



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
Sección de Posgrado y Segunda Especialización  
Profesional

---

Tesis para Optar el Grado Académico de Maestro  
en Ciencias con Mención en Física

**“Decaimiento del Bosón Exótico  $Z^{0'}$  en el  
Modelo Electrodébil  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ ”**

Presentada por :

David Romero Abad

Asesor :

Dr. Luis Orlando Pereyra Ravinez

**LIMA - PERÚ  
2010**



# Agradecimientos

El presente trabajo es la culminación de un largo camino que empezó con los cursos electivos dictados por el Dr. Orlando Pereyra Ravinez en la maestría de la facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería. Ésta tarea tuvo como vital soporte las reuniones semanales realizadas con el grupo de Física Fundamental de la Facultad de Ciencias: Área de Fenomenología de Altas Energías. Por lo tanto quiero dedicar un especial agradecimiento al Dr. Pereyra, asesor de esta tesis, por la confianza, dedicación y estímulo impartido durante el desarrollo de la presente investigación.

También quiero agradecer al Doctor Rosendo Ochoa y al profesor Holguer Valqui por sus aportes y consejos valiosos.

Por último pero no por eso menos importante quisiera agradecer a mis colegas José Reyes y Henry Díaz, por las largas discusiones y alcances compartidos.

*Éste trabajo se lo dedico a mis padres Adrian y Ely,  
por todo el apoyo y comprensión que me brindaron  
durante su realización.*

# Resumen

Las extensiones del Modelo Estándar (ME) predicen la aparición de un conjunto de nuevas partículas, entre ellas destaca, debido a su riqueza fenomenológica, el bosón exótico  $Z^{0'}$ . Dicha partícula espera su verificación experimental en la actual generación de colisionadores (*Tevatron Run II*, *LHC*). Basado en la expectativa del hallazgo experimental, el presente trabajo tiene como objetivo principal estudiar el decaimiento en dos cuerpos del bosón exótico  $Z^{0'}$  en el sector de calibre de la extensión electrodébil  $SU(3)_L \otimes U(1)_Y$  a nivel de árbol. Con tal fin se construye el lagrangeano bosónico total del modelo junto con sus respectivos diagramas y reglas de Feynman asociadas para finalmente detallar la fenomenología involucrada y comparar los resultados con los hallados por otros modelos actuales.

# Abstract

The extensions of the Standard Model predict the arise of new particles, between them, the exotic boson  $Z^{0'}$  is of special interest due its phenomenological richness. This particle expect experimental confirmation in the new generation of colliders (*Tevatron Run II, LHC*). Based in the expectation of the experimental discover the present work has like principal aim to study the two-bodies decay of the exotic boson  $Z^{0'}$  in the framework of the gauge sector in the extension of the electroweak model  $SU(3)_L \otimes U(1)_Y$  at the tree level. With this purpose we build the total bosonic lagrangean and shown the diagrams and Feynman's rules related. Finally we detail the phenomenologic involve and contrast with the results obtain by other models.

# Índice general

<b>1. Modelo Estándar</b>	<b>5</b>
1.1. Lagrangeano Leptónico . . . . .	5
1.2. Lagrangeano Bosónico . . . . .	8
1.3. Lagrangeano de Higgs . . . . .	9
1.4. Lagrangeano de Yukawa . . . . .	10
<b>2. Modelo <math>SU(3)_L \otimes U(1)_N</math></b>	<b>12</b>
2.1. Sector Leptónico . . . . .	12
2.2. Sector Bosónico . . . . .	13
2.2.1. Lagrangeano Bosónico antes del RES . . . . .	15
2.3. Sector Escalar . . . . .	17
2.4. Lagrangeano de Yukawa . . . . .	20
2.5. Lagrangeano Bosónico Final . . . . .	20
2.5.1. Lagrangeano Libre . . . . .	21
2.5.2. Lagrangeano de Interacción . . . . .	21
<b>3. Diagramas y Reglas de Feynman</b>	<b>29</b>
<b>4. Cálculo del decaimiento del bosón <math>Z'_0</math>, proceso no polarizado.</b>	<b>42</b>
<b>5. Fenomenología</b>	<b>50</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>A. Lagrangeano Leptónico del ME</b>	<b>55</b>
A.1. Ecuación de Dirac . . . . .	55
A.1.1. Trazas de las matrices de Dirac . . . . .	57
A.1.2. Valores propios de las matrices de Dirac . . . . .	58
A.2. Lagrangeano libre de Dirac . . . . .	59

A.3. Campos Izquierdos y Derechos . . . . .	61
A.4. Transformaciones de Calibre Local . . . . .	62
<b>B. Lagrangeano Bosónico del ME</b>	<b>66</b>
B.1. Lagrangeano Electromagnético . . . . .	66
B.1.1. Lagrangeano Electromagnético . . . . .	69
B.2. Lagrangeano Bosónico del Modelo Estándar . . . . .	69
B.2.1. Invariancia de Lorentz . . . . .	70
B.2.2. Transformaciones de Calibre Local . . . . .	71
B.3. Lagrangeano de Proca . . . . .	75
B.4. Derivada Covariante . . . . .	75
<b>C. Construcción del Lagrangeano Bosónico del M.E. antes del R.E.S.</b>	<b>77</b>
<b>D. Lagrangeano de Higgs del ME</b>	<b>82</b>
D.1. Lagrangeano de Klein-Gordon (KG) . . . . .	82
D.2. Lagrangeano de KG para campos complejos . . . . .	83
D.3. Campo de Higgs . . . . .	85
D.4. Lagrangeano de Higgs . . . . .	87
D.4.1. Valor Esperado del Vacío . . . . .	87
D.4.2. Lagrangeano de Higgs en forma explícita . . . . .	89
<b>E. Lagrangeano Bosónico del ME después del RES</b>	<b>94</b>
<b>F. Lagrangeano Bosónico y de Higgs del ME</b>	<b>97</b>
<b>G. Sector bosónico del modelo <math>SU(3)_L \otimes U(1)_N</math></b>	<b>98</b>
G.1. Matrices de Gell-Mann . . . . .	98
G.2. Lagrangeano Bosónico . . . . .	99
G.3. Constantes de estructura . . . . .	99
G.3.1. Antisimetría de las Constantes de Estructura . . . . .	100
G.3.2. Valores Numéricos de las Constantes de Estructura . . . . .	101
G.4. Estructura del Campo Bosónico . . . . .	101
G.5. Campos explícitos . . . . .	103
G.6. Construcción del Lagrangeano . . . . .	104
G.7. Desarrollo de Términos . . . . .	104



<b>H. Sector de Higgs en el modelo <math>SU(3)_L \otimes U(1)_N</math></b>	<b>107</b>
H.1. Derivada covariante . . . . .	107
H.1.1. Derivada covariante sobre $\eta$ . . . . .	107
H.1.2. Derivada covariante sobre $\rho$ . . . . .	109
H.1.3. Derivada covariante sobre $\chi$ . . . . .	109
H.2. Matriz de masa . . . . .	110
H.3. Diagonalización de la matriz de masa . . . . .	111
H.3.1. Valores propios de la matriz de masa . . . . .	112
H.3.2. Vectores propios de la matriz de masa . . . . .	115
H.4. Relación de Gell-Mann-Nishijima . . . . .	118
H.5. Relación entre los campos físicos y los campos de la simetría . . . . .	120
H.6. Asignación de la carga . . . . .	122
H.6.1. Asignación de la carga de $\rho$ . . . . .	123
H.6.2. Asignación de la carga de $\chi$ . . . . .	124
<b>I. Cálculo de las reglas de Feynman</b>	<b>125</b>
I.1. Método Utilizado. . . . .	125
<b>Bibliografía</b>	<b>130</b>

# Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo calcular el decaimiento del bosón neutro exótico  $Z'_0$  en el modelo de interacciones electrodébiles con simetría de calibre  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ . Dicha partícula es predicha por muchos modelos, tales como teorías de la gran unificación [1], teoría de supercuerdas [2], modelos simétricos izquierdo-derecho [3], entre otros. El cálculo que vamos a realizar nos parece relevante, debido a que la partícula mencionada aun no ha podido ser detectada experimentalmente, pero su búsqueda forma parte del itinerario de la última generación de colisionadores (Fermilab Tevatron Run II [5], CERN Large Hadron Collider [6]). Debemos resaltar que nuestro prototipo es una extensión del modelo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , conocido como el Modelo Estándar (ME), tal prolongación nos resulta provechosa, ya que da cuenta de la aparición de nuevas partículas, entre ellas el bosón  $Z'_0$ . Existen en la literatura especializada muchos modelos basados en la simetría de calibre  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  [7]. Uno de los más destacados, es el introducido por Pisano y Pleitez [13]; quienes junto con Montero, clasificaron a dichos modelos en tres tipos [15], considerando distintas representaciones para los fermiones y los bosones escalares, pero bajo la misma simetría de calibre.

Posteriormente la extensión a modelos con un número arbitrario de generaciones de quarks y leptones, pero bajo la misma simetría ha sido estudiado por Diaz, Martinez y Ochoa [20].

Nuestro trabajo está basado en el tercer modelo propuesto por Montero, Pisano y Pleitez, cuya especificación se realizará más adelante.

Para poder realizar nuestro cálculo era necesario contar con el Lagrangeano del sector bosónico, pero tal Lagrangeano no lo pudimos hallar en la bibliografía actual, por lo que nos vimos en la obligación de construirlo. Es por éste motivo que decidimos brindar cierto detalle sobre la construcción mencionada en el capítulo referido al Lagrangeano bosónico de nuestro modelo.

El decaimiento del bosón  $Z'_0$  ya fue estudiado por Péres, Tavares-Velazco [19] en el segundo modelo propuesto por Montero, Pisano y Pleitez; esto nos va permitir

comparar los resultados obtenidos y poner a prueba la consistencia de nuestro prototipo.

Antes de dedicarnos al detalle de nuestro modelo, encontramos apropiado comenzar por la presentación del (ME), de manera que la extensión al prototipo  $SU(3) \otimes U(1)$  se realice de una forma natural.

El (ME) fue desarrollado por Salam [23] y Weinberg [24], y es el primer ejemplo de la moderna unificación de las fuerzas. En éste modelo las fuerzas débil y electromagnética son unificadas en una sola. Desde su aparición, el (ME) fue ampliamente probado; el descubrimiento de las interacciones débiles neutras y la producción de bosones vectoriales ( $W^\pm$  y  $Z^0$ ) [25], [26] incrementó la confianza en el modelo. El (ME) está basado en una teoría de calibre no abeliana introducida por Yang, Mills [27] y Shaw [28]. La descripción de las interacciones electrodébiles es implementada por una teoría de calibre basada en el grupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , la cual es espontáneamente quebrado vía el mecanismo de Higgs [29]. La aparición de valores infinitos ocasionaron problemas ya desde la electrodinámica pero afortunadamente 't Hooft [30] comprobó que las teorías de calibre espontáneamente quebradas son renormalizables. Los leptones y quarks son organizados en generaciones, donde los fermiones izquierdos se expresan como isodobletes débiles, mientras que las componentes derechas, se transforman como isosingletes débiles. Los bosones vectoriales  $W^\pm$ ,  $Z^0$  y el fotón  $\gamma$  que median las interacciones aparecen acoplados a los campos fermiónicos, al imponer la invariancia de calibre por el grupo de simetría. El bosón de Higgs, es la única pieza perdida del (ME) que todavía espera confirmación experimental [31]. Según el (ME) toda la materia está constituida por un pequeño número de partículas fundamentales de spin 1/2, es decir, según el (ME) toda la materia que existe en el universo esta formada por fermiones. Aparte de sus antipartículas asociadas, el (ME) explica un total de doce tipos de fermiones. Seis de éstos se clasifican como quarks (up, down, strange, charm, top y bottom), y los otros seis como leptones (electrón, muón, tau, y sus neutrinos correspondientes), ver cuadro 1.

Como se sabe hay cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza; la fuerte, la electromagnética, la débil y la gravitacional. A cada una de estas fuerzas, le pertenece una teoría física.

La teoría clásica de la gravedad es la ley de gravitación universal de Newton, y su generalización relativista es la teoría general de relatividad de Einstein, una teoría cuántica de la gravedad todavía no ha sido finalizada, la mayoría asume que la gravedad es simplemente muy débil para jugar un rol importante en la física de

<b>Contenido de Fermiones</b>				
	<i>Leptones</i>		<i>Quarks</i>	
Generación	Nombre	Símbolo	Nombre	Símbolo
1 <sup>a</sup>	electrón	e	up	u
	neutrino e	$\nu_e$	down	d
2 <sup>a</sup>	muón	$\mu$	charm	c
	neutrino $\mu$	$\nu_\mu$	strange	s
3 <sup>a</sup>	tau	$\tau$	top	t
	neutrino $\tau$	$\nu_\tau$	bottom	b

Cuadro 1: **Contenido de Fermiones**

partículas elementales, por lo tanto no se considera a la gravedad dentro del (ME). La teoría física que describe las fuerza electromagnéticas es llamada electrodinámica. Su formulación clásica fue dada por Maxwell y es consistente con la relatividad especial. La teoría cuántica de la electrodinámica fue perfeccionada por Tomonaga [32], Feynman [33] y Schwinger [34].

En 1934 la primera teoría de la fuerza débil fue propuesta por Fermi [35], la cual fue redefinida tiempo despues por Lee, Yang, Feynman y Gell-Mann [36].

En 1940 se descubrió la fuerza débil, que daba cuenta del decaimiento beta nuclear. En el caso de la fuerza fuerte, más alla del trabajo pionero de Yukawa [37], no hubo una teoría formal, hasta la llegada de la cromodinámica cuántica, a mediados de los años setenta.

Cada una de éstas fuerza mencionadas, son mediadas por el intercambio de una partícula, dichas partículas mediadoras de fuerza, descritas por el (ME) tienen spin entero, significando que todas las partículas mediadoras de fuerza son bosones. Los diversos tipos de partículas mediadoras son descritas en el cuadro 2.

<b>Tipos de Interacciones</b>			
<i>Interacción</i>	<i>Grupo de Calibre</i>	<i>Bosón</i>	<i>Símbolo</i>
Electromagnética	U(1)	fotón	$\gamma$
Débil	SU(2)	bosones intermedarios	$W^\pm, Z^0$
Fuerte	SU(3)	gluones(8 tipos)	g

Cuadro 2: **Tipos de Interacción.**

■ Queremos indicar que en el presente trabajo hemos usado el sistema de unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ) y la métrica considerada fue  $g_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ .

En el primer capítulo presentaremos al (ME) como una introducción al modelo  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ , indicando el contenido de partículas e interacciones de cada uno de los sectores, así como las consecuencias de mantener la invariancia de calibre sobre la teoría.

En el capítulo dos vamos describir nuestro modelo dividiendo las secciones de manera análoga a la que se presentamos en el capítulo uno, con la finalidad de apreciar la similaridad entre ambos modelos. Como se menciono anteriormente haremos énfasis en el Lagrangeano bosónico ya que su construcción es la columna vertebral de nuestro calculo objetivo.

En el tercer capítulo mostraremos los diagramas y reglas de Feynman que surgieron como resultado de la quiebra de simetría en el sector bosónico. Aquí se verá la utilidad construir el Lagrangeano bosónico desarrollado en el capítulo anterior.

En el capítulo cuatro, a partir de las reglas de Feynman vistas en el capítulo tres, calcularemos la tasa de decaimiento de bosón  $Z'_0$  (proceso no polarizado) en dos cuerpos, teniendo como productos finales a los nuevos bosones cargados  $V^+$  y  $V^-$ .

En el capítulo 5 analizamos los resultados obtenidos y fijaremos los rangos de masa de las nuevas partículas incorporadas.

Las conclusiones y comentarios se discuten en el capítulo 6.

# Capítulo 1

## Modelo Estándar

Vamos a estudiar un modelo unificado del electromagnetismo y las interacciones débiles de leptones y bosones, basado en la simetría de calibre  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . El (ME) para las interacciones electrodébiles, se puede dividir en varios sectores, dependiendo de su contenido de partículas e interacciones, por lo tanto escribimos la densidad de Lagrangeano para este modelo de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^Y$$

Dónde  $\mathcal{L}^L$  es la densidad de Lagrangiano leptónico,  $\mathcal{L}^B$  es la densidad de Lagrangiano de los bosones de calibre,  $\mathcal{L}^H$  el Lagrangeano de Higgs y  $\mathcal{L}^Y$  el Lagrangiano de Yukawa.

### 1.1. Lagrangeano Leptónico

Es conveniente agrupar a las partículas de acuerdo a sus propiedades, es así que surge el concepto de generación; en cada generación, las partículas difieren en su masa y en su carga, todas las interacciones y demás números cuánticos son idénticos. Por lo tanto vamos a agrupar a los leptones ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$  y sus respectivos neutrinos) en tres generaciones (ver cuadro 1.1).

Al construir un modelo es ventajoso conocer las simetrías que de él se desprenden y las consecuencias que ellas acarrearán.

Es sabido que la paridad se conserva en el electromagnetismo y en las interacciones fuertes, pero es violada en las interacciones débiles. La violación de la conservación de la paridad fue propuesta inicialmente por T.D. Lee y C.N. Yang [38] y verificada experimentalmente por C.S.Wu [39] en la desintegración beta del Cobalto-60.

Leptones						
Generación	Leptón	Masa (Mev)	Carga	Número( $e$ )	Número( $\mu$ )	Número( $\tau$ )
1 <sup>a</sup>	e	0,511	-1	1	0	0
	$\nu_e$	$\leq 7 \times 10^{-6}$	0	1	0	0
2 <sup>a</sup>	$\mu$	105,66	-1	0	1	0
	$\nu_\mu$	$\leq 0,27$	0	0	1	0
3 <sup>a</sup>	$\tau$	1777	-1	0	0	1
	$\nu_\tau$	$\leq 35$	0	0	0	1

Cuadro 1.1: **Generaciones de Leptones.**

En el decaimiento  $\beta$  sólo neutrinos izquierdos son producidos, y ya que el neutrino no participa en las interacciones fuertes ni electromagnéticas, no hay fuentes de neutrinos derechos y no hay forma de aprobar o desaprobar su existencia, por lo tanto, los neutrinos derechos y los antineutrinos izquierdos no serán considerados por nosotros en las interacciones débiles. Lo anterior nos lleva a proponer la representación doblete para los campos izquierdos, y singlete para los campos derechos<sup>1</sup>:

$$L_l = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L(x) \\ \psi_l^L(x) \end{pmatrix} \quad \bar{L}_l = (\bar{\psi}_{\nu_l}^L(x), \bar{\psi}_l^L(x))$$

$$\bar{R}_l = \bar{\psi}_l^R(x) \quad R_l = \psi_l^R(x) \quad (1.1)$$

Dónde  $l$  corre sobre las generaciones de leptones  $l = e, \mu, \tau$ .

Otra importante condición que debemos tener en cuenta es que nuestro Lagrangeano debe ser un invariante de Lorentz, es decir, bajo una transformación de Lorentz, el Lagrangeano que describe a nuestro sistema no debe cambiar de forma.

Debido a que buscamos una teoría invariante de calibre y renormalizable [30], debemos considerar inicialmente un Lagrangeano no masivo, el problema de la masa será solucionado al introducir el Lagrangeano de Yukawa, el cual dará cuenta de las masas de los leptones a través del rompimiento espontáneo de simetría (en adelante RES). Entonces proponemos inicialmente un Lagrangeano no masivo

<sup>1</sup>Ver Apéndice A.3

para los leptones basado en el Lagrangeano libre de Dirac<sup>2</sup> [40]:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \sum_l [\bar{L}_l \not{\partial} L_l + \bar{R}_l \not{\partial} R_l] + \text{h.c.} \quad (1.2)$$

Habiendo introducido el Lagrangeano que va a describir el comportamiento de los leptones en el modelo, es interesante observar cuáles son las simetrías que él posee, ya que según el teorema de Noether [41], toda simetría (transformación que deja invariante la forma del Lagrangeano), nos lleva a una ley de conservación. Cuando se aplica la misma transformación a todos los puntos del espacio-tiempo, y el Lagrangeano no cambia de forma, se dice que la teoría tiene invariancia de calibre global. Entonces proponemos la transformaciones globales de calibre:

$$\text{SU}(2) \begin{cases} L'_l = \exp(i \alpha_j \tau_j / 2) L_l \\ R'_l = R_l \end{cases} \quad \text{U}(1) \begin{cases} L'_l = \exp(i \beta Y) L_l \\ R'_l = \exp(i \beta Y) R_l \end{cases}$$

Donde las  $\tau_j$  son las matrices de Pauli, llamados generadores,  $\alpha_j$  y  $\beta$  son números reales, llamados parámetros, e  $Y$  es la hipercarga.

Ya que el Lagrangeano es invariante bajo dichas transformaciones, el teorema de Noether nos dice que hay cuatricorrientes conservadas asociadas con la invariancia. En nuestro caso estas son la cuatricorriente de Isospin y la cuatricorriente de Hipercarga respectivamente. La relación entre las cargas provenientes de las cuatricorrientes conservadas nos permiten establecer la relación de Gell-Mann-Nishijima<sup>3</sup> [42]:

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3^W \quad (1.3)$$

Esta expresión nos relaciona la carga eléctrica con la tercera componente del Isospin, y con la Hipercarga. Debemos notar que el grupo de calibre del modelo es  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , esto es, inicialmente (antes del RES), estas cantidades que son los generadores de los grupos en cuestión, se combinan de tal forma que después del rompimiento dan cuenta de la carga eléctrica de las partículas.

Las teorías de calibre usan Lagrangeanos tales que en cada punto del espacio-tiempo es posible aplicar transformaciones o rotaciones diferentes y aun así el Lagrangeano es invariante. En ese caso se dice que el Lagrangeano presenta también invariancia de calibre local. Generalizando las transformaciones de globales

<sup>2</sup>Ver apéndice A.2 y A.3.

<sup>3</sup>Una forma alternativa de derivación se desarrolla en el apéndice H.4.



a locales, con el objetivo de mantener la invariancia del Lagrangeano, proponemos las transformaciones de calibre local:

$$L'_l = \exp \left[ \frac{ig}{2} \tau_j \omega_j(x) + i g' \beta(x) Y \right] L_l \quad (1.4)$$

$$R'_l = \exp [i g' \beta(x) Y] R_l \quad (1.5)$$

Al aplicar dichas transformaciones al Lagrangeano (1.2) se observa que la invariancia no se mantiene. Para restaurar la invariancia es necesario introducir campos de calibre, en nuestro caso debemos considerar cuatro campos, ya que el número de campos que se introduce tiene una relación directa con el número de generadores del grupo de calibre con que cuenta el modelo. De forma similar que en electrodinámica donde se introduce un sólo campo de calibre ya que presenta simetría  $U(1)_{em}$ .

Dichos campos de calibre que se han incorporado deben también transformarse según el grupo de simetría, es por eso que es necesario modificar la derivada parcial por la derivada covariante, dicha derivada que contiene los campos de calibre permite restaurar la invariancia del Lagrangeano, entonces reemplazando las derivadas parciales ordinarias por las derivadas covariantes<sup>4</sup>:

$$D^\mu L_l = \left\{ \partial^\mu - \frac{ig}{2} \tau_j A_j^\mu(x) + \frac{ig'}{2} Y B^\mu(x) \right\} L_l$$

$$D^\mu R_l = \left\{ \partial^\mu + \frac{ig'}{2} Y B^\mu(x) \right\} R_l$$

Donde  $A_j^\mu$  y  $g$  son los campos de calibre y la constante de acoplamiento del grupo  $SU(2)_L$  respectivamente, y  $B^\mu$  y  $g'$  son el campo de calibre y la constante de acoplamiento del grupo  $U(1)_Y$ .

Entonces obtenemos el Lagrangiano invariante de calibre local:

$$\mathcal{L}^L = \frac{i}{2} \sum_l \{ \bar{L}_l \not{D} L_l + \bar{R}_l \not{D} R_l \} + \text{h.c.} \quad (1.6)$$

## 1.2. Lagrangeano Bosónico

Hasta ahora hemos visto el Lagrangeano de los leptones y sus interacciones con los campos de calibre via la derivada covariante, la densidad lagrangeana completa debe también contener términos los cuales describan a los bosones de calibre, cuando no hay leptones presentes (Lagrangeano libre bosónico) . Estas expresiones también deben ser invariantes de calibre local  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ .

<sup>4</sup>Ver apéndice B.4

Igual que con los leptones, por el momento asumiremos que los bosones de calibre también son no masivos.

En esta sección vamos a describir la parte cinética de los campos de calibre y sus autointeracciones, para ello propendremos en analogía al caso electromagnético el Lagrangeano bosónico<sup>5</sup> :

$$\mathcal{L}^B = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Para mantener la invariancia de calibre del Lagrangeano, se encuentra que los campos deben tomar la siguiente forma<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, & a = 1, 2, 3. \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (1.8)$$

El Lagrangiano (1.7) involucra los campos de calibre conectados con los grupos  $SU(2)_L$  y  $U(1)_Y$ , tal como se mencionó anteriormente, el número de dichos campos esta relacionado con el de los generadores del grupo. En nuestro caso contamos con cuatro campos de calibre,  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  y  $B$ .

### 1.3. Lagrangeano de Higgs

Hasta ahora todos los leptones, y bosones de calibre se consideraron no masivos, pero en realidad de todas las partículas que propone el modelo sólo los fotones carecen de masa (en el ME y en nuestro modelo nosotros consideraremos a los neutrinos como no masivos)<sup>7</sup>. Con el objetivo de mantener la teoría renormalizable, es esencial introducir las masas mediante el mecanismo de Higgs.

Dicho mecanismo usa el (RES), propuesto inicialmente por Goldstone, Salam y Weinberg [44], el cual establece que bajo una cierta transformación de simetría el Lagrangeano permanece invariante, pero no así el estado del vacío. Si la simetría es global, aparece una partícula sin masa llamada el bosón de Nambu-Goldstone [45], [46], [47].

Cuando éste método se aplica a una teoría de calibre local, sucede algo sorprendente, en dicho caso se encuentra que los bosones de Nambu-Goldstone, son

<sup>5</sup>Ver apéndice B.1

<sup>6</sup>Ver apéndice B.2

<sup>7</sup>Los límites experimentales en las masas de los neutrinos son muy pequeños:  $m(\nu_e) \leq 7$  eV,  $m(\nu_\mu) \leq 0.27$  MeV,  $m(\nu_\tau) \leq 35$  MeV [55].

absorvidos por las partículas de calibre, convirtiendo a las partículas sin masa en masivas, éste es el llamado mecanismo de Higgs-Kibble [48],[49].

Ahora debemos construir un Lagrangeano invariante de calibre para las partículas de spin cero, conformado por una parte libre o cinética, y por un potencial. Al introducir la derivada covariante en la parte cinética, aseguramos su invariancia de calibre. El potencial más general invariante de calibre que consiste de dos términos, se muestra a continuación en nuestra propuesta de Lagrangeano<sup>8</sup>:

$$\mathcal{L}^H = [D^\mu \Phi]^\dagger [D_\mu \Phi] + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda^2 [\Phi^\dagger \Phi]^2 \quad (1.9)$$

De igual manera que en los campos leptónicos y bosónicos, el Lagrangeano de Higgs debe ser invariante bajo la transformación de calibre local del grupo que estudia el modelo, entonces para que esto se cumpla, la derivada toma la forma:

$$D_\mu = \left[ \partial_\mu - \frac{i g}{2} \tau_j A_\mu^j + \frac{i g'}{2} Y B_\mu \right]$$

Donde de manera similar que lo visto anteriormente,  $g$  y  $g'$  son las constantes de acoplamiento,  $\tau_j$  e  $Y$  son los generadores, y  $B_\mu$  y  $A_\mu^j$  son los campos de calibre de los grupos  $U(1)_Y$  y  $SU(2)_L$  respectivamente.

Además después del (RES) el campo de Higgs toma la forma<sup>9</sup>:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}$$

Donde  $v$  es el valor esperado del vacío y  $h$  viene a representar la partícula de Higgs.

## 1.4. Lagrangeano de Yukawa

En la sección anterior, se introdujo el campo de Higgs, necesario para generar masa a las partículas de nuestro modelo. Ahora es necesario precisar como es que dicho campo genera la masa a los fermiones, y la respuesta es mediante el acoplamiento con los campos fermiónicos, que en nuestro caso son los leptones, entonces vemos necesario introducir un nuevo Lagrangeano (a mano) en el que el campo de Higgs, se acople con los campos de los leptones, por lo que se propone:

$$\mathcal{L}^Y = -g_l \left[ \bar{R}_l \Phi^\dagger L_l + \text{h.c.} \right] \quad (1.10)$$

<sup>8</sup>Ver apéndice D.2.

<sup>9</sup>Ver apéndice D.4

Éste Lagrangeano es conocido como el Lagrangeano de Yukawa, debemos tener en cuenta que en dicho Lagrangeano se incorpora una nueva constante  $g_1$ , que será un parámetro del presente modelo.

■ Se debe notar que no se ha mostrado el Lagrangeano después de la quiebra de simetría, ya que la idea del presente capítulo sólo era indicar los ingredientes con los que contamos para estructurar la teoría; los detalles y cálculos serán desarrollados en los apéndices respectivos, junto con el Lagrangeano bosónico y de Higgs del ME<sup>10</sup>. En el siguiente capítulo ingresaremos al modelo en que nuestro cálculo se llevará a cabo.

---

<sup>10</sup>Ver apéndice F.

## Capítulo 2

### Modelo $SU(3)_L \otimes U(1)_N$

Después de haber introducido el (ME), podemos ahora hacer la extensión a nuestro modelo de interés. La extensión del modelo que vamos a trabajar fue propuesta por Montero, Pisano y Pleites [15], donde se ha agrandado el grupo de calibre en el sector electrodébil al grupo  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  a diferencia del (ME) que era  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . Esto nos lleva a un incremento en el contenido de partículas, tales como el boson  $Z'_0$  y los bileptones. De maner similar a como procedimos anteriormente, vamos a dividir el Lagrangeano total, en sectores, dependiendo de su contenido de partículas e interacciones:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y$$

Dónde  $\mathcal{L}_L$  es la densidad de Lagrangiano leptónico,  $\mathcal{L}_B$  es la densidad de Lagrangiano de los bosones de calibre,  $\mathcal{L}_H$  el Lagrangiano de Higgs y  $\mathcal{L}_Y$  el Lagrangiano de Yukawa.

#### 2.1. Sector Leptónico

La extension del modelo, se basa en la representación triplete para los campos izquierdos [15]:

$$L_\ell : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \\ E^+ \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \\ M^+ \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \\ T^+ \end{pmatrix}_L \sim (3, 0)$$

Y singletes para los campos derechos:

$$R_\ell : \begin{cases} e_R^-, & \mu_R^-, & \tau_R^- & \sim (1, -1) \\ E_R^+, & M_R^+, & T_R^+ & \sim (1, +1) \end{cases}$$

Notemos que a diferencia del (ME), se han introducido tres nuevos leptones pesados cargados. La mayoría de extensiones del (ME) predicen la existencia de nuevos leptones cargados, con masas alrededor de la escala de 1 TeV. Propuesto el contenido de partículas, es momento de construir el Lagrangeano para los leptones, y procederemos de manera similar que en el (ME).

Además mostramos la relación de Gell-Mann-Nishijima<sup>1</sup> para éste modelo:

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} (\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8) + N \quad (2.1)$$

Que relaciona a la carga eléctrica  $Q$ , con la hipercarga  $N$  y las matrices de Gell-mann<sup>2</sup>  $\lambda_j$ .

Para que dicho Lagrangeano (leptónico) sea invariante bajo las transformaciones de calibre local, las derivadas deben tomar la forma:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} D^\mu L_\ell &= \left[ \partial^\mu - \frac{ig}{2} \lambda_j A_j^\mu + ig' B^\mu N \right] L_\ell \\ D^\mu R_\ell &= \left[ \partial^\mu + ig' B^\mu N \right] R_\ell \end{aligned}$$

Donde  $g$  y  $g'$  son las constantes de acoplamiento, y  $A_\mu^j$  y  $B^\mu$  son los campo de calibre, de los grupos  $SU(3)_L$  y  $U(1)_N$  respectivamente.

