UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

"DINÁMICA DE APLICACIONES HOLOMORFAS SOBRE EL ESPACIO PROYECTIVO"

TÉSIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR

MAURO FERNANDO HERNANDEZ IGLESIAS

Asesor
Dr. PERCY FERNÁNDEZ SÁNCHEZ

LIMA – PERÚ
2008

A mi bisabuela Hipólita Román García.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor Percy Fernández por toda la paciencia y los consejos que tuvo conmigo para poder concluir este trabajo, a mis amigos del IMCA y SAN MARCOS que estuvieron siempre pendientes de mi avance.

RESUMEN

Las aplicaciones holomorfas de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^1$ se pueden expresar en coordenadas homogéneas como $[p(x,y) : q(x,y)]$, donde p, q son polinomios homogéneos del mismo grado y sin factores comunes, que en coordenadas afines se puede expresar como $\frac{p(1,z)}{q(1,z)}$, razón por la cual estudiar la dinámica de una aplicación holomorfa R de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^1$ es estudiar la dinámica de una aplicación racional.
El comportamiento dinámico de la familia $\{R^n\}$ de aplicaciones racionales se hace a través de dos conjuntos.

El conjunto de Fatou, que es el máximo abierto donde la familia $\{R^n\}$ es equicontinua o normal, y el conjunto de Julia definido como el complemento del conjunto de Fatou. Para el caso de una variable tenemos el Teorema de Montel, que nos da un criterio para afirmar cuando una familia de aplicaciones es normal. Para el caso de varias variables también podemos expresar una aplicación holomorfa en la forma $[p_0 : p_1 : p_2 : \ldots : p_n]$; donde los $p_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ son polinomios homogéneos del mismo grado y sin factores comunes, y podemos definir los conjuntos de Fatou y Julia de modo análogo al caso unidimensional, sin embargo no tenemos una herramienta análoga al Teorema de Montel, esta dificultad es salvada introduciendo la Geometría Hiperbólica de Kobayashi, la cual permite definir las variedades hiperbólicas en el sentido de Kobayashi la importancia de estas variedades radica en que las aplicaciones holomorfas definidas en estas variedades contraen distancia.
Un concepto más fuerte que hiperbolicidad y que también veremos es el llamado encaje hiperbólico, además ultilizando Teoremas debido a Borel veremos que el complemento de $2n+1$ hiperplanos en posición general, está hiperbólicamente encajado en $\mathbb{P}^n$.
Uno de los resultados centrales en esta monografía, es que genericamente las aplicaciones holomorfas $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, tienen la propiedad que el complemento de sus cinco primeras iteraciones de su conjunto de puntos críticos está hiperbólicamente encajado en $\mathbb{P}^2$.

INTRODUCCIÓN

Esta monografía trata del estudio de la dinámica de aplicaciones holomorfas sobre los espacios proyectivos (llamados también endomorfismos); a lo largo de estas notas usaremos indistintamente los términos función, aplicación o mapeo.
El inicio de la dinámica de aplicaciones holomorfas tuvo su origen con Fatou en 1906 específicamente estudió la iteración de la función racional de grado dos, $\frac{z^2}{z^2+2}$ la cual es una representación local de la aplicación holomorfa $[x : y] \rightarrow [x^2 : x^2 + 2y^2]$; paralelamente en la misma época Julia también estudiaba el comportamiento de las órbitas de funciones racionales. Antes de 1990 ya existían algunos trabajos de dinámica compleja de aplicaciones holomorfas en más de una variable, después de ese año el estudio de ese tipo de dinámica se ha intensificado ver ([Si] y su bibliografía).
El estudio de la dinámica de los endomorfismos sobre espacios proyectivos de dimensión mayor a uno comienza con el artículo Sibony y Fornaess [FS1], posteriormente se han realizado muchas investigaciones sobre los endomorfismos. Este trabajo esta inspirado en el artículo [FS1], empazaremos dando los prerequisitos necesarios para comprender los resultados allí tratados.
Se usarán importantes resultados tanto en una como varias variables complejas, a continuación pasamos a describir el contenido de cada capítulo.

En el primer capítulo empezaremos dando algunas propiedades algebraicas y geométricas del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$, la topología a usar es la de Zariski que es la topología natural desde un punto de vista algebraico, desde el punto de vista diferenciable esta topología es muy tosca, pues todos los abiertos son densos en la topología heredada por la estructura diferenciable, esta propiedad dará un sentido de generalidad a las propiedades que estudiemos, luego veremos los conjuntos analíticos y algebraicos y enunciaremos el Teorema de Chow que nos permitirá utilizar indistintamente ambos conjuntos, también describiremos el número de intersección de n hipersuperficies del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ en un punto dado y enunciamos el importante Teorema de Bezout. La última sección de este capítulo estará dedicado a familias normales sobre espacios métricos, donde enunciamos el Teorema de Ascoli-Arzelà y el Teorema de Montel.

En el segundo capítulo, hacemos una recopilación de algunos resultados de dinámica holomorfa unidimensional. En la primera sección caracterizamos las aplicaciones holomorfas y definimos los conjuntos de Fatou y Julia de estas aplicaciones, sobre ellos recae toda la complejidad de la dinámica de ese tipo de aplicaciones. En la siguiente sección estudiamos los puntos fijos y periódicos de ese tipo de aplicaciones holomorfas, en la última sección estudiaremos las propiedades de los conjuntos invariantes y relacionaremos estas propiedades con las de su conjunto de Julia. Acabaremos con un ejemplo de aplicación racional cuyo conjunto de Julia es todo $\mathbb{P}^1$. En todo este capítulo se pondrá atención a la utilidad del Teorema de Montel.

En el tercer capítulo, comenzaremos probando que las aplicaciones holomorfas del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ en sí mismo, son polinomiales, este resultado es conocido como el Teorema de Weierstrass-Hurwitz, esta descripción será consecuencia del Teorema Extensión de Levi. Por medio de este resultado también analizaremos las aplicaciones meromorfas. Luego veremos los conjuntos de Fatou y Julia para endomorfismos del espacio proyectivo de dimensión arbitraria, de manera análoga al caso unidimensional, y daremos una topología al espacio de aplicaciones holomorfas, usando para esto el Teorema de la Aplicación Propia, luego estudiaremos los puntos periódicos de funciones holomorfas, y calcularemos explicitamente el número de puntos periódicos de un cierto orden (ver Corolario 4). En el resto de este capítulo se estudiará los conjuntos excepcionales y veremos que genéricamente las aplicaciones holomorfas no poseen este tipo de conjuntos. Para el caso de aplicaciones holomorfas sobre el plano proyectivo serán descritas completamente las variedades excepcionales.

En el cuarto capítulo, introduciremos la Geometría de Kobayashi sobre variedades complejas, mediante la cual toda aplicación holomorfa contraerá distancia. Comenzamos la primera sección estudiando la métrica de Poincaré y sus consecuencias. Luego definimos la semimétrica de Kobayashi y veremos sus principales propiedades, cuando esta semimétrica es una métrica el espacio es llamado Hiperbólico en sentido de Kobayashi o simplemente hiperbólico, luego pasamos a estudiar las variedades hiperbólicamente encajadas, y el criterio de hiperbolicidad en el sentido de Brody que es muy útil para decidir cuando una variedad es hiperbólica en el sentido de Kobayashi, esto es precisamente el Teorema de Brody sobre variedades compactas. Concluimos este Capítulo revisando los Teoremas de Green [Gr1], [Gr2] que es consecuencia del estudio de encaje hiperbólico y del Teorema de Brody.

En el quinto capítulo usaremos los Teoremas de Green para probar que genéricamente las aplicaciones holomorfas de grado ($d \geq 2$) en el plano proyectivo cumplen las siguientes propiedades:

• Para uma aplicación holomorfa f com conjunto de puntos críticos C se cumple de que los conjuntos $f^n(C)$, $0 \leq n \leq 4$ no tienen intersección triple.

• $\mathbb{P}^2 \backslash (\cup_{n=0}^{4} f^n(C))$ es hiperbólico Kobayashi.

Notaciones:

$\mathbb{C}$: El cuerpo de los números complejos.
$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.
$\mathbb{R}$: El cuerpo de los números reales.
$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$.
$\mathbb{P}^k$: Espacio proyectivo k-dimensional complejo.
K_M : Métrica de Kobayashi.
$\tilde{K}_M$: Métrica infinitesimal de Kobayashi-Royden.
ds_r^2: Métrica de Poincaré en el disco $\mathbb{D}_r$.
ds^2: Métrica de Poincaré en el disco unitario $\mathbb{D}$.
ds_M^2: Métrica hermitiana de la variedad compleja M.
$\mathcal{F}(f)$: Conjunto de Fatou de f.
$\mathcal{J}(f)$: Conjunto de Julia de f.
$\mathcal{H}$: Espacio de las aplicaciones holomorfas en el espacio proyectivo.
$\mathcal{H}_d$: Espacio de las aplicaciones holomorfas de grado d en el espacio proyectivo.
$\mathcal{M}_d$: Espacio de las aplicaciones meromorfas de grado d y de rango máximo en el espacio proyectivo.
∂A: Frontera del conjunto A.
$\overline{A}$: Clausura del conjunto A.
$f^n = f \circ \ldots \circ f$: Composición de f, n-veces.
$\mathcal{O}$: El anillo local de funciones holomorfas.

Sumário

Capítulo 1

Espacio Proyectivo

1.1 Estructura holomorfa de $\mathbb{P}^n$

Definición 1. Un atlas holomorfo de dimensión $m \in I\!N$ sobre un espacio topológico M es una familia de homeomorfismos $\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{C}^m$, definidas en abiertos U_j tal que:

1. $M = \bigcup U_j$.

2. Si $W_{jk} = U_k \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\varphi_j(W_{jk})$, y $\varphi_k(W_{jk})$ son abiertos de $\mathbb{C}^m$, y la aplicación $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(W_{jk}) \to \varphi_k(W_{jk})$ es holomorfa.

Las φ_i son llamadas *parametrizaciones*.
Una *variedad holomorfa* de dimensión $m \in I\!N$ es un espacio topológico Hausdorff y segundo contable, el cual admite un atlas holomorfo de dimensión m.

La dinámica que estudiaremos se desarrollará sobre un ambiente que tiene estructura de variedad holomorfa, con abundantes propiedades topológicas y algebraicas.
En $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ consideremos los rayos $[a_0 : \cdots : a_n]$ determinados por el punto $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ y el origen de $\mathbb{C}^{n+1}$ el conjunto de todos estos rayos es denotado por $\mathbb{P}^n$ y es llamado el espacio proyectivo n dimensional complejo.

Observación 1. Cuando $n = 1$ es llamado línea proyectiva .
Cuando $n = 2$ es llamado plano proyectivo, para $n \geq 3$ es llamado espacio proyectivo.

Veamos ahora la definición formal de $\mathbb{P}^n$. Diremos que $(a_0, \ldots, a_n)$ y $(b_0, \ldots, b_n)$ en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ son equivalentes si existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que: $(a_0, \ldots, a_n) = \alpha(b_0, \ldots, b_n)$ y denotaremos esta relación por $\sim$.
Es claro que esta relación es de equivalencia y denotaremos a la clase que contiene a $(a_0, \ldots, a_n)$ por $[a_0 : \cdots : a_n]$.

Proposición 1. El espacio proyectivo de dimensión n tiene estructura de variedad compleja n dimensional.

Prueba. Por medio de la aplicación $H : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ definida como $(x_0, \ldots, x_n) \to [x_0 : \cdots : x_n]$, podemos inducir una topología en $\mathbb{P}^n$ diciendo que un conjunto $A \subset \mathbb{P}^n$ es abierto en $\mathbb{P}^n$ si $H^{-1}(A)$ es abierto de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. La aplicación H es sobreyectiva y abierta, pues para todo abierto U se tiene que:

$$H^{-1}H(U) = \cup_{t \in \mathbb{C}-\{0\}} \varphi_t(U),$$

donde $\varphi_t : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, $\varphi_t(z) = tz$. Por tanto $\mathbb{P}^n$ adquiere la estructura segundo contable de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Consideremos ahora $[a_0, \cdots, a_n] \neq [b_0, \cdots, b_n]$ y dos abiertos disjuntos U y V en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ conteniendo los puntos $(a_0, \cdots, a_n)$ y $(b_0, \cdots, b_n)$, luego consideramos los abiertos disjuntos $CU = \cup_{t \in \mathbb{C}-\{0\}} \varphi_t(U)$ y $CV = \cup_{t \in \mathbb{C}-\{0\}} \varphi_t(V)$, generados por los conjuntos U y V los cuales por definición contienen a las direcciones dadas por los vectores $(a_0, \cdots, a_n)$ y $(b_0, \cdots, b_n)$ de este modo tenemos dos abiertos disjuntos $H(CU)$ y $H(CV)$, teniendo los puntos $[a_0, \cdots, a_n]$ y $[b_0, \cdots, b_n]$ respectivamente. Por tanto $\mathbb{P}^n$ es Hausdorff.

Ahora, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ consideremos los abiertos $U_i = \{[a_0 : \cdots : a_n] : a_i \neq 0\}$ y las aplicaciones $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ definidas como:

$$\phi_i[a_0 : \ldots : a_n] = (a_0/a_i, \ldots, , a_{i-1}/a_i, a_{i+1}/a_i, \ldots, a_n/a_i)$$

las cuales resultan ser homeomorfismos, con inversas $\phi_i^{-1} : \mathbb{C}^n \to U_i$ definidas como:

$$\phi_i^{-1}(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) = [a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n].$$

De donde

$$\phi_j \phi_i^{-1}(x_0, \ldots, x_n) = (x_0/x_j, \ldots, 1/x_j, \ldots, x_n/x_j).$$

Por lo tanto las aplicaciones $\phi_j\phi_i^{-1}$ son holomorfas, así tenemos que $\mathbb{P}^n$ tiene estructura de variedad compleja n dimensional, siendo las ϕ_i sus parametrizaciones. □

Definición 2. Sean M y N variedades holomorfas de dimensiones m y n respectivamente. Una aplicación $f : M \to N$ es *holomorfa* en $p \in M$ si existen parametrizaciones $\varphi_j : U_j \to \mathbb{C}^m$ y $\psi_i : V_i \to \mathbb{C}^n$ con $p \in U_j$ y $f(U_j) \subset V_i$ tal que $\psi_i f \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j) \to \psi(V_i)$ es holomorfa en $\varphi_j(p)$.
Si la función f es holomorfa en cada punto de M se dirá simplemente que es holomorfa.

