UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Tesis para Optar

el Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMÁTICA

TITULADA
Juegos Cooperativos y Algunas de sus Aplicaciones

Presentado por
Randdy Arturo Guardales Vásquez

Asesor
Mag. William Carlos Echegaray Castillo

LIMA-PERÚ

2013

A mis hijos Joana, Ariana, Jaim y Uziel,

a mi esposa Mirian

Agradezco al Profesor William Carlos Echegaray Castillo por la orientación y sus sabios consejos para la culminación del presente trabajo y también deseo
agradecer a mis colegas matemáticos por la amistad y estímulo, y a todas aquellas personas que de una u otra forma me ayudaron a terminar este trabajo.

Resumen

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas relativamente moderna que estudia problemas de decisión en los que interaccionan varios decisores, el punto de partida fue la publicación del tratado Theory of Games and Economic Behavior(1944) por el matemático Von Newman junto con el economista Morgenster. La Teoría de Juegos distingue dos modelos de juegos distintos en su planteamiento. Los juegos no cooperativos o competitivos, en donde cada jugador busca su máximo beneficio y los juegos cooperativos, en donde los jugadores disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes previos al juego. Esto es, los jugadores pueden cooperar formando coaliciones de jugadores con el fin de obtener mayores beneficios. En un juego cooperativo no es necesario analizar las estrategias de los jugadores, puesto que estos actuarán de la forma que consigan mayor beneficio. El problema central en un juego cooperativo es el reparto de beneficios entre los jugadores que forman la coalición. Dado que los jugadores han cooperado entre sí para obtener el máximo beneficio, el reparto de ese beneficio ha de darse entre todos los jugadores que formaron la coalición. El objetivo principal de la Teoría de Juegos Cooperativos es analizar la importancia o influencia que ha tenido cada jugador en la obtención de ese beneficio, para proponer un reparto de beneficios adecuado. Una coalición puede estar formada por cualquier grupo de jugadores de cualquier tamaño. El pago de esta coalición, esto es, los beneficios que la coalición obtendrá del juego, será función de la coalición, y deberá ser repartido al finalizar el juego entre los jugadores que forman la coalición. Este pago será representado por un número. Cuando cualquier reparto del pago entre los jugadores es posible, hablamos de un juego de Utilidad Transferible o abreviadamente juego UT.

Un juego cooperativo de utilidad transferible en forma coalicional o en forma

de función característica está formado por un conjunto finito de jugadores J y una función característica que asocia a cada subconjunto o coalición un número real que será el valor de la coalición, siendo el valor del subconjunto vacío igual a cero.

Un juego cooperativo de utilidad transferible se caracteriza porque cualquier reparto del beneficio total de la coalición entre los jugadores que la forman está permitido. Por tanto, al analizar un juego cooperativo un objetivo es conocer las estrategias que deben tomar los diferentes jugadores, y conocer el beneficio que obtendría cada jugador si decidiese formar una coalición con otros jugadores.

A la hora de buscar resultados posibles, debe hacerse un reparto del pago total v(J) entre los jugadores. El pago a cada jugador puede representarse mediante una función que a cada jugador del conjunto J le asigne un número real que represente el pago que obtendrá ese jugador en el juego, esto es el llamado vector de pagos. Los vectores de pagos que cumplan con el principio de eficiencia son llamados vectores de pagos de beneficios o preimputaciones, si además de este principio, imponemos que los vectores pagos cumplan con el principio de individualidad racional, obtenemos el conjunto de imputaciones de un juego. Existen dos tipos de conceptos de solución en juegos cooperativos: los conceptos de solución de tipo conjunto, el Core, que limita un conjunto de posibles valores exigiéndole algunas propiedades, y los conceptos de solución de tipo puntual, que eligen entre todos los posibles vectores de pago uno solo, donde el más utilizado es el Valor de Shapley.

?

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

1

Introducción

La teoría de las decisiones interactivas clásica (o *teoría de juegos clásica*) analiza, básicamente, la toma de decisiones racionales en términos de construcciones competitivas (juegos no cooperativos) y coalicionales (juegos cooperativos) abstraídas de los juegos de salón (póquer, bridge, monopolio, etc.), en los cuales dos o más agentes, considerando las acciones de sus oponentes, deben tomar decisiones en el esfuerzo por obtener las máximas ganancias posibles. Esta abstracción ha abierto el espectro de posibilidades de aplicación al mundo real: los "jugadores" pueden ser seres humanos, instituciones, poblaciones de animales, partidos políticos, agentes de un mercado, etc., a la vez que las estrategias pueden ser de muy diversa índole. La teoría de juegos tiene en estos campos una habilidad única: *la de ser un sistema de referencia para el estudio de las interacciones, descrito en términos simples y universales.*

1.1. La Teoría de Von Neumann y Morgenstern: una visión general

En 1928 el matemático húngaro-judío John Von Neumann (1903 – 1957) reportó un curioso descubrimiento a la Sociedad Matemática del Gotinga: había encontrado una "estrategia racional" al problema al que se enfrentan dos oponentes a la hora de elegir en el lanzamiento de una moneda al aire. Y aunque esto, a primera vista, pareciera un pequeño logro, era el comienzo de una nueva rama de la ciencia: *la teoría de juegos.*

La prueba de Von Neumann, publicada como *Zur Theorie de Gesellschaftspiele*, se extendía a otros juegos como el ajedrez y las cartas, y mostraba que existía, en cada caso, un "mejor método posible"de juego, que era matemáticamente determinable. La "mejor estrategia posible" o "estrategia racional" era aquella que le *asegura a un jugador la máxima ventaja, sin importar lo que los oponentes hicieran.* Esta estrategia, obviamente, no lo aseguraba ni de la ruina ni de hacerse rico; solamente le minimizaba la máxima pérdida que podría soportar. La estrategia racional indicada por Von Neumann, desde luego, no siempre es práctica. Basta pensar en el juego del ajedrez o el póquer para observar que un cálculo como ese podría tomar siglos. Sin embargo, al comienzo, estas limitaciones eran de importancia secundaria. Lo sustancial era que existiera una estrategia óptima en cada caso, y que el juego entonces tuviera "solución".

Von Neumann no estaba interesado en ayudarle a alguien en particular a ganar un juego. Tenía la conjetura que un análisis de la estructura general de los juegos sería de importante valor matemático, y que la solución a ciertos problemas de juegos podría arrojar luz sobre algunas decisiones económicas y sociales. Es evidente que los juegos de estrategia comparten ciertos elementos con la "vida real": se deben tomar decisiones en cada momento y rara vez un jugador tiene el control total de las variables que determinan el resultado final. Por estas similitudes, a falta de otras, el estudio de teorías de interacciones ha venido teniendo una fructífera relación con la comprensión del comportamiento cotidiano. Fue el austriaco Oskar Morgenstern (1902 – 1977) el primer economista que clara y explícitamente reconoció que los agentes deben tener en cuenta la naturaleza interactiva de la economía cuando toman sus decisiones. Él y Von Neumann siendo refugiados de Europa, en la época de Hitler, se encontraron en una reunión accidental en la Universidad de Princeton (Estados Unidos) a finales de la década de 1930 y comenzaron una colaboración que culminó en el clásico *Theory of Games and Economic Behavior* de 1944. Con la publicación de este monumental trabajo, la teoría de juegos se recibió como disciplina científica.

Todos los juegos que Von Neumann y Morgenstern estudiaron en *Theory of Games and Economic Behavior* tenían varios elementos en común:

1. Un conjunto *finito* de jugadores (que, como ya dijimos, pueden ser personas, animales, "entidades", etc.) y cada jugador tiene a su disposición un conjunto finito de reglas (o estrategias) para jugar.

2. El juego termina después de un número finito de etapas.

3. Luego de que el juego termina, se le asigna un pago numérico a cada jugador (que, en general, es positivo si se ha ganado en el juego y

negativo si se ha perdido), que a su vez es una suma ponderada de los pagos recibidos en cada una de las etapas previas.

4. Existen posibles "movimientos" de la naturaleza; es decir, se permiten ciertas formas de aleatoriedad en las decisiones de los jugadores.

5. Cada jugador tiene *conocimiento completo* (simétrico) de las reglas del juego y de los jugadores.

Von Neumann y Morgenstern dieron en clasificar estos elementos con tres criterios: número de jugadores, caracteríticas de los pagos, y acuerdos antes de comenzar el juego. En los capítulos III y IV de su libro se concentran en el estudio de los juegos de dos personas y suma cero (es decir, lo que pierde un jugador lo recibe el otro). El capítulo V estudia los juegos de tres personas y suma cero. Los capítulos VI, VII y VIII estudian los juegos generales de n personas y suma cero, de cuatro personas y suma cero y cinco o más personas y suma cero, respectivamente; y, al final, el capítulo XI lo dedican a los juegos generales de suma diferente de cero.

Veamos un ejemplo donde se ilustra un juego de dos jugadores y suma cero.

Ejemplo 1.1 (El juego de las monedas) *El* juego de lanzar las monedas (matching pennies), *originalmente planteado por Von Neumann y Morgenstern en* 1944.

Los jugadores (1 *y* 2) *extraen de sus bolsillos un nuevo sol cada uno y los lanzan de manera simultánea sobre una mesa. Si resultan dos caras o dos sellos, el jugador* 2 *recoge los dos nuevos soles, mientras que si hay una cara y un sello, el jugador* 1 *se lleva los dos nuevos soles.*

c = *cara,* s = *sello,* $n = 2$ *jugadores*

$$S_1 = \{c, s\}, S_2 = \{c, s\}, S_1 \times S_2 = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$$

		J_2	
		c	s
J_1	c	$-1,1$	$1,-1$
	s	$1,-1$	$-1,1$

Cuadro 1.1: El juego de las dos monedas.

Se destaca del Cuadro 1.1

1. *En virtud que hay dos jugadores, y cada uno dispone de dos estrategias, el conjunto de perfiles de estrategias o conjunto de estrategias se representa en cuadro de* 2×2

2. *Listamos las estrategias del jugador* 1 *como filas en el cuadro, y las estrategias del jugador* 2 *como columnas.*

3. *Para cada uno de las cuatro* (2×2) *celdas del cuadro, damos el par de resultados para ambos jugadores; primero el pago del jugador* 1 *y luego el pago del jugador* 2.

La formalización matemática de este juego es como sigue:
Sea: $I =$ *conjunto de jugadores (conjunto finito). En nuestro caso* $I = \{1,2\}$.
Para cada $i \in I$ *consideremos el conjunto:* $S_i =$ *conjunto de estrategias del* $i-$*ésimo jugador. En este juego:*

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{ conjunto de estrategias del jugador 1} \\ &= \{cara,\ sello\} \\ S_2 &= \text{ conjunto de estrategias del jugador 2} \\ &= \{cara,\ sello\} \end{aligned}$$

Para cada $i \in I$ *consideremos una función* μ_i *como la función pago del* $i-$*ésimo jugador.* $\mu_i : S_1 \times S_2 \to I\!R$ *en nuestro juego.*

$$
\begin{aligned}
\mu_1(c,c) &= -1 & \mu_2(c,c) &= +1\\
\mu_1(c,s) &= 1 & \mu_2(c,s) &= -1\\
\mu_1(s,c) &= +1 & \mu_2(s,c) &= -1\\
\mu_1(s,s) &= -1 & \mu_2(s,s) &= +1
\end{aligned}
$$

Notemos que la suma de pagos es cero.

1.2. Juegos Coalicionales

Después de analizar el juego de dos jugadores y suma cero, von Neumann y Morgenstern, pasaron a discutir juegos de tres jugadores y suma cero. Allí reconocen que necesitan un punto de vista diferente: en un juego de tres jugadores y suma cero, lo que es en beneficio de uno de los jugadores puede ser ventajoso para uno de los oponentes y desventajoso para algún otro, y los jugadores pueden entonces percibir cierto "paralelismo" de intereses que requeriría de una teoría que les permitiera decidir si aquel paralelismo era parcial o total. Es decir, requerían de una teoría de *cómo formar alianzas*, pues el paralelismo de intereses podría hacer de la *cooperación* algo deseable y , por consiguiente, conducir a acuerdos entre los jugadores involucrados.

Después de haber reducido las alternativas de cada individuo a una descripción numérica, Von Neumann y Morgenstern estudiaron cierta clase de juegos en los cuales las oportunidades disponibles para cada *coalición* de jugadores podía describirse mediante un número: la *función característica v definida sobre todas las posibles coaliciones.* Esta v podría interpretarse como una función de "valoración ex ante" de las coaliciones en términos de cuánta utilidad podrían dividirse entre los miembros de la coalición, pero también podría verse como un indicador de la "fortaleza" de la coalición en caso de que llegara a formarse. La única restricción sobre v que imponen Von Neumann y Morgenstern es que si S y T son dos coaliciones disjuntas, entonces $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ (superaditividad). Esto significa que el valor de toda coalición es, por lo menos, igual a la suma de los valores de las subcoaliciones que la integran; es decir que los jugadores actuando juntos pueden conseguir, por lo menos, lo mismo que consiguen actuando separadamente.

Asumir una función característica así, implica algunas cosas importantes sobre el juego que está siendo modelado. Primero, que la utilidad individual puede medirse en algún medio de cambio ("dinero" o "pan", por ejemplo) que los jugadores pueden transferir libremente entre ellos en el sentido de que la reducción de una unidad de utilidad para algún jugador representa un incremento de una unidad en la utilidad de alguno otro. Aquí lo que nos interesa, entonces, es el pago que recibe la coalición, y no cómo se reparte este pago entre sus miembros. Segundo, el pago o poder que tiene una coalición determinada no hace referencia al comportamiento de los miembros que no hacen parte de la misma. Tercero, una coalición puede, sin costo, hacer acuerdos sobre distribuir su valor en cualquier forma que a bien estimen sus miembros, así que no es necesario modelar explícitamente las acciones que los jugadores llevan a cabo para honrar tales acuerdos. Reconociendo la importancia de la hipótesis de utilidad transferible, a estos juegos se les acostumbra llamar *juegos de utilidad transferible* (TU) (por el término en inglés *"Transferible utility"*).

Ahora: ¿qué estándar de comportamiento podríamos esperar observar en un juego modelado de esta forma? La respuesta dependerá del tipo de "solución" (indicador) que pretendamos implementar a partir de la función característica. El hecho de que, en general, un juego tenga multiplicidad de soluciones muestra que existen factores importantes (por ejemplo, factores históricos, sociales o institucionales) que la función característica no modela.

Esta complejidad es, hasta cierto punto, una reflexión sobre las dificultades inherentes a los problemas de interacción estratégica y, de hecho, buena parte de la investigación actual en teoría de juegos clásica está en la dirección de incluir más detalles institucionales (y otros) buscando describir y comprender mejor estas complejidades.

2

Preliminares

En este capítulo estableceremos herramientas básicas para tratar los siguientes capítulos. Revisaremos ciertos conceptos y resultados básicos del álgebra lineal y análisis convexo.

