UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

OPTIMIZACION NO DIFERENCIABLE

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADEMICO DE
MAGISTER EN MATEMATICAS

HECTOR CARLOS GUIMARAY HUERTA

LIMA - PERU

1989

INDICE

CAPITULO I: PRELIMINARES

CAPITULO II: SUBDIFERENCIALES

PROLOGO

Muchos problemas de optimización de investigación operativa, computación, ingeniería y ciencias no son regulares, esto es: incluyen funciones no diferenciables. Estos problemas no se dejan resolver por los algoritmos clásicos de la optimización matemática, que fueron elaborados a partir de 1950.

La necesidad de crear nuevos métodos, para resolver estos problemas, condujo al desarrollo del campo de la optimización no diferenciable, que es muy reciente y su conocimiento se inicia entre 1975 y 1980.

Este trabajo se ha realizado en el contexto general de los espacios topológicos vectoriales dándose un sólido conocimiento de los aspectos principales del análisis convexo.

En el caso de funciones convexas el concepto de subdiferenciabilidad constituye una generalización de diferenciabilidad, para cuya ilustración se muestran los subdiferenciales de algunas funciones.

Consideramos las funciones conjugadas que proporcionan una útil herramienta para investigar propiedades de conjuntos convexos y funciones convexas, presentándose así la teoría de dualidad y sus aplicaciones.

Posteriormente, tratamos la continuidad superior de la correspondencia $\partial_{\varepsilon} f$, la cual nos permite presentar el método de planos cortantes con subgradientes.

Finalmente, deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Eugen Blum R. por el asesoramiento dado, igualmente al CONCYTEC por el apoyo económico brindado, contribuyendo así al desarrollo de la ciencia en nuestro país.

Héctor Carlos Guimaray Huerta

Lima,29 de Diciembre de 1989.

PROLOGUE

Many problems of operative investigation optimization, computation, engineering and science are not regulars, that is: include no differentiable functions. Those problems don't allowing themselves to solve for the classic algorithms of the mathematic optimization, that were elaborate since 1950. The necessity of creating new methods, for solving those problems, conduced to the development of the no differentiable optimization field, that is very recent and its knowledge begins between 1975 and 1980.

This work has been done in the general context of the vector topological spaces with a solid knowledge of the main aspects of the convex analysis.

In the case of convex functions the concept of subdifferentiability constitutes a generalization of differentiability, for whose ilustration we have shown the subdifferentials of some functions. We consider the conjugate functions that provide a useful tool for investigating properties of convex sets and convex functions, which gives so the duality theory and its applications.

Later, we treat the upper continuity of the correspondence $\partial_{\varepsilon} f$, which allows us to give the cutting hyperplane method with subgradients.

Finally, I wish to express my gratitude to Dr. Eugen Blum for suggestions constructive and a careful reading of manuscript. Thanks are also due to CONCYTEC for the economic support, contributing so to the development of the science in our country.

Héctor Carlos Guimaray Huerta

Lima, 29 de Diciembre de 1989.

CAPITULO I

PRELIMINARES

1.1 FUNCIONES PROPIAS Y EL ESPACIO DUAL TOPOLOGICO

Definición. El dominio efectivo de una función

$$f : X \rightarrow \overline{R} \quad \text{es}$$

$\mathrm{dom} f = \{ x \in X / f(x) < \infty \}$

Notación. Sean $f_k: X \rightarrow \overline{R}$; $k = 1,2,\ldots, n$. Luego,

Denotamos $x \in \sum_{k=1}^{n} \mathrm{dom}\, f_k$ si

$x_k \in \mathrm{dom}\, f_k$; $k = 1,2,\ldots,n$ para algún $\sum_{k=1}^{n} x_k = X$.

Una función $f: X \rightarrow \overline{R}$ se llama función propia si

$-\infty < f(x)\ \forall x \in X$ y $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$.

Siendo X un espacio topológico vectorial se tiene el espacio dual topológico :

$X^* = \{ x^* : X \rightarrow R / x^* \text{ es lineal y contínua} \}$.

Además se considera la función

$\langle , \rangle : X^* x X \to R$ donde $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$

la cual es bilineal y contínua respecto a las topologías $\mathcal{Z}(X^*,X)$ y $\mathcal{Z}(X,X^*)$.

La primera topología, también la denotamos W^*.

Si X es un espacio convexo entonces (X^*,X) es un par simétrico de espacios mutuamente duales.

1.2 EL TEOREMA DE BANACH-ALAOGLU

Definición. Sean X un espacio topológico vectorial, $A \subset X$. Luego:

$A^\circ = \{ x^* \in X^* / \langle x^*, x \rangle \leq 1 \ \forall \ x \in A \}$ se llama el polar de A.

Teorema de Banach-Alaoglu. Sea V una vecindad de θ en un espacio topológico vectorial X. Entonces V°, el polar de V, es $\mathcal{Z}(X^*,X)$-compacto.

Propiedad. Sean $(X, \|.\|)$ un espacio normado, X^* el espacio dual de X. Luego : $(X^*, \|.\|_*)$ es un espacio normado, donde:

$$\|x^*\|_* = \operatorname*{Sup}_{\|x\| = 1} |\langle x^*, x \rangle| = \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leq 1} |\langle x^*, x \rangle| =$$

$$= \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{|\langle x^*, x \rangle|}{\|x\|} .$$

Siendo X e Y espacios topológicos vectoriales y $\varphi : X \to Y$ una función lineal y continua, definimos $x \mapsto \varphi x$.

La función transpuesta $\varphi^*: Y^* \to X^*$

$$y^* \mapsto \varphi^* y^* = y^* \circ \varphi$$

De donde:

$\langle \varphi^* y^*, x \rangle = \langle y^* \circ \varphi, x \rangle \ \forall\ x \in X.$

1.3 EL TEOREMA DE SEPARACION

Teorema de Separación. Sean A,B conjuntos convexos no vacíos en un espacio topológico vectorial real X donde int A $\neq$ 0. Luego, si int $A \cap B = \emptyset$ entonces existen $\Lambda \in X^*$ no trivial y $\gamma \in R$ tal que:

$$\Lambda x \leq \gamma \leq \Lambda y \quad \forall \quad x \in A \quad e \quad y \in B.$$

Más aún, si B es un subespacio afín entonces podemos elegir $\Lambda \in X^*$ y $\gamma \in R$ de tal modo que se cumple la igualdad en la segunda parte.

1.4 FUNCION GÂTEAUX DIFERENCIABLE

Definición. Sean X un espacio vectorial real y $f: X \to \bar{R}$ una función. Luego:

$f'(x;u) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} [f(x+\lambda u) - f(x)]$, si existe, se llama derivada direccional de f en x en la dirección u.

Si f es convexa dicha expresión tiene límite, el cual puede ser $\pm\infty$; pues si denotamos $h(\lambda) = \lambda^{-1}[f(x+\lambda u) - f(x)]$ se tiene que h es no decreciente en $\langle 0,\infty\rangle$, de donde se deduce la existencia del límite.

Por otra parte, siendo f continua en $x\in\text{dom}f$, entonces $f'(x;u)\in R\ \forall u\in X$.

Cuando X es un espacio topológico vectorial y existe $f'(x)\in X^*$ tal que:

$f'(x;u) = \langle f'(x),u\rangle\ \forall u\in X$ entonces decimos que f es Gateaux diferenciable, y $f'(x)$ se llama derivada de Gâteaux en x.

1.5 FUNCIONES INFERIOR Y SUPERIORMENTE SEMICONTINUAS

Definición. Sean X un espacio topológico, $x\in X$. Luego, se dice que $f: X\to\bar{R}$ es inferiormente semicontinua en x si se cumple uno de los enunciados:

i) $f(x)<\infty$ y $\forall\varepsilon>0$ existe una vecindad V de x tal que $f(y)\geq f(x)-\varepsilon\ \forall y\in V$.

ii) $f(x)=\infty$ y $\forall\ \varepsilon>0$ existe una vecindad V de x tal que $f(y)\geq\varepsilon\ \forall y\in V$.

Decimos que f es inferiormente semicontinua sobre X si lo es en cada $x\in X$.

Proposición. Sean X un espacio topológico, $f: X \to \bar{R}$ una función. Luego, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) f es inferiormente semicontinua sobre X.

ii) $\{x \in X / f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado $\forall \alpha \in R$

iii) $\underline{\lim}_{y \to x} f(y) \geq f(x) \quad \forall x \in X$.

Definición. Sea X un espacio topológico. Luego, se dice que $f: X \to \bar{R}$ es superiormente semicontinua si $-f$ es inferiormente semicontínua.

Proposición. Sean X un espacio topológico, $f: X \to \bar{R}$ una función. Luego, f es superiormente semicontínua si y solo si $\overline{\lim}_{y \to x} f(y) \leq f(x)$ $\forall x \in X$.

Teorema de Weierstrass. Una función superiormente semicontinua f dada sobre un espacio topológico X alcanza su máximo sobre todo subconjunto compacto del espacio X.

Propiedad. Toda función convexa propia sobre un espacio topológico vectorial finito dimensional es contínua sobre el interior de su dominio efectivo.

1.6 EL TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

Siendo T un espacio compacto, consideramos B(T) la σ-álgebra de Borel en T. Ahora, si u es una medida de Borel en T definimos u^+, u^-: $B(T) \longrightarrow R$ donde:

$u^+(A) = \sup\{u(B)/B\subset A,\ B\in B(T)\}$

$u^-(A) = -\inf\{u(B)/B\subset A,\ B\in B(T)\}$.

Entonces u^+, u^- son también medidas (no negativas) de Borel en T.

Además:

$u = u^+ - u^-$

u^+ $[u^-]$ se llama la parte positiva [negativa] de u.

La medida no negativa de Borel en T:

$|u| = u^+ + u^-$

Se llama la variación total de u.

Decimos que la medida de Borel u es soportada en un conjunto cerrado A si $|u|(B) = 0$, $\forall B \in B(T)$ con $A \cap B = \emptyset$.

Una medida de Borel u es regular si $\forall A\in B(T)$ y $\varepsilon > 0$ existen conjuntos $B, C\in B(T)$ donde $B\subset A\subset C$, tal que $|u|(A\setminus B) < \varepsilon$, $|u|(C\setminus A) < \varepsilon$.

El espacio $C_n(T)$

Sea T un espacio compacto. Luego, consideramos el espacio:

$C_n(T) = \{ x:T \to R^n / x$ es contínua $\}$

dotado con la norma

$$||x|| = \underset{t\in T}{\text{Máx}} |x(t)| \ , \text{ donde } |x(t)| = (\sum_{k=1}^{n} x_k(t)^2)^{1/2}$$

Denotamos:

$$T_x^+ = \{ t\in T / x(t) = ||x|| \}$$

$$T_x^- = \{ t\in T / x(t) = -||x|| \}$$

Evidentemente T_x^+ y T_x^- son cerrados.

Ahora, sea u una medida de Borel en T, $\alpha \in C(T)$.

Entonces, el límite

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\varepsilon u(\{ t\in T / k\varepsilon \leq \alpha(t) < (k+1)\varepsilon \}) =$$

$$\int_T \alpha(t) \, du$$

existe y se llama la integral de la función α con respecto a la medida u.

El siguiente teorema dá una caracterización del espacio dual $C(T)^*$:

<u>Teorema de Representación de Riesz</u>. Para todo - $x^* \in C(T)^*$ existe una única medida regular de Borel u en T tal que:

$$\langle x^*, x \rangle = \int_T x(t) du \quad \forall \ x \in C(T)$$

Además, se cumple

$$\|x^*\| = \int_T d|u| = |u|(T).$$

<u>Proposición</u>. Sean T un espacio compacto de Hausdorff, $f: C(T) \to R$ donde $f(x) = \underset{t \in T}{\text{Máx}}\, x(t)$

Luego, f es convexa, homogénea y finita.

Prueba:

Veamos que f es convexa:

Sean $x, y \in C(T)$, $\lambda \in [0,1]$. Luego:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \underset{t \in T}{\text{Máx}} [\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)]$$

$$\leq \lambda \underset{t \in T}{\text{Máx}}\, x(t) + (1-\lambda)\underset{t \in T}{\text{Máx}}\, y(t)$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Ahora, veamos que f es homogénea:

Se tiene que $f(0) = 0$.

Además, siendo $x \in C(T)$, $\lambda > 0$ tenemos:

$$f(\lambda x) = \underset{t \in T}{\text{Máx}}\, \lambda x(t) = \lambda \underset{t \in T}{\text{Máx}}\, x(t) = \lambda f(x)$$

Finalmente, puesto que T es compacto y x contínua se deduce que f es finita.

1.7 TOPOLOGIA DE MACKEY

Sean X un espacio vetorial, $A \subset X$. Luego:

i) Si A es convexo y $\lambda A \subset A$ $\forall \lambda$ con $|\lambda|<1$, entonces decimos que A es absolutamente convexo.

ii) A es absorbente, si $\forall x \in X$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$.

Siendo $(X,\mathcal{T})$ un espacio convexo, $A \subset X$ entonces A°, el polar de A, es absolutamente convexo.
Más aún, A es débilmente acotado si y solo si A° es absorbente.
Ahora, sea (X,X^*) un par dual de espacios convexos.
Consideramos una familia M de subconjuntos débilmente acotados de X. Luego, los conjuntos A° donde de $A \in M$ son absolutamente convexos y absorbentes.
Por esta razón existe en X^* una topología menos fina $\mathcal{T}^*$, en la cual los conjuntos A°, $A \in M$, son vecindades.
Los conjuntos de la forma:

$$\varepsilon \bigcap_{k=1}^{n} A_k^\circ \quad \text{donde } A_k \in M,\ \varepsilon > 0$$

constituyen una base de vecindades en $\mathcal{T}^*$.
Las topologías generadas de esta manera se llaman topologías polares. La topología polar más fina, llamada también topología fuerte en X^*, se

obtiene eligiendo como M la familia de todos los subconjuntos débilmente acotados de X.

Esta topología la denotamos por $\beta(X^*,X)$.

En la topología polar $\lim\limits_{k \to \infty} x_k^* = x^*$ significa

$\lim\limits_{k \to \infty} \langle x_k^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle$, uniformemente en los conjuntos $A \in M$.

Por esta razón, τ^* se llama la topología de la M-convergencia (uniforme).

Teorema. Sean (X,Γ) un espacio topológico vectorial con el espacio dual X^* y (X,τ) un espacio convexo. Luego: (X,τ) tiene X^* como espacio dual si y solo si τ es una topología de la M-convergencia, donde M es una familia de subconjuntos absolutamente convexos y $\mathcal{T}(X^*,X)$-compactos de X^*.

Existe en X una topología más fina que tiene la propiedad del teorema precedente: la topología de la M-convergencia, donde M es la familia de todos los subconjuntos absolutamente convexos y $\mathcal{T}(X^*,X)$-compactos. Esta topología se llama topología de Mackey y se denota $t(X,X^*)$.

Naturalmente $t(X,X^*)$ es menos fina que la topología polar más fina.

Se tiene que $\mathcal{T}(X,X^*) \subset \Gamma$. Más aún :

$$\tau(X,X^*) \subset \Upsilon \subset t(X,X^*) \subset \beta\,(X,X^*).$$

1.8 CORRESPONDENCIAS INFERIOR Y SUPERIORMENTE CONTINUAS.

Definición. Sean X, Y espacios topológicos, $H: X \to Y$ una correspondencia y $\hat{x} \in X$. Luego, decimos que:

a) H es inferiormente contínua en $\hat{x}$, si $\forall$ abierto $V \subset Y$ con $H(\hat{x}) \cap V \neq \emptyset$ existe una vecindad U de $\hat{x}$ tal que: $H(x) \cap V \neq \emptyset \ \forall\, x \in U$.

b) H es superiormente contínua en $\hat{x}$, si $\forall$ abierto $V \subset Y$ con $H(\hat{x}) \subset V$ existe una vecindad U de $\hat{x}$ tal que $H(x) \subset V \ \forall\, x \in U$.

c) H es contínua en $\hat{x}$, si H es inferiormente y superiormente contínua en $\hat{x}$.

d) H es cerrada en $\hat{x}$, si $\forall\, \hat{y} \notin H\,(\hat{x})$ existen vecindades U de $\hat{x}$ y V de $\hat{y}$ tal que $H(x) \cap V = \emptyset \ \forall\, x \in U$.

Proposición. Sean X,Y espacios topológicos, $H: X \to Y$ una correspondencia y $\hat{x} \in X$.

Consideremos la propiedad:

$$(*) \begin{cases} x_k \longrightarrow \hat{x} \\ y_k \in H\,(x_k),\ y_k \longrightarrow \hat{y} \\ \text{implica que } \hat{y} \in H(\hat{x}) \end{cases}$$

Luego, H es cerrada en $\hat{x}$ si y solo si (*) se cumple.

<u>Proposición</u>. Sean X,Y espacios topológicos, $H: X \to Y$ una correspondencia cerrada en $\hat{x} \in X$. Luego, si existen una vecindad U de $\hat{x}$ y un conjunto compacto $K \subset Y$ tal que: $H(x) \subset K \ \forall x \in U$ entonces H es superiormente contínua en $\hat{x}$.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio compacto y $H: X \to Y$ una correspondencia superiormente contínua donde H(x) es compacto $\forall x \in X$. Entonces H(X) es también compacto.

1.9 <u>ESPACIOS UNIFORMEMENTE CONVEXOS</u>

<u>Definición</u>

i) El espacio normado real $(X, \|.\|)$ es estrictamente normado si $x,y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces existe $\lambda > 0$ con $x = \lambda y$.

ii) El espacio normado real $(X, \|.\|)$ es uniformemente convexo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si:

$x,y \in X$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon$

Entonces: $1/2 \ \|x+y\| \leq 1 - \delta$.

<u>Propiedad</u>. Todo espacio uniformemente convexo es estrictamente normado.

<u>Teorema</u>. Sean $(X, \|.\|)$ un espacio normado real, $C \subset X$ convexo y cerrado, y $a \in X$.

Luego :

i) Si X es estrictamente normado entonces $P(a)$: $\min\limits_{x \in C} \|x-a\|$ tiene a lo más una solución.

ii) Si X es un espacio de Banach uniformemente convexo entonces $P(a)$ tiene una solución. De acuerdo con i) es única.

<u>Condición necesaria y suficiente de proyección</u>.

Sean $(X, \langle\ \rangle)$ un espacio de Hilbert real, $C \subset X$ convexo y cerrado e $Y \notin C$. Luego z es la proyección de y sobre C si y solo si $z \in C$, $\langle y-z, x-z \rangle \leq 0$ $\forall\ x \in C$.

En particular, si $y = 0$ se tiene que z es la proyección de 0 sobre C si y solo si $z \in C$, $\|z\|^2 \leq \langle z, x \rangle$ $\forall\ x \in C$.

CAPITULO II

SUB-DIFERENCIALES

2.1 EXISTENCIA DEL SUBDIFERENCIAL

Definición. Sean X un espacio tpológico vectorial real, $f: X \to \bar{R}$ una función, $x \in X$.

Luego:

$\partial f(x) = \{x^* \in X^* / f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle \ \forall y \in X\}$

Se llama subdiferencial de la función f en el punto x.

Un elemento de $\partial f(x)$ es llamado un subgradiente de f en x.

Se dice que f es subdiferenciable en x.

Si $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Ejemplo:

Sea $f: R^n \longrightarrow R$ una función convexa de clase C^1, entonces $\nabla f(x) \in \partial f(x) \quad \forall x \in R^n$.

Veamos:

Sea $u = y-x$. Luego, para $\lambda \in \langle 0,1]$:

$$\begin{aligned} f(x+\lambda u) &= f(x+\lambda(y-x)) \\ &= f(\lambda y+(1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) \\ &= \lambda f(y) + f(x) - \lambda f(x). \end{aligned}$$

De donde:

$\lambda^{-1}[f(x+\lambda u)-f(x)] \leq f(y) - f(x)$

Tomando límite cuando $\lambda \downarrow 0$:

$f'(x;u) \leq f(y) - f(x)$

Pero $f'(x;u) = \nabla f(x).u$. Luego:

$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x).(y-x) \ \forall y \in R^n$.

Posteriormente, en el Teorema del Cap. II, 2.5. se verá que, en este caso, se tiene: $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

<u>Teorema</u>. Sea X un espacio convexo, $f : X \rightarrow \bar{R}$ una función convexa propia. Luego, si f es continua en $x \in \operatorname{dom} f$ entonces $\partial f(x)$ es no vacío, convexo y W^*-compacto.

Demostración:

Tenemos que el epígrafo de f:

$\operatorname{epi} f = \{(y,r) \in X \times R / f(y) \leq r\}$

es no vacío y convexo.

Pues existe un elemento $(x,f(x)) \in \operatorname{epi} f$ debido a que f es propia.

Es convexo, ya que f es convexa.

Veamos que $\partial f(x)$ es no vacío:

$\operatorname{Int} \operatorname{epi} f \neq \emptyset$, pues un conjunto abierto en epif es

$V \times \langle M, \infty \rangle$ donde V es una vecindad de x para la cual $f(V) \leq M$.

