ y $\alpha(\lambda') = j$ tenemos

$$\sum_\lambda p^\lambda p_\lambda^{\lambda'} = \sum_i \sum_{\lambda \in \Lambda_i^j} N_i^{-1} p^i N_j^{-1} = \sum_i p_i^j p_i N_j^{-1} = p^j N_j^{-1} = p^{\lambda'}.$$

Para $z = (z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \mathbb{C}^\Lambda$, definimos $\|z\|^2 = \sum_{\Lambda} p^\lambda |z_\lambda|^2$ y esto da $\sum_i p^i \frac{1}{N_i} (\sum_{\Lambda_i} |z_\lambda|^2)$.

Observe que, si $(\theta_\lambda^{\lambda'})$ es una familia de números complejos de módulo menor o igual a uno y definiendo $w_\lambda = \sum_{\lambda'} p_\lambda^{\lambda'} \theta_\lambda^{\lambda'} z_{\lambda'}$ tendremos

$$|w_\lambda|^2 \leq \sum_{\lambda'} p_\lambda^{\lambda'} \sum_{\lambda'} p_\lambda^{\lambda'} |z_{\lambda'}|^2$$

por lo tanto $\|w\|^2 \leq \|z\|^2 (*)$.

Sea $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos de \mathbb{R} acotados y medibles, y una familia $a_\lambda^{\lambda'}$ de números reales. Sea también $\rho > 0$ un número positivo y pequeño. Para $\lambda \in \Lambda$, $x \in \mathbb{R}$, $\omega(\lambda) = i$, sea $n_\lambda(x) = N_i^{-1} \#\{\lambda' \in \Lambda_i, [x - \rho, x + \rho] \subset E_{\lambda'} - a_\lambda^{\lambda'}\}$. Asumiremos el siguiente hecho: existe $\Delta_0 > 0$, $0 < k_0 < 1$ tal que para cualquier $\xi \in [1, \Delta_0 \rho^{-1}]$, el operador $w_\lambda = \sum_{\lambda'} p_\lambda^{\lambda'} e^{i\xi a_\lambda^{\lambda'}} z_{\lambda'}$ actuando sobre $(\mathbb{C}^\Lambda, \|\cdot\|)$ tiene norma menor o igual a k_0 .

Proposición 17 *Bajo esta hipótesis, existe $0 < k_1 < 1$, $\epsilon > 0$, $0 < \tau < 1$, dependiendo únicamente de Δ_0, k_0 tal que, si $|E_\lambda| \leq \epsilon$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $\sum p^\lambda |E_\lambda^*| \leq k_1 \sum p^\lambda |E_\lambda|$, donde $E_\lambda^* = \{n_\lambda(x) > \tau\}$.*

Demostración: Para $\lambda \in \Lambda$, $\omega(\lambda) = i$, definamos $X_\lambda = 1_{E_\lambda}$, $Y_\lambda = \frac{1}{N_i} \sum_{\lambda' \in \Lambda_i} X_{\lambda'}(x + a_\lambda^{\lambda'})$ y $Z_\lambda(x) = \frac{1}{2\rho} \int_{-\rho}^{\rho} Y_\lambda(x + t) dt$. Tendremos $Z_\lambda \geq n_\lambda$ por lo tanto

$$\sum_{\lambda} p^\lambda |Z_\lambda|_{L^2}^2 \geq \tau^2 \sum_{\lambda} p^\lambda |E_\lambda^*|.$$

Bajo la hipótesis de nuestra proposición probaremos que

$$\sum_{\lambda} p^\lambda |Z_\lambda|_{L^2}^2 \leq k_2 \sum_{\lambda} p^\lambda |X_\lambda|_{L^2}^2 = k_2 \sum_{\lambda} p^\lambda |E_\lambda|,$$

para algún $k_2 < 1$ dependiendo únicamente de k_0 y Δ_0 y esto implicará la proposición. Para probar esta desigualdad consideremos las transformadas de Fourier de X_λ , Y_λ y Z_λ . Normalizamos la transformada de Fourier como

$$\widehat{X}_\lambda(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_\lambda(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Corolario 2 Existen $0 < k_4 < 1$, $\epsilon_1 > 0$ y $0 < \tau < 1$, dependiendo de Δ_0 y k_0 , y existe $\Delta > 0$, dependiendo de Δ_0 , Δ_1 y k_0 tal que, si $|V_{\Delta\rho}(E_\lambda)| \leq \epsilon_1$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\sum_{\lambda} p^\lambda |V_{\Delta\rho}(\widehat{E}_\lambda)| \leq k_4 \sum_{\lambda} p^\lambda |V_{\Delta\rho}(E_\lambda)|,$$

donde $\widehat{E}_\lambda = \{\widehat{n}_\lambda > \tau\}$.