Si f es holomorfa con inversa holomorfa, esta aplicación será llamada *biholomorfa.*

Las parametrizaciones $\phi_j : U_j \to \mathbb{C}^m$, son biholomorfismos, con lo cual podemos identificar a $\mathbb{C}^m$ con abiertos del espacio proyectivo .

Ejemplo 1. La aplicación natural $H : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ definida como $(x_0, \ldots, x_n) \to [x_0 : \cdots : x_n]$ es holomorfa.
En efecto, supongamos que $x_i \neq 0$, entonces la imagen está en U_i.
Así $\phi_i \circ H(x_0, \cdots, x_n) = (x_0/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_n/x_i)$.

Observación 2. $\mathbb{P}^n \equiv \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$.
En efecto $\mathbb{P}^n - U_0$ consiste precisamente del subespacio lineal $L = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : z_0 = 0\}$
y su subconjunto:

$$L \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} : z_0 = 0\}$$

es identificado con $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Luego el cociente de L por la relación de equivalencia en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es igual al cociente de $\mathbb{C}^n - \{0\}$ por la relación de equivalencia que define a $\mathbb{P}^{n-1}$, así la restricción a $L \cap U_j$ $j = 1, \ldots, n$ de las aplicaciones coordenadas son vistas como las aplicaciones coordenadas en $\mathbb{P}^{n-1}$, por lo tanto el complemento de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{P}^n$ es $\mathbb{P}^{n-1}$.

Observación 3.
1.- Para el caso especial que $n = 1$ el espacio $\mathbb{P}^1$ coincide con la compactificación usual de $\mathbb{C}$ por adjunción de un punto ∞.
2.- $\mathbb{P}^n - U_0$ puede ser expresado como $z_0 = 0$, lo llamaremos el hiperplano

infinito, y será denotado por $\mathbb{H}_\infty$.
3.-En general un hiperplano en $U_0 = \mathbb{C}^n$ puede ser expresado como $\alpha_0+\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_n z_n = 0$ en las coordenadas $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, usando la identificación

$$\frac{x_i}{x_0} = z_i$$

podemos definir el hiperplano en $\mathbb{P}^n$ como : $\alpha_0 x_0+\cdots+\alpha_n x_n = 0$, que no es otra cosa que la compactificación de $\alpha_0+\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_n z_n = 0$. Nosotros llamaremos a la n-úpla $(z_1,\ldots,z_n)$ coordenadas afines.

1.2 Transformaciones Proyectivas

Para cada matriz cuadrada no singular de orden $n+1$, $A = (a_{i,j})$ tenemos una transformación proyectiva definida por :

$$P_A : [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \to [\sum_{i=0}^{n} a_{1i}x_i : \cdots : \sum_{i=0}^{n} a_{ni}x_i]$$

resulta claro de la definición que para un número complejo no nulo α tenemos que $P_A = P_{\alpha A}$, y también que $P_A \circ P_B = P_{AB}$ una consecuencia directa de esta última propiedad es que la inversa de P_A es $P_A^{-1} = P_{A^{-1}}$.

Para cualquier $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ consideremos el hiperplano

$$H_\alpha \,:\, \alpha_0 x_0+\cdots+\alpha_n x_n = 0$$

podemos hallar una matriz $(b_{i,j})$ de orden $n\times(n+1)$, tal que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_n \\ b_{10} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n0} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

es no singular. Un cálculo directo nos da que $\mathbb{H}_\infty = P_A(H_\alpha)$, donde:

$$P_A[a_0 : \cdots : a_n] = [\sum_{j=0}^{n} \alpha_j a_j : \sum_{j=0}^{n} b_{1j}a_j : \cdots : \sum_{j=0}^{n} b_{nj}a_j]$$

de esto se deduce que para todo $[a_0 : \cdots : a_n]\in H_\alpha$ se tiene $P_A[a_0 : \cdots : a_n] = [0 : \sum_{j=0}^{n} b_{ij}a_j : \cdots : \sum_{j=0} b_{nj}aj]$.

Así $P_A(H_\alpha) \subset \mathbb{H}_\infty$, por otro lado para cualquier $[0 : b_1 : \cdots : b_n] \in \mathbb{H}_\infty$ definimos $[a_0 : \cdots : a_n]$ por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que $\alpha_0 a_0 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$, y entonces tenemos que $P_{A^{-1}}(\mathbb{H}_\infty) \subset H_\alpha$, que equivale a decir $\mathbb{H}_\infty \subset P_A(H_\alpha)$, así vemos que cualquier hiperplano puede ser aplicado por una transformación proyectiva a $\mathbb{H}_\infty$. Por tanto todo hiperplano es isomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}$.

Definición 3. Diremos que las aplicaciones holomorfas $f, g : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ son conjugadas si existe una transformación proyectiva h tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Observación 4. Como $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ vemos que la dinámica de ambas es la misma.

1.3 Conjuntos Analíticos y Algebraicos

Definición 4. Un *conjunto analítico* de una variedad holomorfa M de dimensión m es un subconjunto $V \subset M$, con la propiedad de que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad abierta U_p de p en M y un número finito de funciones holomorfas $f_i : U_p \to \mathbb{C}$ $i = 1, \ldots, r$ tal que $V \cap U_p = \{z \in U_p : f_1(z) = \cdots = f_r(z) = 0\}$.

Definición 5. Sean $P_i \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$, $i = 1, \ldots, r$ polinomios homogéneos. El conjunto

$$V = \{z \in \mathbb{P}^n : P_1(z) = \cdots = P_r(z) = 0\}$$

es llamado *variedad algebraica* en el espacio proyectivo.

Observación 5. Para cada abierto afín $U_i = \{[z_0 : \cdots : z_n] : z_i = 1\}$ tenemos

$$V \cap U_i = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in U_i : P_j[z_0 : \cdots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \cdots : z_n] = 0 \ j \in \{1, \ldots r\}\}$$

luego V es un conjunto analítico de $\mathbb{P}^n$.

Teorema 1 (Chow). Todo conjunto analítico de $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica.

Por el Teorema de Chow podemos definir una variedad algebraica como un conjunto analítico de algún espacio proyectivo.
Para la demostración de este Teorema, vea [G] página 150.

Una definición conveniente a tomar en cuenta es la de *cono holomorfo* en $\mathbb{C}^{n+1}$, el cual es un conjunto analítico C con la propiedad de que si $z = (z_0, \ldots, z_n) \in C$ cualquier $tz = (tz_0, \ldots, tz_n) \in C$ para $t \in \mathbb{C}$. Es claro, que cualquier conjunto formado por los ceros de un número finito de polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ es un cono en $\mathbb{C}^{n+1}$, la parte anterior muestra que cualquier cono en $\mathbb{C}^{n+1}$ es el conjunto de ceros de un número finito de polinomios homogéneos, así el Teorema de Chow nos dice que los conjuntos analíticos de $\mathbb{P}^k$ son las proyecciones de los conos holomorfos en $\mathbb{C}^{k+1}$.

Veamos algunos teoremas importantes cuyas demostraciones pueden ser vistas en [S] $(130 - 131)$.

Teorema 2. Un conjunto analítico V en un dominio D con $V \neq D$ es cerrado nunca denso en D y no separable en D.

Definición 6. Sea V un conjunto analítico. Un punto $z_0 \in V$ es llamado *regular* si existe una vecindad U de z_0 y aplicaciones holomorfas f_i, $i = 1 \ldots, k$ en U tal que $V \cap U = \{z \in U : f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}$ y el rango de la matriz $(\frac{\partial f_u(z_0)}{\partial z_v})$ es igual a k. Caso contrario, el punto z_0 es llamado punto *singular* .

Denotaremos con RV al conjunto de los puntos regulares de V.

Teorema 3. Si V es analítico entonces RV es abierto en V y sus componentes conexas son variedades complejas.

Teorema 4. El conjunto V^c de puntos críticos de un conjunto analítico es un conjunto analítico distinto de V.

De estos resultados tenemos que el conjunto de puntos regulares es una variedad compleja. Como cualquier punto crítico es el límite de puntos regulares, es natural definir la dimensión para cualquier punto del conjunto analítico por un proceso de límite.
Sea $z_0 \in RV$ denotaremos por $\dim_{z_0} V$ la dimensión de la componente de RV que contiene a z_0.

Definición 7. Sean V un conjunto analítico, y a un punto de V.
Definimos la dimensión de V en el punto a por $\dim_a V = \limsup_{RV \ni z \to a} \dim_z V$.
La dimensión del conjunto analítico V es dada por:

$$\dim V = \sup\{\dim_a V : a \in V\}.$$

Observación 6. Debido a la densidad de los valores regulares es fácil darse cuenta que si todos los puntos regulares tienen la misma dimensión, digamos m, entonces la dimensión en cada punto del conjunto analítico será m.

Ejemplo 2. Sea $A = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / z_1 z_2 z_3 = 0\}$.
Si $f(z) = z_1 z_2 z_3$ entonces $\nabla f = (z_2 z_3, z_1 z_3, z_1 z_2)$, así tenemos que el conjunto de puntos críticos es dado por los ejes coordenados $(z_1, 0, 0)$, $(0, z_2, 0)$ y $(0, 0, z_3)$, por tanto tenemos de que $\dim_a A = 2$ para todo a valor regular, entonces $\dim A = 2$.

Observación 7. Un conjunto analítico A es dicho de dimensión pura m, si $\dim_a A = m$ para todo $a \in A$. El espacio $\mathbb{P}^k$, y el conjunto A del ejemplo anterior son espacios puros dimensionales.

Un teorema importante en Varias Variables Complejas que será utilizado en los próximos capítulos es el Teorema de Remmert, o también conocido como el Teorema de la Aplicación Propia. Una prueba puede ser encontrada en [G] página 152.

Teorema 5. Si $f : V \to W$ es una aplicación holomorfa propia [1] entre dos variedades holomorfas, entonces la imagen de un conjunto analítico de V por f es un conjunto analítico de W.

Observación 8. Una aplicación importante del Teorema de la Aplicación Propia es que cualquier conjunto analítico compacto A en $\mathbb{C}^n$ es dado por un número finito de puntos. Para el caso de una variable esto es directo, pues debido a la compacidad tenemos que A es cubierto por un número finito de bolas acotadas B_i, $i = 1, \ldots, r$. En cada una de las cuales hay definida una función holomorfa f_i tal que $A \cap B_i = f_i^{-1}(0)$, por el Teorema de la Identidad cada $A \cap B_i$ esta constituido por un número finito de puntos.
Para el caso de mas variables consideramos las proyecciones $\pi_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definidas como $\pi_i(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) = z_i$, y su restricción al conjunto A es una

[1] Una aplicación es propia si la imagen inversa de un conjunto compacto es compacto.

función propia por ser A compacto, luego por el Teorema de la Aplicación Propia los $\pi_i(A)$ son conjuntos analíticos compactos. Por tanto consta de un número finito de puntos, así A es dado por un número finito de puntos. $\square$

Definición 8. Sean V una variedad y U un abierto con $U \subset V$, una correspondencia [2] $f : U \dashrightarrow \mathbb{C}$ es dicha meromorfa si existe un abierto denso $U_f \subset U$ donde f es bien definida; además para todo $a \in U$ existen funciones holomorfas f', f'' definidas en una vecindad $U_a \subset V$ tal que $f(z) = \frac{f'(z)}{f''(z)}$ para todo $z \in U_a \bigcap U$.

Para el caso de aplicaciones definidas entre dos variedades, diremos que una aplicación es meromorfa si la composición con las funciones coordenadas tiene componentes que son meromorfas en el sentido anterior.

Ejemplo 3. Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ polinomios homogéneos de grado d sin factores comunes y $f : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ donde $f(p) = [P(p) : Q(p)]$ en $U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 : x_0 \neq 0\}$ la aplicación f puede ser expresada como $f[1 : x_1] = [1 : \frac{q_{d0}x_1^d + \cdots + q_{od}}{p_{d0}x_1^d + \cdots + p_{od}}]$ donde $P(x_0 : x_1) = \sum_{i+j=d} p_{ij} x_0^i x_1^j$ y $Q(x_0 : x_1) = \sum_{i+j=d} q_{ij} x_0^i x_1^j$, por tanto la aplicación es meromorfa. Veamos ahora que esta aplicación se puede extender a $\mathbb{P}^1$.
Por el Teorema Fundamental del Algebra $p_{do}x_1^d + \cdots + p_{od} = (x_1 - r_1)^{n_1} \ldots (x_1 - r_{k_1})^{n_{k_1}}$ y $q_{do}x_1^d + \cdots + q_{od} = (x_1 - s_1)^{m_1} \ldots (x_1 - s_{k_2})^{m_{k_2}}$ donde $n_1 + \cdots + n_k = m_1 + \cdots + m_k = d$. Luego la aplicación f se puede escribir

$$f[1 : x_1] = [1 : \frac{(x_1 - r_1)^{n_1} \ldots (x_1 - r_{k_1})^{n_{k_1}}}{(x_1 - s_1)^{m_1} \ldots (x_1 - s_{k_2})^{m_{k_2}}}],$$

donde el numerador y el denominador no tienen factores comunes, como la función anterior es la restricción de

$$[(x_1 - x_0 s_1)^{m_1} \ldots (x_1 - x_0 s_{k_2})^{m_{k_2}} : (x_1 - x_0 r_1)^{n_1} \ldots (x_1 - x_0 r_{k_1})^{n_{k_1}}]$$

podemos definir $f[1 : s_i] = [0 : 1]$, además $f[0 : 1]$ está bien definida pues caso contrario implicaría que P y Q tienen a x_0 como un factor común. $\square$

[2]Utilizamos la flecha punteada para indicar una correspondencia, esto es, una función que no esta definida en todo punto.