Por otra parte, $\text{intepif} \cap \{(x, f(x))\} = \emptyset$. Luego, por el teorema de separación, existen $(\Lambda, c) \in X^* \times R$ no trivial y $\gamma \in R$ tal que:

$(\Lambda, c)(y, r) \leq \gamma \leq (\Lambda, c)(x, f(x))$

O sea:

$\Lambda y + cr \leq \Lambda x + cf(x) \quad \forall (y, r) \in \text{epif} \quad (*)$

Haciendo y = x tenemos:

$c(r - f(x)) \leq 0$. De donde $c \leq 0$.

Asumamos que c = 0, entonces de (*):

$\Lambda(y - x) \leq 0 \quad \forall y \in \text{domf}$.

Pero $x \in$ int domf, pues f es contínua y $f(x) < \infty$, entonces $\Lambda = 0$, lo cual contradice que $(\Lambda, c) \neq 0$.

Por lo tanto $c < 0$.

Ahora, considerando (y, f(y)) en (*) tenemos:

$\Lambda y + cf(y) \leq \Lambda x + cf(x)$

De donde:

$f(y) \geq f(x) + c^{-1} \Lambda(x - y)$

$f(y) \geq f(x) - c^{-1} \Lambda(y - x) \quad \forall y \in \text{dom } f$

Más aún $\forall y \in X$.

Luego:

$f(y) \geq f(x) + \langle -c^{-1}\Lambda, y - x \rangle \quad \forall y \in X$

De donde $-c^{-1}\Lambda \in \partial f(x)$

Es decir, $\partial f(x)$ es no vacío.

Ahora veamos la convexidad:

Se tiene que:

$$E_y = \{ x^* \in X^* / \langle x^*, y-x \rangle \leq f(y)-f(x) \}$$

es un semiespacio y W^*-cerrado.

Por otra parte:

$$\partial f(x) = \{ x^* \in X^* / f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle \ \forall y \in X \}$$
$$= \bigcap_{y \in X} E_y. \quad \text{Luego:}$$

$\partial f(x)$ es convexo y W^*-cerrado.

Finalmente, veamos que $\partial f(x)$ es W^*-compacto:

$V = \{ v \in X / f(v+x)-f(x) < 1 \}$ es una vecindad de θ.

El polar de V es:

$$V^\circ = \{ x^* \in X^* / \langle x^*, v \rangle \leq 1, \ \forall v \in V \}$$

Sea $x^* \in \partial f(x) \implies$

$\langle x^*, y-x \rangle \leq f(y) - f(x) \ \forall y \in X$

De donde, considerando $y = v+x$:

$\langle x^*, v \rangle \leq f(v+x)-f(x) < 1 \ \forall v \in V.$

Luego, $\partial f(x) \subset V^\circ$. Pero V° es W^*-compacto, en consecuencia $\partial f(x)$ también lo es.

2.2 SUBDIFERENCIAL DE LA SUMA DE FUNCIONES

Propiedad. Sea X un espacio convexo y $f, g : X \to \overline{R}$ funciones confexas propias. Luego, si f es contínua en algún punto de $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ entonces: $\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x) \ \forall x \in X.$

Prueba:

De la definición de subdiferencial se sigue directamente que:

$\partial(f+\xi)(x) \supset \partial f(x) + \partial\xi(x)$

Veamos la otra inclusión:

Sea $x^* \in \partial(f+\xi)(x) \implies$

$(f+\xi)(y) \geq (f+\xi)(x) + \langle x^*, y-x \rangle \ \forall\ y \in X.$

Consideremos $y = z+x \implies$

$(f+\xi)(z+x) \geq (f+\xi)(x) + \langle x^*, z \rangle \ \forall\ z \in X.$

De donde:

$f(z+x) - f(x) - \langle x^*, z \rangle + \xi(z+x) - \xi(x) \geq 0.$

Definamos las funciones f_1, ξ_1 tales que:

$f_1(z) = f(z+x) - f(x) - \langle x^*, z \rangle$

$\xi_1(z) = \xi(z+x) - \xi(x).$

Entonces:

$(f_1 + \xi_1)(z) \geq 0 \ \forall\ z \in X.$

Debe observarse que $f_1(\theta) = \xi_1(\theta) = 0$.

Por otra parte, siendo:

$\mathrm{epi} f_1 = \{(u,r) \in X \times R / f_1(u) \leq r\}$

$K = \{(v,s) \in X \times R / \ s \leq -\xi_1(v)\}$

Se sigue que $\mathrm{int\,epi} f_1 \cap K = \emptyset$.

Pues, sea $(u,r) \in \mathrm{epi} f_1 \cap K$ entonces:

$-\xi_1(u) \leq f_1(u) \leq r \leq -\xi_1(u)$. De donde:

$f_1(u) = r$; $\implies$

$\mathrm{epi} f_1 \cap K \subset \mathrm{fr}(\mathrm{epi} f_1)$.

Luego, por el teorema de separación, existe (Λ, c) $\in X^* \times R$ no trivial y $\gamma \in R$ tal que:

$(\Lambda,c)(u,r) \leq \gamma \leq (\Lambda,c)(v,s)\ \forall (u,r) \in \operatorname{epi} f_1$,

$(v,s) \in K$ (*).

Debe observarse que $\gamma = 0$, pues $(\theta,0) \in \operatorname{epi} f_1 \cap K$.

Se tiene que:

$\Lambda u + cr \leq \Lambda v + cs\ \ \forall (u,r) \in \operatorname{epi} f_1, (v,s) \in K$.

Luego, eligiendo $u = v = \theta$, $s = 0$ obtenemos:

$cr \leq 0 \quad \forall\ r \geq 0$

De donde $c \leq 0$.

Asumamos que $c = 0$, entonces:

$\Lambda(u-v) \leq 0\ \forall\ u \in \operatorname{dom} f_1,\ v \in \operatorname{dom} \xi_1$.

En particular:

$\Lambda u \leq 0 \quad \forall\ u \in \operatorname{dom} f_1$, pues $\theta \in \operatorname{dom} \xi_1$

Pero $\operatorname{dom} f_1$ es una vecindad de θ, pues f_1 es contínua en θ y $f(\theta) = 0$, entonces $\Lambda = 0$, lo cual contradice que $(\Lambda,c) \neq 0$.

Por lo tanto, $c < 0$.

De (*), considerando que $\gamma = 0$, tenemos:

$\Lambda u + cr \leq 0 \leq \Lambda v + cs$

De donde:

$r \geq -c^{-1}\Lambda u, \quad -s \geq c^{-1}\Lambda v.$

Denotemos $\varphi = -c^{-1}\Lambda$. Luego :

$r \geq \varphi u\ \forall\ (u,r) \in \operatorname{epi} f_1$

$-s \geq -\varphi v\ \ \forall\ (v,s) \in K$.

En particular, para $(u, f_1(u)) \in \operatorname{epi} f_1, (v - \xi_1(v)) \in K$.

Se tiene:

$f_1(u) \geq \varphi u$.

$\xi_1(v) \geq -\varphi v.$

Luego, considerando las definiciones de f_1, ξ_1:

$f(u+x)-f(x) - \langle x^*, u\rangle \geq \varphi u.$

$\xi(v+x)-\xi(x) \geq -\varphi v.$

Es decir:

$f(y) \geq f(x) + \langle x^*+\varphi, y-x\rangle \; \forall \; y \in X$

$\xi(y) \geq \xi(x) + \langle -\varphi, y-x\rangle \; \forall \; y \in X.$

De donde:

$x^* + \varphi \in \partial f(x), -\varphi \in \partial\xi(x).$

En consecuencia:

$x^* \in \partial f(x) + \partial \xi(x).$

Siendo $f : X \longrightarrow \overline{R}$, de la definición de subdiferencial se deduce directamente que:

$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x) \; \forall \; x \in X$, donde $\lambda > 0$. Pues:

$x^* \in \partial(\lambda f)(x) \iff$

$\lambda f(y) \geq \lambda f(x) + \langle x^*, y-x\rangle \; \forall \; y \in X. \iff$

$f(y) \geq f(x) + \langle \frac{1}{\lambda}x^*, y-x\rangle \; \forall \; y \in X \iff$

$\frac{1}{\lambda}x^* \in \partial f(x) \iff$

$x^* \in \lambda \partial f(x).$

La igualdad también es válida para = 0, siempre que $\partial f(x) \neq \emptyset$.

3.3 SUBDIFERENCIAL DE LA FUNCION COMPOSICION

Teorema. Sean X e Y espacios convexos, $\varphi : X \longrightarrow Y$ una función lineal contínua. Luego, si

$f: Y \to \bar{R}$ es convexa, continua y finita en algún punto de $\varphi(X)$ entonces:

$$\partial(f o \varphi)(x) = \varphi^* \partial f(\varphi x) \; \forall \; x \in X.$$

Demostración:

Veamos que $\varphi^* \partial f(\varphi x) \subset \partial(f o \varphi)(x)$:

Sea: $\varphi^* y^* \in \varphi^* \; \partial f(\varphi x)$, donde $y^* \in \partial f(\varphi x)$

$\Rightarrow$

$f(y) \geq f(\varphi x) + \langle y^*, y - \varphi x \rangle \forall y \in Y$

De donde, considerando $y = \varphi z$:

$(f o \varphi)(z) \geq (f o \varphi)(x) + \langle y^*, \varphi z - \varphi x \rangle \; \forall \; z \in X.$

Por definición $\varphi^* y^* = y^* o \varphi$, entonces:

$\langle y^*, \varphi z - \varphi x \rangle = \langle \varphi^* y^*, z - x \rangle$

Luego:

$(f o \varphi)(z) \geq (f o \varphi)(x) + \langle \varphi^* y^*, z - x \rangle \forall z \in X$

$\Rightarrow$

$\varphi^* y^* \in \partial(f o \varphi)(x)$.

Ahora, veamos la otra inclusión:

Sea, $x^* \in \partial(f o \varphi)(x) \quad \Rightarrow$

$(f o \varphi)(z) \geq (f o \varphi)(x) + \langle x^*, z - x \rangle \forall z \in X.$

Consideremos:

$L = \{(\varphi z, (f o \varphi)(x) + \langle x^*, z - x \rangle) / z \in X \}$

$\quad = (0, (f o \varphi)(x) - \langle x^*, x \rangle) + \{ (\varphi z, \langle x^*, z \rangle) / z \in X \}$

Se tiene que:

$\hat{\varphi}: X \to Y x R$ definida por $\hat{\varphi} z = (\varphi z, \langle x^*, z \rangle)$

es lineal, luego:

$\hat{\varphi}(X) = \{ (\varphi z, \langle x^*, z \rangle) / z \in X \} = \hat{L}$

es un subespacio vectorial.

En consecuencia L es un subespacio afín en $Y\times R$; más aún, un conjunto convexo.

También, siendo f convexa se tiene que epif es convexo.

$\mathrm{Intepif} \neq \emptyset$, pues f es contínua en un punto $\varphi z \in \mathrm{domf}$.

Por otra parte:

$\mathrm{epif} \cap L \subset \mathrm{fr}\,(\mathrm{epif})$ (*)

Pues, sea $(\varphi z, r) \in \mathrm{epif} \cap L \Rightarrow$

$r = (f o \varphi)(x) + \langle x^*, z - x \rangle \leq (f o \varphi)(z) \leq r$

De donde:

$f(\varphi z) = r$. Es decir:

$(\varphi z, r) \in \mathrm{fr}(\mathrm{epif})$.

De (*) se sigue que $\mathrm{intepif} \cap L = \emptyset$.

Luego, por el teorema de separación y considerando que L es un subespacio afín, existe $(\Lambda, c) \in X^* \times R$ no trivial y $\gamma \in R$ tal que:

$(\Lambda, c)(u, r) \leq \gamma = (\Lambda, c)(v, s)$

O sea:

$\Lambda u + cr \leq \Lambda v + cs \quad \forall (u, r) \in \mathrm{epif},\ (v, s) \in L \ldots (I)$

Se tiene que:

$(\varphi \hat{z}, (f o \varphi)(x) + \langle x^*, \hat{z} - x \rangle) \in L$

Luego, haciendo $u = v = \varphi \hat{z}$ obtenemos de (I):

$c(r - s) \leq 0 \quad \forall r \in [\, f(\varphi \hat{z}), \infty \rangle$.

$\Rightarrow$

$c \leq 0.$

Asumamos que $c = 0$, entonces de (I) :

$\Lambda(u - \varphi\hat{z}) \leq 0 \ \forall u \in \text{dom} f.$

Pero $\varphi\hat{z} \in \text{int dom} f$, pues f es continua y $f(\varphi\hat{z}) < \infty$,

entonces $\Lambda = 0$, lo cual contradice que $(\Lambda, c) \neq 0$.

Luego, $c < 0$.

Por otra parte, se sabe que:

$\Lambda u + cr \leq \Lambda v + cs = \gamma \ \forall (u,r) \in \text{epi} f, \ \forall (v,s) \in L.$

De donde:

$\langle \Lambda, \varphi z \rangle + c\,[(f o \varphi)(x) + \langle x^*, z-x \rangle] = \gamma \quad z \in X.$

Sea $z = x \quad \Rightarrow$

$\langle \Lambda, \varphi x \rangle + c(f o \varphi)(x) = \gamma \quad \ldots(II)$

Luego:

$\langle \Lambda, \varphi z \rangle + c\,[(f o \varphi)(x) + \langle x^*, z-x \rangle] = \langle \Lambda, \varphi x \rangle +$
$c(f o \varphi)(x) \quad z \in X.$

$\Rightarrow$

$\langle \Lambda, \varphi(z-x) \rangle + c\langle x^*, z-x \rangle = 0 \quad z \in X.$

De donde:

$\langle \varphi^* \Lambda, z-x \rangle = \langle -cx^*, z-x \rangle \ \forall z \in X.$

$\Rightarrow$

$\varphi^* \Lambda = -cx^*$, o sea:

$\varphi^*(-c^{-1}\Lambda) = x^* \quad \ldots(III)$

De (I) y (II):

$\langle \Lambda, \varphi x \rangle + c(f o \varphi)(x) \geq \langle \Lambda, u \rangle + cf(u) \ \forall u \in \text{dom} f$

De donde:

$\langle -c^{-1}\Lambda, \varphi x \rangle - (f o \varphi)(x) \geq \langle -c^{-1}\Lambda, u \rangle - f(u)$

$\Longrightarrow$

$f(u) \geq (fo\,\varphi)(x) + \langle -c^{-1}\Lambda\,, u - \varphi x \rangle \;\forall\; u \in Y.$

$\Longrightarrow$

$-c^{-1}\Lambda \in \partial f(\varphi x)$

De donde debido a (III):

$x^* = \varphi^*(-c^{-1}\Lambda) \in \varphi^* \partial f(\varphi x)$.

Luego:

$\partial(fo\,\varphi)(x) \subset \varphi^* \partial f(\varphi x).$

Similarmente, siendo X e Y espacios convexos, $\varphi : X \longrightarrow Y$ Frechet diferenciable en $x \in X$ y $f: Y \rightarrow \bar{R}$ convexa, continua y finita en $\varphi(x)$ se obtiene:

$\partial(fo\,\varphi)(x) + \varphi'(x)^* \partial f(\varphi x).$ (Ver [9], pág. 212).

2.4 DERIVADA DIRECCIONAL EN TERMINOS DEL SUBDIFERENCIAL.

Teorema. Sea X un espacio convexo, $f : X \rightarrow \bar{R}$ una función convexa propia. Luego, si f es contínua en $x \in$ domf entonces:

$$f'(x;u) = \underset{x^* \in \partial f(x)}{\text{Máx}} \langle x^*, u \rangle \quad \forall\; u \in X.$$

Demostración:

Si $u = 0$ la expresión es evidente, puesto que $\partial f(x) \neq \emptyset$. Fijemos $u \neq 0$, y siendo la recta $L = \{ x + \lambda u / \lambda \in R \}$

consideremos:

$$\delta_L = \begin{cases} 0 & , \text{ si } y \in L \\ +\infty & , \text{ si } y \notin L. \end{cases}$$

Luego:

$\varphi \in \partial(f+\delta_L)(x) \iff$

$(f+\delta_L)(y) \geq (f+\delta_L)(x) + \langle \varphi, y-x \rangle \; \forall y \in X \iff$

$f(y) \geq f(x) + \langle \varphi, y-x \rangle \; \forall y \in L \iff$

$f(x+\lambda u) \geq f(x) + \langle \varphi, x+\lambda u-x \rangle \; \forall \lambda \in R \iff$

$f(x+\lambda u) \geq f(x) + \lambda \langle \varphi, u \rangle \; \forall \lambda \in R. \iff$

$-f'(x;-u) \leq \langle \varphi, u \rangle \leq f'(x;u), \; \varphi \in X^* \quad (*)$

Para la implicancia de retorno se tiene en cuenta que $h(\lambda) = \lambda^{-1}[f(x+\lambda u)-f(x)]$ es no decreciente en $\langle 0, \infty \rangle$.

De donde $\langle \varphi, u \rangle \leq f'(x;u) \; \forall \varphi \in \partial(f+\delta_L)(x)$

Luego: $\max\limits_{\varphi \in \partial(f+\delta_L)(x)} \langle \varphi, u \rangle \leq f'(x;u)$ ...(I)

Por otra parte, puesto que X es un espacio convexo, X^* separa puntos de X. Luego, existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\langle \Lambda, u \rangle \neq 0$.

En consecuencia, existe $\psi \in X^*$ donde:

$f'(x;u) = \langle \psi, u \rangle$ ...(II)

Además, se sabe que $-f'(x;-u) \leq f'(x;u)$, entonces ψ satisface (*), lo que implica que :
$\psi \in \partial(f+\delta_L)(x)$.

Por lo tanto, de (I) y (II):

$$f'(x;u) = \max_{\varphi \in \partial(f+\delta_L)(x)} \langle \varphi, u \rangle .$$

Teniendo en cuenta que δ_L es una función convexa propia y $x \in \operatorname{dom} \delta_L$ entonces de acuerdo al teorema del subdiferencial de la suma de funciones:

$$\partial(f+\delta_L)(x) = \partial f(x) + \partial\delta_L(x)$$
$$= \partial f(x) + Sp\ \{u\}^{\perp}$$

Luego:

$$f'(x;u) = \underset{x^*\in\partial f(x),\ y^*\in Sp\ \{u\}^{\perp}}{\text{Máx}} \langle x^* + y^*, u\rangle$$

Pero $\langle x^* + y^*, u\rangle = \langle x^*, u\rangle + \langle y^*, u\rangle = \langle x^*, u\rangle$

Por lo tanto:

$$f'(x;u) = \underset{x^*\in\partial f(x)}{\text{Máx}} \langle x^*, u\rangle \quad .$$

<u>Teorema</u>. Sean X un espacio convexo, Y un espacio compacto, φ: X x Y $\longrightarrow$ R una función donde $\varphi(.,y)$ es convexa $\forall y\in Y$ y $\varphi(x,.)$ es superiormente semicontínua en Y $\forall x\in X$.

Luego, si $f(x) = \underset{y\in Y}{\text{Sup}}\ \varphi(x,y)$ entonces :

$$\overline{\text{conv}}\ (\bigcup_{y\in R(x)} \partial_x\varphi(x,y)) \subset \partial f(x) \quad \forall\ x\in X$$

donde $R(x) = \{y\in Y/\ \varphi(x,y) = f(x)\}$.

Si $\varphi(\cdot,y)$ es continua en x $\forall y\in Y$ entonces:

$$\overline{\text{conv}}(\bigcup_{y\in R(x)} \partial x\ \varphi\ (x,y)) = \partial f(x).$$

La clausura es tomada en la topología $\mathcal{T}(X^*,X)$.

Demostración: Como $\varphi(x,.)$ es superiormente semicontinua e Y es compacto entonces, debido al teorema de Weierstrass del Cap. I. 1.5 , $\varphi(x,.)$ toma su máximo en Y. Por consiguiente $R(x) \neq \emptyset$ $\forall\, x \in R(x)$ y f es una función convexa de X en R.

Ahora, si $y \in R(x)$, $x^* \in \partial_x \varphi(x,y)$, entonces:

$$f(z) \geq \varphi(z,y) \geq \varphi(x,y) + \langle x^*, z-x \rangle \ \forall\, z \in X$$

$$= f(x) + \langle x^*, z-x \rangle \ \forall\, z \in X$$

$\Longrightarrow$

$x^* \in \partial f(x)$

$\Longrightarrow$

$$\bigcup_{y \in R(x)} \partial_x \varphi(x,y) \subset \partial f(x) .$$

Por otra parte, $\partial f(x)$ es convexo y $\tau(x^*,X)$-cerrado. Luego:

$$\overline{\mathrm{conv}}\Big(\bigcup_{y \in R(x)} \partial_x \varphi(x,y)\Big) \subset \partial f(x)$$

Consideremos ahora la hipótesis de que $\varphi(.,y)$ es continua en x $\forall\, y \in Y$:

Teniendo en cuenta que $\varphi(x,.)$ es superiormente semicontinua e Y es compacto se tiene que f es finita, en consecuencia propia. Más aún, f es contínua en x.