2.1. Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial real es un conjunto X, en el que se han definido dos operaciones: una interna $+ : X \times X \to X$ llamada *adición*, la cual a cada par $(x, y) \in X \times X$ le asocia un elemento de X denotado por $x + y$, de tal forma que satisface:

1. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in X$.

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in X$.

3. Existe un único elemento denotado con 0 tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$.

4. A cada elemento $x \in X$ le corresponde un único elemento $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$

y otra operación externa $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, la cual es llamada *multiplicación escalar*, la cual a cada par $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ le asocia un elemento de X denotado por $\lambda \cdot x$ (o simplemente λx), y se satisface:

1. $1x = x$ para todo $x \in X$

2. $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$

Estas operaciones están relacionadas por las siguientes leyes distributivas:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \text{y} \quad (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x.$$

para cualquier $x, y \in X$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Observación 2.1 *Es muy conocido que el conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (con n, un número natural) con las operaciones de suma y multiplicación (por números reales), definidas por: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$+\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$
\cdot \left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},
$$

es un espacio vectorial real. A lo largo de esta tesis, trabajaremos con espacios vectoriales de dimensión finita como $\mathbb{R}^n$.

2.2. Conceptos de Convexidad

Definición 2.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si*

$$
tx + (1-t)y \in C \quad \forall\, x; y \in C \quad y \quad \forall\, t \in [0,1]
$$

Definición 2.2 *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $C \subset \mathbb{R}^n$, se dice que x es una combinación convexa de elementos de C, si existen: $p \in \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^p \subset [0,1]$ y $\{x_i\}_{i=1}^p \subset C$ tal que $x = \sum_{i=1}^{p} t_i x_i$ y $\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$.*

Proposición 2.1 *Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, C es convexo si y solo si contiene todas las combinaciones convexas de C.*

Demostración. (Ver [7], pág. 1).

Proposición 2.2 *Si I es un conjunto de índices cualquiera y $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces $\cap_{i\in I} C_i$ es también un conjunto convexo.*

Demostración. (Ver [7], pág. 2).

2.3. Espacios Métricos

Un *Espacio Métrico* es un par (X, d) donde X es un conjunto cualquiera no vacío y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ distancia que verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$

Observación 2.2 *Si definimos $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como*

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle},$$

entonces $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico, llamado espacio métrico euclidiano.

Definición 2.3 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano y sea $a \in \mathbb{R}^n$. Un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se llama* vecindad de a *si existe $\delta > 0$ tal que la bola abierta de centro a y radio δ, $B(a, \delta) \subset U$, donde*

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \delta\}$$

Observación 2.3 *Dado $x \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{N}_x$ a la familia de vecindades de x.*

Definición 2.4 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es llamado* abierto *si, para cada $x \in U$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$.*

Definición 2.5 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano y $X \subset \mathbb{R}^n$. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es llamado* abierto (vecindad) relativo a X *si, existe un abierto (vecindad) V en $\mathbb{R}^n$ tal que $U = V \cap X$.*

Definición 2.6 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ se dice* cerrado *si $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.*

Definición 2.7 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano y $X \subset \mathbb{R}^n$. Un conjunto $R \subset \mathbb{R}^n$ es llamado* cerrado relativo a X *si, existe un cerrado C en $\mathbb{R}^n$ tal que $R = C \cap X$.*

Observación 2.4 *Es fácil ver que: $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto relativo a $S \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si $S \setminus A$ es cerrado relativo a S.*

Definición 2.8 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Definimos para cada $S \subset \mathbb{R}^n$ su frontera como sigue:*

$$\partial S := \{x \in X : B(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset \quad y \quad B(x,\epsilon) \cap (X \setminus S) \neq \emptyset \quad \forall \epsilon > 0\}$$

Definición 2.9 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Definimos para cada $S \subset \mathbb{R}^n$ su interior como sigue:*

$$int(S) := \bigcup \{U : U \subset \mathbb{R}^n \text{ es un subconjunto abierto de } S\}.$$

Proposición 2.3 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces tenemos:*

$$int(S) := \{x \in X : S \in \mathcal{N}_x\} = S \setminus \partial S.$$

Demostración. Sea $x \in int(S)$. Entonces existe un subconjunto abierto $U \subset S$ con $x \in U$, de modo que $S \in \mathcal{N}_x$. Para la recíproca, si $S \in \mathcal{N}_x$, entonces hay un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ con $x \in U \subset S$, de modo que $x \in int(S)$.

Sea $x \in int(S)$, entonces $S \in \mathscr{N}_x$ por lo anterior. Donde, trivialmente, $S \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) = \emptyset$ vemos que $x \notin \partial S$. Para la recíproca, sea $x \in S \setminus \partial S$. Entonces, hay un $N \in \mathscr{N}_x$ tal que $N \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) = \emptyset$. Sea $U \subset N$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in U$. Se concluye que $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) = \emptyset$ y por consiguiente $U \subset S$. Por lo tanto, se cumple que $x \in U \subset int(S)$.

Ejemplo 2.1 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y sea $r > 0$. La bola cerrada centrada en x_0 con radio r es definida como*

$$\overline{B(x_0, r)} := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}.$$

$\overline{B(x, \delta)}$ es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$, es decir, tal que $d(x, x_0) > r$. Ahora tomemos $\epsilon := d(x, x_0) - r > 0$, y sea $y \in B(x, \epsilon)$. Como $d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0)$, obtenemos que

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y) > d(x, x_0) - \epsilon = d(x, x_0) - (d(x, x_0) - r) = r.$$

Se concluye que $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$ es abierto, lo cual implica que $\overline{B(x_0, r)}$ es cerrado.

Proposición 2.4 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Entonces:*

1. *$\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos;*

2. *Si $\mathscr{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces:*

$$\bigcup \{U : U \in \mathscr{U}\} \text{ es abierto.}$$

3. *Si U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces $U_1 \cap U_2$ es abierto.*

Demostración.

1. Por convención, el conjunto $\emptyset$ es un conjunto abierto y cerrado. Ahora veamos que $\mathbb{R}^n$ es abierto, en efecto, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, siempre $\exists \epsilon > 0$, tal que $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n$ es abierto.

2. Sea $\mathscr{U}$ una familia de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, y sea $x \in \bigcup\{U : U \in \mathscr{U}\}$. Entonces, existe $U_0 \in \mathscr{U}$ con $x \in U_0$, y como U_0 es abierto hay un $\epsilon > 0$ tales que
$$B(x, \epsilon) \subset U_0 \subset \bigcup\{U : U \in \mathscr{U}\}.$$
Por consiguiente, $\bigcup\{U : U \in \mathscr{U}\}$ es abierto.

3. Sea U_1, $U_2 \subset X$ abiertos y sea $x \in U_1 \cap U_2$. Como U_1 y U_2 son abiertos, hay $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que $B(x, \epsilon_j) \subset U_j$ para $j = 1, 2$. Sea $\epsilon := \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Entonces es inmediato que $B(x, \epsilon) \subset U_1 \cap U_2$.

Definición 2.10 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Para cada $S \subset \mathbb{R}^n$, la* clausura *de S es definida como*

$$\overline{S} := \bigcap\{F : F \subset \mathbb{R}^n \text{ es cerrado y } S \subset F\}.$$

Proposición 2.5 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces tenemos:*

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \{x \in \mathbb{R}^n : N \cap S \neq \emptyset \quad \forall\ N \in \mathscr{N}_x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset \quad \forall\ \epsilon > 0\}. \end{aligned}$$

Demostración. Cada bola abierta es una vecindad de su centro, y cualquier vecindad de un punto contiene una bola abierta centrada en aquel punto; por lo tanto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : N \cap S \neq \emptyset,\ \forall\ N \in \mathscr{N}_x\} = \{x \in \mathbb{R}^n : B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset,\ \forall \epsilon > 0\}$$

se cumple. Denotamos este conjunto por $cl(S)$.

Sea $x \in \bar{S}$, y sea $N \in \mathscr{N}_x$. Entonces, existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ contenido en N con $x \in U$. Supongamos que $N \cap S = \emptyset$, de modo que $U \cap S = \emptyset$ (i.e., $S \subset \mathbb{R}^n \setminus U$). Como $\mathbb{R}^n \setminus U$ es cerrado, se concluye que $\overline{S} \subset \mathbb{R}^n \setminus U$ y así $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se cumple $x \in cl(S)$.

Recíprocamente, sea $x \in cl(S)$, y supongamos que $x \notin \overline{S}$. Entonces $U := \mathbb{R}^n \setminus \bar{S}$ es un conjunto abierto conteniendo a x (así pertenece a $\mathscr{N}_x$) que tiene intersección vacía con S. Esto contradice $x \in cl(S)$.

2.4. Convergencia y Continuidad

Sea S un conjunto cualquiera. Una aplicación de los números naturales a S es llamada una sucesión en S; escribiremos a menudo $\{x_n\}_{n\in N}$. Si el dominio de x no son los números naturales pero sí un subconjunto de los números naturales de la forma $\{n : n \geq m\}$ para algún m que pertenezca a los números naturales, todavía hablamos de una sucesión y denotamos esto por $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$. Llamamos a una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ si existen $n_1 < n_2 < \cdots$ en los naturales tal que $y_k = x_{n_k}$ para $k \in \mathscr{N}$.

Definición 2.11 *Sea $(I\!R^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ en $I\!R^n$ se dice que* converge *a $x \in I\!R^n$ si, para cada $\epsilon > 0$, hay un $n_\epsilon \in N$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_\epsilon$. Entonces decimos que x es el límite de $\{x_n\}_{n\in N}$ y escribimos $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ó $x_n \to x$.*

Se verifica directamente que una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ en el espacio métrico euclidiano converge a x si y sólo si, para cada $N \in \mathscr{N}_x$, hay un $n_N \in$ N tales que $x_n \in N$ para todo $n \geq n_N$.

En la siguiente proposición se verifica que el límite de una sucesión en el espacio métrico euclidiano (cuando este límite existe) es único.

Proposición 2.6 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$, y sea x, $x' \in \mathbb{R}^n$ tales que $\{x_n\}_{n\in N}$ converge a x y a x'. Entonces x y x' son iguales.*

Demostración. Supongamos que $x \neq x'$, de modo que $\epsilon := \frac{1}{2}d(x, x') > 0$. Como $x_n \to x$, existe un $n_1 \in$ N tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para $n \geq n_1$, y como también $x_n \to x'$, existe un $n_2 \in$ N tal que $d(x_n, x') < \epsilon$ para $n \geq n_2$. Sea $n := \text{máx}\{n_1, n_2\}$, de modo que

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \epsilon + \epsilon = d(x, x'),$$

lo cuál es absurdo.

Proposición 2.7 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\overline{S}$ consiste de todos los puntos en $\mathbb{R}^n$ que son el límite de una sucesión en S.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ el límite de una sucesión $(x_n)_{n\in N}$ en S, y sea $\epsilon > 0$. Por la definición de convergencia, existe un $n_\epsilon \in$ N tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para $n \geq n_\epsilon$; es decir, $x_n \in B(x, \epsilon)$ para $n \geq n_\epsilon$. En particular, $B(x, \epsilon) \cap S$ es no vacío. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $x \in \overline{S}$ por la Proposición 2.5.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{S}$. Por la Proposición 2.5, tenemos $B(\frac{1}{n}, x) \cap S \neq \emptyset$ para cada $n \in$ N; existe así, para cada $n \in$ N, algún $x_n \in S$ con $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Es claro que la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ converge a x.

Corolario 1 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Entonces $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si cada sucesión en F que converge en $\mathbb{R}^n$ tiene su límite en F.*

Ahora definamos la continuidad de funciones de la forma siguiente.

Definición 2.12 *Sean $(I\!R^n, d_n)$ y $(I\!R^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos, $X \subset I\!R^n$, y sea $x_0 \in X$. Entonces $f : X \to I\!R^m$ se dice que es continua en x_0 si, para cada sucesión $(x_n)_{n\in N}$ en X convergente a x_0, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Las siguientes caracterizaciones se verifican.

Teorema 2.1 *Sean $(I\!R^n, d_n)$ y $(I\!R^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos, $X \subset I\!R^n$, y sea $x_0 \in X$. Entonces las siguientes equivalencias se verifican para $f : X \to I\!R^m$.*

(i) *f es continua en x_0.*

(ii) *Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $d_m(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para todo $x \in X$ con $d_n(x, x_0) < \delta$.*

(iii) *Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $(B(x_0, \delta) \cap X) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$.*

(iv) *Para cada $N \in \mathscr{N}_{f(x_0)}$, tenemos que $f^{-1}(N) \cap X$ es una vecindad relativa a X de x_0.*

Demostración

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supongamos lo contrario; es decir, existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existe un $x_\delta \in X$ con $d_n(x_\delta, x_0) < \delta$, pero $d_m(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. Para $n \in$ N, sea $x'_n := x_{\frac{1}{n}}$, de modo que $d_n(x'_n, x_0) < \frac{1}{n}$ y así $x'_n \to x_0$. Donde, sin embargo, $d_m(f(x'_n), f(x_0)) \geq \epsilon_0$ se verifica para todo $n \in$ N, esto es imposible puesto que $f(x'_n) \to f(x_0)$, pues f es continua en x_0.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: es únicamente una repetición de (ii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sea $N \in \mathscr{N}_{f(x_0)}$. Por consiguiente, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \epsilon) \subset N$. Por (iii), existe un $\delta > 0$ tal que

$$(B(x_0, \delta) \cap X) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon)) \subset f^{-1}(N).$$

Esto implica que $f^{-1}(N) \cap X$ es una vecindad relativa a X de x_0.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sea $\{x_n\}_{n \in N}$ una sucesión en X con $x_n \to x_0$. Sea $N \in \mathscr{N}_{f(x_0)}$ de modo que $f^{-1}(N) \in \mathscr{N}_{x_0}$. Como $x_n \to x_0$, existe un $n_N \in \mathrm{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(N)$ para $n \geq n_N$; es decir, $f(x_n) \in N$ para $n \geq n_N$. Como $N \in \mathscr{N}_{f(x_0)}$ fue arbitrario, esto implica que $f(x_n) \to f(x_0)$.

Definición 2.13 *Sean $(\mathbb{R}^n, d_n)$ y $(\mathbb{R}^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos y $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces una función $f : X \to \mathbb{R}^m$ se dice que es continua en X, si esta es continua en cada punto de X.*

Observación 2.5 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano.*

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \qquad (x, x_0, y, y_0 \in X), \tag{2.1}$$

Demostración. Fijamos $x, x_0, y, y_0 \in X$, luego

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y)$$

y por lo tanto

$$d(x, y) - d(x_0, y_0) \leq d(x, x_0) + d(y_0, y).$$

Intercambiando el rol de x por x_0, y por y_0 respectivamente, obtenemos

$$d(x_0, y_0) - d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(y_0, y).$$

Como consecuencia de (2.1) obtenemos que $(\mathbb{R}^n)^2$ se convierte en un espacio métrico con la siguiente métrica

$$\bar{d}((x, y), (x', y')) := d(x, x') + d(y, y') \qquad ((x, x'), (y, y') \in (\mathbb{R}^n)^2).$$

Otra consecuencia de (2.1) es la continuidad de $d : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}^n)^2$ respecto de $\bar{d}$.