Demostración: Para cualquier conjunto acotado E tenemos

$$|V_{(\Delta+\Delta_1+1)\rho}(E)| \leq (1 + \Delta^{-1}(\Delta_1 + 1)) |V_{\Delta\rho}(E)|.$$

Por otro lado, si $[x - \Delta_1\rho, x + \Delta_1\rho]$ interseca $E_{\lambda'} - a_{\lambda'}^{\lambda'}$ y $|y - x| < \Delta\rho$, entonces $[y - \rho, y + \rho]$ está contenido en $V_{(\Delta+\Delta_1+1)\rho}(E_{\lambda'}) - a_{\lambda'}^{\lambda'}$.

Tomando Δ suficientemente grande tenemos

$$k_4 = (1 + \Delta^{-1}(\Delta_1 + 1))k_1 < 1, \quad \epsilon_1 = \epsilon(1 + \Delta^{-1}(\Delta_1 + 1))^{-1}$$

y aplicando la proposición anterior a $V_{(\Delta+\Delta_1+1)\rho}(E_\lambda)$ se obtiene el corolario. \square

Demostración del lema de selección: Vamos a hacer la prueba para el caso donde ψ y ψ' tienen orientaciones opuestas, es decir existe al menos un punto periódico de ψ o ψ' con autovalor negativo.

En relación a los previos de la proposición 17 definimos $A = \mathbb{A} \times \mathbb{A}' \times \{-1, +1\}$ y $\Lambda = \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho) \times \{-1, +1\}$. La aplicación $(\alpha, \omega) : \Lambda \rightarrow A \times A$ se define como sigue: para $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$ y $u \in \{-1, +1\}$ definamos $\alpha(\underline{a}, \underline{a}', u) = (a_0, a'_0, uu)$ y $\omega(\underline{a}, \underline{a}', u) = (a_n, a'_n, u)$, donde a_n, a'_n , son las últimas letras de \underline{a} y \underline{a}' y $w = +1$ (respectivamente -1) si $f_{\underline{a}}$ y $f_{\underline{a}'}$ tienen la misma (respectivamente opuesta) orientación.

Debido a que ψ y ψ' tienen orientación opuesta y como Σ_B y $\Sigma'_{B'}$ son topológicamente mixing, tenemos para todo $i, j \in A$

$$c^{-1}\rho^{d+d'} \leq \#\Lambda_i^j = N_i^j \leq c\rho^{-1(d+d')}.$$

Para $(\underline{a}, \underline{a}', u) \in \Lambda$ definamos $F(\underline{a}, \underline{a}', u) = \{x, ue^x \in E(\underline{a}, \underline{a}')\}$, que es un subconjunto de $[-r, r]$, donde $r = \ln R$. como la medida de $J_R \setminus E(\underline{a}, \underline{a}')$ tiene medida pequeña entonces también $[-r, r] \setminus F(\lambda)$, para todo $\lambda \in \Lambda$ tiene medida pequeña: $m([-r, r] \setminus F(\lambda)) \leq \bar{c}_1$.

Corolario 2 Existen $0 < k_4 < 1$, $\epsilon_1 > 0$ y $0 < \tau < 1$, dependiendo de Δ_0 y k_0 , y existe $\Delta > 0$, dependiendo de Δ_0 , Δ_1 y k_0 tal que, si $|V_{\Delta\rho}(E_\lambda)| \leq \epsilon_1$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\sum_{\lambda} p^\lambda |V_{\Delta\rho}(\widehat{E}_\lambda)| \leq k_4 \sum_{\lambda} p^\lambda |V_{\Delta\rho}(E_\lambda)|,$$

donde $\widehat{E}_\lambda = \{\widehat{n}_\lambda > \tau\}$.

Demostración: Para cualquier conjunto acotado E tenemos

$$|V_{(\Delta+\Delta_1-1)\rho}(E)| \leq (1 + \Delta^{-1}(\Delta_1 + 1)) |V_{\Delta\rho}(E)|.$$

Por otro lado, si $[x - \Delta_1\rho, x + \Delta_1\rho]$ interseca $E_{\lambda'} - a_{\lambda'}^{\lambda'}$ y $|y - x| < \Delta\rho$, entonces $[y - \rho, y + \rho]$ está contenido en $V_{(\Delta+\Delta_1+1)\rho}(E_{\lambda'}) - a_{\lambda'}^{\lambda'}$.

Tomando Δ suficientemente grande tenemos

$$k_4 = (1 + \Delta^{-1}(\Delta_1 + 1))k_1 < 1, \quad \epsilon_1 = \epsilon(1 + \Delta^{-1}(\Delta_1 + 1))^{-1}$$

y aplicando la proposición anterior a $V_{(\Delta+\Delta_1+1)\rho}(E_\lambda)$ se obtiene el corolario. \square

Demostración del lema de selección: Vamos a hacer la prueba para el caso donde ψ y ψ' tienen orientaciones opuestas, es decir existe al menos un punto periódico de ψ o ψ' con autovalor negativo.