Entonces, $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Todos los conjuntos $\partial_x \varphi(x,y)$ son también no vacíos.

Denotemos $B = \overline{\mathrm{conv}}\ \Big(\bigcup_{y \in R(x)} \partial x\, \varphi(x,y)\Big)$.

Supongamos que existe $x^* \in \partial f(x)/B$:

Se tiene que B es convexo y $\tau(X^*,X)$-cerrado.

Luego por el teorema de separación, existen $u \in X$ no trivial, $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\sup_{z^* \in B} \langle z^*,u\rangle + \varepsilon \leq \langle x^*,u\rangle$$

Para $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ eligiendo $y_\lambda \in Y$ tal que $\varphi(x+\lambda u,y_\lambda) = f(x+\lambda u)$ y teniendo en cuenta que $x^* \in \partial f(x)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sup_{z^* \in B} \langle z^*,u\rangle + \varepsilon &\leq \langle x^*,u\rangle \\ &\leq \lambda^{-1}\left[f(x+\lambda u)-f(x)\right] \\ &\leq \lambda^{-1}\left[\varphi(x+\lambda u,y_\lambda)-\varphi(x,y_\lambda)\right] \quad \text{(I)}\end{aligned}$$

Por otra parte, $\varphi(.,y\quad)$ es convexa. Entonces:

$$\varphi(x+\lambda u,y_\lambda) \leq \lambda\varphi(x+u,y_\lambda)+(1-\lambda)\varphi(x,y_\lambda)$$

De ésto se deduce que:

$$f(x+\lambda u)-\lambda f(x+u) \leq (1-\lambda)\varphi(x,y_\lambda)\ \forall \lambda \in \langle 0,1\rangle$$

Más aún:

$$f(x+\lambda u)-\lambda f(x+u) \leq (1-\lambda)\varphi(x,y_\lambda) \leq (1-\lambda)f(x) \quad \forall \lambda \in \langle 0,1\rangle$$

Luego, para $\lambda \downarrow 0$ obtenemos:

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi(x,y_\lambda) = f(x) \quad \ldots\text{(II)}$$

Siendo y_0 un punto de acumulación de $\{y_\lambda\}$ y considerando que $\varphi(x,.)$ es superiormente semicontinua se tiene:

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi(x,y_\lambda) = \lim_{k \to \infty} \varphi(x,y_{\lambda_k}) \leq \varphi(x,y_0) \leq f(x) \ldots\text{(III)}$$

Luego, de (II) y (III) se deduce que:

$$\varphi(x,y_0) = f(x)$$

Es decir, $y_0 \in R(x)$.

Ahora, teniendo en cuenta (I) obtenemos:

$$\lambda^{-1}\left[\varphi(x+\lambda u,y_\lambda)-\varphi(x,y_\lambda)\right] \geq \sup_{z^*\in B}\langle z^*,u\rangle+\varepsilon$$

$$\geq \sup_{z^*\in\partial_x\varphi(x,y_0)}\langle z^*,u\rangle+\varepsilon$$

$$=\varphi'(x,y_0;u)+\varepsilon$$

$$\forall\,\lambda\in\langle 0,1\rangle$$

Entonces:

$$\varphi(x+\lambda u,y_\lambda)\geq\varphi(x,y_\lambda)+\lambda\left[\varphi'(x,y_0;u)+\varepsilon\right.$$

$$\forall\,\lambda\in\langle 0,1\rangle \quad \text{(IV)}$$

Elegimos $\lambda_1\in\langle 0,1\rangle$ tal que:

$$\lambda_1^{-1}\left[\varphi(x+\lambda_1 u,y_0)-\varphi(x,y_0)\right]\leq\varphi'(x,y_0;u)+\varepsilon/2$$

De ésto y de (IV) se obtiene para:

$$x+\lambda u=\lambda\lambda_1^{-1}(x+\lambda_1 u)+(1-\lambda\lambda_1^{-1})x,\quad 0<\lambda\leq\lambda_1 :$$

$$\lambda\lambda_1^{-1}\varphi(x+\lambda_1 u,y_\lambda)+(1-\lambda\lambda_1^{-1})\varphi(x,y_\lambda)$$

$$\geq\varphi(x+\lambda u,y_\lambda)$$

$$\geq\varphi(x,y_\lambda)+\lambda\left[\varphi'(x,y_0;u)+\varepsilon\right]$$

$$\geq\varphi(x,y_\lambda)+\lambda\left\{\lambda_1^{-1}\left[\varphi(x+\lambda_1 u,y_0)-\varphi(x,y_0)\right]+\varepsilon/2\right\}$$

De ésto se deduce que:

$$\varphi(x+\lambda_1 u,y_\lambda)\geq\varphi(x,y_\lambda)+\varphi(x+\lambda_1 u,y_0)-\varphi(x,y_0)+\lambda_1\varepsilon/2$$

Ahora, puesto que $\lim_{\lambda\downarrow 0}\varphi(x,y_\lambda)=\varphi(x,y_0)$ se tiene:

$$\overline{\lim_{\lambda \downarrow 0}}\, \varphi(x+\lambda_1 u,\ y_\lambda) \geq \varphi(x+\lambda_1 u, y_0) + \lambda_1\ \varepsilon/2$$

$$> \varphi(x+\lambda_1 u, y_0).$$

Esto significa que la función $\varphi(x+\lambda_1 u,.)$no es superiormente semicontinua en Y, lo que contradice la hipótesis del teorema.

Por lo tanto:

$$\overline{\text{conv}}\,(\bigcup_{y\in R(x)} \partial_x \varphi(x,y)) = \partial f(x).$$

2.5 GÂTEAUX DIFERENCIABILIDAD EN RELACION CON SUBDIFERENCIABILIDAD

Teorema. Sean X un espacio convexo, $f : X \to \overline{R}$ una función convexa. Luego:

i) Si f es Gâteaux diferenciable en $x\in X$ entonces, f es subdiferenciable en x donde $\partial f(x) = \{ f'(x) \}$.

ii) Si f es finita, continua y subdiferenciable en $x\in X$ tal que el subdiferencial consta de un sólo subgradiente entonces f es Gâteaux diferenciable en x donde $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

Demostración:

i) Siendo $y\in X$ consideremos $u = y-x$, entonces

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} h(\lambda) = f'(x;u)$$

donde $h(\lambda) = \lambda^{-1}[f(x+\lambda u)-f(x)]$ es no decreciente. Luego, para $\lambda = 1$:

$f(x+u)-f(x) \geq f'(x;u)$.

Puesto que f es Gâteaux diferenciable se tiene: $f(x+u)-f(x) \geq \langle f'(x),u\rangle$. De donde

$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x),y-x\rangle \ \forall\, y \in X$.

Entonces, f es subdiferenciable en x y

$f'(x) \in \partial f(x)$.

Veamos que $f'(x)$ es el único subgradiente:

Sea $x^* \in \partial f(x)$, entonces:

$f(x+\lambda u) \geq f(x) + \langle x^*, x+\lambda u-x\rangle \ \forall u \in X, \forall \lambda>0$.

De donde:

$\lambda^{-1}[f(x+\lambda u)-f(x)] \geq \langle x^*,u\rangle$

Tomando límite:

$f'(x;u) \geq \langle x^*,u\rangle \qquad \Longrightarrow$

$\langle f'(x)-x^*,u\rangle \geq 0 \ \forall\, u \in X$.

Por lo tanto $x^* = f'(x)$.

ii) Puesto que f es convexa existe la derivada direccional.

Luego, considerando que:

$$\lim_{\lambda \uparrow 0} h(\lambda) = -f'(x;-u) \leq f'(x;u) = \lim_{\lambda \downarrow 0} h(\lambda)$$

y que h es monótona, se deduce que:

$f(x) + \lambda f'(x;u) \leq f(x+\lambda u) \ \forall \lambda \in R \qquad (*)$

Siendo f convexa se tiene que epif es convexo.

Intepif $\neq \emptyset$, pues f es finita y continua en $\bar{x}\in X$.

Sea $L = \{(\bar{x},f(\bar{x}))+ \lambda(u,f'(\bar{x};u))/\lambda \in R\}$

una recta en XxR, entonces considerando (*) se deduce que intepif $\cap$ L = $\emptyset$.

Luego, por el teorema de separación y considerando que L es un subespacio afín, existe $(\Lambda ,c)\in X^*xR$ no trivial y $\gamma \in R$ tal que:

$\Lambda u+cr \leq \gamma = \Lambda v+cs \quad \forall (u,r)\in$ epif, $(v,s)\in L$ ..(I)

Se tiene que:

$(\bar{x},f(\bar{x}) \in$ epif $\cap$ L

Luego, haciendo $u = v = \bar{x}$, obtenemos de (I) :

$c(r-f(\bar{x}))\leq 0 \quad \forall r\in [f(\bar{x}), \infty \rangle$.

$\Longrightarrow$

$c \leq 0$.

Asumamos que $c = 0$, entonces de (I):

$\Lambda(u-\bar{x})\leq 0 \quad \forall u \in$ domf.

Pero $\bar{x}\in$ intfomf, pues f es finita y continua, entonces $\Lambda = 0$, lo cual contradice que $(\Lambda ,c)\neq 0$. Luego $c< 0$.

Por otra parte, se sabe que:

$\Lambda v+cs = \gamma \quad \forall(v,s)\in L$.

Entonces:

$\langle \Lambda ,\bar{x}+ \lambda u \rangle +c(f(\bar{x})+ \lambda f'(\bar{x};u)) = \gamma \quad \forall\lambda\in R$.

Sea $\lambda = 0 \quad \Longrightarrow$

$\langle\Lambda,\bar{x} \rangle +cf(\bar{x}) = \gamma$

Luego:

$\langle \Lambda, x+\lambda u\rangle + c(f(x)+\lambda f'(x;u)) = \langle \Lambda, x\rangle + cf(x)$

De donde, considerando $\lambda = 1$, se tiene:

$f'(x;u) = \langle -c^{-1}\Lambda\ ,u\rangle\ \forall\ u\in X.$

Entonces f es Gâteaux diferenciable en x donde

$f'(x) = -c^{-1}\Lambda$ ...(II)

De (I) se deduce que:

$\langle \Lambda, u\rangle + cf(u) \leq \langle \Lambda, x\rangle + cf(x)$

O sea:

$f(u) \geq f(x) + \langle -c^{-1}\Lambda\ ,u-x\rangle\ \ \forall\ u\in X.$

$\Longrightarrow$

$-c^{-1}\Lambda \in \partial f(x).$

Por tanto, considerando (II):

$\partial f(x) = \{ f'(x) \}.$

<u>Preposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: C\subset X \rightarrow R$ una función Gâteaux diferenciable donde C es convexo. Luego:

f es convexa sobre C si y sólo si

$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y-x\rangle\ \forall\ x,y\in C.$

La equivalencia se mantiene entre la convexidad estricta y la desigualdad estricta.

Prueba:

Siendo $F(x) = \begin{cases} f(x), & x\in C \\ +\infty, & x\notin \end{cases}$

Se tiene que $F: X \rightarrow \bar{R}$ es una función convexa.

Como F es Gateaux diferenciable en C, F es subdiferenciable en C y se cumple

$\partial f(x) = \{f'(x)\}\ \forall\ x \in C$. Entonces:

$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y-x \rangle \quad \forall\ x,y \in C.$

$\boxed{\Leftarrow}$

Sean $x,y \in C$, $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$. Luego, considerando la hipótesis:

$$f(x) \geq f(\lambda x+(1-\lambda)y) + (1-\lambda)\langle f'(\lambda x+(1-\lambda)y), x-y \rangle \ \ldots (I)$$

Similarmente:

$$f(y) \geq f(\lambda x+(1-\lambda)y) + \lambda \langle f'(\lambda x+(1-\lambda)y), y-x \rangle \ (II)$$

De donde, multiplicando (I) y (II) por λ y $1-\lambda$ respectivamente, y sumando las desigualdades tenemos:

$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$

Ahora veamos la equivalencia estricta:

$\boxed{\Rightarrow}$

Sean $x,y \in C$ donde $x \neq y$; $u = y-x$.

Luego, considerando que:

$f'(x;u) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} h(\lambda)$ y que $h(\lambda)$ es no decreciente, se deduce:

$$f'(x;u) \leq \lambda^{-1}\,[f(x+\lambda u)-f(x)] \quad (*)$$

Pero, para $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$:

$f(x+\lambda u) = f((1-\lambda)x+\lambda y) < (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$

Entonces, reemplazando en (*):

$f'(x;u) < f(y)-f(x).$

De donde:

$f(y) > f(x) + \langle f'(x), y-x \rangle \ \forall \ x,y \in C, \ x \neq y.$

$\boxed{\Leftarrow}$

Para esta implicancia procedemos similarmente al de convexidad, teniendo en cuenta que las desigualdades (I) y (II) son estrictas si $x \neq y$.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f : C \subset X \to R$ una función Gâteaux diferenciable donde C es convexo. Luego:

f es convexa sobre C si y sólo si

$\langle f'(y)-f'(x), y-x \rangle \geq 0 \ \forall \ x,y \in C.$

Prueba:

$\boxed{\Rightarrow}$

De las hipótesis se deduce que $f'(x)$ y $f'(y)$ son los únicos subgradientes de f en x e $y \in C$ respectivamente. Entonces:

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y-x \rangle$$

$$f(x) \geq f(y) + \langle f'(y), x-y \rangle$$

Luego, sumando:

$$\langle f'(y)-f'(x), y-x \rangle \geq 0 \ \forall \ x,y \in C.$$

$\boxed{\Leftarrow}$

Sean $x,y \in C$. Luego, la función $\varphi : [0,1] \to R$ definida por $\varphi(\lambda) = f(x+\lambda(y-x))$ es diferenciable con derivada $\varphi'(\lambda) = \langle f'(x+\lambda(y-x)), y-x \rangle$.

Además, φ' es no decreciente. Pues, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ tal que $\lambda_1 < \lambda_2$ entonces:

$$\varphi'(\lambda_2) - \varphi'(\lambda_1) =$$

$$\langle f'(x+\lambda_2(y-x)),y-x\rangle - \langle f'(x+\lambda_1(y-x)),y-x\rangle =$$
$$\langle f'(x+\lambda_2(y-x))-f'(x+\lambda_1(y-x)),y-x\rangle =$$
$$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\langle f'(x+\lambda_2(y-x))-f'(x+\lambda_1(y-x)),(\lambda_2-\lambda_1)\cdot$$
$$\cdot(y-x)\rangle \geqslant 0.$$

Es decir, $\varphi'(\lambda_1) \leq \varphi'(\lambda_2)$.

Luego, φ es convexa sobre $[0,1]$ y en particular:

$$\varphi(\lambda) \leq (1-\lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1).$$

De donde:

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \; \forall \lambda \in [0,1].$$

2.6 CONDICIONES DE OPTIMIDAD DE UNA FUNCION

Teorema. Sean X un espacio de Banach reflexivo, $C \subset X$, $f: C \longrightarrow R$ una función convexa e inferiormente semicontinua y $P : \min\limits_{x \in C} f(x)$.

Consideremos:

a) C es compacto

b) f es coercitiva, ésto es: $\lim\limits_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in C}} f(x) = \infty$

Luego, si a) ó b) son cumplidas entonces P tiene al menos una solución óptima.

Si además f es estrictamente convexa, P tiene exactamente una solución óptima.

Demostración:

Sea x_n una sucesión minimizante de $\inf_{x\in C} f(x)$, ésto es, una sucesión de elementos de C tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{x\in C} f(x) = \alpha$$

Se tiene que $\alpha \in [-\infty, \infty\rangle$. Más aún, se verá que $\alpha \neq -\infty$.

La sucesión x_n es acotada :

En el caso a) debido a que C es acotado, y en la hipótesis b) resulta del hecho que la sucesión $f(x_n)$ es acotada superiormente. Pero, siendo X un espacio de Banach se sabe que toda sucesión acotada admite una subsucesión que converge débilmente.

Luego, podemos extraer de x_n una subsucesión x_{n_k} la cual converge débilmente en X a un elemento $x \in C$.

Por otra parte, toda función convexa inferiormente semicontinua permanece inferiormente semicontinua para la topología débil de X, en consecuencia:

$$f(x) \leq \underline{\lim}_{x_{n_k}\to x} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \alpha .$$

Es decir, $\alpha \neq -\infty$ y x es una solución óptima de P.

Ahora, considerando que f es estrictamente convexa veamos que P tiene exactamente una solución óptima:

Asumamos lo contrario. Luego si x_1, x_2 son soluciones diferentes de P entonces:

$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$, es también una solución, debido a que el conjunto de soluciones de P es convexo.

Entonces, siendo f estrictamente conexa:

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) = \alpha$.

Lo cual es una contradicción.

<u>Definición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial real, $C \subset X$ convexo y cerrado, $\hat{x} \in C$ y

$\gamma(\hat{x}) = \{u \in X / \hat{x} + \lambda u \in C$ para algún $\lambda > 0\}$

Luego:

i) $\Gamma(\hat{x}) = \overline{\gamma}(\hat{x})$ se llama cono de las direcciones admisibles de C en $\hat{x}$.

ii) $\Gamma^+(\hat{x}) = \{x^* \in X^* / \langle x^*, x \rangle \geq 0 \ \forall\ x \in \Gamma(\hat{x})\}$ es llamado cono conjugado de $\Gamma(\hat{x})$.

<u>Observación</u>. $\Gamma(\hat{x})$, $\Gamma^+(\hat{x})$ son conos convexos. Más aún, $\Gamma^+(\hat{x})$ es cerrado en $\sigma(X^*, X)$.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial real, $C \subset X$ convexo y cerrado, $f : C \longrightarrow R$ convexa y continua, $P: \min_{x \in C} f(x)$ y $\hat{x} \in C$.

Luego:

$\hat{x}$ es una solución óptima de P si y sólo si $\partial f(\hat{x}) \cap \Gamma^{+}(\hat{x}) \neq \emptyset$.

Prueba:

$\Rightarrow\!|$

$f(x) \geq f(\hat{x}) \ \forall x \in C \quad \Longrightarrow$

$f(x) \geq f(\hat{x}) + \langle 0, x-\hat{x} \rangle \ \forall x \in C \quad \Longrightarrow$

$0 \in \partial f(\hat{x}) \cap \Gamma^{+}(\hat{x})$.

$|\!\Leftarrow$

Sea $x^* \in \partial f(\hat{x}) \cap \Gamma^{+}(\hat{x})$

Ahora, siendo $x \in C$ cualquiera, se tiene que:

$x-\hat{x} \in \gamma(\hat{x}) \quad \Longrightarrow$

$\langle x^*, x-\hat{x} \rangle \geq 0$. Además:

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \langle x^*, x-\hat{x} \rangle$$

$$\geq f(\hat{x}) \ \forall x \in C.$$

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial real, $C \subset X$ convexo y cerrado, $f: C \rightarrow R$ una función convexa, $P: \min_{x \in C} f(x)$ y $x \in C$.

Luego: $\hat{x}$ es una solución óptima de P si y solo si $f'(\hat{x};u) \geq 0 \ \forall u \in \gamma(\hat{x})$.

Prueba:

$\Rightarrow\!|$

Supongamos que $f'(\hat{x};u) < 0$ para algún $u \in \gamma(\hat{x})$

$\Longrightarrow$

$\exists\ \lambda_0 > 0$ tal que $\hat{x} + \lambda u \in C\ \forall \lambda \in [0, \lambda_0]$

$\Longrightarrow$

$$f(\hat{x}+\lambda u) = f(\hat{x}) + \lambda(f'(\hat{x};u) + \frac{0(\lambda)}{\lambda}) < f(\hat{x})$$

$$\forall \lambda \in \langle 0, \lambda_1], \lambda_1 \leq \lambda_0 .$$

Lo cual contradice que $\hat{x}$ es una solución óptima de P.

Por lo tanto:

$f'(\hat{x};u) \geq 0\ \forall\ u \in \gamma(\hat{x})$.

$\Longleftarrow$

Sea $x \in C$ cualquiera

$\Longrightarrow$

$u = x - \hat{x} \in \gamma(\hat{x})$.

Luego, teniendo en cuenta que:

$h(\lambda) = \lambda^{-1}[f(\hat{x}+\lambda u) - f(\hat{x})]$ es no decreciente y

$h(\lambda) \geq f'(\hat{x};u)\ \forall \lambda > 0$ se tiene:

$h(1) = f(x) - f(\hat{x}) \geq f'(\hat{x};u) \geq 0$

De ésto se deduce que:

$\hat{x}$ es una solución óptima de P.