Ejemplo 4. Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ polinomios homogéneos de grado d y $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ donde $f(p) = [P(p) : Q(p)]$ podemos factorizar los factores comunes de $P(x_0, x_1, x_2)$ y $Q(x_0, x_1, x_2)$, luego podemos suponer que ellos son primos. Sin embargo aún siendo primos por el Teorema de Bezout 8, $A = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : P(x_0, x_1, x_2) = Q(x_0, x_1, x_2) = 0\} \neq \emptyset$. Luego f no es definido en A.
Tomemos un punto $p \in A$ y veamos como podemos expresar f en una vecindad de p en coordenadas locales.
Sean $U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0 \neq 0\}$, $V_0 = \{[y_0 : y_1] \in \mathbb{P}^1 : y_0 \neq 0\}$, $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^2$ y $\varphi_0 : V_0 \to \mathbb{C}$ definidas por $\phi_0^{-1}(s,t) = [1 : s : t]$ y $\varphi_0^{-1}(u) = [1 : u]$, considerando $p \in U_0$, tenemos que f puede ser expresado localmente como

$$\varphi_0 f \phi_0^{-1}(s,t) = \frac{P(1,s,t)}{Q(1,s,t)}$$

luego f es meromorfa.

Lo que sucede en realidad es que no hay función holomorfa de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^1$. En cambio si hay funciones holomorfas de $\mathbb{P}^k$ en $\mathbb{P}^k$, esto será probado en el Capítulo 3, Teorema 32.

1.4 Topología de Zariski

Sea $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio homogéneo, el subconjunto de $\mathbb{P}^n$.

$$V(F) = \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n : F(a_0, \ldots, a_n) = 0\}$$

es llamado *hipersuperficie* de grado m, donde m es el grado del polinomio.

Sean $F_1, \ldots, F_l \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ son polinomios homogéneos. Denotamos por $V(F_1, \ldots, F_l)$ al conjunto compuesto por todos los puntos en $\mathbb{P}^n$, que son ceros de los F_i y serán llamados conjuntos proyectivos.

Ejemplo 5 (Cúbica Torcida). Sea

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^3 \\ & [a_0 : a_1] & \mapsto & [a_0^3 : a_0^2 a_1 : a_0 a_1^2 : a_1^3] \end{array}$$

Los puntos de $\phi(\mathbb{P}^1)$ satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 = x_0 x_3 - x_1 x_2. \\ G(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 = x_1^2 - x_0 x_2. \\ H(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 = x_2^2 - x_1 x_3. \end{array}$$

De donde $\phi(\mathbb{P}^1) \subset V(F,G,H)$, veamos que podemos identificar $V(F,G,H)$ con $\mathbb{P}^1$ por medio de ϕ. Para ello probaremos que:

1. $\phi(\mathbb{P}^1) = V(F,G,H)$.
   En efecto, sea $[b_0 : b_1 : b_2 : b_3] \in V(F,G,H)$.

   (a) Si $b_0 = 0$ entonces $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$ de donde $[b_0 : b_1 : b_2 : b_3] = [0:0:0:1]$, y como $\phi[0:1] = [0:0:0:1]$ se tiene $[0:0:0:1] \in \phi(\mathbb{P}^1)$.

   (b) Si $b_0 \neq 0$ y $b_1 = 0$ resulta que $b_2 = 0$ y $b_3 = 0$ y $\phi[1:0] = [1:0:0:0]$, entonces $[1:0:0:0] \in \phi(\mathbb{P}^1)$.

   (c) Por último si $b_0, b_1 \neq 0$ entonces de la ecuación $G = 0$ tenemos que $b_2 = \frac{b_1^2}{b_0}$, y de las ecuaciones $H = 0$ y $F = 0$ tenemos $b_3 = \frac{b_1^3}{b_0^2}$. Luego $\phi[1 : \frac{b_1}{b_0}] = [b_0 : b_1 : b_2 : b_3]$.

   De todos estos casos $V(F,H,G) = \phi(\mathbb{P}^1)$.

2. Veamos ahora que ϕ es inyectiva, para ello supongamos que $\phi[a_0 : a_1] = \phi[b_0 : b_1]$, tenemos las siguientes posibilidades:

   (a) Si $a_0 = 0$ entonces $b_0 = 0$ y $[a_0 : a_1] = [0:1] = [b_0 : b_1]$.

   (b) Si $a_0 \neq 0$ entonces $b_0 \neq 0$ y $[1 : \frac{a_1}{a_0} : (\frac{a_1}{a_0})^2 : (\frac{a_1}{a_0})^3] = [1 : \frac{b_1}{b_0} : (\frac{b_1}{b_0})^2 : (\frac{b_1}{b_0})^3]$ de donde $\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0}$ con lo cual ϕ resulta inyectiva.

   De esta manera podemos identificar $\mathbb{P}^1$ con la variedad proyectiva $V(F,G,H)$, la cual será llamada *cúbica torcida*.

Definición 9. Un conjunto proyectivo V es dicho *irreducible* si no es unión de subconjuntos proyectivos propios, y es dicho *reducible* en caso contrario. Un conjunto proyectivo irreducible es llamado variedad proyectiva.

Ejemplo 6. Sean F G y H como en el ejemplo anterior 5. Veremos a continuación que $V(H,G)$ es un conjunto proyectivo reducible.
Primero, es fácil verificar que $V(F,G,H) \subset V(G,H)$.
Si $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in V(G,H)$ entonces $c_1^2 - c_0c_2 = 0$ y $c_2^2 - c_1c_3 = 0$ y de estas relaciones $(c_1c_2)^2 - c_0c_1c_2c_3 = 0$, luego tenemos las siguientes posibilidades:

1. Si $c_1c_2 \neq 0$ entonces tenemos que $c_1c_2 - c_0c_3 = 0$, esto es, satisface la ecuación $F = 0$.

2. Si $c_1c_2 = 0$ entonces tenemos que $c_1 = 0$ o bien $c_2 = 0$ y c_0, c_3 son arbitrarios.

De estos casos concluimos $V(G,H) = V(G,H,F) \bigcup L_{0,3}$ donde $L_{0,3} = \{[x_o : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3 : x_0x_2 = 0\}$ que es la unión de dos hiperplanos. Por lo tanto $V(H,G)$ es reducible.

Observación 9. Si consideramos $F_1, \ldots, F_l$ polinomios homogéneos en las variables $x_0, \ldots, x_n$ y luego el polinomio $H = \sum F_iG_i$ donde $G_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ resulta que $V(F_1, \ldots, F_l) = V(F_1, \ldots, F_l, H)$.

Definición 10. Un ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ es dicho un ideal homogéneo si

1. $x, y \in \mathfrak{a} \to x + y, x - y \in \mathfrak{a}$.

2. $xH \in \mathfrak{a}$ para todo $H \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, para todo $x \in \mathfrak{a}$.

3. Si $H \in \mathfrak{a}$ entonces cada componente homogénea $H_j \in \mathfrak{a}$.

Sea $\mathfrak{b}$ un ideal homogéneo de $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ definimos.

$$V(\mathfrak{b}) = \{[a_0, ...a_n] \in \mathbb{P}^n(C) : H(a_0, ..., a_n) = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{b}\}.$$

Dado una familia $\{\mathfrak{a}_j\}_{j\in J}$ de ideales podemos determinar un ideal tomando sumas finitas de elementos de ideales de esta familia.

$$\sum_{j\in J} \mathfrak{a}_j = \{\sum_{i=1}^{k} F_{j_i} : k \in \mathbb{N} \text{ y } F_{i_j} \in \mathfrak{a}_i\}.$$

Proposición 2. Sean $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\{\mathfrak{a}_j\}_{j\in J}$ ideales homogéneos. Entonces

1. $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

2. $V(\sum_{\mathfrak{a}_\lambda} \mathfrak{a}_\lambda) = \cap_{\lambda\in J} V(\mathfrak{a}_\lambda)$.

3. $V(0) = \mathbb{P}^n$.

4. $V(\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]) = \phi$.

Observación 10. La Proposición anterior nos dice que dichos conjuntos determinan una topología, llamada *topología de Zariski.*

El siguiente teorema permite una representación mas simple de está topología.

Teorema 6 (Base de Hilbert). El anillo $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ es noetheriano, esto es, todo ideal de $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ es finitamente generado.

Para una demostración de este Teorema ver [F].

Observación 11.
1.- Todo abierto de Zariski de $\mathbb{P}^n$ es denso en este espacio proyectivo con la topología inducida por su estructura holomorfa.
2.- La topología de Zariski es no Hausdorff.

A todo cerrado de Zariski $V(\mathfrak{a})$ está naturalmente asociado un ideal homogéneo en $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ dado por.

$$I(V(\mathfrak{a})) = \{G: \text{ cada componente homogénea de G se anula en } V(\mathfrak{a})\}.$$

El conjunto:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{G \mid G^k \in a \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$$

es un ideal y es llamado el *radical* de $\mathfrak{a}$.

Teorema 7 (Ceros de Hilbert). Para todo ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ tenemos que $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

Para una demostración de este Teorema, vea [L1] para el caso afín, para el caso proyectivo ver [F].

Observación 12. $V(a) \subset V(b)$ *si* $\sqrt{a} \supset \sqrt{b}$.

1.5 Multiplicidad de Intersección

Denotemos por $\mathcal{F}_p^n$ el conjunto de las funciones analíticas definidas en una vecindad $U_p \subset \mathbb{C}^n$ de p y con valores en $\mathbb{C}$.
En $\mathcal{F}_p$ diremos que $f : U_p \to \mathbb{C}$ y $g : V_p \to \mathbb{C}$ están relacionadas si existe una vecindad $W_p \in U_p \cap V_p$ tal que $f|_{W_p} = g|_{W_p}$, es claro que la relación es de

equivalencia.
Denotemos por $\mathcal{O}_p^n$ el espacio cociente definido por la relación anterior y los elementos de este espacio son llamados gérmenes de una función analítica. En realidad este un formalismo para decir que dada una función definida en una vecindad de p lo único que importa es el punto y no que tan grande o pequeña sea la vecindad.

Sean $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_p^n$, ellos inducen un ideal $(g_1, \ldots, g_n)$ en $\mathcal{O}_p^n$ y

$$\frac{\mathcal{O}_p^n}{(g_1, \ldots, g_n)}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, además es de dimensión finita si el único punto de donde se interceptan las ecuaciones $g_i = 0$ es en el punto p.

Definición 11. Definimos la *multiplicidad de intersección* $I_p(g_1, \ldots, g_n)$ de $g_1, \ldots, g_n$ en p como la dimensión del espacio vectorial

$$I_p(g_1, \ldots, g_n) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p^n}{(g_1, \ldots, g_n)}$$

Observación 13. Una propiedad que debemos destacar es la siguiente:

$$I_p(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

En efecto, tomemos $f \in \mathcal{O}_p^n$, entonces por el desarrollo de Taylor de f tenemos que $f(x_0, \ldots, x_n) = a_{0\ldots 0} + \sum_{i_1+\cdots+i_n \geq 1} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, donde $f(0, \ldots, 0) = a_{0\ldots 0}$. Ahora como $x_i = 0$ en $\frac{\mathcal{O}_p^n}{(x_1,\ldots,x_n)}$ se tiene que $f = a_{0\ldots 0}$ en $\frac{\mathcal{O}_p^n}{(x_1,\ldots,x_n)}$. En conclusión este espacio vectorial es identificado con $\mathbb{C}$.

Definición 12. Sea $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to V$ una función holomorfa definida entre los abiertos $U \subset \mathbb{C}^m$ y $V \subset \mathbb{C}^n$. La *multiplicidad* de una función f en un punto $p \in U$ es

$$\text{mult}_p f = \min\left\{ k \in I\!N : \frac{\partial^k f_j}{\partial x^k}(p) \neq 0 \,\text{para algún} j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Sea $f \in \mathcal{O}_p^n$ con multiplicidad k, entonces por el desarrollo de Taylor podemos escribir f como $f = P_k + P_{k+1} + \cdots$ donde los P_j son polinomios homogéneos de grado j, de la definición de multiplicidad tenemos que $P_k \neq 0$ en este caso $P_k = 0$ es llamado *el cono tangente* de f en p. El nombre de cono tangente es debido a que si $\text{mult}_p f = 1$ entonces $S : f = 0$ define un hipersuperficie regular en p y en este caso $T_pS : P_1 = 0$.

Observación 14. Una fórmula importante que usaremos más adelante es:

$$I_p(f_1, \ldots, f_n) = (\text{mult}_p f_1) \ldots (\text{mult}_p f_n).$$

La fórmula es válida si los conos tangentes de los f_i son diferentes dos a dos.

Esta observación es una generalización de la observación 13.

Una de las razones por la que se trabaja en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es que n hipersuperficies siempre se interceptan.

Teorema 8. Sean $F_1, \ldots, F_n$ polinomios homogéneos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ de grados $d_1, \ldots, d_n$ respectivamente. Supongamos que $F_1, \ldots, F_n$ no tienen componentes comunes entonces el número de puntos de intersección contando multiplicidad es $d_1.d_2 \ldots .d_n$.

Para ver mas detalles de multiplicidad de intersección y la demostración de este Teorema vea [Sh] página 237.

1.6 Normalidad de Funciones

Al hablar de iteraciones de funciones se determina naturalmente una familia $\{f^n\}$ de funciones, para nuestro propósito bastará definir equicontinuidad y normalidad de una familia funciones sobre espacios métricos compactos. El teorema central sobre una familia de funciones es el Teorema de Arzelà Ascoli, que será fundamental en la definición de los conjuntos de Fatou y Julia.

Sean M_1 y M_2 espacios topológicos. Denotamos por $C(M_1, M_2)$ el espacio de las funciones continuas de M_1 en M_2.