De modo que el Lagrangeano para los leptones es:

$$\mathcal{L}_L = \frac{i}{2} \sum_\ell \{ \bar{L}_\ell \not{D} L_\ell + \bar{R}_\ell \not{D} R_\ell \} + \text{h.c.} \quad (2.2)$$

Notar que la suma se realiza sobre las generaciones de leptones ( $\ell = e, \mu, \tau$ ).

## 2.2. Sector Bosónico

Tal como se analizó en el capítulo anterior, es necesario encontrar al Lagrangeano que contemple solamente a los bosones de calibre y sus autointeracciones. Una forma de lograrlo es construir el Lagrangeano por simple suma de Lagrangeanos

<sup>1</sup>Esta relación se deduce en el apéndice H.4.

<sup>2</sup>Las Matrices de Gell-Mann se muestran en el apéndice G.1.

<sup>3</sup>Ver apéndice B.4

del tipo electromagnético sobre los  $n^2 - 1$  campos de calibre. Para esto proponemos de manera similar al (ME) el siguiente Lagrangeano:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Debemos notar que cualquier matriz  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , en la representación adjunta del álgebra de Lie, puede ser representada por una combinación lineal de los  $n^2 - 1$  generadores [51]:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv -ig \frac{\lambda_a}{2} F_{\mu\nu}^a, \quad a = 1, \dots, 8.$$

Con lo que obtenemos<sup>4</sup>:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

La invariancia de calibre exige que los campos  $F_{\mu\nu}^a$  tomen la forma<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned}$$

Las constantes de estructura  $f_{abc}$  toman los siguientes valores para el grupo<sup>6</sup>  $SU(3)$ :

$$\begin{cases} f_{123} = 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = 1/2 \\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Con la ayuda de las constantes de estructura, podemos encontrar explícitamente los ocho campos  $F_{\mu\nu}^a$ , en función a los campos de calibre de nuestro modelo<sup>7</sup>.

Nuestro objetivo ahora es presentar de forma explícita al lagrangiano bosónico en función a los campos de calibre, para esto vamos a desarrollar el término  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$  visto en (2.3) al que llamaremos  $\mathcal{L}_{B1}$ :

$$\mathcal{L}_{B1} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4} \left\{ F_{\mu\nu}^1 F^{1\mu\nu} + F_{\mu\nu}^2 F^{2\mu\nu} + \dots + F_{\mu\nu}^8 F^{8\mu\nu} \right\} \quad (2.4)$$

En el modelo, se definen los siguientes bosones de calibre [13]:

<sup>4</sup>Para la deducción ver el apéndice G.2

<sup>5</sup>Ver apéndice G.4.

<sup>6</sup>Ver apéndice G.3.2.

<sup>7</sup>Ver apéndice G.5.

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{2}W^\pm &= A^1 \mp iA^2, \\
 -\sqrt{2}V^\pm &= A^4 \pm iA^5, \\
 -\sqrt{2}U^{\pm\pm} &= A^6 \pm iA^7
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Segun lo anterior, proponemos una útil definición [52]:

$$W_{\mu\nu}^\pm = -\frac{(F_{\mu\nu}^1 \mp iF_{\mu\nu}^2)}{\sqrt{2}}, \tag{2.6}$$

$$V_{\mu\nu}^\pm = -\frac{(F_{\mu\nu}^4 \pm iF_{\mu\nu}^5)}{\sqrt{2}}, \tag{2.7}$$

$$U_{\mu\nu}^{\pm\pm} = -\frac{(F_{\mu\nu}^6 \pm iF_{\mu\nu}^7)}{\sqrt{2}} \tag{2.8}$$

En función a estas nuevas variables, el término del Lagrangeano bosónico visto en (2.4) resulta<sup>8</sup>:

$$\mathcal{L}_{B1} = -\frac{1}{4} \left\{ 2 W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} + F_{\mu\nu}^3 F^{3\mu\nu} + 2 V_{\mu\nu}^+ V^{\mu\nu-} + 2 U_{\mu\nu}^{++} U^{\mu\nu--} + F_{\mu\nu}^8 F^{8\mu\nu} \right\}$$

■ Hasta aquí sólo hemos escrito el lagrangeano bosónico en función a las nuevas variables introducidas, el siguiente paso será desarrollar cada uno de ellos e identificar los campos vistos en (2.5) de tal manera que el los únicos campos de la simetría que todavía deberían aparecer son  $A_3$  y  $A_8$ , donde su identificación con los campos físicos se obtiene después del (RES). El desarrollos de los términos indicados se muestran en la sección de apéndices<sup>9</sup>.

### 2.2.1. Lagrangeano Bosónico antes del RES

Del desarrollo de los términos indicados en la sección anterior, y después de agruparlos convenientemente, encontramos el Lagrangeano bosónico antes del (RES), el cual mostramos a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_B &= \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W^{\mu-} - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{\nu-} + \partial_\mu V_\nu^+ \partial^\nu V^{\mu-} \\
 &\quad - \partial_\mu V_\nu^+ \partial^\mu V^{\nu-} + \partial_\mu U_\nu^{++} \partial^\nu U^{\mu--} - \partial_\mu U_\nu^{++} \partial^\mu U^{\nu--} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu A_\nu^3 \partial^\nu A^{3\mu} - \partial_\mu A_\nu^3 \partial^\mu A^{3\nu} + \partial_\mu A_\nu^8 \partial^\nu A^{8\mu} - \partial_\mu A_\nu^8 \partial^\mu A^{8\nu} \right\}
 \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Ver apéndice G.6

<sup>9</sup>Ver apéndice G.7



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \{ \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \} \{ \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \} \\
& + ig \left\{ \partial_\mu W_\nu^+ W^{\mu-} A^{3\nu} - \partial_\mu W_\nu^+ W^{\nu-} A^{3\mu} + \partial_\mu W_\nu^- W^{\nu+} A^{3\mu} \right. \\
& \quad \left. - \partial_\mu W_\nu^- W^{\mu+} A^{3\nu} + \partial_\mu A_\nu^3 W^{\nu-} W^{\mu+} - \partial_\mu A_\nu^3 W^{\mu-} W^{\nu+} \right\} \\
& + \frac{ig}{\sqrt{2}} \left\{ \partial_\mu W_\nu^+ U^{\nu--} V^{\mu+} - \partial_\mu W_\nu^+ U^{\mu--} V^{\nu+} + \partial_\mu W_\nu^- U^{\mu++} V^{\nu-} - \partial_\mu W_\nu^- U^{\nu++} V^{\mu-} \right. \\
& \quad + \partial_\mu V_\nu^+ W^{\nu+} U^{\mu--} - \partial_\mu V_\nu^+ W^{\mu+} U^{\nu--} + \partial_\mu V_\nu^- W^{\mu-} U^{\nu++} - \partial_\mu V_\nu^- W^{\nu-} U^{\mu++} \\
& \quad \left. + \partial_\mu U_\nu^{++} V^{\mu-} W^{\nu-} - \partial_\mu U_\nu^{++} V^{\nu-} W^{\mu-} + \partial_\mu U_\nu^{--} V^{\nu+} W^{\mu+} - \partial_\mu U_\nu^{--} V^{\mu+} W^{\nu+} \right\} \\
& + \frac{ig\sqrt{3}}{2} \left\{ \partial_\mu V_\nu^+ V^{\nu-} A^{8\mu} - \partial_\mu V_\nu^+ V^{\mu-} A^{8\nu} + \partial_\mu V_\nu^- V^{\mu+} A^{8\nu} - \partial_\mu V_\nu^- V^{\nu+} A^{8\mu} \right. \\
& \quad + \partial_\mu U_\nu^{++} U^{\nu--} A^{8\mu} - \partial_\mu U_\nu^{++} U^{\mu--} A^{8\nu} + \partial_\mu U_\nu^{--} U^{\mu++} A^{8\nu} - \partial_\mu U_\nu^{--} U^{\nu++} A^{8\mu} \\
& \quad \left. + \partial_\mu A_\nu^8 V^{\mu+} V^{\nu-} - \partial_\mu A_\nu^8 V^{\nu+} V^{\mu-} + \partial_\mu A_\nu^8 U^{\mu++} U^{\nu--} - \partial_\mu A_\nu^8 U^{\nu++} U^{\mu--} \right\} \\
& + g^2 \left\{ W_\mu^+ A_\nu^3 W^{\nu-} A^{3\mu} - W_\mu^+ A_\nu^3 W^{\mu-} A^{3\nu} \right\} \\
& + \frac{g^2}{4} \left\{ U^{\mu++} A_\nu^3 U^{\nu--} A^{3\mu} - U^{\mu++} A_\nu^3 U^{\mu--} A^{3\nu} + V^{\mu+} A_\nu^3 V^{\nu-} A^{3\mu} - V^{\mu+} A_\nu^3 V^{\mu-} A^{3\nu} \right\} \\
& + \frac{3g^2}{4} \left\{ U^{\mu++} A_\nu^8 U^{\nu--} A^{8\mu} - U^{\mu++} A_\nu^8 U^{\mu--} A^{8\nu} + V^{\mu+} A_\nu^8 V^{\nu-} A^{8\mu} - V^{\mu+} A_\nu^8 V^{\mu-} A^{8\nu} \right\} \\
& + \frac{\sqrt{2}g^2}{4} \left\{ W_\mu^+ V_\nu^+ U^{\mu--} A^{3\nu} - W_\mu^+ V_\nu^+ U^{\nu--} A^{3\mu} + W_\mu^- V_\nu^- U^{\mu++} A^{3\nu} - W_\mu^- V_\nu^- U^{\nu++} A^{3\mu} \right\} \\
& + \frac{\sqrt{3}g^2}{4} \left\{ V_\mu^+ V_\nu^- A^{3\mu} A^{8\nu} + V_\mu^+ V_\nu^- A^{3\nu} A^{8\mu} - 2V_\mu^+ V_\nu^- A_\nu^3 A^{8\mu} \right. \\
& \quad \left. + 2U_\mu^{++} U^{\mu--} A_\nu^3 A^{8\nu} - U_\mu^{++} U_\nu^{--} A^{3\mu} A^{8\nu} - U_\mu^{++} U_\nu^{--} A^{3\nu} A^{8\mu} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{6}g^2}{4} \left\{ W_\mu^+ V_\nu^+ U^{\mu--} A^{8\nu} - W_\mu^+ V_\mu^+ U^{\nu--} A^{8\nu} + W_\mu^- V_\nu^- U^{\mu++} A^{8\nu} - W_\mu^- V_\mu^- U^{\nu++} A^{8\nu} \right\} \\
& + \frac{g^2}{2} \left\{ V_\mu^- V_\nu^+ V^{\mu-} V^{\nu+} - V_\mu^- V_\nu^+ V^{\mu+} V^{\nu-} + U_\mu^{--} U_\nu^{++} U^{\mu--} U^{\nu++} - U_\mu^{--} U_\nu^{++} U^{\mu++} U^{\nu--} \right. \\
& \quad \left. + W_\mu^+ W_\nu^- W^{\mu+} W^{\nu-} - W_\mu^+ W_\nu^- W^{\mu-} W^{\nu+} \right\} \\
& + \frac{g^2}{2} \left\{ V_\mu^+ V_\nu^+ U^{\mu--} U^{\nu++} - V_\mu^- V^{\mu+} U_\nu^{++} U^{\nu--} + W_\mu^+ W_\nu^- U^{\mu--} U^{\nu++} - W_\mu^+ W^{\mu-} U_\nu^{++} U^{\nu--} \right. \\
& \quad \left. + W_\mu^+ W_\nu^- V^{\mu+} V^{\nu-} - W_\mu^+ W^{\mu-} V_\nu^+ V^{\nu-} \right\}
\end{aligned}$$

■ El presente Lagrangeano denota particular importancia, ya que puede ser utilizado por cualquier modelo  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  independiente del tipo de representación escalar que éste utilice para generar masa a las partículas. Éste puede ser un punto de partida al momento de encontrar el lagrangeano bosónico para cualquier modelo  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  que se desee estudiar.

### 2.3. Sector Escalar

Iniciamos esta sección de manera análoga que en el (ME), usando el concepto de (RES) pero para este nuevo grupo de calibre  $SU(3) \otimes U(1)$ . En nuestro caso consideramos necesario para generar masa a todas las partículas del modelo tres tripletes de Higgs, con la siguiente representación [13]:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} (3, 0); \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} (3, 1); \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} (3, -1) \quad (2.9)$$

Donde la asignación de carga es regida por la relación de Gell-Mann-Nishijima mostrada anteriormente<sup>10</sup> (2.1). Proponemos un Lagrangeano basado en el Lagrangeano de Klein-Gordon, en función a los campos escalares introducidos, de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + V(\eta, \rho, \chi) \quad (2.10)$$

<sup>10</sup>Ver apéndice H.4

El potencial invariante de calibre más general que envuelve los tres tripletes de Higgs es [13]:

$$V(\eta, \rho, \chi) = \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \alpha_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \alpha_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \alpha_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\ + \alpha_4 (\eta^\dagger \eta) (\rho^\dagger \rho) + \alpha_5 (\eta^\dagger \eta) (\chi^\dagger \chi) + \alpha_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) + \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} (f \eta_i \rho_j \chi_k + h.c)$$

Para mantener la invariancia de calibre la derivada covariante debe tomar la forma:

$$D^\mu \varphi_i = \left[ \partial^\mu - \frac{ig}{2} \lambda_j A_j^\mu + ig' B^\mu N_\varphi \right] \varphi_i \quad (2.11)$$

Donde  $\varphi_i = \eta, \rho, \chi$ .

Los valores de expectación del vacío para las componentes neutras de Higgs son:

$$\langle \eta^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \rho^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \chi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix}$$

Expandiendo los campos de Higgs alrededor del vacío:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta + h_\eta(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho + h_\rho(x) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi + h_\chi(x) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Al evaluar la parte cinética del lagrangeano escalar, donde se puede observar que la derivada covariante actúa sobre los campos de Higgs, obtenemos un acople entre los Higgs y los bosones de calibre, dicho acople nos permite identificar las masas de los bosones al comparar el Lagrangeano resultante de la interacción con el Lagrangeano de Proca<sup>11</sup>. Entonces para el caso de los bosones cargados se encuentra<sup>12</sup>:

$$M_W^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_\eta^2 + v_\rho^2), \quad M_V^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_\eta^2 + v_\chi^2)$$

<sup>11</sup>Ver apéndice B.3,

<sup>12</sup>Ver apéndice H.2

$$M_U^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2)$$

Y para los bosones neutros, se obtiene una matriz de masa<sup>13</sup>:

$$M^2 = \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 + v_\rho^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & -2\frac{g'}{g}v_\rho^2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & \frac{1}{3}(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 4v_\chi^2) & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) \\ -2\frac{g'}{g}v_\rho^2 & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) & 4\frac{g'^2}{g^2}(v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

El haber obtenido una matriz no diagonal para los campos neutros es una señal que dichos campos no son los campos físicos que se esperaría encontrar en la naturaleza, entonces para poder encontrar los campos físicos es necesario diagonalizar la matriz de masa. Los vectores propios de dicha matriz nos dan los verdaderos campos y los valores propios sus masas. Después de tal procedimiento se encuentra<sup>14</sup>:

$$M_A^2 = 0, \quad M_{Z'}^2 \approx \frac{1}{3} (g^2 + 3g'^2) v_\chi^2 = \frac{g^2}{3} \left( \frac{c_W^2}{1 - 4s_W^2} \right) v_\chi^2$$

$$M_Z^2 \approx \frac{g^2}{4} \left[ \frac{g^2 + 4g'^2}{g^2 + 3g'^2} \right] (v_\eta^2 + v_\rho^2) = \frac{g^2}{4} \left( \frac{1}{c_W^2} \right) (v_\eta^2 + v_\rho^2) \quad (2.14)$$

Y la relación entre los campos físicos y los campo de calibre dada por<sup>15</sup>:

$$A_\mu = \frac{1}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \left[ (A_\mu^3 - \sqrt{3} A_\mu^8) t + B_\mu \right] \quad (2.15)$$

$$Z_\mu^0 \approx -\frac{1}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \left[ (1 + 3t^2)^{1/2} A_\mu^3 + \frac{\sqrt{3}t^2}{(1 + 3t^2)^{1/2}} A_\mu^8 - \frac{t}{(1 + 3t^2)^{1/2}} B_\mu \right] \quad (2.16)$$

$$Z_\mu'^0 \approx \frac{1}{(1 + 3t^2)^{1/2}} (A_\mu^8 + \sqrt{3}t B_\mu) \quad (2.17)$$

Donde  $t = g'/g \equiv \tan \theta$ .

Pero nosotros necesitamos los campos de la simetría en función de los campo de

<sup>13</sup>Ver apéndice H.2

<sup>14</sup>Ver apéndice H.3.

<sup>15</sup>Ver apéndice H.3.2.

la físicos para poder reemplazar en el Lagrangiano bosónico, entonces a partir de la transformación inversa se obtiene<sup>16</sup>:

$$A_\mu^3 = s_W A_\mu + c_W Z_\mu^0 \quad (2.18)$$

$$A_\mu^8 = -\sqrt{3} s_W A_\mu - \sqrt{3} s_W t_W Z_\mu^0 - \frac{\sqrt{1-4s_W^2}}{c_W} Z_\mu^{0'} \quad (2.19)$$

$$B_\mu = \sqrt{1-4s_W^2} A_\mu - t_W \sqrt{1-4s_W^2} Z_\mu^0 - \sqrt{3} t_W Z_\mu^{0'} \quad (2.20)$$

Donde  $s_W = \sin \theta_W = t/(1+4t^2)^{1/2}$ .

■ Debemos notar que las constantes de acoplamiento introducidas en el modelo via la derivada covariante, quedan fijadas por<sup>17</sup>:

$$e = \frac{g \sin \theta}{(1+3\sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{g' \cos \theta}{(1+3\sin^2 \theta)^{1/2}} = g \sin \theta_W$$

## 2.4. Lagrangeano de Yukawa

El Lagrangeano de Yukawa del sector electrodébil que es ingresado a mano en el presente modelo para generar masa a las partículas fermiónicas, es dado por [16]:

$$\mathcal{L}_Y = -h_{ab} \bar{L}_a e_{R_b}^- \rho - g_{ab} \bar{L}_a E_{R_b}^+ \chi + h.c. \quad (2.21)$$

Podemos observar que este lagrangeano sólo depende de los campos de Higgs  $\rho$  y  $\chi$ , ya que según el modelo ellos van a ser los responsables de generar masa al sector de los leptones, que el sector que nos interesa, y el campo de Higgs faltante  $\eta$  es responsable de generar masa al sector de quarks.

## 2.5. Lagrangeano Bosónico Final

Ya obtenidos los campos físicos sólo nos falta reemplazarlos en el Lagrangeano bosónico antes del (RES). Como se podrá observar la gran cantidad de términos que aparecen nos darán cuenta de todas las interacciones entre los bosones que propone el presente modelo. Ya que este Lagrangeano no se ha podido encontrar en la bibliografía actual, tal como se comento en la introducción, consideramos

<sup>16</sup>Ver apéndice H.5.

<sup>17</sup>Ver apéndice H.4.

oportuno presentarlo en su totalidad, clasificandolo en función al número y al tipo de partículas involucradas en tales interacciones:

### 2.5.1. Lagrangeano Libre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^B = & -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{Z}_{\mu\nu} \mathcal{Z}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{Z}'_{\mu\nu} \mathcal{Z}'^{\mu\nu} \\ & -\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ \mathcal{W}^{\mu\nu-} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\mu\nu}^+ \mathcal{V}^{\mu\nu-} - \frac{1}{2} \mathcal{U}_{\mu\nu}^{++} \mathcal{U}^{\mu\nu--} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, & \mathcal{Z}_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu^0 - \partial_\nu Z_\mu^0, & \mathcal{Z}'_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu^{0'} - \partial_\nu Z_\mu^{0'} \\ \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+, & \mathcal{V}_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu V_\nu^+ - \partial_\nu V_\mu^+, & \mathcal{U}_{\mu\nu}^{++} &= \partial_\mu U_\nu^{++} - \partial_\nu U_\mu^{++} \end{aligned}$$

### 2.5.2. Lagrangeano de Interacción

#### Vértices Trilineales.

##### 1. Interacción WWA:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW\gamma} = & ie \{ (W^{\mu+} W^{\nu-} - W^{\mu-} W^{\nu+}) \partial_\mu A_\nu \\ & + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{\nu+} A^\mu - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{\nu-} A^\mu \} \end{aligned}$$

##### 2. Interacción WWZ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WWZ} = & ig c_W \{ (W^{\mu+} W^{\nu-} - W^{\mu-} W^{\nu+}) \partial_\mu Z_\nu^0 \\ & + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{\nu+} Z^{0\mu} - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{\nu-} Z^{0\mu} \} \end{aligned}$$

**3. Interacción VVA:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{VV\gamma} = ie \{ & (V^{\mu+}V^{\nu-} - V^{\mu-}V^{\nu+})\partial_{\mu}A_{\nu} \\ & +(\partial_{\mu}V_{\nu}^{-} - \partial_{\nu}V_{\mu}^{-})V^{\nu+}A^{\mu} - (\partial_{\mu}V_{\nu}^{+} - \partial_{\nu}V_{\mu}^{+})V^{\nu-}A^{\mu} \} \end{aligned}$$

**4. Interacción VVZ:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{VVZ} = -\frac{ig}{2} \frac{(1+2s_W^2)}{c_W} \{ & (V^{\mu+}V^{\nu-} - V^{\mu-}V^{\nu+})\partial_{\mu}Z_{\nu}^0 \\ & +(\partial_{\mu}V_{\nu}^{-} - \partial_{\nu}V_{\mu}^{-})V^{\nu+}Z^{0\mu} - (\partial_{\mu}V_{\nu}^{+} - \partial_{\nu}V_{\mu}^{+})V^{\nu-}Z^{0\mu} \} \end{aligned}$$

**5. Interacción VVZ':**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{VVZ'} = \frac{ig\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1-4s_W^2}}{c_W} \{ & (V^{\mu+}V^{\nu-} - V^{\mu-}V^{\nu+})\partial_{\mu}Z_{\nu}^{0'} \\ & +(\partial_{\mu}V_{\nu}^{-} - \partial_{\nu}V_{\mu}^{-})V^{\nu+}Z^{0\mu'} - (\partial_{\mu}V_{\nu}^{+} - \partial_{\nu}V_{\mu}^{+})V^{\nu-}Z^{0\mu'} \} \end{aligned}$$

**6. Interacción UUA:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{UU\gamma} = ie \{ & (U^{\mu++}U^{\nu--} - U^{\mu--}U^{\nu++})\partial_{\mu}A_{\nu} \\ & +(\partial_{\mu}U_{\nu}^{--} - \partial_{\nu}U_{\mu}^{--})U^{\nu++}A^{\mu} - (\partial_{\mu}U_{\nu}^{++} - \partial_{\nu}U_{\mu}^{++})U^{\nu--}A^{\mu} \} \end{aligned}$$

**7. Interacción UUZ:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{UUZ} = -\frac{ig}{2} \frac{(1+2s_W^2)}{c_W} \{ & (U^{\mu++}U^{\nu--} - U^{\mu--}U^{\nu++})\partial_{\mu}Z_{\nu}^0 \\ & +(\partial_{\mu}U_{\nu}^{--} - \partial_{\nu}U_{\mu}^{--})U^{\nu++}Z^{0\mu} - (\partial_{\mu}U_{\nu}^{++} - \partial_{\nu}U_{\mu}^{++})U^{\nu--}Z^{0\mu} \} \end{aligned}$$

**8. Interacción UUZ':**

$$\mathcal{L}_{UUZ'} = \frac{ig}{2c_W} \sqrt{3(1-4s_W^2)} \left\{ (U^{\mu++}U^{\nu--} - U^{\mu--}U^{\nu++}) \partial_\mu Z_\nu^{0'} \right. \\ \left. + (\partial_\mu U_\nu^{--} - \partial_\nu U_\mu^{--}) U^{\nu++} Z^{0\mu'} - (\partial_\mu U_\nu^{++} - \partial_\nu U_\mu^{++}) U^{\nu--} Z^{0\mu'} \right\}$$

**9. Interacción WUV(a):**

$$\mathcal{L}_{WUV(a)} = \frac{ig}{\sqrt{2}} \left\{ W^{\mu+} (U_{\mu\nu}^{--} V^{\nu+} - V_{\mu\nu}^{++} U^{\nu--}) - W_{\mu\nu}^{++} U^{\mu--} V^{\nu+} \right\}$$

**10. Interacción WUV(b):**

$$\mathcal{L}_{WUV(b)} = -\frac{ig}{\sqrt{2}} \left\{ W^{\mu-} (U_{\mu\nu}^{++} V^{\nu-} - V_{\mu\nu}^{--} U^{\nu++}) - W_{\mu\nu}^{--} U^{\mu++} V^{\nu-} \right\}$$

**Vértices Cuárticos.**

**11. Interacción WWAA:**

$$\mathcal{L}_{W^2\gamma^2} = e^2 \left\{ W_\mu^+ W_\nu^- A^\mu A^\nu - W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu \right\}$$

**12. Interacción WWZZ:**

$$\mathcal{L}_{W^2Z^2} = g^2 c_W^2 \left\{ W_\mu^+ W_\nu^- Z^{0\mu} Z^{0\nu} - W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu^0 Z^{0\nu} \right\}$$

**13. Interacción WWAZ:**

$$\mathcal{L}_{W^2\gamma Z} = e g c_W \left\{ W_\mu^+ W_\nu^- (Z^{0\nu} A^\mu + A^\nu Z^{0\mu}) - 2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^{0\nu} \right\}$$



**14. Interacción VVAA:**

$$\mathcal{L}_{V^2\gamma^2} = e^2 \{ V_\mu^+ V_\nu^- A^\mu A^\nu - V_\mu^+ V^{\mu-} A_\nu A^\nu \}$$

**15. Interacción VVZZ:**

$$\mathcal{L}_{V^2Z^2} = -\frac{g^2}{4} \frac{(1 + 2s_W^2)^2}{c_W^2} \{ V_\mu^+ V_\nu^- Z^{0\mu} Z^{0\nu} - V_\mu^+ V^{\mu-} Z_\nu^0 Z^{0\nu} \}$$

**16. Interacción VVZ'Z':**

$$\mathcal{L}_{V^2Z'^2} = \frac{3g^2}{4} \frac{(1 - 4s_W^2)}{c_W^2} \{ V_\mu^+ V_\nu^- Z^{0\mu'} Z^{0\nu'} - V_\mu^+ V^{\mu-} Z_\nu^{0'} Z^{0\nu'} \}$$

**17. Interacción VVAZ:**

$$\mathcal{L}_{V^2\gamma Z} = -\frac{eg}{2c_W} (1 + 2s_W^2) \{ V_\mu^+ V_\nu^- (Z^{0\nu} A^\mu + A^\nu Z^{0\mu}) - 2V_\mu^+ V^{\mu-} A_\nu Z^{0\nu} \}$$

**18. Interacción VVAZ':**

$$\mathcal{L}_{V^2\gamma Z'} = \frac{\sqrt{3}}{2} g^2 t_W \sqrt{1 - 4s_W^2} \{ V_\mu^+ V_\nu^- (Z^{0\nu'} A^\mu + A^\nu Z^{0\mu'}) - 2V_\mu^+ V^{\mu-} A_\nu Z^{0\nu'} \}$$

**19. Interacción VVZZ':**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V^2ZZ'} &= -\frac{\sqrt{3}}{4} g^2 (1 + 3t_W^2) \sqrt{1 - 4s_W^2} \\ &\times \{ V_\mu^+ V_\nu^- (Z^{0\nu'} Z^{0\mu} + Z^{0\nu} Z^{0\mu'}) - 2V_\mu^+ V^{\mu-} Z_\nu^0 Z^{0\nu'} \} \end{aligned}$$

**20. Interacción UUA:**

$$\mathcal{L}_{U^2\gamma^2} = 4e^2 \{U_\mu^{++}U_\nu^{--}A^\mu A^\nu - U_\mu^{++}U^{\mu--}A_\nu A^\nu\}$$

**21. Interacción UZZ:**

$$\mathcal{L}_{U^2Z^2} = \frac{g^2}{4} \frac{(1-4s_W^2)^2}{c_W^2} \{U_\mu^{++}U_\nu^{--}Z^{0\mu}Z^{0\nu} - U_\mu^{++}U^{\mu--}Z_\nu^0Z^{0\nu}\}$$

**22. Interacción UZ'Z':**

$$\mathcal{L}_{U^2Z'^2} = \frac{3g^2}{4} \frac{(1-4s_W^2)}{c_W^2} \{U_\mu^{++}U_\nu^{--}Z^{0\mu'}Z^{0\nu'} - U_\mu^{++}U^{\mu--}Z_\nu^{0'}Z^{0\nu'}\}$$

**23. Interacción UUAZ:**

$$\mathcal{L}_{U^2\gamma Z} = \frac{eg}{c_W} (1-4s_W^2) \{U_\mu^{++}U_\nu^{--}(Z^{0\nu}A^\mu + A^\nu Z^{0\mu}) - 2U_\mu^{++}U^{\mu--}A_\nu Z^{0\nu}\}$$

**24. Interacción UUAZ':**

$$\mathcal{L}_{U^2\gamma Z'} = \sqrt{3}g^2 t_W \sqrt{1-4s_W^2} \{U_\mu^{++}U_\nu^{--}(Z^{0\nu'}A^\mu + A^\nu Z^{0\mu'}) - 2U_\mu^{++}U^{\mu--}A_\nu Z^{0\nu'}\}$$

**25. Interacción UZZ':**

$$\mathcal{L}_{U^2ZZ'} = \frac{\sqrt{3}}{4} g^2 \frac{(1-4s_W^2)^{3/2}}{c_W^2} \{U_\mu^{++}U_\nu^{--}(Z^{0\nu'}Z^{0\mu} + Z^{0\nu}Z^{0\mu'}) - 2U_\mu^{++}U^{\mu--}Z_\nu^0Z^{0\nu'}\}$$

**26. Interacción WVUZ(a):**

$$\mathcal{L}_{WVUZ(a)} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{g^2}{c_W} \left\{ W_\mu^+ V^{\mu+} U^{\nu--} Z_\nu^0 \right. \\ \left. -(1 - 2s_W^2) W_\mu^+ V^{\nu+} U^{\mu--} Z_\nu^0 - 2s_W^2 W_\mu^+ V^{\nu+} U_\nu^{--} Z^{0\mu} \right\}$$

**27. Interacción WVUZ(b):**

$$\mathcal{L}_{WVUZ(b)} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{g^2}{c_W} \left\{ W_\mu^- V^{\mu-} U^{\nu++} Z_\nu^0 \right. \\ \left. -(1 - 2s_W^2) W_\mu^- V^{\nu-} U^{\mu++} Z_\nu^0 - 2s_W^2 W_\mu^- V^{\nu-} U_\nu^{++} Z^{0\mu} \right\}$$

**28. Interacción WVUZ'(a):**

$$\mathcal{L}_{WVUZ'(a)} = \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\sqrt{1 - 4s_W^2}}{c_W} g^2 \left\{ W_\mu^+ V^{\mu+} U^{\nu--} Z_\nu^{0'} \right. \\ \left. + W_\mu^+ V^{\nu+} U^{\mu--} Z_\nu^{0'} - 2W_\mu^+ V^{\nu+} U_\nu^{--} Z^{0\mu'} \right\}$$

**29. Interacción WVUZ'(b):**

$$\mathcal{L}_{WVUZ'(b)} = \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\sqrt{1 - 4s_W^2}}{c_W} g^2 \left\{ W_\mu^- V^{\mu-} U^{\nu++} Z_\nu^{0'} \right. \\ \left. + W_\mu^- V^{\nu-} U^{\mu++} Z_\nu^{0'} - 2W_\mu^- V^{\nu-} U_\nu^{++} Z^{0\mu'} \right\}$$

**30. Interacción WVUA(a):**

$$\mathcal{L}_{WVU\gamma(a)} = \frac{3}{\sqrt{2}} g e \left\{ W_\mu^+ V^{\nu+} U^{\mu--} A_\nu - W_\mu^+ V^{\nu+} U_\nu^{--} A^\mu \right\}$$

**31. Interacción WVUA(b):**

$$\mathcal{L}_{WVU\gamma(b)} = \frac{3}{\sqrt{2}} g e \{ W_\mu^- V^{\nu-} U^{\mu++} A_\nu - W_\mu^- V^{\nu-} U_\nu^{++} A^\mu \}$$

**32. Interacción VVUU:**

$$\mathcal{L}_{V^2U^2} = -\frac{g^2}{2} \{ V_\mu^+ V^{\mu-} U_\nu^{++} U^{\nu--} + V_\mu^+ V_\nu^- U^{\mu--} U^{\nu++} - 2V_\mu^+ V^{\nu-} U^{\mu++} U_\nu^{--} \}$$

**33. Interacción WWVV:**

$$\mathcal{L}_{W^2V^2} = -\frac{g^2}{2} \{ W_\mu^+ W^{\mu-} V_\nu^+ V^{\nu-} + W_\mu^+ W_\nu^- V^{\mu+} V^{\nu-} - 2W_\mu^+ W_\nu^- V^{\mu-} V^{\nu+} \}$$

**34. Interacción WWUU:**

$$\mathcal{L}_{W^2U^2} = -\frac{g^2}{2} \{ W_\mu^+ W^{\mu-} U_\nu^{++} U^{\nu--} + W_\mu^+ W_\nu^- U^{\mu--} U^{\nu++} - 2W_\mu^+ W_\nu^- U^{\mu++} U_\nu^{--} \}$$

**35. Interacción WWWW:**

$$\mathcal{L}_{W^4} = \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W_\nu^- \{ W^{\mu+} W^{\nu-} - W^{\mu-} W^{\nu+} \}$$

**36. Interacción VVVV:**

$$\mathcal{L}_{V^4} = \frac{g^2}{2} V_\mu^+ V_\nu^- \{ V^{\mu+} V^{\nu-} - V^{\mu-} V^{\nu+} \}$$

**37. Interacción UUUU:**

$$\mathcal{L}_{U^4} = \frac{g^2}{2} U_\mu^{++} U_\nu^{--} \{U^{\mu++} U^{\nu--} - U^{\mu--} U^{\nu++}\}$$

■ Tal como era de esperarse el Lagrangeano del sector bosónico de nuestro modelo contiene al Lagrangeano del mismo sector del (ME)<sup>18</sup>. Este es un buen indicio de que nuestro resultado es correcto. Por otro lado el Lagrangeano mostrado presenta particular importancia por dos motivos, el primero es que me permite calcular cualquier interacción entre los bosones del modelo via los diagramas de Feynman (que serán mostrados en el siguiente capítulo), lo cual nos brinda información valiosa para describir las propiedades de las nuevas partículas predichas por éste prototipo, dichas propiedades (como la masa) esperan verificación experimental en la actual generación de colisionadores. El segundo motivo es que representa un resultado novedoso ya como se menciono anteriormente, no se ha encontrado tal derivación (con todas las interacciones) en la bibliografía actual para el modelo desarrollado.