En relación a los previos de la proposición 17 definimos $A = \mathbb{A} \times \mathbb{A}' \times \{-1, +1\}$ y $\Lambda = \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho) \times \{-1, +1\}$. La aplicación $(\alpha, \omega) : \Lambda \rightarrow A \times A$ se define como sigue: para $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$ y $u \in \{-1, +1\}$ definamos $\alpha(\underline{a}, \underline{a}', u) = (a_0, a'_0, uw)$ y $\omega(\underline{a}, \underline{a}', u) = (a_n, a'_n, u)$, donde a_n, a'_n , son las últimas letras de \underline{a} y \underline{a}' y $w = +1$ (respectivamente -1) si $f_{\underline{a}}$ y $f_{\underline{a}'}$ tienen la misma (respectivamente opuesta) orientación.

Debido a que ψ y ψ' tienen orientación opuesta y como Σ_B y $\Sigma'_{B'}$ son topológicamente mixing, tenemos para todo $i, j \in A$

$$c^{-1}\rho^{d+d'} \leq \#\Lambda_i^j = N_i^j \leq c\rho^{-1(d+d')}.$$

Para $(\underline{a}, \underline{a}', u) \in \Lambda$ definamos $F(\underline{a}, \underline{a}', u) = \{x, ue^x \in E(\underline{a}, \underline{a}')\}$, que es un subconjunto de $[-r, r]$, donde $r = \ln R$. como la medida de $J_R \setminus E(\underline{a}, \underline{a}')$ tiene medida pequeña entonces también $[-r, r] \setminus F(\lambda)$, para todo $\lambda \in \Lambda$ tiene medida pequeña: $m([-r, r] \setminus F(\lambda)) \leq \bar{\epsilon}_1$.

Finalmente, definamos la familia de traslaciones $(a_\lambda^{\lambda'})_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda^{(2)}}$. Para esto elegimos, para cada $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$ (respectivamente $\underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$) un elemento $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-$ (respectivamente $\underline{\theta}' \in \Sigma_{B'}^-$) finalizando con \underline{a} (respectivamente \underline{a}'). Entonces, si $\lambda = (\underline{a}, \underline{a}', u)$, $\lambda' = (\underline{b}, \underline{b}', v)$ satisfaciendo $\omega(\lambda) = \alpha(\lambda')$, colocamos $a_\lambda^{\lambda'} = \ln |k^{\underline{\theta}'}(K_{\underline{b}'})| - \ln |k^{\underline{\theta}}(K_{\underline{b}})|$.

La hipótesis del Lema de Selección implica la hipótesis de de la proposición 17. es decir, existe $\Delta_0 > 0$, $0 < k_0 < 1$ tal que para $\xi \in [1, \Delta_0 \rho^{-1}]$ el operador definido por $w_\lambda = \sum p_\lambda^{\lambda'} e^{ia_\lambda^{\lambda'} \xi} z_{\lambda'}$ tiene norma menor o igual a k_0 .

Sea $\Delta_1 > 0$ y Δ como en el corolario anterior. Para $\lambda \in \Lambda$, definimos $E_0(\lambda) = [-r, r] \setminus V_{\Delta\rho}(F(\lambda))$. A partir de esto definamos para $n \geq 0$ los conjuntos $E_n(\lambda)$ en la siguiente manera: si $E_n(\lambda)$ tenemos ya definido, definimos, con $c_3 > 0$ fijo y muy pequeño, $\widehat{E}_n(\lambda)$ como el conjunto de los $x \in [-r, r]$ tal que

$$\#\{\lambda', \omega(\lambda) = \alpha(\lambda'), [x + a_\lambda^{\lambda'} - \Delta_1\rho, x + a_\lambda^{\lambda'} + \Delta_1\rho] \subset [-r, r] \setminus E_n(\lambda')\} < c_3 \rho^{-(d+d')}.$$

Entonces definimos $E_{n+1}(\lambda) = E_0(\lambda) \cup \widehat{E}_n(\lambda)$.

Por otro lado, siempre que \bar{c}_1, c_3 son suficientemente pequeños, tendremos

$$\sum_\lambda p^\lambda |V_{\Delta\rho}(\widehat{E}_n(\lambda))| \leq k_5 \sum_\lambda p^\lambda |V_{\Delta\rho}(E_{n+1}(\lambda))|$$

con $0 < k_5 < 1$. De esto tendremos

$$\sum_\lambda p^\lambda |V_{\Delta\rho}(E_{n+1}(\lambda))| \leq k_5 \sum_\lambda p^\lambda |V_{\Delta\rho}(E_n(\lambda))| + \max_\lambda |V_{\Delta\rho}(E_0(\lambda))|.$$

Definiendo $E_\infty(\lambda) = \cup_{n \geq 0} E_n(\lambda)$, obtendremos

$$\sum_\lambda p^\lambda |V_{\Delta\rho}(E_\infty(\lambda))| \leq \frac{1}{1 - k_5} \max_\lambda |V_{\Delta\rho}(E_0(\lambda))|.$$