Definición 13. Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos.
Una familia de funciones $\mathfrak{F} \in C(M_1, M_2)$ es llamada *equicontinua* en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para todo x con $d_1(x, x_0) < \delta$ y todo $f \in \mathfrak{F}$ se tiene

$$d_2(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

La familia $\mathfrak{F}$ es *equicontinua* sobre M_1 si es equicontinua en cada punto de M_1.

Definición 14. Una familia de funciones $\mathfrak{F}$ entre los espacios métricos M y N, es llamada *normal* si de toda sucesión de elementos de $\mathfrak{F}$ se puede extraer una subsucesión uniformemente convergente en compactos.

Teorema 9 (Arzelà-Ascoli). Sea M_1 espacio métrico separable, localmente compacto y M_2 localmente compacto. La familia $\mathfrak{F} \in C(M_1, M_2)$ es normal si y solo si es equicontinua y para todo $x \in M_1$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathfrak{F}\}$ es relativamente compacto en M_2.

Definición 15. Una *semimétrica* es una función $d : M \times M \to I\!R_0^+$ que cumple todas las propiedades de métrica, excepto que si $d(x, y) = 0$, entonces no necesariamente $x = y$. El par (M, d) es llamado espacio semimétrico.

Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios semimétricos localmente compactos y separables. Denotemos por $D(M_1, M_2) \subset C(M_1, M_2)$ al espacio de las funciones que contraen distancias, esto es si $f \in D(M_1, M_2)$ entonces

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y) \textit{ para todo } x, y \in M_1.$$

De la propiedad de contraer distancias se tiene que $D(M_1, M_2)$ es cerrado en $C(M_1, M_2)$.

Corolario 1. Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios semimétricos como en el Teorema de Arzelà-Ascoli. Entonces $\mathfrak{F} \in D(M_1, M_2)$ es normal si y solo si para todo $x \in M_1$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathfrak{F}\}$ es relativamente compacto en M_2.

Observación 15. Por el teorema de *Arzelà-Ascoli* existe una estrecha conexión entre las familias normales y la equicontinuidad, gracias a que el espacio ambiente en el que nos encontramos es $\mathbb{P}^k$, hablar de normalidad es equivalente que hablar de equicontinuidad.

Un teorema importante en dinámica unidimensional es debido a Montel.

Teorema 10. Si D_1 es un dominio de $\mathbb{P}^1$ y $a, b, c \in \mathbb{P}^1$ distintos entonces cualquier familia de funciones holomorfas de D_1 en $D_2 \subset \mathbb{P}^1 - \{a, b, c\}$ es normal.

Para este resultado ver por ejemplo [N] 169 -170.

Capítulo 2

Dinámica de aplicaciones holomorfas sobre $\mathbb{P}^1$

En este capítulo no haremos un estudio exhaustivo de la dinámica de las aplicaciones racionales en $\mathbb{P}^1$, sólo mencionaremos algunas de sus propiedades, que en los próximos capítulos trataremos de extender a $\mathbb{P}^k$, seguiremos de cerca el tratamiento de Beardon [B], comenzaremos con unos ejemplos acerca del comportamiento de las iteraciones de algunas aplicaciones racionales, luego definiremos la métrica a usar, que será la métrica cordal, para luego pasar a definir formalmente los conjuntos de Fatou y Julia a través de las familias normales de aplicaciones, y a continuación mostraremos algunas de sus propiedades, culminando con un ejemplo en el que el conjunto de Julia es $\mathbb{P}^1$. Cabe mencionar que en este capítulo usaremos frecuentemente la identificación de $\mathbb{P}^1$ con $\mathbb{C}_\infty$.

2.1 Ejemplos

Vamos a dividir $\mathbb{P}^1$ en dos conjuntos a partir de las iteraciones de una aplicación racional R. Por ahora vamos a considerar sólo la idea intuitiva, la definición formal será dada en la sección 3. Vamos a denotar por $\mathcal{F}$ al conjunto de puntos para los cuales los valores $R^n(w)$ y $R^n(z)$ se mantienen cerca si los valores de w están próximos a los de z, y denotaremos por $\mathcal{J}$ al complemento del conjunto $\mathcal{F}$.

Ejemplo 7 (Transformaciones de Möbius). Estudiaremos las aplicaciones de

Möbius mediante sus puntos fijos; como la ecuación $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$ tiene a lo mas dos soluciones, tenemos que f puede tener a lo mas 2 puntos fijos.

1. Supongamos que f tiene exactamente un punto fijo y que dicho punto es ∞, entonces $f(z) = z+b$ con $b \neq 0$ luego $f^n(z) = z+nb$, por lo que $f^n(z) \to \infty$. En general toda aplicación de Möbius con exactamente un punto fijo $b \in \mathbb{P}^1$ puede ser llevado a la misma situación por medio de $g_b(z) = \frac{1}{z-b}$, pues $\tilde{f}(z) = g_b \circ f \circ g_b^{-1}(z)$ tiene a ∞ como único punto fijo. Luego $f^n(z) \to b$ de donde deducimos que el conjunto $\mathcal{J}$ es el vacío.

2. Supongamos ahora que f tenga dos puntos fijos y que ellos sean 0 y ∞, entonces existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = kz$ de donde tenemos de que:
   a.- $f^n(z) \to 0$ si $|k| < 1$, por tanto el conjunto $\mathcal{J}$ es el vacio.
   b.-$f^n(z) \to \infty$ si $|k| > 1$, por tanto el conjunto $\mathcal{J}$ es el vacio.
   c.-$|f^n(z)| = |z|$ si $|k| = 1$. En este último caso tendremos de que :
   Si k raíz enésima de la unidad entonces $f^n = I$.
   Si k no es raíz de la unidad entonces el conjunto $f^n(z)$ será denso en $C_{|z|} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = |z|\}$. En efecto, basta tomar la exponencial con exponente irracional y aplicar f^n, como cerca de un punto periódico podemos escoger uno con exponente irracional deducimos que ninguna vecindad del punto periódico tendrá el mismo comportamiento, y puesto que el conjunto de puntos periódicos es denso en el círculo, tenemos que el conjunto $\mathcal{F}$ es el vacío.

Para el caso que los puntos fijos sean otros $a, b \in \mathbb{P}^1$ mediante una transformación de Möbius llevamos estos puntos a 0 y ∞.

Por lo descrito en este ejemplo en adelante cuando hablemos de aplicaciones racionales estaremos suponiendo que su grado es mayor o igual a dos.

Ejemplo 8 (Transformación Cuadrática). Para la aplicación $f(z) = z^2$ el punto 0 es fijo atractor y 1 es fijo repulsor además:
i) $f^n(z) \to 0$ si $|z| < 1$.
ii) $f^n(z) \to \infty$ si $|z| > 1$.
Resta analizar la dinámica de f en el círculo unitario $C = \{z, |z| = 1\}$. Si $z \in C$ tendremos que su órbita permanece en C.

Para puntos de la forma $z = \exp(2\pi i r/2^m)$, con $r, m \in \mathbb{Z}$ se tiene que $f^n(z) = 1$ para todo $n \geq m$, es claro que estos puntos son densos en C y siempre convergen a 1.
Por el contrario si z no es de esta forma también es denso en C, y la sucesión generada por este punto no converge, de donde tenemos que el conjunto $\mathcal{J}$ es C. Obsérvese que para cualquier arco $I \subset C$ de longitud positiva las iteraciones duplican el ángulo central, así para algún n tendremos que $f^n(I) = C$. Esto es un resultado general que sucede para los conjuntos $\mathcal{J}$. Otro modo de ver como actúa z^2 en el círculo, es a través del sistema binario, para esto consideremos $z \in C$ de la forma $z = \exp(2\pi i\theta)$, donde $\theta \in [0, 1[$ luego $f(z) = \exp(2\pi i 2\theta)$, por tanto podemos ignorar la parte entera de 2θ dado que el periodo de la exponencial es $2\pi i$, así nosotros podemos analizar la acción de f en C analizando la acción de $\theta \to 2\theta$ módulo 1. En el intervalo $[0, 1[$ cualquier θ se puede escribir en representación binaria como $\theta = 0.a_1a_2a_3...$; entonces es claro que $2\theta = 0.a_2a_3...$ y también que se puede construir un $z_0 \in C$ con la propiedad que $f^n(z_0)$ sea denso en el círculo. Basta por ejemplo considerar $z_0 = 0.0100011011000001010011100101110111....$, de la observación anterior es fácil ver que evaluar es correr a la derecha el punto decimal, luego podemos aproximar z_0 a cualquier cantidad tomando n suficientemente grande, luego a partir de la continuidad de la aplicación exponencial se concluye.

Ejemplo 9 (Polinomios de Tchebychev). El valor $\cos kz$ puede ser expresado por un polinomio T_k en $\cos z$, por ejemplo si $T_2(z) = 2z^2 - 1$, se cumple que $T_2(cosz) = cos(2z)$.

Un polinomio T_k de grado al menos 2, es llamado polinomio de Tchebychev si $T_k(cosz) = cos(kz)$.
En el caso anterior tendremos que $T_k^n(cosz) = cos(k^n z)$, por tanto nosotros podemos estudiar las iteraciones de T_k estudiando simplemente las iteraciones de $z \to zk$.
Sea $T_k = T$, examinaremos las iteraciones de T sobre el intervalo $[-1, 1] = I$, para ello tomemos $z \in I$ el cual puede ser expresado como $z = cosx$ para algún $x \in I\!R$ entonces $T(cosx) = coskx$, esto es I es invariante hacia adelante por T. Sea ahora J cualquier subintervalo de I es claro que existe n tal que $T^n(J) = I$, por tanto I es candidato a ser el conjunto $\mathcal{J}$ de T. Sean $A = \{\frac{2\pi m}{k^r} : m, r \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{\frac{m}{k^r} : m, r \in \mathbb{Z}\}$, es claro que A y B son densos en $I\!R$. Luego $\cos(A)$ $\cos(B)$ serán densos en I, para los puntos de A las iteraciones se hacen constantes, y para los puntos de B no, luego el conjunto $\mathcal{J}$ contiene a I.

Sea Ω el complemento del segmento $[-1,1]$, veremos que $T^n(z) \to \infty$ en Ω. Para esto consideremos $w \in \Omega$ por la sobreyectividad de la función $cosz$ tenemos que $w = cosz$, siendo $z = x + iy$, como $w \in \Omega$ resulta de que $y \neq 0$, por otro lado $|cos(x+iy)|^2 = \cos^2(x) + senh^2(y) \geq senh^2(y)$; por tanto tendremos que $|T^n(w)| = |\cos(k^n z)| \geq |senh(k^n y)|$, de donde $\mathcal{F} = \Omega$ y $\mathcal{J} = [-1,1]$.

Ejemplo 10 ($P(z) = z^2 - 1$)**.** Este es un ejemplo típico donde el conjunto $\mathcal{J}$ no es una curva simple o un segmento como vimos en los ejemplos anteriores. En este caso el conjunto $\mathcal{F}$ tiene infinitas componentes; nosotros sólo mencionaremos algunas de las propiedades de $\mathcal{F}$.
Denotemos por $\mathcal{F}_\infty$ la componente no acotada y tomemos $z \in \mathcal{F}_\infty$, en este caso $P^n(z) \to \infty$, esto podemos comprobarlo facilmente cuando $|z|$ es suficientemente grande.
En efecto los puntos fijos de P son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, considerando $x \in I\!R$ y $h(x) = x^2 - 1 - x$ tenemos $h'(x) = 2x - 1$ de donde $h'(x) > 0$ si $x > \frac{1}{2}$, así tenemos que $P(x) > x$ si $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entonces $h(p(x)) > p(x)$, continuando este proceso tenemos que $P^n(x) \to \infty$ si $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en particular si $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ tendremos de que $P^n(|z|) \to \infty$, además $|P(z)| > P(|z|) > |z|$ para $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, por tanto $|P^n(z)| > P^n(|z|)$; de lo anterior resulta que si $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entonces $z \in \mathcal{F}_\infty$.

Otras de las particularidades de este conjunto es que hay dos componentes de $\mathcal{F}$ que en cierta forma representan a todas las componentes.
La que tiene a -1 designada por $\mathcal{F}_{-1}$, y la que tiene a 0 designada por $\mathcal{F}_0$; si C es cualquier otra componente resulta que la sucesión $P^n(C)$ a partir de cierto n será reiterativa, esto es : $C, \cdots, P^i(C), \cdots, \mathcal{F}_{-1}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{-1}\ \mathcal{F}_0, \cdots$

Definición 16. En el caso de los polinomios $P_c(z) = z^2 + c$ definimos el siguiente conjunto: $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} | P_c^n(0),$ es acotado $\}$, el cual es llamado el conjunto de *Mandelbrot*.

Teorema 11. El conjunto de *Mandelbrot* es un conjunto compacto contenido en el disco cerrado de radio 2, y su intersección con el eje real es $[-2, \frac{1}{4}]$.

Prueba. Sea $c_n = P_c^n(0)$, un cálculo nos muestra que $c_n \to \infty$ cuando el módulo de c es mayor a 2.
En efecto, sabemos que $|P_c^n(z)| \to \infty$ cuando $|z| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$, por tanto si $|c| > 2$ tenemos que $\frac{3}{4}|c| > \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$, lo cual es cierto pues $9|c|^2 > 4 + 16|c|$,

por tanto $|P^n(0)| \to \infty$, además si $c > \frac{1}{4}$ entonces $c_n \geq n(c - \frac{1}{4})$ por tanto $c_n^2 + c \geq n^2(c - \frac{1}{4})^2 + c \geq (n+1)(c-4)$ si y sólo si $n^2(c - \frac{1}{4})^2 \geq n(c - \frac{1}{4})$ y es claro que existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces tendremos que $n(c - \frac{1}{4}) \geq 1$, por tanto $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} \subset [-2, 1/4]$.

Si $0 \leq c \leq 1/4$ tenemos que P_c lleva $[0, \alpha]$ en si mismo, en efecto $0 \leq z \leq \alpha$ equivale a que $0 \leq z^2 + c \leq \alpha^2 + c = \alpha$, esto es $0 \leq P_c(z) \leq \alpha$, así $[0, 1/4] \subset \mathcal{M}$ del mismo modo se ve que si $-2 \leq c < 0$ entonces P_c lleva $[-\beta, \beta]$ en si mismo por lo cual tenemos que las iteraciones de estos intervalos son acotadas teniendo así el resultado.