---

<sup>18</sup>Ver apéndice E.

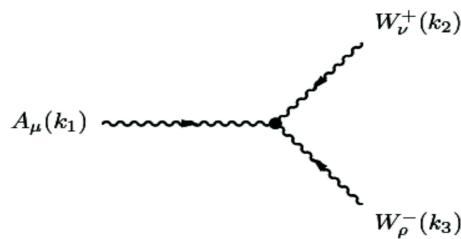
## Capítulo 3

# Diagramas y Reglas de Feynman

En el presente capítulo mostraremos los diagramas y reglas de Feynman de la interacciones entre los bosones que predice nuestro modelo en estudio. Para tal derivación era necesario encontrar el Lagrangeano de interacción que fue desarrollado en su totalidad en el capítulo anterior. El Hallazgo de las reglas se basó en el procedimiento mostrado en la bibliografía [55], el cual es desarrollado para ciertos casos de interés en uno de los apéndices que aparecen al final de la tesis<sup>1</sup>. Las reglas ostentan el mismo orden correlativo que los términos del lagrangeano de interacción.

---

### 1. Interacción WWA:

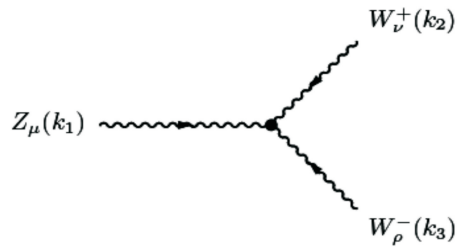


$$ie \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

---

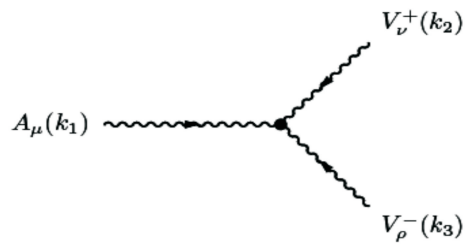
<sup>1</sup>Ver apéndice I

**2. Interacción WWZ:**



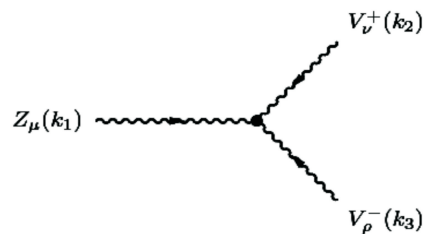
$$ig c_W \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

**3. Interacción VVA:**



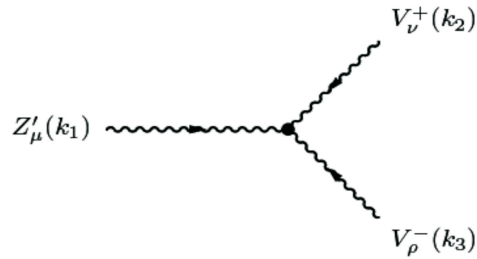
$$ie \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

**4. Interacción VVZ:**



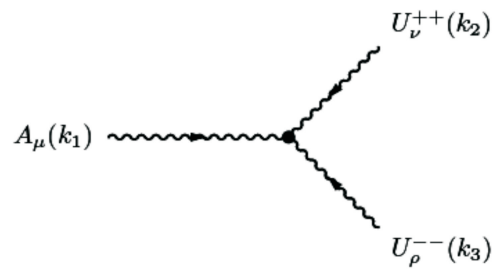
$$-\frac{ig}{2} \frac{(1 + 2s_W^2)}{c_W} \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

**5. Interacción VVZ':**



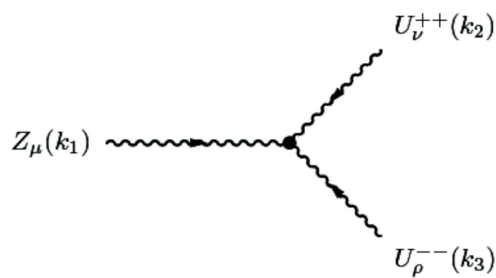
$$\frac{ig}{2} \frac{\sqrt{3(1-4s_W^2)}}{c_W} \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

**6. Interacción UUA:**



$$ie \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

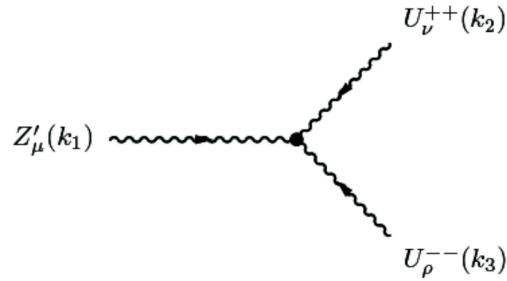
**7. Interacción UUZ:**



$$-\frac{ig}{2} \frac{(1+2s_W^2)}{c_W} \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

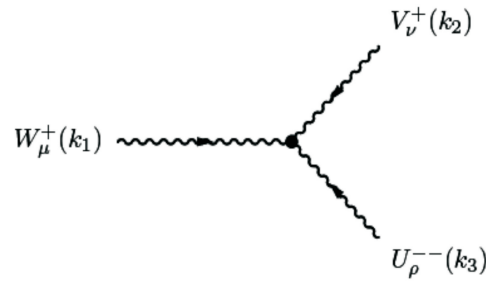


**8. Interacción UUZ':**



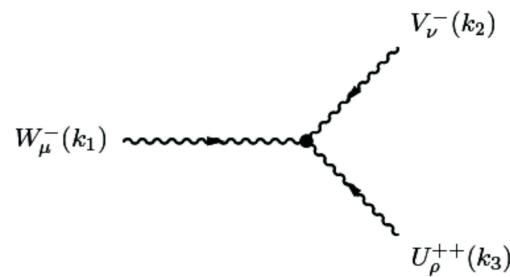
$$\frac{ig}{2} \frac{\sqrt{3} (1 - 4s_W^2)}{c_W} \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

**9. Interacción UVW(a):**



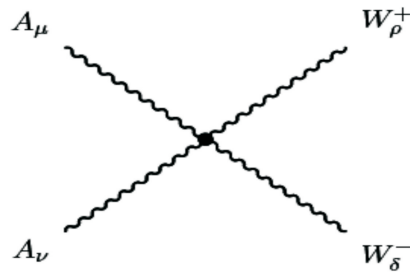
$$\frac{ig}{\sqrt{2}} \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

**10. Interacción UVW(b):**



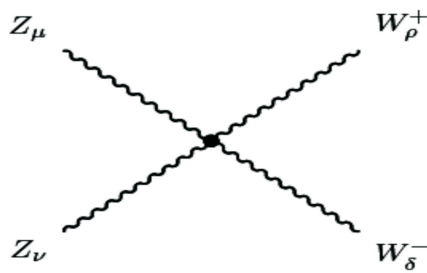
$$-\frac{ig}{\sqrt{2}} \{g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu\}$$

**11. Interacción WWAA:**



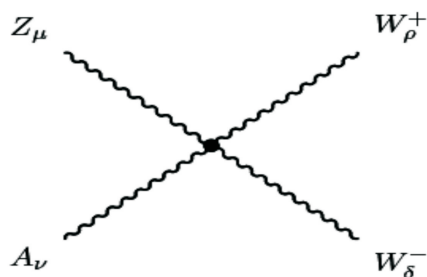
$$ie^2 \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**12. Interacción WWZZ:**



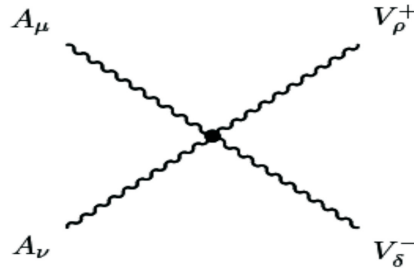
$$ig^2 c_W^2 \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**13. Interacción WWZA:**



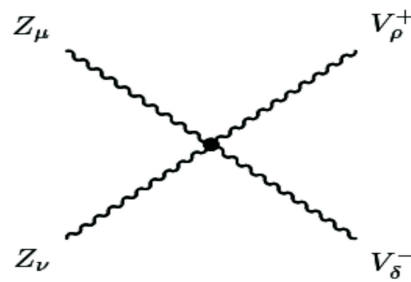
$$ie g c_W \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**14. Interacción VVAA:**



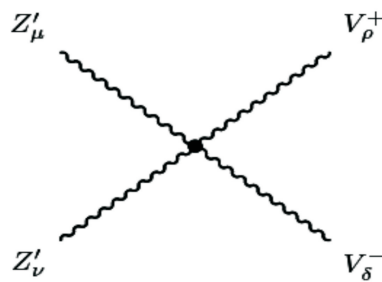
$$ie^2 \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**15. Interacción VVZZ:**



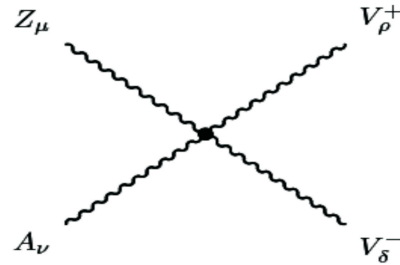
$$-ig^2 \left[ \frac{1 + 2s_W^2}{2c_W} \right]^2 \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**16. Interacción VVZ'Z':**



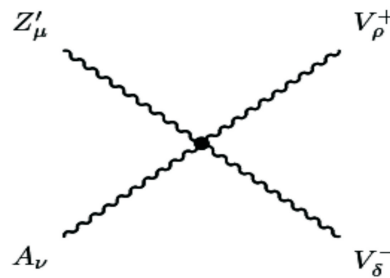
$$-ig^2 \left[ \frac{3(1 - 4s_W^2)}{4c_W^2} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**17. Interacción VVZA:**



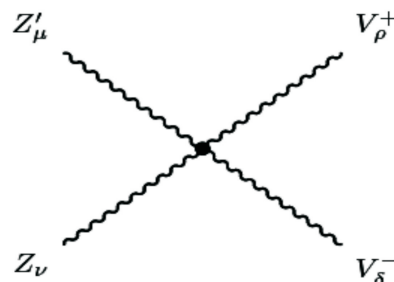
$$-ieg \left[ \frac{1 + 2s_W^2}{2c_W} \right] \{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \}$$

**18. Interacción VVZ'A:**



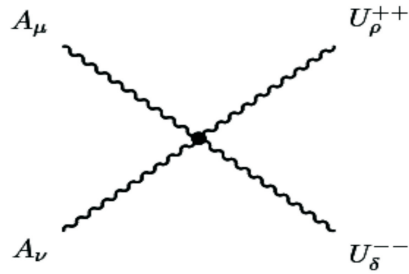
$$ig^2 \left[ \frac{s_W \sqrt{3(1 - 4s_W^2)}}{2c_W} \right] \{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \}$$

**19. Interacción VVZ'Z:**



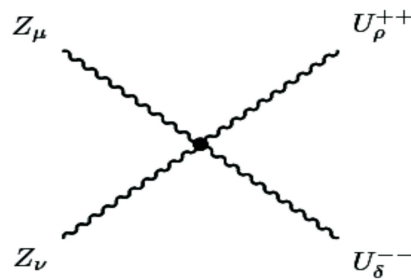
$$-ig^2 \left[ \frac{(1 + 3t_W^2) \sqrt{3(1 - 4s_W^2)}}{4} \right] \{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \}$$

**20. Interacción UUA:**



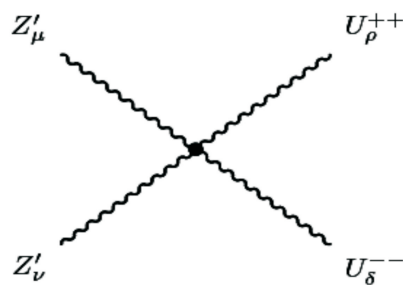
$$4ie^2 \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**21. Interacción UZZ:**



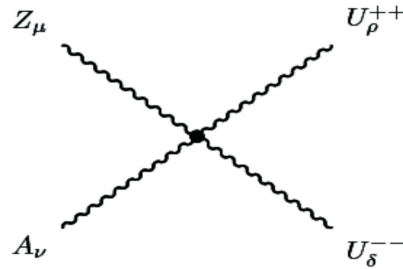
$$ig^2 \left[ \frac{(1 - 4s_W^2)^2}{4c_W^2} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**22. Interacción UZ'Z':**



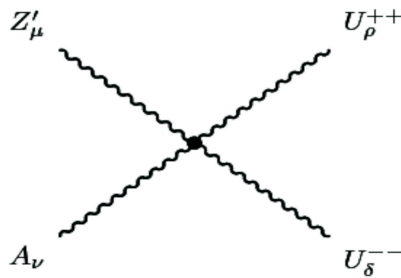
$$ig^2 \left[ \frac{3(1 - 4s_W^2)}{4c_W^2} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**23. Interacción UUA:**



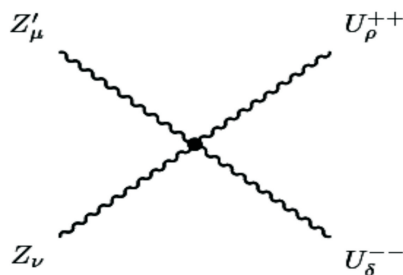
$$ieg \left[ \frac{1 - 4s_W^2}{c_W} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**24. Interacción UUZ'A:**



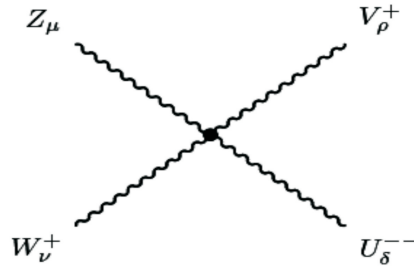
$$ig^2 \left[ \frac{s_W \sqrt{3(1 - 4s_W^2)}}{c_W} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**25. Interacción UUZ'Z:**



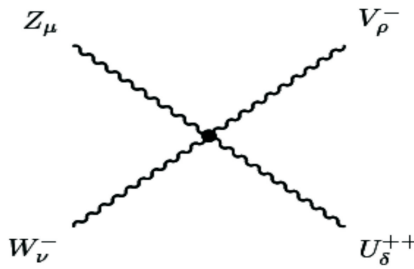
$$ig^2 \left[ \frac{\sqrt{3}(1 - 4s_W^2)^{3/2}}{4c_W^2} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**26. Interacción WVUZ(a):**



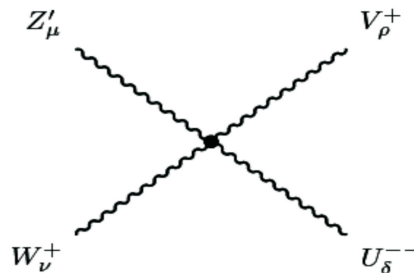
$$-ig^2 \left[ \frac{3\sqrt{2}}{4c_W} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} + 2s_W^2 (g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\rho\delta}) \right\}$$

**27. Interacción WVUZ(b)**



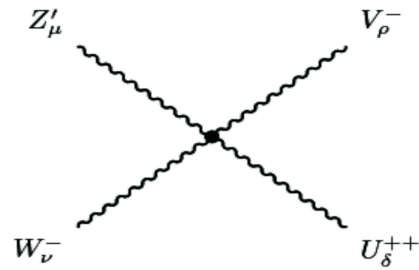
$$-ig^2 \left[ \frac{3\sqrt{2}}{4c_W} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} + 2s_W^2 (g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\rho\delta}) \right\}$$

**28. Interacción WVUZ'(a):**



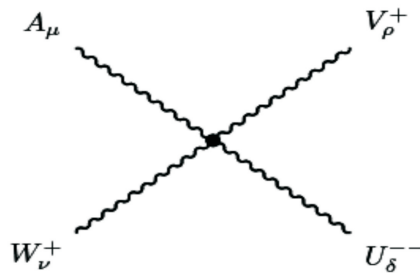
$$ig^2 \left[ \frac{\sqrt{6} (1 - 4s_W^2)}{4c_W} \right] \left\{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \right\}$$

**29. Interacción WVUZ'(b):**



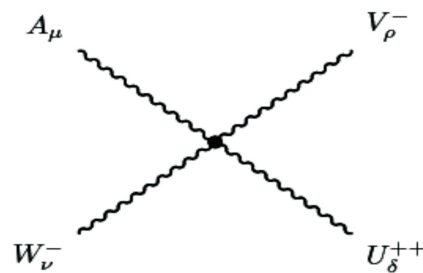
$$ig^2 \left[ \frac{\sqrt{6}(1-4s_W^2)}{4c_W} \right] \{ g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - 2 g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \}$$

**30. Interacción WVUA(a)**



$$ieg \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \{ g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \}$$

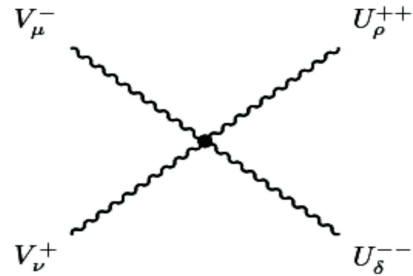
**31. Interacción WVUA(b):**



$$ieg \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \{ g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} \}$$



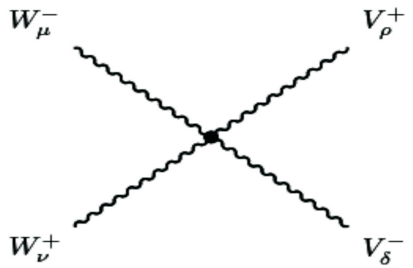
**32. Interacción VVUU:**



$$-\frac{ig^2}{2} \{g^{\mu\nu}g^{\rho\delta} + g^{\nu\delta}g^{\mu\rho} - 2g^{\mu\delta}g^{\nu\rho}\}$$


---

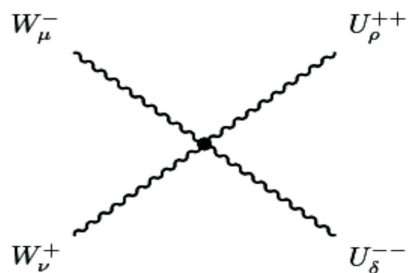
**33. Interacción WWVV**



$$-\frac{ig^2}{2} \{g^{\mu\nu}g^{\rho\delta} + g^{\nu\rho}g^{\mu\delta} - 2g^{\nu\delta}g^{\mu\rho}\}$$


---

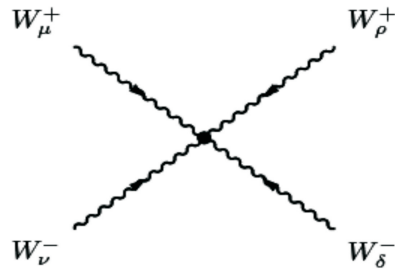
**34. Interacción WWUU:**



$$-\frac{ig^2}{2} \{g^{\mu\nu}g^{\rho\delta} + g^{\nu\delta}g^{\mu\rho} - 2g^{\mu\delta}g^{\nu\rho}\}$$

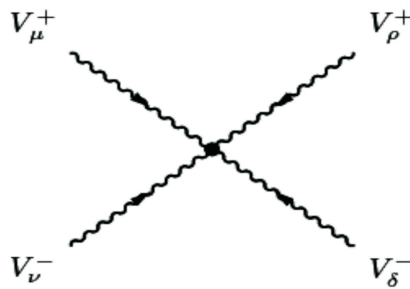

---

**35. Interacción WWWW:**



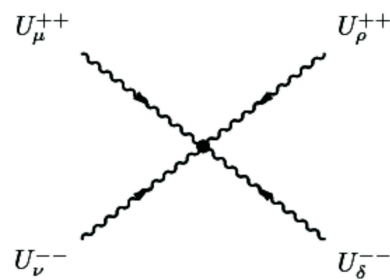
$$ig^2 \left\{ 2 g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} - g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} \right\}$$

**36. Interacción VVVV**



$$ig^2 \left\{ 2 g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} - g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} \right\}$$

**37. Interacción UUUU:**



$$ig^2 \left\{ 2 g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\rho\delta} - g^{\mu\delta} g^{\nu\rho} \right\}$$

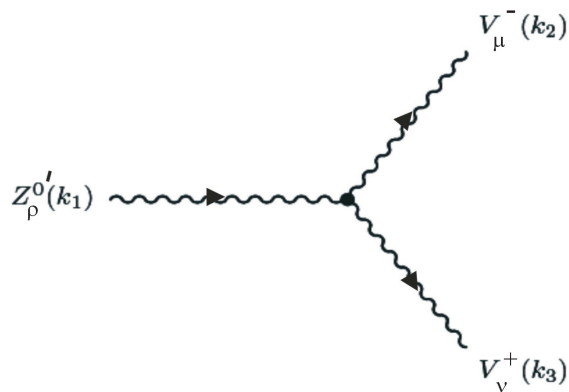
## Capítulo 4

# Cálculo del decaimiento del bosón $Z'_0$ , proceso no polarizado.

En este capítulo nos dedicamos a calcular el decaimiento en dos cuerpos del bosón exótico  $Z'_0$  en los nuevos bosones  $V^+$  y  $V^-$  predichos por nuestro modelo. Es importante resaltar que este procedimiento es idéntico para el caso en que los estados finales sean  $U^{++}$  y  $U^{--}$  ya que ambos comparten la misma regla de Feynman, lo único que los diferenciaría en la fórmula de la tasa de decaimiento sería la masa.

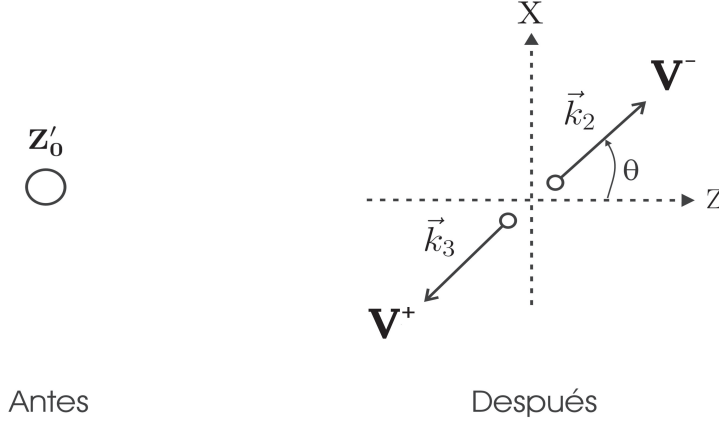
### DECAIMIENTO DEL BOSÓN $Z'^0$

---



**Cinemática:**

Tomando como sistema de referencia al C.M. del sistema:



$$k_1 = (M_{Z'}, 0, 0, 0) \quad k_2 = (E_2, |\mathbf{k}_2| \sin \theta, 0, |\mathbf{k}_2| \cos \theta)$$

$$k_3 = (E_3, -|\mathbf{k}_3| \sin \theta, 0, -|\mathbf{k}_3| \cos \theta)$$

La tasa de decaimiento para tal proceso es obtenida a partir de la regla de oro de Fermi que es dada por:

$$d\Gamma = \frac{1}{2 M_{Z'}} \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2 E_f} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - k_2 - k_3) \quad (4.1)$$

La amplitud y su respectiva conjugada son:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu\nu\rho} \epsilon^\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon^\nu(k_3, \lambda_3) \epsilon^\rho(k_1, \lambda_1)$$

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_{\sigma\eta\chi}^* \epsilon^{\sigma*}(k_2, \lambda_2) \epsilon^{\eta*}(k_3, \lambda_3) \epsilon^{\chi*}(k_1, \lambda_1) \quad (4.2)$$

Donde  $\mathcal{M}_{\mu\nu\rho}$  se obtiene de la regla de Feynman deducida del capítulo anterior:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu\rho} = \frac{ig}{2} \frac{\sqrt{3(1-4s_W^2)}}{c_W} \{ g_{\mu\nu}(k_3 - k_2)_\rho + g_{\mu\rho}(k_2 + k_1)_\nu - g_{\nu\rho}(k_3 + k_1)_\mu \} \quad (4.3)$$

Promediando sobre los estados de polarización iniciales, y sumando sobre los finales:

$$|\mathcal{M}_{NP}|^2 = \frac{1}{3} \sum_{\lambda_1=1}^3 \sum_{\lambda_2=1}^3 \sum_{\lambda_3=1}^3 |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \mathcal{M}_{\mu\nu\rho} \mathcal{M}_{\sigma\eta\chi}^* \epsilon^\nu(k_3, \lambda_3) \epsilon^\rho(k_1, \lambda_1) \epsilon^\mu(k_2, \lambda_2) \times \epsilon^{\sigma*}(k_2, \lambda_2) \epsilon^{\eta*}(k_3, \lambda_3) \epsilon^{\chi*}(k_1, \lambda_1) \quad (4.4)$$

Para el caso de bosones masivos la suma de polarizaciones es<sup>1</sup>:

$$\sum_{\lambda_1=1}^3 \epsilon^\rho(k_1, \lambda_1) \epsilon^{\chi*}(k_1, \lambda_1) = -g^{\rho\chi} + \frac{k_1^\rho k_1^\chi}{M^2} \quad (4.5)$$

Reemplazando en (4.4) se obtiene:

$$|\mathcal{M}_{NP}|^2 = \frac{1}{3} \mathcal{M}_{\mu\nu\rho} \mathcal{M}_{\sigma\eta\chi}^* \left( -g^{\mu\sigma} + \frac{k_2^\mu k_2^\sigma}{M_V^2} \right) \left( -g^{\nu\eta} + \frac{k_3^\nu k_3^\eta}{M_V^2} \right) \left( -g^{\rho\chi} + \frac{k_1^\rho k_1^\chi}{M_{Z'}^2} \right)$$

Sustituyendo las amplitudes (4.3):

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{NP}|^2 &= \frac{1}{3} \left( ig \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1-4s_W^2}}{c_W} \right) \{ g_{\mu\rho}(k_1+k_2)_\nu + g_{\mu\nu}(k_3-k_2)_\rho - g_{\nu\rho}(k_1+k_3)_\mu \} \\ &\times \left( -ig \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1-4s_W^2}}{c_W} \right) \{ g_{\sigma\chi}(k_2+k_1)_\eta + g_{\sigma\eta}(k_3-k_2)_\chi - g_{\eta\chi}(k_1+k_3)_\sigma \} \\ &\times \left( -g^{\mu\sigma} + \frac{k_2^\mu k_2^\sigma}{M_V^2} \right) \left( -g^{\nu\eta} + \frac{k_3^\nu k_3^\eta}{M_V^2} \right) \left( -g^{\rho\chi} + \frac{k_1^\rho k_1^\chi}{M_{Z'}^2} \right) \end{aligned}$$

La multiplicación de éstas expresiones nos da como resultado 72 términos los cuales además se deben contraer, aquí no mostraremos el desarrollo por tratarse de un cálculo muy largo y poco novedoso, lo que si resaltaremos es que se uso la aproximación para altas energías  $M_V \ll |\mathbf{k}| \approx M_{Z'}$ , obteniendo:

$$|\mathcal{M}_{NP}|^2 = \frac{1}{3} |C|^2 \left\{ -4|\mathbf{k}|^2 - \frac{2|\mathbf{k}|^4}{M_{Z'}^2} + \frac{5|\mathbf{k}|^4}{M_V^2} + \frac{16|\mathbf{k}|^6}{M_V^4} \right\} \quad (4.6)$$

Donde:

$$|C|^2 = \frac{3g^2}{4} \frac{(1-4s_W^2)}{c_W^2}, \quad |\mathbf{k}| \equiv |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}_3|$$

Usando la tasa de decaimiento vista en (4.1) para nuestro caso con dos partículas en el estado final:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M_{Z'}} \left( \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left( \frac{d^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) |\mathcal{M}_{NP}|^2 \delta^{(4)}(k_1 - k_2 - k_3)$$

<sup>1</sup>Ver apéndice J.2

Integrando con el propósito de encontrar la tasa de decaimiento:

$$\Gamma = \frac{1}{2(4\pi)^2} \frac{1}{M_{Z'}} \int d^3\mathbf{k}_2 \int \frac{d^3\mathbf{k}_3}{E_2 E_3} |\mathcal{M}_{NP}|^2 \delta^{(4)}(k_1 - k_2 - k_3)$$

Teniendo en cuenta:

$$E_1 = M_{Z'}, \quad E_2 = \sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_2|^2}, \quad E_3 = \sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_3|^2}, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$$

Con:

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(k_1 - k_2 - k_3) &= \delta(E_1 - E_2 - E_3) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \\ \delta^{(4)}(k_1 - k_2 - k_3) &= \delta(M_{Z'} - \sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_2|^2} - \sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_3|^2}) \delta(-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \end{aligned}$$

Reemplazamos en la amplitud de decaimiento:

$$\Gamma = \frac{1}{2(4\pi)^2 M_{Z'}} \int d^3\mathbf{k}_2 \int \frac{d^3\mathbf{k}_3 \delta(M_{Z'} - \sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_2|^2} - \sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_3|^2})}{\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_2|^2} \sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}_3|^2}} |\mathcal{M}_{NP}|^2 \delta(-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)$$