Proposición. Sean X un espacio topológico vectorial real, $C \subset X$, $f: C \rightarrow R$ convexa y Gâteaux diferenciable en C con derivada continua f', $P: \min_{x \in C} f(x)$ y $\hat{x} \in C$. Luego,

a), b) y c) son equivalentes:

a) $\hat{x}$ es una solución óptima de P

b) $\langle f'(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \geq 0\ \ \forall\ x \in C$

c) $\langle f'(x), x-\hat{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \; x \in C$.

Prueba:

a) $\Rightarrow$ b):

Puesto que $\hat{x}$ es solución óptima de P se tiene:

$f(\hat{x}) \leq f(\hat{x}+\lambda(x-\hat{x})) \quad \forall \; x \in C, \lambda \in \langle 0,1 \rangle$

$\Rightarrow$

$\lambda^{-1} [f(\hat{x}+\lambda(x-\hat{x}))-f(\hat{x})] \geq 0$.

Como f es Gâteaux diferenciable se obtiene de és to para $\lambda \downarrow 0$:

$f'(\hat{x};x-\hat{x}) = \langle f'(\hat{x}), x-\hat{x} \rangle \geq 0 \; \forall \; x \in C$.

b) $\Rightarrow$ a):

Se sabe que $h(1) \geq h(\lambda) \; \forall \; \lambda \in \langle 0,1]$. Luego:

$f(x)-f(\hat{x}) \geq \lambda^{-1} [f(\hat{x}+\lambda(x-\hat{x}))-f(\hat{x})]$

$\forall \; x \in C, \lambda \in \langle 0,1]$

Tomando límite:

$f(x)-f(\hat{x}) \geq \langle f'(\hat{x}), x-\hat{x} \rangle \geq 0$

De ésto se deduce que:

$\hat{x}$ es una solución óptima de P.

b) $\Rightarrow$ c):

Puesto que f es convexa sobre C se tiene:

$\langle f'(x)-f'(y), x-y \rangle \geq 0 \; \forall \; x,y \in C$.

En particular:

$\langle f'(x)-f'(\hat{x}), x-\hat{x} \rangle \geq 0 \; \forall \; x \in C$.

Ahora, sumando esta expresión y la hipótesis se deduce que:

$\langle f'(x),\ x-\hat{x} \rangle \geqslant 0 \quad \forall\ x \in C.$

c) $\Rightarrow$ b):

Considerando la hipótesis se tiene que:

$$\langle f'(\hat{x}+\lambda(x-\hat{x})),\ \hat{x}+\lambda(x-\hat{x})-\hat{x} \rangle \geqslant 0$$
$$\forall\ x \in C,\ \lambda \in \langle 0,1 \rangle .$$

De ésto se deduce que:

$\langle f'(\hat{x}+\lambda(x-\hat{x})),\ x-\hat{x} \rangle \geqslant 0 \quad (*)$

La función $\lambda \mapsto \langle f'(\hat{x}+\lambda(x-\hat{x})), x-\hat{x} \rangle$ es contínua, entonces tomando límite para $\lambda \downarrow 0$ en (*) tenemos:

$\langle f'(\hat{x}),\ x-\hat{x} \rangle \geqslant 0 \quad \forall\ x \in C.$

CAPITULO III

FUNCIONES CONJUGADAS

3.1 DEFINICION Y PROPIEDADES DE FUNCIONES CONJUGADAS

Siendo X un espacio topológico vectorial, $x^*\in X^*$, $r\in R$ decimos que x^*+r es una función afin contí - nua sobre X.

Denotamos por $\Gamma(X)$ al conjunto de funciones, $f: X \longrightarrow \bar{R}$, las cuales son supremo de una familia de funciones afín contínuas. Explícitamente, si $I\subset X^* x R$ entonces los elementos $f\in\Gamma(X)$ tienen la forma:

$$f(x) = \sup_{(x^*,r)\in I} [\langle x^*,x \rangle + r] .$$

Las funciones $f\in\Gamma(X)$ son convexas e inferiormente semicontínuas; pues, las funciones afin contínuas lo son, en consecuencia el supremo también lo es.

Denotamos $\Gamma_0(X) = \Gamma(X)\setminus\{\pm\infty\}$.

<u>Definición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \bar{R}$. Luego, $f^*: X^* \to \bar{R}$ donde $f^*(x^*) = \operatorname*{Sup}_{x\in X}[\langle x^*,x\rangle - f(x)]$ se llama función conjugada de f.

Evidentemente se cumple:

$$f^*(x^*) = \operatorname*{Sup}_{x\in \operatorname{dom} f}[\langle x^*,x\rangle - f(x)] \qquad (*)$$

Como para todo $x\in \operatorname{dom} f$:

$\varphi_x(x^*) = \langle x^*,x\rangle - f(x)$ es una función afín contínua definida en X^*, se deduce de (*) que $f^*\in \Gamma(X^*)$.

Ejemplos:

1. Si $f= \delta_K$ donde $K\subset X$, $\delta_K(x) = \begin{cases} 0, & x\in K \\ +\infty, & x\notin K \end{cases}$

   Entonces:

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \operatorname*{Sup}_{x\in X}[\langle x^*,x\rangle - \delta_K(x)] \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\in K}[\langle x^*,x\rangle - \delta_K(x)] \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\in K.}\langle x^*,x\rangle . \end{aligned}$$

2. Sean $X = R^n$, $A\in M_{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva. Luego, si para $1 < p < \infty$ se tiene $f(x) = 1/p\langle x,Ax\rangle^{p/2}$ entonces

$$f^*(x^*)= \frac{1}{q}\langle x^*,A^{-1}x^*\rangle^{q/2} \quad \text{donde } 1/p + 1/q = 1.$$

Veamos:

$$f^*(x^*) = \underset{x \in X}{\mathrm{Sup}} \left[\langle x^*, x \rangle - \frac{1}{p} \langle x, Ax \rangle^{p/2} \right]$$

Sea $\varphi(x) = \langle x^*, x \rangle - \frac{1}{p} \langle x, Ax \rangle^{p/2}$

Entonces una condición necesaria y suficiente para el único máximo de φ es:

$$\nabla \varphi(x) = x^* - \langle x, Ax \rangle^{p/2-1} Ax = 0$$

$\Rightarrow$

$$x^* = \langle x, Ax \rangle^{p/2-1} Ax \quad \ldots (I)$$

De donde:

$$\langle x^*, x \rangle = \langle x, Ax \rangle^{p/2-1} \langle Ax, x \rangle$$

$$= \langle x, Ax \rangle^{p/2} \quad \ldots (II)$$

Luego:

$$f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - 1/p \, \langle x^*, x \rangle$$

$$= 1/q \, \langle x^*, x \rangle$$

Por otra parte, considerando (I):

$$A^{-1}x^* = \langle x, Ax \rangle^{p/2-1} x$$

$$\langle x^*, A^{-1}x^* \rangle = \langle x, Ax \rangle^{p/2-1} \langle x^*, x \rangle$$

$= \langle x^*, x \rangle^{2/p(p/2-1)} \langle x^*, x \rangle$, debido a(II)

$$= \langle x^*, x \rangle^{2(1-1/p)}$$

$$= \langle x^*, x \rangle^{2/q} .$$

Por lo tanto:

$$f^*(x^*) = 1/q \, \langle x^*, A^{-1}x^* \rangle^{q/2} .$$

Propiedades elementales de funciones conjugadas:

1) $f^*(0) = -\inf_{x\in X} f(x)$

2) Si $f = +\infty$ entonces $f^* = -\infty$

Si $f = -\infty$ " $f^* = +\infty$

3) $(f+r)^* = f^* - r$, $r \in R$

4) $(rf)^* = rf^*(\cdot/r)$, $r > 0$

5) Si $f_a(x) = f(x-a)$, $a \in X$ entonces

$f_a^*(x^*) = f^*(x^*) + \langle x^*, a \rangle$

6) Si $g(x) = f(x/r)$, $r > 0$ entonces

$g^*(x^*) = f^*(rx^*)$

7) Si $g(x) = f(x) - \langle y^*, x \rangle$ entonces

$g^*(x^*) = f^*(x^* + y^*)$

8) Si $f \leq g$ entonces $f^* \geq g^*$

9) a) $(\inf_{i\in I} f_i)^* = \operatorname{Sup}_{i\in I} f_i^*$

b) $(\operatorname{Sup}_{i\in I} f_i)^* \leq \inf_{i\in I} f_i^*$

para cualquier familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de funciones sobre X.

Nos restringimos a probar las propiedades 4), 8) y 9):

4) $$(rf)^*(x^*) = \operatorname{Sup}_{x\in X} \left[\langle x^*, x \rangle - rf(x) \right]$$

$$= r\operatorname{Sup}_{x\in X} \left[\langle x^*/r, x \rangle - f(x) \right]$$

$$= rf^*(x^*/r).$$

8) $f(x) \leq g(x)$ implica que

$$\langle x^*, x\rangle - f(x) \geq \langle x^*, x\rangle - g(x)$$

De ésto se obtiene:

$$f^*(x^*) \geq g^*(x^*).$$

9) a.
$$\begin{aligned}(\inf_{i\in I} f_i)^*(x^*) &= \sup_{x\in X} \left[\langle x^*, x\rangle - \inf_{i\in I} f_i(x)\right] \\ &= \sup_{x\in X} \left[\langle x^*, x\rangle + \sup_{i\in I} (-f_i(x))\right] \\ &= \sup_{x\in X} \sup_{i\in I} \left[\langle x^*, x\rangle - f_i(x)\right] \\ &= \sup_{i\in I} \sup_{x\in X} \left[\langle x^*, x\rangle - f_i(x)\right] \\ &= \sup_{i\in I} f_i^*(x^*) \quad .\end{aligned}$$

b. Se sabe que:

$$f_i \leq \sup_{i\in I} f_i \qquad \forall\, i\in I$$

Luego, usando 8) se tiene:

$$(\sup_{i\in I} f_i)^* \leq f_i^* \qquad \forall\, i\in I$$

De ésto se obtiene:

$$(\sup_{i\in I} f_i)^* \leq \inf_{i\in I} f_i^* \quad .$$

3.2 DESIGUALDAD DE YOUNG-FENCHEL

Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \bar{R}$.

Entonces:

$\langle x^*, x \rangle \leq f(x) + f^*(x^*) \quad \forall x \in X, \ x^* \in X^*.$

Pues:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} [\langle x^*, x \rangle - f(x)]$$

$$\geq \langle x^*, x \rangle - f(x) \quad \forall \ x \in X, \quad x^* \in X^*$$

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \bar{R}$. Luego:

a) Si $\langle x^*, x \rangle = f(x) + f^*(x^*)$, entonces $x^* \in \partial f(x)$ y $x \in \partial f^*(x^*)$.

b) Si $x^* \in \partial f(x)$, entonces, $\langle x^*, x \rangle = f(x) + f^*(x^*)$ y $x \in \partial f^*(x^*)$.

Prueba:

a) De $\langle x^*, x \rangle = f(x) + f^*(x^*)$

$\langle x^*, y \rangle \leq f(y) + f^*(x^*) \ \forall \ y \in X$

$\langle y^*, x \rangle \leq f(x) + f^*(y^*) \ \forall \ y^* \in X^*$

deducimos que:

$$\begin{aligned} f(y) &\geq -f^*(x^*) + \langle x^*, y \rangle \\ &= f(x) - \langle x^*, x \rangle + \langle x^*, y \rangle \\ &= f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \ \forall \ y \in X \qquad \ldots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(y^*) &\geq -f(x) + \langle y^*, x \rangle \\ &= f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, x \rangle \end{aligned}$$

$$= f^*(x^*) + \langle y^*-x^*, x\rangle \ \forall\, y^* \in X^* \ldots (II)$$

Luego, (I) muestra que $x^* \in \partial f(x)$ y (II) significa que $x \in \partial f^*(x^*)$.

b) $x^* \in \partial f(x) \implies$

$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x\rangle$

De donde:

$\langle x^*, y\rangle - f(y) \leq \langle x^*, x\rangle - f(x) \ \forall\, y \in X.$

Lo que implica que:

$$\sup_{y \in X} \left[\langle x^*, y\rangle - f(y) \right] = \langle x^*, x\rangle - f(x)$$

Luego:

$$\langle x^*, x\rangle = f(x) + f^*(x^*).$$

De acuerdo con a) se cumple que $x \in \partial f^*(x^*)$.

3.3 <u>Γ-REGULARIZACION DE UNA FUNCION Y FUNCIONES BI-CONJUGADAS</u>

<u>Definición</u>. Sea X un espacio topológico vectorial, $f : X \to \bar{R}$. Luego:

$$S_f = \{ (x^*, r) \in X^* x R / \langle x^*, x\rangle - r \leq f(x) \ \forall\, x \in X \}$$

Se llama soporte de la función f.

<u>Definición</u>. Sea $f : X \to \bar{R}$ una función. Luego, la función $F : X \to \bar{R}$ definida por

$$F(x) = \sup_{(x^*, r) \in S_f} \left[\langle x^*, x\rangle - r \right]$$ es llamada Γ-regularización de f.

Definición. Sean X un espacio topológico vectorial $f : X \rightarrow \bar{R}$. Luego, la función $f^{**}: X \rightarrow \bar{R}$ definida por $f^{**}(x) = \operatorname{Sup}_{x^* \in X^*} [\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)]$

se llama función biconjugada de f.

Puesto que f^{**} es el supremo de una familia de funciones afín contínuas se tiene que $f^{**} \in \Gamma(X)$.

Proposición. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \rightarrow \bar{R}$ una función. Luego, f^{**} es la Γ-regularización de f.

Más aún, $f \in \Gamma(X)$ si y solo si $f^{**} = f$.

Prueba:

La Γ-regularización de f es:

$$F(x) = \operatorname{Sup}_{(x^*,r) \in S_f} [\langle x^*, x\rangle - r]$$

$$= \operatorname{Sup} [\langle x^*, x\rangle - r / (x^*, r) \in X^* x R, \langle x^*, x\rangle - r \leq f(x) \ \forall x \in X]$$

Pero:

$\langle x^*, x\rangle - r \leq f(x) \ \forall \ x \in X \iff$

$\langle x^*, x\rangle - f(x) \leq r \ \forall \ x \in X \iff$

$\operatorname{Sup}_{x \in X} [\langle x^*, x\rangle - f(x)] \leq r \iff$

$f^*(x^*) \leq r$.

Luego:

$F(x) = \operatorname{Sup} [\langle x^*, x\rangle - r / (x^*, r) \in X^* x R, f^*(x^*) \leq r]$

$$= \operatorname{Sup} [\langle x^*,x\rangle - r/(x^*,r) \in X^* x R,\ r = f^*(x^*)]$$

$$= \operatorname{Sup}_{x^* \in X^*} [\langle x^*,x\rangle - f^*(x^*)]$$

$$= f^{**}(x) \quad \forall x \in X.$$

Finalmente, veamos la equivalencia:

$\Rightarrow$

Puesto que $f \in \Gamma(X)$ se deduce que $f(x) \leq F(x)$.

Por otra parte, debido a la definición de Γ-regularización se tiene que $F(x) \leq f(x)\ \forall x \in X$.

O sea, $F = f$.

En consecuencia $f^{**} = f$.

$\Leftarrow$

Se tiene que $f^{**} = f$. Luego $f \in \Gamma(X)$, pues $f^{**} \in \Gamma(X)$.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \overline{R}$. Luego:

$f^* = f^{***}$.

Prueba:

Puesto que f^{**} es la Γ-regularización de f, se deduce que:

$f^{**} \leq f$. Luego:

$f^* \leq f^{***}$ (I)

Por otra parte, considerando que:

$f^{**}(x) = \operatorname{Sup}_{x^* \in X^*} [\langle x^*,x\rangle - f^*(x^*)]$ se tiene que:

$f^{**}(x) \geq \langle x^*,x\rangle - f^*(x^*)\ \forall\ x \in X,\ x^* \in X^*$

$\Rightarrow$

$f^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle - f^{**}(x) \;\; \forall\, x \in X, x^* \in X^*$

De donde:

$$f^*(x^*) \geq \sup_{x \in X} \left[\langle x^*, x \rangle - f^{**}(x) \right]$$

Luego:

$f^* \geq f^{***}$ (II)

Por lo tanto, de (I) y (II) obtenemos:

$f^* = f^{***}$.

<u>Propiedad</u>. La función $*: \Gamma(X) \to \Gamma(X^*)$, donde $*(f) = f^*$ es una biyección.

Veamos:

i) $*$ es inyectiva:

Sea $*(f) = *(g)$ ó $f^* = g^*$. Entonces:

$f = f^{**} = g^{**} = g$, puesto que $f, g \in \Gamma(X)$.

ii) $*$ es suryectiva:

Sea $F \in \Gamma(X^*)$. Evidentemente se cumple : $F^* \in \Gamma(X)$.

De otro lado se tiene que:

$*(F^*) = F^{**} = F$, puesto que $F \in \Gamma(X^*)$.

<u>Observación</u>. La aplicación $*: \Gamma(X) \to \Gamma(X^*)$ tiene la propiedad siguiente:

$f \leq g \Rightarrow f^* \geq g^*$.

Como $*(-\infty) = +\infty$, $*(+\infty) = -\infty$, $*$ es también una biyección entre $\Gamma_0(X)$ y $\Gamma_0(X^*)$.

<u>Definición</u>. $f \in \Gamma(X)$ y $F \in \Gamma(X^*)$ se dice que están en dualidad si $f^* = F$.

<u>Proposición</u>. Sean $(X, \|.\|)$, $(X^*, \|.\|_*)$ espacios normados duales dotados de las topologías débiles $\tau(X,X^*)$ y $\tau(X^*,X)$ respectivamente, $\varphi \in \Gamma o(R)$ una función par. Luego, si:

$f(x) = \varphi(\|x\|)$ y $F(x^*) = \varphi^*(\|x^*\|_*)$ entonces f y F están en dualidad.

Prueba:

Se tiene que $\varphi^* \in \Gamma o(R)$.

Además $f \in \Gamma o(X)$, $F \in \Gamma o(X^*)$, pues f y F son convexas e inferiormente semicontínuas.

Ahora veamos que $f^* = F$:

$$
\begin{aligned}
f^*(x^*) &= \operatorname*{Sup}_{x \in X} [\langle x^*, x\rangle - f(x)] \\
&= \operatorname*{Sup}_{x \in X} [\langle x^*, x\rangle - \varphi(\|x\|)] \\
&= \operatorname*{Sup}_{\lambda \geq 0} \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in X \\ \|x\| = \lambda}} [\langle x^*, x\rangle - \varphi(\|x\|)] \\
&= \operatorname*{Sup}_{\lambda \geq 0} [\lambda \operatorname*{Sup}_{\|x\| = 1} \langle x^*, x\rangle - \varphi(\lambda)] \\
&= \operatorname*{Sup}_{\lambda \geq 0} [\lambda \|x^*\|_* - \varphi(\lambda)]
\end{aligned}
$$

$$= \operatorname*{Sup}_{\lambda\in R} \left(\langle \| x^* \|_*, \lambda \rangle - \varphi(\lambda) \right) \text{, pues } \varphi \text{ es par.}$$

$$= \varphi^* (\| x^* \|_*)$$

$$= F(x^*).$$

3.4 FUNCION SOPORTE DE UN CONJUNTO

Definición. Sean X un espacio topológico vectorial, $A \subset X^*$ no vacío. Luego, la función $S(.|A): X \longrightarrow \bar{R}$ definida por

$$S(x|A) = \operatorname*{Sup}_{x^*\in A} \langle x^*, x \rangle$$ se llama función soporte

de A.

Ejemplo:

Sean $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach, $B^* = \{ x^* \in X^* / \|x^*\| \leq 1 \}$. Entonces $\|.\|$ es la función soporte de B^*.

Esto se deduce teniendo en cuenta que :

$$\|x\| = \operatorname*{Sup}_{x^*\in B^*} \langle x^*, x \rangle .$$

Proposición. Sean X un espacio convexo, $f \in \Gamma o(X)$ una función homogénea. Entonces f es la función soporte de un conjunto no vacío.

Prueba:

Consideremos el conjunto:

$$A = \partial f(0)$$

$$= \{ x^* \in X^* / f(x) \geq \langle x^*, x \rangle \ \forall \ x \in X \}$$

$= \{ x^* \in X^* / f^*(x^*) < \infty \}$, pues f es homogénea

$= \operatorname{dom} f^*$.

Puesto que $f^* \in \Gamma_0(X^*)$ se tiene que f^* es propia, en consecuencia $A \neq \emptyset$.

Si $x^* \in A$ entonces

$0 = \langle x^*, 0 \rangle = f(0) + f^*(x^*) = f^*(x^*)$.

Si $x^* \notin A$ entonces $\langle x^*, x \rangle - f(x) > 0$ para algún $x \in X$. De ésto

$\lim_{\lambda \to \infty} [\langle x^*, \lambda x \rangle - f(\lambda x)] = \infty$. Luego, $f^*(x^*) = \infty$.

Entonces $f^* = \delta_A$.

Por otra parte:

$$f(x) = f^{**}(x) = \delta_A^*(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle = S(x|A).$$

Por lo tanto, f es la función soporte de un conjunto no vacío.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio convexo, $f: X \to \overline{R}$ una función convexa y homogénea.