2.2 Aplicaciones Racionales

Sea ∞ un punto cualquiera que no esta en $\mathbb{C}$ denotaremos por $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$. Una idea geométrica de $\mathbb{C}_\infty$ se obtiene por la conocida proyección estereográfica π la cual nos permite definir la métrica cordal σ en $\mathbb{C}_\infty$.

Definición 17. La métrica *cordal* σ es dada por:

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z - w|}{[(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad ; z, w \in \mathbb{C}$$

$$\sigma(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad z \in \mathbb{C}$$

Definición 18. Una métrica alternativa es la *métrica esférica* $\sigma_0(z, w)$ definida como la distancia mas corta en la esfera unitaria $\mathbb{C}_\infty$ entre los puntos $\pi(z)$ y $\pi(w)$, la cual se puede obtener como la menor longitud de arco del círculo máximo pasando por dichos puntos.
Si θ es el ángulo central del segmento mas corto entre dichos puntos, entonces tendremos $\sigma_0(z, w) = \theta$.

Observación 16. Las métricas σ y σ_0 son equivalentes. En efecto por trigonometría elemental tenemos de que: $\sigma(z, w) = 2\text{sen}\frac{\theta}{2}$, resultando así que: $\sigma(z, w) = 2\text{sen}\frac{\sigma_0(z,w)}{2}$.
Ahora a partir de la relación conocida: $2\frac{\theta}{\pi} \leq \text{sen}\theta \leq \theta$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, tendremos que :

$$\frac{2}{\pi}\sigma_0(z, w) \leq \sigma(z, w) \leq \sigma_0(z, w).$$

Definición 19. Una función racional es una aplicación de la forma $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ donde P y Q son polinomios sin ceros comunes. El máximo de los grados de P y Q será por definición el grado de f.

Debido a que sólo con dos cartas podemos parametrizar $\mathbb{C}_\infty$ tenemos la siguiente forma particular de definir una aplicación holomorfa de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$.

Definición 20. Diremos que $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es holomorfa en p si sucede cualquiera de las afirmaciones siguientes:

1. Si $p \neq \infty$, $f(p) \neq \infty$, $p \in U \subset \mathbb{C}$. Entonces $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en p.
2. Si $p \neq \infty$, $f(p) = \infty$, $p \in U \subset \mathbb{C}$ y considerando $g = \frac{1}{z}$. La aplicación $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa p.
3. Si $p = \infty$, $f(p) \neq \infty$, $0 \in U \subset \mathbb{C}$. Entonces $f \circ g : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en 0.
4. Si $p = \infty$, $f(p) = \infty$. Entonces la aplicación $g \circ f \circ g$ es holomorfa en 0.

Observación 17. Los polos de f son los puntos w tal que $f(w) = \infty$, en una vecindad de tales puntos la función $\dfrac{1}{f(z)}$ es holomorfa con valor cero en dichos puntos. La función f es continua según σ en los polos, en efecto $\dfrac{1}{f(z)}$ continua en w en la métrica euclidiana por tanto lo será en la cordal σ y como

$$\sigma(f(z), f(w)) = \sigma(\frac{1}{f(z)}, \frac{1}{f(w)}) = \sigma(\frac{1}{f(z)}, 0)$$

resulta de que $\lim_{z \to w} \sigma(f(z), f(w)) = 0$.

Ejemplo 11. Sea $p(z) = a_o + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, con $a_n \neq 0$.

Como $p(\infty) = \infty$, entonces estamos en el caso 4 de la definición. La aplicación $\dfrac{1}{p(\frac{1}{z})} = \dfrac{z^n}{a_n + \cdots + a_o z^n}$ es holomorfa en una vecindad del cero, entonces las aplicaciones polinomiales son holomorfas en ∞.

Teorema 12. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ analítica no constante si $f^{-1}(\infty) = \infty$ entonces f resulta un polinomio.

Prueba. Del Teorema de la Identidad $f^{-1}(0)$ es un conjunto discreto dado que no es la función constante. Como $\mathbb{C}_\infty$ es compacto resulta que dichos puntos son finitos digamos $z_1, \ldots, z_k$ los cuales han de estar en $\mathbb{C}$ por hipótesis; así tenemos de que $f(z) = (z - z_i)^{n_i} h_i(z)$ con $h_i(z) \neq 0$, por tanto

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}}$$

resulta analítica y como $g(z_i) \neq 0$ tenemos que g no es sobreyectiva, de donde resulta constante por ser $\mathbb{C}_\infty$ compacto, así $g(z) = \lambda \neq 0$ por tanto f resulta un polinomio.

Un hecho importante de las aplicaciones racionales es que caracterizan las aplicaciones analíticas en $\mathbb{C}_\infty$. Veremos esto desde la perspectiva de variedad es decir utilizando cartas.

Teorema 13. Si $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ es una función analítica entonces existen polinomios $P, Q \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogéneos del mismo grado y sin factores comunes tal que:

$$f[x_0 : x_1] = [P(x_0, x_1) : Q(x_0, x_1)].$$

Prueba. Sea $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ una aplicación holomorfa. Consideremos la parametrización $\phi_0^{-1} : \mathbb{C} \to U_0 = \{[x_0 : x_1] : x_0 \neq 0\}$ definida por $\phi_0^{-1}(x_1) = [1 : x_1]$, y fijemos el punto $\infty = [0 : 1]$, es claro que $\mathbb{P}^1 - \{\infty\} = U_0$, debido a la compacidad de $\mathbb{P}^1$ tenemos que $f^{-1}(\infty) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, así $f_0 = \phi_0 \circ f : \mathbb{P}^1 - \{p_1, \ldots, p_n\} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 - \{\infty\} \xrightarrow{\phi_0} \mathbb{C}$. Luego los puntos p_i son puntos singulares de f_0 que gracias a la compacidad de $\mathbb{P}^1$ no son singularidades esenciales. Luego f_0 es una aplicación meromorfa con polos en los puntos p_i. Sean ϕ_j donde $j = 0, 1$ las parametrizaciones de $\mathbb{P}^1$ y $\phi_j(p_i) = z_i$, consideremos además

$$g_i(z) = \frac{a_{i,m_i}}{(z - z_i)^{r_i}} + \cdots + \frac{a_{i1}}{(z - z_i)}$$

las partes principales de $f_0 \circ \phi_j^{-1}$. Ordenando podemos suponer los $z_1, \ldots, z_{n_0}$ y $z_{n_0+1}, \ldots, z_n$ preimágenes de p_i por medio de ϕ_0 y ϕ_1 respectivamente. Luego la aplicación $f_0 - g_1 \circ \phi_0 - \cdots - g_{n_0} \circ \phi_0 - g_{n_0+1} \circ \phi_1 - \cdots - g_n \circ \phi_1 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ es holomorfa. Entonces por el Principio del Máximo esta aplicación es constante. Por lo tanto f_0 es una aplicación racional, esto es existen dos polinomios $P, Q \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ tal que $f_0[x_0 : x_1] = \frac{P[x_0;x_1]}{Q[x_0;x_1]}$. Para que f_0 sea bien definido es necesario que ambos polinomios P y Q sean homogéneos, del mismo grado y sin factores comunes. Ahora utilizando la definición de ϕ_0 llegamos a que

$$f[x_0 : x_1] = [P(x_0, x_1) : Q(x_0, x_1)].$$

□

Observación 18. De la prueba del Teorema 13 tenemos que en las coordenadas U_0.

$$\phi_0 f \phi_0^{-1}(z) = \frac{P(1,z)}{Q(1,z)}$$

y es por eso que las aplicaciones holomorfas en $\mathbb{P}^1$ son llamadas aplicaciones racionales.

Debemos recalcar que las aplicaciones holomorfas $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ se pueden aún escribir de esta manera aunque los argumentos empleados aquí para conseguir este resultado ya no funcionan, pues los polos no son necesariamente un número finito de puntos.

Corolario 2. Los automorfismos de $\mathbb{P}^1$ en algún sistema coordenado son las transformaciones de Möbius.

Prueba. Por el Teorema 13 todo automorfismo f se debe escribir como.

$$f[x_0, x_1] = [a_{11}x_0 + a_{12}x_1 : a_{21}x_0 + a_{22}x_1]$$

donde la matriz (a_{ij}) es una matriz inversible. Luego tenemos

$$\phi_0 \circ f \phi_0^{-1}(z) = \frac{a_{22}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{11}}$$

que es una transformación de Möbius.

Observación 19. Una ecuación racional $R(z) = w$ de grado $d > 0$ tiene d soluciones en $\mathbb{C}_\infty$ contando multiplicidad.
En efecto, sea $R = \dfrac{P}{Q}$, donde el grado de P es n y el de Q es m.
• Si $m = n$, todos los ceros y polos estarán en $\mathbb{C}$, por tanto esto se odtiene del Teorema Fundamental del Algebra.

- Si $n > m$, la aplicación racional R tiene n ceros y m polos en $\mathbb{C}$ y $R(\infty) = \infty$ el número de polos en ∞ es el número de ceros de $\dfrac{1}{R(\frac{1}{z})}$ en 0, considerando $P = a_o + \cdots + a_n z^n$ y $Q = b_o + \cdots + b_m z^m$ notamos que $\dfrac{1}{R(\frac{1}{z})} = z^{n-m}\dfrac{b_o z^m + \cdots + b_m}{a_o z^n + \cdots + a_n}$ por tanto tiene $n-m$ ceros en 0.

Análogamente si $n < m$. Entonces R tiene d ceros y d polos en $\mathbb{C}_\infty$, ahora si $w \in \mathbb{P}^1 - \{\infty, 0\}$ tenemos de que el número de soluciones de $R(z) = w$ es el número de ceros de $P - Q(z)w = 0$ los cuales no suceden en los ceros y polos de R, luego por el caso anterior se concluye.

Definición 21. Sean f y h aplicaciones racionales, diremos que son *conjugadas* si existe g de *Möbius* tal que $f = g \circ h \circ g^{-1}$.

Si f y h son aplicaciones racionales conjugadas, entonces $f^n = g \circ h^n \circ g^{-1}$, así tenemos que la dinámica es preservada, en particular se preservan los puntos fijos.
Como una aplicación simple podemos hacer uso de la conjugación para caracterizar los polinomios.

En efecto, sabemos que una aplicación racional no constante es un polinomio si su único polo es el ∞, mas generalmente tenemos el teorema.

Teorema 14. Una aplicación racional no constante f es conjugada a un polinomio si y solo si existe algún w en $\mathbb{P}^1$ con $f^{-1}(w) = w$.

Prueba. Si f es conjugada a un polinomio P por una aplicación de Möbius g, tenemos que $P = g^{-1} \circ f \circ g$, puesto que el único polo de P es ∞ se tiene que $P(\infty) = \infty$ luego $f(g(\infty)) = g(\infty)$. Para el recíproco sea $g(z) = \frac{wz-1}{z-w}$, esta aplicación de Möbius tiene la propiedad de que $g(\infty) = w$. Luego $g^{-1} \circ f \circ g(\infty) = \infty$, entonces $g \circ f \circ g^{-1}$ es un polinomio.

2.2.1 Condición de Lipschitz

Veremos ahora que las aplicaciones racionales cumplen la condición de Lipschitz con la métrica esférica.

Teorema 15. Una aplicación racional R satisface

$$\sigma_o(R(z), R(w)) \leq M\sigma_o(z, w).$$

Prueba. Como

$$\int_{R(z)}^{R(w)} \frac{2|ds|}{1+|s|^2} = \int_z^w \frac{2|R'(s)|(1+|s|^2)|ds|}{(1+|R(s)|^2)(1+|s|^2)}.$$

Bastará ver que $\dfrac{|R'(z)|(1+|z|^2)}{1+|R(z)|^2}$ es acotado en la esfera, para lo cual basta ver el valor de esta función cerca de los polos de R y de ∞.
Para los polos, si $z_i \in \mathbb{C}$ es un polo de orden k resulta

$$R(z) = \frac{h(z)}{(z-z_i)^k}$$

donde $h(z_i) \neq 0$ por tanto tenemos

$$R'(z) = \frac{h'(z)(z-z_i)^k - k(z-z_i)^{k-1}h(z)}{(z-z_i)^{2k}}$$

reemplazando esta expresión en

$$\frac{|R'(z)|(1+|z|^2)}{1+|R(z)|^2}$$

resulta

$$\lim_{z \to z_i} \frac{|R'(z)|(1+|z|^2)}{1+|R(z)|^2} = 0.$$

Para $z = \infty$, tendremos que

$$\lim_{z \to \infty} \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} \frac{1+|z|^2}{\frac{|P|^2+|Q|^2}{Q^2}} \in \mathbb{C}$$

pues el grado del denominador siempre es mayor o igual al del numerador.
Resultando así que la expresión $\dfrac{|R'(z)|(1+|z|^2)}{1+|R(z)|^2}$ es acotada en $\mathbb{C}_\infty$. □

2.2.2 Topología de Aplicaciones Racionales

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$C = \{f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty \text{ tal que f es continua}\}.$$

$$R = \{f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty \text{ tal que } f \text{ es racional}\}.$$

$$R_n = \{f \in R \text{ tal que } f \text{ es de grado n }\}.$$

En C definimos:

$$\rho(f,g) = \sup\ \sigma_0(f(z), g(z)).$$

Esta métrica ρ es la métrica de convergencia uniforme en $\mathbb{C}_\infty$, algunos resultados importantes con respecto a ρ que sólo mencionaremos son:

1. Si la sucesión (f_n) es analítica en D y (f_n) converge uniformemente a f en D entonces f analítica en D.

2. La aplicación grado definida en R es continua.

3. Las componentes conexas de R son R_n con $n \in \mathbb{N}$.

Ver [B] páginas 46,47.