Usando la propiedad de la función delta, al integrar en  $\mathbf{k}_3$ ; se obtiene:

$$\Gamma = \frac{1}{2(4\pi)^2 M_{Z'}} \int \frac{d^3\mathbf{k} \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2})}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2} |\mathcal{M}_{NP}|^2$$

Donde hemos usado la definición vista anteriormente  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_2$ . Ahora reemplazamos la amplitud hallada (4.6):

$$\Gamma = \frac{1}{2(4\pi)^2 M_{Z'}} \int \underbrace{\frac{1}{3} |C|^2 \left\{ -4|\mathbf{k}|^2 - \frac{2|\mathbf{k}|^4}{M_{Z'}^2} + \frac{5|\mathbf{k}|^4}{M_V^2} + \frac{16|\mathbf{k}|^6}{M_V^4} \right\}}_{|\mathcal{M}_{NP}|^2} \frac{\delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

Definamos:

$$A \equiv \frac{|C|^2}{(3)(2)(4\pi)^2}$$

Entonces la tasa de decaimiento se divide en cuatro integrales:

$$\Gamma_1 = \frac{(-4) A}{M_{Z'}} \int \frac{|\mathbf{k}|^2 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

$$\Gamma_2 = \frac{(-2) A}{M_{Z'}^3} \int \frac{|\mathbf{k}|^4 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

$$\Gamma_3 = \frac{5 A}{M_{Z'} M_V^2} \int \frac{|\mathbf{k}|^4 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

$$\Gamma_4 = \frac{16 A}{M_{Z'} M_V^4} \int \frac{|\mathbf{k}|^6 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

Para resolver estas integrales vamos a usar la propiedad de la función delta:

$$\delta[g(x)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \delta[g(x)] &= \delta\left(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + x^2}\right) \\ &= \frac{M_{Z'}}{2\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}} \left[ \delta\left(x - \frac{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

### 1. Desarrollo de $\Gamma_1$

Tenemos:

$$\Gamma_1 = \frac{(-4) A}{M_{Z'}} \int \frac{|\mathbf{k}|^2 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

En coordenadas esféricas:

$$|\mathbf{k}|^2 = \rho^2, \quad d^3\mathbf{k} = \rho^2 d\rho \sin\theta d\theta d\phi$$

Obtenemos:

$$\Gamma_1 = \frac{(-4) A}{M_{Z'}} \int_0^\infty \frac{\rho^4}{(M_V^2 + \rho^2)} \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + \rho^2}) d\rho \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{4\pi}$$

Usando la propiedad de la delta (4.7):

$$\Gamma_1 = \frac{(-4)(4\pi) A}{M_{Z'}} \int_0^\infty \frac{\rho^4}{(M_V^2 + \rho^2)} \frac{M_{Z'}}{2\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}} \left[ \delta\left(\rho - \frac{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}}{2}\right) + \delta\left(\rho + \frac{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}}{2}\right) \right] d\rho$$

Ya que la potencia de  $\rho$  es par, la suma de la delta se reduce:

$$\Gamma_1 = \frac{(-4)(4\pi) A}{M_{Z'}} \frac{M_{Z'}}{2\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}} \int_0^\infty \frac{\rho^4}{(M_V^2 + \rho^2)} 2\delta\left(\rho - \frac{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}}{2}\right) d\rho$$

Integrando:

$$\Gamma_1 = \frac{(-4)(4\pi) A}{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}} \left[ \frac{\left\{ \frac{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}}{2} \right\}^4}{M_V^2 + \left\{ \frac{\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}}{2} \right\}^2} \right]$$

Luego:

$$\Gamma_1 = -A(4\pi) \frac{[\sqrt{M_{Z'}^2 - 4M_V^2}]^3}{M_{Z'}}$$

Con:

$$x \equiv \frac{4 M_V^2}{M_{Z'}^2}$$

Obtenemos finalmente:

$$\Gamma_1 = -A(4\pi)M_{Z'} (\sqrt{1-x})^3 \quad (4.8)$$

## 2. Desarrollo de $\Gamma_2$

Tenemos:

$$\Gamma_2 = \frac{(-2) A}{M_{Z'}^3} \int \frac{|\mathbf{k}|^4 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

Procediendo de manera similar a lo hecho en el caso anterior, encontramos:

$$\Gamma_2 = -A \left(\frac{\pi}{2}\right) M_{Z'} (\sqrt{1-x})^5 \quad (4.9)$$



### 3. Desarrollo de $\Gamma_3$

Tenemos:

$$\Gamma_3 = \frac{5 A}{M_{Z'} M_V^2} \int \frac{|\mathbf{k}|^4 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

Entonces:

$$\Gamma_3 = A (5\pi) M_{Z'} \frac{(\sqrt{1-x})^5}{x} \quad (4.10)$$

### 4. Desarrollo de $\Gamma_4$

Tenemos:

$$\Gamma_4 = \frac{16 A}{M_{Z'} M_V^4} \int \frac{|\mathbf{k}|^6 \delta(M_{Z'} - 2\sqrt{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}) d^3\mathbf{k}}{M_V^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

Entonces:

$$\Gamma_4 = A (16\pi) M_{Z'} \frac{(\sqrt{1-x})^7}{x^2} \quad (4.11)$$

La tasa de decaimiento sería la suma de estos cuatro términos, ecuaciones (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11):

$$\begin{aligned} \Gamma &= -A(4\pi)M_{Z'} (\sqrt{1-x})^3 - A\left(\frac{\pi}{2}\right) M_{Z'} (\sqrt{1-x})^5 + A(5\pi) M_{Z'} \frac{(\sqrt{1-x})^5}{x} + A(16\pi) M_{Z'} \frac{(\sqrt{1-x})^7}{x^2} \\ &= A\pi M_{Z'} \frac{(\sqrt{1-x})^3}{x^2} \left[ -4x^2 - \frac{1}{2}x^2 (\sqrt{1-x})^2 + 5x (\sqrt{1-x})^2 + 16 (\sqrt{1-x})^4 \right] \\ &= A\pi M_{Z'} \frac{(\sqrt{1-x})^3}{x^2} \left[ \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 27x + 16 \right] \\ &= A8\pi M_{Z'} \frac{(\sqrt{1-x})^3}{x^2} \left[ \frac{1}{16}x^3 + \frac{13}{16}x^2 - \frac{27}{8}x + 2 \right] \end{aligned}$$

Recordemos que:

$$A = \frac{g^2}{8(4\pi)^2} \frac{(1 - 4s_W^2)}{c_W^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad g^2 = \frac{e^2}{s_W^2}$$

Entonces tendríamos la tasa de decaimiento buscada:

$$\Gamma(Z' \rightarrow V^+V^-) = M_{Z'} \frac{\alpha (1 - 4s_W^2)}{s_{2W}^2} f(x) \quad (4.12)$$

Donde:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1-x})^3}{x^2} \left[ \frac{1}{16}x^3 + \frac{13}{16}x^2 - \frac{27}{8}x + 2 \right], \quad x \equiv \frac{4 M_V^2}{M_{Z'}^2}$$

■ Dicho resultado presenta bastante similaridad con el encontrado en el trabajo de Pérez, Tavares-Velasco, Toscano.[19].

## Capítulo 5

# Fenomenología

La motivación original que llevó al estudio del modelo  $SU_L(3) \otimes U_N(1)$  fue la de resolver el problema de la violación de la unitariedad de la amplitud a altas energías por los procesos  $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$  [54] y  $e^-e^- \rightarrow W^-V^-$  [13]. Con tal objetivo se procedió a introducir los bosones de calibre doblemente cargados para así restaurar el buen comportamiento a la escala energética mencionada, lo que además inducía la aparición de un nuevo bosón de calibre neutro, el  $Z'$ . La existencia de los bosones doblemente cargados tienen en el proceso  $e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-$  su mejor prueba experimental [17]. La extensión del (ME) mencionada es posiblemente la forma más simple de agrandar el grupo de calibre sin perder las características naturales del modelo estándar electrodébil. Los bosones vectoriales  $V^-$  y  $U^{--}$  son muy masivos y sus masas dependen de la escala de rompimiento de simetría cuando se pasa del  $SU_L(3) \otimes U_N(1)$  al  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ . Al igualar las constantes de acoplamiento en el rompimiento se encuentra que el límite para el  $\sin^2 \theta_W$  es  $\sin^2 \theta_W(M_{Z'}) < 1/4$ , en el caso particular de  $\sin^2 \theta_W(M_{Z'}) = 0,2333$ , se obtiene que  $M_{Z'}$  es menor que 3,1 TeV [8]. Las masas de los nuevos bosones de calibre cargados  $V^\pm$  y  $U^{\pm\pm}$  se encuentran limitados por los experimentos de colisión leptónica [9] y por el decaimiento del muón [10]. Actualmente el límite mas bajo para el bosón de calibre doblemente cargado se obtiene de la conversión muon-antimuon,  $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$  lo cual nos da  $M_{U^{++}} \geq 850$  GeV [12]. Además la restricción  $M_{V^+} > 440$  GeV fue derivada de los límites en el ancho de decaimiento del muón [11]. Debido a la relación que existe entre  $M_V$  y  $M_{Z'}$  mostrada en [17], se encuentra el límite inferior  $M_{Z'} \geq 1,3$  TeV. Queremos remarcar que todos los límites mencionados son dependientes del modelo, por lo que la existencia de bosones de calibre más livianos es permitida. Del rango de masas obtenidas para el boson  $Z'$ , se puede concluir que las masas para los nuevos bosones de calibre cargadas son menores que la mitad de  $M_{Z'}$  por

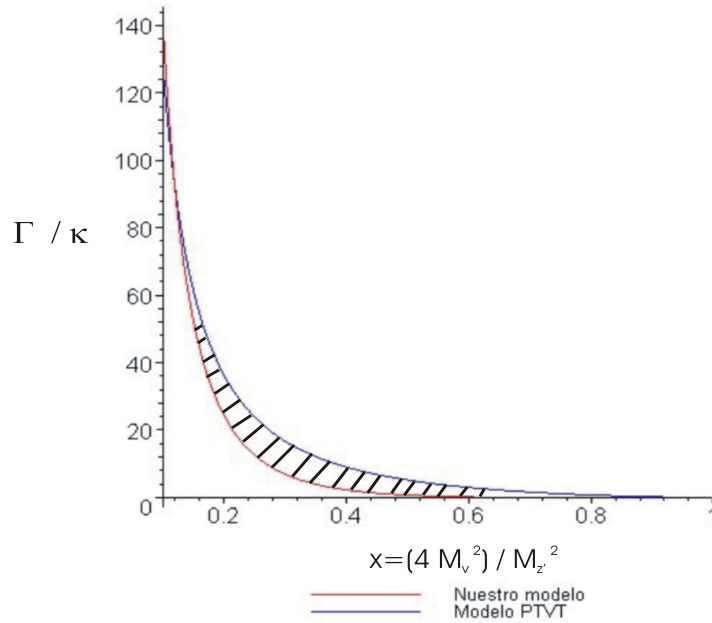
lo que el decaimiento  $Z' \rightarrow V^+V^-$  es cinemáticamente posible [19],[17].

Consideramos interesante contrastar nuestro resultado obtenido para la tasa de decaimiento del proceso  $Z' \rightarrow V^+ + V^-$  mostrado en (4.12) con el de algún otro modelo que incorpore la misma simetría de calibre; a partir de la bibliografía consultada sólo hemos podido encontrar el cálculo de dicho proceso en el trabajo de Pérez, Tavares-Velasco, Toscano [19] ( en adelante PTVT ). Debemos notar que la diferencia del modelo mostrado en nuestro trabajo con el propuesto por PTVT se basa en la representación del sector escalar, ya que ellos consideran un sexteto para los campos de Higgs además de los tres tripletes que mostramos en (2.9). ( También hay que resaltar que ellos consideran una representación diferente para los leptones). A continuación reproduciremos la tasa de decaimiento presentada en el trabajo de PTVT:

$$\Gamma = \overbrace{M_{Z'} \frac{\alpha (1 - 4s_W^2)}{s_{2W}^2}}^{\kappa} g(x), \quad g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2} \left[ -\frac{3}{4}x^3 - \frac{17}{4}x^2 + 4x + 1 \right], \quad x \equiv \frac{4M_V^2}{M_{Z'}^2} \quad (5.1)$$

Al comparar esta expresión con la hallada en (4.12) observamos que la diferencia reside en las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  por lo que nos parece interesante mostrar las desviaciones que entre ellas se presentan. Para esto fijaremos la masa del bosón  $Z'$  y variaremos  $M_V$  desde cero hasta  $M_{Z'}/2$ , tal como se muestra en el gráfico a continuación:

### Tasa de Decaimiento del bosón $Z'$



La diferencia principal entre las curvas se señala en la zona marcada con franjas. Fuera de ésta zona las tasas de decaimiento coinciden, y argumentando que las coincidencias corresponden a los valores correctos de las masas nos encontraríamos en dos posibles escenarios.

En el primer escenario para valores de  $x \approx 0,1$  obtenemos una relación entre las masas de  $M_V \approx 0,16 M_{Z'}$  y considerando el límite máximo para  $M_{Z'} \approx 3$  TeV tendríamos que  $M_V \approx 0,48$  TeV.

En el segundo escenario consideraremos debido a la gráfica  $x \approx 0,8$  lo que nos daría una relación entre las masa de  $M_V \approx 0,4 M_{Z'}$  y escogiendo de manera similar al caso anterior el límite maximo para  $M_{Z'} \approx 3$  TeV tendríamos que  $M_V \approx 1,2$  TeV. Ambos escenarios nos arrojan valores para las masas de  $M_V$  dentro de los rangos fenomenológicos establecidos.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Hemos presentado una extensión del (ME) con simetría de calibre  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ , basado principalmente en los trabajos de Montero, Pisano y Pleitez [13], [15]. El resultado del lagrangeano bosónico y de la tasa de decaimiento del bosón  $Z'$  se contrastó con los trabajos de Perez, Tavares-Velasco y Toscano [18] y [19] respectivamente.

Inicialmente el objetivo central de ésta investigación era analizar distintos canales de decaimiento para el bosón exótico  $Z'$ , pero al no disponer de los términos de interacción del sector bosónico en nuestro modelo, nos vimos en la obligación de determinar el lagrangeano bosónico total, tarea que nos alejó de nuestro objetivo principal, por lo que sólo pudimos finalmente analizar un sólo canal de decaimiento.

Un aspecto importante que queremos resaltar es el no haber obtenido en el lagrangeano bosónico, términos de interacción entre el bosón neutro exótico  $Z'$  y los bosones cargados  $W^\pm$ , a diferencia de otros modelos como en [19] donde tal acople sí se presenta. A pesar de que todavía no hay una observación experimental de tal decaimiento, se espera que ésta reacción sea uno de los posibles caminos para detectar al bosón  $Z'$  en colisionador Tevatron ( Run II ) [22].

Durante el presente trabajo hemos podido constatar la numerosa cantidad de propiedades que pueden extraerse del modelo estudiado, por lo que consideramos que el desarrollo presentado se encuentra distante de considerarse completo. Las perspectivas a seguir consistirían en calcular los restantes canales de decaimiento del bosón exótico para luego analizar su branching ratio (Br) con el objetivo de determinar cuál de los decaimientos tienen una mayor probabilidad de ocurrir. Dentro del sector bosónico el haber obtenido el Lagrangeano completo nos abre un abanico de posibilidades para analizar las propiedades tanto de las nuevas

partículas introducidas por el modelo como de las ya conocidas en el contexto de este nuevo grupo de simetría.

Dentro del programa que traza la actual generación de colisionadores existe una variedad de procesos interesantes que buscan dar cuenta de la existencia del bosón exótico  $Z'$ . Por ejemplo el Tevatron Run II se encuentra realizando búsquedas de ésta partícula a través de su decaimiento en  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $e\mu$ ,  $\tau^+\tau^-$ ,  $t\bar{t}$  y  $WW$  [22], es por ello que el cálculo de algunos de estos procesos son considerados dentro de nuestras perspectivas a futuro.

## Apéndice A

# Lagrangiano Leptónico del ME

### A.1. Ecuación de Dirac

La idea de generalizar la ecuación de Schrödinger de manera que incorpore los principios de la relatividad fue inicialmente propuesta por Klein y Gordon .

Al emprender dicha tarea surgieron varios problemas, uno de los mas relevantes, era la aparición de segundas derivadas temporales, lo que llevaba a que la densidad de probabilidad no era definida positiva. Tal resultado no permitía darle un significado probabilista a la teoría.

Tiempo después Dirac intentó buscar una ecuación covariante relativista, con densidad de probabilidad definida positiva, y como tal ecuación debía ser lineal en la derivada temporal, era natural intentar formar un Hamiltoniano lineal en las derivadas espaciales, por lo que Dirac propuso una nueva forma para la ecuación de Schrodinger, de la partícula libre:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi = (\alpha \cdot P + \beta m) \psi \quad (\text{A.1})$$

Notar que la energía relativista (con  $c = 1$ ) es dada por:

$$E^2 = P^2 + m^2 \quad (\text{A.2})$$

Con el fin de obtener la ecuación de Klein-Gordon, elevamos al cuadrado la relación (A.1):

$$H^2 = \left\{ \sum_i \alpha_i P_i + \beta m \right\} \left\{ \sum_j \alpha_j P_j + \beta m \right\}$$



Multiplicando:

$$H^2 = \underbrace{\sum_i \sum_j \alpha_i P_i \alpha_j P_j}_{(1)} + \underbrace{\sum_i \alpha_i P_i \beta m + \beta m \sum_j \alpha_j P_j + m^2 \beta^2}_{(2)}$$

Desarrollando (1):

$$\begin{aligned} (1) &= \alpha_1 P_1 \alpha_1 P_1 + \alpha_1 P_1 \alpha_2 P_2 + \alpha_1 P_1 \alpha_3 P_3 \\ &+ \alpha_2 P_2 \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \alpha_2 P_2 + \alpha_2 P_2 \alpha_3 P_3 \\ &+ \alpha_3 P_3 \alpha_1 P_1 + \alpha_3 P_3 \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \alpha_3 P_3 \end{aligned}$$

Notequemos que los  $P_k$  son operadores, pero los  $\alpha_k$  son constantes entonces  $\alpha_k P_k = P_k \alpha_k$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (1) &= \alpha_1^2 P_1^2 + \alpha_2^2 P_2^2 + \alpha_3^2 P_3^2 \\ &+ \alpha_2 \alpha_2 P_1 P_2 + \alpha_2 \alpha_1 P_1 P_2 + \alpha_1 \alpha_3 P_1 P_3 + \alpha_3 \alpha_1 P_1 P_3 + \alpha_2 \alpha_3 P_2 P_3 + \alpha_3 \alpha_2 P_2 P_3 \\ (1) &= \sum_i \alpha_i^2 P_i^2 + \sum_{i \neq j} \{\alpha_i, \alpha_j\} P_i P_j \end{aligned}$$

Ahora desarrollemos (2):

$$\begin{aligned} (2) &= \alpha_1 \beta P_1 m + \alpha_2 \beta P_2 m + \alpha_3 \beta P_3 m \\ &+ \beta \alpha_1 P_1 m + \beta \alpha_2 P_2 m + \beta \alpha_3 P_3 m \\ (2) &= \sum_i \{\beta, \alpha_i\} P_i m \end{aligned}$$

Ya que  $H^2 = E^2$ , y comparando con la ecuación de la energía relativista (A.2) encontramos:

$$H^2 = \sum_i \overbrace{\alpha_i^2}^1 P_i^2 + \sum_{i \neq j} \overbrace{\{\alpha_i, \alpha_j\}}^0 P_i P_j + \sum_i \overbrace{\{\beta, \alpha_i\}}^0 P_i m + m^2 \overbrace{\beta^2}^1$$

Es decir:

$$\begin{cases} (\alpha_i)^2 = \beta^2 = 1, \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\beta, \alpha_i\} = 0, i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado notemos que el Hamiltoniano debe ser un operador Hermítico  $H^\dagger = H$ , teniendo esto en cuenta:

$$H^\dagger = \left\{ \sum_i \alpha_i P_i + \beta m \right\}^\dagger$$

Usando:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

entonces:

$$H^\dagger = \sum_i P_i^\dagger \alpha_i^\dagger + \beta^\dagger m$$

$$H^\dagger = \sum_i \alpha_i^\dagger P_i^\dagger + \beta^\dagger m$$

Ya que el operador momentum  $P$  es hermítico  $P^\dagger = P$ , obtenemos las propiedades adicionales:

$$\begin{cases} \alpha_i^\dagger = \alpha_i, \\ \beta^\dagger = \beta \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

### A.1.1. Trazas de las matrices de Dirac

Partiendo de la segunda relación obtenida en (A.3):

$$\beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0$$

$$\beta \alpha_i = -\alpha_i \beta$$

$$\beta \alpha_i \beta = -\alpha_i \beta^2 = -\alpha_i$$

Ya que la traza de un producto de matrices no cambia por la permutación cíclica de las matrices, se obtiene:

$$\text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr}(\alpha_i)$$

$$\text{Tr}(\beta \beta \alpha_i) = \text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i)$$

Con lo que:

$$\boxed{\text{Tr}(\alpha_i) = 0} \tag{A.5}$$

De manera similar obtenemos:

$$\begin{aligned} \beta\alpha_i + \alpha_i\beta &= 0 \\ \beta\alpha_i &= -\alpha_i\beta \\ \beta\alpha_i\alpha_i &= \beta = -\alpha_i\beta\alpha_i \end{aligned}$$

Usando la misma propiedad para la traza:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\beta) &= -\text{Tr}(\alpha_i\beta\alpha_i) \\ \text{Tr}(\beta) &= -\text{Tr}(\alpha_i\alpha_i\beta) = -\text{Tr}(\beta) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\boxed{\text{Tr}(\beta) = 0} \tag{A.6}$$

### A.1.2. Valores propios de las matrices de Dirac

Como mostramos anteriormente, las matrices  $\alpha_i, \beta$  son matrices hermíticas, por lo tanto tienen valores propios reales. Por otro lado también se ha encontrado que  $(\alpha_i)^2 = \beta^2 = 1$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_i\psi &= \lambda_i\psi \\ \alpha_i^2\psi &= \psi = \lambda_i^2\psi \\ \lambda_i^2 &= 1 \Rightarrow \lambda_i = \pm 1 \end{aligned}$$

De manera similar se puede hacer para el caso de la matriz  $\beta$ .

A partir de los resultados obtenidos, observamos que las matrices han encontrado tienen traza cero, y valores propios  $\pm 1$ , por lo tanto se puede concluir que son matrices cuya dimensión es múltiplo de 2, además debe haber cuatro de ellas. Se debe notar que la primera idea es que ellas sean las matrices de Pauli, pero al haber sólo tres matrices distintas de la identidad, la única posibilidad es aumentar

la dimensión, por lo que dichas matrices deben ser de dimensión  $N = 4$ . Entonces en la representación de Dirac:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Alternativamente se define:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_i)$$

Donde:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Estas matrices cumplen con el siguiente algebra, conocida como algebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.9})$$

Finalmente la ecuación propuesta por Dirac en funcion a las matrices introducidas sería:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (-i\alpha_j\nabla_j + \beta m)\psi \\ i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (-i\beta\alpha_j\nabla_j + \beta^2 m)\psi \\ i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (-i\gamma^j\nabla_j + m)\psi \\ i\left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} + \gamma^j\nabla_j\psi\right) &= m\psi \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\psi &= m\psi \end{aligned}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

(A.10)

## A.2. Lagrangeano libre de Dirac

Nuestra tarea ahora es construir el Lagrangeano de Dirac, que nos permita describir la dinámica de las partículas de spin 1/2, dicho Lagrangeano debe cumplir

ciertas propiedades. Primeramente debe reproducir la ecuación libre de Dirac, por esto proponemos:

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \} - m \bar{\psi} \psi \quad (\text{A.11})$$

La ecuación de movimiento se obtiene a partir de los principios variacionales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] = 0$$

Consideramos a  $\psi$  y a  $\bar{\psi}$  como dos variables distintas.

Si realizamos la variación con respecto a  $\bar{\psi}$  obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - m \psi$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right\} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi)$$

Luego:

$$i \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - m \psi = 0$$

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (\text{A.12})$$

De manera similar variamos la función  $\psi$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu - m \bar{\psi}$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right\} = \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu$$

Entonces:

$$i (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Con esto mostramos que dicho lagrangeano nos permite hallar la ecuación de Dirac y su respectiva adjunta.

Otra propiedad importante que debe poseer el lagrangeano planteado es que sea un número real para que la acción tenga un extremal. El siguiente paso es mostrar que dicho Lagrangeano es real, es decir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$$

Tomando la transpuesta a la conjugada de (A.11):

$$\mathcal{L}^\dagger = \left[ \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \} - m \bar{\psi} \psi \right]^\dagger$$

Luego:

$$\mathcal{L}^\dagger = -\frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \}^\dagger - m (\bar{\psi} \psi)^\dagger$$

$$\mathcal{L}^\dagger = -\frac{i}{2} \left\{ (\partial_\mu \psi)^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger - \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\partial_\mu \bar{\psi})^\dagger \right\} - m (\psi^\dagger \gamma^0 \psi)^\dagger$$

$$\mathcal{L}^\dagger = -\frac{i}{2} \left\{ (\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \psi - \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0)^\dagger \right\} - m \psi^\dagger \gamma^0 \psi$$

$$\mathcal{L}^\dagger = -\frac{i}{2} \left\{ (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 (\partial_\mu \psi) \right\} - m \bar{\psi} \psi$$

$$\mathcal{L}^\dagger = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \} - m \bar{\psi} \psi = \mathcal{L}$$

■ Con esto verificamos que el Lagrangeano libre de Dirac propuesto es real.

El Lagrangeano de Dirac se puede escribir finalmente como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{ \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \} + \text{h.c.} \quad (\text{A.14})$$

### A.3. Campos Izquierdos y Derechos

Cuando iniciamos el capítulo del (M.E) comentamos que es necesario dividir los campos en derechos e izquierdos, por lo que usamos los operadores proyección:

$$P_L = \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right), \quad P_R = \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right)$$

Donde:

$$P_L + P_R = 1$$

Debemos tener en cuenta ciertas propiedades:

$$\gamma^5 = \gamma^{5\dagger} = \gamma_5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{ \gamma^5, \gamma^\mu \} = 0, \quad (1 \pm \gamma^5) = \frac{(1 \pm \gamma^5)^2}{2} \quad (\text{A.15})$$

Definiendo:

$$\begin{aligned}
 P_L \psi &= \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \psi = \psi_L, & P_R \psi &= \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \psi = \psi_R \\
 \bar{\psi}_L &= \bar{\psi} P_R = \bar{\psi} \frac{(1 + \gamma^5)}{2}, & \bar{\psi}_R &= \bar{\psi} P_L = \bar{\psi} \frac{(1 - \gamma^5)}{2}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Escribimos el Lagrangeano de Dirac libre para el caso de partículas sin masa:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu 1 (\partial_\mu \psi) \} + \text{h.c.} \\
 \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \gamma^\mu \left[ \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) + \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \right] (\partial_\mu \psi) \right\} + \text{h.c.} \\
 \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) (\partial_\mu \psi) \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) (\partial_\mu \psi) \right\} + \text{h.c.}
 \end{aligned}$$

Usando la propiedad (A.15), obtenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) (\partial_\mu \psi) \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) (\partial_\mu \psi) \right\} + \text{h.c.}$$

Que con (A.16) nos queda:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi}_L \gamma^\mu (\partial_\mu \psi_L) \} + \frac{i}{2} \{ \bar{\psi}_R \gamma^\mu (\partial_\mu \psi_R) \} + \text{h.c.}$$

Denotando  $\bar{\psi}_L \equiv \bar{L}_l$ ,  $\psi_R \equiv R_l$ , escribimos finalmente:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \{ \bar{L}_l \gamma^\mu (\partial_\mu L_l) + \bar{R}_l \gamma^\mu (\partial_\mu R_l) \} + \text{h.c.} \tag{A.17}$$

#### A.4. Transformaciones de Calibre Local

Buscamos un Lagrangeano invariante por una transformación de calibre local, entonces partiendo del Lagrangeano leptónico no masivo (no consideramos al h.c. ya que funciona de manera similar), tenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) \}$$

Donde los campos se pueden expandir en el espacio interno de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_i \psi_i \hat{e}_i \\ \bar{\psi} &= \sum_r \bar{\psi}_r \hat{e}_r^T\end{aligned}$$

Notemos que los las letras griegas indican los índices de las componentes del espacio-tiempo, mientras que las letras latinas los índices de las componentes del espacio interno. Entonces el lagrangeano se puede escribir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i}{2} \sum_i \sum_r \left\{ \bar{\psi}_{r\alpha}(x) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \psi_{i\beta}(x) \underbrace{\hat{e}_r^T \hat{e}_i}_{\delta_{ri}} \right\} \\ \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \sum_i \left\{ \bar{\psi}_{i\alpha}(x) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \psi_{i\beta}(x) \right\}\end{aligned}$$

Realizamos una transformación de calibre local de los campos en el espacio interno mediante ( Ya que la transformación es unitaria  $\omega_{ij}^\dagger = \omega_{ij}^{-1}$ ):

$$\begin{aligned}\psi'_i(x) &= \sum_j \omega_{ij}(x) \psi_j(x) \\ \bar{\psi}'_i(x) &= \sum_k \bar{\psi}_k(x) \omega_{ki}^{-1}(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en el Lagrangeano anterior, obteniendo  $\mathcal{L}'$  tal que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{i}{2} \sum_i \left\{ \bar{\psi}'_{i\alpha}(x) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \psi'_{i\beta}(x) \right\} \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i,j,k} \left\{ \left[ \bar{\psi}_{k\alpha}(x) \omega_{ki}^{-1}(x) \right] \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \left[ \omega_{ij}(x) \psi_{j\beta}(x) \right] \right\} \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i,j,k} \left\{ \bar{\psi}_{k\alpha}(x) \omega_{ki}^{-1}(x) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \omega_{ij}(x) \partial_\mu \psi_{j\beta}(x) + \bar{\psi}_{k\alpha}(x) \omega_{ki}^{-1}(x) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \left[ \partial_\mu \omega_{ij}(x) \right] \psi_{j\beta}(x) \right\}\end{aligned}$$

Se puede observar que  $\omega_{ij}$  conmuta con  $\gamma_{\alpha\beta}^\mu$  ya que actúan sobre espacios distintos. Por otro lado recordemos que:

$$\{AB\}_{ij} = \sum_p A_{ip} B_{pj}$$



Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= \frac{i}{2} \sum_{k,j} \left\{ \bar{\psi}_{k\alpha}(x) \underbrace{\left[ \sum_i \omega_{ki}^{-1}(x) \omega_{ij}(x) \right]}_{\delta_{kj}} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{j\beta}(x) + \bar{\psi}_{k\alpha}(x) \left[ \sum_i \omega_{ki}^{-1}(x) \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \partial_{\mu} \omega_{ij}(x) \right] \psi_{j\beta}(x) \right\} \\
 &= \frac{i}{2} \sum_k \left\{ \bar{\psi}_{k\alpha}(x) \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} [\partial_{\mu} \psi_{k\beta}(x)] + \bar{\psi}_{k\alpha}(x) \omega^{-1}(x) \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} [\partial_{\mu} \omega(x)] \psi_{k\beta}(x) \right\} \\
 &= \frac{i}{2} \sum_k \left\{ \bar{\psi}_k(x) \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_k(x) \right\} + \frac{i}{2} \sum_k \left\{ \bar{\psi}_k(x) \omega^{-1}(x) \gamma^{\mu} [\partial_{\mu} \omega(x)] \psi_k(x) \right\}
 \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \omega^{-1} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} \omega) \psi \right\}$$

Podemos observar que el lagrangeano no es invariante bajo dicha transformación de calibre, entonces para retomar la invariancia cambiamos la derivada ordinaria por la derivada covariante:

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu}$$

Donde:

$$D_{\mu} \psi = \partial_{\mu} \psi + A_{\mu} \psi \quad (\text{A.18})$$

Se quiere que la derivada covariante se transforme de manera similar a como se transforma el campo:

$$(D_{\mu} \psi)' = \omega D_{\mu} \psi$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}
 D'_{\mu} \psi' &= \omega (\partial_{\mu} + A_{\mu}) \psi \\
 \partial_{\mu} \psi' + A'_{\mu} \psi' &= \omega \partial_{\mu} \psi + \omega A_{\mu} \psi \\
 \partial_{\mu} (\omega \psi) + A'_{\mu} \omega \psi &= \omega (\partial_{\mu} \psi) + \omega A_{\mu} \psi \\
 (\partial_{\mu} \omega) \psi + \omega (\partial_{\mu} \psi) + A'_{\mu} \omega \psi &= \omega (\partial_{\mu} \psi) + \omega A_{\mu} \psi \\
 A'_{\mu} \omega \psi &= \omega A_{\mu} \psi - (\partial_{\mu} \omega) \psi
 \end{aligned}$$

Como esta expresión se cumple para todo campo  $\psi$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
 A'_{\mu} \omega &= \omega A_{\mu} - (\partial_{\mu} \omega) \\
 A'_{\mu} &= \omega A_{\mu} \omega^{-1} - (\partial_{\mu} \omega) \omega^{-1}
 \end{aligned}$$

Ademas recordemos que:

$$\begin{aligned}\omega\omega^{-1} &= 1 \\ \partial_\mu(\omega\omega^{-1}) &= 0 \\ (\partial_\mu\omega)\omega^{-1} + \omega(\partial_\mu\omega^{-1}) &= 0 \\ (\partial_\mu\omega)\omega^{-1} &= -\omega(\partial_\mu\omega^{-1})\end{aligned}$$

Entonces, encontramos la forma en que se transforma  $A_\mu$ :

$$\boxed{A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega(\partial_\mu\omega^{-1})} \quad (\text{A.19})$$

## Apéndice B

# Lagrangiano Bosónico del ME

Iniciaremos el presente capítulo indicando los ingredientes necesarios para construir el lagrangeano del campo electromagnético, el cual nos servirá de base para la construcción del lagrangeano bosónico del (M.E), ya que el primero es un caso particular del segundo cuando el grupo de simetría es abeliano.