Corolario 2 *Sean $(\mathbb{R}^n, d_n)$ y $(\mathbb{R}^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos. Entonces las siguientes equivalencias se verifican para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

(i) f es continua.

(ii) $f^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ para cada subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$.

(iii) $f^{-1}(F)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ para cada subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}^m$.

Demostración

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, de modo que $U \in \mathcal{N}_y$ para cada $y \in U$ y así $U \in \mathcal{N}_{f(x)}$ para cada $x \in f^{-1}(U)$. Por el Teorema 2.1(iv), concluimos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_x$ para cada $x \in f^{-1}(U)$; es decir, $f^{-1}(U)$ es una vecindad de cada uno de sus puntos y así es abierto.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sea $F \subset \mathbb{R}^m$ cerrado entonces $\mathbb{R}^m \setminus F$ es abierto luego como consecuencia $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F)$ debe ser abierto por (ii), se concluye que $f^{-1}(F)$ es cerrado. Análogamente, se prueba $(iii) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Si f satisface (ii), este satisface de manera trivial el Teorema 2.1(iii) para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

3

Juegos Cooperativos

En los juegos cooperativos se parte de que es posible que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos que los vinculen entre si (a los que quedarían obligados de manera ineludible), por lo que se trata de estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones[1] de jugadores que se pueda formar. Por lo tanto, se trata de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, interesándonos los comportamientos colectivos y sin que haga falta detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de una coalición.

[1]unión de varios individuos contra otros

Sea $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, el conjunto de jugadores. Obsérvese que el conjunto de jugadores es finito.

Luego 2^J es el conjunto potencia de J, que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar (incluyendo la coalición sin jugadores que es el $\emptyset$).

Supongamos que las utilidades de los jugadores son transferibles, lo cual quiere decir que las ganancias o pérdidas que se obtienen al actuar como coalición pueden repartirse entre los jugadores que la componen.

Definición 3.1 *Se llama función característica a una función que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto vacío el valor cero. Esto es*

$$\begin{aligned} v : 2^J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ S &\longmapsto v(S) \end{aligned}$$

tal que verifica $v(\emptyset) = 0$.

Para una coalición S, a $v(S)$ se le llama el valor de coalición y es el valor mínimo que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Se trata por tanto del valor que una coalición puede garantizarse que obtendrá si realmente funciona como tal coalición y toma sus decisiones de manera adecuada.

Definición 3.2 *Un juego en forma coalicional o de función característica con utilidades transferibles consiste en un conjunto finito* $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ *de jugadores y una función característica* $v : 2^J \to \mathbb{R}$ *con* $v(\emptyset) = 0$. *Por lo tanto el par ordenado* $G = (J, v)$ *es un* juego cooperativo *si* J *y* v *están especificados.*

Consideremos el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.1 *Tres ciudades del mismo departamento necesitan un sistema de tratamiento de aguas residuales. Cada ayuntamiento ha hecho un estudio de los costes, individuales y colectivos, con los otros ayuntamientos, para ver la posibilidad de ahorro. El estudio se representa en el cuadro 3.1, donde* 1, 2 *y* 3, *simbolizan a cada una de las ciudades.*

COALICIÓN	COSTE	BENEFICIO
$\{1\}$	150	0
$\{2\}$	200	0
$\{3\}$	550	0
$\{1,2\}$	350	0
$\{1,3\}$	610	90
$\{2,3\}$	650	100
$\{1,2,3\}$	780	120

Cuadro 3.1: Coalición de 3 ciudades

Esta situación se modela mediante un juego cooperativo de utilidad transferible (J, v), *donde* $J = \{1, 2, 3\}$ *y la función característica* v *del juego viene dada por*

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 0, \qquad v(\{1,3\}) = 90, \qquad v(\{2,3\}) = 100, \qquad v(\{1,2,3\}) = 120.$$

Ejemplo 3.2 *Se consideran tres empresas que producen el mismo bien. Dadas sus tecnologías, la empresa* 1 *puede producir* 0, 8 *ó* 16 *unidades de* output *al coste unitario de* 2 *unidades monetarias, la empresa* 2 *puede producir* 0, 4 *ó* 12 *unidades al coste unitario de* 2 *unidades monetarias y la empresa* 3 *puede producir* 0, 8 *ó* 12 *unidades al coste unitario de* 2 *unidades monetarias. La inversa de la función de demanda del bien es conocida por las tres* *empresas y tiene la forma siguiente:*

$$p(x) = 35 - 0{,}75x,$$

en donde x es la cantidad total de producto del mercado.

Para representar el juego en forma coalicional, en primer lugar vamos a representar el juego en forma estratégica. Sea $J = \{1, 2, 3\}$, jugadoras que representan a las empresas $1, 2$ y 3, y

$$\begin{aligned} S_1 &= \{0, 8, 16\} \\ S_2 &= \{0, 4, 12\} \\ S_3 &= \{0, 8, 12\} \end{aligned}$$

son los respectivos conjuntos de estrategias de las jugadoras. Para las estrategias $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, x_3 \in S_3$, la cantidad total de producto que llega al mercado es $x = x_1 + x_2 + x_3$. Luego, el pago que obtiene cada jugadora i viene determinado por la función de beneficios, del siguiente modo:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = p(x)x_i - 2x_i, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

La representación del juego en forma estratégica es la siguiente:

Jugadora 3: $x_3 = 0$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0,0,0	0,120,0	0,288,0
	8	216,0,0	192,96,0	144,216,0
	16	336,0,0	288,72,0	192,144,0

Obtengamos ahora la forma coalicional del juego. Para ello vamos a ir calculando el valor de cada coalición.

Jugadora 3: $x_3 = 8$		Jugadora 2		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0,0,216	0,6,192	0,216,144
	8	168,0,168	144,72,144	96,144,96
	16	240,0,120	192,48,96	96,72,48

Jugadora 3: $x_3 = 12$		Jugadora 2		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0,0,288	0,84,252	0,180,180
	8	144,0,216	120,60,180	72,108,108
	16	192,0,144	144,36,108	48,36,36

Empezamos con la coalición formada únicamente por la jugadora 1*. A la vista de la representación del juego en forma estratégica, es claro que si la jugadora* 1 *elige su estrategia* 0 *obtendrá un pago de* 0*, hagan lo que hagan las demás jugadoras. Si elige su estrategia* 8 *obtendrá alguna de las cantidades* $216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120, 72$*, dependiendo de la combinación de estrategias de las jugadoras* 2 *y* 3*, por lo que eligiendo tal estrategia, es decir la estrategia 8, la jugadora 1 puede garantizarse que obtendrá el siguiente pago:*

$$min\{216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120, 72\} = 72$$

De manera análoga, si la jugadora 1 *elige su estrategia* 16*, obtendrá un pago que dependerá de las estrategias de las jugadoras* 2 *y* 3*, pudiendo garantizarse que obtendrá el siguiente pago:*

$$min\{336, 288, 192, 240, 192, 96, 192, 144, 48\} = 48$$

Por lo tanto, la jugadora 1 *puede elegir aquella estrategia que le asegure* *el máximo de los valores garantizados:*

$$max\{0, 72, 48\} = 72,$$

valor que tiene asegurado jugando su estrategia $x_1 = 8$, *por lo que el valor de la coalición formada exclusivamente por la jugadora* 1 *es igual a* 72.

$$v(\{1\}) = 72$$

Procediendo de manera análoga con las jugadoras 2 *y* 3 *se obtiene que:*

$$v(\{2\}) = 36,$$

que la jugadora se asegura si juega su estrategia $x_2 = 4$ *o bien* $x_2 = 12$ *y*

$$v(\{3\}) = 48,$$

que la jugadora 3 *tiene asegurado jugando su estrategia* $x_3 = 8$.

Consideremos ahora la coalición formada por las jugadoras 1 *y* 2. *Para cada combinación de estrategias de las jugadoras* 1 *y* 2 *la coalicion* $\{1, 2\}$ *obtendrá un pago (suma de los pagos de ambas jugadoras) que dependerá de la estrategia que juegue la jugadora* 3.

Si $x_1 = 0, x_2 = 0$, *la coalición* $\{1, 2\}$ *obtendrá conjuntamente un pago igual a* 0. *Si* $x_1 = 0, x_2 = 4$, *la coalición* $\{1, 2\}$ *se garantiza el pago* $min\{120, 96, 84\} = 84$.

Procediendo de esta forma, en el cuadro 3.2 se presentan los valores que se garantiza la coalición en función de la combinación de estrategias que juegue:

Eligiendo las jugadoras 1 *y* 2 *adecuadamente sus estrategias, la coalición* $\{1, 2\}$ *puede asegurarse el valor:*

$$min\{0, 84, 180, 144, 180, 180, 192, 180, 84\} = 92$$

x_1	x_2	**Pago que se garantiza la coalición $\{1, 2\}$**
0	0	$\min\{0, 0, 0\} = 0$
0	4	$\min\{120, 96, 84\} = 84$
0	12	$\min\{288, 216, 180\} = 180$
8	0	$\min\{216, 168, 144\} = 144$
8	4	$\min\{288, 216, 180\} = 180$
8	12	$\min\{360, 240, 180\} = 180$
16	0	$\min\{336, 240, 192\} = 192$
16	4	$\min\{360, 240, 180\} = 180$
16	12	$\min\{336, 184, 84\} = 84$

Cuadro 3.2: Pagos de la coalición $\{1, 2\}$

que es el pago de la coalición $\{1, 2\}$ *se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias* $x_1 = 16, x_2 = 0$*. Debemos observar que no se especifica cómo se reparte el valor obtenido por la coalición entre las jugadoras que la componen.*

Por tanto, se tiene que

$$v(\{1, 2\}) = 192.$$

Procediendo de manera análoga con las otras dos coaliciones formadas por dos jugadoras, se llega a que

$$v(\{1, 3\}) = 192,$$

que es el pago que la coalición $\{1, 3\}$ *se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias* $x_1 = 8$, $x_3 = 8$.

Análogamente,

$$v(\{2, 3\}) = 144,$$

que es el pago que la coalición $\{2,3\}$ se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias $x_2 = 12$, $x_3 = 0$, o bien $x_2 = 0$, $x_3 = 12$, o bien $x_2 = 4$, $x_3 = 12$.

Por último calculemos el valor de la coalición formada por las tres jugadoras, y para ello calculemos en primer lugar la suma de pagos que obtienen las tres jugadoras para cada combinación de estrategias.

Jugadora 3: $x_3 = 0$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0	120	288
	8	216	288	360
	16	336	360	336

Jugadora 3: $x_3 = 8$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	216	288	360
	8	336	1360	336
	16	360	336	216

Jugadora 3: $x_3 = 12$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	288	336	360
	8	360	360	288
	16	336	288	120

Eligiendo las jugadoras $1, 2$ y 3 adecuadamente sus estrategias, la coalición $\{1,2,3\}$ puede asegurarse el valor:

$$max \left\{ \begin{array}{l} 0,\ 120,\ 288,\ 216,\ 288,\ 360,\ 336,\ 360,\ 336, \\ 216,\ 288,\ 360,\ 336,\ 360,\ 336,\ 360,\ 336,\ 216, \\ 288,\ 336,\ 360,\ 360,\ 360,\ 288,\ 336,\ 288, 120 \end{array} \right\} = 360,$$

que es el pago que la coalición $\{1,2,3\}$ se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias cualquiera de las siguientes:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 8, & x_2 = 12, & x_3 = 0, \\ x_1 = 16, & x_2 = 4, & x_3 = 0, \\ x_1 = 0, & x_2 = 12, & x_3 = 8, \\ x_1 = 8, & x_2 = 4, & x_3 = 8, \\ x_1 = 16, & x_2 = 0, & x_3 = 8, \\ x_1 = 0, & x_2 = 12, & x_3 = 12, \\ x_1 = 8, & x_2 = 0, & x_3 = 12, \\ x_1 = 8, & x_2 = 4, & x_3 = 12, \end{array}$$

Por tanto,

$$v(\{1,2,3\}) = 360.$$

La representación del juego en forma condicional es $G = (J, v)$, donde el conjunto de jugadores es $J = \{1,2,3\}$ y $v : 2^J \to I\!R$ es la función característica, definida de la siguiente forma:

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	72	36	48	192	192	144	360

Ejemplo 3.3 *Supongamos que se plantea la necesidad de abastecer de electricidad a tres poblaciones. Para ello se construirá una red de tendidos eléctricos que conecte dichas poblaciones con la central eléctrica. En la Figura 3.1 se*

presentan los costes de todos los posibles tendidos que inter-conectan las poblaciones $(1,2,3)$ *y la central eléctrica* (0). *Representar el juego en forma coalicional.*

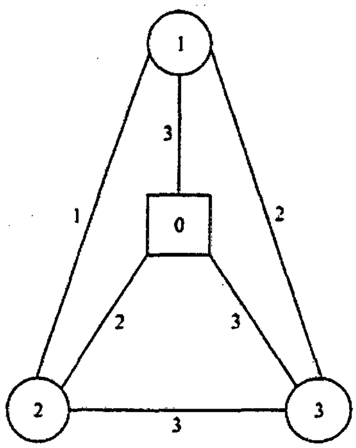

Figura 3.1: Red eléctrica para tres poblaciones.

Solución:

Sea el conjunto de jugadores $J = \{1, 2, 3, \}$.

Si la población 1 *va sola y no logra un acuerdo de cooperación con ninguna otra de las poblaciones (coalición* $\{1\}$*), incurrirá en un coste igual a* 3*, ya que tendrá que cargar con el coste que supone construir un tendido eléctrico que va de la central eléctrica a la población* 1. *Sea* $c(\{1\}) = 3$.

De manera análoga, si la población 2 *va sola (coalición* $\{2\}$*), incurrirá en un coste de* 2. *Sea* $c(\{2\}) = 2$.

Si la población 3 *va sola (coalición* $\{3\}$*), incurrirá en un coste de* 3. *Sea* $c(\{3\}) = 3$.