Entonces: $\partial f(x) = \{ x^* \in \partial f(0) / \langle x^*, x \rangle = f(x) \}$ $\forall\, 0 \neq x \in X$.

Prueba:

Se tiene que $x^* \in \partial f(0) \Leftrightarrow \langle x^*, 0 \rangle = f(0) + f^*(x^*)$

$\Leftrightarrow f^*(x^*) = 0$ (*)

Por otra parte, si $x^* \notin \partial f(0)$ entonces :

$\langle x^*, y \rangle - f(y) > 0$ para algún $y \in X$.

$\Rightarrow$

$$\lim_{\lambda \to \infty} [\langle x^*, \lambda x\rangle - f(\lambda x)] = \infty$$

$f^*(x^*) = \infty$.

Luego, de ésto y (*) se tiene que:

$x^* \notin \partial f(0) \Leftrightarrow f^*(x^*) = \infty$.

i) $\partial f(0) = \emptyset$

Veamos que $\partial f(x) = \emptyset$:

Supongamos que $\partial f(x) \neq \emptyset$. Luego, si $x^* \in \partial f(x)$ entonces $\langle x^*, x\rangle = f(x) + f^*(x^*)$ (**)

Ahora, puesto que $x^* \notin \partial f(0)$ entonces :

$f^*(x^*) = \infty$. Lo cual contradice a (**).

ii) $\partial f(0) \neq \emptyset$

Siendo $A = \partial f(0)$ se tiene que $f^* = \delta_A$

Donde $A \subset X^*$ es no vacío.

Luego:

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x) &\Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle = f(x) + f^*(x^*), f^*(x^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle = f(x),\ f^*(x^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle = f(x),\ x^* \in \partial f(0). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\partial f(x) = \{ x^* \in \partial f(0) / \langle x^*, x\rangle = f(x) \} .$$

3.5 LA CONVOLUCION INFIMAL

Definición. Sean X un espacio topológico vectorial y $f_k : X \rightarrow \langle -\infty, \infty];k = 1,2,\dots,n$.

La convolución infimal $\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} f_k$ es la función definida por $\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} f_k(x) = \inf \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x^k) / \sum_{k=1}^{n} x_k = x \right]$.

Lema. Sean X un espacio topológico vectorial y $f_k : X \rightarrow \bar{R}$; $k = 1,2,\dots, n$ funciones convexas propias. Entonces $\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} f_k$ es convexa.

(eventualmente no propia)

Además $\operatorname{dom} \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} f_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{dom} f_k$.

Prueba:

Sean $x,y \in X$, $\lambda \in [0,1]$.

$z = \lambda x+(1-\lambda)y$.

Si $\sum_{k=1}^{n} x_k = x$, $\sum_{k=1}^{n} y_k = y$ entonces se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k + (1-\lambda)y_k = z \qquad (*)$$

Luego:

$$\bigoplus_{k=1}^{n} f_k(z) = \text{ínf}\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(z_k) / \sum_{k=1}^{n} z_k = z \right]$$

$$\leq \text{ínf}\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(\lambda x_k + (1-\lambda) y_k) / \sum_{k=1}^{n} x_k = x, \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n} y_k = y \right],$$

debido a (*).

$$\leq \text{ínf}\left[\lambda \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{n} f_k(y_k) / \sum_{k=1}^{n} x_k = x, \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n} y_k = y \right]$$

$$= \lambda\, \text{ínf}\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) / \sum_{k=1}^{n} x_k = x \right]$$

$$+ (1-\lambda)\, \text{ínf}\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(y_k) / \sum_{k=1}^{n} y_k = y \right]$$

$$= \lambda \bigoplus_{k=1}^{n} f_k(x) + (1-\lambda) \bigoplus_{k=1}^{n} f_k(y).$$

Finalmente:

$$x \in \text{dom} \bigoplus_{k=1}^{n} f_k \quad \Longleftrightarrow$$

$$\bigoplus_{k=1}^{n} f_k(x) < \infty \quad \Longleftrightarrow$$

$f_k(x_k) < \infty$; $k = 1,2,\ldots,n$ para algún $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ /

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x \quad \Longleftrightarrow$$

$$x \in \sum_{k=1}^{n} \mathrm{dom} f_k .$$

Ejemplos:

1. Sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos. Entonces:

   $\delta_A + \delta_B = \delta_{A+B}$.

   Veamos:

   Si $x \in A+B$ entonces $x = a+b$ donde $a \in A$, $b \in B$

   Luego:

$$
\begin{aligned}
(\delta_A \oplus \delta_B)(x) &= \inf_{x_1+x_2=x} [\delta_A(x_1)+\delta_B(x_2)] \\
&= \delta_A(a) + \delta_B(b) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

   Si $x \notin A+B$ donde $x = x_1+x_2$ entonces $x_1 \notin A \vee x_2 \notin B$.

   Luego:

$$
\begin{aligned}
(\delta_A \oplus \delta_B)(x) &= \inf_{x_1+x_2=x} [\delta_A(x_1)+\delta_B(x_2)] \\
&= \delta_A(x_1) + \delta_B(x_2) \\
&= \infty .
\end{aligned}
$$

2. Se cumple;

$(\delta_A \oplus f)(x) = \inf \,[\, f(x-a)/a \in A \,]$.

En particular, si f es una seminorma entonces:

$\delta_A \oplus f = \text{dist}(.,A)$.

Si además A es convexo,entonces dist(.,A) es convexa sobre X.

Veamos:

$$(\delta_A \oplus f)(x) = \inf_{x_1+x_2=x} [\, \delta_A(x_1)+f(x_2) \,]$$

$$= \inf_{\substack{a+x_2 = x \\ a \in A}} [\, \delta_A(a) + f(x_2)]$$

$$= \inf \,[\, f(x-a)/a \in A \,].$$

Ahora, siendo f una seminorma se tiene que :
$\delta_A \oplus f = \text{dist}(.,A)$, debido a la definición de distancia de un punto a un conjunto.

Finalmente, siendo A convexo se tiene que δ_A es convexa.

Por tanto, siendo δ_A, f funciones convexas propias se deduce, de acuerdo al lema, que dis(.,A) es convexa.

· Teorema. Sean X un espacio topológico vectorial y $f_k : X \to \langle -\infty, \infty]$; $k = 1,2,\ldots,n$.

Entonces;

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{n} f_k\right)^* = \sum_{k=1}^{n} f_k^* .$$

Demostración:

$$\Big(\bigoplus_{k=1}^{n} f_k\Big)^*(x^*) = \sup_{x\in X}\Big[\langle x^*,x\rangle - \bigoplus_{k=1}^{n} f_k(x)\Big]$$

$$= \sup_{x\in X}\Big[\langle x^*,x\rangle - \inf_{\sum_{k=1}^{n} x_k = x} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)\Big]$$

$$= \sup_{x\in X}\Big[\langle x^*,x\rangle + \sup_{\sum_{k=1}^{n} x_k = x} \sum_{k=1}^{n} (-f_k)(x_k)\Big]$$

$$= \sup_{x\in \sum_{k=1}^{n} \operatorname{dom} f_k} \ \sup_{\sum_{k=1}^{n} x_k = x}\Big[\sum_{k=1}^{n}\big(\langle x^*,x_k\rangle - f_k(x_k)\big)\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in \operatorname{dom} f_k}\big[\langle x^*,x\rangle - f_k(x)\big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in X}\big[\langle x^*,x\rangle - f_k(x)\big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k^*(x^*).$$

<u>Teorema</u>. Sean X un espacio topológico vectorial y $f_k : X \to \langle -\infty,\infty]$ tal que $f_k \in \Gamma(X)$; $k = 1,2,\ldots,n$. Entonces:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k\Big)^* = \Big(\bigoplus_{k=1}^{n} f_k^*\Big)^{**}$$

Demostración:

Aún cuando las funciones f_k no son convexas, siempre se cumple:

$f_k^{**} \leq f_k$.

Entonces:

$\sum_{k=1}^{n} f_k^{**} \leq \sum_{k=1}^{n} f_k$. Luego:

$(\sum_{k=1}^{n} f_k)^* \leq (\sum_{k=1}^{n} f_k^{**})^*$.

Pero como $f_k \in \Gamma(X) \ \forall k$, se cumple:

$f_k^{**} = f_k$

Lo que implica que:

$$(\sum_{k=1}^{n} f_k)^* = (\sum_{k=1}^{n} f_k^{**})^* \qquad \ldots(*)$$

De acuerdo al teorema precedente se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^{**} = (\bigoplus_{k=1}^{n} f_k^*)^*$$

De ésto y (*) se deduce que:

$$(\sum_{k=1}^{n} f_k)^* = (\bigoplus_{k=1}^{n} f_k^*)^{**} .$$

3.6 Hiperplano Tangencial y Propiedades

Para $(x^*,r) \in X^*xR = (XxR)^*$ consideramos los hiperplanos:

$H_\lambda = \{ (x,t) \in XxR / \langle x^*,x \rangle + rt = \lambda \}$

Si $r \neq 0$ entonces H_λ intersecta al eje R en exactamente un punto. Pues:

$(0,t) \in H_\lambda \Leftrightarrow rt = \lambda \Leftrightarrow t = r^{-1}\lambda$.

Nos restringimos a los hiperplanos H_λ con $\lambda = -1$.

<u>Definición</u>. Un hiperplano H se dice que es tangencial a epif si H no se encuentra estrictamente debajo de epif, o sea $\exists$ $(x,t) \in H$ con $f(x) \leq t$, ni intersecta epif en un punto estrictamente encima de algún punto $(x,f(x))$, esto es $\forall$ $(x,t) \in H \cap$ epif se tiene que $t \leq f(x)$.

<u>Propiedad</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f : X \rightarrow \overline{R}$ una función convexa propia y $H_\lambda = \{ (x,t) \in XxR / \langle x^*,x \rangle - t = \lambda \}$ un hiperplano.

Luego:

H_λ es tangencial a epif si y sólo si $\lambda = f^*(x^*)$.

Veamos:

$\Rightarrow)$

Supongamos que $\lambda \neq f^*(x^*)$. Entonces:

i) $\lambda > f^*(x^*)$. Luego:

$\langle x^*,x \rangle - f(x) \leq f^*(x^*) < \lambda \;\; \forall \; x \in X$

De ésto:

$\langle x^*, x\rangle - \lambda < f(x) \ \forall \ x \in X$ (I)

Ahora, siendo $(xt) \in H_\lambda$ entonces:

$\langle x^*, x\rangle - t = \lambda$. De ésto:

$t = \langle x^*, x\rangle - \lambda \ \forall x \in X$ (II)

De (I) y (II) se deduce que:

$t < f(x) \ \forall \ x \in X$.

O sea, H_λ se encuentra estrictamente debajo de epif. Lo cual contradice la hipótesis.

ii) $\lambda < f^*(x^*)$. Luego:

$$\lambda < \sup_{x \in X} [\langle x^*, x\rangle - f(x)] .$$

Entonces $\exists \ x \in X$ tal que

$\lambda < \langle x^*, x\rangle - f(x)$. O sea:

$f(x) < \langle x^*, x\rangle - \lambda$ (I)

Ahora, siendo $(x,t) \in H_\lambda \cap$ epif entonces

$\langle x^*, x\rangle - t = \lambda$. O sea:

$t = \langle x^*, x\rangle - \lambda$ (II)

De (I) y (II) se deduce que:

$f(x) < t$ algún $x \in X$.

Esto es, H_λ intersecta epif en un punto estrictamente encima de algún punto $(x, f(x))$. Lo cual es una contradicción.

En consecuencia, $\lambda = f^*(x^*)$.

$\Leftarrow$

Siendo $\lambda = f^*(x^*)$ se tiene que:

$$\langle x^*,x\rangle - t = f^*(x^*) = \sup_{x\in X} \left[\langle x^*,x\rangle - f(x)\right]$$

De ésto:

$\langle x^*,x\rangle - f(x) \leq \langle x^*,x\rangle - t$. O sea:

$t \leq f(x)$.

Luego, se deduce que H_λ no intersecta epif en un punto estrictamente encima de algún punto $(x,f(x))$.

Sólo queda ver que H_λ no se encuentra estrictamente debajo de epif.

Asumamos lo contrario. Luego:

$t < f(x) \ \forall\ (x,t)\in H_\lambda$.

Pero $\langle x^*,x\rangle - t = f^*(x^*)$. De ésto

$\langle x^*,x\rangle - f(x) < f^*(x^*)$.

Ahora, si consideramos $\langle x^*,x\rangle - f(x) = \gamma$ se tiene que H_γ intersecta epif en un punto estrictamente encima de algún punto $(x,f(x))$.

Lo cual es una contradicción, pues $(x,f(x)) \in H_\gamma$

En consecuencia, H_λ es tangencial a epif.

<u>Propiedad</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f : X \to \bar{R}$ una función convexa propia.

Luego:

$H_{f^*(x^*)}$ es un hiperplano de soporte para epif, donde $(x,f(x))$ es un punto de soporte si y solo si $x^* \in \partial f(x)$.

Veamos:

$\Rightarrow$)

$(x,f(x))$ es un punto de soporte. Luego:

$\langle x^*,x\rangle - f(x) = f^*(x^*)$. De ésto:

$\langle x^*,x\rangle = f(x) + f^*(x^*)$

$\Rightarrow x^* \in \partial f(x)$.

$\Leftarrow$)

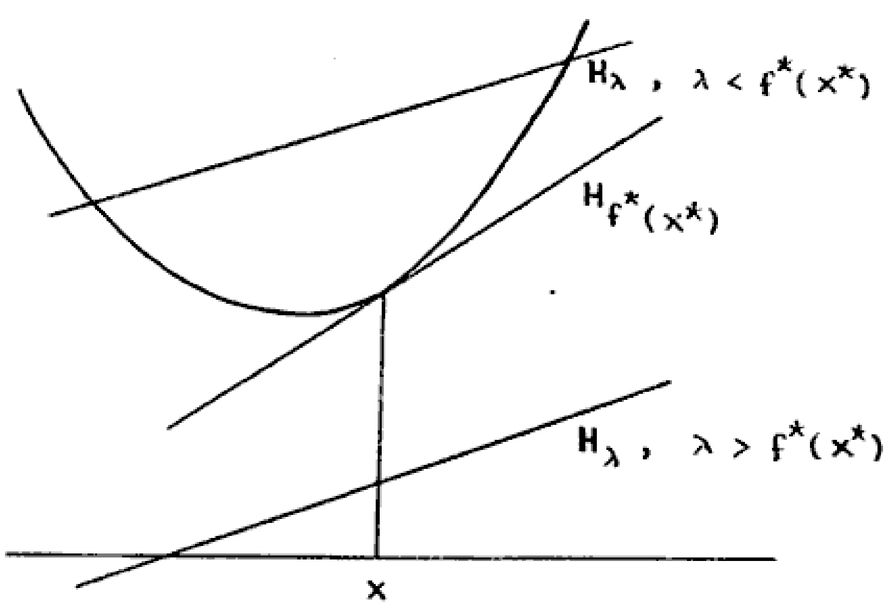
$x^* \in \partial f(x)$. Luego:

$f(x) = \langle x^*,x\rangle - f^*(x^*)$ ...(I)

Por otra parte:

$\langle x^*,y\rangle - f(y) \leq f^*(x^*) \quad \forall y \in X$ ...(II)

(I) y (II) implican que $H_{f^*(x^*)}$ es un hiperplano de soporte para epif, donde $(x,f(x))$ es un punto de soporte.



<u>Notación</u>. Conv X = Conjunto de funciones convexas propias.

Conc X = $\{ f: X \rightarrow \bar{R} / -f \in \text{Conv } X \}$.

Si $f \in$ Conc X se dice que f es una función cóncava propia.

Considerando que:

f es cóncava si y solo si -f es convexa, la teoría de Conc X es naturalmente antisimétrica con la teoría de Conv X.

Siendo $f : X \rightarrow \bar{R}$ cóncava denotamos:

$\text{Domf} = \{ x \in X / -\infty < f(x) \}$

$\text{hipo } f = \{ (x,r) \in X \times R / r \leq f(x) \}$.

<u>Definición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \rightarrow \bar{R}$. Luego, $f^{+} : X^{*} \rightarrow \bar{R}$

donde $f^{+}(x^{*}) = \inf_{x \in X} [\langle x^{*}, x \rangle - f(x)]$ se llama función conjugada cóncava de f.

Evidentemente se cumple:

$$f^{+}(x^{*}) = \inf_{x \in \text{Domf}} [\langle x^{*}, x \rangle - f(x)]$$

Propiedades de f^{+} :

1. f^{+} es cóncava y superiormente semicontínua.

   Veamos:

   $$f^{+}(x^{*}) = \inf_{x \in X} [\langle x^{*}, x \rangle - f(x)]$$

   Pero $\ell_{x}(x^{*}) = \langle x^{*}, x \rangle - f(x)$, $x \in X$, es una fami lia de funciones afín continuas, en consecuencia cóncavas y superiormente semicontinuas. Luego, se deduce que f^+ también es cóncava y superiormente semicontinua.

2. Si $f: X \longrightarrow R$ entonces:

   $f^+(x^*) = -(-f)^*(-x^*)$.

   Veamos:

$$f^+(x^*) = \inf_{x \in X} [\langle x^*, x \rangle - f(x)]$$

$$= \inf_{x \in X} [-(\langle -x^*, x\rangle - (-f(x)))]$$

$$= -\sup_{x \in X} [\langle -x^*, x\rangle - (-f(x))]$$

$$= -(-f)^*(-x^*).$$

   Por consiguiente, aún cuando $f \in$ Conv $X \cap$ Conc X, o sea f es una función afín, se cumple:

   $f^+ \neq f^*$.

   De la definición de f^* y g^+ se deduce inmediatamente: $g(x) + g^+(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$

$$\forall \; x \in X, x^* \in X^*.$$

<u>Propiedad</u>. Sean X un espacio topológico vectorial $f : X \longrightarrow \bar{R}$ una función cóncava propia y $H_\lambda = \{(x,t) \in X \times R / \langle x^*, x\rangle - t = \lambda\}$ un hiperplano.

Luego:

H_λ es tangencial a hipo$f$ si y solo si $\lambda = -f^+(x^*)$.

La prueba es similar a la propiedad:

H_λ es tangencial a epif si y solo si $\lambda = f^*(x^*)$.

3.7 Teoría de Dualidad de Fenchel y Aplicaciones

Si f $-g \in$ Conv X consideramos el programa de Fenchel :

$$P : \min_{x \in X} (f-g)(x).$$

Asociamos a P el siguiente programa dual:

$$P^* : \max_{x^* \in X^*} (g^+ - f^*)(x^*).$$

<u>Propiedad</u>. Se cumple:

$$\inf P \geq \operatorname{Sup} P^*$$

Veamos:

Se sabe que:

$g(x) + g^+(x^*) \leq f(x) + f^*(x^*) \quad \forall\ x \in X,\ x^* \in X^*$

O sea:

$g^+(x^*) - f^*(x^*) \leq f(x) - g(x) \ \forall\ x \in X, x^* \in X^*$.

De ésto se deduce la propiedad.

<u>Teorema de dualidad de Fenchel.</u> Sean X un espacio topológico vectorial, $f, -g \in$ Conv X donde una de estas funciones es continua en al

gún punto de $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{Dom} g$. Entonces:

$\inf P = \operatorname{Sup} P^*$

Demostración:

Asumamos que f es continua en $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.

Entonces $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$.

También: $\alpha = \inf P \leq f(x) - g(x) < \infty$.

Si $\alpha = -\infty$ el teorema es cierto, pues:

$-\infty = \inf P \geq \operatorname{Sup} P^*$

$\Rightarrow$

$\inf P = \operatorname{Sup} P^* = -\infty$.

Si $\alpha > -\infty$ consideramos los conjuntos:

$A = \{(u,r) \in X \times R / u \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f,\ f(u) < r\}$

$B = \{(v,s) \in X \times R / s \leq g(v) + \alpha\}$

los cuales son no vacíos.

También, puesto que $f, -g \in \operatorname{Conv} X$, se deduce que A, B son convexos.

Además, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$.

Por otra parte, $\operatorname{int} A \cap B \neq \emptyset$:

Asumamos lo contrario. Luego, siendo $(u,r) \in A \cap B$ se tiene:

$f(u) < r \leq g(u) + \alpha$. O sea:

$f(u) - g(u) < \alpha$. Lo cual es una contradicción.

Luego, por el teorema de séparación, existe $(\Lambda, c) \in X^* \times R$ no trivial y $\gamma \in R$ tal que:

$$\langle \Lambda, u \rangle + cr \leq \gamma \leq \langle \Lambda, v \rangle + cs \quad \forall (u,r) \in A, (v,s) \in B.$$

Luego, haciendo $u=v=x$ obtenemos de (*):

$c(r-s)\leq 0 \ \forall r\in \langle f(x), \infty \rangle$.
$\Longrightarrow$
$c\leq 0$.