### B.1. Lagrangeano Electromagnético

Inicialmente proponemos el siguiente Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

Donde  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ .

Dicho Lagrangeano como primer objetivo debe indicarme la dinámica del campo en estudio, entonces, a partir de la ecuación de Euler-Lagrange, deberíamos poder obtener las ecuaciones de Maxwell, esto será lo primero que verificaremos.

Notemos que para este caso, los campo  $A_\mu$  son las variables dinámicas del lagrangeano. Para subir los índices de un tensor de segundo orden se tiene:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}F^{\lambda\sigma} \quad (\text{B.2})$$

Luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}F^{\lambda\sigma} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} \left[ \partial^\lambda A^\sigma - \partial^\sigma A^\lambda \right] \left[ \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right] \\ &= -\frac{1}{4}g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} \left\{ \left( \partial^\lambda A^\sigma \right) \left( \partial^\mu A^\nu \right) - \left( \partial^\lambda A^\sigma \right) \left( \partial^\nu A^\mu \right) - \left( \partial^\sigma A^\lambda \right) \left( \partial^\mu A^\nu \right) + \left( \partial^\sigma A^\lambda \right) \left( \partial^\nu A^\mu \right) \right\} \end{aligned}$$

Usando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} - \partial^\beta \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} \right] = 0$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial^\lambda A^\sigma}{\partial^\beta A^\alpha} = \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\sigma$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} = & -\frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \left\{ \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\sigma (\partial^\mu A^\nu) + (\partial^\lambda A^\sigma) \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu - \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\sigma (\partial^\nu A^\mu) - (\partial^\lambda A^\sigma) \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \right. \\ & \left. - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda (\partial^\mu A^\nu) - (\partial^\sigma A^\lambda) \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu + \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda (\partial^\nu A^\mu) + (\partial^\sigma A^\lambda) \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \right\} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} = & -\frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \left\{ \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\sigma F^{\mu\nu} + \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu F^{\lambda\sigma} - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu F^{\lambda\sigma} - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda F^{\mu\nu} \right\} \\ = & -\frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\sigma F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu F^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu F^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Usando la Propiedad:

$$g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\sigma = g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} = & -\frac{1}{4} g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\lambda\beta} g_{\sigma\alpha} F^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\sigma} F^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\mu\nu} \\ = & -\frac{1}{4} F_{\beta\alpha} - \frac{1}{4} F_{\beta\alpha} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Ya que el tensor  $F_{\gamma\eta}$  es un tensor antisimétrico:  $F_{\gamma\eta} = -F_{\eta\gamma}$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} = F_{\alpha\beta}$$

Como  $\partial \mathcal{L} / \partial A^\alpha = 0$ , la ecuación de movimiento tiene la forma:

$$\partial^\beta \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} \right] = \partial^\beta F_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Esta ecuación de movimiento nos debe dar las ecuaciones de Maxwell, el siguiente paso será verificarlo. Recordemos el tensor electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la ecuación (B.3), tenemos para la componente  $\alpha = 0$ :

$$\frac{\partial F_{0\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = 0} \quad (\text{B.4})$$

Desarrollando la ecuación (B.3), para la componente  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{1\beta}}{\partial x_\beta} &= -\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ &= \left( -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right)_x = 0 \end{aligned}$$

Combinando con las otras componentes  $\alpha = 2, 3$ , obtenemos:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (\text{B.5})$$

Ahora a partir de todo tensor antisimétrico, se puede construir el tensor:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

LLamado tensor dual, luego a partir de (B.3), obtenemos:

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\beta F_{\alpha\beta} = 0$$

Ademas teniendo en cuenta:

$$\epsilon_{ijkl\dots} = \begin{cases} +1, & \text{Si } (i, j, k, l, \dots) \text{ es una permutación par de } (0, 1, 2, 3, \dots) \\ -1, & \text{Si } (i, j, k, l, \dots) \text{ es una permutación impar de } (0, 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & \text{Si dos índices se repiten.} \end{cases}$$

En otras palabras, de los valores que tomen los índices, el número de permutaciones que se deben de efectuar para volver a 0123...

Ahora si desarrollamos, se obtienen 24 términos, lo cuales dan como resultado:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Esto nos verifica las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre de cargas y corrientes.

### B.1.1. Lagrangeano Electromagnético

Desarrollaremos el Lagrangeano propuesto:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$$

Ya que sólo los términos de la diagonal del tensor  $g_{\mu\nu}$  son distintos de cero, y como le elementos de la diagonal de  $F_{\alpha\beta}$  son ceros:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= g_{00} g_{11} F^{01} F^{01} + g_{00} g_{22} F^{02} F^{02} + g_{00} g_{33} F^{03} F^{03} \\ &+ g_{11} g_{00} F^{10} F^{10} + g_{11} g_{22} F^{12} F^{12} + g_{11} g_{33} F^{13} F^{13} \\ &+ g_{22} g_{00} F^{20} F^{20} + g_{22} g_{11} F^{21} F^{21} + g_{22} g_{33} F^{23} F^{23} \\ &+ g_{33} g_{00} F^{30} F^{30} + g_{33} g_{11} F^{31} F^{31} + g_{33} g_{22} F^{32} F^{32} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -2 \left( E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \right) + 2 \left( B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \right) \\ &= 2 \left\{ \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 \right\} \end{aligned}$$

■ Hemos verificado que el lagrangeano propuesto inicialmente (B.1) cumple con las condiciones necesarias para describir al campo electromagnético, reproduce las ecuaciones de Maxwell, y es un número real.

## B.2. Lagrangeano Bosónico del Modelo Estándar

De manera similar al caso electromagnético, ahora proponemos el lagrangeano bosónico del (M.E.) [27]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (\text{B.8})$$

Donde los campos  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  están relacionados con el grupo de simetría  $SU(2)_L$  y los campo  $B_{\mu\nu}$  con el grupo  $U(1)_N$ . La parte novedosa se encuentra en el primer término de éste lagrangeano, ya que el grupo de simetría es no abeliano, en cambio para

el segundo término funciona de manera similar al caso electromagnético porque éste grupo si es abeliano. Por lo tanto en esta sección sólo nos ocuparemos del primer término. Es importante resaltar que inicialmente no conocemos la forma de dichos campos, por lo que en las siguientes secciones usaremos principios de simetría para poder identificar su estructura.

### B.2.1. Invariancia de Lorentz

Tal como acotamos en el caso electromagnético, es necesario que el lagrangeano propuesto cumpla ciertos requerimientos, en esta sección nos ocuparemos de la invariancia de Lorentz. Notemos que a diferencia del caso electromagnético, nosotros no conocemos la forma de los campos, por lo que debemos proceder de manera general.

Supongamos que realizamos una transformación de Lorentz en las coordenadas del espacio-tiempo de la forma:

$$x^{\lambda'} = \Lambda_{\eta}^{\lambda} x^{\eta} \quad (\text{B.9})$$

A partir de tal transformación, se puede observar:

$$\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma}} = \Lambda_{\sigma}^{\lambda} \quad (\text{B.10})$$

La propiedad de una transformación de Lorentz es que deja la longitud de los cuadvectores invariante:

$$x^{2'} = x^{\mu'} x'_{\mu} = x^{\mu'} g_{\mu\nu} x^{\nu'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} x^{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda_{\beta}^{\nu} x^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}$$

Para que la igualdad se cumpla:

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \quad (\text{B.11})$$

Por otro lado, sabemos que un tensor de segundo orden se transforma:

$$A^{\mu\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} A^{\alpha\beta}$$

Usando esta regla de transformación para el tensor de campo  $F^{\mu\nu}$  junto con (B.10), obtenemos:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \quad (\text{B.12})$$

Ahora veremos de que manera se transforma el lagrangeano bosónico bajo una transformación de Lorentz. Usando (B.2), (B.12) y (B.11) tendríamos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu'} &= g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta'} \mathcal{F}^{\mu\nu'} \\
 &= g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Lambda_{\rho}^{\alpha} \Lambda_{\phi}^{\beta} \mathcal{F}^{\rho\phi} \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\delta}^{\nu} \mathcal{F}^{\sigma\delta} \\
 &= \left( \Lambda_{\sigma}^{\mu} g_{\mu\alpha} \Lambda_{\rho}^{\alpha} \right) \left( \Lambda_{\delta}^{\nu} g_{\nu\beta} \Lambda_{\phi}^{\beta} \right) \mathcal{F}^{\rho\phi} \mathcal{F}^{\sigma\delta} \\
 &= \left( g_{\sigma\rho} g_{\delta\phi} \mathcal{F}^{\rho\phi} \right) \mathcal{F}^{\sigma\delta} \\
 &= \mathcal{F}_{\sigma\delta} \mathcal{F}^{\sigma\delta}
 \end{aligned}$$

■ Con esto hemos demostrado que el lagrangeano bosónico del (M.E.), es invariante de forma bajo una transformación de Lorentz.

### B.2.2. Transformaciones de Calibre Local

En el apéndice A.4, observamos la manera en que se debe transformar el campo  $A_{\mu}$ , para que el Lagrangiano leptónico sea invariante de calibre local:

$$A'_{\mu} = \omega A_{\mu} \omega^{-1} + \omega \left( \partial_{\mu} \omega^{-1} \right)$$

Ahora intentaremos construir un Lagrangeano invariante de calibre, para ello es necesario encontrar la forma del tensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ .

Nosotros requerimos que el tensor se transforme de acuerdo a la representación adjunta del grupo **pero** para todas las transformaciones de calibre, ya que de esa forma podremos construir un lagrangeano invariante de calibre:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &\propto \text{Tr} \left( \mathcal{F}'_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu'} \right) \\
 &\propto \text{Tr} \left( \omega \mathcal{F}_{\mu\nu} \omega^{-1} \omega \mathcal{F}^{\mu\nu} \omega^{-1} \right) \\
 &\propto \text{Tr} \left( \omega \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \omega^{-1} \right)
 \end{aligned}$$

Por la propiedad mencionada anteriormente (ecuación de Dirac), que la traza de un producto de matrices no cambia por la permutación cíclica de dichas matrices:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &\propto \text{Tr} \left( \omega^{-1} \omega \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \right) \\
 \mathcal{L}' &\propto \text{Tr} \left( \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \right)
 \end{aligned}$$

Debido a esto, requerimos que el tensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , se transforme como sigue:



$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \omega(x) \mathcal{F}_{\mu\nu} \omega^{-1}(x) \quad (\text{B.13})$$

En analogía con la electrodinámica, se espera que el tensor contenga el término:

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{B.14})$$

Entonces examinaremos como se transforma esta expresion:

$$\underbrace{\partial_\mu A'_\nu}_{(a)} - \underbrace{\partial_\nu A'_\mu}_{(b)}$$

Veamos el desarrollo de (a), sabiendo la forma en que se transforma  $A_\nu$ :

$$\begin{aligned} (a) &= \partial_\mu A'_\nu \\ &= \partial_\mu \left( \omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1} \right) \\ &= (\partial_\mu \omega) A_\nu \omega^{-1} + \omega (\partial_\mu A_\nu) \omega^{-1} + \omega A_\nu (\partial_\mu \omega^{-1}) + (\partial_\mu \omega) (\partial_\nu \omega^{-1}) + \omega \partial_\mu (\partial_\nu \omega^{-1}) \end{aligned}$$

Ahora desarrollemos (b), de manera similar:

$$\begin{aligned} (b) &= \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\nu \left( \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \right) \\ &= (\partial_\nu \omega) A_\mu \omega^{-1} + \omega (\partial_\nu A_\mu) \omega^{-1} + \omega A_\mu (\partial_\nu \omega^{-1}) + (\partial_\nu \omega) (\partial_\mu \omega^{-1}) + \omega \partial_\nu (\partial_\mu \omega^{-1}) \end{aligned}$$

Calculando (a) - (b):

$$\begin{aligned} (a) - (b) &= \omega (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \omega^{-1} \\ &+ (\partial_\mu \omega) A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\nu (\partial_\mu \omega^{-1}) \\ &- (\partial_\nu \omega) A_\mu \omega^{-1} - \omega A_\mu (\partial_\nu \omega^{-1}) \\ &+ (\partial_\mu \omega) (\partial_\nu \omega^{-1}) - (\partial_\nu \omega) (\partial_\mu \omega^{-1}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \omega (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \omega^{-1} + \Gamma \quad (\text{B.15})$$

Queremos identificar alguna relacion para el resultado de (a) - (b), uno de los posibles candidatos es el conmutador, por lo que analizaremos la manera en que se transforma:

$$\begin{aligned} [A'_\mu, A'_\nu] &= A'_\mu A'_\nu - A'_\nu A'_\mu \\ &= \left( \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \right) \left( \omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1} \right) - \left( \omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1} \right) \left( \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \right) \end{aligned}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}
 [A'_\mu, A'_\nu] &= \omega A_\mu \overbrace{\omega^{-1} \omega}^1 A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\mu \overbrace{\omega^{-1} \omega}^1 (\partial_\nu \omega^{-1}) \\
 &+ \overbrace{\omega (\partial_\mu \omega^{-1}) \omega}^{(*)} A_\nu \omega^{-1} + \overbrace{\omega (\partial_\mu \omega^{-1}) \omega (\partial_\nu \omega^{-1})}^{(**)} \\
 &- \omega A_\nu \overbrace{\omega^{-1} \omega}^1 A_\mu \omega^{-1} - \omega A_\nu \overbrace{\omega^{-1} \omega}^1 (\partial_\mu \omega^{-1}) \\
 &- \overbrace{\omega (\partial_\nu \omega^{-1}) \omega}^{(*)} A_\mu \omega^{-1} - \overbrace{\omega (\partial_\nu \omega^{-1}) \omega (\partial_\mu \omega^{-1})}^{(**)}
 \end{aligned}$$

Calculemos (\*), para eso partimos de:

$$\begin{aligned}
 [\partial_\mu (\omega \omega^{-1})] \omega &= (\partial_\mu \omega) \underbrace{\omega^{-1} \omega}_1 + \omega (\partial_\mu \omega^{-1}) \omega \\
 \underbrace{[\partial_\mu 1]}_0 \omega &= \partial_\mu \omega + \omega (\partial_\mu \omega^{-1}) \omega \\
 0 &= \partial_\mu \omega + \omega (\partial_\mu \omega^{-1}) \omega
 \end{aligned}$$

Luego:

$$(*) = \omega (\partial_\mu \omega^{-1}) \omega = -\partial_\mu \omega$$

Ahora usando el resultado de (\*), encontramos que:

$$(**) = \omega (\partial_\mu \omega^{-1}) \omega (\partial_\nu \omega^{-1}) = -(\partial_\nu \omega) (\partial_\mu \omega^{-1})$$

Y reemplazando en el conmutador obtenemos:

$$[A'_\mu, A'_\nu] = \omega (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \omega^{-1} - \Gamma \tag{B.16}$$

Si sumamos (B.15) y (B.16), obtenemos

$$\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu] = \omega (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \omega^{-1} \tag{B.17}$$

Por lo tanto el tensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  debe ser de la forma:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{B.18}$$

En consistencia con (B.13).

Para el caso del (M.S) los campos se expanden en función a los generadores del grupo  $SU(2)$ :

$$A_\mu(x) = -\frac{ig}{2} \tau_a A_\mu^a(x), \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = -\frac{ig}{2} \tau_a F_{\mu\nu}^a(x) \quad (\text{B.19})$$

Reemplazando en (B.18):

$$\begin{aligned} -\frac{ig}{2} \tau_a F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu \left( -\frac{ig}{2} \tau_a A_\nu^a \right) - \partial_\nu \left( -\frac{ig}{2} \tau_a A_\mu^a \right) \\ &+ \left\{ \left( -\frac{ig}{2} \tau_a A_\mu^a \right) \left( -\frac{ig}{2} \tau_b A_\nu^b \right) - \left( -\frac{ig}{2} \tau_b A_\nu^b \right) \left( -\frac{ig}{2} \tau_a A_\mu^a \right) \right\} \end{aligned}$$

Ahora:

$$-\frac{ig}{2} \tau_a F_{\mu\nu}^a = -ig \frac{\tau_a}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right) - g^2 A_\mu^a A_\nu^b \left[ \frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2} \right]$$

Del algebra del grupo  $SU(2)$ , sabemos:

$$\left[ \frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}$$

Luego:

$$-\frac{ig}{2} \tau_a F_{\mu\nu}^a = -ig \frac{\tau_a}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right) - g^2 A_\mu^a A_\nu^b \left( i\epsilon_{abc} \frac{\tau_c}{2} \right)$$

Si en la segunda expresión del lado derecho de la igualdad hacemos los cambios  $a \leftrightarrow b$  y luego  $a \leftrightarrow c$ , y notando que  $\epsilon_{bca} = \epsilon_{abc}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} -ig \frac{\tau_a}{2} F_{\mu\nu}^a &= -ig \frac{\tau_a}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right) - g^2 A_\mu^b A_\nu^c \left( i\epsilon_{abc} \frac{\tau_a}{2} \right) \\ &= -ig \frac{\tau_a}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right) - ig \frac{\tau_a}{2} \left( g \epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) \\ &= -ig \frac{\tau_a}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) \end{aligned}$$

De esta igualdad notamos que la expresión que se encuentra entre paréntesis al lado derecho de la igualdad debe ser igual a  $F_{\mu\nu}^a$ , entonces:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{B.20})$$

Esta expresión nos indica la forma del campo que era lo que estamos buscando.

### B.3. Lagrangeano de Proca

La transición del campo electromagnético no masivo al campo de un bosón vectorial masivo, se obtiene simplemente agregándole un término de masa cuadrático al lagrangeano en analogía a la teoría de Klein-Gordon masiva. Entonces proponemos el lagrangeano de Proca:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu \quad (\text{B.21})$$

A continuación verificaremos que el lagrangeano presentado reproduce la ecuación correspondiente, usando el principio variacional de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha A^\beta)} \right] = 0$$

Obtenemos:

$$\partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha A^\beta)} \right] = -2\partial_\alpha F^{\alpha\beta}$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} = 2m^2 A^\beta$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + m^2 A^\beta &= 0 \\ \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + m^2 A^\beta &= 0 \\ \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha + m^2 A^\beta &= 0 \end{aligned}$$

Imponiendo el calibre de Lorentz  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ , encontramos:

$$\boxed{(\square^2 + m^2) A^\beta = 0} \quad (\text{B.22})$$

### B.4. Derivada Covariante

En la ecuación (A.18) mostramos que para mantener la invariancia de calibre del lagrangeano leptónico era necesario introducir una derivada covariante. Nuestro objetivo ahora es encontrar dicha derivada de forma explícita en función a los

campo de calibre con el fin de analizar las interacciones que ellos presentan. Recordemos:

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu + \tilde{B}_\mu$$

Notemos que es necesario introducir dos campos de calibre ya que contamos con dos grupos de simetría, el  $SU(2)_L$  y el  $U(1)_Y$ , dichos campos pertenecen a la representación adjunta del grupo por lo tanto se les puede expresar como una combinación lineal de los generadores en el espacio interno, entonces:

$$A_\mu = -i \frac{g}{2} \tau_a A_\mu^a, \quad \tilde{B}_\mu = i \frac{g'}{2} Y B_\mu \quad (\text{B.23})$$

Donde las constantes  $g$  y  $g'$ , son las constantes de acoplamiento, y  $\tau_a$  e  $Y$  los generadores de los grupos mencionados anteriormente, entonces la derivada covariante se puede escribir como:

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{2} \tau_a A_\mu^a + i \frac{g'}{2} Y B_\mu \quad (\text{B.24})$$

■ Es importante resaltar que los signos que aparecen en la derivada covariante quedan determinados por la manera en que se expanden los campos de calibre en función a los generadores (B.23), y ello conlleva a la forma en que el tensor de calibre  $F_{\mu\nu}^a$  queda representado por los campos  $A_\mu$ , esto se puede observar en (B.20).

## Apéndice C

# Construcción del Lagrangeano Bosónico del M.E. antes del R.E.S.

En este capítulo mostraremos la forma en que se construyó el lagrangeano bosónico del M.E. en función a los campo de calibre partiendo del lagrangeano propuesto en (B.8):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Donde la expansión de los campos en función a los generadores la vimos en (B.19), al reemplazar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left[ \left( -\frac{ig}{2} \tau_a F_{\mu\nu}^a \right) \left( -\frac{ig}{2} \tau_b F^{\mu\nu b} \right) \right] - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (\text{C.1})$$

$$= -\frac{1}{2g^2} \frac{g^2}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \text{Tr} (\tau_a \tau_b) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (\text{C.2})$$

Donde por la propiedad de las trazas  $\text{Tr} (\tau_a \tau_b) = 2\delta_{ab}$ , el lagrangeano quedaría:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Al expandir:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} \left\{ F_{\mu\nu}^1 F^{\mu\nu 1} + F_{\mu\nu}^2 F^{\mu\nu 2} + F_{\mu\nu}^3 F^{\mu\nu 3} \right\} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Donde a partir de (B.20) encontramos:

$$F_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1 + gA_\mu^2 A_\nu^3 - gA_\mu^3 A_\nu^2$$

$$F_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2 + gA_\mu^3 A_\nu^1 - gA_\mu^1 A_\nu^3$$

$$F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + gA_\mu^1 A_\nu^2 - gA_\mu^2 A_\nu^1$$

Como ya conocemos la forma de los campos, lo que mostraremos a continuación es el cálculo de los productos de los términos encontrados para así poder agruparlos y escribir el lagrangeano en función a los campos de calibre.

### 1. Cálculo de $F_{\mu\nu}^1 F^{\mu\nu 1}$

$$F_{\mu\nu}^1 F^{\mu\nu 1} = \left( \overbrace{\partial_\mu A_\nu^1}^a - \overbrace{\partial_\nu A_\mu^1}^b + \overbrace{gA_\mu^2 A_\nu^3}^c - \overbrace{gA_\mu^3 A_\nu^2}^d \right) \left( \partial^\mu A^{1\nu} - \partial^\nu A^{1\mu} + gA^{2\mu} A^{3\nu} - gA^{3\mu} A^{2\nu} \right)$$

Notemos que:

$$(a - b + c - d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ab + cd - ac + ad + bc - bd) \quad (\text{C.3})$$

Donde  $a^2 = a_\mu a^\mu$  y los productos conmutan, lo que verificaremos a continuación, tomando como ejemplo a:

$$\begin{aligned} A_\mu^2 A^{3\mu} A^{2\nu} A_\nu^3 &= g_{\mu\sigma} A^{2\sigma} g^{\mu\rho} A_\rho^3 g^{\nu\chi} A_\chi^2 g_{\nu\theta} A^{3\theta} \\ &= g_{\mu\sigma} g^{\mu\rho} g_{\nu\theta} g^{\nu\chi} A^{2\sigma} A_\rho^3 A_\chi^2 A^{3\theta} \\ &= g_{\sigma\mu} g^{\mu\rho} g_{\theta\nu} g^{\nu\chi} A^{2\sigma} A_\rho^3 A_\chi^2 A^{3\theta} \\ &= \delta_\sigma^\rho \delta_\theta^\chi A^{2\sigma} A_\rho^3 A_\chi^2 A^{3\theta} \\ &= A^{2\rho} A_\rho^3 A_\chi^2 A^{3\chi} \\ &= A^{2\mu} A_{3\mu} A_\nu^2 A^{3\nu} \end{aligned}$$

Entonces con estas consideraciones, el producto a partir de (C.3) sería:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^1 F^{\mu\nu 1} &= \overbrace{(\partial_\mu A_\nu^1) (\partial^\mu A^{1\nu})}^p + \overbrace{(\partial_\nu A_\mu^1) (\partial^\nu A^{1\mu})}^p + \overbrace{g^2 A_\mu^2 A^{2\mu} A_\nu^3 A^{3\nu}}^q + \overbrace{g^2 A_\mu^3 A^{3\mu} A_\nu^2 A^{2\nu}}^q \\ &- 2 \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^1) (\partial^\nu A^{1\mu})}_r - 2 \underbrace{(gA_\mu^2 A_\nu^3) (gA^{3\mu} A^{2\nu})}_r + 2 \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^1) (gA^{2\mu} A^{3\nu})}_r - 2 \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^1) (gA^{3\mu} A^{2\nu})}_s \\ &- 2 \underbrace{(\partial_\nu A_\mu^1) (gA^{2\mu} A^{3\nu})}_s + 2 \underbrace{(\partial_\nu A_\mu^1) (gA^{3\mu} A^{2\nu})}_r \end{aligned}$$

De aquí se puede observar que bajo un cambio de índices, las expresiones que son identificadas con la misma letra son iguales, entonces:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^1 F^{\mu\nu 1} = & 2 \left( \partial_\mu A_\nu^1 \right) \left( \partial^\mu A^{1\nu} \right) - 2 \left( \partial_\mu A_\nu^1 \right) \left( \partial^\nu A^{1\mu} \right) + 2g^2 A_\mu^2 A^{2\mu} A_\nu^3 A^{3\nu} \\
 & - 2g^2 A_\mu^2 A^{2\nu} A_\nu^3 A^{3\mu} + 4g \left( \partial_\mu A_\nu^1 \right) A^{2\mu} A^{3\nu} - 4g \left( \partial_\mu A_\nu^1 \right) A^{2\nu} A^{3\mu}
 \end{aligned}
 \tag{C.4}$$

## 2. Cálculo de $F_{\mu\nu}^2 F^{\mu\nu 2}$

$$F_{\mu\nu}^2 F^{\mu\nu 2} = \left( \partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2 + g A_\mu^3 A_\nu^1 - g A_\mu^1 A_\nu^3 \right) \left( \partial^\mu A^{2\nu} - \partial^\nu A^{2\mu} + g A^{3\mu} A^{1\nu} - g A^{1\mu} A^{3\nu} \right)$$

Operando de manera similar que en el caso anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^2 F^{\mu\nu 2} = & 2 \left( \partial_\mu A_\nu^2 \right) \left( \partial^\mu A^{2\nu} \right) - 2 \left( \partial_\mu A_\nu^2 \right) \left( \partial^\nu A^{2\mu} \right) + 2g^2 A_\mu^1 A^{1\mu} A_\nu^3 A^{3\nu} \\
 & - 2g^2 A_\mu^1 A^{1\nu} A_\nu^3 A^{3\mu} + 4g \left( \partial_\mu A_\nu^2 \right) A^{3\mu} A^{1\nu} - 4g \left( \partial_\mu A_\nu^2 \right) A^{3\nu} A^{1\mu}
 \end{aligned}
 \tag{C.5}$$

## 3. Cálculo de $F_{\mu\nu}^3 F^{\mu\nu 3}$

$$F_{\mu\nu}^3 F^{\mu\nu 3} = \left( \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + g A_\mu^1 A_\nu^2 - g A_\mu^2 A_\nu^1 \right) \left( \partial^\mu A^{3\nu} - \partial^\nu A^{3\mu} + g A^{1\mu} A^{2\nu} - g A^{2\mu} A^{1\nu} \right)$$

Operando de manera similar que en el caso anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^3 F^{\mu\nu 3} = & 2 \left( \partial_\mu A_\nu^3 \right) \left( \partial^\mu A^{3\nu} \right) - 2 \left( \partial_\mu A_\nu^3 \right) \left( \partial^\nu A^{3\mu} \right) + 2g^2 A_\mu^1 A^{1\mu} A_\nu^2 A^{2\nu} \\
 & - 2g^2 A_\mu^1 A^{1\nu} A_\nu^2 A^{2\mu} + 4g \left( \partial_\mu A_\nu^3 \right) A^{1\mu} A^{2\nu} - 4g \left( \partial_\mu A_\nu^3 \right) A^{2\mu} A^{1\nu}
 \end{aligned}
 \tag{C.6}$$



Definimos:

$$-\sqrt{2}W_\mu^\pm = A_\mu^1 + iA_\mu^2$$

Cuya importancia se vera más adelante (D.15), a partir de dicha definición, se pueden encontrar las relaciones útiles:

$$\begin{aligned} 4(\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-}) &= 2(\partial_\mu A_\nu^1) (\partial^\mu A^{1\nu}) + 2(\partial_\mu A_\nu^2) (\partial^\mu A^{2\nu}) \\ 4W_\mu^+ W^{\mu-} &= 2A_\mu^1 A^{1\mu} + 2A_\mu^2 A^{2\mu} \\ i(W^{\nu+} W^{\mu-} - W^{\mu+} W^{\nu-}) &= A^{1\mu} A^{2\nu} - A^{1\nu} A^{2\mu} \end{aligned}$$

Que al ser reemplazadas de manera conveniente en el lagrangeano total formado por la suma de (C.4), (C.5) y (C.6), nos permite encontrar el lagrangeano bosónico total antes del RES, dado por:

$$\mathcal{L}_B = (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-}) \quad (C.7)$$

$$-\frac{1}{4} \{ \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \} \{ \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \} \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} +ig \{ (\partial_\mu W_\nu^+) W^{\mu-} A^{3\nu} - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{\nu-} A^{3\mu} + (\partial_\mu W_\nu^+) W^{\nu+} A^{3\mu} \\ - (\partial_\mu W_\nu^-) W^{\mu+} A^{3\nu} + (\partial_\mu A_\nu^3) W^{\nu-} W^{\mu+} - (\partial_\mu A_\nu^3) W^{\nu+} W^{\mu-} \} \end{aligned} \quad (C.9)$$

$$+g^2 \{ W_\mu^+ W^{\nu-} A_\nu^3 A^{3\mu} - W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu^3 A^{3\nu} \} \quad (C.10)$$

$$+\frac{g^2}{2} \{ W_\mu^+ W_\nu^- W^{\mu+} W^{\nu-} - W_\mu^+ W_\nu^- W^{\mu-} W^{\nu+} \} \quad (C.11)$$

Notemos con respecto a la parte (C.7) del Lagrangeano que:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} &= (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}) \\ &= (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) - (\partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{\nu-}) + (\partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) \end{aligned}$$

Se observa que al hacer un cambio de índices  $\mu \leftrightarrow \nu$  en el tercer y cuarto término, obtenemos:

$$- (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) + (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-})$$

Luego:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} &= (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-}) + (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) \\ &= -2 [(\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-})] \end{aligned}$$

De esto obtenemos el término (C.7):

$$(\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{\mu-}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{\nu-}) = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-}$$

Con:

$$W_{\mu\nu}^+ = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+$$

Por otro lado los campos  $A_3$  y  $B$ , serán obtenidos al final del rompimiento de simetría, entonces el lagrangeano nos quedaría:

---

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &+ ig \left\{ (\partial_\mu W_\nu^+) W^{\mu-} A^{3\nu} - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{\nu-} A^{3\mu} + (\partial_\mu W_\nu^+) W^{\nu+} A^{3\mu} \right. \\ &\quad \left. - (\partial_\mu W_\nu^-) W^{\mu+} A^{3\nu} + (\partial_\mu A_\nu^3) W^{\nu-} W^{\mu+} - (\partial_\mu A_\nu^3) W^{\nu+} W^{\mu-} \right\} \\ &\quad + g^2 \left\{ W_\mu^+ W^{\nu-} A_\nu^3 A^{3\mu} - W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu^3 A^{3\nu} \right\} \\ &\quad + \frac{g^2}{2} \left\{ W_\mu^+ W_\nu^- W^{\mu+} W^{\nu-} - W_\mu^+ W_\nu^- W^{\mu-} W^{\nu+} \right\} \end{aligned} \tag{C.12}$$


---

## Apéndice D

# Lagrangiano de Higgs del ME

Iniciaremos este apéndice intentando aclarar ciertos aspectos referentes al lagrangeano de Higgs considerado en el (ME), para esto es importante primero partir por el lagrangeano de Klein-Gordon.