Si las poblaciones 1 *y* 2 *logran un acuerdo de cooperación y deciden construir la red de tendidos eléctricos de manera conjunta lo harán de la forma* *que les suponga un coste menor, que consiste en unir la central con la población* 2 *(coste igual a* 2*) y la población* 2 *con la población* 1 *(coste igual a* 1*). El coste total para la coalición* $\{1,2\}$ *será por tanto igual a* 3*. Sea* $c(\{1,2\}) = 3$*. Sin cooperación entre* 1 *y* 2 *la suma de sus costes sería igual a* 5*. Definimos el valor de la coalición* $\{1,2\}$ *de la siguiente forma:*

$$v(\{1,2\}) = c(\{1\}) + c(\{2\}) - c(\{1,2\}) = 3 + 2 - 3 = 2.$$

Análogamente

$$\begin{aligned} v(\{1,3\}) &= c(\{1\}) + c(\{3\}) - c(\{1,3\}) = 3 + 3 - 5 = 1 \\ v(\{2,3\}) &= c(\{2\}) + c(\{3\}) - c(\{2,3\}) = 2 + 3 - 5 = 0. \end{aligned}$$

En general, para una coalición $S \neq \emptyset$ *definimos el valor de dicha coalición de la siguiente forma:*

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S).$$

De esta forma se obtiene que

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \tag{3.1}$$

$$v(\{1,2,3\}) = c(\{1\}) + c(\{2\}) + c(\{3\}) - c(\{1,2,3\}) = 3 + 2 + 3 - 5 = 3, \tag{3.2}$$

en donde $c(\{1,2,3\}) = 5$*, que se alcanza uniendo la central eléctrica con la población* 2 *y ésta con la población* 1 *que a su vez se une con la población* 3*.*

Por tanto, la representación del juego en forma coalicional es $G(J, v)$*, donde* $J = \{1,2,3\}$ *y* $v : 2^J \to I\!R$*, es la función característica, definida de la siguiente forma:*

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	2	1	0	3

Ejemplo 3.4 *Una finca rústica está valorada por su actual propietario en* 350000 *soles. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los* 700000 *soles. Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas para una sola familia. Con esta urbanización el valor de la finca sería de* 775000 *soles.*

Representemos el juego en forma coalicional (también llamada representación en forma de función característica). Sea $J = \{1, 2, 3\}$ *en donde el jugador* 1 *es el empresario que ofrece acondicionar la finca como polígono industrial, la jugadora* 2 *es la empresa constructora y el jugador* 3 *es el propietario actual de la finca.*

Obtengamos la función característica para este juego cooperativo. Tanto el jugador 1 *como la jugadora* 2 *necesitan el acuerdo con el jugador* 3 *(el propietario) para poder utilizar la finca. Sin la participación del jugador* 3 *no se puede hacer nada y, por tanto, no se puede obtener ningún beneficio. Por consiguiente, se tiene que*

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$$

Si el jugador 3 *no coopera con ninguno de los otros dos jugadores mantiene la situación actual, es decir mantiene la finca tal como está, a la cual valora en* 350000 *soles. Si llega a un acuerdo sólo con el jugador* 1 *para obtener el mayor valor posible, obtendrán entre los dos* 700000 *soles. Si llega a un acuerdo exclusivamente con la jugadora* 2 *para obtener el mayor valor posible obtendrán entre los dos* 775000 *soles. Finalmente si cooperan los tres jugadores y deciden llevar conjuntamente adelante el proyecto para tener el mayor valor del mercado, obtendrán entre los tres* 775000 *soles. Es decir,*

$$v(\{3\}) = 350, \quad v(\{1,3\}) = 700, \quad v(\{2,3\}) = 775, \quad v(\{1,2,3\}) = 775,$$

en donde los valores de la función característica vienen expresados en miles de soles.

Por tanto, la representación del juego en forma coalicional es $G = (J, v)$ *en donde* $J = \{1, 2, 3\}$, $v : 2^J \to I\!R$, *con*

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 350,$$

$$v(\{1,2\}) = 0, \quad v(\{1,3\}) = 700, \quad v(\{2,3\}) = 775, \quad v(\{1,2,3\}) = 775,$$

en donde los valores de la función característica vienen expresados en miles de soles.

Ejemplo 3.5 *Marta, Antonio y Luisa han estado participando en un programa musical en televisión durante varios meses, habiendo obtenido buena aceptación entre el público. La empresa Global Music les ofrece un contrato en exclusiva por un año para promocionarlos como trío, con una cantidad de* A *soles (conjuntamente para los tres). La empresa Dynamic Music ofrece un contrato en exclusiva por un año para promocionar como dúo a cualquier par de cantantes que acepte entre los tres citados, con una cantidad de* B *soles (para el dúo que pueda formarse). Se cumple que* $0 \leq B \leq A$. *Ninguno de los cantantes recibe oferta de promoción como solista.*

La representación del juego en forma colicional es $J = \{1, 2, 3\}$, *siendo Marta la jugadora* 1, *Antonio el jugador* 2 *y Luisa la jugadora* 3, *y la función característica es*

$$v : 2^J \to I\!R$$

con

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = B, \quad v(\{1,3\}) = B, \quad v(\{2,3\}) = B, \quad v(\{1,2,3\}) = A.$$

Ejemplo 3.6 (El juego de la bancarrota) *Supongamos que una empresa en situación de quiebra ha dejado un patrimonio que se valora en E unidades monetarias, y ha dejado también unas deudas de $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a los acreedores $1, 2, \ldots, n$ respectivamente, de manera que se cumple:*

$$0 < E \leq \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Se define el siguiente conjunto de jugadores: $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Cualquier coalición $S \subset J$ *puede quedarse con el patrimonio de la empresa pagando las deudas a los acreedores que no forman parte de la coalición. Por tanto,*

$$\forall S \in 2^J,\ v(S) = max\{0, E - \sum_{i \in J \setminus S} d_i\}.$$

Obsérvese que

$$v(\emptyset) = max\{0, E - \sum_{i \in J} d_i\} = 0$$

Por ejemplo, si $E = 650, d_1 = 200, d_2 = 150, d_3 = 350, d_4 = 250$, *el juego de la bancarrota correspondiente es:*

$$J = \{1, 2, 3, 4\}$$

y la función característica viene definida por las expresiones siguientes:

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = max\{0, 650 - (150 + 350 + 250)\} = max\{0, -100\} = 0$$

$$v(\{2\}) = max\{0, 650 - (200 + 350 + 250)\} = max\{0, -150\} = 0$$

$$v(\{3\}) = max\{0, 650 - (200 + 150 + 250)\} = max\{0, 50\} = 50$$

$$v(\{4\}) = max\{0, 650 - (200 + 150 + 350)\} = max\{0, -50\} = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = max\{0, 650 - (350 + 250)\} = max\{0, 50\} = 50$$

Procediendo de manera análoga se obtiene

$$v(\{1,3\}) = 50, v(\{1,4\}) = 150, v(\{2,3\}) = 200, v(\{2,4\}) = 100, v(\{3,4\}) = 300,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 400, v(\{1,2,4\}) = 300, v(\{1,3,4\}) = 500, v(\{2,3,4\}) = 450,$$
$$v(\{1,2,3,4\}) = 650$$

3.1. Definiciones

En los juegos cooperativos se trata de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, sin detenernos en las acciones individuales de los mismos. Vamos a ver cómo puede hacerse una distribución de pagos entre los jugadores que forman una coalición y han obtenido una ganancia actuando coordinadamente, de manera cooperativa; para esto se han propuesto diversos conceptos de solución, entre estos están el core, el nucleolus y el valor de Shapley.

Para esto veamos algunas definiciones que vamos a necesitar para el desarrollo de nuestro tema.

También vamos a definir algunas operaciones básicas en juegos cooperativos.

Definición 3.3 *Sean (J, v) y (J, w) dos juegos cooperativos, con $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $\lambda \in I\!R$. Se define:*

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S),\ \forall S \subset J$$
$$(\lambda v)(S) = \lambda(v(S)),\ \forall S \subset J$$
$$(v \cdot w)(S) = v(S)w(S),\ \forall S \subset J$$

Observación 3.1 *El conjunto de juegos cooperativos con n jugadores, sobre el cuerpo de los reales, con las operaciones de suma y de producto por un* *escalar, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$, al cual se le denota por G^J.*

Observación 3.2 *A partir de ahora usaremos indistintamente las notaciones $G = (J, v)$ o $v \in G^J$ para indicar que v es una función característica de un juego en forma coalicional con utilidades transferibles donde $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, es el conjunto de jugadores.*

Definición 3.4 *Se dice que un juego $v \in G^J$ es* monótono *si $\forall S, T \subset J$, con $S \subset T$, se verifica que*

$$v(S) \leq v(T)$$

También tenemos el concepto de juego superaditivo, esto es, cuando dos coaliciones con intersección vacía se unen, el beneficio o ganancia de la nueva coalición es al menos igual a la suma de los beneficios de las coaliciones que se unen.

Definición 3.5 *Se dice que un juego $v \in G^J$ es* superaditivo *si $\forall S, T \subset J$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

Análogamente tenemos

Definición 3.6 *Un juego $v \in G^J$ es* subaditivo *si $\forall S, T \subset J$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que*

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T).$$

También tenemos unas propiedades más fuertes que las anteriores, donde la intersección no necesariamente es vacía.

Definición 3.7 *Se dice que un juego $v \in G^J$ es* convexo *si $\forall S, T \subset J$, se verifica que*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

De manera análoga

Definición 3.8 *Se dice que un juego $v \in G^J$ es* cóncavo *si $\forall S, T \subset J$, se verifica que*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \leq v(S) + v(T)$$

Ejemplo 3.7 *El juego del Ejemplo 3.2 es convexo, por ejemplo*

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) = 192 + 192 = 384 < v(\{1,2,3\}) + v(\{1\}) = 360 + 72 = 432$$

$$v(\{1,2\}) + v(\{2,3\}) = 192 + 144 = 336 < v(\{1,2,3\}) + v(\{2\}) = 360 + 36 = 396.$$

Veamos un ejemplo de juego no convexo.

Ejemplo 3.8 *Un ganadero tiene una vaca que puede vender en el mercado, obteniendo un beneficio de una unidad. Para poder venderla es imprescindible que la vaca pase por la finca de uno de sus dos vecinos. Primero vamos a representar este juego en forma coalicional, para eso tenemos el juego $v \in G^J$, en donde $J = \{1,2,3\}$ es el conjunto de jugadores, siendo el vecino 1 el jugador 1, el vecino 2 el jugador 2 y el ganadero dueño de la vaca, el jugador 3.*

La función característica $v : 2^J \to I\!R$, esta definida de la siguiente forma

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	0	1	1	1

Luego tenemos

$$v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) = 1 + 1 = 2 > v(\{1,2,3\}) + v(\{3\}) = 1 + 0 = 1$$

Es decir, el juego no es convexo.

Definición 3.9 *Se dice que un juego $v \in G^J$ es* 0-normalizado *si se verifica que*

$$v(\{i\}) = 0, \ \forall i \in J$$

Por ejemplo, el juego del Ejemplo 3.2 no es $0-normalizado$, y el del Ejemplo 3.8, si lo es.

Se puede obtener la 0-normalización de un juego, definiendo la siguiente función característica

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}), \ \forall S \subset J$$

Definición 3.10 *Se dice que un juego $v \in G^J$, es* (0,1)-normalizado *si se verifica que*

$$v(\{i\}) = 0, \ \forall i \in J \ y \ v(J) = 1$$

El juego del Ejemplo 3.8 es $(0, 1)$-normalizado.

3.2. El conjunto de imputaciones

Sea $v \in G^J$ un juego en su forma coalicional, en donde $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v es la función característica. Si en un juego los jugadores deciden trabajar conjuntamente, es decir cooperar, el problema que se presenta, consiste en cómo repartir el valor $v(J)$ entre los n jugadores.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector de distribución de pagos, en donde para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, x_i representa el pago que recibe el jugador i.

Para cualquier coalición S, se utilizará la notación $\sum_{i \in S} x_i$. Luego con esta notación tenemos

$$x(J) = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

definiendo $x(\emptyset) = 0$.

Definición 3.11 *El conjunto de* preimputaciones *de un juego* $v \in G^J$ *es el conjunto de vectores de pagos definido de la siguiente manera*

$$PI(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!R^n : x(J) = v(J)\}.$$

Por el nombre de *principio de eficiencia* se le conoce a la condición que cumplen los vectores de distribución de pagos que pertenecen al conjunto de preimputaciones del juego según la cual la suma de los pagos que reciben los jugadores sea igual al valor de la coalición total.

Observación 3.3 *Para el caso* $n = 3$, *gráficamente el conjunto de preimputaciones es un plano que corta a los ejes en los puntos* $(v(J), 0, 0), (0, v(J), 0)$ *y* $(0, 0, v(J))$.

Ejemplo 3.9 *Consideremos el siguiente juego con tres jugadores:*

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 2, \quad v(\{1,3\}) = 3, \quad v(\{2,3\}) = 2, \quad v(\{1,2,3\}) = 5.$$

Luego se tiene que

$$PI(J,v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$$

Gráficamente tenemos este conjunto representado en la Figura 3.2

Definición 3.12 *El conjunto de* imputaciones *de un juego* $v \in G^J$ *es el conjunto de vectores de pagos*

$$\begin{aligned} I(J,v) &= \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in PI(J,v) : x_i \geq v(\{i\}), \ \textit{para } i = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!R^n : x(J) = v(J), x_i \geq v(\{i\}), \ \textit{para } i = 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Recibe el nombre de *racionalidad individual* la condicion de que para cada jugador i tiene que cumplirse que $x_i \geq v(\{i\})$.

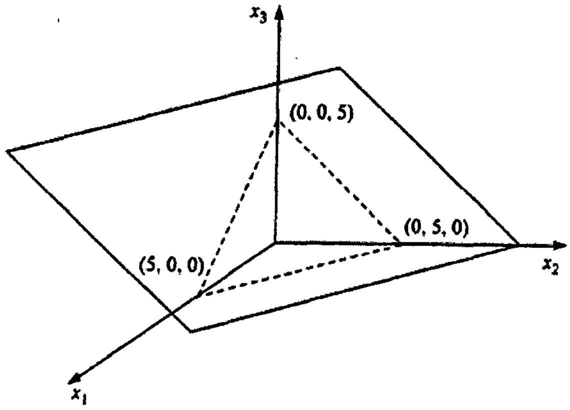

Figura 3.2: Representación gráfica del conjunto de preimputaciones.

Observación 3.4 *Si $n = 3$ y además el juego es $0-$normalizado, gráficamente el conjunto de imputaciones es la intersección del plano de preimputaciones con el octante no negativo, es decir, es un triángulo cuyos vértices se encuentran en los puntos $(v(J), 0, 0), (0, v(J), 0)$ y $(0, 0, v(J))$.*

Ejemplo 3.10 *Para el juego del Ejemplo 3.9, tenemos el conjunto de imputaciones*

$$I(J, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Cuando tenemos 3 jugadores se acostumbra a representar el conjunto de imputaciones directamente en el plano como en la Figura 3.3, para el caso del Ejemplo 3.10.

Veamos un ejemplo donde el juego no es $0-$normalizado.

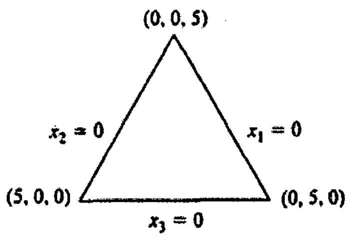

Figura 3.3: Representación gráfica del conjunto de imputaciones en el plano.

Ejemplo 3.11 *Tenemos el siguiente juego con tres jugadores:*

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 2, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 1$$
$$v(\{1,2\}) = 3, \quad v(\{1,3\}) = 3, \quad v(\{2,3\}) = 2, \quad v(\{1,2,3\}) = 5.$$

Luego tenemos que

$$I(J,v) = \{x_1, x_2, x_3 \in I\!R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1\}$$

Para representar dicho conjunto, partimos de la intersección del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ con el octante no negativo (todos los ejes positivos) y a continuación añadimos las restricciones $x_1 \geq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1$, y así obtenemos la Figura 3.4.