Observemos que $V_{\Delta\rho}(E_0(\lambda))$ está contenido en $[-r - \Delta\rho, r + \Delta\rho] - F(\lambda)$ por lo tanto su medida es menor que $2\Delta\rho + \bar{c}_1$. Considere $F_\infty(\lambda) = [-r, r] \setminus E_\infty(\lambda)$. Sea $x \in F_\infty(\lambda)$, tendremos para cada $n \geq 0$

$$\#\{\lambda', \omega(\lambda) = \alpha(\lambda'), [x + a_\lambda^{\lambda'} - \Delta_1\rho, x + a_\lambda^{\lambda'} + \Delta_1\rho] \subset [-r, r] \setminus E_n(\lambda')\} \geq c_3 \rho^{-(d+d')}$$

y por lo tanto

$$\#\{\lambda', \omega(\lambda) = \alpha(\lambda'), [x + a_\lambda^{\lambda'} - \Delta_1\rho, x + a_\lambda^{\lambda'} + \Delta_1\rho] \subset F_\infty(\lambda')\} \geq c_3 \rho^{-(d+d')}.$$

Ahora definiendo para todo $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$

$$E^*(\underline{a}, \underline{a}') = \{e^x, x \in F_\infty(\underline{a}, \underline{a}', +1)\} \cup \{-e^x, x \in F_\infty(\underline{a}, \underline{a}', -1)\}.$$

es fácil ver que $F_\infty(\lambda)$ está contenido en $V_{\Delta\rho}(F(\lambda))$ y esto implica la conclusión (i) del Lema de Selección.

Para la conclusión 2., como $\underline{\theta} \rightarrow k^{\underline{\theta}}$ es Lipschitz, existe $C \geq 0$ tal que si $\lambda = (\underline{a}, \underline{a}', u)$, $\lambda' = (\underline{b}, \underline{b}', v)$ satisfaciendo $\omega(\lambda) = \alpha(\lambda')$ y $\underline{\theta}, \underline{\theta}'$ son elementos de $\Sigma_B^-, \Sigma_{B'}^-$ que finalizan con \underline{a} y \underline{a}' respectivamente, entonces

$$|\ln |k^{\underline{\theta}'}(K_{\underline{b}'})| - \ln |k^{\underline{\theta}}(K_{\underline{b}})| - a_\lambda^{\lambda'}| \leq C\rho.$$

Tomando $\Delta_1 > 2C$ para $x \in F_\infty(\lambda)$ tendremos $x + \ln |k^{\underline{\theta}'}(K_{\underline{b}'})| - \ln |k^{\underline{\theta}}(K_{\underline{b}})| + z \in F_\infty(\lambda')$. para $|z| \leq \frac{\Delta_1}{2}\rho$ y al menos $c_3\rho^{-d+d'}$ elementos λ' (con $\alpha(\lambda') = \omega(\lambda)$), para todo $\underline{\theta}, \underline{\theta}'$ que finaliza con \underline{a} y \underline{a}' respectivamente. Esto implica la conclusión del Lema de Selección. \square

Proposición 18 Si K_1 y K_2 son conjuntos de Cantor regulares de clase C^2 satisfaciendo las hipótesis del Lema de Selección tal que existe un punto fijo p de ψ_1 y q de ψ_2 tal que $\ln \psi_1'(p)/\ln \psi_2'(q) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces $HD(K_1 + K_2) = \min\{1, HD(K_1) + HD(K_2)\}$.

Demostración: Podemos asumir que $HD(K_1) + HD(K_2) = d < 1$ ya que si $HD(K_1) + HD(K_2) > 1$, podemos hacer $0 < \frac{1}{2}HD(K_1) < 1/2$, $0 < \frac{1}{2}HD(K_2) < 1/2$ podemos construir conjuntos de Cantor tal que $HD(K_1') = \frac{1}{2}HD(K_1)$, $HD(K_2') = \frac{1}{2}HD(K_2)$ y tener $HD(K_1') + HD(K_2') < 1$.

Por la hipótesis de la derivada es suficiente demostrar que para cada $\eta > 0$ existe un conjunto abierto F tal que $HD(K_1 + \lambda K_2) > d - \eta$, $\forall \lambda \in F$, suponiendo que ψ_1 y ψ_2 son afines en el intervalo de su dominio que contiene p y q , respectivamente. En efecto: como $\ln \psi_1'(p)/\ln \psi_2'(q) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces para cada $\delta > 0$ existen infinitos números naturales m y n tales que $|(\psi_1'(p))^m/(\psi_2'(q))^n - \lambda| < \delta$. Haciendo $\lambda_1 = \psi_1'(p)$ y $\lambda_2 = \psi_2'(q)$ tenemos

$$\begin{aligned} K_1 + \lambda K_2 & \text{ está cerca de } K_1 + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^m} K_2 \\ HD(K_1 + \lambda K_2) & \text{ está cerca de } HD(K_1 + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^m} K_2) \\ HD(K_1 + \lambda K_2) & \text{ está cerca de } HD(\lambda_1^m K_1 + \lambda_2^n K_2) \\ HD(K_1 + \lambda K_2) & \text{ está cerca de } HD(K_1 + K_2). \end{aligned}$$

En la última afirmación se ha usado el hecho de que $\lambda_1^m K_1 = K_1$ y $\lambda_2^n K_2 = K_2$ y esto es debido a que las aplicaciones expansoras que definen los conjuntos de Cantor son afines en torno al punto fijo. Luego tenemos

$$HD(K_1 + K_2) > d - \eta \quad \forall \eta > 0,$$

aplicando límite con respecto a η se tiene $HD(K_1 + K_2) \geq d$. La otra desigualdad es por la última parte de la sección 2.5. Por lo tanto $HD(K_1 + K_2) = d$.