### D.1. Lagrangeano de Klein-Gordon (KG)

Dicho lagrangeano describe a las bosones de spin cero, llamados escalares:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad (\text{D.1})$$

Donde el campo  $\phi$  es un campo real y  $\mu$  es la masa de la partícula en unidades naturales. Ahora verificaremos que a partir de ella llegamos a las ecuación de KG, usando los principios variacionales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \right\} = 0$$

Ahora, notemos que el lagrangeano se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_{K-G} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta_{\alpha\mu} (\partial_\nu \phi) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) \delta_{\alpha\nu} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (\partial_\nu \phi) + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\mu \phi) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\alpha \phi) + \frac{1}{2} (\partial^\alpha \phi) \\ &= \partial^\alpha \phi \end{aligned}$$

De aqui:

$$\partial_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \right\} = \partial_\alpha \partial^\alpha \phi$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi$$

Finalmente encontramos:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad (\text{D.2})$$

Que es la ecuación de KG.

■ Del resultado obtenido se puede observar que el Lagrangeano propuesto describe correctamente la dinámica de las partículas escalares, dicho lagrangeano nos servirá de punto de partida para analizar los bosones de Higgs.

## D.2. Lagrangeano de KG para campos complejos

Antes de pasar a analizar el lagrangeano de Higgs, intentaremos de escribir un Lagrangeano que describa campos complejos, usando cuatro campos reales, para esto proponemos:

$$\phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_3 + i\phi_4)$$

Además:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Donde  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  son cuatro campos escalares reales.

Notemos que:

$$|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2} \{ |\phi_a|^2 + |\phi_b|^2 \} = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) \quad (\text{D.4})$$

Ahora propondremos el Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = [\partial_\mu \Phi]^\dagger [\partial^\mu \Phi] - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (\text{D.5})$$

Lo que haremos ahora es verificar que dicho lagrangeano me reproduce el lagrangeano de Klein-Gordon para cuatro campos escalares reales, desarrollando la parte cinética:

$$\partial^\mu \Phi = \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi_a \\ \partial^\mu \phi_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi_1 + i\partial^\mu \phi_2 \\ \partial^\mu \phi_3 + i\partial^\mu \phi_4 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$[\partial_\mu \Phi]^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \phi_1 - i\partial_\mu \phi_2, \quad \partial_\mu \phi_3 - i\partial_\mu \phi_4)$$

Multiplicando:

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \Phi]^\dagger [\partial^\mu \Phi] &= \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu \phi_1 - i\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_1 - i\partial^\mu \phi_2) + (\partial_\mu \phi_3 - i\partial_\mu \phi_4) (\partial^\mu \phi_3 + i\partial^\mu \phi_4) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_1) + (\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_2) + (\partial_\mu \phi_3) (\partial^\mu \phi_3) + (\partial_\mu \phi_4) (\partial^\mu \phi_4) \} \end{aligned}$$

Ahora veamos el potencial:

$$\begin{aligned} \mu^2 \Phi^\dagger \Phi &= \frac{\mu^2}{2} (\phi_1 - i\phi_2, \quad \phi_3 - i\phi_4) \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) \end{aligned}$$

Entonces el Lagrangeano (D.5) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & + \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_1) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_1^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_2^2 \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_3) (\partial^\mu \phi_3) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_3^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_4) (\partial^\mu \phi_4) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_4^2 \right\} \quad (\text{D.6}) \end{aligned}$$

■ Hemos verificado que el Lagrangeano (D.5) que es el lagrangeano para un doblete escalar complejo de la forma (D.3) se puede escribir como el Lagrangeano de KG para cuatro campos escalares reales  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  y  $\phi_4$ .

### D.3. Campo de Higgs

Inicialmente lo único que sabemos del campo de Higgs es que es un doblete, el cual podemos escribir como:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix}$$

Intentaremos encontrar algunas propiedades de estos campos basados en las propiedades de las partículas ya conocidas, para esto recordemos el Lagrangeano de Yukawa (1.10)

$$\mathcal{L}^Y = -g_l \left[ \bar{R}_l \Phi^\dagger L_l + \bar{L}_l \Phi R_l \right]$$

Dicho Lagrangeano debe ser un invariante local por el grupo de simetría  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , esto significa que el campo es invariante por dichos campos simultáneamente, entonces también debe ser un invariante para cada uno de ellos independientemente. Ahora nos centraremos sólo en la invariancia del grupo  $U(1)_Y$ . Proponemos las siguientes transformaciones:

$$\begin{cases} \bar{L}'_l = \bar{L}_l e^{-i\beta Y_L} \\ \bar{R}'_l = \bar{R}_l e^{-i\beta Y_R} \\ \Phi^{\dagger'} = \Phi^\dagger e^{-i\beta Y_\Phi} \end{cases}, \quad \begin{cases} L'_l = e^{i\beta Y_L} L_l \\ R'_l = e^{i\beta Y_R} R_l \\ \Phi' = e^{i\beta Y_\Phi} \Phi \end{cases}$$

Reemplazando en  $\mathcal{L}^{Y'}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{Y'} &= -g_l \left[ \bar{R}'_l \Phi^{\dagger'} L'_l + \bar{L}'_l \Phi' R'_l \right] \\ &= -g_l \left[ \bar{R}_l e^{-i\beta Y_R} \Phi^\dagger e^{-i\beta Y_\Phi} e^{i\beta Y_L} L_l + \bar{L}_l e^{-i\beta Y_L} e^{i\beta Y_\Phi} \Phi e^{i\beta Y_R} R_l \right] \end{aligned}$$

Ya que los exponentes son números, ellos conmutan, y para que la invariancia del Lagrangeano se mantenga, se debe cumplir que:

$$Y_\Phi = Y_L - Y_R \tag{D.7}$$

Con esto podemos notar que la hipercarga es un parámetro libre, y se ajusta apropiadamente de tal manera que las cargas eléctricas de los leptones y quarks sean correctas. Conociendo las cargas de los leptones derechos e izquierdos, y sus proyecciones de isospin, encontramos que:

$$Y_L = -1, \quad Y_R = -2$$

Entonces usando (D.7), encontramos el valor de hipercarga para el campo de Higgs:

$$\boxed{Y_\Phi = 1} \quad (\text{D.8})$$

Ya que dicho campo es un doblete, sabemos que sus proyecciones de isospin son  $I_1^3 = 1/2$  y  $I_2^3 = -1/2$ . Usando la relación de Gell-Mann-Nishijima (1.3) hallaremos las cargas de las componentes del campo de Higgs:

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} &= \frac{Y}{2} \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} + I_3^W \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_a \\ -\phi_b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{cases} Q \phi_a = (+1) \phi_a \\ Q \phi_b = (0) \phi_b \end{cases}$$

■ Por lo que hemos encontrado que el campo de Higgs tiene dos componentes una cargada y otra neutra, pudiendo ahora denotarla como:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado se sabe que si el vacío es invariante por algún subgrupo de las transformaciones de calibre, entonces el bosón de calibre asociado con dicho grupo permanece sin masa, en nuestro caso el modelo debe predecir a el fotón, que es un bosón de calibre del grupo  $U(1)_{em}$ , por lo tanto se debe cumplir que:

$$e^{i\alpha(x)Q} \Phi = \Phi$$

Para una transformación infinitesimal:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha(x)Q} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} &\approx \{1 + i\alpha(x)Q\} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\alpha(x)Q \phi^+ \\ i\alpha(x)Q \phi^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ya habíamos visto que:

$$\begin{cases} Q \phi^+ = (+1) \phi^+ \\ Q \phi^0 = (0) \phi^0 \end{cases}$$

Entonces la única posibilidad para que la invariancia se mantenga es que  $\phi^+ = 0$ , por lo tanto el campo sería:

$$\boxed{\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^0 \end{pmatrix}} \quad (\text{D.9})$$

## D.4. Lagrangeano de Higgs

Basados en el Lagrangeano (D.5) visto en la sección anterior, Goldstone [47], [44], Higgs [29] y Kibble [49], propusieron un modelo de generación de masa. Siguiendo con su razonamiento, consideraremos la densidad Lagrangeano para el bosón de Higgs :

$$\mathcal{L}_H = [D_\mu \Phi]^\dagger [D^\mu \Phi] + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda [\Phi^\dagger \Phi]^2 \quad (\text{D.10})$$

Donde para mantener la invariancia del Lagrangeano ( La estructura de la derivada covariante se dedujo en un apéndice anterior<sup>1</sup>) se tiene:

$$D_\mu \Phi = \left\{ \partial_\mu - \frac{ig}{2} \tau_j A_\mu^j + \frac{ig'}{2} Y B_\mu \right\} \Phi \quad (\text{D.11})$$

### D.4.1. Valor Esperado del Vacío

Considerando el potencial del lagrangeano (D.10):

$$V(\Phi) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

Con:

$$|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi$$

---

<sup>1</sup>Ver apéndice B.4



Entonces:

$$V(|\Phi|) = -\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4$$

Buscando los valores extremales de éste potencial:

$$\frac{dV(|\Phi|)}{d|\Phi|} = -|\Phi| \{2\mu^2 - 4\lambda |\Phi|^2\} = 0$$

De aquí obtenemos:

$$|\Phi| = 0 \quad \vee \quad |\Phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

Usando (D.4) se tiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{|\phi_a|^2 + |\phi_b|^2} = 0 & \quad \vee \quad |\phi_a|^2 + |\phi_b|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = 0 & \quad \vee \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \end{aligned}$$

Ya que la solución de éstas ecuaciones arrojan un conjunto de valores para los campos ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  y  $\phi_4$ ), debemos escoger sólo uno de ellos. Al hacer una elección, quebramos la simetría existente (este es el mecanismo llamado RES), entonces en concordancia con (D.9) escogemos:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0 \quad \vee \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \phi_3 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \equiv v \quad (\text{D.12})$$

Debido a que la solución nula es trivial entonces el valor de expectación del vacío escogido del campo que minimiza al potencial sería:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

El bosón de Higgs se obtiene considerando perturbaciones al rededor del mínimo:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

### D.4.2. Lagrangeano de Higgs en forma explícita

En esta sección vamos a reescribir el lagrangeano de Higgs (D.10) en función al campo de Higgs y a los campos de calibre determinados por el grupo de simetría. Con tal objetivo dividiremos dicho lagrangeano en una parte cinética y el potencial.

#### 1. El término cinético

Si reemplazamos las matrices de Pauli:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y el bosón de Higgs así como el valor de su hipercarga (D.8) en la expresión (D.11), obtenemos:

$$D_\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu h \end{pmatrix} - \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} - \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}$$

Agrupando:

$$D_\mu \Phi = \begin{pmatrix} -\frac{ig}{2\sqrt{2}} (A_\mu^1 - iA_\mu^2) (v+h) \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}} (g'B_\mu - gA_\mu^3) (v+h) + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h \end{pmatrix}$$

Tomando la transpuesta conjugada:

$$[D_\mu \Phi]^\dagger = \left( \frac{ig}{2\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) (v+h), \quad \frac{i}{2\sqrt{2}} (g'B_\mu - gA_\mu^3) (v+h) + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h \right)$$

Multiplicando ambas expresiones obtenemos el término cinético:

$$\begin{aligned} [D_\mu \Phi]^\dagger [D^\mu \Phi] &= \underbrace{\frac{g^2}{8} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) (A^{1\mu} - iA^{2\mu}) (v+h)^2}_a + \underbrace{\frac{1}{8} (g'B_\mu - gA_\mu^3) (g'B^\mu - gA^{3\mu}) (v+h)^2}_b \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

A continuación vamos a analizar cada una de las partes de esta expresión.

Si desarrollamos (a) se encuentra:

$$(a) = \frac{g^2}{8} \{ A_\mu^1 A^{1\mu} - iA_\mu^1 A^{2\mu} + iA_\mu^2 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu} \} (v+h)^2$$

Pero notemos que los términos cruzados se cancelan:

$$-iA_\mu^1 A^{2\mu} + iA_\mu^2 A^{1\mu} = 0$$

Podemos identificar tal combinación como un nuevo campo cargado [52] :

$$-\sqrt{2}W_\mu^\pm \equiv (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2) \quad (\text{D.15})$$

Luego:

$$W_\mu^- W^{\mu+} = \frac{1}{2} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) (A^{1\mu} - iA^{2\mu})$$

Entonces:

$$(a) = \frac{g^2 (v+h)^2}{4} W_\mu^- W^{\mu+} \quad (\text{D.16})$$

Desarrollemos (b):

$$\begin{aligned} (b) &= \frac{1}{8} (g' B_\mu - g A_\mu^3) (g' B^\mu - g A^{3\mu}) (v+h)^2 \\ &= \frac{1}{8} (g'^2 B_\mu B^\mu - g' g B_\mu A^{3\mu} - g' g B_\mu A^{3\mu} + g^2 A_\mu^3 A^{3\mu}) (v+h)^2 \end{aligned}$$

En éste caso los términos cruzados no se cancelan:

$$(b) = \frac{1}{8} \left( g'^2 B_\mu B^\mu - 2g' g \underbrace{B_\mu A^{3\mu}}_{T.C.} + g^2 A_\mu^3 A^{3\mu} \right) (v+h)^2 \quad (\text{D.17})$$

Y la expresión entre paréntesis se puede escribir convenientemente como:

$$(b)' = (A_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$$

En esta notación, (b)' toma la forma matricial:

$$\bar{X}^T M \bar{X}$$

Donde:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$$

Con el objetivo de eliminar los términos cruzados para así poder comparar el lagrangeano resultante con alguno ya conocido y reconocer los términos de masa, debemos encontrar una matriz  $P$ , que diagonalice ortogonalmente a  $M$ . Buscaremos:

$$\bar{X} = P\bar{X}' \Rightarrow \bar{X}' = P^{-1}\bar{X} \quad (\text{D.18})$$

Donde el  $\bar{X}'$  está formado por nuevos campos los cuales ya pueden ser identificados como campos físicos. Entonces diagonalizando la matriz  $M$ , obtenemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = g^2 + g'^2 \end{cases}, \quad V_1 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g \\ -g' \end{pmatrix}$$

Y la matriz  $P$  sería:

$$P = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' & g \\ g & -g' \end{pmatrix}$$

Ahora notemos que:

$$P^{-1} = \frac{\text{Adj}(P)}{\det(P)}, \quad \det(P) = -1, \quad \text{Adj}(P) = -\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' & g \\ g & -g' \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' & g \\ g & -g' \end{pmatrix}$$

Identificando a los nuevos campos como:

$$\bar{X}' = \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}$$

Usando (D.18), encontramos:

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g' A_\mu^3 + g B_\mu) \quad (\text{D.19})$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g A_\mu^3 - g' B_\mu) \quad (\text{D.20})$$

Usando la transformación inversa, y reemplazando en (D.17) encontramos:

$$(b) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(g^2 + g'^2)(v+h)^2}{4} \right\} Z_\mu Z^\mu \quad (\text{D.21})$$

Finalmente el término cinético (D.14) del lagrangeano de Higgs al reemplazar (a) y (b) resulta:

$$[D_\mu \Phi]^\dagger [D^\mu \Phi] = \frac{g^2 (v+h)^2}{4} W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(g^2 + g'^2)(v+h)^2}{4} \right\} Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h)$$

Desarrollando los terminos cuadráticos:

$$\begin{aligned} [D_\mu \Phi]^\dagger [D^\mu \Phi] &= \left[ \frac{g^2 v^2}{4} \right] W_\mu^- W^{\mu+} + \left[ \frac{v^2 (g^2 + g'^2)}{8} \right] Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) + \left[ \frac{g^2}{4} \right] W_\mu^- W^{\mu+} h^2 \\ &+ \left[ \frac{g^2 v}{2} \right] W_\mu^- W^{\mu+} h + \left[ \frac{(g^2 + g'^2)}{8} \right] Z_\mu Z^\mu h^2 + \left[ \frac{v (g^2 + g'^2)}{4} \right] Z_\mu Z^\mu h \end{aligned}$$

Ya que:

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W \quad \rightarrow \quad g^2 + g'^2 = \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} [D_\mu \Phi]^\dagger [D^\mu \Phi] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{g^2 v^2}{2} \right] W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{2} \left[ \frac{v^2 g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \right] Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) \\ &+ \left[ \frac{g^2}{4} \right] W_\mu^- W^{\mu+} h^2 + \left[ \frac{g^2 v}{2} \right] W_\mu^- W^{\mu+} h + \left[ \frac{v^2 g^2}{8 \cos^2 \theta_W} \right] Z_\mu Z^\mu h^2 \\ &+ \left[ \frac{v g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \right] Z_\mu Z^\mu h \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

## 2. El Potencial

Si ahora reemplazamos el campo de Higgs en el potencial del lagrangeano (D.10):

$$\begin{aligned}
 V(\Phi) &= -\mu^2 \frac{1}{2} (0, v+h) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[ (0, v+h) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right]^2 \\
 &= -\frac{\mu^2}{2} (v+h)^2 + \frac{\lambda}{4} [(v+h)^2]^2 \\
 &= -\frac{\mu^2}{2} (v^2 + h^2 + 2vh) + \frac{\lambda}{4} [(v^2 + h^2)^2 + 4v^2h^2 + 2(v^2 + h^2)2vh] \\
 &= -\frac{1}{2}\mu^2v^2 - \frac{1}{2}\mu^2h^2 - \mu^2vh + \frac{1}{4}\lambda v^4 + \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{3}{2}\lambda v^2h^2 + \lambda v^3h + \lambda vh^3
 \end{aligned}$$

A partir de (D.12) tenemos:

$$v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow \mu^2 = v^2\lambda$$

Entonces:

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}\lambda v^4 - \frac{1}{2}\lambda v^2h^2 - \lambda v^3h + \frac{1}{4}\lambda v^4 + \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{3}{2}\lambda v^2h^2 + \lambda v^3h + \lambda vh^3$$

Finalmente:

$$-V(\Phi) = \frac{1}{4}\lambda v^4 - (\lambda v^2)h^2 - \lambda vh^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 \quad (\text{D.23})$$

Reemplazando (D.22) y (D.23) en (D.10), obtenemos el lagrangeano de Higgs:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_H &= \frac{1}{2} \left[ \frac{g^2 v^2}{2} \right] W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{2} \left[ \frac{v^2 g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \right] Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) \\
 &+ \left[ \frac{g^2}{4} \right] W_\mu^- W^{\mu+} h^2 + \left[ \frac{g^2 v}{2} \right] W_\mu^- W^{\mu+} h + \left[ \frac{v^2 g^2}{8 \cos^2 \theta_W} \right] Z_\mu Z^\mu h^2 \\
 &+ \left[ \frac{v g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \right] Z_\mu Z^\mu h + \frac{1}{4} \lambda v^4 - (\lambda v^2) h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 \quad (\text{D.24})
 \end{aligned}$$

## Apéndice E

# Lagrangiano Bosónico del ME después del RES

Si en el lagrangiano bosónico (C.12) reemplazamos los campos físicos encontrados después del RES (las transformaciones inversas de (D.19) y (D.20) ):

$$A_{3\mu} = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu$$

$$B_\mu = -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu$$

Obtenemos el lagrangiano bosónico, el cual vamos a dividirlo en un parte libre y una de interacción, por lo tanto:

$$\mathcal{L}_B^{\text{libre}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{\mu\nu-} \quad (\text{E.1})$$

Donde:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \\ W_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ \end{aligned}$$

Y los términos de interacción van a estar agrupados de acuerdo al contenido de partículas involucradas:

**1. Interacción WWZ:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WWZ} = & ig \cos \theta_W \left[ (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) \partial^\mu Z^\nu \right. \\ & \left. + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{\nu+} Z^\mu - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{\nu-} Z^\mu \right] \end{aligned}$$

**2. Interacción WWA:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WWA} = & ie \left[ (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) \partial^\mu A^\nu \right. \\ & \left. + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{\nu+} A^\mu - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{\nu-} A^\mu \right] \end{aligned}$$

**3. Interacción WWZZ:**

$$\mathcal{L}_{WWZZ} = g^2 \cos^2 \theta_W \left[ W_\mu^- W_\nu^+ Z^\mu Z^\nu - W_\nu^- W^{\nu+} Z_\mu Z^\mu \right]$$

**4. Interacción WWAA:**

$$\mathcal{L}_{WWAA} = e^2 \left[ W_\mu^- W_\nu^+ A^\mu A^\nu - W_\nu^- W^{\nu+} A_\mu A^\mu \right]$$



**5. Interacción WWZA:**

$$\mathcal{L}_{WWZA} = eg \cos \theta_W \left[ W_\mu^- W_\nu^+ (Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu) - 2W_\nu^- W^{\nu+} A_\mu Z^\mu \right]$$

**6. Interacción WWWW:**

$$\mathcal{L}_{WWWW} = \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W_\nu^- [W^{\mu+} W^{\nu-} - W^{\mu-} W^{\nu+}]$$

■ Dicho Lagrangeano de interacción presenta todas las interacciones del sector bosónico del (ME) y coincide con el presentado en [55].

## Apéndice F

# Lagrangiano Bosónico y de Higgs del ME

En este capítulo vamos a identificar las masas de las partículas que surgieron después del RES, con tal fin es necesario tomar los términos libres que obtuvimos del lagrangiano de Higgs (D.24) y del lagrangiano bosónico (E.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^l = & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} + \left[ \frac{g^2 v^2}{4} \right] W_\mu^- W^{\mu+} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \left[ \frac{v^2 g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \right] Z_\mu Z^\mu \right\} \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) h^2\end{aligned}\tag{F.1}$$

El método es identificar los términos de masa de éstos lagrangianos al compararlos con los lagrangianos de Proca (B.21) y de KG (D.1) vistos anteriormente.

Entonces:

$$m_W = \frac{g v}{2}, \quad m_Z = \frac{g v}{2 \cos \theta_W}, \quad m_h = \sqrt{2 \lambda} v$$

Nos parece importante mostrar la identificación de la masa como un capítulo independiente ya que no se pondrá mucho énfasis en ella cuando ingresemos a nuestro modelo  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ . Se puede notar que es de vital importancia escribir los lagrangianos que aparezcan en adelante de manera que puedan ser comparados con los lagrangianos ya conocidos, en caso contrario éstos no podrán ser identificados como los de los campos físicos.

## Apéndice G

# Sector bośonico del modelo

$$SU(3)_L \otimes U(1)_N$$

### G.1. Matrices de Gell-Mann

Las matrices de Gell-Mann mostradas a continuaci3n, son los generadores del grupo  $SU(3)$ :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{G.1})$$

Dichas matrices cumplen con la propiedades:

$$\sum_a \lambda_a^2 = \frac{16}{3} \quad (\text{G.2})$$

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (\text{G.3})$$

## G.2. Lagrangeano Bosónico

Se planteo el siguiente lagrangeano bosónico:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \}$$

Donde la forma más general de las matrices  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , es una combinación lineal de los generadores:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -ig \frac{\lambda_a}{2} F_{\mu\nu}^a \quad (\text{G.4})$$

Reemplazando en el Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left\{ \left( -ig \frac{\lambda_a}{2} F_{\mu\nu}^a \right) \left( -ig \frac{\lambda_b}{2} F^{b\mu\nu} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2g^2} \left( \frac{g^2}{4} \right) \text{Tr} \{ \lambda_a \lambda_b \} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \end{aligned}$$

Usando la propiedad (G.3), obtenemos:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{2g^2} \frac{g^2}{4} 2\delta_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}$$

Entonces:

$$\boxed{\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}} \quad (\text{G.5})$$

## G.3. Constantes de estructura

La relación entre las matrices de Gell-Mann y las constantes de estructura  $f_{abc}$  es dada por (Algebra del grupo):

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (\text{G.6})$$

Partiendo de:

$$\frac{1}{4} [\lambda_i, \lambda_j] = \frac{i}{2} f_{ijm} \lambda_m \quad \rightarrow \quad [\lambda_i, \lambda_j] = 2i \sum_{m=1}^8 f_{ijm} \lambda_m$$

Multiplicando a ambos miembros por  $\lambda_k$ :

$$[\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k = 2i \sum_{m=1}^8 f_{ijm} \lambda_m \lambda_k$$

Tomando la traza:

$$\text{Tr} \{ [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k \} = 2i \sum_{m=1}^8 f_{ijm} \text{Tr} \{ \lambda_m \lambda_k \}$$

Ya que:  $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k \} &= 4i \sum_{m=1}^8 f_{ijm} \delta_{mk} \\ \text{Tr} \{ [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k \} &= 4i f_{ijk} \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\boxed{f_{ijk} = \frac{1}{4i} \text{Tr} \{ [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k \}} \quad (\text{G.7})$$

### G.3.1. Antisimetría de las Constantes de Estructura

Analicemos las simetrías de las constantes de estructura, partiendo de lo hallado anteriormente:

$$f_{abc} = \frac{1}{4i} \text{Tr} \{ [\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c \}$$

Supongamos que hacemos una permutación impar de los índices:

$$\begin{aligned} f_{cba} &= \frac{1}{4i} \text{Tr} \{ [\lambda_c, \lambda_b] \lambda_a \} \\ &= \frac{1}{4i} \text{Tr} \{ \lambda_c \lambda_b \lambda_a - \lambda_b \lambda_c \lambda_a \} \\ &= \frac{1}{4i} [ \text{Tr} \{ \lambda_c \lambda_b \lambda_a \} - \text{Tr} \{ \lambda_b \lambda_c \lambda_a \} ] \end{aligned}$$

Ya que la traza tiene la propiedad de no verse afectada por la permutación cíclica de un producto de matrices:

$$\begin{aligned} f_{cba} &= \frac{1}{4i} [\text{Tr} \{\lambda_a \lambda_c \lambda_b\} - \text{Tr} \{\lambda_a \lambda_b \lambda_c\}] \\ &= -\frac{1}{4i} \text{Tr} \{[\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c\} \\ f_{cba} &= -f_{abc} \end{aligned}$$

De manera similar se puede demostrar que:

$$f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} \quad (\text{G.8})$$

$$f_{abc} = -f_{cba} = -f_{bac} = -f_{acb} \quad (\text{G.9})$$

### G.3.2. Valores Numéricos de las Constantes de Estructura

Recordemos la expresión (G.7) hallada:

$$f_{abc} = \frac{1}{4i} \text{Tr} \{[\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c\}$$

Conociendo las matrices de Gell-Mann y operando encontramos los valores numéricos de las constantes de estructura, por ejemplo:

$$f_{123} = \frac{1}{4i} \text{Tr} \{[\lambda_1, \lambda_2] \lambda_3\} = 1$$

Por las propiedades (G.8) y (G.9), obtenemos:

$$f_{123} = f_{231} = f_{312} = -f_{132} = -f_{321} = -f_{213} = 1$$

Y de manera similar:

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = -f_{257} = f_{345} = -f_{367} = 1/2$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

### G.4. Estructura del Campo Bosónico

Habíamos encontrado la forma del tensor de campo (B.18):

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

La forma más general del potencial de Yang-Mills es una combinación lineal de los generadores del grupo, que en nuestro modelo es el grupo  $SU(3)$ , entonces:

$$A_\mu = -ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a \quad (\text{G.10})$$

Reemplazando el potencial:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= -ig \frac{\lambda_a}{2} \partial_\mu A_\nu^a + ig \frac{\lambda_a}{2} \partial_\nu A_\mu^a + \left\{ \left( -ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a \right) \left( -ig \frac{\lambda_b}{2} A_\nu^b \right) - \left( -ig \frac{\lambda_b}{2} A_\nu^b \right) \left( -ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a \right) \right\} \\ &= -ig \frac{\lambda_a}{2} \partial_\mu A_\nu^a + ig \frac{\lambda_a}{2} \partial_\nu A_\mu^a - g^2 \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} A_\mu^a A_\nu^b + g^2 \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} A_\mu^a A_\nu^b \\ &= -ig \frac{\lambda_a}{2} \left\{ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right\} - g^2 \left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] A_\mu^a A_\nu^b \end{aligned}$$

Usando la relación (G.6):

$$F_{\mu\nu} = -ig \frac{\lambda_a}{2} \left\{ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right\} - ig^2 f_{abc} \frac{\lambda_c}{2} A_\mu^a A_\nu^b$$

Si al segundo término de la expresión anterior le cambiamos  $a \leftrightarrow b$ :

$$F_{\mu\nu} = -ig \frac{\lambda_a}{2} \left\{ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right\} - ig^2 f_{bac} \frac{\lambda_c}{2} A_\mu^b A_\nu^a$$

Y ahora  $a \leftrightarrow c$ :

$$F_{\mu\nu} = -ig \frac{\lambda_a}{2} \left\{ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right\} - ig^2 f_{bca} \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^b A_\nu^c$$

Usando la propiedad obtenida en (G.8):

$$F_{\mu\nu} = -ig \frac{\lambda_a}{2} \left\{ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right\} - ig^2 f_{abc} \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^b A_\nu^c$$

Y comparando con (G.4):

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

(G.11)