Ene le caso de 4 jugadores, el conjunto de imputaciones se acostumbra a representar como un tetraedro en el plano, guardando analogía con la representación que se ha visto para tres jugadores.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de imputaciones de un juego sea no vacío.

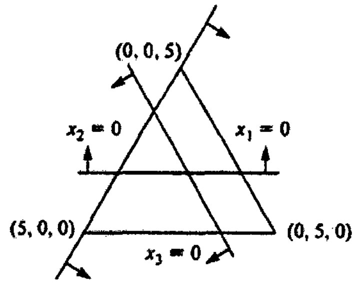

Figura 3.4: Conjunto de imputaciones del juego.

Proposición 3.1 *Sea $v \in G^J$ un juego, entonces*

$$I(J,v) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J) \tag{3.3}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $I(J,v) \neq \emptyset$. Entonces existe $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I(J,v)$. Por tanto tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(J);$$

pero como $v(\{i\}) \leq x_i$, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = v(J)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J)$.

Veamos que $I(J,v) \neq \emptyset$. Para ello consideremos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, con $x_i = v(\{i\}), \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$, y $x_n = v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\})$.

Pero por hipótesis $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J)$, de donde resulta

$$v(\{n\}) \leq v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = x_n$$

Además

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) + v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = v(J),$$

y como se trata de una imputación tenemos que $I(J, v) \neq \emptyset$.

Cuando en un juego el conjunto de imputaciones es diferente del vacío se le llama esencial, como se menciona en la siguiente definición.

Definición 3.13 *Se dice que el juego $v \in G^J$ es* esencial *si verifica que $I(J, v) \neq \emptyset$.*

3.3. El Core

El principio de racionalidad individual que se recoge en el conjunto de imputaciones puede extenderse a todas las coaliciones mediante el principio de racionalidad coalicional. Así tenemos el concepto de core de un juego cooperativo.

Definición 3.14 *El* core *de un juego $v \in G^J$ es el siguiente conjunto de pagos*

$$C(J, v) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!R^n : \begin{array}{c} x(J) = v(J), x(S) \geq v(S), \\ \text{para todo } S \in P(J) \end{array} \right\}$$

Observación 3.5 *El core es un subconjunto del conjunto de imputaciones, el cual se trata de las asignaciones que podrían constituir acuerdos de distribución estables, en el sentido de que ningún grupo de jugadores podría impugnar unilateralmente ninguno de esos acuerdos.*

Veamos algunas propiedades matemáticas del core

Proposición 3.2 *Sea $v \in G^J$ un juego cooperativo. El conjunto $C(J, v)$ es cerrado, acotado y convexo.*

Demostración.

Veamos que $C(J, v)$ es cerrado. En efecto

$$C(J,v) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n x_i = v(J), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \\ \text{para todo } S \in P(J) \end{array} \right\},$$

es decir, los elementos del core pertenecen a un hiperplano y a un conjunto finito de semiespacios cerrados, por lo tanto es la intersección finita de conjuntos cerrados que es cerrado.

Veamos que el core $C(J, v)$ es un conjunto acotado.

Para eso sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(J, v)$, luego tenemos que $x_i = v(\{i\})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además,

$$x_i = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j \neq i} x_j = v(J) - \sum_{j \neq i} x_j \leq v(J) - v(J - \{i\}).$$

Luego, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se verifica que

$$v(\{i\}) \leq x_i \leq v(J) - v(J - \{i\}),$$

de donde se obtiene que el conjunto $C(J, v)$ está acotado.

Para ver que el conjunto $C(J, v)$ es convexo.

Consideremos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C(J, v)$, también consideremos $\lambda \in [0, 1]$, luego tenemos

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda) y &= \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (\lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda) y_2, \ldots, \lambda x_n + (1 - \lambda) y_n). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
(\lambda x + (1-\lambda)y)(J) &= \sum_{i=1}^{n}[\lambda x_i + (1-\lambda)y_i] \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} y_i \\
&= \lambda v(J) + (1-\lambda)v(J) \\
&= v(J).
\end{aligned}$$

Y para cada coalición $S \in P(J)$, tenemos

$$\begin{aligned}
(\lambda x + (1-\lambda)y)(S) &= \sum_{i\in S}(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) \\
&= \lambda \sum_{i\in S} x_i + (1-\lambda)\sum_{i\in S} y_i \\
&\geq \lambda v(S) + (1-\lambda)v(S) \\
&= v(S).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $C(J, v)$ es convexo.

Veamos algunos ejemplos de como obtener el core de algunos juegos.

Ejemplo 3.12 *Obtengamos el core del juego dado en el Ejemplo 3.4. Por la definición del core, tenemos que si* (x_1, x_2, x_3) *está en el core, entonces* (x_1, x_2, x_3) *satisface las siguientes restricciones.*

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 = 775 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 350 \\
x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 700, x_2 + x_3 \geq 775.
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Luego despejando, tenemos

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \geq 0 &\Leftrightarrow 775 - x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 775 \\
x_1 + x_3 \geq 700 &\Leftrightarrow 775 - x_2 \geq 700 \Leftrightarrow x_2 \leq 75 \\
x_2 + x_3 \geq 775 &\Leftrightarrow 775 - x_1 \geq 775 \Leftrightarrow x_1 \leq 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
C(J,v) &= \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in I\!R^3 : \begin{array}{c} x_1+x_2+x_3 = 775, x_1 = 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq x_3 \leq 775 \end{array} \right\} \\
&= \{(x_1,x_2,x_3) \in I\!R^3 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, x_3 = 775 - x_2\} \\
&= \{(0, x_2, 775 - x_2) : 0 \leq x_2 \leq 75\}
\end{aligned}
$$

Las distribuciones de pagos que cumplen la igualdad (3.4) *y no pertenecen al core son inaceptables para alguna coalición que se pueda formar tal que consiga mejores resultados de los que obtienen con* (x_1, x_2, x_3)*, por ejemplo:*

- $(50, 75, 650)$ *no interesaría a la coalición* $\{2,3\}$*, ya que puede obtener por sí misma* 775*, que es mayor a* 725*, cantidad que obtendría con la distribución de pagos* $(50, 75, 650)$.
- $(0, 100, 675)$ *no interesaría a la coalición* $\{1,3\}$*, ya que puede obtener* 700 *por sí misma, que es mayor a* 675*, que sería lo que obtendría con la distribución de pagos dada.*

Ejemplo 3.13 *Ahora vamos a obtener el core del juego dado en el Ejemplo 3.5. pertenecen al core los puntos que cumplan las siguientes restricciones:*

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 = A \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\
x_1 + x_2 \geq B, x_1 + x_3 \geq B, x_2 + x_3 \geq B.
\end{gathered}
$$

Luego despejando se tiene

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \geq B &\Leftrightarrow A - x_3 \geq B \Leftrightarrow x_3 \leq A - B \\
x_1 + x_3 \geq B &\Leftrightarrow A - x_2 \geq B \Leftrightarrow x_2 \leq A - B \\
x_2 + x_3 \geq B &\Leftrightarrow A - x_1 \geq B \Leftrightarrow x_1 \leq A - B.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} C(J,v) &= \{(x_1,x_2,x_3) \in I\!R^3 : x_1+x_2+x_3 = A, 0 \le x_i \le A-B, \forall i = 1,2,3\} \\ &= \{(x_1,x_2,A-x_1-x_2) \in I\!R^3 : 0 \le x_1 \le A-B, 0 \le x_2 \le A-B, B \le x_1+x_2 \le A\} \end{aligned}$$

Luego tenemos los siguientes 3 casos

- *Si* $(A-B)+(A-B) = B$, *entonces el core es unitario, obteniéndose que* $C(J,v) = \{(A-B, A-B, 2B-A)\}$.
- *Si* $(A-B)+(A-B) < B$, *entonces el core es vacío.*
- *Si* $(A-B)+(A-B) > B$, *entonces el core es no vacío, no unitario.*

Veamos un teorema que nos da condiciones necesarias y suficientes para asegurar cuando un juego tiene core no vacío, para eso veamos antes dos definiciones.

Definición 3.15 *Una familia* $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *de subconjuntos de* J, *distintos y no vacíos, es* equilibrada *sobre* J *si existen números positivos* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, *denominados pesos, tales que para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$ *verifican*

$$\sum_{\{j:i\in S_j\}} \alpha_j = 1$$

Ejemplo 3.14 *Sea* $J = \{1,2,3\}$. *Entonces tenemos como ejemplos de familias equilibradas sobre* J *a los siguientes.*

1. *Sea* $\mathscr{B}_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$. *Tenemos que* $S_1 = \{1\}, S_2 = \{2\}, S_3 = \{3\}$, *y existen* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, *que verifican*

$$\begin{aligned} &\textit{Para } i = 1, \quad \textstyle\sum_{j:1\in S_j} \alpha_j = \alpha_1 = 1 \\ &\textit{Para } i = 2, \quad \textstyle\sum_{j:2\in S_j} \alpha_j = \alpha_2 = 1 \\ &\textit{Para } i = 3, \quad \textstyle\sum_{j:3\in S_j} \alpha_j = \alpha_3 = 1 \end{aligned}$$

2. *Sea* $\mathscr{B}_2 = \{\{1\},\{2,3\}\}$. *Entonces* $S_1 = \{1\}, S_2 = \{2,3\}$, *se trata pues de una familia equilibrada ya que existen* $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, *que verifican*

$$\begin{array}{ll} \textit{Para } i = 1, & \sum_{j:1\in S_j} \alpha_j = \alpha_1 = 1 \\ \textit{Para } i = 2, & \sum_{j:2\in S_j} \alpha_j = \alpha_2 = 1 \\ \textit{Para } i = 3, & \sum_{j:3\in S_j} \alpha_j = \alpha_2 = 1 \end{array}$$

3. *Sea* $\mathscr{B}_3 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. *Entonces* $S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{2,3\}$, $S_3 = \{2,3\}$, *así tenemos que es una familia equilibrada ya que existen* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, *que verifican*

$$\begin{array}{ll} \textit{Para } i = 1, & \sum_{j:1\in S_j} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \textit{Para } i = 2, & \sum_{j:2\in S_j} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \textit{Para } i = 3, & \sum_{j:3\in S_j} \alpha_j = \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{array}$$

Ejemplo 3.15 *Sea* $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *una partición sobre* J. *Entonces es una familia equilibrada sobre* J, *esto es tomando* $\alpha_j = 1, \forall j = 1, \ldots, m$.

Definición 3.16 *Se dice que el juego* $v \in G^J$ *es* equilibrado *si para cualquier familia equilibrada* $\{S_1, \ldots, S_m\}$ *sobre* J, *con pesos* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, *se verifica que*

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(J).$$

Teorema 3.1 *Un juego* $v \in G^J$ *tiene core no vacío si y sólo si* $v \in G^J$ *es un juego equilibrado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $v \in G^J$ tiene core no vacío, entonces

$$C(J,v) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(J,v),$$

por lo tanto para toda coalición se verifica que

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

Sea $\mathscr{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ una familia equilibrada sobre J, con pesos asociados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Dado $x \in C(J, v)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big(\sum_{i \in S_j} x_i \Big) = \sum_{i \in J} x_i \Big(\sum_{\{j: i \in S_j\}} \alpha_j \Big)$$
$$= \sum_{i \in J} x_i(1) = \sum_{i \in J} x_i = x(J) = v(J)$$

es decir

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(J)$$

lo que demuestra que es un juego equilibrado.

$\Leftarrow$) Supongamos que $v \in G^J$ es un juego equilibrado. Por reducción al absurdo, supongamos que $C(J, v) \neq \emptyset$. Veamos que en tal caso el juego no es equilibrado, lo cual quiere decir que se puede encontrar una familia equilibrada de coaliciones $S_1, S_2, \ldots, S_m$, con pesos respectivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) > v(J).$$

Consideremos los dos conjuntos siguientes:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in J} x_i = v(J)\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \in P(J), \text{ con } S \neq J\}$$

Luego tenemos que $C(J, v) = A \cap B$. Por lo tanto,

$$C(J, v) = \emptyset \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

El conjunto A es un hiperplano de $\mathbb{R}^n$, mientras que el conjunto B es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado, acotado inferiormente y convexo. Como $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B pueden ser separados por un hiperplano, verificándose que

$$v(J) = \sum_{i \in J} x_i < \sum_{i \in J} y_i, \ \forall x \in A, \ \forall y \in B$$

En particular para $y^* \in \mathbb{R}^n$ que es solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i \in J} y_i \\ &\text{s.a } y \in B \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como el conjunto B es cerrado, acotado inferiormente y convexo, el problema (3.5) tiene solución óptima global en algún punto que cumpla la igualdad en las restricciones del problema. Por lo tanto dicha solución óptima viene caracterizada por las condiciones de Lagrange.

Sea el lagrangiano

$$\mathscr{L}(y, \lambda) = \sum_{i \in J} y_i + \sum_{S \in P(J) - J} \lambda_s \Big(v(S) - \sum_{i \in S} y_i \Big)$$

En el óptimo (y^*, λ^*) se verifica:

$$\frac{\partial \mathscr{L}(y^*, \lambda^*)}{\partial y_i} = 0 = 1 - \sum_{S \in S(i)} \lambda_S^*, \text{ donde } S(i) = \{S \in P(J) : i \in S\}$$

$$v(S) - \sum_{i \in S} y_i^* = 0, \ \forall S \in P(J) - J$$

Tomando $\lambda_J^* = 0$, a partir de las condiciones de optimalidad se ve que $\{S \in P(J) : S \neq \emptyset\}$, con pesos λ_S^*, es una familia equilibrada de coaliciones. Además se verifica que

$$\sum_{S \in P(J)} \lambda_S^* v(S) = \sum_{S \in P(J)} \Big(\sum_{i \in S} y_i^* \Big) = \sum_{i \in S} y_i^* \Big(\sum_{S \in P(J)} \Big) = \sum_{i \in J} y_i^* > v(J)$$

por lo que el juego $v \in G^J$ no está equilibrado. De esta forma, se llega a una contradicción, lo que prueba la implicación.