Asumamos que $c = 0$, entonces de (*):

$\Lambda(u-x)\leq 0 \ \forall u\in \operatorname{intdom} f$.

Pero $x\in \operatorname{intdom} f$. Entonces $\Lambda = 0$, lo cual contradice que $(\Lambda,c)\neq 0$. Luego $c<0$.

De (*), se obtiene:

$\langle \Lambda,u\rangle + cr \leq \gamma \ \forall u\in \operatorname{intdom} f,\ f(u)<r$
$\Longrightarrow$
$\langle \Lambda,u\rangle + cf(u) \leq \gamma \ \forall u\in \operatorname{intdom} f \quad \Longrightarrow$

$\langle -c^{-1}\Lambda, u\rangle - f(u) \leq -c^{-1}\gamma \ \forall u\in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$

Denotando $x^* = -c^{-1}\Lambda$, $\beta = -c^{-1}\gamma$ se deduce que:

$\langle x^*,u\rangle - \beta \leq f(u) \ \forall u\in \operatorname{int} \operatorname{dom} f \quad \ldots \text{(I)}$

Además, (I) se cumple en fr(domf):

Sea $u\in fr(\operatorname{dom} f)$, entonces:

$\lambda x+(1-\lambda)u\in \operatorname{intdom} f \quad \forall \lambda \in \langle 0,1]$

Reemplazando en (I):

$$\langle x^*, \lambda x+(1-\lambda)u\rangle - \beta \leq f(\lambda x+(1-\lambda)u)$$
$$\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(u) \ \forall\lambda\in\langle 0,1]$$

Para $\lambda\downarrow 0$ obtenemos:

$\langle x^*,u\rangle - \beta \leq f(u)$.

Pero (I) también es cierta en $X\setminus \operatorname{dom} f$.

Por consiguiente:

$\langle x^*,u\rangle - f(u) \leq \beta \ \forall u\in X. \quad \Longrightarrow$

$f^*(x^*) \leq \beta \quad \ldots \text{(II)}$

Por otra parte, de (*) obtenemos:

$\gamma \leq \langle \Lambda, v \rangle + cs \quad \forall (v,s) \in B$

Osea:

$\gamma \leq \langle \Lambda, v \rangle + c(g(v) + \alpha) \quad \forall v \in \mathrm{Dom}\, g$

De donde se deduce que:

$\beta \leq \langle x^*, v \rangle - (g(v) + \alpha) \quad \forall v \in \mathrm{Dom}\, g. \quad \Longrightarrow$

$\alpha + \beta \leq \langle x^*, v \rangle - g(v) \quad \forall\, v \in X.$

Luego:

$\alpha + \beta \leq g^+(x^*).$

Ahora, considerando (II) se tiene:

$\alpha \leq g^+(x^*) - f^*(x^*) \leq \mathrm{Sup}\, P^*.$

Teniendo en cuenta que $\alpha = \inf P$ e $\inf P \geq \mathrm{Sup}\, P^*$ se obtiene:

$\inf P = \sup P^*.$

Ahora, deseamos saber bajo qué condiciones el programa P tiene una solución óptima.

<u>Definición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial real, $f: X \to \bar{R}$ una función, $x \in X$.

Luego:

$\Delta f(x) = \{ x^* \in X^* / f(y) \leq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \ \forall\, y \in X \}$

se llama superdiferencial de la función f en el punto x.

Un elemento de $\Delta f(x)$ es llamado supergradiente de f en x.

Proposición. Sean X un espacio topológico vectorial, $f : X \to \bar{R}$. Luego:

a) Si $\langle x^*,x\rangle = f(x)+f^+(x^*)$ entonces $x^* \in \Delta f(x)$ y $x \in \Delta f^+(x^*)$.

b) Si $x^* \in \Delta f(x)$ entonces $\langle x^*,x\rangle = f(x) + f^+(x^*)$ y $x \in \Delta f^+(x^*)$.

Esta proposición es la versión dual de la proposición que fué presentada considerando el concepto de subdiferencial y su prueba es similar.

Proposición. Sean X un espacio topológico vectorial, $f, -g \in \text{Conv } X$, donde:

$\inf(f-g)(X) = \text{Sup}(g^+-f^*)(X^*)$. Luego:

x es una solución óptima de P si y solo si $\partial f(x) \cap \Delta g(x) \neq \emptyset$.

$\partial f(x) \cap \Delta g(x)$ será entonces el conjunto de soluciones óptimas de P^*.

Prueba:

Se tiene que:

$$g^+(y^*)-f^*(y^*) \leq \text{Sup } P^* = \inf P \leq f(y)-g(y) \quad \forall\, y \in X, y^* \in X^* \quad ..(I)$$

De otro lado se cumple:

$$y^* \in \partial f(x) \cap \Delta g(x) \iff g(y) + g^+(y^*) = \langle y^*,y\rangle = f(y) + f^*(y^*) \quad ....(II)$$

$\Rightarrow]$

Si x es una solución óptima de P entonces existe una solución óptima x^* de P^* donde $f(x)-g(x)= g^+(x^*)-f^*(x^*)$.

Ahora, puesto que:

$g(y)+ g^{+}(y) \leq \langle y^*,y\rangle \leq f(y)+f^*(y^*)\ \forall y\in X, y^*\in X^*$

se deduce que:

$g(x) + g^{+}(x^*) = \langle x^*,x\rangle = f(x) + f^*(x^*)$.

Luego, considerando (II) obtenemos que:

$x^*\in \partial f(x)\cap \Delta g(x)$.

$\Leftarrow$

Por hipótesis, $\partial f(x)\cap \Delta g(x) \neq \emptyset$.

Luego, siendo $x^*\in \partial f(x)\cap\Delta g(x)$ se deduce de (I) y (II) que (x,x^*) es solución óptima para (P,P^*).

Aplicaciones

<u>Teorema</u>. Sean X un espacio convexo, $f_k\in$ Conv X; $k = 1,\dots,n$ donde $f_2,f_3,\dots, f_n$ son continuas en algún punto de dom $f_1\cap(\bigcap_{k=2}^{n}$ int dom$f_k)$

Entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^* = \bigoplus_{k=1}^{n} f_k^* .$$

Demostración:

Por inducción según n:

Sea $n = 2$

Consideremos $y^*\in X^*$ cualquiera, $f = f_2$,

$g \equiv \langle y^*,.\rangle - f_1$.

Entonces:

$$g^{+}(x^*) = \inf_{x\in X} [\langle x^*,x\rangle - f(x)]$$

$$= \inf_{x \in X} [\langle x^*-y^*, x\rangle + f_1(x)]$$

$$= \inf_{x \in X} [-(\langle y^*-x^*, x\rangle - f_1(x))]$$

$$= -\sup_{x \in X} [\langle y^*-x^*, x\rangle - f_1(x)]$$

$$= -f_1^*(y^*-x^*).$$

Por otra parte:

$$(f_1+f_2)^*(y^*) = \sup_{x \in X} [\langle y^*, x\rangle - f_1(x) - f_2(x)]$$

$$= -\inf_{x \in X} [-\langle y^*, x\rangle + f_1(x) + f_2(x)]$$

$$= -\inf_{x \in X} (f(x)-g(x))$$

$$= -\sup_{x^* \in X^*} (g^+(x^*) - f^*(x^*)), \text{ usando el teorema de dualidad}$$

$$= -\sup_{x^* \in X^*} (-f_1^*(y^*-x^*) - f_2^*(x^*))$$

$$= \inf_{x^* \in X^*} (f_1^*(y^*-x^*) + f_2^*(x^*))$$

$$= (f_1^* \oplus f_2^*)(y^*)$$

Ahora, asumamos que el teorema es cierto para $n = m$. Luego:

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} f_k\right)^* (y^*) = \left(\sum_{k=1}^{m} f_k + f_{m+1}\right)^*(y^*)$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{m} f_k\right)^* \oplus f_{m+1}^*\right](y^*)$$

$$= \left[\left(\bigoplus_{k=1}^{m} f_k^* \right) \oplus f_{m+1}^* \right] (y^*)$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{m+1} f_k^* \, (y^*) \, .$$

Sean X un espacio topológico vectorial, $K \subset X$ convexo y $f \in \mathrm{Conv}\, X$.

Consideremos el programa convexo.

$$Q : \min_{x \in K} f(x)$$

Entonces Q se deja transformar en un programa de Fenchel

$$P : \min_{x \in X} (f-g)(x)$$

Elegimos la función cóncava $g = -\delta_K$

El programa Q es entonces equivalente al programa

$$P : \min_{x \in X} (f+\delta_K)(x)$$

A P asociamos el programa dual

$$P^* : \max_{x^* \in X^*} ((-\delta_K)^+ - f^*)(x^*)$$

El interés de esta transformación depende del grado de dificultad del cálculo de $(-\delta_K)^+, f^*$ y de la estructura de P^*.

Ejemplo: Sean X un espacio convexo, $K \subset X$ un cono convexo cerrado, $f \in \Gamma(X)$ una función que es contínua en algún punto de K. Entonces:

$\inf f(K) = -\inf f^*(K^+)$

donde $K^+ = \{ x^* \in X^* / \langle x^*, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in K \}$

Si K es un subespacio vectorial de X, esta relación se convierte en:

$\inf f(K) = -\inf f^*(K^\perp)$.

Veamos:

El teorema de dualidad establece:

$$\inf P = \operatorname{Sup} P^* \qquad ..(*)$$

Se tiene que:

$$\inf_{x \in X} (f+\delta_K)(x) = \inf_{x \in K} f(x) \qquad ..(I)$$

Por otra parte:

$$(-\delta_k)^+(x^*) = \inf_{x \in X} [\langle x^*, x \rangle + \delta_K(x)]$$

$$= \inf_{x \in K} \langle x^*, x \rangle$$

Siendo $x^* \in K^+$ se deduce que $(-\delta_K)^+(x^*) = 0$.

Si $x^* \notin K^+$ entonces existe $x \in K$ tal que :

$\langle x^*, x \rangle < 0 \implies$

$\lim_{\lambda \to \infty} \langle x^*, \lambda x \rangle = -\infty$

En consecuencia $(-\delta_K)^+(x^*) = -\delta_{K^+}(x^*)$.

Luego:

$$\operatorname{Sup}_{x^* \in X^*} ((-\delta_K)^+ - f^*)(x^*) = -\inf_{x^* \in X^*} (\delta_{K^+} + f^*)(x^*)$$

$$= -\inf_{x^* \in K^+} f^*(x^*) \quad ...(II)$$

De (*), (I) y (II) se obtiene:

$\inf f(K) = -\inf f^*(K^+)$.

Si K es un subespacio vectorial de X se tiene que:

$K^+ = K^\perp = \{ x^* \in X^* / \langle x^*, x \rangle = 0 \ \forall x \in K \}$

Por lo tanto:

$\inf f(K) = -\inf f^*(k^\perp)$.

Ejemplo: Sean $X = R^n$, $A \in \mathcal{M}(m,n)$ una matriz donde

$$A^T = [a_1, a_2, \ldots, a_m] ,$$

$c \in R^n$ y $b \in R^m$.

Consideremos el programa lineal

$$\begin{aligned} I : \text{Máx } & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \ . \end{aligned}$$

Usaremos la teoría de dualidad de Fenchel, para obtener el programa lineal dual I* de I:

Sean $g(x) = c^T x - \delta_{R^n_+}(x)$ y $K = \{ x \in R^n / Ax = b \}$

Entonces I es equivalente al programa

$$\underset{x \in R^n}{\text{Máx}} \ (g - \delta_K)(x) \text{ ó}$$

$$P : \underset{x \in R^n}{\text{mín}} \ (\delta_K - g)(x)$$

Se tiene que $f = \delta_K$ es convexa y g cóncava.

El programa dual es:

$$P^* : \underset{y \in R^n}{\text{Máx}} \ (g^+ - \delta^*_K)(y)$$

Vamos a calcular g^+ y δ_K^* :

Sea $g_k(t) = c_k t - \delta_{R_+}(t)$. Entonces:

$$g_k^+(s) = \inf_{t\in R} \{ st - g_k(t) \}$$

$$= \inf_{t \geq 0} [t(s-c_k)]$$

$$= \begin{cases} 0 & , s \geq c_k \\ -\infty & , s < c_k \end{cases} .$$

De ésto se obtiene

$$g^+(y) = \inf_{x\in R^n} [y^T x - g\ (x)]$$

$$= \inf_{x\geq 0} [y^T x - c^T x$$

$$= \inf_{x\geq 0} \sum_{k=1}^{n} (y_k - c_k) x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g_k^+ (y_k)$$

$$= \begin{cases} 0 , & y \geq c \\ -\infty , & y < c \end{cases} \qquad ..(I)$$

Se cumple:

$$\delta_K^*(y) = \operatorname{Sup}_{x\in R^n} [y^T x - \delta_K(x)]$$

$$= \operatorname{Sup}_{x\in K} y^T x$$

Ahora, si $\hat{x}\in K$ es cualquiera entonces:

$K = \hat{x} + \mathrm{Ker}A$. Luego:

Siendo $y\in(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$ se tiene que:

$\delta_K^*(y) = y^T\hat{x}$.

Si $y \notin (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ entonces $\delta_K^*(y) = \infty$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\ \delta_K^* &= (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} \\ &= \mathrm{Lin}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = A^T(R^m) \quad ..(II) \end{aligned}$$

Luego, considerando (I) y (II), el programa dual de Fenchel se reduce a:

$$P^* : \text{Máx} - y^T\hat{x}$$
$$y = A^T u, u\in R^m$$
$$y \geq c.$$

Más aún, $y^T\hat{x} = u^T A\hat{x} = u^T b$

$\Longrightarrow$

$$P^* : \text{Máx} - b^T u$$
$$A^T u \geq c$$
$$u \in R^m$$

En consecuencia, P* es equivalente al programa

$$I^* : \text{mín}\ b^T u$$
$$A^T u \geq c.$$

CAPITULO IV

SUBDIFERENCIALES DE ALGUNAS FUNCIONES

4.1 SUBDIFERENCIAL DE NORMAS

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Luego

$\partial\|0\| = \{ x^* \in X^* / \|x^*\| \leq 1 \}$

$\partial\|x\| = \{ x^* \in X^* / \|x^*\| = 1, \langle x^*, x \rangle = \|x\| \}$

donde $x \neq 0$

La primera igualdad se deduce directamente de la definición de subdiferencial, pues:

$x^* \in \partial\|0\| \iff$

$\|y\| \geq \langle x^*, y \rangle \ \forall\, y \in X \iff$

$\|x^*\| \leq 1.$

Veamos la última igualdad:

Sea $x^* \in \{ x^* \in X^* / \|x^*\| = 1, \langle x^*, x \rangle = \|x\| \}$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*, y \rangle \leq \|x^*\| \, \|y\| = \|y\|$

De donde:

$\|y\| \geq \|x\| + \langle x^*, y-x \rangle \ \forall\, y \in X.$

Es decir $x^* \in \partial \|x\|$.

Ahora sea $x^* \in \partial \|x\| \implies$

$\|0\| \geq \|x\| + \langle x^*, 0-x \rangle$

$\|2x\| \geq \|x\| + \langle x^*, 2x-x \rangle$

De donde:

$\langle x^*, x \rangle = \|x\|$.

Por otra parte, $\forall z \in X$, $\lambda > 0$ se tiene:

$\|\lambda z + x\| \geq \|x\| + \langle x^*, \lambda z + x - x \rangle$

Osea:

$\|z + \frac{x}{\lambda}\| \geq \frac{1}{\lambda} \|x\| + \langle x^*, z \rangle$

De donde, cuando $\lambda \to \infty$:

$\|z\| \geq \langle x^*, z \rangle \ \forall z \in X$

Más aún, considerando $-z$ se tiene:

$|\langle x^*, z \rangle| \leq \|z\| \implies$

$$\|x^*\| = \sup_{z \neq 0} \frac{|\langle x^*, z \rangle|}{\|z\|} \leq 1$$

Pero $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$, osea $\frac{|\langle x^*, x \rangle|}{\|x\|} = 1$
$\implies$

$\|x^*\| = 1$.

4.2 EL SUBDIFERENCIAL DE LA NORMA EN C(T)

Sea $x \in C(T)$ no trivial. Entonces:

$\partial \|x\|$ es el conjunto de las medidas regulares de Borel en T que satisfacen:

$$\int_T d|u| = 1 \qquad \ldots (I)$$

$$\int_T x(t)du = \|x\| \qquad \ldots(II).$$

Esto es debido al teorema de representación de Riesz.

Proposición. Una medida de Borel en T satisface (I) y (II) si y solo si $\int_T du^+ + \int_T du^- = 1$, la medida u^+ es soportada en T_x^+ mientras que u^- es soportada en T_x^-.

Prueba:

Se tiene que (I) es equivalente con $\int_T du^+ + \int_T du^- = 1$.

Luego, basta probar que (II) se cumple si y solo si u^+, u^- son soportadas en T_x^+ , T_x^- respectivamente.

Se cumple:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \int_T x(t)du \\ &= \int_T x(t)du^+ - \int_T x(t)\,du^- \\ &\leq \|x\| \int_T du^+ + \|x\| \int_T du^- = \|x\|.\end{aligned}$$

Esto implica que:

i) $\int_T x(t)\,du^+ = \|x\| \int_T du^+$

ii) $-\int_T x(t)du^- = \|x\| \int_T du^-$.

Ahora, supongamos que u^{+} no es soportada en T_x^{+} .
Entonces, existe $B \in B(T)$ con $T_x^{+} \cap B = \emptyset$ tal que
$|u^{+}|(B) = u^{+}(B) > 0$.
Luego, $u^{+}(T \setminus T_x^{+}) > 0$ y por la definición de T_x^{+} se cumple:

$$\int_T x(t)du^{+} < \int_{T_x^{+}} \|x\| \, du^{+} + \int_{T \setminus T_x^{+}} \|x\| \, du^{+}$$

$$= \|x\| \int_T du^{+} .$$

Lo que contradice a i).
Similarmente, si suponemos que u^{-} no es soportada en T_x^{-} , obtenemos un resultado que contradice a ii).
En consecuencia, u^{+}, u^{-} son soportadas en T_x^{+}, T_x^{-}, respectivamente.

$\Leftarrow$

$$\int_T x(t)du = \int_T x(t)du^{+} - \int_T x(t) \, du^{-}$$

$$= \int_{T_x^{+}} x(t)du^{+} - \int_{T_x^{-}} x(t)du^{-}$$

$$= \int_{T_x^{+}} \|x\| \, du^{+} + \int_{T_x^{-}} \|x\| \, du^{-}$$

$$= \int_T \|x\| \, du^{+} + \int_T \|x\| \, du^{-}$$

$$= \|x\| \int_T d \, |u| = \|x\| .$$

4.3 EL SUBDIFERENCIAL DE LA FUNCION $f(x) = \underset{t\in T}{\text{Máx}}\ x(t)$

Sean T un espacio compacto de Hausdorff, $f: C(T) \to \bar{R}$ donde $f(x) = \underset{t\in T}{\text{Máx}}\ x(t)$. Entonces:

i) $\partial f(0)$ es el conjunto de las medidas regulares de Borel en T que satisfacen:

$$\int_T x(t)\, du \leq f(x) \quad \forall\ x\in C(T) \qquad \ldots(I)$$

ii) $\partial f(x) = \left\{ u\in \partial f(0) / \int_T x(t)du = f(x) \right\}$

$\forall\ 0 \neq x\in X.$

Veamos:

Recordamos que f es convexa y homogénea.

i) Se sabe que:

$$\partial f(0) = \{ x^* C(T)^* / f(x) \geq \langle x^*, x\rangle \forall\ x\in C(T) \}$$

Luego, la afirmación se cumple teniendo en cuenta el teorema de representación de Riesz.

ii) Se deduce considerando el resultado:

Si f es convexa y homogénea entonces:

$$\partial f(x) = \{ x^* \in \partial f(0) / \langle x^*, x\rangle = f(x) \}$$

$\forall\ 0 \neq x\in X.$

<u>Proposición</u>. Una medida de Borel en T satisface (I) si y solo si:

$$\int_T du = 1,\ u \geq 0.$$

Prueba:

$\Rightarrow$

Se tiene que $\int_T x(t)\, du \leq \underset{t\in T}{\text{Máx}}\ x(t)\ \forall x \in C\ (T)$.

Luego, siendo $x \equiv \pm 1$ se deduce que

$$\int_T du = 1.$$

Ahora, veamos que u es no negativa:

Considerando (I) se cumple:

$$-\int_T x(t)\ du \leq \underset{t\in T}{\text{Máx}}\ [-x(t)]$$

$\Rightarrow$

$$\int_T x(t) du \geq -\underset{t\in T}{\text{Máx}}\ [-x(t)] = \underset{t\in T}{\text{mín}}\ x(t).$$

Entonces, siendo $x\in C(T)$, $x(t) \geq 0\ \forall\ t\in T$ se obtiene:

$$\int_T x(t)\ du \geq 0.$$ De ésto $u \geq 0$.