Ahora veamos la existencia de los F . Sea $(K_1)^\theta \times (K_2)^{\theta'}$ consideremos una ϵ -descomposición y δ -descomposición donde ϵ es muy pequeño y $\delta = \epsilon^{1/k}$, $\frac{1}{k} < 1 - d$. Sea R_1 y R_2 dos rectángulos de la ϵ -descomposición contenidos en diferentes rectángulos de la δ -descomposición, definimos:

$$A_{R_1, R_2} = \{s : \pi_s(R_1) \cap \pi_s(R_2) \neq \emptyset\},$$

donde $\pi_s(x, y) = x + \epsilon^s y$. Se tiene que este conjunto es un intervalo y $|A_{R_1, R_2}| < c\epsilon/\delta$ donde c es una constante.

así, debido a que se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} L_{\underline{\theta}, \underline{\theta}'} &= \{s \in [-A, A] : \pi_s(R_1) \cap \pi_s(R_2) = \emptyset, \forall R_1, R_2, \epsilon\text{-rectángulos de} \\ &= (K_1)^\theta \times (K_2)^{\theta'} \text{ pertenecientes a diferentes } \delta\text{-rectángulos}\} \end{aligned}$$

y como $L_{\underline{\theta}, \underline{\theta}'}^c = \bigcup_{R_1, R_2} A_{R_1, R_2}$ se tiene que

$$m(L_{\underline{\theta}, \underline{\theta}'}^c) < c\epsilon^{1-d}/\delta \ll 1.$$

Aplicamos el Lema de Selección a $L = \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s), s \in L_{\underline{\theta}, \underline{\theta}'}\}$ para la δ -descomposición de $(K_1)^\theta \times (K_2)^{\theta'}$ para obtener un conjunto F tal que $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in F$ implica que existen al menos $\delta^{(m-1)(\frac{m}{2}-1)}$ δ^{m-1} -rectángulos de $(K_1)^\theta \times (K_2)^{\theta'}$ tal que si R_1, R_2 son $\epsilon \cdot \delta^{m-1}$ rectángulos contenidos en uno de tales δ^{m-1} rectángulos pero en distintos δ^m rectángulos entonces sus proyecciones por π_s son disjuntas. Podemos elegir para cada δ^m -rectángulo contenido en un δ^{m-1} -rectángulo un $\epsilon \cdot \delta^{m-1}$ correspondiente a F , y la proyección de π_s de estos $\delta^{(m-1)\eta/2-md}$ $\epsilon \cdot \delta^{m-1}$ -rectángulos son disjuntos, y podemos continuar con este proceso para cada uno de estos rectángulos. Tomando $M > \frac{2k}{\eta}$ tendremos $\delta^{(m-1)\eta/2-md} \gg (\epsilon\delta^{m-1})^{\eta-d}$, y así $F = F_{\underline{\theta}, \underline{\theta}'}$ satisface el requerimiento. \square

4.3. Dimensión de Hausdorff y sumas aritméticas de conjuntos de Cantor de fracciones continuas

Consideremos la función de Gauss $g : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ definida por:

$$g(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right].$$

Veamos la relación de esta función con las fracciones continuas. Si $0 < x < 1$, $x = \frac{1}{k_1 + g(x)}$, donde $k_1 = \left[\frac{1}{x} \right]$. Si $g(x) \neq 0$, podemos aplicar el mismo método a $g(x)$ y escribir $x = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + g^2(x)}}$, donde $k_2 = \left[\frac{1}{g(x)} \right]$. Si $g^n(x) \neq 0 \forall n > 0$ (esto ocurre cuando x es irracional)

$$x = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n + g^n(x)}}}}} \quad \forall n \geq 1,$$

es decir $x = [0; k_1, k_2, k_3, \dots]$ y $g^n(x) \in \left(\frac{1}{k_{n+1}+1}, \frac{1}{k_{n+1}} \right) \forall n \geq 0$.

Podemos observar para $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\psi_k(x) = g|_{\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{x} - k & \text{si } \frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}. \end{cases}$$

La partición de Markov, que consideraremos aquí, serán reuniones finitas de intervalos cuyos extremos serán irracionales cuadráticas, es decir serán soluciones de ecuaciones de segundo grado con coeficientes enteros. Los conjuntos de Cantor que provienen de esta función y esta partición serán llamados conjunto de Cantor regulares de Gauss.