Ejemplo 3.16 (Juegos de producción lineal.) *Sea $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de agentes. Existen q recursos $R_1, R_2, \ldots, R_q$, de manera que cada agente tiene determinada cantidad de cada uno de los recurso. Así, el jugador $i \in J$, tiene b_{i1} unidades del recurso R_1, b_{i2} unidades del recurso R_2, $\ldots$ b_{iq} unidades del recurso R_q. Estos recursos no tienen ningún valor por sí mismos. Sólo sirven para utilizarse en la producción de r bienes $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Se supone que el proceso de producción es lineal, de manera que una unidad del bien B_l requiere a_{1l} unidades R_1,a_{2l} unidades R_2, $\ldots$ a_{ql} unidades R_q, y puede ser vendido a un precio de p_l unidades monetarias.*

Cuando se forma una coalición $S \subseteq J$, los agentes que la componen unen sus recursos y producirán aquel vector de bienes $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in R^r$ que resuelva el siguiente problema lineal

$$
\begin{aligned}
v(S) &= \text{máx}\, p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_rx_r \\
s.a. &: \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r \leq \sum_{i \in S} b_{i1} \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r \leq \sum_{i \in S} b_{i2} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \cdots + a_{qr}x_r \leq \sum_{i \in S} b_{iq} \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_r \geq 0
\end{aligned}
$$

Veremos que el core de este juego es no vacío, viendo que dicho juego es equilibrada, para eso, sea $\mathscr{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ cualquier familia de coaliciones equilibrada sobre J, con pesos positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ respectivamente. Por tratarse de una familia equilibrada se verifica que

$$\sum_{\{j:i \in S_J\}} \alpha_j = 1.$$

Luego par cada $S_J \in \mathscr{B}$, sea $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_r^j)$ la solución óptima del problema *de programación lineal que define $v(S_j)$. Por lo tanto se verifica que*

$$v(S_j) = \sum_{l=1}^{r} p_l x_l^j$$

Sea $x^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x^j$, y ponemos $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*)$, donde

$$x_l^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_l x_l^j, \ \forall\, l = 1, 2, \dots, r$$

. Para cada $k = 1, 2, \dots, q$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{r} a_{kl} x_l^* &= \sum_{l=1}^{r} a_{kl} \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \Big) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big(\sum_{l=1}^{r} a_{kl} x_l^j \Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big(\sum_{i \in S_j} b_{ik} \Big) = \sum_{i \in S_j} b_{ik} \Big(\sum_{i \in S_j} \alpha_j \Big) = \sum_{i \in S_j} b_{ik}
\end{aligned}$$

luego se tiene que x^* es solución factible del problema de programación lineal que define $v(J)$, lo que implica que

$$\sum_{l=1}^{r} p_l x_l^* \leq v(J)$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big(\sum_{l=1}^{r} p_l x_l^j \Big) = \sum_{l=1}^{r} p_l \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \Big) = \sum_{l=1}^{r} p_l x_l^* \leq v(J)$$

como se quería demostrar.

3.4. El nucleolus

Hemos visto que el core es un concepto de solución que tiene una dificultad importante, la cual es, que en algunas ocasiones es un conjunto muy grande y en otras es un conjunto vacío. El concepto de *nucleolus* propone una solución que, siempre que el conjunto de imputaciones sea no vacío, supera la dificultad anterior, pues es no vacío y único. Además pertenece al core si éste es no vacío.

Consideremos un juego cooperativo $v \in G^J$ y sea una distribución de pagos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eficiente entre los jugadores, es decir, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(J)$$

Definición 3.17 *El exceso o queja de una coalición S con respecto a una distribución de pagos x es la diferencia entre el valor de la coalición S y lo que recibe dicha coalición por la distribución x. Esto es,*

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Se trata de una medida del grado de insatisfacción de la coalición S con la distribución x. Cuanto mayor es $e(S, x)$ mayor es la insatisfacción.

Ejemplo 3.17 *Sea el juego (J, v), para $J = \{1, 2, 3\}$, con*

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 5, v(\{2\}) = 8, v(\{3\}) = 4, v(\{1, 2\}) = 15,$$
$$v(\{1, 3\}) = 20, v(\{2, 3\}) = 15, v(\{1, 2, 3\}) = 30,$$

Se consideran los siguientes vectores de distribución de pagos

$$x = (10, 10, 10), \qquad y = (10, 12, 8), \qquad z = (11, 8, 11)$$

Para cada uno de los vectores dados se verifica que la suma de sus componentes es igual a $v(\{1, 2, 3\}) = 30$.

En la siguiente tabla se recogen los valores, los excesos o quejas de cada *coalición para cada uno de los vectores dados.*

	$v(S)$	$x(S)$	$y(S)$	$z(S)$	$e(S,x)$	$e(S,y)$	$e(S,z)$
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0
$\{1\}$	5	10	10	11	-5	-5	-6
$\{2\}$	8	10	12	8	-2	-4	0
$\{3\}$	4	10	8	11	-6	-4	-7
$\{1,2\}$	15	20	22	19	-5	-7	-4
$\{1,3\}$	20	20	18	22	0	2	-2
$\{2,3\}$	15	20	20	19	-5	-5	-4
$\{1,2,3\}$	30	30	30	30	0	0	0

Definición 3.18 *Para cada $x \in (J,v)$, se define el vector de excesos como el siguiente vector $\theta(x)$, con 2^n componentes:*

$$\theta(x) = (e(S,x))_{S\in P(J)} = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{2^n}(x))$$

en donde

$$\theta_k(x) \geq \theta_{k+1}(x),\ \forall\, k = 1,2,\dots,2^n - 1$$

Ejemplo 3.18 *Para el juego del Ejemplo 3.17 tenemos*

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= (0,0,0,-2,-5,-5,-5,-6)\\
\theta(y) &= (2,0,0,-4,-4,-5,-5,-7)\\
\theta(z) &= (0,0,0,-2,-4,-4,-6,-7)
\end{aligned}$$

Vamos a definir el orden lexicográfico donde para comparar dos vectores, se observan sólo las primeras componentes; si la primera componente de un vector es menor que la primera componente del otro vector, el primer vector es menor que el segundo según el orden lexicográfico definido. Si los dos vectores tienen iguales sus primera componentes se comparan sus segundas componentes siendo menor según el orden lexicográfico aquel vector cuya segunda componente sea menor. Si sus segundas componentes son iguales se comparan sus terceras componentes y así sucesivamente. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 3.19 *Sean $x, x' \in I(J,x)$.*

1. $\theta(x) < \theta(x') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \theta_1(x) < \theta_1(x') \text{ ó} \\ \text{para } j > 1, \theta_j(x) < \theta_j(x') \\ \text{y } \theta_i(x) = \theta_i(x'), \text{ para } i = 1, \ldots, j-1 \end{array} \right\}$

2. $\theta(x) = \theta(x') \Longleftrightarrow \theta_j(x) = \theta_j(x'), \forall j$

3. $\theta(x) \leq \theta(x') \Longleftrightarrow \theta(x) < \theta(x')$ *o bien* $\theta(x) = \theta(x')$

Ejemplo 3.19 *Para los vectores definidos en el Ejemplo 3.17 se tiene que*

- $\theta(x) <_L \theta(y)$ *$(0 < 2)$.*
- $\theta(z) <_L \theta(y)$ *$(0 < 2)$.*
- $\theta(x) <_L \theta(z)$ *(las primera cuatro componentes de ambos vectores son iguales y la quinta componente del vector $\theta(x)$, que es -5, es menor que la quinta componente del vector $\theta(z)$, que es -4).*

A continuación tenemos el concepto fundamental de esta sección.

Definición 3.20 *El* nucleolus *de un juego $v \in G^J$ es el conjunto $N(J,v)$ definido de la siguiente forma:*

$$N(J,v) = \{x \in I(J,v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \forall y \in I(J,v)\}$$

Se puede decir que el nucleolus contiene aquellas distribuciones de pagos que son imputaciones, y para las cuales se minimiza el mayor de los grados de insatisfacción.

Teorema 3.2 *Sea (J, v) un juego esencial (su conjunto de imputaciones es no vacío). Entonces se verifica que el nucleolus existe y es único.*

Proposición 3.3 *Una condición suficiente para que el nucleolus exista y sea único es que*

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J)$$

Demostración.

Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J)$. Entonces por la Proposición 3.1 se tiene que $I(J, v) \neq \emptyset$ de donde se deduce la existencia y unicidad del nucleolus por el Teorema 3.2

A continuación se dan dos definiciones que se van a utilizar en una proposición que nos permitirá calcular el nucleolus en algunos casos.

Definición 3.21 *Se dice que dos jugadores i, j son* simétricos *en un juego $v \in G^J$ si realizan aportaciones equivalentes para cada coalición. Es decir, si se cumple que*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \text{ para todo } S \in P(J), \text{ con } i, j \notin S$$

Definición 3.22 *Se dice que el jugador i es un* jugador pasivo *en el juego (J, v) si no aporta ningún beneficio adicional al resto de jugadores. Es decir, si se cumple que*

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), \text{ para toda coalición } S \text{ con } i \in S$$

Ejemplo 3.20 *En el juego del Ejemplo 3.4 no hay ningún par de jugadores simétricos y no hay ningún jugador pasivo.*

En el Ejemplo 3.5 cualquier par de jugadores es simétrico. Ningún jugador es pasivo.

Consideremos el siguiente juego con tres jugadores:

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 2, v(\{3\}) = 1,$$
$$v(\{1,2\}) = 3, v(\{1,3\}) = 2, v(\{2,3\}) = 3, v(\{1,2,3\}) = 4$$

En este juego, el jugador 1 *es jugador pasivo, ya que se cumple:*

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\emptyset) + v(\{1\}), \\ v(\{1,2\}) &= v(\{2\}) + v(\{1\}), \\ v(\{1,3\}) &= v(\{3\}) + v(\{1\}), \\ v(\{1,2,3\}) &= v(\{2,3\}) + v(\{1\}) \end{aligned}$$

De la misma forma, los jugadores 2 *y* 3 *son jugadores pasivos.*

Veamos algunas propiedades del nucleolus en la siguiente proposición

Proposición 3.4 *Se considera el juego* (J, v)*. El nucleolus* $N(J, v)$ *verifica las siguientes propiedades:*

1. *Si el core del juego es no vacío, entonces el único elemento del nucleolus pertenece al core.*
2. *Si el core del juego es unitario,entonces el core coincide con el nucleolus.*
3. *Sea* $N(J, v) = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ *el nucleolus. Si* i, j *son jugadores simétricos entonces* $N_i = N_j$.
4. *Sea* $N(J, v) = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ *el nucleolus. Si* $i \in J$ *es un jugador pasivo, entonces* $N_i = v(\{i\})$.

Demostración.

1. El core del juego (J, v) es el conjunto

$$C(J, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x(S) \geq v(S), \forall S \in P(J) - J\}$$

Supongamos que $C(J, v) \neq \emptyset$.
Para todo $x \in C(J, v)$ es $e(S, x) \leq 0, \forall S \in P(J)$. Ello implica que $\theta(x)$ tiene todas sus componentes menores o iguales a cero. En particular, $\theta_1(x) = 0$.
Sea y una imputación del juego que no pertenezca al core. Existirá al menos una coalición $\bar{S} \in P(J)$, tal que $x(\bar{S}) < v(\bar{S})$. Por tanto, $e(\bar{S}, y) = v(\bar{S}) - x(\bar{S}) > 0$. Por tanto, $\theta(y)$ tiene al menos una componente positiva, por lo que $\theta_1(y) > 0$.
Por lo tanto, $\forall x \in C(J, v)$, $\forall y \notin C(J, v)$ es $\theta(x) <_L \theta(y)$ entonces $N(J, v) \subset C(J, v)$.
Como el conjunto de imputaciones es no vacío al ser el core no vacío, el nucleolus existe y es único por el por el Teorema 3.2 por lo que el único elemento del nucleolus pertenece al core.

2. A partir de 1. es inmediato que si, en particular, el core es unitario se verifica que $N(J, v) = C(J, v)$.

3. Demostraremos la propiedad por reducción al absurdo.
Sea $N = N(J, v) = (N_1, \ldots, N_i, \ldots, N_j, \ldots, N_n)$. Supongamos que fuera $N_i \neq N_j$, siendo i, j jugadores simétricos. Sea

$$N = N(J, v) = (N_1, \ldots, N_j, \ldots, N_i, \ldots, N_n),$$

donde hemos intercambiado N_i y N_j.

Al ser N y N' dos imputaciones del juego e i, j jugadores simétricos, será $\theta(N) = \theta(N')$. Luego como N es el nucleolus, se cumple que

$$\begin{aligned} \theta(N) &\leq_L \theta(y), \forall y \in I(J, v), \\ \theta(N') &\leq_L \theta(y), \forall y \in I(J, v) \end{aligned}$$

Por lo tanto N, N' pertenecen al nucleolus, lo que contradice la unicidad.

4. Vamos a ver dos casos:

   a) Supongamos que el core es no vacío. Entonces por **1**. se tiene $N(J, v) \in C(J, v)$. Por lo tanto se cumple que

   $$v(\{i\}) \leq N_i \leq v(J) - v(J - \{i\})$$

   Si i es un jugador pasivo se cumple que $v(J) - v(J - \{i\}) = v(\{i\})$ por lo que se deduce que $N_i = v(\{i\})$.

   b) Supongamos que el core es vacío, y supongamos que i es un jugador pasivo. Al ser $N(J, v)$ el nucleolus, es una imputación por lo que se verifica que $N_i \geq v(\{i\})$.

   Supongamos que $N_i > v(\{i\})$. Definamos $a = N_i - v(\{i\}) > 0$. Se considera la imputación $N'_1, N'_2, \ldots, N'_n$ con

   $$\begin{cases} v(\{i\}), & \text{si} \quad k = i \\ N_k + \frac{a}{n-1} & \text{si} \quad k \neq i \end{cases}$$

   Luego si $S = \emptyset$, o $S = \{i\}$, entonces $e(S, N') = 0$.
   Si $i \notin S$, y $S \neq \emptyset$, entonces

   $$e(S, N') = v(S) - N'(S) = v(S) - N(S) - \frac{s}{n-1}a < e(S, N)$$

   donde s es el número de jugadores que componen la coalición S.

Si $i \in S$, y $S \neq \{i\}$.

$$\begin{aligned} e(S, N') &= v(S) - N'(S) \\ &= v(S - \{i\}) + v(\{i\}) - N'(S - \{i\}) - N'(\{i\}) \\ &= v(S - \{i\}) - N(S - \{i\}) - \frac{s-1}{n-1}a < e(S - \{i\}, N) \end{aligned}$$

Como el core es vacío se verifica que $\max_S\{e(S, N')\} < 0$, ya que la imputación N' no puede pertenecer al core. Como

$$\max_S\{e(S, N')\} < \max_S\{e(S, N)\}$$

resulta que $\theta(N') <_L \theta(N)$, lo que está en contra de que N es el nucleolus.

Veamos unos ejemplos donde se puede utilizar la Proposición 3.4.

Ejemplo 3.21 *Calculemos el nucleolus del siguiente juego con tres jugadores:*

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 2, v(\{3\}) = 1, \tag{3.6}$$

$$v(\{1,2\}) = 3, v(\{1,3\}) = 2, v(\{2,3\}) = 3, v(\{1,2,3\}) = 4. \tag{3.7}$$

En primer lugar, se cumple la condición suficiente de la Proposición 3.3 para que el nucleolus exista y sea único ya que

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J), \ \textit{pues } 1 + 2 + 1 \leq 4.$$

Aplicando la propiedad 4 de la Proposición 3.4 se tiene que el nucleolus es $N = (N_1, N_2, N_3)$, *con* $N_1 = v(\{1\}) = 1$, $N_1 = v(\{2\}) = 2$, $N_3 = v(\{3\}) = 1$.

Por lo tanto $N = (1, 2, 1)$.