Definición 22. Sea γ una curva cerrada en la esfera, su complemento es la unión de dominios mutuamente disjuntos llamados componentes, suponiendo que γ esta en alguno de los hemisferios entonces una de las componentes contiene un hemisferio, llamaremos a esta la componente exterior de γ y será denotada por $E(\gamma)$.

Observación 20. Si R es una aplicación racional y W un dominio entonces $\partial R(W) \subset R(\partial W)$. En efecto sea $z_0 \in \partial R(W)$ entonces existe una suceción $R(z_n)$, con $R(z_n) \to z_0$ donde $z_n \in W \subset \mathbb{C}_\infty$ considerando una subsucesión si es necesario podemos suponer $z_n \to z' \in W \cup \partial W$. Si $z' \in W$ entonces $z_0 \in R(W)$, el cual como es abierto implicaría que z_0 no está en $\partial R(W)$, así tenemos de que $z' \in \partial W$ por tanto $z_0 \in R(\partial(W))$.

Teorema 16. Sea R una aplicación racional, existe $\delta > 0$ tal que si γ es una curva cerrada con σ_0 diámetro menor a δ, entonces las curvas γ y $R\gamma$ estarán contenidas en algún hemisferio y la imagen $R(\Omega)$ de una componente interior Ω de la curva γ no intersecta a la componente exterior $E(R(\gamma))$.

Prueba. En principio tomando δ suficientemente pequeño la curva γ estará en algún hemisferio, y además por la condición de Lipschitz para R podemos garantizar que la curva $R\gamma$ también ha de encontrarse en un hemisferio; así tendrá sentido de hablar de sus componentes interiores y exteriores de ambas curvas. Sea M la constante de Lipschitz de R y Ω una componente interior de γ entonces.

$$\operatorname{diam}(R(\Omega)) \leq M\operatorname{diam}(\Omega) \leq M\operatorname{diam}\gamma.$$

Agregemos ahora a las condiciones de δ la propiedad de que $M\delta < \pi$; entonces $R(\Omega)$ no contiene a $E(R(\gamma)) \cdots *$.
Por otro lado aplicando la observación anterior a Ω tendremos que $\partial(R(\Omega)) \subset R(\partial\Omega) \subset R\gamma$. De esto concluimos de que $E(R\gamma)$ es disjunto de $\partial(R(\Omega))$ por lo tanto $E(R\gamma) \cap R(\Omega) = \varnothing$ o bien $E(R\gamma) \subset R(\Omega)$, finalmente de $*$ tendremos de que $E(R\gamma) \cap R(\Omega) = \varnothing$.

2.2.3 Valencia y Puntos Fijos

Sea f no constante y holomorfa en $z_o \in \mathbb{C}_\infty$.
Entonces admite desarrollo de Taylor $f(z) = a_o + a_k(z-z_o)^k + \cdots$, de donde tenemos de que:

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{(z - z_o)^k} = a_k \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

El entero k es llamado la *valencia* o el *orden* de f en z_o denotado por $v_f(z_o)$.
Otro modo de definir la valencia es como la multiplicidad de z_0 como solución de la ecuación $f - f(z_0) = 0$.

Observación 21. La valencia verifica la regla de la cadena es decir

$$v_{fg}(z_o) = v_f(g(z_o))v_g(z_o)$$

donde $z_o, g(z_o), fg(z_o) \in \mathbb{C}$.
En efecto basta notar de que

$$\frac{fg(z) - fg(z_o)}{(z - z_o)^{kq}} = \frac{fg(z) - fg(z_o)}{(g(z) - g(z_o))^q} \left(\frac{g(z) - g(z_o)}{(z - z_o)^k} \right)^q$$

donde $q = v_{fg}(z_o)$ y $k = v_g(z_o)$. □

Del Teorema de la Función Inversa tenemos de que f inyectiva en alguna vecindad de z_o si $v_f(z_o) = 1$, de esto y la observación anterior tenemos que la valencia se preserva bajo una pre y post aplicación inyectiva lo que nos permite extender la definición para el caso $z_o = \infty$ o $f(z_o) = \infty$ para esto escogemos transformaciones de Möbius g, h las cuales lleven z_o y $f(z_o)$ en $\mathbb{C}$ en estas condiciones definimos:

$$v_f(z_0) = v_{hfg^{-1}}(g(z_o)).$$

Observación 22. De la definición tenemos que en los puntos singulares la valencia a de ser mayor que uno y por la compacidad de $\mathbb{P}^1$ tenemos que el número de puntos singulares a de ser finito, por tanto la suma $\sum[v_f(z) - 1]$ es finita.

Teorema 17 (Riemann Hurwitz). Para cualquier aplicación holomorfa f de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^1$ de grado d tenemos :

$$\sum[v_f(z) - 1] = 2d - 2.$$

Para una demostración de este Teorema vea [B] página 43.

Definición 23. Un punto $w \in \mathbb{P}^1$ es llamado *punto fijo* de f si $f(w) = w$.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f^n(z_0) = z_n \in \mathbb{C}$ supongamos que $z_n \to w$, entonces w es un punto fijo pues $\lim f^{n+1}(z_0) = \lim f^n(z_0)$.
Sea $w \in \mathbb{C}$ un punto fijo de f, diremos que w es:

1. Es punto fijo atractor si $|f'(w)| < 1$.

2. Es punto fijo repulsor si $|f'(w)| > 1$.

3. Es punto fijo indiferente si $|f'(w)| = 1$.

Ahora veamos los puntos fijos de una función racional $f = \frac{P}{Q}$ donde P es un polinomio de grado m y Q de grado n.
Si $m > n$ entonces la aplicaciíon f fija ∞.
Si $p \in \mathbb{C}$ es un punto fijo entonces $Q(p) \neq 0$, por tanto los puntos fijos son soluciones de

$$zQ(z) - P(z) = 0.$$

Es decir los puntos fijos en $\mathbb{C}$ son las soluciones de la ecuación anterior.

Lema 1. Si $x \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de f y ψ cualquier función inyectiva entonces $\psi o f o \psi^{-1}$ tiene en $\psi(x)$ el mismo número de puntos fijos que f en x.

En particular si p es un punto fijo de una aplicación racional f y g una transformación de *Möbius* entonces $g \circ f \circ g^{-1}$ tiene en $g(p)$ el mismo número de puntos fijos que f en p.

Teorema 18. Sea f una aplicación racional de grado d, entonces f tiene a lo mas $d+1$ puntos fijos en $\mathbb{P}^1$.

Prueba. Por el Lema 1 podemos suponer que los puntos fijos de f están en $\mathbb{C}$. Supongamos $f = \frac{P}{Q}$ y sea p es un punto fijo de f, por la forma de f tenemos que el número de ceros de $f(z) - z$ en p es el mismo que de $P(z) - zQ(z)$ en p, ahora como f no fija ∞ tenemos grado$(P) \leq$ grado(Q), así el grado de $P(z) - zQ(z)$ es $d+1$. □

2.3 Conjuntos de Fatou y Julia

Definición 24. Sea R una aplicación racional el *conjunto de Fatou* de R es el abierto máximo donde la familia $\{R^n\}$ es normal y será denotado por $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R)$, el complemento de este conjunto será llamado el *conjunto de Julia* de R y es denotado por $\mathcal{J} = \mathcal{J}(R)$.

Observación 23. De la definión $\mathcal{J}$ es un conjunto compacto, además como $\mathbb{C}_\infty$ es un conjunto compacto resultará indistinto hablar de normalidad y equicontinuidad.

Proposición 3. Sean g una transformación de *Möbius*, f una función racional y $h = g \circ f \circ g^{-1}$. Entonces $\mathcal{F}(h) = g(\mathcal{F}(f))$ del mismo modo $\mathcal{J}(h) = g(\mathcal{J}(f))$.

Prueba. El resultado es consecuencia de las definiciones de los conjuntos de Fatou y Julia.

Proposición 4. Para cualquier aplicación racional no constante f y $n \in I\!N$ se cumple que $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$.

Prueba. Sea $g = f^p$ como g^n es una subfamilia de f^n entonces $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(g)$, como cada f^k satisface la condición de *Lipchitz* la familia $\mathfrak{F}_k = \{f^k g^n : n \geqslant 0\}$ es equicontinua, donde $\{g^n : n \geqslant 1\}$ es equicontinua, entonces $\mathfrak{F}_k$ es equicontinua en $\mathcal{F}(g)$ por tanto lo es la unión finita $\cup_{k=1}^{p-1}\mathfrak{F}_k$. Como esta unión es $\{f^n : n \geq 0\}$ entonces la familia $\{f^n : n \geq 1\}$ es equicontinua en $\mathcal{F}(g)$, de donde $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f)$, la otra afirmación es análoga.

2.3.1 Conjuntos Completamente Invariantes

Sea $g : M \to M$ una aplicación y $E \subset M$.
Diremos que E es invariante hacia atrás si $g^{-1}(E) = E$ y invariante hacia adelante si $g(E) = E$.
Diremos que es *completamente invariante* si lo es hacia adelante y atrás.

Observación 24. Si g es sobreyectiva, la definición de completamente invariante coincide con la de invariante hacia atrás.

Teorema 19. Si f es un aplicación racional de grado al menos 2 y E es un conjunto finito completamente invariante entonces E tiene a lo mas dos elementos.

Prueba. Supongamos que E tiene k elementos, entonces f actúa como una permutación de E en E, luego existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $f^q|_E = I|_E$. Si el grado de f^q es d para todo $w \in E$ la ecuación $f^q(z) = w$ tiene d soluciones las cuales todas están en E, del Teorema de Riemann-Hurwitz aplicado a f^q tenemos $k(d-1) \leq 2d-2$, de esto y del hecho que $d \geq 2$ concluimos de que $k \leq 2$.

En lo que resta de este capítulo asumiremos que $g : X \to X$ es sobreyectiva, así completamente invariante e invariante hacia atrás será lo mismo.
Si E es completamente invariante bajo g, y h una biyección de X en X entonces $h(E)$ es completamente invariante bajo $h \circ g \circ h^{-1}$. Como g^{-1} conmuta con $\cap$ es fácil ver que la intersección de conjuntos completamente invariantes es completamente invariante; así dado un conjunto E_0 nosotros podremos hablar del menor conjunto completamente invariante que contiene a E_0, definiendolo como la intersección de los conjuntos completamente invariantes que contienen a E_0, si ese conjunto es E nosotros decimos que E_0 *genera* E.
Ahora introduciremos una relación de equivalencia, la cual facilitará el estudio de los conjuntos completamente invariantes.

Definición 25. Diremos que $x \sim y$ si existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(x) = g^m(y)$. La clase de equivalencia que contiene a x la denotaremos por $[x]$ y la llamaremos la órbita de x.

Teorema 20. Si $g : X \to X$ entonces $[x]$ es completamente invariante.

Prueba. Si $<x>$ denota el conjunto invariante *generado* por x, no es difícil observar que $[x] \subset <x>$. Por la minimalidad de $<x>$, sólo resta probar que

$[x]$ es invariante. Como $y \sim g(y)$ tenemos que $y \in [x]$ si y solo si $g(y) \in [x]$ por tanto $[x]$ es completamente invariante. $\square$

Teorema 21. Los conjuntos de Julia $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$ y Fatou $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f)$ son completamente invariantes por f.

Prueba. Es suficientemente probar que $\mathcal{F}$ es completamente invariante. Sea $z_0 \in f^{-1}(\mathcal{F})$, y $w_0 = f(z_0) \in \mathcal{F}$, de la definición de $\mathcal{F}$ tendremos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\sigma(z, z_0) < \delta \text{ entonces } \sigma(f^n(z), f^n(z_0)) < \epsilon \text{ para todo n.}$$

Por la continuidad tenemos que para $\delta > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si

$$\sigma(z, z_0) < \delta' \text{ entonces } \sigma(f(z), w_0) < \delta$$

por tanto $\sigma(f^{n+1}(z), f^{n+1}(z_0)) < \epsilon$, esto muestra que $\{f^{n+1} : n \geq 1\}$ es equicontinua en z_0, así $\{f^n : n \geq 1\}$ es equicontinua en z_0. Por tanto esta familia será equicontinua en $f^{-1}(\mathcal{F})$ y como $f^{-1}(\mathcal{F})$ es abierto deducimos que $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.
Recíprocamente, si $z_0 \in \mathcal{F}$ como $\{f^{n+1} : n \geq 1\}$ es equicontinua en z_0 entonces $\{f^n : n \geq 1\}$ resulta equicontinua en $f(z_0) = w_0$, de donde $z_0 \in f^{-1}(\mathcal{F})$, concluimos así que $\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{F})$.

Proposición 5. Si f es un polinomio de grado al menos 2 entonces $\infty \in \mathcal{F}(f)$ y la componente conexa $\mathcal{F}_\infty$ de $\mathcal{F}(f)$ que contiene a ∞ es completamente invariante bajo f.

Prueba. Por ser f un polinomio, existe una vecindad W de ∞ sobre la cual $\{f^n : n \geq 1\}$ converge uniformemente a ∞, de donde tenemos que $\infty \in \mathcal{F}$. Veamos ahora que $\mathcal{F}_\infty$ es completamente invariante.
Como $\infty \in f(\mathcal{F}_\infty)$ y es conexo tenemos $f(\mathcal{F}_\infty) \subset \mathcal{F}_\infty$. Recíprocamente si $z \in f^{-1}(\mathcal{F}_\infty)$ entonces por el Teorema 21 z estará en alguna componente de $\mathcal{F}$, sea $\mathcal{F}_1$ esta componente conexa entonces por minimalidad $\mathcal{F}_1 \subset f^{-1}(\mathcal{F}_\infty)$. Si $f(\mathcal{F}_1) \neq \mathcal{F}_\infty$ entonces existiría algún punto ζ en $\partial(\mathcal{F}_1)$ con $f(\zeta) \in \mathcal{F}_\infty$ lo cual es absurdo pues ζ está en el conjunto de Julia, luego $\mathcal{F}_1 = f^{-1}(\mathcal{F}_\infty)$ así existe $w \in \mathcal{F}_1$ tal que $f(w) = \infty$.
Luego por la caracterización de polinomios tenemos que $w = \infty$, de esto último podemos concluir $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_\infty$. $\square$

En nuestra definición de conjuntos completamente invariantes hemos denotado por $[z]$ el menor conjunto totalmente invariante que contiene a z; veremos a continuación cuando este conjunto es finito.