Ejemplo 16 Consideremos la partición de Markov $K_1 = [x_1, x_2]$, $K_2 = [x_2, x_1]$ y la función expansora $\varphi_2 = \psi_1|_{K_2}$ y $\varphi_1 = \psi_2|_{K_1}$ definido por $\varphi_1(x) = \frac{1}{x} - 2$ y $\varphi_2(x) = \frac{1}{x} - 1$

tal que satisfagan la siguiente condición (veáse la figura 3.4)

$$\varphi_1([x_1, x_2]) = [x_1, x_4] \text{ y } \varphi_2([x_3, x_4]) = [x_1, x_4].$$

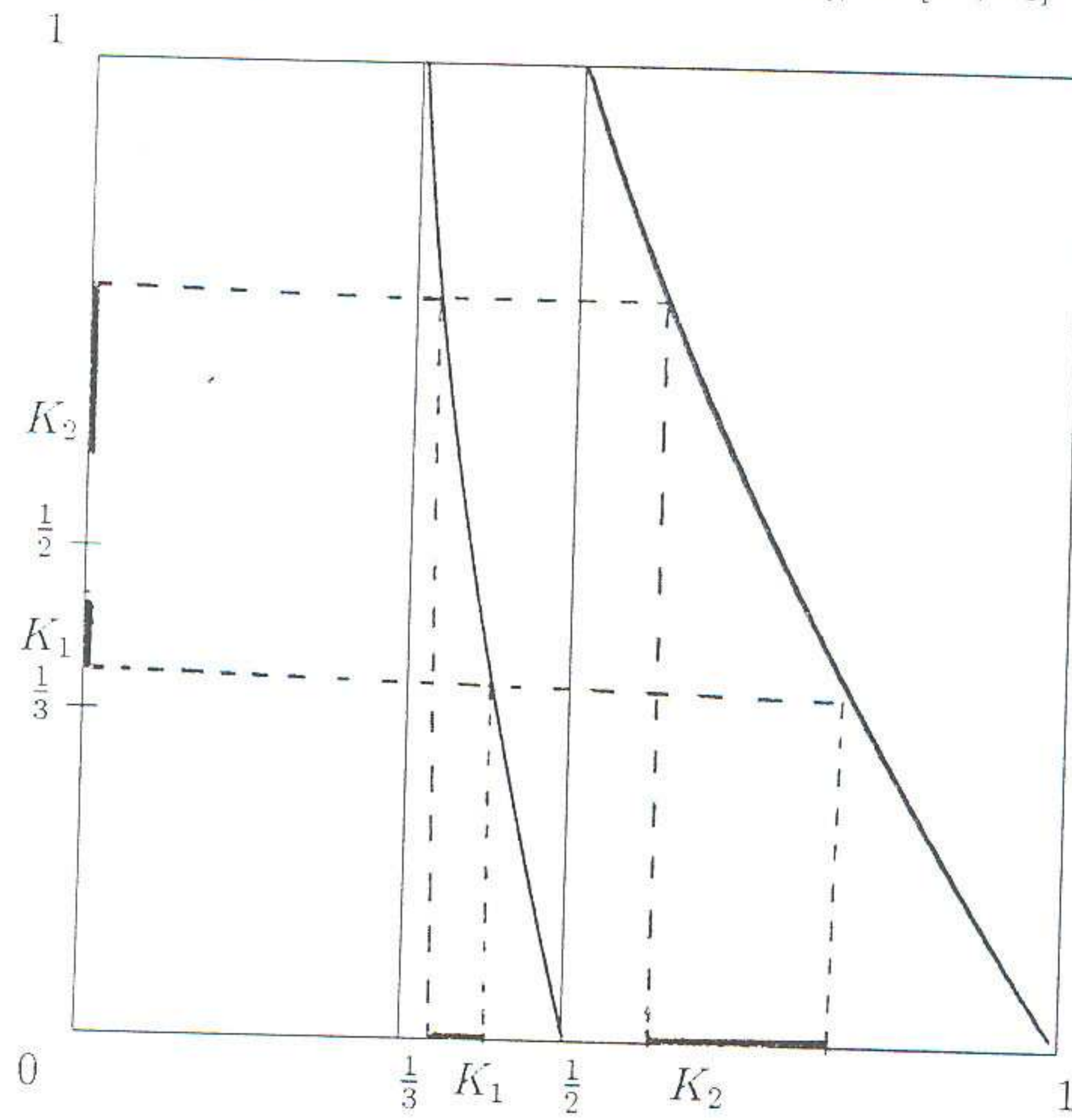


Figura 3.4

De aquí tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 - 2x_1 = x_1x_4$$

$$1 - 2x_2 = x_2x_1$$

$$1 - x_3 = x_3x_4$$

$$1 - x_4 = x_4x_1.$$

Resolviendo obtenemos los valores de x_i :

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = [0; 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = [0; 2, 2, 1, 2, 1, \dots]$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} = [0; 1, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$x_4 = \sqrt{3} - 1 = [0; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

Luego el conjunto de Cantor de Gauss es: $K = \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(K_1 \cup K_2)$.

Por otro lado se puede ver fácilmente que $x \in K \iff x = [0, b_1, b_2, \dots]$, donde $b_i \in \{1, 2\}$ para todo $i \geq 1$.