$\Leftarrow$

Sea $x\in C(T)$ cualquiera. Luego:

$$\int_T x(t)\ du \leq \int_T \underset{t\in T}{\text{Máx}}\ x(t)\ du$$

$$= \underset{t\in T}{\text{Máx}}\ x(t) \int_T du$$

$$= \underset{t\in T}{\text{Máx}}\ x(t)\ .$$

<u>Proposición</u>. Sea u una medida regular de Borel en T con $\int_T du = 1$, $u \geqslant 0$. Luego:

$u \in \partial f(x)$ si y solo si u es soportada en $T_x = \{ t \in T / x(t) = f(x) \}$.

$\Longrightarrow$ Siendo $u \in \partial f(x)$ se tiene que:

$$\int_T x(t)\, du = f(x) \qquad \ldots.(*)$$

Ahora, supongamos que u no es soportada en T_x.

Entonces existe $B \in B(T)$ con $T_x \cap B = \emptyset$ tal que $|u|(B) = u(B) > 0$.

Luego, $u(T \setminus T_x) > 0$ y se cumple:

$$\int_T x(t)\, du = \int_{T_x} x(t)\, du + \int_{T\setminus T_x} x(t)\, du$$

$$< \int_{T_x} f(x)\, du + \int_{T\setminus T_x} f(x)\, du$$

$$= f(x) \int_T du = f(x) .$$

Lo que contradice a $(*)$.

En consecuencia, u es soportada en $T_x = \{ t \in T / x(t) = f(x) \}$.

$\Longleftarrow$ Puesto que u es una medida regular de Borel en T con $\int_T du = 1$, $u \geqslant 0$ se tiene que

$u \in \partial f(0)$.

Por otra parte:

$$\int_T x(t)\,du = \int_{T_x} x(t)\,du + \int_{T\setminus T_x} x(t)\,du$$

$$= \int_{T_x} x(t)\,du = \int_{T_x} f(x)\,du$$

$$= \int_T f(x)\,du = f(x)\int_T du = f(x)$$

Luego, $u \in \partial f(x)$.

4.4 EL SUBDIFERENCIAL DE LA FUNCION $f(x) = \max_{t\in T} \varphi(t,x(t))$

Sean T un espacio compacto de Hausdorff, $\varphi: T\times R^n \to R$ una función continua tal que $\varphi(t,.)$ es continuamente diferenciable $\forall t \in T$.

Luego, si consideramos $f: C_n(T) \to R$ definida por $f(x) = \max_{t\in T} \varphi(t,x(t))$ entonces

$\partial f(x)$ es el conjunto de las funcionales $x^* \in C_n(T)^*$ que tienen la representación

$$\langle x^*, y \rangle = \int_T \varphi_x(t,x(t))^T\, y(t)\,du$$

donde u es una medida regular no negativa de Borel en T con $\|u\| = 1$, que es soportada en $T_x = \{ t\in T / \varphi(t,x(t)) = f(x) \}$

Veamos:

Consideremos:

$\Psi: C_n(T) \to C(T)$ definida por:

$[\psi(x)](t) = \varphi(t,x(t))$ y

$F : C(T) \longrightarrow R$ definida por:

$F(y) = \underset{t \in T}{\text{Máx}}\ y(t)$.

Luego, se tiene que $f = F \circ \psi$.

La aplicación ψ es Frechet diferenciable y se cumple:

$[\psi'(x)\, y\,](t) = \varphi_x(t,x(t))^T\, y(t)$ (ver [9], pág. 39).

Por otra parte, F es una función convexa, homogénea y finita.

Además, como $|F(y)| \leq \|y\|$ se deduce que F es continua en C(T).

Usaremos el siguiente resultado:

$\partial f(x) = \psi'(x)^* \partial F(\psi x)$.

$C_n(T) \xrightarrow{\psi'(x)} C(T)$, $\psi'(x) \in L(C_n(T), C(T))$

$C_n(T)^* \xleftarrow{\psi'(x)^*} C(T)^*$.

Luego, siendo $x^* \in \partial f(x)$ se tiene que

$x^* = \psi'(x)^* u$ donde $u \in \partial F(\psi x)$.

Pero sabemos que $\partial F(\psi x)$ consiste en las medidas regulares de Borel u con $\int_T du = 1$, $u \geq 0$, que son soportadas en $\{t \in T / [\psi x](t) = F(\psi x)\}$.

Ahora, teniendo en cuenta la definición del operador dual, se cumple para:

$x \in C_n(T)$, $y \in C_n(T)$, $u \in \partial F(\psi x)$:

$\langle x^*, y \rangle = \langle \psi'(x)^* u, y \rangle = \langle u \circ \psi'(x), y \rangle$

$$= \langle u, \psi'(x)y \rangle = \int_T [\psi'(x)y](t)\ du$$

$$= \int_T \varphi_x(t,x(t))^T\ y\ (t)\ du$$

donde u es una medida regular no negativa de Borel en T con $\|u\| = 1$, que es soportada en $T_x = \{ t \in T / \psi(t,x(t) = f(x) \}$.

CAPITULO V

ε-SUBDIFERENCIALES Y ε-DERIVADAS DIRECCIONALES

5.1 DEFINICION Y PROPIEDADES DEL ε-SUBDIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Definición. Sean X un espacio topológico vectorial real, $f: X \rightarrow \bar{R}$ una función, $x \in X$ y $\varepsilon \geqslant 0$.

Luego:

$\partial_\varepsilon f(x) = \{ x^* \in X^* / f(y) \geqslant f(x) + \langle x^*, y-x \rangle - \varepsilon \ \forall y \in X \}$

Se llama ε-subdiferencial de la función f en el punto x.

Un elemento de $\partial_\varepsilon f(x)$ es llamado un ε-subgradiente de f en x.

Se dice que f es ε-subdiferenciable en x.

si $\partial_\varepsilon f(x) \neq \emptyset$.

Ejemplos:

1. Sea $f(x) = \langle x^*, x \rangle + r$ donde $x^* \in X^*, r \in R$, enton-

ces $\partial_\varepsilon f(x) = \{ x^* \}$

Veamos:

Sea $y^* \in \partial_\varepsilon f(x)$. Luego:

$f(y) \geq f(x) + \langle y^*, y-x \rangle - \varepsilon \;\forall y \in X$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*, y \rangle \geq \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y-x \rangle - \varepsilon \;\forall y \in X$

$\Longrightarrow$

$\langle x^* - y^*, y-x \rangle \geq -\varepsilon \;\forall y \in X.$

De ésto se deduce que

$y^* = x^*.$

2. Sean $X = R^n$, $A \in \mathcal{M}(n,n)$ una matriz simétrica definida positiva. Luego, si $f(x) = \langle Ax, x \rangle = x^T Ax$, entonces

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{ x^* \in X^* / x^* = 2Ax + r;\; r \in R^n, r^T A^{-1} r \leq 4\varepsilon \}$$

Veamos:

Sea $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ representado en la forma $x^* = \nabla f(x) + r = 2Ax + r$, $r \in R^n$. Luego:

$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle - \varepsilon \;\forall y \in X.$

$\Longrightarrow$

$y^T Ay \geq x^T Ax + \langle 2Ax + r, y-x \rangle - \varepsilon \;\forall y \in X.$

$\Longrightarrow$

$y^T Ay - x^T Ax \geq 2(y-x)^T Ax + (y-x)^T r - \varepsilon \;\forall y \in X.$

De ésto se deduce que:

$(y-x)^T A(y-x) - (y-x)^T r + \varepsilon \geq 0 \;\forall y \in X \ldots (*)$

El mínimo de esta expresión es alcanzado para $\hat{y} = \frac{1}{2} A^{-1} r + x.$

Entonces $(*)$ es reducido a:

$(\frac{1}{2} A^{-1} r)^T A (\frac{1}{2} A^{-1} r) - (\frac{1}{2} A^{-1} r)^T r + \varepsilon \geq 0$

$\Longrightarrow$

$\frac{1}{4}\, r^T A^{-1} r - \frac{1}{2}\, r^T A^{-1} r + \varepsilon \geqslant 0$

$r^T A^{-1}\; r \leqslant 4\varepsilon.$

3. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Luego:

$\partial_\varepsilon \|0\| \;= \{ x^* \in X^* / \; \|x^*\| \leq 1$

$\partial_\varepsilon \|x\| \;= \{ x^* \in X^* / \; \|x^*\| \leq 1, \; |\langle x^*, x\rangle - \|x\|| \leq \varepsilon$

donde $x \neq 0$.

La primera igualdad se deduce directamente de la definición de ε-subdiferencial, pues:

$x^* \in \partial_\varepsilon \|0\| \qquad \Longleftrightarrow$

$\|y\| \geqslant \langle x^*, y\rangle - \varepsilon \;\; \forall\, y \in X \qquad \Longleftrightarrow$

$\dfrac{\langle x^*, y\rangle}{\|y\|} \leqslant 1 + \dfrac{\varepsilon}{\|y\|} \;\; \forall\, y \in X \qquad \Longleftrightarrow$

$\|x^*\| \leq 1.$

Veamos la última igualdad:

Sea $x^* \in \{ x^* \in X^* / \; \|x^*\| \leq 1, \; |\langle x^*, x\rangle - \|x\|| \leq \varepsilon \}$
$\Longrightarrow$
$\langle x^*, y\rangle \leq \|x^*\| \, \|y\| \leq \|y\| \;\; \forall\, y \in X$

De donde, considerando $-(\langle x^*, x\rangle - \|x\|) \leq \varepsilon$

se obtiene:

$\|y\| \geqslant \|x\| + \langle x^*, y - x\rangle - \varepsilon \;\forall\, y \in X.$

Es decir $\;x^* \in \partial_\varepsilon \|x\|$

Ahora sea $x^* \in \partial_\varepsilon \|x\| \qquad \Longrightarrow$

$\|0\| \geqslant \|x\| + \langle x^*, 0 - x\rangle - \varepsilon$

$\|2x\| \geqslant \|x\| + \langle x^*, 2x - x\rangle - \varepsilon$

De donde:

$|\langle x^*,x\rangle - \|x\|| \leq \varepsilon.$

Por otra parte, $\forall z \in X$, $\lambda > 0$ se tiene:

$\|\lambda z+x\| \geq \|x\| + \langle x^*, \lambda z+x-x\rangle - \varepsilon$

Osea:

$\| z+ \frac{x}{\lambda}\| \geq \frac{1}{\lambda} \|x\| + \langle x^*,z\rangle - \varepsilon$

De donde, cuando $\lambda \to \infty$:

$\|z\| \geq \langle x^*,z\rangle - \varepsilon \quad \forall z \in X$

Más aún, considerando $-z$ se tiene

$|\langle x^*,z\rangle| \leq \|z\| + \varepsilon \quad \Longrightarrow$

$$\|x^*\| = \operatorname*{Sup}_{z\neq 0} \frac{|\langle x^*,z\rangle|}{\|z\|} \leq 1+\operatorname*{Sup}_{z\neq 0} \frac{\varepsilon}{\|z\|} = 1$$

$\Longrightarrow$

$\|x^*\| \leq 1.$

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f \in \Gamma_0(X)$. Entonces

$\partial_\varepsilon f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f, \quad \varepsilon > 0.$

Prueba:

Puesto que $f \in \Gamma_0(X)$, para $y \in X$ se tiene:

$f(y) = \operatorname*{Sup}_{(x^*,r)\in I} [\langle x^*,y\rangle + r]$, donde $I \subset X^* x R$..(*)

Más aún, $I = \{(x^*,r) \in X^* x R / \langle x^*,y\rangle + r \leq f(y) \; \forall y \in X\}$

Entonces, siendo $f(x) = \operatorname*{Sup}_{(x^*,r)\in I} [\langle x^*,x\rangle + r]$

existen $x^* \in X^*$, $r \in R$ tal que

$f(x) - \varepsilon < \langle x^*,x\rangle + r.$

Luego, de ésto y (*) se obtiene:

$$f(y) \geq \langle x^*, y \rangle + r$$
$$= \langle x^*, y-x \rangle + \langle x^*, x \rangle + r.$$
$$\geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle - \varepsilon \ \forall y \in X.$$

Es decir

$$x^* \in \partial_\varepsilon f(x).$$

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \bar{R}$ una función, $x \in X$ y $\varepsilon \geq 0$.

Luego:

$x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ si y solo si

$$0 \leq f(x) + f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \leq \varepsilon.$$

Prueba:

$$x^* \in \partial_\varepsilon f(x) \iff$$
$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle - \varepsilon \ \forall y \in X \iff$$
$$\langle x^*, y \rangle - f(y) \leq \langle x^*, x \rangle - f(x) + \varepsilon \ \forall y \in X \iff$$
$$\sup_{y \in X} [\langle x^*, y \rangle - f(y)] \leq \langle x^*, x \rangle - f(x) + \varepsilon \iff$$
$$f(x) + f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \leq \varepsilon \quad \ldots (I)$$

Por otra parte, la desigualdad de Young-Fenchel establece:

$$\langle x^*, x \rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$$

O sea:

$$0 \leq f(x) + f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \quad \ldots (II)$$

Luego, de (I) y (II) se obtiene el resultado.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \bar{R}$ una función $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Luego:

i) $\partial_\varepsilon f(x)$ es convexo y $\tau(X^*,X)$-cerrado

ii) Si f es continua en $x \in X$ entonces $\partial_\varepsilon f(x)$ es $\tau(X^*,X)$-compacto.

Prueba:

i) Se tiene que:

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{ x^* \in X^* / f(x) + f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \leq \varepsilon \}$$
$$= \{ x^* \in X^* / f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \leq \varepsilon - f(x) \}$$

Sea $\varphi_x(x^*) = f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle$. Luego, puesto que φ_x es convexa se obtiene que $\partial_\varepsilon f(x)$ es convexo. También, siendo φ_x inferiormente semicontinua se deduce, de la primera proposición del Cap. I. 1.5, que $\partial_\varepsilon f(x)$ es $\tau(X^*,X)$-cerrado.

ii) Sea $\lambda > \varepsilon$, entonces

$$U = \{ u \in X / f(u+x) - f(x) < \lambda - \varepsilon \}$$

es una vecindad de θ. En consecuencia

$V = 1/\lambda \; U$ también lo es.

El polar de V es:

$$V^\circ = \{ x^* \in X^* / \langle x^*, v \rangle \leq 1 \;\; \forall\, v \in V \}$$

Sea $x^* \in \partial_\varepsilon f(x) \implies$

$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle - \varepsilon \;\; \forall y \in X.$

De donde, considerando $y = u+x$:

$f(u+x) \geq f(x) + \langle x^*,u\rangle - \varepsilon \ \forall u \in U$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*,u\rangle - \varepsilon \leq f(u+x) - f(x) < \lambda - \varepsilon \ \forall u \in U$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*,u\rangle \leq \lambda \ \forall u \in U$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*,v\rangle \leq 1 \ \forall v \in V.$

Luego, $\partial_\varepsilon f(x) \subset V^\circ$. Pero V° es $\tau(X^*,X)$-compacto, por lo tanto $\partial_\varepsilon f(x)$ también lo es.

<u>Propiedad</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \bar{R}$ una función, $x \in X$ y $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$.

Entonces:

$$\partial_{\varepsilon_1} f(x) \subset \partial_{\varepsilon_2} f(x).$$

Veamos:

Sea $x^* \in \partial_{\varepsilon_1} f(x) \quad \Longrightarrow$

$f(y) \geq f(x) + \langle x^*,y-x\rangle - \varepsilon_1$

$\quad \geq f(x) + \langle x^*,y-x\rangle - \varepsilon_2 \ \forall y \in X.$

Luego, $x^* \in \partial_{\varepsilon_2} f(x)$.

.2 <u>CONTINUIDAD SUPERIOR DE LA CORRESPONDENCIA $\partial_\varepsilon f$</u>

<u>Proposión</u>. Sean X un espacio convexo, $f: X \to \bar{R}$ una función convexa, continua y finita en $x \in X$, y $\varepsilon \geq 0$. Entonces existen una vecindad V de x en la topología de Mackey y un conjunto $\tau(X^*,X)$-compacto $K^* \subset X^*$ tal que $\partial_{2\varepsilon} f(V) \subset K^*$.

Prueba:

Puesto que f es continua en x, existe una vecindad $U \in \mathcal{T} \subset t(X,X^*)$ tal que

$|f(u) - f(x)| \leq 1/2 \ \forall u \in x+U.$

Por la definición de la topología de Mackey existe un conjunto absolutamente convexo y $\tau(X^*,X)$-compacto $A\subset X^*$ tal que $A^\circ+A^\circ\subset U$.

Por consiguiente se cumple:

$|f(u)-f(x)| \leq 1/2 \; \forall u\in x+A^\circ+A^\circ \qquad (*)$

Se tiene que $V = x+A^\circ$ es una vecindad de x en la topología de Mackey. Además, $K^* = (1+2\varepsilon)A$ es un conjunto $\tau(X^*,X)$-compacto.

Ahora, sea $x^*\in \partial_{2\varepsilon}f(V)$ entonces $x^*\in \partial_{2\varepsilon}f(y)$ para algún $y\in V$.

Luego:

$f(y+z) \geq f(y) + \langle x^*,z\rangle -2\varepsilon \;\; \forall z\in A^\circ$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*,z\rangle \leq f(y+z)-f(y) + 2\varepsilon$

$\qquad \leq |f(y+z)-f(x)| + |f(y)-f(x)| +2\varepsilon$

$\qquad \leq 1+2\varepsilon$, debido a $(*)$.

De ésto:

$\langle (1+2\varepsilon)^{-1} x^*,z\rangle \leq 1 \quad \forall\; z\in A^\circ$

Osea, $(1+2\varepsilon)^{-1}x^* \in (A^\circ)^\circ = A$

$\Longrightarrow$

$x^* \in (1+2\varepsilon)\, A = K^*$

Por lo tanto, $\partial f_{2\varepsilon}(V)\subset K^*$.

<u>Proposición.</u> Sean X un espacio convexo, $f\colon X\to \bar{R}$ una función convexa, continua y finita en $\hat{x}\in X$ y $\hat{\varepsilon} \geq 0$. Entonces $\partial_{\varepsilon} f\colon X\times R_+\longrightarrow X^*$ es cerrada y superiormente contínua en $(\hat{x},\hat{\varepsilon})$ respecto a las topologías $t(X,X^*)$ y $\tau(X^*,X)$.

Prueba:

Veamos que $\partial_{\varepsilon} f$ es cerrada en $(\hat{x},\hat{\varepsilon})$: Sean $\{(x_k,\varepsilon_k)\}$ $\subset X \times R_+$, $\{x_k^*\} \subset \partial_{\varepsilon_k} f(x_k)$

sucesiones tales que:

$\lim\limits_{k\to\infty} (x_k,\varepsilon_k) = (\hat{x},\hat{\varepsilon})$ en $t(X,X^*)$,

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k^* = x^*$.

Debemos probar que $x^* \in \partial_{\hat{\varepsilon}} f(\hat{x})$:

Se tiene que

$f(x) \geq f(x_k) + \langle x_k^*, x-x_k\rangle - \varepsilon_k \quad \forall\, x \in X \quad (*)$

Como f es continua en $\hat{x}$ y $t(X,X^*)$ es más fina que $\mathcal{T}$, se cumple:

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(\hat{x}) \qquad \ldots(I)$

De $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^* = x^*$, obtenemos que

$\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k^*, x\rangle = \langle x^*,x\rangle \; \forall\, x \in X \quad \ldots(II)$

Ahora, veamos que

$\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k^*, x_k\rangle = \langle x^*,\hat{x}\rangle$:

Sabemos que existen una vecindad V de $\hat{x}$ en la topología de Mackey y un conjunto $\tau(X^*,X)$-compacto $K^* \subset X^*$ tal que $\partial_{2\hat{\varepsilon}} f(V) \subset K^*$.

Más aún:

$V = \hat{x} + A^\circ$, $K^* = (1+2\hat{\varepsilon})A$ donde A es un conjunto absolutamente convexo y $\tau(X^*,X)$-compacto.

Como $\lim_{k\to\infty} (x_k,\varepsilon_k) = (\hat{x},\hat{\varepsilon})$, podemos asumir que

$(x_k,\varepsilon_k) \in V \times [0,2\hat{\varepsilon}] \quad \forall k$

Luego, siendo $x_k^* \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k) \subset \partial_{2\hat{\varepsilon}} f(V) \subset (1+2\hat{\varepsilon})A$ se tiene que

$(1+2\hat{\varepsilon})^{-1} x^*_k \in A \quad \forall k \quad \ldots(1)$

Por otra parte, sea $\delta \in \langle 0,1\rangle$ cualquiera.