Definición 26. Un punto z es dicho *excepcional* para la aplicación racional $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ cuando $[z]$ es finito. El conjunto de tales puntos será denotado por $E(f)$.

Observación 25. Es suficiente que la órbita hacia atrás $O^-(z) = \cup_{n\geq 0} R^{-n}\{z\}$ sea finita para que z sea un punto *excepcional*, mejor aún tenemos que $[z] = O^-(z)$.
En efecto definamos los conjuntos B_n de la siguiente manera:
$B_n = \bigcup_{m\geq n} R^{-m}(z)$ tenemos que $R^{-1}(B_n) = B_{n+1}$ y además $[z] \supset O^-(z) = B_o \subset B_1 \subset B_2 \ldots$.
Si $O^-(z)$ fuese finito entonces cada B_n sería finito, luego la cadena B_n será estacionaria es decir $B_m = B_{m+1}$, por tanto B_m es completamente invariante. Así $B_m = [z]$, con lo cual tenemos la afirmación. □

Teorema 22. Una aplicación racional f de grado $d \geq 2$ tiene a lo más dos puntos *excepcionales*.
Si $E(f) = \{\zeta\}$, entonces f resulta conjugado a un polinomio.
Si $E(f) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, entonces f resulta conjugado a z^d con $d \in \mathbb{Z}$.

Prueba. Como $E(f)$ es invariante por el Teorema 19 el conjunto $E(f)$ tendrá a lo más dos elementos, por tanto se presentan cuatro posibles casos:

1. $E(f) = \phi$.
2. $E(f) = \{\infty\} = [\infty]$.
3. $E(f) = \{0, \infty\}$, $[0] = \{0\}$ y $[\infty] = \{\infty\}$.
4. $E(f) = \{0, \infty\}$, $[0] = \{\infty\}$ y $[\infty] = \{0\}$.

En el caso 1 no hay nada que hacer, en al caso 2 es claro que resulta un polinomio, en el caso 3 es un polinomio de la forma az^d y para el caso 4 vemos que f tiene todos los ceros y todos los polos en $\{0, \infty\}$ por lo tanto ha de ser de la forma az^d para algún entero negativo. □

A partir del teorema anterior la mayoría de las funciones racionales no tienen puntos excepcionales.

Veamos ahora algunas propiedades del conjunto de Julia.

Corolario 3. El conjunto de Julia no contiene puntos excepcionales.

Prueba. Del Teorema 22 la aplicación debe ser conjugada a un polinomio, y como el conjunto de Julia permanece invariante bajo una conjugación, ver Proposición 3, tendremos que basta reducirnos al caso de un sólo elemento excepcional, el cual lo podemos considerar como ∞, finalmente de la Proposición 5 , $\infty \in \mathcal{F}$ que es un punto excepcional.

Teorema 23. Si el grado de una aplicación racional f es al menos 2, entonces el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ es infinito.

Prueba. Supongamos que el conjunto de Julia es el vacío, esto equivale decir que $\mathcal{F} = \mathbb{P}^1$, así la familia $\{f^n : n \geq 1\}$ será equicontinua en $\mathbb{P}^1$, luego tendremos una subsucesión que converge uniformemente, pues por el Teorema 9 tenemos que en un compacto la equicontinuidad es equivalente a normalidad, ahora por la convergencia uniforme este límite es una función holomorfa y por la caracterización dada en el Teorema 13, resulta una aplicación racional de grado finito cual es absurdo, por hecho que el grado de la subsucesión crece indefinidamente debido a que $d \geq 2$.
Supongamos ahora que $\mathcal{J}$ es no vacío y finito como el conjunto de Julia es completamente invariante este conjunto estará constituido de puntos excepcionales, luego del Corolario 3 este conjunto debe estar contenido en $\mathcal{F}$ lo cual es un absurdo.

Veremos ahora que el conjunto completamente invariante, cerrado y infinito mas pequeño es el de Julia.

Teorema 24. Si f es un aplicación racional de grado al menos 2 y E un conjunto cerrado completamente invariante entonces:

1. Si E es finito, entonces tendrá a lo mas dos elementos y $E \subset E(f) \subset \mathcal{F}(f)$.

2. Si E es infinito entonces contiene al conjunto de Julia.

Prueba. Si E es finito de el Teorema 19, E no ha tener mas de dos elementos los cuales serán excepcionales. Luego del Corolario 3 tendremos que $E \subset E(f) \subset \mathcal{F}(f)$.

Si E es infinito $\Omega = \mathbb{P}^1 - E$ es completamente invariante y la familia $\{f^n : n \geq 1\}$ evita mas de tres puntos, por tanto del Teorema 10 esa familia es normal en Ω, así tenemos la parte 2 del teorema.

Observación 26. De lo anterior tenemos que si un conjunto totalmente invariante tiene al menos 3 elementos, entonces es infinito y contiene al conjunto $\mathcal{J}(f)$.

Teorema 25. $\mathcal{J} = \mathbb{P}^1$ o $\mathrm{int}(\mathcal{J}) = \emptyset$.

Prueba. Como $\mathbb{P}^1 = \mathrm{int}(\mathcal{J}) \bigcup \partial(\mathcal{J}) \bigcup \mathcal{F}$, y cada uno es completamente invariante tendremos que:
Si $\mathcal{F} = \emptyset$ entonces $\mathcal{J} = \mathbb{P}^1$.
Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ entonces $\partial(\mathcal{J}) \bigcup \mathcal{F}$ es infinito, cerrado e invariante y como el conjunto de Julia es el mínimo con estas propiedades, entonces tendremos de que $\mathcal{J} \subset \partial(\mathcal{J}) \bigcup \mathcal{F}$ y de aquí $\mathcal{J} \subseteq \partial(\mathcal{J})$, por tanto tiene interior vacío. □

Teorema 26. El conjunto $\mathcal{J}$ es un conjunto perfecto.

Prueba. Sea $\mathcal{J}'$ el derivado de $\mathcal{J}$ si $\mathcal{J}$ infinito entonces $\mathcal{J}' \neq \emptyset$ y cerrado, luego por continuidad $f(\mathcal{J}') \subset \mathcal{J}'$.
Sean $z \in \mathcal{J}'$ y (z_n) una sucesión en $\mathcal{J}$ que converge a z luego $f(z_n) \in \mathcal{J}$ y por continuidad $f(z) \in \mathcal{J}$, así tenemos $f(\mathcal{J}') \subset \mathcal{J}$, y como f es una aplicación abierta tenemos que $f^{-1}(\mathcal{J}') \in \mathcal{J}$, luego $\mathcal{J}'$ es completamente invariante y por tanto $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$. □

Teorema 27. Si f es una aplicación racional de grado al menos dos y W un abierto que intercepta al conjunto de Julia en un conjunto no vacío entonces:

1. $\bigcup f^n(W) \supset \mathbb{P}^1 - E(f)$.
2. Para n suficientemente grande tenemos que $f^n(W) \supset \mathcal{J}$.

Prueba.
1. Sean $W_0 = \bigcup f^n(W)$ y $K = \mathbb{P}^1 - W_0$, si K tiene tres puntos excepcionales de el Teorema 10 la familia $\{f^n : n \geq 1\}$ resulta normal en W, luego $W \subset \mathcal{F}$

lo cual es absurdo. Así W_0 contiene a lo mas dos puntos excepcionales. Tomemos $z \in \mathbb{P}^1 - E(f)$ entonces $O^-(z)$ es infinita y $O^-(z) \bigcap W_0 \neq \emptyset$, sea w un punto de esta intersección, de donde obtenemos $p, q \in I\!N$ tal que $f^p(w) = z$ y $w \in f^q(W)$, es decir $z \in f^{p+q}(W)$ por lo tanto $\mathbb{P}^1 - E(f) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(W)$.
2.Sean W_1, W_2, W_3 abiertos que cortan $\mathcal{J}$ y con distancia cordal positiva uno del otro, veamos que alguna imagen de W_j cubre W_k para algún k. Supongamos que esto no ocurre entonces para algún j, $f(W_j)$ no cubre W_1, W_2, W_3. Entonces nuevamente por el Teorema 10 la familia resulta normal en W_j y esto no puede suceder puesto que $W_j \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$.
Hemos mostrado que para cada j existe un k tal que $f^n(W_j) \supset W_k$ así podemos definir la permutación ϕ que lleva $\{1, 2, 3\}$ en si mismo, luegoi para alguna iteración tenemos la permutación identidad, es decir $f^m(W_j) \supset W_j$, luego por la parte uno tenemos que $\bigcup f^{mn}(W_j)$ cubre el compacto $\mathcal{J}$ entonces existe $n_0 \in I\!N$ tal que $f^{mn_0}(W_j) \supset \mathcal{J}$ pues la sucesión $(f^{mn}(W_j))_n$ es creciente. □

Teorema 28. Si f es una aplicación racional de grado al menos 2 entonces se cumple que:

1. Si z no es excepcional $\mathcal{J} \subset \overline{O^-(z)}$.
2. Si $z \in \mathcal{J}$ entonces $\mathcal{J} = \overline{O^-(z)}$.

Prueba. Sea z un punto no excepcional y $W \neq \emptyset$, tal que $W \bigcap \mathcal{J} \neq \emptyset$.
De el Teorema 27 se tiene que existe n tal que $z \in f^n(W)$ entonces $O^-(z) \cap W \neq \emptyset$ y esto prueba 1.
Sea $z \in \mathcal{J}$ entonces como $\mathcal{J}$ es completamente invariante tenemos que $\overline{O^-(z)} \subset \mathcal{J}$ y usando 1 tenemos de que $\overline{O^-(z)} = \mathcal{J}$. □

Teorema 29. Si f y g son aplicaciones de grado al menos 2 verificando $f \circ g = g \circ f$ entonces $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(g)$.

Prueba. Como las aplicaciones holomorfas en $\mathbb{P}^1$ son lipchitzianas entonces existe $M \in I\!R^+$ tal que $\sigma(g(w), g(z)) \leq M\sigma(z, w)$, para todo $z, w \in \mathbb{P}^1$. Ahora tomemos $w \in \mathcal{F}(f)$, por la equicontinuidad de $\{f^n : n \geq 1\}$ en w existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo n $\operatorname{diam}(f^n(D(w, \delta))) < \frac{\epsilon}{M}$, donde $D(w, \delta)$ es el σ-disco además

$$\operatorname{diam}(f^n g(D(w, \delta))) = \operatorname{diam}(g f^n(D(w, \delta))) \leq M \operatorname{diam}(f^n(D(w, \delta))) < \epsilon$$

entonces la familia $\{f^n : n \geq 1\}$ es normal en $g(D(w,\delta))$, luego $g(w) \in \mathcal{F}(f)$, por tanto g y g^n llevan elementos de $\mathcal{F}(f)$ en si mismo, entonces $\{g^n : n \geq 1\}$ es normal en $\mathcal{F}(f)$, por tanto $\mathcal{F}(g) \subset \mathcal{F}(f)$, la otra inclusión se obtiene de modo análogo.

Veremos ahora un ejemplo de una aplicación racional cuyo conjunto de Julia es $\mathbb{P}^1$.

Ejemplo 12. Sean $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\frac{\mu}{\lambda} \notin I\!R$ y $\Lambda = \{m\lambda + n\mu \;\; m, n \in \mathbb{Z}\}$ el retículo determinado por μ y λ.
Un paralelogramo es cualquier conjunto de la forma:

$$\mathcal{P} = \{z_0 + s\lambda + t\mu \;\; ; donde \;\; , 0 \leq s, t \leq 1 \;\; z_0 \in \mathbb{C}\}.$$

Una aplicación *elíptica* respecto a Λ es por definición una aplicación meromorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{P}^1$ tal que cada $w \in \Lambda$ es un periodo de f, es decir $f(z+w) = f(z) \; \forall z \in \mathbb{C}$, en particular $f(\mathbb{C}) = f(\mathcal{P})$ y así $f(\mathbb{C})$ es compacto en $\mathbb{P}^1$. Nuestros argumentos son basados en las propiedades de la aplicación elíptica de Weierstrass.

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{z+w^2} - \frac{1}{w^2}\right).$$

La aplicación $\wp$ satisface la identidad $\wp(2z) = R(\wp(z))$, para una aplicación racional R, para mayores detalles ver [B] pg 77-79.
Sea ahora D un disco , $U = \wp^{-1}(D)$ y $\varphi(z) = 2z$. Es claro que existe un n tal que $\varphi^n(U) \supset \mathcal{P}$ y $R^n(D) = R^n(\wp(U)) = \wp(2^n(U)) = \mathbb{P}^1$, entonces $\mathcal{F}(R) = \emptyset$ y $\mathcal{J}(R) = \mathbb{P}^1$.

Capítulo 3

Conjuntos de Fatou y de Julia en $\mathbb{P}^k$

Empezaremos este capítulo caracterizando las aplicaciones holomorfas de $\mathbb{P}^k$ en $\mathbb{P}^k$, para esto utilizaremos dos resultados centrales en la teoría de Varias Variables Complejas como son los Teorema de Weierstrass-Hurwitz y el Teorema de Levi.
Definimos los conjuntos de Fatou y de Julia de manera análoga al caso unidimensional, luego veremos en el Teorema 34 que las aplicaciones holomorfas y meromorfas son abundantes; en el mismo Teorema damos una cota para el grado del conjunto de los puntos críticos de una aplicación holomorfa. Posteriormente, pasamos ha estudiar los puntos periódicos de las aplicaciones holomorfas y mostramos que una aplicación holomorfa de grado $d \geq 2$ sobre $\mathbb{P}^k$ tiene exactamente $\frac{d^{n(k+1)}-1}{d^n-1}$ puntos periódicos de orden n, también veremos que las aplicaciones holomorfas de grado $d \geq 2$ sobre $\mathbb{P}^2$ tienen infinitas órbitas periódicas; estudiamos también las variedades excepcionales de forma análoga al caso unidimensional y probamos que el grado de ellas no superan la dimensión mas uno del espacio proyectivo donde está definida la aplicación holomorfa, además verificamos la abundancia de aplicaciones holomorfas sin hipersuperficies excepcionales similar al caso de dimensión uno, ver el Teorema 22.
Por último hacemos un estudio completo de las variedades excepcionales de las aplicaciones holomorfas en el plano proyectivo, observaremos además, que al contrario del caso unidimensional el conjunto excepcional puede estar en el conjunto de Julia.