Definición 22 Si B es un conjunto finito de sucesiones finitas de enteros positivos, llamaremos $K(B)$ al conjunto de Cantor completo de Gauss, el cual es definido por $K(B) = \{[0; \beta_1, \beta_2, \dots], \beta_i \in B\}$.

Observemos que $K(B)$ se define por $\psi : \bigcup_{\beta \in B} I_\beta \rightarrow I$ donde $I = [0, 1]$, $I_\beta = \{[0; \beta, \alpha], \alpha \geq 1\}$ y $\psi_\beta = \psi|_{I_\beta}$ es el iterado de g definido por $\psi_\beta([0; \beta, \alpha]) = \frac{1}{\alpha}$. De esto se ve fácilmente que

$$K(B) = \bigcap_{m \geq 0} (\psi^{-m}(\bigcup_{\beta \in B} I_\beta)).$$

Por ejemplo si $\beta = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, entonces $\psi_\beta = \psi_{b_n} \circ \dots \circ \psi_{b_3} \circ \psi_{b_2} \circ \psi_{b_1}$. Luego

$$\begin{aligned} \psi_\beta([0; \beta, \alpha]) &= \psi_{b_n} \circ \dots \circ \psi_{b_3} \circ \psi_{b_2} \circ \psi_{b_1}([0; b_1, b_2, \dots, b_n, \alpha]) \\ &= \psi_{b_n} \circ \dots \circ \psi_{b_3} \circ \psi_{b_2} \left(\frac{1}{[0; b_1, \dots, b_n, \alpha]} - b_1 \right) \\ &= \psi_{b_n} \circ \dots \circ \psi_{b_3} \circ \psi_{b_2} \left(\frac{1}{\frac{1}{b_1 + [0; b_2, \dots, b_n, \alpha]}} - b_1 \right) \\ &= \psi_{b_n} \circ \dots \circ \psi_{b_3} \circ \psi_{b_2}([0; b_2, \dots, b_n, \alpha]) \\ &= \dots \\ &= \psi_{b_n}([0; b_n, \alpha]) = \frac{1}{[0; b_n, \alpha]} - b_n = \frac{1}{\frac{1}{b_n + [0; \alpha]}} - b_n = [0; \alpha] \\ &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Por otro lado podemos ver que si n es par $I_\beta = ([0; \beta], [0; \beta, 1])$ y si n es impar $I_\beta = ([0; \beta, 1], [0; \beta])$.

Proposición 19 Si K es un conjunto de Cantor regular de Gauss entonces existe B tal que $K(B) \subset K$.

Demostración: Sea $\gamma_1 = (b_1, b_2, \dots, b_n, b_1)$ y $\gamma_2 = (b_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m, b_1)$ dos palabras finitas admisibles que inicien y terminen en b_1 que no sean copias múltiples del mismo bloque de símbolos, donde b_i son enteros positivos correspondientes a $\frac{1}{x} - b_i$ de la función de Gauss g que aparecen en la construcción del Cantor regular de Gauss K . Si $\tilde{\gamma}_1 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ y $\tilde{\gamma}_2 = (b_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m)$ entonces el conjunto de Cantor completo de Gauss $K(\{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2\})$ está contenido en K . \square

Teorema 18 Si $K(B_1)$ y $K(B_2)$ son conjuntos de Cantor completos de Gauss entonces

$$HD(K(B_1) + K(B_2)) = \min\{1, HD(K(B_1)) + HD(K(B_2))\}.$$

Demostración: Sea $x_\beta = [0; \beta, \beta, \dots]$ el punto fijo de ψ_β . Si $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ y $\frac{pk}{qk} = [0; b_1, b_2, \dots, b_k]$ son las reducidas de $[0; \beta]$, entonces $\psi_\beta(x) = \psi_\beta([0; \beta, \alpha]) = \frac{1}{\alpha} = \frac{q_n x - p_n}{p_{n-1} - q_{n-1} x}$, y los puntos fijos de ψ_β son las raíces de $q_{n-1} x^2 + (q_n - p_{n-1})x - p_n = 0$. Existe un difeomorfismo $\alpha_\beta : I \rightarrow I$ tal que $\alpha_\beta(x_\beta) = x_\beta$, $\alpha'_\beta(x_\beta) = 1$ y $\alpha_\beta \circ \psi_\beta \circ \alpha_\beta^{-1}$ es afín. Es conocido que si $\alpha_\beta \circ \psi_\gamma \circ \alpha_\beta^{-1}$ es afín y γ tiene el mismo número de elementos de β entonces $\gamma = \beta$, desde que $\alpha_\beta = \frac{\alpha_\beta x - b_\beta}{c_\beta x - d_\beta}$ y si $\alpha_\beta \circ \psi_\gamma \circ \alpha_\beta^{-1}$ no es afín entonces es una función del tipo $\frac{Ax+B}{Cx+D}$ donde la segunda derivada es cero únicamente en un conjunto finito de puntos.