Ejemplo 3.22 *Calculemos el nucleolus del juego dado en el Ejemplo 3.5. Se cumpla la condición suficiente dada en la Proposición 8.3 para la existencia y unicidad del nucleolus ya que*

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J), \text{ pues } \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = 0 + 0 + 0 \text{ y } v(J) = A \geq 0$$

Sea $N = (N_1, N_2, N_3)$ el nucleolus. Hemos visto en el Ejemplo 3.20 que los jugadores 1 *y* 2 *son simétricos, por lo que aplicando la propiedad* **3**. *de la Proposición 3.4 se tiene que $N_1 = N_2$. También los jugadores* 1 *y* 3 *son simétricos, por lo que $N_1 = N_3$. Por lo tanto, $N_1 = N_2 = N_3 = a$.*

Como el nucleolus es una imputación debe cumplir el principio de eficiencia por lo que debe ser

$$N_1 + N_2 + N_3 = v(\{1, 2, 3\}), \text{ es decir } 3a = A, \text{ entonces } a = A/3.$$

Por lo tanto, en nucleolus del juego de los cantantes del Ejemplo 3.5 es $N = (A/3, A/3, A/3)$.

En el Ejemplo 3.13 se ha estudiado el core de este juego y se ha visto cómo puede ser vacío o no vacío, unitario o no unitario, dependiendo de las relaciones entre los parámetros A y B. Hay que observar que el nucleolus de este juego siempre existe y es único, independientemente de que el core sea o no vacío y sea o no unitario. En particular, hemos visto en el Ejemplo 3.13 que si $2A = 3B$ el core es unitario, siendo

$$C(J, v) = (A - B, A - B, 2B - A) = (A/3, A/3, A/3)$$

y coincide con el nucleolus, como no podía ser de otra forma, a la vista de la propiedad **2**. *de la Proposición 3.4.*

Si $2A < 3B$, el core es vacío y el nucleolus es $N = (A/3, A/3, A/3)$.

Si $2A > 3B$, el core es no vacío y no unitario y el nucleolus sigue siendo $N = (A/3, A/3, A/3)$.

Ejemplo 3.23 *Calculemos el nucleolus del juego dado en el Ejemplo 3.4.*

Como en el Ejemplo 3.12 se ha calculado el core, el cual es

$$C(J, v) = \{(0, x_2, 775 - x_2) : 0 \leq x_2 \leq 75\}$$

Por la propiedad **1.** *demostrada en la Proposición 3.4 se sabe que el nucleolus, que existe y es único, es uno de los puntos del core. Por tanto, el nucleolus es alguno de los puntos de la forma* $x = (0, a, 775-a)$, *con* $0 \leq a \leq 75$.

Apliquemos la definición de nucleolus. Para cada uno de los puntos candidato a nucleolus calculemos el exceso

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Sabemos que será $e(\emptyset, x) = e(J, x) = 0$, *para todo* x. *Como queremos comparar los vectores de excesos para los distintos candidatos a nucleolus según el orden lexicográfico, sólo nos interesan las componentes de los vectores de excesos que varían con los distintos candidatos.*

Los valores de $e(S, x)$ *para* $S \in P(J)$, *con* $S \neq \emptyset$ *y* $S \neq J$, *siendo* $x = (o, a, 775 - a)$, *con* $0 \leq a \leq 75$, *son los siguientes:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
$e(S,x)$	0	$-a$	$a-425$	$-a$	$a-75$	0

Como ahora hay que comparar los vectores de excesos para los distintos candidatos a nucleolus, nos interesan sólo aquellos excesos que dependan de a. *El nucleolus será el vector* $x = (0, a, 775-a)$, *con* $0 \leq a \leq 75$, *correspondiente al valor de* a *que sea solución óptima del siguiente problema*

$$\min_{0 \leq a \leq 75} \{\max\{-a, a - 425, a - 75\}\}$$

Como es evidente que $a-425 < a-75$, *el problema anterior se puede expresar como*

$$\min_{0 \leq a \leq 75} \{\max\{-a, a - 75\}\}$$

Este problema se resuelve fácilmente con la ayuda de una representación gráfica, tal como aparece en la Figura 3.5 En efecto, se representa la variable a en abscisas y, para los valores de a comprendidos entre 0 *y* 75 *se representan las funciones* $-a$ *y* $a - 75$. *A la vista de los gráficos de las dos funciones representamos con trazo grueso la función* $M(a) = \text{máx}\{-a, a - 75\}$. *Finalmente a la vista del gráfico se resuelve el problema* $\text{mín}_{0 \leq a \leq 75} M(a)$ *obteniéndose que el valor óptimo es a*37,5, por lo que el nucleolus del juego es* $N = (0, 37{,}5, 737{,}5)$.

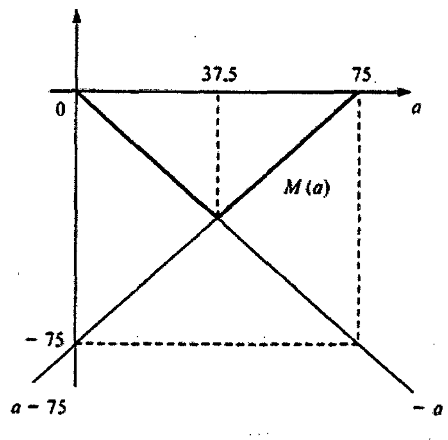

Figura 3.5: Resolución gráfica del problema.

3.4.1. Método para calcular el nucleolus utilizando programación lineal

Para calcular el nucleolus $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del juego $j \in G^J$, se resuelve el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}&\text{mín}\, \alpha_1\\ &v(S) - \textstyle\sum_{i \in S} x_i \leq \alpha_i, \ \text{ para } S \in P(J), S \neq \emptyset, S \neq J\\ &x \in I(J, v)\end{aligned}$$

Sea α_1^* el mínimo de ese problema. Si tal mínimo se alcanza en un único punto $\tilde{x}$, entonces $\tilde{x}$ es el nucleolus y el cálculo está completo. Normalmente dicho mínimo no se alcanzará en un único punto x sino en un conjunto X^1. En tal caso normalmente habrá una familia $\mathscr{F}_1$ de coaliciones, tal que para todo $S \in \mathscr{F}_1$ y $x \in X^1$ es $e(S, x) = \alpha_1$. Entonces se resuelve el problema de programación lineal

$$\begin{aligned}&\text{mín}\, \alpha_2\\ &v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq \alpha_i, \ \text{ para } S \in P(J) - \mathscr{F}_1,\ S \neq \emptyset,\ S \neq J\\ &x \in X^1\end{aligned}$$

Si el mínimo se alcanza en un único x se termina, si no es así se sigue como anteriormente.

Ejemplo 3.24 *Calculemos el nucleolus utilizando el método basado en programación lineal del juego de la bancarrota del Ejemplo 3.6.*

Sea el nucleolus $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Por tratarse de una imputación debe cumplirse las siguientes restricciones:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 50,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 650$$

Los valores de $e(S,x)$ *para* $S \in P(J)$ *con* $S \neq \emptyset$ *y* $S \neq J$, *siendo*

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \ ,$$

son los siguientes:

$$\begin{aligned}
e(\{1\},x) &= -x_1, & e(\{2\},x) &= -x_2, \\
e(\{3\},x) &= 50 - x_3, & e(\{4\},x) &= -x_4, \\
e(\{1,2\},x) &= 50 - x_1 - x_2, & e(\{1,3\},x) &= 250 - x_1 - x_3, \\
e(\{1,4\},x) &= 150 - x_1 - x_4, & e(\{2,3\},x) &= 50 - x_2 - x_3, \\
e(\{2,4\},x) &= 50 - x_2 - x_4, & e(\{3,4\},x) &= 50 - x_3 - x_4, \\
e(\{1,2,3\},x) &= 400 - x_1 - x_2 - x_3, & e(\{1,2,4\},x) &= 300 - x_1 - x_2 - x_4, \\
e(\{1,3,4\},x) &= 500 - x_1 - x_3 - x_4, & e(\{2,3,4\},x) &= 450 - x_2 - x_3 - x_4
\end{aligned}$$

Ahora se resuelve el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned}
&\min \alpha_1\\
&-x_1 \leq \alpha_1\\
&-x_2 \leq \alpha_1\\
&50 - x_3 \leq \alpha_1\\
&-x_4 \leq \alpha_1\\
&50 - x_1 - x_2 \leq \alpha_1\\
&250 - x_1 - x_3 \leq \alpha_1\\
&150 - x_1 - x_4 \leq \alpha_1\\
&200 - x_2 - x_3 \leq \alpha_1\\
&100 - x_2 - x_4 \leq \alpha_1\\
&300 - x_3 - x_4 \leq \alpha_1\\
&400 - x_1 - x_2 - x_3 \leq \alpha_1\\
&300 - x_1 - x_2 - x_4 \leq \alpha_1\\
&500 - x_1 - x_3 - x_4 \leq \alpha_1\\
&450 - x_2 - x_3 - x_4 \leq \alpha_1\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 50, x_4 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 650
\end{aligned}$$

Resolvemos el programa lineal utilizando algún software, obteniéndose que existe solución única.

$$\alpha_1^* = -75, x_1^* = 125, x_2^* = 75, x_3^* = 275, x_4^* = 175,$$

Al existir solución única se ha obtenido ya el nucleolus, el cuál es

$$N = (125, 75, 275, 175)$$

3.5. El valor de Shapley

Vamos a estudiar un concepto de solución para juegos cooperativos que corresponde a un tipo de análisis llamado normativo. Se trata de buscar una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos. Veremos que a partir de 4 axiomas se llega a una única asignación entre los jugadores, al cual llamaremos el valor de Shapley.

Sea $v \in G^J$ un juego en forma coalicional, en donde $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v)) \in \mathbb{R}^n.$$

La función de asignación de pagos $\phi(v)$ debe cumplir los siguientes axiomas:

Axioma 1: [**Eficiencia**] La función de asignación $\phi(v)$ debe distribuir el pago total del juego. Es decir, debe ser

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(J).$$

Axioma 2: [**Simetría**] Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan que

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \text{ para todo } S \in P(J), \text{ con } i, j \notin S$$

se tiene

$$\phi_i(v) = \phi_j(v).$$

Axioma 3: [**Tratamiento del jugador pasivo**] Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de jugadores,no debe recibir ningún pago adicional. Es decir, para cada jugador $i \in J$, para el cual se verifica que

$$v(s) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), \text{ para toda coalición } S \text{ con } i \in S$$

se tiene

$$\phi_i(v) = v(\{i\}).$$

Axioma 4: [**Aditividad**] La función de asignación debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera (J, v_1) y (J, v_2) se debe tener

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$$

El siguiente teorema nos dice que existe una única asignación que verifica los axiomas $1, 2, 3$ y 4, al cual se le llama el *valor de Shapley.*

Teorema 3.3 *La única asignación* $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v))$ *que verifica los axiomas* $1, 2, 3$ *y* 4 *es*

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})],$$

donde

$$q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

siendo s *=número de jugadores que hay en la coalición* S.

Demostración.

Para cada coalición $S \in P(J)$ que no contiene al jugador i, se verifica que $S = S - \{i\}$, por lo que $v(S) - v(S - \{i\}) = 0$, y se tiene que

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S) - \{i\}] = \sum_{S \in S(i)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})],$$

donde

$$S(i) = \{S \in P(J) : i \in S\}$$

Veamos que ϕ verifica los axiomas $1, 2, 3$ y 4.

En efecto.

Axioma 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in J}\phi_i(v) &= \sum_{i\in J}\sum_{S\in P(J)} q(s)[v(S)-v(S-\{i\})] \\
&= \sum_{S\in P(J)}\sum_{i\in S} q(s)[v(S)-v(S-\{i\})] \\
&= \sum_{S\in P(J)} sq(s)v(S) - \sum_{S\in P(J)} q(s)\left[\sum_{i\in S} v(S-\{i\})\right] \\
&= \sum_{S\in P(J)} sq(s)v(S) - \sum_{S\in P(J)-J} q(s)sv(S) \\
&= nq(n)v(J) \\
&= v(J).
\end{aligned}$$

Axioma 2. Se consideran los siguientes conjuntos de $P(J)$:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{S\in P(J) : i\notin S \text{ y } j\notin S\}, \quad S_i = \{S\in P(J) : i\in S \text{ y } j\notin S\} \\
S_J &= \{S\in P(J) : i\notin S \text{ y } j\in S\}, \quad S_{ij} = \{S\in P(J) : i\in S \text{ y } j\in S\}
\end{aligned}$$

Debemos observar que $S\in S_i$ si y sólo si $S-\{i\}\in S_0$. Además para jugadores simétricos se tiene que

$$v(S-\{i\}) = v[(S-\{i,j\})\cup\{j\}] = v[(S-\{i,j\})\cup\{i\}] = (S-\{j\}), \forall S\in S_{ij}$$

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones se obtiene

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{S\in S(i)} q(s)[v(S)-v(S-\{i\})] \\
&= \sum_{S\in S_{ij}} q(s)[v(S)-v(S-\{i\})] + \sum_{S\in S_i} q(s)[v(S)-v(S-\{i\})] \\
&= \sum_{S\in S_{ij}} q(s)[v(S)-v(S-\{i\})] + \sum_{S\in S_0} q(s)[v(S\cup\{i\})-v(S)] \\
&= \sum_{S\in S_{ij}} q(s)[v(S)-v(S-\{j\})] + \sum_{S\in S_0} q(s)[v(S\cup\{j\})-v(S)] \\
&= \sum_{S\in S_{ij}} q(s)[v(S)-v(S-\{j\})] + \sum_{S\in S_j} q(s)[v(S)-v(S-\{j\})]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{S \in S_j} q(s)[v(S) - v(S - \{j\})] \\
&= \phi_j(v).
\end{aligned}
$$

Axioma 3. Para todo jugador i para el que se verifique que

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), \forall S \in S(i),$$

se tiene que

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in S(i)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] = v(\{i\}) \left[\sum_{S \in S(i)} q(s) \right] = v(\{i\})$$

donde

$$
\begin{aligned}
\sum_{S \in S(i)} q(s) &= q(s) = q(1) + (n-1)q(2) + \cdots + \binom{n-1}{n-1} q(n) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} q(s) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(s-1)!(n-s)!} q(s) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(s-1)!(n-s)!} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Axioma 4. Consideremos los juegos (J, v_1) y (J, v_2). Entonces $v_1 + v_2$ es otra función característica correspondiente a un juego con J jugadores y se verifica que

$$\forall S \in P(J), \quad (v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$$

Por lo tanto, para cada jugador $i \in J$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_i(v_1+v_2) &= \sum_{S\in P(J)} q(s)[(v_1+v_2)(S)-(v_1+v_2)(S-\{i\})] \\
&= \sum_{S\in P(J)} q(s)[v_1(S)+v_2(S)-v_1(S-\{i\})-v_2(S-\{i\})] \\
&= \sum_{S\in P(J)} q(s)[v_1(S)-v_1(S-\{i\})]+ \\
&\qquad\qquad \sum_{S\in P(J)} q(s)[v_2(S)-v_2(S-\{i\})] \\
&= \phi_i(v_1)+\phi_i(v_2)
\end{aligned}$$

Veamos que $\phi(v)$ es único. Para ver eso demostraremos la unicidad en dos etapas, en la primera veremos que los axiomas $1, 2$ y 3 determinan ϕ de manera única para una familia particular de juegos. En la segunda etapa veremos que existe una extensión única para el valor ϕ considerando ahora todos los juegos cooperativos con conjunto de jugadores J.