Como $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x}$, existe un k_0 tal que

$(1+2\hat{\varepsilon})(x_k-\hat{x}) \in \delta/2\, A^\circ \quad \forall k \geq k_0$

O sea:

$2/\delta\ (1+2\hat{\varepsilon})\ (x_k-\hat{x}) \in A^\circ \quad \forall\ k \geq k_0 \quad ..(2)$

De (1) y (2) se deduce que:

$|\langle x_k^*,\ 2/\delta\ (x_k-\hat{x})\rangle| =$

$|\langle (1+2\hat{\varepsilon})^{-1} x_k^*,\ 2/\delta (1+2\hat{\varepsilon})\ (x_k-\hat{x})\rangle| \leq 1$

$\forall\ k \geq k_0$

En consecuencia:

$|\langle x_k^*\ ,\ x_k-\hat{x}\ \rangle| \leq \delta/2 \quad \forall k \geq k_0 \quad \ldots(3)$

Como $\lim_{k\to\infty} x_k^* = x^*$, existe un $k_1 \geq k_0$

tal que

$|\langle x_k^* - x^*,\hat{x}\rangle| \leq \delta/2 \quad \forall k \geq k_1 \quad \ldots(4)$

De (3) y (4) obtenemos:

$|\langle x_k^*,\ x_k\rangle - \langle x^*,\ \hat{x}\rangle| \leq$

$|\langle x_k^*,\ x_k\rangle - \langle x_k^*,\ \hat{x}\rangle| + |\langle x_k^*,\ \hat{x}\rangle - \langle x^*,\hat{x}\rangle| =$

$|\langle x_k^*,\ x_k-\hat{x}\rangle| + |\langle x_k^*-x^*,x\rangle| \leq \delta \quad \forall k \geq k_1$

$\Longrightarrow$

$\lim_{k \to \infty} \langle x_k^*, x_k \rangle = \langle x^*, \hat{x} \rangle$ ...(III)

Luego, considerando (I),(II),(III) y $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = \hat{\varepsilon}$

en (*) se deduce que

$f(x) \geq f(\hat{x}) + \langle x^*, x - \hat{x} \rangle - \hat{\varepsilon} \quad \forall x \in X.$

Por lo tanto:

$x^* \in \partial_{\hat{\varepsilon}} f(\hat{x}).$

Finalmente, veamos que $\partial_{\varepsilon} f$ es superiormente contínua en $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$:

Tenemos que $\partial_{\varepsilon} f\colon X \times R_+ \longrightarrow X^*$ es una correspondencia cerrada **en** $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$. Además, existen una vecindad $V \times W$ de $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$ y un conjunto $\tau(X^*, X)$-compacto $K^* \subset X^*$ tal que $\partial_{\varepsilon} f(x) \subset \partial_{2\hat{\varepsilon}} f(x) \subset K^* \quad \forall (x, \varepsilon) \in V \times W$.

Entonces, según la segunda proposición del Cap. I, 1.8, $\partial_{\varepsilon} f$ es superiormente continua en $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$.

5.3 DEFINICION Y PROPIEDADES DE LA ε-DERIVADA DIRECCIONAL.

Definición. Sean X un espacio topológico vectorial, $f\colon X \to \bar{R}$, x, u elementos de X y $\varepsilon \geq 0$. Luego:

$$\frac{\partial_{\varepsilon} f(x)}{\partial u} = \sup_{x^* \in \partial_{\varepsilon} f(x)} \langle x^*, u \rangle$$

se llama la ε-derivada de la función f en el punto x en la dirección u.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio convexo, $f: X \longrightarrow \bar{R}$ una función convexa propia y contínua en $x \in \mathrm{dom} f$, $u \in X$ y $\varepsilon \geqslant 0$.

Entonces:

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u} = \inf_{\lambda>0} \lambda^{-1} [f(x+\lambda u)-f(x)+\varepsilon].$$

Prueba:

Puesto que $\partial f(x) \subset \partial_\varepsilon f(x)$ se tiene que $\partial_\varepsilon f(x) \neq \emptyset$.

Más aún $\partial_\varepsilon f(x)$ es $\tau(X^*,X)$-compacto.

Luego, $\dfrac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u}$ es finito

Sea $x^* \in \partial_\varepsilon f(x) \quad \Longrightarrow$

$f(y) \geqslant f(x) + \langle x^*, y-x\rangle - \varepsilon \quad \forall\, y \in X \quad \Longrightarrow$

$f(x+\lambda u) \geqslant f(x) + \langle x^*, \lambda u\rangle - \varepsilon \quad \forall \lambda>0 \quad \Longrightarrow$

$\langle x^*, u\rangle \leq \lambda^{-1} [f(x+\lambda u)-f(x)+\varepsilon]$

De ésto se deduce que:

$$\sup_{x^* \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle x^*, u\rangle \leq \inf_{\lambda>0} \lambda^{-1} [f(x+\lambda u)-f(x)+\varepsilon]$$

Denotemos $h(\lambda) = \lambda^{-1} [f(x+\lambda u)-f(x)+\varepsilon]$

y $\alpha = \inf_{\lambda>0} h(\lambda)$, entonces

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u} \leqslant \alpha \quad \ldots (I)$$

Además, se tiene que α es finito.

Ahora, consideremos los conjuntos

$P=\{(y,r)\in XxR/f(y) < r\}$

$Q=\{(y,r)\in XxR/y = x+\lambda u,\quad r= f(x)+\lambda\alpha - \varepsilon, \lambda\ 0\}$

Veamos que $P\cap Q=\emptyset$:

Supongamos que $P\cap Q\neq\emptyset$ entonces existen y, r, λ

tal que: $\quad f(y) < r$

$y = x+\lambda u,\quad r = f(x)+\lambda\alpha-\varepsilon,\ \lambda>0$

$\Longrightarrow$

$f(y) < f(x)+\lambda\alpha -\varepsilon$

$\Longrightarrow$

$f(x+\lambda u) < f(x)+\lambda\alpha -\varepsilon$

$\Longrightarrow$

$\lambda^{-1}\,[f(x+\lambda u)-f(x)+\varepsilon] < \alpha$.

O sea, existe $\lambda>0$ tal que $h(\lambda) < \alpha$.

Lo cual es una contradicción.

Luego, teniendo en cuenta que P y Q son convexos e int $P\neq\emptyset$, por el teorema de separación, existe $(\Lambda,c)\in X^*xR$ no trivial, tal que

$\Lambda y+cr\leq\Lambda z+cs\quad\forall (y,r)\in\bar{P},\quad (z,s)\in Q$

$\Longrightarrow$

$\langle\Lambda,y\rangle+cr \leq \langle\Lambda, x+\lambda u\rangle + c(f(x)+\lambda\alpha-\varepsilon)\qquad (*)$

$\forall$ y,r, λ tal que $f(y)\leq r,\ \lambda\geq 0$.

Haciendo $y = x,\ \lambda= 0$ tenemos:

$c(r-f(x)+\varepsilon)\leq 0\quad\forall r\in[f(x),\infty\rangle$

$\Longrightarrow$

$c\leq 0$.

Asumamos que $c = 0$, entonces de (*), para $\lambda= 0$, se deduce

$\langle\Lambda, y-x\rangle\leq 0\quad\forall\ y\in\operatorname{dom} f$.

Pero $x \in$ int domf, pues f es contínua y $f(x) < \infty$, entonces $\Lambda = 0$, lo cual contradice que $(\Lambda, c) \neq 0$. En consecuencia $c < 0$.

Luego, de (*), para $r = f(y)$, $\lambda = 0$ se obtiene

$f(y) \geq f(x) + \langle -c^{-1}\Lambda, y-x \rangle - \varepsilon \quad \forall y \in X$

O sea:

$x^* = -c^{-1}\Lambda \in \partial_\varepsilon f(x)$.

Por otra parte, de (*), para $y = x$, $r = f(x)$, se deduce:

$$0 \leq \langle \Lambda, \lambda u \rangle + c(\lambda\alpha - \varepsilon)$$
$$\Longrightarrow \lambda\alpha \leq \langle -c^{-1}\Lambda, \lambda u \rangle + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \alpha \leq \langle x^*, u \rangle + \lambda^{-1}\varepsilon \quad \forall \lambda > 0$$

Luego, cuando $\lambda \to \infty$ obtenemos

$$\alpha \leq \langle x^*, u \rangle \leq \sup_{x^* \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle x^*, u \rangle = \frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u} \qquad \ldots(II)$$

Por lo tanto, de (I) y (II) se concluye que:

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u} = \inf_{\lambda > 0} \lambda^{-1} \left[f(x+\lambda u) - f(x) + \varepsilon \right].$$

5.4 PUNTO ε-ESTACIONARIO Y DIRECCION DE ε-DESCENSO MAS RAPIDO

Definición. Sean X un espacio topológico vectorial, $f : X \to \bar{R}$, $x \in X$ y $\varepsilon \geq 0$. Luego, x se llama punto ε-estacionario si $0 \in \partial_\varepsilon f(x)$.

<u>Propiedad</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: X \to \bar{R}$, $x \in X$ y $\varepsilon \geq 0$. Luego: x es un punto ε-estacionario de f si y solo si $f^* \leq f(x) \leq f^*+\varepsilon$ donde $f^* = \inf\limits_{x \in \mathrm{dom} f} f(x)$.

Veamos:

Se sabe que

$x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ si y solo si

$0 \leq f(x) + f^*(x^*) - \langle x^*, x\rangle \leq \varepsilon$

Luego :

$0 \in \partial_\varepsilon f(x)$ si y solo si

$0 \leq f(x) + f^*(0) \leq \varepsilon$

Pero $f^*(0) = \sup\limits_{x \in X} [-f(x)] = -\inf\limits_{x \in X} f(x) = -\inf\limits_{x \in \mathrm{dom} f} f(x)$

$= -f^*$.

Por lo tanto, se deduce que:

x es un punto ε-estacionario de f si y solo si

$f^* \leq f(x) \leq f^*+\varepsilon$.

<u>Proposición</u>. Sean X un espacio topológico vectorial, $f: C \to \bar{R}$ donde $C \subset X$ es convexo y cerrado, y $x \in C$. Luego, si $\partial_\varepsilon f(x) \cap \Gamma^+(x) \neq \emptyset$ entonces x es un punto ε-estacionario de f.

Prueba:

Se tiene que existe $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ y $x^* \in \Gamma^+(x)$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*, u\rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in \Gamma(x)$

$\Longrightarrow$

$\langle x^*, y-x \rangle \geq 0 \quad y \in C \quad \ldots (*)$

Por otra parte

$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle - \varepsilon \; \forall y \in X.$

En consecuencia, considerando (*), se deduce que

$f(y) \geq f(x) - \varepsilon \quad \forall \; y \in C.$

$\Rightarrow$

$f^* \leq f(x) \leq f^* + \varepsilon$ donde $\inf\limits_{x \in \mathrm{dom} f} f(x)$

$\Rightarrow$

x es un punto ε-estacionario de f.

<u>Propiedad</u>. Sean X un espacio de Hilbert real, $f \in \mathrm{Conv}\, X$ y $x \in X$ tal que $f(x) \in R$.

Luego, si x no es un punto ε-estacionario y

$u^* = -\dfrac{\hat{x}^*}{\|\hat{x}^*\|}$ donde $\hat{x}^*$ es la proyección de 0 sobre $\partial_\varepsilon f(x)$, entonces

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial \hat{u}^*} = \min \left\{ \frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u} / \; \|u\| = 1 \right\}.$$

Veamos:

Puesto que x no es un punto ε-estacionario entonces $0 \notin \partial_\varepsilon f(x)$.

Además, se tiene que $\hat{x}^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ tal que

$\|\hat{x}^*\| \leq \|x^*\| \quad \forall \quad x^* \in \partial_\varepsilon f(x).$

Según la condición necesaria y suficiente de proyección del Cap. I. 1. 9 se cumple:

$\|\hat{x}^*\|^2 \leq \langle \hat{x}^*, x^* \rangle \quad \forall \quad x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$

$\Rightarrow$

$$\langle -\frac{\hat{x}^*}{\|\hat{x}^*\|}, x^* \rangle \leq -\|\hat{x}^*\|$$

$$\Longrightarrow$$

$\langle \hat{u}^*, x^* \rangle \leq -\|\hat{x}^*\|$. O sea:

$\langle x^*, \hat{u}^* \rangle \leq -\|\hat{x}^*\| \quad \forall\, x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$

Para $\hat{x}^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ se obtiene:

$$\langle \hat{x}^*, \hat{u}^* \rangle = -\|\hat{x}^*\|$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial \hat{u}^*} = \sup_{x^* \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle x^*, \hat{u}^* \rangle = -\|\hat{x}^*\| .$$

Por otra parte, siendo u con $\|u\| = 1$ cualquiera se tiene

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u} = \sup_{x^* \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle x^*, u \rangle \geq \langle \hat{x}^*, u \rangle \geq -\|\hat{x}^*\| = \frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial \hat{u}^*}$$

En consecuencia:

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial \hat{u}^*} = \min \left\{ \frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial u} \ / \ \|u\| = 1 \right\} .$$

<u>Definición</u>. Sean X un espacio de Hilbert real, $f \in$ Conv X y $x \in X$ tal que $f(x) \in R$.

Luego, si x no es un punto ε-estacionario entonces $\hat{u}^* = -\dfrac{\hat{x}^*}{\|\hat{x}^*\|}$ donde $\hat{x}^*$ es la proyección de 0 sobre $\partial_\varepsilon f(x)$ se llama la dirección de ε-descenso más rápido de la función f en el punto x.

5.5 METODO DE PLANOS CORTANTES CON SUBGRADIENTES

Sean $X = R^n$, $C \in R^n$ y $f_i : R^n \longrightarrow R$, $i=1,2,\ldots,m$ funciones convexas.

Siendo $S = \{ x \in R^n / f_i(x) \leq 0 \ \forall i \}$ contenido en un poliedro compacto S_0, consideramos el programa

$$P : \min_{x \in S} c^T x$$

El algoritmo genera una sucesión de poliedros $\{ S_k \}$ y una sucesión de puntos $\{ x^k \}$ tal que

$S_0 \supset S_k \supset S_{k+1} \supset S \quad \forall k$, de acuerdo a las siguientes prescripciones:

a) Si $S_k = \emptyset$ entonces $S = \emptyset$ y el algoritmo termina.

Si $S_k \neq \emptyset$ entonces se determina x^k como una solución óptima del programa $P_k : \min_{x \in S_k} c^T x$

Si $x^k \in S$ entonces x^k es una solución óptima de P y el algoritmo termina. En otro caso ir a b).

b) Se determina un índice r tal que $f_r(x^k) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x^k)$

y se elige $x_k^* \in \partial f_r(x^k)$.

Puesto que $x^k \notin S$ entonces $f_r(x^k) > 0$.

Además, como f_r es continua, según el teorema del Capítúlo II 2.1 se deduce que $\partial f_r(x^k) \neq \emptyset$.

Siendo :

$H_k = \{ x \in R^n / f_r(x^k) + \langle x_k^*, \ x - x^k \rangle \leqslant 0 \}$

Consideramos $S_{k+1} = S_k \cap H_k$.

Propiedades elementales del Algoritmo:

1) Se cumple

$S_0 \supset S_k \supset S_{k+1} \supset S \quad \forall k$

Veamos:

Por hipótesis $S_0 \supset S$.

Asumamos que para algún k se cumple :

$\emptyset \neq S_k \supset S \quad \ldots(*)$

Sea $x \in S$ cualquiera. Luego, teniendo en cuenta que $x_k^* \in \partial f_r(x^k)$ se tiene :

$0 \geqslant f_r(x) \geqslant f_r(x^k) + \langle x_k^*, \ x - x^k \rangle$
$\Longrightarrow$
$x \in H_k$, O sea $H_k \supset S$.

De ésto y (*) obtenemos:

$S_{k+1} = S_k \cap H_k \supset S$.

Por lo tanto, se deduce que:

$S_0 \supset S_k \supset S_{k+1} \supset S \quad k$.

2) Si $x^k \notin S$ entonces $x^k \in S_k \setminus S_{k+1}$:

Se sabe que $x^k \in S_k$

Por otra parte, puesto que $f_r(x^k) > 0$

se tiene que $x^k \notin H_k$. En consecuencia

$x^k \notin S_{k+1}$.

3. Si $x^k \in S$ entonces x^k es una solución óptima

de P:

Se tiene que x^k es una solución óptima de

P_k. Luego:

$c^T x^k \leq c^T x \quad \forall \; x \in S_k$

Pero $S_k \supset S$. Entonces

$c^T x^k \leq c^T x \; \forall \; x \in S$.

<u>Teorema de Convergencia</u>. Si $x^k \notin S \; \forall \; k$ entonces todo punto de acumulación $\hat{x}$ de $\{x^k\}$ es una solución óptima de P.

Demostración:

Se sabe que:

$S_o \supset S_k \supset S_{k+1} \supset S \; \forall \; k$ donde S es compacto.

Como $x^k \in S_k \subset So \; \forall \; k$, $\{x^k\}$ tiene al menos un punto de acumulación $\hat{x}$.

Elegimos una subsucesión $\{x^{k_j}\}$ tal que $\lim_{j \to \infty} x^{k_j} = \hat{x}$.

Sea k cualquiera, entonces

$x^{k_j} \in S_{k_j} \subset S_k \; \forall \; k_j \geq k$.

Puesto que S_k es cerrado se deduce que:

$$\hat{x} = \lim_{j \to \infty} x^{k_j} \in S_k \ \forall k.$$

Se tiene que

$c^T x^k \leq \inf P \ \forall k \quad \Longrightarrow$

$$\lim_{j \to \infty} c^T x^{k_j} = c^T \hat{x} \leq \inf P.$$

Ahora, basta ver que $\hat{x} \in S$:

Supongamos que $\hat{x} \notin S$. Entonces

$$f_s(\hat{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(\hat{x}) = \alpha > 0.$$

Por otra parte, como f_i ; 1,2,..., m son contínuas entonces, según la segunda proposición del Cap. V. 5.2, ∂f_i son superiormente contínuas. En consecuencia, siendo S_0 compacto se tiene, debido a la tercera proposición del Cap. I,1.8, que $\partial f_i(S_0)$ son compactos.

Por lo tanto, existe una constante $M > 0$ tal que $\| x^* \| < M \ \forall x^* \in \partial f_i(S_0)$; $i=1,2,..,m$.

Elegimos k_j tal que

$$\| x^{k_j} - \hat{x} \| < \frac{\alpha}{2M}, \quad f_s(x^{k_j}) > \alpha/2 \qquad \ldots (I)$$

$\Longrightarrow$

$$f_r(x^{k_j}) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x^{k_j}) \geq f_s(x^{k_j}) > \alpha/2 \ \ldots (II)$$

Teniendo en cuenta que $x^*_{k_j} \in \partial f_r(x^{k_j})$ entonces de (I), (II) y la desigualdad de Schwarz obtenemos:

$$f_r(\hat{x}) \geq f_r(x^{k_j}) + \langle x^*_{k_j}, \hat{x} - x^{k_j} \rangle$$

$$\geq f_r(x^{k_j}) - \|x^*_{k_j}\| \, \|\hat{x} - x^{k_j}\|$$

$$> \alpha/2 - M \cdot \alpha/2M = 0 \qquad \ldots(III)$$

Pero teniendo en cuenta que:

$\hat{x} \in S_{k_{j+1}} = S_{k_j} \cap H_{k_j}$ se cumple

$\hat{x} \in H_{k_j}$. O sea:

$$f_r(x^{k_j}) + \langle x^*_{k_j}, \hat{x} - x^k \rangle \leq 0$$

donde $x^*_{k_j} \in \partial f_r(x^{k_j})$

$\Longrightarrow$

$f_r(\hat{x}) \leq 0$.

Lo cual es una contradicción, debido a (III).

Finalmente, $\hat{x}$ es una solución óptima de P.

BIBLIOGRAFIA

[1] Blum, Eugen. Teoría de las Correspondencias Contínuas y Correspondencias Cerradas. Revista IGI de la UNI: TECNIA N°3, Lima, 1987.

[2] Blum, Eugen. Algunas Propiedades de la Correspondencia del ε-subdiferencial de una función convexa. Actas del Sexto Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, Lima, 1989.

[3] Clarke, Frank. Optimization and Nonsmooth Analysis. John Wiley & Sons, Inc., USA,1983.

[4] Dem'yanov, Vladimir. Nondifferentiable Optimization. Optimization Software, Inc. Publications Division, New York, 1985.

[5] De Figueiredo, D.G. The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours. Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] Ekeland, Ivar and Teman, Roger. Convex Analysis and Variational Problems. North-Holland Publishing Company, New York, 1976.

[7] Giles, John. Convex Analysis with Application in the Differentiation of convex functions. Pitman Advanced Publishing Program , Boston, 1982.

[8] Holmes, Richard. A Course on Optimization and Best Approximation. Springer-Verlag, New York, 1972.

[9] Ioffe, A. and Tihomirov, V. Theory of Extremal Problems. North-Holland Publishing Company, New York, 1979.

[10] Kinderlehrer, David and Stampacchia, Guido. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, Inc., New York, 1980.

[11] Rockafellar, R. Tyrrell. Convex Analysis Prin ceton University Press, New Jersey, 1970.

[12] Rudin, Walter. Análisis Funcional. Editorial Reverté, S.A. España, 1979.