## G.5. Campos explícitos

Con la forma de  $F_{\mu\nu}^a$  hallada en (G.11) y los valores de las constantes de estructura, encontramos los campos en forma explícita, los cuales mostramos a continuación:

$$F_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1 + g A_\mu^2 A_\nu^3 - g A_\mu^3 A_\nu^2 + \frac{g}{2} A_\mu^4 A_\nu^7 - \frac{g}{2} A_\mu^7 A_\nu^4 - \frac{g}{2} A_\mu^5 A_\nu^6 + \frac{g}{2} A_\mu^6 A_\nu^5$$

$$F_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2 + g A_\mu^3 A_\nu^1 - g A_\mu^1 A_\nu^3 + \frac{g}{2} A_\mu^4 A_\nu^6 - \frac{g}{2} A_\mu^6 A_\nu^4 + \frac{g}{2} A_\mu^5 A_\nu^7 - \frac{g}{2} A_\mu^7 A_\nu^5$$

$$F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + g A_\mu^1 A_\nu^2 - g A_\mu^2 A_\nu^1 + \frac{g}{2} A_\mu^4 A_\nu^5 - \frac{g}{2} A_\mu^5 A_\nu^4 - \frac{g}{2} A_\mu^6 A_\nu^7 + \frac{g}{2} A_\mu^7 A_\nu^6$$

$$F_{\mu\nu}^4 = \partial_\mu A_\nu^4 - \partial_\nu A_\mu^4 + \frac{g}{2} A_\mu^7 A_\nu^1 - \frac{g}{2} A_\mu^1 A_\nu^7 + \frac{g}{2} A_\mu^6 A_\nu^2 - \frac{g}{2} A_\mu^2 A_\nu^6 + \frac{g}{2} A_\mu^5 A_\nu^3 - \frac{g}{2} A_\mu^3 A_\nu^5 \\ + \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^5 A_\nu^8 - \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^8 A_\nu^5$$

$$F_{\mu\nu}^5 = \partial_\mu A_\nu^5 - \partial_\nu A_\mu^5 + \frac{g}{2} A_\mu^1 A_\nu^6 - \frac{g}{2} A_\mu^6 A_\nu^1 + \frac{g}{2} A_\mu^7 A_\nu^2 - \frac{g}{2} A_\mu^2 A_\nu^7 + \frac{g}{2} A_\mu^3 A_\nu^4 - \frac{g}{2} A_\mu^4 A_\nu^3 \\ + \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^8 A_\nu^4 - \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^4 A_\nu^8$$

$$F_{\mu\nu}^6 = \partial_\mu A_\nu^6 - \partial_\nu A_\mu^6 + \frac{g}{2} A_\mu^5 A_\nu^1 - \frac{g}{2} A_\mu^1 A_\nu^5 + \frac{g}{2} A_\mu^2 A_\nu^4 - \frac{g}{2} A_\mu^4 A_\nu^2 + \frac{g}{2} A_\mu^3 A_\nu^7 - \frac{g}{2} A_\mu^7 A_\nu^3 \\ + \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^7 A_\nu^8 - \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^8 A_\nu^7$$

$$F_{\mu\nu}^7 = \partial_\mu A_\nu^7 - \partial_\nu A_\mu^7 + \frac{g}{2} A_\mu^1 A_\nu^4 - \frac{g}{2} A_\mu^4 A_\nu^1 + \frac{g}{2} A_\mu^2 A_\nu^5 - \frac{g}{2} A_\mu^5 A_\nu^2 + \frac{g}{2} A_\mu^6 A_\nu^3 - \frac{g}{2} A_\mu^3 A_\nu^6 \\ + \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^8 A_\nu^6 - \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^6 A_\nu^8$$

$$F_{\mu\nu}^8 = \partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8 + \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^4 A_\nu^5 - \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^5 A_\nu^4 + \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^6 A_\nu^7 - \frac{g\sqrt{3}}{2} A_\mu^7 A_\nu^6$$



## G.6. Construcción del Lagrangeano

Notemos que:

$$\{F_{\mu\nu}^1 F_1^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^2 F_2^{\mu\nu}\} = 2 W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-}$$

$$\{F_{\mu\nu}^4 F_4^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^5 F_5^{\mu\nu}\} = 2 V_{\mu\nu}^+ V^{\mu\nu-}$$

$$\{F_{\mu\nu}^6 F_6^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^7 F_7^{\mu\nu}\} = 2 U_{\mu\nu}^{++} U^{\mu\nu--}$$

Luego obtenemos:

$$\mathcal{L}_{B1} = -\frac{1}{4} \{2 W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} + F_{\mu\nu}^3 F_3^{\mu\nu} + 2 V_{\mu\nu}^+ V^{\mu\nu-} + 2 U_{\mu\nu}^{++} U^{\mu\nu--} + F_{\mu\nu}^8 F_8^{\mu\nu}\}$$

## G.7. Desarrollo de Términos

Vamos a desarrollar cada uno de los cinco términos que aparecen en éste lagrangeano:

**Cálculo de  $W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-}$**

$$\begin{aligned} 2 W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} &= 4 \{ \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{\nu-} - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W^{\mu-} \} \\ &+ 4ig \{ \partial_\mu W_\nu^+ W^{\nu-} A^{3\mu} - \partial_\mu W_\nu^+ W^{\mu-} A^{3\nu} + \partial_\mu W_\nu^- W^{\mu+} A^{3\nu} - \partial_\mu W_\nu^- W^{\nu+} A^{3\mu} \} \\ &+ 2\sqrt{2}ig \{ \partial_\mu W_\nu^+ U^{\mu--} V^{\nu+} - \partial_\mu W_\nu^+ U^{\nu--} V^{\mu+} + \partial_\mu W_\nu^- U^{\nu++} V^{\mu-} - \partial_\mu W_\nu^- U^{\mu++} V^{\nu-} \} \\ &+ 4g^2 \{ W_\mu^+ A_\nu^3 W^{\mu-} A^{3\nu} - W_\mu^+ A_\nu^3 W^{\nu-} A^{3\mu} \} \\ &+ 2\sqrt{2}g^2 \{ W_\mu^+ V^{\mu+} U^{\nu--} A_\nu^3 - W_\mu^+ V^{\nu+} U^{\mu--} A_\nu^3 + W_\mu^- V^{\mu-} U^{\nu++} A_\nu^3 - W_\mu^- V^{\nu-} U^{\mu++} A_\nu^3 \} \\ &+ 2g^2 \{ V_\mu^- U_\nu^{++} V^{\mu+} U^{\nu--} - V_\mu^- U_\nu^{++} V^{\nu+} U^{\mu--} \} \end{aligned}$$

**Cálculo de  $F_{\mu\nu}^3 F_3^{\mu\nu}$**

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^3 F_3^{\mu\nu} &= 2 \left\{ \partial_\mu A_\nu^3 \partial^\mu A^{3\nu} - \partial_\mu A_\nu^3 \partial^\nu A^{3\mu} \right\} \\
&+ 4 ig \left\{ \partial_\mu A_\nu^3 W^{\mu-} W^{\nu+} - \partial_\mu A_\nu^3 W^{\mu+} W^{\nu-} \right\} \\
&+ 2 ig \left\{ \partial_\mu A_\nu^3 V^{\mu+} V^{\nu-} - \partial_\mu A_\nu^3 V^{\mu-} V^{\nu+} - \partial_\mu A_\nu^3 U^{\mu++} U^{\nu--} + \partial_\mu A_\nu^3 U^{\mu--} U^{\nu++} \right\} \\
&+ 2 g^2 \left\{ W_\mu^+ W^{\mu-} W_\nu^- W^{\nu+} - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} + W_\mu^+ W_\nu^- V^{\mu+} V^{\nu-} - W_\mu^+ W_\nu^- V^{\mu-} V^{\nu+} \right. \\
&\quad \left. + W_\mu^+ W_\nu^- U^{\mu--} U^{\nu++} - W_\mu^+ W_\nu^- U^{\mu++} U^{\nu--} \right\} \\
&+ \frac{g^2}{2} \left\{ V_\mu^+ V^{\mu-} V_\nu^- V^{\nu+} - V_\mu^+ V^{\mu+} V_\nu^- V^{\nu-} \right. \\
&\quad \left. - U_\mu^{++} U^{\mu++} U_\nu^{--} U^{\nu--} + U_\mu^{++} U^{\mu--} U_\nu^{--} U^{\nu++} \right\} \\
&+ g^2 \left\{ V_\mu^+ V_\nu^- U^{\mu++} U^{\nu--} - V_\mu^+ V_\nu^- U^{\mu--} U^{\nu++} \right\}
\end{aligned}$$

**Cálculo de  $V_{\mu\nu}^+ V^{\mu\nu-}$**

$$\begin{aligned}
2 V_{\mu\nu}^+ V^{\mu\nu-} &= 4 \left\{ \partial_\mu V_\nu^+ \partial^\mu V^{\nu-} - \partial_\mu V_\nu^+ \partial^\nu V^{\mu-} \right\} \\
&+ 2 \sqrt{2} ig \left\{ \partial_\mu V_\nu^+ W^{\mu+} U^{\nu--} - \partial_\mu V_\nu^+ W^{\nu+} U^{\mu--} - W_\mu^- U_\nu^{++} \partial^\mu V^{\nu-} + W_\mu^- U_\nu^{++} \partial^\nu V^{\mu-} \right\} \\
&\quad + 2 ig \left\{ \partial_\mu V_\nu^+ V^{\mu-} A^{3\nu} - \partial_\mu V_\nu^+ V^{\nu-} A^{3\mu} + \partial_\mu V_\nu^- V^{\nu+} A^{3\mu} - \partial_\mu V_\nu^- V^{\mu+} A^{3\nu} \right\} \\
&\quad + \sqrt{3} ig \left\{ \partial_\mu V_\nu^+ V^{\mu-} A^{8\nu} - \partial_\mu V_\nu^+ V^{\nu-} A^{8\mu} + \partial_\mu V_\nu^- V^{\nu+} A^{8\mu} - \partial_\mu V_\nu^- V^{\mu+} A^{8\nu} \right\} \\
&\quad + g^2 \left\{ A_\mu^3 V_\nu^+ V^{\nu-} A^{3\mu} - A_\mu^3 V_\nu^+ V^{\mu-} A^{3\nu} \right\} \\
&+ \sqrt{2} g^2 \left\{ W_\mu^- U_\nu^{++} V^{\mu-} A^{3\nu} - W_\mu^- U_\nu^{++} V^{\nu-} A^{3\mu} - W_\mu^+ U_\nu^{--} V^{\nu+} A^{3\mu} + W_\mu^+ U_\nu^{--} V^{\mu+} A^{3\nu} \right\} \\
&\quad + \sqrt{3} g^2 \left\{ 2 A_\mu^3 V_\nu^+ A^{8\mu} V^{\nu-} - A_\mu^3 V_\nu^+ A^{8\nu} V^{\mu-} - A_\mu^3 V_\nu^- A^{8\nu} V^{\mu+} \right\} \\
&+ \sqrt{6} g^2 \left\{ W_\mu^- U_\nu^{++} V^{\mu-} A^{8\nu} - W_\mu^- U_\nu^{++} V^{\nu-} A^{8\mu} - W_\mu^+ U_\nu^{--} V^{\nu+} A^{8\mu} + W_\mu^+ U_\nu^{--} V^{\mu+} A^{8\nu} \right\}
\end{aligned}$$

$$+2 g^2 \left\{ W_{\mu}^{-} U_{\nu}^{++} W^{\mu+} U^{\nu--} - W_{\mu}^{-} U_{\nu}^{++} W^{\nu+} U^{\mu--} \right\} \\ +3 g^2 \left\{ A_{\mu}^8 V_{\nu}^{+} V^{\nu-} A^{8\mu} - A_{\mu}^8 V_{\nu}^{+} V^{\mu-} A^{8\nu} \right\}$$

**Cálculo de  $U_{\mu\nu}^{++} U^{\mu\nu--}$**

$$2 U_{\mu\nu}^{++} U^{\mu\nu--} = 4 \left\{ \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} \partial^{\mu} U^{\nu--} - \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} \partial^{\nu} U^{\mu--} \right\} \\ +2 \sqrt{2} i g \left\{ \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} W^{\mu-} V^{\nu-} - \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} V^{\mu-} W^{\nu-} + \partial_{\mu} U_{\nu}^{--} V^{\mu+} W^{\nu+} - \partial_{\mu} U_{\nu}^{--} W^{\mu+} V^{\nu+} \right\} \\ +2 i g \left\{ \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} A^{3\mu} U^{\nu--} - \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} U^{\mu--} A^{3\nu} + \partial_{\mu} U_{\nu}^{--} U^{\mu++} A^{3\nu} - \partial_{\mu} U_{\nu}^{--} U^{\nu++} A^{3\mu} \right\} \\ +2 \sqrt{3} i g \left\{ \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} A^{8\nu} U^{\mu--} - \partial_{\mu} U_{\nu}^{++} U^{\nu--} A^{8\mu} + \partial_{\mu} U_{\nu}^{--} U^{\nu++} A^{8\mu} - \partial_{\mu} U_{\nu}^{--} U^{\mu++} A^{8\nu} \right\} \\ +g^2 \left\{ A_{\mu}^3 U_{\nu}^{++} A^{3\mu} U^{\nu--} - A_{\mu}^3 U_{\nu}^{++} A^{3\nu} U^{\mu--} \right\} \\ +\sqrt{2} g^2 \left\{ W_{\mu}^{+} V_{\nu}^{+} A^{3\mu} U^{\nu--} - W_{\mu}^{+} V_{\nu}^{+} A^{3\nu} U^{\mu--} - W_{\mu}^{-} V_{\nu}^{-} A^{3\nu} U^{\mu++} + W_{\mu}^{-} V_{\nu}^{-} A^{3\mu} U^{\nu++} \right\} \\ +\sqrt{3} g^2 \left\{ A_{\mu}^3 U_{\nu}^{++} U^{\mu--} A^{8\nu} + A_{\mu}^3 U_{\nu}^{++} U^{\nu--} A^{8\mu} - 2 A_{\mu}^3 U_{\nu}^{++} U^{\nu--} A^{8\mu} \right\} \\ +\sqrt{6} g^2 \left\{ W_{\mu}^{+} V_{\nu}^{+} A^{8\nu} U^{\mu--} - W_{\mu}^{+} V_{\nu}^{+} A^{8\mu} U^{\nu--} - W_{\mu}^{-} V_{\nu}^{-} A^{8\mu} U^{\nu++} + W_{\mu}^{-} V_{\nu}^{-} A^{8\nu} U^{\mu++} \right\} \\ +2 g^2 \left\{ W_{\mu}^{+} V_{\nu}^{+} W^{\mu-} V^{\nu-} - W_{\mu}^{+} V_{\nu}^{+} V^{\mu-} W^{\nu-} \right\} \\ +3 g^2 \left\{ A_{\mu}^8 U_{\nu}^{++} A^{8\mu} U^{\nu--} - A_{\mu}^8 U_{\nu}^{++} A^{8\nu} U^{\mu--} \right\}$$

**Cálculo de  $F_{\mu\nu}^8 F^{8\mu\nu}$**

$$F_{\mu\nu}^8 F^{8\mu\nu} = 2 \left\{ \partial_{\mu} A_{\nu}^8 \partial^{\mu} A^{8\nu} - \partial_{\mu} A_{\nu}^8 \partial^{\nu} A^{8\mu} \right\} \\ +2 \sqrt{3} i g \left\{ \partial_{\mu} A_{\nu}^8 V^{\mu-} V^{\nu+} - \partial_{\mu} A_{\nu}^8 V^{\mu+} V^{\nu-} + \partial_{\mu} A_{\nu}^8 U^{\mu--} U^{\nu++} - \partial_{\mu} A_{\nu}^8 U^{\mu++} U^{\nu--} \right\} \\ +\frac{3g^2}{2} \left\{ V_{\mu}^{-} V_{\nu}^{+} V^{\mu+} V^{\nu-} - V_{\mu}^{-} V_{\nu}^{+} V^{\mu-} V^{\nu+} + U_{\mu}^{++} U_{\nu}^{--} U^{\mu--} U^{\nu++} - U_{\mu}^{++} U_{\nu}^{--} U^{\mu++} U^{\nu--} \right\} \\ +3 g^2 \left\{ V_{\mu}^{-} V_{\nu}^{+} U^{\mu++} U^{\nu--} - V_{\mu}^{-} V_{\nu}^{+} U^{\mu--} U^{\nu++} \right\}$$

## Apéndice H

# Sector de Higgs en el modelo

$$\text{SU}(3)_L \otimes \text{U}(1)_N$$

### H.1. Derivada covariante

El modelo propone una derivada covariante sobre los campos de Higgs de la forma:

$$D_\mu \varphi_i = \left[ \partial_\mu - \frac{ig}{2} \lambda_j A_\mu^j + ig' B_\mu N_\varphi \right] \varphi_i, \quad \varphi_i = \eta, \rho, \chi. \quad (\text{H.1})$$

Donde  $\lambda_j$  son las matrices de Gell-Mann vistas en (G.1),  $N_\varphi$  es el valor de la hipercarga para cada uno de los campos de Higgs, y  $A_\mu$  y  $B_\mu$  son los campos de calibre. Ahora vamos a desarrollar explícitamente esta expresión, para así poder hallar las masas de los bosones intermediarios. Con este fin calculamos:

$$\lambda_j A_\mu^j = \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix}$$

#### H.1.1. Derivada covariante sobre $\eta$

Recordemos que el valor de la hipercarga para este campo es  $N_\eta = 0$ , y usando la expansión de los campos de Higgs vistas en (2.12), la derivada covariante quedaría:

$$D_\mu \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \begin{pmatrix} v_\eta + h_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\eta + h_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando y tomando la transpuesta conjugada:

$$(D_\mu \eta)^\dagger = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu h_\eta + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \left[ A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \right] (v_\eta + h_\eta), \frac{ig}{2\sqrt{2}} [A_\mu^1 - iA_\mu^2] (v_\eta + h_\eta), \frac{ig}{2\sqrt{2}} (A_\mu^4 - iA_\mu^5) (v_\eta + h_\eta) \right)$$

$$D^\mu \eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu h_\eta - \frac{ig}{2\sqrt{2}} \left( A^{3\mu} + \frac{1}{\sqrt{3}} A^{8\mu} \right) (v_\eta + h_\eta) \\ -\frac{ig}{2\sqrt{2}} (A^{1\mu} + iA^{2\mu}) (v_\eta + h_\eta) \\ -\frac{ig}{2\sqrt{2}} (A^{4\mu} + iA^{5\mu}) (v_\eta + h_\eta) \end{pmatrix}$$

Multiplicando obtenemos:

$$(D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) = \frac{1}{2} (\partial_\mu h_\eta) (\partial^\mu h_\eta) + \frac{g^2}{8} \left( A_\mu^3 A^{3\mu} + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^3 A^{8\mu} + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 A^{3\mu} + \frac{1}{3} A_\mu^8 A^{8\mu} \right) (v_\eta + h_\eta)^2$$

$$+ \frac{g^2}{8} (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu}) (v_\eta + h_\eta)^2 + \frac{g^2}{8} (A_\mu^4 A^{4\mu} + A_\mu^5 A^{5\mu}) (v_\eta + h_\eta)^2$$

A partir de (2.5) podemos hallar:

$$W_\mu^- W^{\mu+} = \frac{1}{2} (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu}), \quad V_\mu^- V^{\mu+} = \frac{1}{2} (A_\mu^4 A^{4\mu} + A_\mu^5 A^{5\mu})$$

Entonces:

$$(D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) = \frac{1}{2} (\partial_\mu h_\eta) (\partial^\mu h_\eta) + \frac{g^2}{4} v_\eta^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{g^2}{4} v_\eta^2 V_\mu^- V^{\mu+} + \Delta_\eta$$

$$+ \frac{1}{2} (A_\mu^3, A_\mu^8, B_\mu) \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 & \frac{1}{\sqrt{3}} v_\eta^2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} v_\eta^2 & \frac{1}{3} v_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ A^{8\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \quad (\text{H.2})$$

■ Donde  $\Delta_\eta$  contiene los términos que dependen de  $h_\eta$ , los cuales al no intervenir en el cálculo de la matriz de masa para los campos neutros no serán tomados en cuenta. Se utiliza éste mismo criterio para los campos  $\rho$  y  $\chi$ .

### H.1.2. Derivada covariante sobre $\rho$

Para este campo el valor de la hipercarga es  $N_\rho = 1$ , entonces:

$$D_\mu \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho + h_\rho \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i g}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^1 - i A_\mu^2 & A_\mu^4 - i A_\mu^5 \\ A_\mu^1 + i A_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^6 - i A_\mu^7 \\ A_\mu^4 + i A_\mu^5 & A_\mu^6 + i A_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho + h_\rho \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} g' B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho + h_\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$D_\mu \rho = \begin{pmatrix} -i \frac{g}{2\sqrt{2}} (A_\mu^1 - i A_\mu^2) (v_\rho + h_\rho) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h_\rho - i \frac{g}{2\sqrt{2}} \left( -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \right) (v_\rho + h_\rho) + \frac{g'}{\sqrt{2}} B_\mu (v_\rho + h_\rho) \\ -i \frac{g}{2\sqrt{2}} (A_\mu^6 + i A_\mu^7) (v_\rho + h_\rho) \end{pmatrix}$$

Finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu v_\rho) (\partial^\mu v_\rho) + \frac{g^2}{4} v_\rho^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{g^2}{4} v_\rho^2 U_\mu^{--} U^{\mu++} + \Delta_\rho \\ &+ \frac{1}{2} (A_\mu^3, A_\mu^8, B_\mu) \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & -\frac{v_\rho^2}{\sqrt{3}} & -2\frac{g'}{g} v_\rho^2 \\ -\frac{v_\rho^2}{\sqrt{3}} & \frac{v_\rho^2}{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} v_\rho^2 \\ -2\frac{g'}{g} v_\rho^2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} v_\rho^2 & 4\frac{g'^2}{g^2} v_\rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ A^{8\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

### H.1.3. Derivada covariante sobre $\chi$

Para este campo el valor de la hipercarga es  $N_\chi = -1$ , entonces:

$$D_\mu \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi + h_\chi \end{pmatrix} - \frac{i g}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^1 - i A_\mu^2 & A_\mu^4 - i A_\mu^5 \\ A_\mu^1 + i A_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^6 - i A_\mu^7 \\ A_\mu^4 + i A_\mu^5 & A_\mu^6 + i A_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi + h_\chi \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}} g' B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi + h_\chi \end{pmatrix}$$

Procediendo igual que en los casos anteriores encontramos:

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu v_\chi) (\partial^\mu v_\chi) + \frac{g^2}{4} v_\chi^2 V_\mu^- V^{\mu+} + \frac{g^2}{4} v_\chi^2 U_\mu^{--} U^{\mu++} + \Delta_\chi \\
 &+ \frac{1}{2} (A_\mu^3, A_\mu^8, B_\mu) \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} v_\chi^2 & \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} v_\chi^2 \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} v_\chi^2 & 4 \frac{g'^2}{g^2} v_\chi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ A^{8\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{H.4}$$

## H.2. Matriz de masa

De acuerdo con el Lagrangeano de Higgs (2.10), la parte cinética se obtiene sumando (H.2), (H.3) y (H.4) por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} (\partial_\mu v_\eta) (\partial^\mu v_\eta) + \frac{1}{2} (\partial_\mu v_\rho) (\partial^\mu v_\rho) + \frac{1}{2} (\partial_\mu v_\chi) (\partial^\mu v_\chi) + \Delta_\eta + \Delta_\rho + \Delta_\chi \\
 &+ \left[ \frac{g^2}{4} (v_\eta^2 + v_\rho^2) \right] W_\mu^- W^{\mu+} + \left[ \frac{g^2}{4} (v_\eta^2 + v_\chi^2) \right] V_\mu^- V^{\mu+} + \left[ \frac{g^2}{4} (v_\rho^2 + v_\chi^2) \right] U_\mu^{--} U^{\mu++} \\
 &+ \frac{1}{2} (A_\mu^3, A_\mu^8, B_\mu) \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 + v_\rho^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & -2 \frac{g'}{g} v_\rho^2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & \frac{1}{3}(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 4v_\chi^2) & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 + 2v_\chi^2) \\ -2 \frac{g'}{g} v_\rho^2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 + 2v_\chi^2) & 4 \frac{g'^2}{g^2} (v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ A^{8\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A partir de lo encontrado podemos identificar:

$$\begin{aligned}
 M_W^2 &= \frac{1}{4} g^2 (v_\eta^2 + v_\rho^2), & M_V^2 &= \frac{1}{4} g^2 (v_\eta^2 + v_\chi^2) \\
 M_U^2 &= \frac{1}{4} g^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2)
 \end{aligned} \tag{H.5}$$

$$M^2 = \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 + v_\rho^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & -2 \frac{g'}{g} v_\rho^2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & \frac{1}{3}(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 4v_\chi^2) & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 + 2v_\chi^2) \\ -2 \frac{g'}{g} v_\rho^2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 + 2v_\chi^2) & 4 \frac{g'^2}{g^2} (v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{pmatrix} \tag{H.6}$$

■ Podemos observar que fue posible la identificación de las masas de los bosones  $W$ ,  $U$  y  $V$ , donde estos dos últimos son las novedades que plantea el modelo. Sin embargo apareció una matriz de masa, la cual al diagonalizarla nos permitirá identificar las masas de los bosones faltantes. Dicho tema se analiza en la siguiente sección.

### H.3. Diagonalización de la matriz de masa

Nos interesa diagonalizar la matriz de masa vista en la sección anterior (H.6), con el fin de identificar las masas de los bosones físicos, para alcanzar ese objetivo calcularemos sus valores y vectores propios. Es conveniente destacar que estamos tratando con una matriz simétrica, que es ortogonalmente diagonalizable y cuyos valores propios serán números reales. Primero calculemos el determinante de esta matriz:

$$\det(M^2) = \frac{g^5}{64} \begin{vmatrix} v_\eta^2 + v_\rho^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & -2\frac{g'}{g}v_\rho^2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & \frac{1}{3}(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 4v_\chi^2) & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) \\ -2\frac{g'}{g}v_\rho^2 & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) & 4\frac{g'^2}{g^2}(v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{vmatrix}$$

Recordemos que el determinante de una matriz no se altera cuando se suma a una de sus columnas una combinación lineal de las demás, entonces sobre la columna uno, realizamos la siguiente operación  $C_1 - \sqrt{3}C_2 + (g/g')C_3$  y obtenemos:

$$\det(M^2) = \frac{g^5}{64} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & -2\frac{g'}{g}v_\rho^2 \\ 0 & \frac{1}{3}(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 4v_\chi^2) & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) & 4\frac{g'^2}{g^2}(v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{vmatrix}$$



Como podemos observar todos los elementos de la primera columna son ceros, por lo tanto de la propiedad de un determinante tenemos:

$$\det(M^2) = 0 \quad (\text{H.7})$$

Por otro lado escribamos la matriz inicial  $M^2$  como:

$$M^2 = \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{H.8})$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha &= v_\eta^2 + v_\rho^2, & \beta &= \frac{1}{3}(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 4v_\chi^2), & \gamma &= 4\frac{g'^2}{g^2}(v_\rho^2 + v_\chi^2) \\ a &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2), & b &= -2\frac{g'}{g}v_\rho^2, & c &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) \end{aligned}$$

### **H.3.1. Valores propios de la matriz de masa**

Por algebra lineal sabemos que el polinomio característico que nos permite calcular los valores propios de una matriz  $A$  de  $3 \times 3$  con elementos  $a_{ij}$  es dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \text{Tr}(A)\lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det(A) = 0 \quad (\text{H.9})$$

Donde  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  y  $A_{33}$  son los cofactores de  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{33}$  respectivamente.

Entonces en nuestro caso tenemos:

$$\text{Tr}(M^2) = \frac{g^2}{4}(\alpha + \beta + \gamma)$$

Y la suma de los cofactores:

$$M_{11} + M_{22} + M_{33} = \frac{g^4}{16} \left[ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (a^2 + b^2 + c^2) \right]$$

Ya vimos de (H.7) que  $\det(M^2)=0$ , entonces el polinomio característico (H.9) quedaría:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \lambda^3 - \left[ \frac{g^2}{4} (\alpha + \beta + \gamma) \right] \lambda^2 + \frac{g^4}{16} [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (a^2 + b^2 + c^2)] \lambda = 0 \\
 &= \lambda \left\{ \lambda^2 - \underbrace{\left[ \frac{g^2}{4} (\alpha + \beta + \gamma) \right]}_{C_1} \lambda + \underbrace{\frac{g^4}{16} [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (a^2 + b^2 + c^2)]}_{C_2} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

De aquí podemos notar que uno de los valores propios de la matriz es cero, lo que corresponde con la masa del fotón:

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \tag{H.10}$$

Además nos quedaría la ecuación cuadrática:

$$\lambda^2 - C_1\lambda + C_2 = 0$$

Cuyas soluciones son dadas por:

$$\lambda = \frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2} \tag{H.11}$$

Nuestro problema se reduce a calcular  $C_1$  y  $C_2$ , en función a los valores de los elementos de matriz mencionados anteriormente (H.8), operando obtenemos:

$$C_1 = g^2 \left\{ \left( \frac{1}{3} \right) v_\eta^2 + \left[ \left( \frac{1}{3} + t^2 \right) \right] v_\rho^2 + \left[ \left( \frac{1}{3} + t^2 \right) \right] v_\chi^2 \right\} \tag{H.12}$$

$$C_2 = \frac{g^4}{12} \left\{ \left[ \frac{1}{4} (16t^2 + 1) \right] v_\eta^2 v_\chi^2 + \left[ \frac{1}{4} (16t^2 + 1) \right] v_\rho^2 v_\chi^2 + \left[ (4t^2 + 1) \right] v_\eta^2 v_\rho^2 \right\} \tag{H.13}$$

Donde hemos llamado a  $t = g'/g$  para una mejor visualización. Con esto calculamos  $C_1^2 - 4C_2$ :

$$g^4 \left\{ \left( \frac{1}{4} \right) v_\eta^4 + \left( t^2 + \frac{1}{3} \right)^2 v_\rho^4 + \left( t^2 + \frac{1}{3} \right)^2 v_\chi^4 + \left( 2t^2 - \frac{5}{36} \right) v_\rho^2 v_\chi^2 - \left( \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{9} \right) v_\eta^2 v_\rho^2 + \left( -\frac{2}{3} t^2 + \frac{5}{36} \right) v_\eta^2 \right\}$$

Factorizando  $v_\chi^4$ :

$$C_1^2 - 4C_2 = g^4 v_\chi^4 \left\{ \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{v_\eta}{v_\chi}\right)^4 + \left(t^2 + \frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{v_\rho}{v_\chi}\right)^4 + \left(t^2 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2t^2 - \frac{5}{36}\right) \left(\frac{v_\rho}{v_\chi}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) \left(\frac{v_\eta}{v_\chi}\right)^2 \left(\frac{v_\rho}{v_\chi}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}t^2 + \frac{5}{36}\right) \left(\frac{v_\eta}{v_\chi}\right)^2 \right\}$$

Usando la aproximación:

$$v_\chi \gg v_\rho, \quad v_\chi \gg v_\eta \quad (\text{H.14})$$

Obtenemos:

$$C_1^2 - 4C_2 \approx g^4 \left(\frac{1}{3} + t^2\right)^2 v_\chi^4$$

$$\sqrt{C_1^2 - 4C_2} \approx g^2 \left(\frac{1}{3} + t^2\right) v_\chi^2 \quad (\text{H.15})$$

Entonces reemplazando (H.12) y (H.15) en (H.11) encontramos que los valores propios son dados por:

$$\lambda = \frac{g^2 \left\{ \left(\frac{1}{3}\right) v_\eta^2 + \left[\left(\frac{1}{3} + t^2\right)\right] v_\rho^2 + \left[\left(\frac{1}{3} + t^2\right)\right] v_\chi^2 \right\} \pm g^2 \left(\frac{1}{3} + t^2\right) v_\chi^2}{2} \quad (\text{H.16})$$

Tomando el signo mas en (H.16) encontramos:

$$\lambda_2 = g^2 \left\{ \left(\frac{1}{6}\right) v_\eta^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + t^2\right)\right] v_\rho^2 + \left[\left(\frac{1}{3} + t^2\right)\right] v_\chi^2 \right\}$$

Factorizando  $v_\chi^2$ :

$$\lambda_2 = g^2 v_\chi^2 \left\{ \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{v_\eta}{v_\chi}\right)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + t^2\right)\right] \left(\frac{v_\rho}{v_\chi}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{3} + t^2\right)\right] \right\}$$

Usando nuevamente la aproximación (H.14), nos quedaria:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{3} (g^2 + 3g'^2) v_\chi^2 \quad (\text{H.17})$$

Tomando el signo menos en (H.16) encontramos:

$$\lambda_3 = g^2 \left\{ \left( \frac{1}{6} \right) v_\eta^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + t^2 \right) \right] v_\rho^2 \right\}$$

Dando forma encontramos:

$$\lambda_3 \approx \frac{g^2}{4} \left[ \frac{g^2 + 4g'^2}{g^2 + 3g'^2} \right] (v_\eta^2 + v_\rho^2) \quad (\text{H.18})$$