1. Sea $T \in P(J)$ cualquiera. Dicho conjunto es coalición ganadora del siguiente juego

$$\forall S \in P(J), v_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De manera análoga, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el juego αv_T asigna un pago conjunto de α a la coalición ganadora y cero a las coaliciones que no contienen a T.

Consideremos el juego (J, v_T). Veamos que $\phi_i v_T$ es único para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. En efecto, un jugador $i \notin T$ es un jugador pasivo pues $\forall S \in S(i)$, o bien se cumple que $T \subseteq S$, en cuyo caso $v_T = v_T(S - \{i\}) = 1$, o bien T no está contenido en S, en cuyo caso $v_T(S) = v_T(S - \{i\}) = 0$. Por lo tanto, se cumple que

$$v_T(S) = v_T(S - \{i\}) + v_T(\{i\}),$$

y el jugador i es pasivo.

Aplicando el axioma 3, si $i \notin T$, se verifica que $\phi_i(v_T) = v_T(\{i\}) = 0$. Considerando ahora dos jugadores $i, j \in T$. Para cualquier coalición S, con $i, j \notin S$, se verifica que

$$v_T(S \cup \{i\}) = v_T(S \cup \{i\}) = 0$$

ya que T no está contenido en $S \cup \{i\}$ ni en $S \cup \{j\}$.

El axioma 2 asegura que

$$\phi_i(v_T) = \phi_j(v_T).$$

Aplicando ahora el axioma 1, tenemos

$$1 = v_T(J) = \sum_{i \in J} \phi_i(v_T) = \sum_{i \in T} \phi_i(v_T) + \sum_{i \notin T} \phi_i(v_T) = \sum_{i \in T} \phi_i(v_T) = t\phi_i(v_T)$$

donde t es igual al número de jugadores que componen la coalición T.

Luego, $\phi_i(v_T)$ es único y viene dado por

$$\phi_i(v_T) = \begin{cases} 1/t, & \text{si } i \in T \\ 0, & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

donde t es el número de jugadores que componen la coalición T.

De la misma forma se demuestra que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\phi_i(\alpha v_T) = \begin{cases} \alpha/t, & \text{si } i \in T \\ 0, & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

donde t es el número de jugadores que componen la coalición T.

2. Veamos que existe una única extensión de la familia de juegos considerada en la etapa 1 a la familia de juegos en los que el conjunto de jugadores es $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Cada juego (J, v) está caracterizado por un vector de números reales con $k = 2^n - 1$ componentes, ya que en un conjunto de n jugadores hay k coaliciones posibles, excluyendo el conjunto vacío que es igual a cero. Por lo tanto hay tantos juegos con n jugadores como elementos tiene el conjunto $\mathbb{R}^k$.

Sea la familia de juegos considerada en la etapa 1

$$B = \{v_T \in \mathbb{R}^k : T \in P(J) \setminus \emptyset\}$$

Como en $P(J) \setminus \emptyset$ hay $k = 2^n - 1$ elementos, se verifica que el conjunto B contiene k vectores.

Veamos que los k vectores de B son linealmente independientes. En efecto, supongamos que fueran linealmente dependientes. Ello quiere decir que existe un vector $\lambda = (\lambda_T)_{T \in P(J) - \emptyset}$, con $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}^k$, tal que

$$\sum_{T \in P(J) - \emptyset} \lambda_T v_T = 0 \tag{3.8}$$

Sea $M \in P(J) - \emptyset$ la coalición con el menor número de elementos m entre las coaliciones que tienen un coeficiente $\lambda_T \neq 0$ en la igualdad 3.8 correspondiente a la dependencia lineal. Luego tenemos que

$$v_M(M) = -\frac{1}{\lambda_M} \left[\sum_{T \in P(J) - \emptyset - M} \lambda_T v_T(M) \right] = 1$$

Por otro lado, debemos tener

$$\sum_{T \in P(J) - \emptyset - M} \lambda_T v_T(M) = 0$$

pues ninguna coalición $T \neq M$, con $t \geq m$ puede estar contenida en M.

Por lo tanto, si suponemos que B es un conjunto linealmente dependiente, llegamos a una contradicción. Luego, el conjunto B está formado por k vectores de $\mathbb{R}^k$ linealmente independientes, por lo que constituye una base.

Así, para cualquier juego (J, v) existe un único vector

$$\lambda = (\lambda_T)_{T \in P(J)-\emptyset} \in \mathbb{R}^k,$$

tal que

$$v = \sum_{T \in P(J)-\emptyset} \lambda_T v_T \ .$$

Aplicando varias veces el Axioma 4 se llega a que

$$\phi_i(v) = \sum_{T \in P(J)-\emptyset} \phi_i(\lambda_T v_T)$$

con lo que queda probada la unicidad y con ello el teorema.

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el factor $v(S) - v(S - \{i\})$ es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a $S - \{i\}$, mientras que el factor $q(s)$ es la probabilidad de que a i le toque incorporarse precisamente a $S - \{i\}$.

3.5.1. El valor de Shapley para $n = 3$

Supongamos ahora que tenemos el juego (J, v), en donde $J = (1, 2, 3)$.

En este caso,

$$P(J) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

La familia de coaliciones a las que pertenece el jugador 1 es

$$S(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

De manera análoga, para los jugadores 2 y 3 se tiene que

$$\begin{aligned} S(2) &= \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \\ S(3) &= \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \end{aligned}$$

Como en este caso es $n = 3$, se tiene que

$$q(s) = \frac{(s-1)!(3-s)!}{3!}, \text{ para } 1 \leq s \leq 3, s \in N$$

por lo que

$$\begin{aligned} q(1) &= \frac{0!2!}{3!} = \frac{1}{3} \\ q(2) &= \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \\ q(3) &= \frac{2!0!}{3!} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Las expresiones para el valor de Shapley son en este caso

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= q(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] \\ &\quad + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\ &= \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] \\ &\quad + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \end{aligned}$$

Debemos observar que en este caso los coeficientes son $1/3, 1/6, 1/6$ y $1/3$, los cuales son positivos y la suma de ellos es igual a 1.

Análogamente hacemos para los jugadores 2 y 3

$$\begin{aligned}
\phi_2(v) &= q(1)[v(\{2\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] \\
&= \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v) &= q(1)[v(\{3\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] \\
&= \frac{1}{3}v(\{3\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] \\
&\quad + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})]
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.25 *Calculemos el valor de Shapley para el juego del Ejemplo 3.4.*

Como es un juego con tres jugadores, el valor de Shapley es

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \phi_3(v))$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\
&= \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[0 - 0] + \frac{1}{6}[700 - 350] + \frac{1}{3}[775 - 775] \\
&= \frac{350}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(v) &= \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] \\
&= \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[0 - 0] + \frac{1}{6}[775 - 350] + \frac{1}{3}[775 - 700] \\
&= \frac{425}{6} + \frac{75}{3} \\
&= \frac{575}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v) &= \frac{1}{3}v(\{3\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] \\
&\qquad + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] \\
&= \frac{1}{3}[350] + \frac{1}{6}[700 - 0] + \frac{1}{6}[775 - 0] + \frac{1}{3}[775 - 0] \\
&= \frac{3725}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de Shapley del juego es

$$\phi(v) = \left(\frac{350}{6}, \frac{575}{6}, \frac{3725}{6}\right)$$

4

Conclusiones

Los juegos cooperativos se caracterizan por el hecho de que los jugadores pueden cooperar entre ellos para buscar el máximo beneficio común. Una cuestión importante en la Teoría de juegos cooperativos es que en el momento en que varios jugadores deciden cooperar en algún sentido, debe formarse una coalición entre estos jugadores. Los jugadores de esta coalición, en el momento en que se forma, actuarán buscando el máximo beneficio posible para la coalición. Una coalición puede estar formada por cualquier grupo de jugadores de cualquier tamaño. El pago de esta coalición, esto es, los beneficios que la coalición obtendrá, será función de la coalición, y es repartido al finalizar el juego entre los jugadores que forman la coalición. Este pago es representado por un número. Cuando cualquier reparto del pago entre los jugadores es posible, hablamos de un juego con utilidad transferible o abreviadamente juego UT.

Como hemos dicho, un juego de utilidad transferible se caracteriza porque cualquier reparto del beneficio total de la coalición entre los jugadores que la forman está permitido. Por tanto, al analizar un juego cooperativo, un objetivo es conocer las estrategias que deben tomar los diferentes jugadores, y conocer el beneficio que obtendrá cada jugador si decidiese formar una coalición con otros jugadores. Este objetivo es demasiado ambicioso para cualquier juego que pretenda modelar un problema de la vida real. En los problemas que se suelen modelar mediante la teoría de juegos, intervienen muchos factores en la toma de decisiones, es decir, en la coalición que se forma y en cómo se reparten finalmente los beneficios. Estas decisiones dependen de variables como la capacidad de negociación, la habilidad de los jugadores, o las presiones de tipo social. Por tanto, es muy difícil modelar exactamente cada relación, cada afinidad de cada jugador con el resto, para encontrar un modelo completo de una negociación.

Concluimos con dos tipos de conceptos de solución en juegos cooperativos. Los conceptos de tipo conjunto, que limitan un conjunto de posibles valores exigiéndole algunas propiedades, y los conceptos de solución de tipo puntual, que eligen entre todos los posibles vectores de pago uno solo.

El core es uno de los conceptos más importantes de la teoría de juegos, porque limita el conjunto de posibles soluciones a un conjunto de vectores de pago que cumplen una serie de restricciones razonables. Sin embargo, en la práctica, nos interesa conocer una solución concreta, un punto que nos sirva como posible reparto de pagos de una función característica v. Para abordar este problema se han definido varias reglas de reparto que eligen un único reparto de pagos. Por ejemplo, el nucleolus, que es una regla que toma una solución incluida dentro del core, siempre que éste no sea vacío. Existen otras reglas de reparto que son completamente independientes del core, tanto en su definición, como en el hecho de que no siempre pertenecen al core. Dentro de estas reglas la más utilizada es el valor de Shapley.

La teoría de juegos cooperativos tiene por objetivo modelar problemas de la vida real tomando como referencia un análisis de la estructura completa de los juegos de azar, pero como sabemos, en un problema de la vida real intervienen muchos factores lo cual dificulta mucho el encontrarle una solución.

Las aplicaciones de la teoría de juegos se han utilizado en diferentes campos como en la economía, la biología, las ciencias políticas, etc. Para el logro de estas aplicaciones ha sido necesario definir un conjunto finito de jugadores, que pueden ser personas, empresas, instituciones, partidos políticos, etc. y asignar un valor numérico a cada subconjunto, a los cuales se les llama coaliciones, incluyendo el conjunto vacío al cual se le asignará el valor de cero, este valor asignado se le conoce como función característica o valor de la coalición. En lo general se trabaja con juegos de utilidades transferibles, esto quiere decir que cualquier reparto de utilidades al finalizar el juego es posible. Para llevar a cabo dicho reparto de utilidades se considera un vector de distribución de pagos, en el cual cada elemento representa el pago para cada componente de la coalición.

Ahora, el problema central es determinar una solución o un conjunto de soluciones para dicho reparto de utilidades, y para ello se han considerado dos tipos de conceptos de solución:

El concepto de solución de tipo conjunto, en el cual, mediante el principio de eficiencia se genera el conjunto de preimputaciones, luego se le agrega el principio de racionalidad individual generando así el conjunto de imputaciones y con esto vamos restringiendo el conjunto de vectores de solución.

Si además, el principio de racionalidad individual se extiende al principio de racionalidad coalicional, obtenemos el Core, que es el conjunto de solución conjunta más importante de la teoría de juegos cooperativos.

Si bien es cierto que el core nos da un conjunto admisible de soluciones, también presenta una dificultad importante, que como conjunto se corre el riesgo de que sea un conjunto vacío o un conjunto muy grande de soluciones. Para evitar esta dificultad se genera un conjunto de solución unitario llamado Nucleolus, el cual utiliza criterios de medición en función al grado de insatisfacción de las coaliciones en el reparto para garantizar que existe una solución y además es única, siempre y cuando el conjunto de imputaciones sea no vació.

De ello tenemos que si el core es un conjunto convexo, entonces tiene solución y es un conjunto unitario, que coincide con el nucleolus.

Por otro lado e independiente del core, se tienen los conceptos de solución de tipo puntual o normativos, como el llamado valor de Shapley, que mediante el establecimiento de los axiomas de eficiencia, simetría, jugador pasivo y aditividad, asigna un único vector de distribución de pagos, con el cual no hay lugar a disconformidades, partiendo que cuando se asume un juego en forma coalicional, los integrantes de las coaliciones quedan vinculados para trabajar en grupo por el máximo beneficio de la coalición a la que pertenecen.

Es importante destacar que no hay una solución mejor que otra. Será el contexto, el tipo de juego que queramos estudiar, el que sea más adecuado para el valor de Shapley. En muchas ocasiones, la propiedad de eficiencia parece natural, por ejemplo cuando la finalidad del juego es distribuir costes o repartir beneficios. En este caso el valor de Shapley es el más adecuado como concepto de solución.

Bibliografía

[1] Aubin, J-P., *Optima and Equilibria.* Springer-Verlag, 1993.

[2] Bilbao, J. M. y Fernández, F. R. (editores), *Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales.* Universidad de Sevilla, 1998.

[3] Bilbao, J. M.; Fernández, J. R.; Jiménez, A. y Lebrón E., *Bicooperative Games.* Journal of Economic Literature, Classification Number: $C71$.

[4] Bilbao, J. M.; Fernández, J. R.; Jiménez, N. y López J. J., *The core and the Weber set for bicooperative games.* Int. J. Game Theory, $36 : 209 - 222$, 2007.

[5] Bilbao, J. M.; Fernández, J. R.; Jiménez, N. y López J. J., *The Shapley value for bicooperative games.* Ann. Oper. Res., $158 : 99 - 115$, 2007.

[6] Branzei, R.; Dimitrov, D. y Tijs, S., *Models in Cooperative Game Theory.* Springer, 2008.

[7] Crouzeix, J. P.; Ocaña, E. y Sosa, W., *Análisis Convexo.* Monografias IMCA, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú, 2003

[8] Labreuche, C. y Grabisch, M., *A value for bi-cooperative games.* Int. J. Game Theory, 2008.

[9] Monsalve, S. y Arévalo, J., *Un Curso de Teoría de Juegos Clásica.* Departamento de Publicaciones, Universidad Externado de Colombia, 2005.

[10] von Neumann, J. y Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, New Jersey, 1944.

[11] Peleg, B. y Sudhölter, P., *Introduction to the Theory of Cooperative Games.* Springer-Verlag, 2007.