Si $\alpha_\beta \circ \psi_\gamma \circ \alpha_\beta^{-1}$ es afín entonces ∞ es el punto fijo común de $\alpha_\beta \circ \psi_\gamma \circ \alpha_\beta^{-1}$ y $\alpha_\beta \circ \psi_\beta \circ \alpha_\beta^{-1}$, y $\alpha_\beta^{-1}(\infty)$ es raíz común de $q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1}$ y $\tilde{q}_n x^2 + (\tilde{q}_{n-1} - \tilde{p}_n)x - \tilde{p}_{n-1}$ y estos polinomios pueden ser iguales desde que ellos sean irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ (aquí $q_n = q_n(\beta)$, $\tilde{q}_n = q_n(\gamma)$), así nosotros podemos tener $x_\beta = x_\gamma$ y $\beta = \gamma$.

Sea $\beta_1 = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B_1$, $\beta_2 = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in B_2$ y las funciones ψ_{β_1} y ψ_{β_2} las funciones expansoras asociadas. Entonces $\psi_{\beta_1}(x) = \frac{q_n(\beta_1)x - p_n(\beta_1)}{p_{n-1}(\beta_1) - q_{n-1}(\beta_1)x}$ y $\psi_{\beta_2}(x) = \frac{q_m(\beta_2)x - p_m(\beta_2)}{p_{m-1}(\beta_2) - q_{m-1}(\beta_2)x}$ con puntos fijos x_{β_1} y x_{β_2} respectivamente. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\ln |\psi'_{\beta_1}(x_{\beta_1})|}{\ln |\psi'_{\beta_2}(x_{\beta_2})|} &= \frac{\ln \left| \frac{(-1)^n}{(p_{n-1} - q_{n-1}x)^2} \right|}{\ln \left| \frac{(-1)^m}{(p_{m-1} - q_{m-1}x)^2} \right|} \\ &= \frac{\ln |p_{n-1} - q_{n-1}x_{\beta_1}|}{\ln |p_{m-1} - q_{m-1}x_{\beta_2}|} \end{aligned}$$

y como los puntos fijos son irracionales cuadráticos se tiene

$$\frac{\ln |\psi'_{\beta_1}(x_{\beta_1})|}{\ln |\psi'_{\beta_2}(x_{\beta_2})|} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

□

Definición 23 Sea $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ entonces $\beta^t = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_2, b_1)$ y si B es un conjunto finito de sucesiones finitas entonces $B^t = \{\beta^t : \beta \in B\}$.

Proposición 20 $HD(K(B)) = HD(K(B^t))$ para todo conjunto finito B de sucesiones finitas de enteros positivos.

Demostración: Si $q_n(\beta)$ es el denominador de fracciones continuas $[0, \beta] = [0, b_1, \dots, b_n]$ entonces $q_n(\beta) = q_n(\beta^t)$. Por otro lado la longitud del intervalo I_β es

$$|I_\beta| = |[0; \beta, 1] - [0; \beta]| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}.$$

Como se puede observar las longitudes de los intervalos de construcción de un conjunto de Cantor completo de Gauss dependen esencialmente de los denominadores de las fracciones continuas finitas envueltas. Por lo tanto se tiene el resultado deseado. \square

Corolario 3 $HD(K(B) + K(B^t)) = \min\{1, 2 \cdot HD(K(B))\}$.

Demostración: A partir del Teorema 21 tenemos

$$HD(K(B) + K(B^t)) = \min\{1, HD(K(B)) + HD(K(B^t))\}$$

y como $HD(K(B)) = HD(K(B^t))$ por la proposición anterior entonces se tiene el resultado deseado. \square

Bibliografía

- [1] K.J. Falconer. *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press (1992).
- [2] M. Hirsch y C. Pugh. *Stable manifolds and hyperbolic sets*. Proc. A.M.S. Symp. Pure Math. 14 (1970).
- [3] R. Labarca. *dinámica y bifurcaciones de aplicaciones del intervalo*. Monografía del IMCA 11 (2000).
- [4] C.G. Moreira. *Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations*. Ann.Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996).
- [5] C.G. Moreira. *Introdução à teoria dos números (com ênfase em aproximações diofantinas)*. Monografía del IMCA 24 (2002).
- [6] C.G. Moreira. *Geometric properties of the Markov and Lagrange spectra*. Preprint-Impa.
- [7] C.G. Moreira y J.C. Yoccoz. *Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions*. Preprint-Impa (1998).
- [8] L. Mora y N. Romero. *Introducción a los sistemas dinámicos (vía la aplicación de Henón)*. Monografía del IMCA 14 (2000).
- [9] J. Palis y F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge University Press (1993).
- [10] J. Palis y Walington de Melo. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Edgard Blucher (1977).
- [11] J. Palis. *A note on Ω -stability*. Proc. A.M.S. Symp. Pure Math. 14 (1970).
- [12] S. Plaza. *Fractales y generación computacional de imágenes*. Monografía del IMCA 16 (2000).
- [13] M. Shub. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlang. (1978)

- [14] D. Sullivan. *Differentiable structures on fractal like sets, determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets*. Proc. A.M.S. Symp. Pure Math. 48 (1988).