■ Entonces podemos identificar dichos valores propios con las masas de los bosones físicos que era lo que estábamos buscando:

$$M_A^2 = 0, \quad M_{Z'}^2 \approx \frac{1}{3} (g^2 + 3g'^2) v_\chi^2$$

$$M_Z^2 \approx \frac{g^2}{4} \left[ \frac{g^2 + 4g'^2}{g^2 + 3g'^2} \right] (v_\eta^2 + v_\rho^2) \quad (\text{H.19})$$

### H.3.2. Vectores propios de la matriz de masa

Procederemos a calcular los vectores propios de la matriz de masa, haremos el calculo explícito sólo para el caso del valor propio correspondiente a la masa del fotón, ya que para los otros casos se procede de manera similar, entonces usando la ecuación de valores propios para  $\lambda_1 = 0$ :

$$\frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha x + a y + b z &= 0 \\ a x + \beta y + c z &= 0 \\ b x + c y + \gamma z &= 0\end{aligned}$$

Al sumar y restar apropiadamente estas ecuaciones podemos eliminar la variable  $x$ , y encontrar  $y$  en función a  $z$ , lo que resulta:

$$y = \left( \frac{\alpha c - ab}{a^2 - \alpha\beta} \right) z$$

Llamemos:

$$z = \sigma, \quad y = \left( \frac{\alpha c - ab}{a^2 - \alpha\beta} \right) \sigma$$

Usando estos valores podemos hallar  $x$ , a partir de la primera ecuación de este sistema:

$$x = \left( \frac{b\beta - ac}{a^2 - \alpha\beta} \right) \sigma$$

Luego tendríamos el primer vector propio:

$$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \frac{b\beta - ac}{a^2 - \alpha\beta} \\ \frac{\alpha c - ab}{a^2 - \alpha\beta} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\beta - ac \\ \alpha c - ab \\ a^2 - \alpha\beta \end{pmatrix}$$

Usando los valores mostrados en (H.8) obtenemos:

$$b\beta - ac = -\frac{4}{3} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 v_\eta^2 + v_\rho^2 v_\chi^2 + v_\eta^2 v_\chi^2)$$

$$\alpha c - ab = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 v_\eta^2 + v_\rho^2 v_\chi^2 + v_\eta^2 v_\chi^2)$$

$$a^2 - \alpha\beta = -\frac{4}{3} (v_\rho^2 v_\eta^2 + v_\rho^2 v_\chi^2 + v_\eta^2 v_\chi^2)$$

Entonces el vector propio tomaría la forma:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 v_\eta^2 + v_\rho^2 v_\chi^2 + v_\eta^2 v_\chi^2) \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (v_\rho^2 v_\eta^2 + v_\rho^2 v_\chi^2 + v_\eta^2 v_\chi^2) \\ -\frac{4}{3} (v_\rho^2 v_\eta^2 + v_\rho^2 v_\chi^2 + v_\eta^2 v_\chi^2) \end{pmatrix}$$

Multiplicando por:

$$-\frac{3}{4} (v_\rho^2 v_\eta^2 + v_\rho^2 v_\chi^2 + v_\eta^2 v_\chi^2)$$

Nos quedaría:

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{g'}{g} \\ -\sqrt{3} \frac{g'}{g} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{3} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como el vector debe estar normalizado:

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{3} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el fotón se puede escribir como una combinación lineal de los campos de la simetría:

$$A_\mu = \frac{1}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \left[ (A_\mu^3 - \sqrt{3} A_\mu^8) t + B_\mu \right] \quad (\text{H.20})$$

De forma similar encontramos:

$$\tilde{V}_2 = -\frac{1}{(1+4t^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} (1+3t^2)^{1/2} \\ \frac{\sqrt{3}t^2}{(1+3t^2)^{1/2}} \\ t \\ -\frac{t}{(1+3t^2)^{1/2}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_3 = \frac{1}{(1+3t^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

Con lo que obtendríamos:

$$Z_\mu^0 \approx -\frac{1}{(1+4t^2)^{1/2}} \left[ (1+3t^2)^{1/2} A_\mu^3 + \frac{\sqrt{3}t^2}{(1+3t^2)^{1/2}} A_\mu^8 - \frac{t}{(1+3t^2)^{1/2}} B_\mu \right] \quad (\text{H.21})$$

$$Z_\mu'^0 \approx \frac{1}{(1+3t^2)^{1/2}} (A_\mu^8 + \sqrt{3}t B_\mu) \quad (\text{H.22})$$

## H.4. Relación de Gell-Mann-Nishijima

Al iniciar éste apéndice vimos la forma de la derivada covariante (H.1):

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \lambda_j A_\mu^j + ig' B_\mu N \quad (\text{H.23})$$

Si expandimos la sumatoria:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} (\lambda_1 A_\mu^1 + \lambda_2 A_\mu^2 + \dots + \lambda_8 A_\mu^8) + ig' B_\mu N$$

Lo que haremos ahora es escribir los campos de la simetría en función a los campos físicos, visto en (2.5):

$$W_\mu^\pm = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2)$$

$$V_\mu^\pm = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^4 \pm i A_\mu^5)$$

$$U_\mu^{\pm\pm} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^6 \pm i A_\mu^7)$$

Además:

$$A_\mu = \frac{1}{(1+4t^2)^{1/2}} \left[ A_\mu^3 t - \sqrt{3} A_\mu^8 t + B_\mu \right] \quad (\text{H.24})$$

$$Z_\mu^0 \approx -\frac{1}{(1+4t^2)^{1/2}} \left[ (1+3t^2)^{1/2} A_\mu^3 + \frac{\sqrt{3}t^2}{(1+3t^2)^{1/2}} A_\mu^8 - \frac{t}{(1+3t^2)^{1/2}} B_\mu \right]$$

$$Z_\mu^{0'} \approx \frac{1}{(1+3t^2)^{1/2}} \left( A_\mu^8 + \sqrt{3}t B_\mu \right)$$

Donde  $t = g'/g \equiv \tan \theta$ .

Definiremos nuevas matrices en función de las matrices de Gell-Mann con el objetivo de escribir la sumatoria (que aparece en la derivada covariante) que inicialmente se encuentra en función a los campos de la simetría en función a los campos físicos. Entonces:

$$\lambda_a^\pm \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 \mp i \lambda_2) \Rightarrow \lambda_a^- W_\mu^+ + \lambda_a^+ W_\mu^- = \lambda_1 A_\mu^1 + \lambda_2 A_\mu^2$$

$$\lambda_b^\pm \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_4 \pm i \lambda_5) \Rightarrow \lambda_b^- V_\mu^+ + \lambda_b^+ V_\mu^- = \lambda_4 A_\mu^4 + \lambda_5 A_\mu^5$$

$$\lambda_c^{\pm\pm} \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_6 \pm i \lambda_7) \Rightarrow \lambda_c^- U_\mu^{++} + \lambda_c^+ U_\mu^{--} = \lambda_6 A_\mu^6 + \lambda_7 A_\mu^7$$

Sumando:

$$\lambda_1 A_\mu^1 + \lambda_2 A_\mu^2 + \lambda_4 A_\mu^4 + \lambda_5 A_\mu^5 + \lambda_6 A_\mu^6 + \lambda_7 A_\mu^7 = \lambda_a^- W_\mu^+ + \lambda_a^+ W_\mu^- + \lambda_b^- V_\mu^+ + \lambda_b^+ V_\mu^- + \lambda_c^- U_\mu^{++} + \lambda_c^+ U_\mu^{--}$$

Notemos que faltan las expresiones que contienen a  $A_\mu^3$  y  $A_\mu^8$  las cuales van a ser reemplazadas a partir de (H.25), entonces la derivada covariante (H.23) toma la forma:

$$\begin{aligned} D_\mu = & \partial_\mu + \frac{ig}{2} \left( W_\mu^+ \lambda_a^- + W_\mu^- \lambda_a^+ \right) + \frac{ig}{2} \left( V_\mu^+ \lambda_b^- + V_\mu^- \lambda_b^+ \right) + \frac{ig}{2} \left( U_\mu^{++} \lambda_c^- + U_\mu^{--} \lambda_c^+ \right) \\ & + \frac{ig}{2} \lambda_3 \left[ \frac{t}{(1+4t^2)^{1/2}} A_\mu - \frac{(1+3t^2)^{1/2}}{(1+4t^2)^{1/2}} Z_\mu^0 \right] \\ & + \frac{ig}{2} \lambda_8 \left[ -\frac{\sqrt{3}t}{(1+4t^2)^{1/2}} A_\mu - \frac{\sqrt{3}t^2}{(1+4t^2)^{1/2}(1+3t^2)^{1/2}} Z_\mu^0 + \frac{1}{(1+3t^2)^{1/2}} Z_\mu^{0'} \right] \\ & + ig' N \left[ \frac{1}{(1+4t^2)^{1/2}} A_\mu - \frac{t}{(1+4t^2)^{1/2}(1+3t^2)^{1/2}} Z_\mu^0 + \frac{\sqrt{3}t}{(1+3t^2)^{1/2}} Z_\mu^{0'} \right] \end{aligned}$$



Si factorizamos los términos que acompañan al fotón ( $A_\mu$ ):

$$i \left( \frac{g}{2} \lambda_3 \frac{t}{(1+4t^2)^{1/2}} - \frac{g}{2} \lambda_8 \frac{\sqrt{3}t}{(1+4t^2)^{1/2}} + g' \frac{N}{(1+4t^2)^{1/2}} \right) A_\mu$$

teniendo en cuenta que:  $g' = t g$

$$i \underbrace{\left( \frac{g t}{(1+4t^2)^{1/2}} \right)}_e \underbrace{\left[ \frac{1}{2}(\lambda_3 - \sqrt{3} \lambda_8) + N \right]}_{Q/e} A_\mu$$

Ya que el lagrangeano de la electrodinámica  $\mathcal{L}_{int} = i q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$

Entonces obtenemos:

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} (\lambda_3 - \sqrt{3} \lambda_8) + N \quad (\text{H.25})$$

De acuerdo con [13].

Además podemos notar de manera similar que en el (ME) que:

$$e = g \frac{t}{(1+4t^2)^{1/2}} \equiv g \sin \theta_W$$

Entonces:

$$\sin \theta_W = \frac{t}{(1+4t^2)^{1/2}} \quad (\text{H.26})$$

## H.5. Relación entre los campos físicos y los campos de la simetría

De la diagonalización de la matriz de masa (H.6) tenemos:

$$\begin{bmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \\ Z_\mu^{0'} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \\ -\frac{\sqrt{1+3t^2}}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{\sqrt{3}t^2}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1+3t^2}} & \frac{t}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1+3t^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+3t^2}} & \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{1+3t^2}} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} A_\mu^3 \\ A_\mu^8 \\ B_\mu \end{bmatrix} \quad (\text{H.27})$$

Ahora si calculamos la inversa de dicha matriz:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{\sqrt{1+3t^2}}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{\sqrt{3}t^2}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1+3t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+3t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{t}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1+3t^2}} & \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{1+3t^2}} \end{bmatrix}$$

Como se puede observar la transformación entre los campos físicos y los de la simetría se puede relacionar a una rotación, ya que la matriz de transformación es ortogonal (su transpuesta es igual a su inversa).

Recordemos de la ecuación (H.26) que:

$$\sin \theta_W = \frac{t}{(1+4t^2)^{1/2}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}$$

A partir de esto encontramos:

$$\cos \theta_W = -\frac{\sqrt{1+3t^2}}{(1+4t^2)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{1+2\sin^2 \theta}}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}$$

$$\tan \theta_W = -\frac{t}{(1+3t^2)^{1/2}} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{1+2\sin^2 \theta}}$$

Ahora podemos escribir la transformación:

$$\begin{bmatrix} A_\mu^3 \\ A_\mu^8 \\ B_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_W & c_W & 0 \\ -\sqrt{3} s_W & \sqrt{3} s_W t_W & -\frac{\sqrt{1-4s_W^2}}{c_W} \\ \sqrt{1-4s_W^2} & -t_W \sqrt{1-4s_W^2} & -\sqrt{3} t_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \\ Z_\mu^{0'} \end{bmatrix}$$

Donde  $s_W \equiv \sin \theta_W$ ,  $c_W \equiv \cos \theta_W$  y  $t_W \equiv \tan \theta_W$ .

■ La transformación obtenida nos permitirá encontrar el lagrangiano para el sector bosónico después del RES, en función al ángulo de Weinberg, con lo cual podremos encontrar las reglas de Feynman para las interacciones entre los bosones que plantea nuestro modelo.

## H.6. Asignación de la carga

De la relación de Gell-Mann-Nishijima (H.25) tenemos:

$$Q = e \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N-1 & 0 \\ 0 & 0 & N+1 \end{pmatrix}$$

Ahora si lo aplicamos sobre el triplete izquierdo de los leptones:

$$QL_a = Q \begin{pmatrix} \nu_a \\ e_a^- \\ E_a^+ \end{pmatrix}_L = e \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N-1 & 0 \\ 0 & 0 & N+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_a \\ e_a^- \\ E_a^+ \end{pmatrix}_L$$

De aqui obtenemos:

$$\begin{aligned} Q\nu_a &= eN\nu_a \\ Qe_a^- &= e(N-1)e_a^- \\ QE_a^+ &= e(N+1)E_a^+ \end{aligned}$$

Podemos notar que para reproducir la carga de los leptones conocidos, se debe cumplir:  $N_{L_a} = 0$ .

Para el caso de los singletes derechos:

$$\begin{aligned} Qe_{bR}^- &= eNe_{bR}^- \\ QE_{bR}^+ &= eNE_{bR}^+ \end{aligned}$$

Entonces  $N_{e_{bR}^-} = -1$  y  $N_{E_{bR}^+} = +1$ .

Recordemos el lagrangeano de Yukawa visto en (2.21):

$$\mathcal{L}_Y = -h_{ab} \bar{L}_a e_{bR}^- \rho - g_{ab}' \bar{L}_a E_{bR}^+ \chi$$

Dicho lagrangeano debe ser un invariante de calibre por el grupo  $U(1)_N$  de manera similar a como se procedio para el (M.E.), entonces proponemos las siguientes transformaciones:

$$\begin{cases} \bar{L}'_a = \bar{L}_a e^{-ig\mathbf{N}_L} \\ e_{bR}^{-\prime} = e^{ig\mathbf{N}_{eR}} e_{bR}^- \\ E_{bR}^{+\prime} = e^{ig\mathbf{N}_{ER}} E_{bR}^+ \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho' = e^{ig\mathbf{N}_\rho} \rho \\ \chi' = e^{ig\mathbf{N}_\chi} \chi \end{cases}$$

Como consecuencia de imponer la invariancia del lagrangeano de Yukawa por dicha transformación se obtiene:

$$N_\rho = N_L - N_{e_R}, \quad \text{y} \quad N_\chi = N_L - N_{E_R}$$

Usando los valores de la hipercarga para los leptones hallados anteriormente, encontramos:

$$N_\rho = +1$$

$$N_\chi = -1$$

Para el caso de  $\eta$  es importante señalar que dicho campo esta relacionado con la generación de masa del sector de quarks, y ya que nosotros no trabajamos con dicho sector, omitiremos la deducción, pero se debe notar que se aplica el mismo procedimiento utilizado en esta sección. Su valor es  $N_\eta = 0$ .

### **H.6.1. Asignación de la carga de $\rho$**

Habiendo hallado el valor de la hipercarga para el campo  $\rho$ , procederemos a encontrar las cargas electricas relacionadas con este campo, para esto usamos la relacion de Gell-Mann:

$$Q_\rho = Q \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N-1 & 0 \\ 0 & 0 & N+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$$

De aqui obtenemos:

$$Q\rho_1 = eN\rho_1$$

$$Q\rho_2 = e(N-1)\rho_2$$

$$Q\rho_3 = e(N+1)\rho_3$$

Como ya conocemos el valor de la hipercarga:

$$Q_{\rho_1} = +1$$

$$Q_{\rho_2} = 0$$

$$Q_{\rho_3} = +2$$

Entonces podemos denotar el campo  $\rho$  de la siguiente manera:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \tag{H.28}$$

**H.6.2. Asignación de la carga de  $\chi$**

Procediendo de manera similar que en el caso anterior, encontramos:

$$\begin{aligned} Q_{\chi_1} &= -1 \\ Q_{\chi_2} &= -2 \\ Q_{\chi_3} &= 0 \end{aligned}$$

Entonces podemos denotar el campo  $\chi$  de la siguiente manera:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} \tag{H.29}$$

# Apéndice I

## Cálculo de las reglas de Feynman

### I.1. Método Utilizado.

A continuación mostraremos el método utilizado para hallar las reglas de Feynman del sector bosónico de nuestro modelo. Hacemos notar que dicho método es desarrollado en el libro de Mandl y Shaw citado en nuestra bibliografía [55]. Partiremos del término del lagrangiano encontrado después del (RES) para las partículas de nuestro interés.

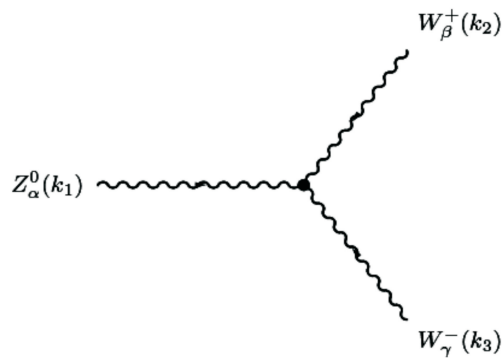
1. Entonces para el caso:

$$\mathcal{L}_1 = ig \cos \theta_W \left[ (W_\alpha^+ W_\beta - W_\beta^+ W_\alpha) \partial^\alpha Z^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha) W^{\beta+} Z^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^+ - \partial_\beta W_\alpha^+) W^{\beta-} Z^\alpha \right]$$

Basado en el proceso:

$$Z^0(k_1, r_1) + W^+(k_2, r_2) + W^-(k_3, r_3) \rightarrow \text{vacío}$$

Tenemos el diagrama:



Cada campo se reemplaza por su respectivo cuadrivector de polarización:

$$\begin{aligned} W_\alpha^+ &\Rightarrow \epsilon_\alpha(k_2) \equiv \epsilon_\alpha(2) \\ W_\beta &\Rightarrow \epsilon_\beta(3) \\ Z^\alpha &\Rightarrow \epsilon^\alpha(1) \end{aligned}$$

Y las derivadas por los términos:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha Z^\beta &\Rightarrow (-ik_1^\alpha) \epsilon^\beta(1) \\ \partial_\alpha W_\beta &\Rightarrow (-ik_{3\alpha}) \epsilon_\beta(3) \end{aligned}$$

La amplitud basada en el lagrangiano sería:

$$\mathcal{M} = g \cos \theta_W \left[ \underbrace{\{ \epsilon_\alpha(2)\epsilon_\beta(3) - \epsilon_\beta(2)\epsilon_\alpha(3) \}}_{\Gamma_1} \underbrace{(-ik_1^\alpha) \epsilon^\beta(1)}_{\Gamma_2} + \underbrace{\{ (-ik_{3\alpha}) \epsilon_\beta(3) - (-ik_{3\beta}) \epsilon_\alpha(3) \}}_{\Gamma_2} \epsilon^\beta(2) \epsilon^\alpha(1) - \underbrace{\{ (-ik_{2\alpha}) \epsilon_\beta(2) - (-ik_{2\beta}) \epsilon_\alpha(2) \}}_{\Gamma_3} \epsilon^\beta(3) \epsilon^\alpha(1) \right]$$

Veamos el término  $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{ \epsilon_\alpha(2)\epsilon_\beta(3) - \epsilon_\beta(2)\epsilon_\alpha(3) \} (-ik_1^\alpha) \epsilon^\beta(1) \\ &= -i \{ \epsilon_\alpha(2)\epsilon_\beta(3) \epsilon^\beta(1) - \epsilon_\beta(2)\epsilon_\alpha(3) \epsilon^\beta(1) \} k_1^\alpha \\ &= -i \{ \epsilon_\alpha(2)\epsilon_\beta(3) g^{\beta\sigma} \epsilon_\sigma(1) - \epsilon_\beta(2)\epsilon_\alpha(3) g^{\beta\rho} \epsilon_\rho(1) \} k_1^\alpha \\ &= -i \{ \epsilon_\sigma(1)\epsilon_\alpha(2)\epsilon_\beta(3) g^{\beta\sigma} k_1^\alpha - \epsilon_\rho(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\alpha(3) g^{\beta\rho} k_1^\alpha \} \end{aligned}$$

Hacemos los siguientes cambios en los índices, para cada uno de los términos de la expresión respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma &\leftrightarrow \mu & \rho &\leftrightarrow \mu \\ \alpha &\leftrightarrow \nu & \beta &\leftrightarrow \nu \\ \beta &\leftrightarrow \chi & \alpha &\leftrightarrow \chi \end{aligned}$$

Entonces:

$$\Gamma_1 = -i \{ \epsilon_\mu(1)\epsilon_\nu(2)\epsilon_\chi(3) g^{\chi\mu} k_1^\nu - \epsilon_\mu(1)\epsilon_\nu(2)\epsilon_\chi(3) g^{\nu\mu} k_1^\chi \}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\mu &\leftrightarrow \alpha \\ \nu &\leftrightarrow \beta \\ \chi &\leftrightarrow \gamma\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= -i \left\{ \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(3) g^{\gamma\alpha} k_1^\beta - \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(3) g^{\beta\alpha} k_1^\gamma \right\} \\ &= -i \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(3) \left\{ g^{\gamma\alpha} k_1^\beta - g^{\alpha\beta} k_1^\gamma \right\}\end{aligned}$$

De aqui:

$$\Gamma_1 = i \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(3) \left\{ g^{\alpha\beta} k_1^\gamma - g^{\gamma\alpha} k_1^\beta \right\}$$

De manera similar encontramos:

$$\Gamma_2 = i \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(3) \left\{ g^{\beta\gamma} k_2^\alpha - g^{\alpha\beta} k_2^\gamma \right\}$$

$$\Gamma_3 = i \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(3) \left\{ g^{\gamma\alpha} k_3^\beta - g^{\beta\gamma} k_3^\alpha \right\}$$

La amplitud resultante sería:

$$\mathcal{M} = ig \cos \theta_W \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(3) \left[ g^{\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\gamma + g^{\gamma\beta} (k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k_3 - k_1)^\beta \right]$$

De donde se desprende la regla de Feynman:

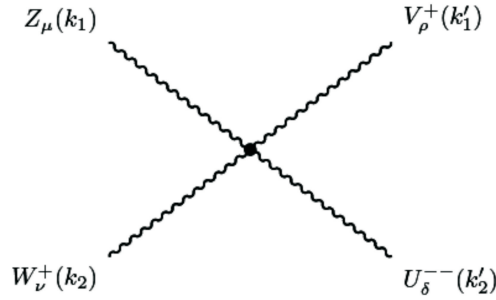
$$ig \cos \theta_W \left[ g^{\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\gamma + g^{\gamma\beta} (k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k_3 - k_1)^\beta \right]$$



2. Para el caso:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{g^2}{c_W} \left[ W_\mu^+ V^{\mu+} U^{\nu--} Z_\nu^0 - (1 - 2s_W^2) W_\mu^+ V^{\nu+} U^{\mu--} Z_\nu^0 - 2s_W^2 W_\mu^+ V^{\nu+} U_\nu^{--} Z^{0\mu} \right]$$

Tenemos el diagrama:



La amplitud:

$$\mathcal{M} = -i \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{g^2}{c_W} \left\{ \overbrace{\epsilon_\mu(2)\epsilon^\mu(1')\epsilon^\nu(2')\epsilon_\nu(1)}^{X_1} - (1 - 2s_W^2) \overbrace{\epsilon_\mu(2)\epsilon^\nu(1')\epsilon^\mu(2')\epsilon_\nu(1)}^{X_2} - 2s_W^2 \overbrace{\epsilon_\mu(2)\epsilon^\nu(1')\epsilon_\nu(2')\epsilon^\mu(1)}^{X_3} \right\}$$

Veamos el termino  $X_1$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= \epsilon_\mu(2)\epsilon^\mu(1')\epsilon^\nu(2')\epsilon_\nu(1) \\ &= \epsilon_\mu(2)g^{\mu\sigma}\epsilon_\sigma(1')g^{\nu\theta}\epsilon_\theta(2')\epsilon_\nu(1) \\ &= \epsilon_\nu(1)\epsilon_\mu(2)\epsilon_\sigma(1')\epsilon_\theta(2')g^{\mu\sigma}g^{\nu\theta} \end{aligned}$$

Haciendo los cambios:

$$\begin{aligned} \nu &\leftrightarrow \alpha \\ \mu &\leftrightarrow \beta \\ \sigma &\leftrightarrow \gamma \\ \theta &\leftrightarrow \delta \end{aligned}$$

$$X_1 = \epsilon_\alpha(1)\epsilon_\beta(2)\epsilon_\gamma(1')\epsilon_\delta(2')g^{\beta\gamma}g^{\alpha\delta}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\alpha &\leftrightarrow \mu \\ \beta &\leftrightarrow \nu \\ \gamma &\leftrightarrow \rho \\ \delta &\leftrightarrow \delta\end{aligned}$$

$$X_1 = \epsilon_\mu(1)\epsilon_\nu(2)\epsilon_\rho(1')\epsilon_\delta(2')g^{\nu\rho}g^{\mu\delta}$$

De manera similar encontramos:

$$X_2 = \epsilon_\mu(1)\epsilon_\nu(2)\epsilon_\rho(1')\epsilon_\delta(2')g^{\mu\rho}g^{\nu\delta}$$

$$X_3 = \epsilon_\mu(1)\epsilon_\nu(2)\epsilon_\rho(1')\epsilon_\delta(2')g^{\delta\rho}g^{\nu\mu}$$

Entonces la regla de Feynman seria:

$$-i\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{g^2}{c_W}\left[g^{\nu\rho}g^{\mu\delta} - g^{\mu\rho}g^{\nu\delta} + 2s_W^2\left(g^{\mu\rho}g^{\nu\delta} - g^{\rho\delta}g^{\mu\nu}\right)\right]$$

(I.1)

# Bibliografia

- [1] R.W. Robinett, Phys. Rev. **D26** 2388 (1982); R.W. Robinett and J.L. Rosner, ibid 25 3036 (1982); ibid **D26** 2396 (1982) P. Langacker, R. W. Robinett, and J.L. Rosner, Phys. Rev. **D30**, 1470 (1984).
- [2] M. Green and J. Schwarz, Phys. Lett. **149B**, 117(1984); Phys. Lett. **151B**,21(1985); D. Gross et al., Phys. Rev. Lett. **54**, 502 (1985); E. Witten, Phys. Lett. **155B** 1551 (1985); Nucl. Phys. **B258** 75 (1985); P. Candelas et al., ibid **B258** 46 (1985); M. Dine et al., Nucl. Phys. **B259**, 549 (1985); J. Ellis et. al., CERN Report CERN-TH-4350/86 (1986; unpublished); J.D. Breit, B.A. Ovrut, and G.C. Segr'e, Phys. Lett. **158B**, 33 (1985); P. Candelas et al., Nucl. Phys. **B258**, 46 (1985); S. Cecotti et. al., ibid **156B**, 318 (1985).
- [3] R. N. Mohapatra and A. Rain Phys. Rev. Lett. **76**, 3490 (1996).
- [4] For a review of composite vector bosons see B. Schrempp, Proceedings of the 23rd International Conference on High Energy Physics, Berkeley (World Scientific, Singapore 1987); see also U. Baur et al., Phys. Rev. **D35**, 297 (1987); M. Kuroda et al., Nucl. Phys. **B261**, 432 (1985).
- [5] A. Abulencia, et al., Phys. Rev. Lett. **96** 211801 (2003).
- [6] M. Malberti, New trends in high energy physics, (2008).
- [7] M. Singer, J.W.F. Valle, and J. Schechter, Phys. Rev. **D22**, 738 (1980); J. Schechter and Y. Ueda, Phys. Rev. **D8**, 484 (1973); P. Langacker and G. Segre, Phys. Rev. Lett. **39**, 259 (1977); H. Fritzsch and P. Minkowski, Phys. Lett. **63B**, 99 (1976); B.W. Lee and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **38**, 1237 (1977).
- [8] P. Langacker and Ming-xin Luo, Phys. Rev. **D44**, 817 (1991).
- [9] P. H. Frampton and Daniel Ng, Phys. Rev. **D45**, 4240 (1991 ).

- [10] I. Beltrami et al., Phys. Lett. **B 194**, 326 (1987)
- [11] M.B. Tully and C.G. Joshi, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 5593, (1998).
- [12] L. Willmann et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 49, (1999).
- [13] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. **D46**, 410 (1992).
- [14] P. H. Frampton, Phys. Rev. Lett. **69**, 2889 (1992)
- [15] J.C. Montero, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. **D47**, 2918 (1993).
- [16] V. Pleitez and D. Tonasee, Phys. Rev. **D48**, 2353 (1993)
- [17] Daniel Ng, Phys. Rev. **D49**, 4805 (1994)
- [18] G. Tavares-Velasco, J.J. Toscano, Phys. Rev. **D65**, 013005 (2001).
- [19] M.A. Pérez, G. Tavares-Velasco and J.J. Toscano, Phys. Rev. **D69**, 115004 (2004).
- [20] R. A. Diaz, R. Martinez, and F. Ochoa, Phys. Rev. **D72**, 035018 (2005).
- [21] P. Langacker, arXiv:0801.1345v3 [hep-ph], (2009).
- [22] K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), JPG **37**, 075021, (2010).
- [23] Salam, A., in Elementary Particle Physics (Nobel Symp. N°8), ed. N. Svartholm, Almqvist and Wilsell, Stockholm (1968).
- [24] Weinberg, S., Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [25] G. Arnison et al., Phys. Lett. **122B**, 103 (1983).
- [26] G. Arnison et al., Phys. Lett. **126B**, 398 (1983).
- [27] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [28] R. Shaw, "The Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles", Cambridge University Thesis, 1955.
- [29] P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **12**, 132 (1964).
- [30] 't Hooft. G , Nucl. Phys. **B61**, 445, (1973).
- [31] J. M. Butterworth and A. R. Davison, Phys. Rev. Lett. **100**, 242001 (2008).

- [32] S. Tomonaga and J.R. Oppenheimer, Phys. Rev. **74**, 224 (1948).
- [33] R.P. Feynman, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [34] J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948).
- [35] E. Fermi, Zeitschrift fur Physik **88**, 161 (1934).
- [36] M. Gell-Mann, Phys. Rev. Lett. **12**, 155 (1964).
- [37] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
- [38] T.D. Lee, C. N. Yang., Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
- [39] C.S. Wu, E. Ambler, R.W. Hayward, D.D. Hoppes, R. P. Hudson., Phys. Rev. **105**, 1413, (1957).
- [40] Dirac, P. A. M., Proc. Roy. Soc. (London) **A117**, 610 (1928).
- [41] E. Noether, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gottingen p. 235 (1918).
- [42] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [43] R.N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [44] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. **127** (1962) 965.
- [45] Nambu Y., Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960)
- [46] Nambu Y. and G. Jona-Lasinio , Phys. Rev. Lett. **122**, 345 (1961).
- [47] J.Goldstone, Nuovo Cimento 19 (1961) 15.
- [48] P.W. Higgs, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [49] T.W.B. Kibble, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).
- [50] ALEPH Collaboration, D. Decamp et al., Phys. Rep. **216** (1992) 253; DELPHI Collaboration, P. Abreu et al., Phys. Lett. **B274** (1992) 230; L3 Collaboration, O. Adriani et al., Phys. Rep. **236** (1993) 1.
- [51] L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory (1980).
- [52] V. Rubakov, Classical Theory of Gauge Fields, (1999)

- [53] Abers, E. S and B. W, Lee, Physics Reports **9**, 1 (1973).
- [54] C. Quigg, Gauge theories of the strong, weak and electromagnetic interactions, (1997).
- [55] F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, (2004).
- [56] W. Greiner, Gauge Theory of Weak Interactions, (2000).