3.1 Aplicaciones Holomorfas y Meromorfas en $\mathbb{P}^k$

Teorema 30 (Levi). Sea W un conjunto analítico de un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión $\dim(W) \leq n-2$. Si f es una función meromorfa en $D - W$ entonces existe una única función meromorfa F en D tal que $F|_{D-W} = f$.

Una demostración de este teorema puede ser encontrado en [G] pg 168.

Teorema 31 (Weierstrass-Hurwitz). Las funciones meromorfas de $\mathbb{P}^k$ son las funciones racionales.

Prueba. Sea $H : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la proyección natural $(z_0, \ldots, z_n) \to [z_0 : \cdots : z_n]$, entonces la composición $\widetilde{f} = foH$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Por el Teorema de Levi $\widetilde{f}$ se extiende a una función meromorfa en el origen, para ello basta considerar $W = \{0\}$ en el Teorema 30. Por tanto esta función puede ser expresada como $\widetilde{f}(z) = \frac{f'(z)}{f''(z)}$ para algunas funciones holomorfas f' y f'' en una vecindad del origen, esas funciones pueden ser escritas en sumas

$$f' = \sum_{v=0}^{\infty} f'_v, \quad f'' = \sum_{v=0}^{\infty} f''_v,$$

donde las funciones f'_v son polinomios homogéneos de grado v. Por estar definidas las funciones f' y f'' sobre $\mathbb{P}^k$ deben de satisfacer

$$\widetilde{f}(tz) = \widetilde{f}(z),$$

donde $t \in \mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq 1\}$ y $z \in D_{\widetilde{f}} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f''(z) \neq 0\}$. Escribiendo esta última expresión en términos de sus polinomios homogéneos tenemos :

$$\sum_{v=0}^{\infty} f'_v(z)t^v = \sum_{v=0}^{\infty} \widetilde{f}(z) f''_v(z)t^v$$

y puesto que esta identidad es verdadera para todo $|t| \leq 1$ y $z \in D_{\widetilde{f}}$, igualando los coeficientes de la serie en la variable t, se debe cumplir que

$$f'_v(z) = \widetilde{f}(z) f''_v(z)$$

para todo $z \in D_{\widetilde{f}}$, por otro lado debe existir al menos algún v_0 para el cual $f''_{v_0} \neq 0$ de lo contrario $\widetilde{f} \equiv 0$, así $\widetilde{f}(z) = \frac{f'_{v_0}(z)}{f''_{v_0}(z)}$.

Veamos ahora una caracterización de aplicaciones holomorfas en $\mathbb{P}^k$.

Teorema 32. Sea f una aplicación holomorfa no constante de $\mathbb{P}^k$ en $\mathbb{P}^k$ entonces f es dado en coordenadas homogéneas por $[f_0 : \cdots : f_k]$ donde cada f_j es un polinomio homogéneo de grado d, y los f_j no tienen ceros comunes excepto el origen.

Prueba. Si $[z_0 : \cdots : z_k]$ son las coordenadas homogéneas de f podemos suponer que $f(\mathbb{P}^k)$ no está contenida en algún hiperplano de la forma $\{[z_0 : \cdots : z_k] : z_j = 0\}$ considerando un cambio de coordenadas lineales, vea la sección 1.2, podemos suponer que $f(\mathbb{P}^k) \not\subset \{[z_0 : \cdots : z_k] : z_0 = 0\}$, luego del Teorema de Weierstrass-Hurwitz tenemos que cada componente de la función meromorfa $\frac{z_i}{z_0} f$ es dada por el cociente de dos polinomios del mismo grado $\frac{F_i}{G_i}$, si $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_0, \cdots, \widetilde{F}_k)$ donde cada uno de los polinomios son del mismo grado, y se han obtenido al dividir los factores comunes de los polinomios $\frac{F_j}{G_j} \prod G_l$ entonces por definición las componentes de $\widetilde{F}$ no tienen factores comunes, así sólo resta demostrar que $\widetilde{F}$ es un levantamiento de f a $\mathbb{C}^{k+1}$, para esto sólo necesitamos verificar que los $\widetilde{F}_j$ no tienen ceros comunes excepto el origen, pues tenemos que $[\widetilde{F}_0 : \cdots : \widetilde{F}_k] = [f_0 : \cdots : f_k]$. Supongamos lo contrario que existe $p \in \mathbb{C}^{k+1} - \{0\}$ un cero común de los polinomios $\widetilde{F}_j$, y escojamos un levantamiento local $\widetilde{f} = (f_0, \cdots, f_k)$ de f, en una vecindad de p nosotros podemos asumir que $f_0 = 1$, entonces $\widetilde{F}_j = \widetilde{F}_0 f_j$ lo cual implica que el conjunto de ceros comunes es una hipersuperficie, esto contradice el Teorema de Bezout debido a que los $\widetilde{F}_j$ se están tomando sin factores comunes. □

- El espacio de las aplicaciones holomorfas en $\mathbb{P}^k$ será denotado por $\mathcal{H}$.
- El espacio de las aplicaciones holomorfas en $\mathbb{P}^k$ donde las coordenadas son polinomios homogéneos de grado d será denotado por $\mathcal{H}_d$.

Ejemplo 13. De el Teorema 32 es claro que la aplicación $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ $[z_0 : \cdots : z_k] \to [z_0^d : \cdots : z_k^d]$ es una aplicación holomorfa, pues las funciones $f_i(z_0, \ldots, z_k) = z_i^d$ no tienen ceros comunes.

Es fácil darse cuenta que $\mathcal{H}$ es estable bajo la composición de aplicaciones holomorfas, por otro lado si permitimos que tengan ceros comunes podemos

identificar con el espacio $\mathbb{P}^N$ donde $N = (k+1)\frac{(d+k)!}{d!k!} - 1$, esto se obtiene identificando los polinomios homogéneos con sus respectivos coeficientes, y el uno de la diferencia es simplemente porque estamos en el espacio proyectivo. Nosotros consideraremos el espacio $\mathcal{M}_d$ de funciones meromorfas, las cuales tienen rango maximal en algún abierto no vacío.
Existen aplicaciones meromorfas que no están en $\mathcal{H}_d$ ni en $\mathcal{M}_d$.

Ejemplo 14. La aplicación $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ $[x : y : z] \to [y : x - z : x - z]$ no es holomorfa pues tiene a $[1 : 0 : 1]$ como cero común, además $f \notin \mathcal{M}_1$, pues el jacobiano es nulo en todo punto.

Observación 27. Sea $f \in \mathcal{H}_d$, en todo valor regular de f el jacobiano de su imagen tendrá rango máximo entonces $\mathcal{H}_d \subset \mathcal{M}_d$.

3.2 Conjuntos de Julia y Fatou

Como el caso de una variable, podemos definir en $\mathbb{P}^k$ los conjuntos de Fatou y Julia.

Definición 27. Sea $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ en $\mathcal{H}_d$ $0 \leq l \leq k-1$ un punto $p \in \mathbb{P}^k$ pertenece al *conjunto de Fatou* $\mathcal{F}_l$ si existe una vecindad $U(p)$ tal que para todo q en $U(p)$ existe una variedad compleja X_q de codimensión l, tal que $\{f^n|_{X_q}\}$ resulta equicontinua.

De la definición tenemos que $\mathcal{F}_i \supset \mathcal{F}_j$ si $i < j$, además podemos darnos cuenta que $\mathcal{F}_0$ es el mas grande abierto donde la familia $\{f^n\}$ resulta equicontinua y tal conjunto es llamado el conjunto de Fatou de f.

Definición 28. A cada abierto $\mathcal{F}^l$ le corresponde el conjunto $\mathcal{J}_l = \mathbb{P}^k - \mathcal{F}_l$. Nosotros llamaremos a $\mathcal{J}_0$ el *conjunto de Julia* de f.

Teorema 33. El conjunto de Julia de una aplicación holomorfa $f \in \mathcal{H}_d$ con $d \geq 2$ es siempre no vacío.

Prueba. Supongamos que el conjunto de Fatou sea $\mathbb{P}^k$ y sea h el límite de una subsucesión $\{f^{n_k}\}$, entonces h tendría grado finito, lo cual es absurdo.

Veamos ahora la topología del espacio de aplicaciones holomorfas.

Teorema 34. Respecto al espacio de las aplicaciones holomorfas y meromorfas sobre $\mathbb{P}^k$ tenemos las siguientes afirmaciones:

1. Los conjuntos $\mathcal{H}_d$ y $\mathcal{M}_d$ son abiertos en la topología de Zariski, en particular son conexos.

2. Si $f \in \mathcal{H}_d$ entonces el conjunto de puntos críticos de f es una variedad algebraica de grado $(k+1)(d-1)$.

Observación 28. Antes de probar este resultado es necesario recordar que $\mathbb{P}^k$ con la topología de Zariski es un espacio topológico irreducible, esto significa que cualquier par de abiertos se interceptan .

Prueba. 1.- Consideremos la siguiente identificación

$$\mathbb{P}^N = \{[f_0 : \cdots : f_k] : f_j \text{ es polinomio homogeneo de grado } d\},$$

donde $N = (k+1)\frac{(d+k)!}{d!k!} - 1$. Esta identificación tiene sentido, pues algún coeficiente de unos de los polinomios f_j es no cero, además tengamos presente que cualquier elemento de $\mathbb{P}^N$ no es una función definida en todo $\mathbb{P}^k$. Consideremos ahora el conjunto analítico

$$\Sigma = \{(f,z) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^k : f(z) = 0\}.$$

Sean $\pi : \Sigma \to \mathbb{P}^N$ la proyección $\pi(f,z) = f$, y $\Sigma_d = \pi^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbb{N}})$. Entonces $\Sigma_d = \mathbb{P}^N - \mathcal{H}_d$, pues si f está en $\mathcal{H}_d$ entonces sus componentes no tienen ceros comunes en $\mathbb{P}^k$, luego por el Teorema de la Aplicación Propia 5 la proyección de un conjunto analítico es analítico, así Σ_d es un conjunto analítico en particular es cerrado por tanto $\mathcal{H}_d$ es abierto.

Por último veamos que $\mathcal{M}_d$ es un abierto Zariski. Para ello observemos que

$$\mathbb{P}^N - \mathcal{M}_d = \cap_{z \in \mathbb{P}^k}\{f : J(f,z) = 0\}$$

$\mathcal{M}_d = \bigcup\{f : J(f,z) \neq 0 \text{ algún } z \in \mathbb{P}^k\}$ donde $J(f,z)$ es el jacobiano del levantamiento de f a $\mathbb{C}^{k+1}$.

2.- Sea $f = [f_0 : \cdots : f_k] \in \mathcal{H}_d$ y F el leventamiento de f , consideremos la proyección usual $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{P}^k$ del conjunto crítico de $F = (f_0, \ldots, f_k)$

$$C(F) = \{z \in \mathbb{C}^{k+1} : J(F,z) = 0\},$$

como $C(F)$ es un conjunto que tiene grado menor o igual que $(d-1)(k+1)$, entonces por la conexidad de $\mathcal{H}_d$ basta encontrar un elemento de $g \in \mathcal{H}_d$ con grado $(d-1)(k+1)$, por ejemplo podemos considerar $g = [z_0^d : \cdots : z_k^d] \in \mathcal{H}_d$.

3.3 Puntos Periódicos

En esta sección mostraremos que el conjunto de puntos fijos de $f \in \mathcal{H}_d$ es discreto.

Debemos recordar que las únicas variedades compactas $M \subset \mathbb{C}^n$ son los conjuntos finitos, esto puede deducirse si aplicamos el Teorema del Módulo Máximo a las proyecciones $\pi_i : \mathbb{C}^n \to C$ $\pi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ restringidas a M.

Teorema 35. Sea $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ es una aplicación holomorfa de grado $d \geq 2$, y sea $g : \mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^k$ una aplicación meromorfa de grado d' con $d' < d$. Si Ω es un conjunto abierto denso de Zariski donde g es holomorfa entonces no puede existir una curva algebraica compacta Z tal que $f = g$ en $Z \cap \Omega$ con $Z \cap \Omega \neq \emptyset$. En el caso que g es holomorfa el número de puntos donde $f = g$ será igual a $\frac{d^{k+1} - d'^{k+1}}{d-d'}$ contando multiplicidad.

Prueba. Supongamos que $f = g$ en una subvariedad algebraica compacta uno dimensional $Z' \subset Z$.
Sean $f = [f_0 : \cdots : f_k]$ y $g = [g_0 : \cdots : g_k]$, donde los f_j son polinomios de grado d y los g_j son polinomios de grado d' con $d' < d$; tomemos los levantamientos $F = (f_0, \ldots, f_k)$ y $G = (g_0, \ldots, g_k)$ de f y g , la variedad Z' también es levantada en una superficie X en $\mathbb{C}^{k+1}$ la cual será de dimensión 2. Introduscamos ahora la variable t y consideremos las $k+1$ ecuaciones homogéneas

$$f_j - t^{d-d'} g_j = 0$$

ellas son ecuaciones homogéneas de grado d, este sistema forma un cono Y en $\mathbb{C}^{k+2}$. Consideremos ahora la proyección de Y a $\mathbb{P}^{k+1}$ la cual seguiremos llamando Y, considerando las intersecciones con el hiperplano $t = 0$, las ecuaciones se reducen a

$$f_0 = \cdots = f_k = 0$$

puesto f está bien definida en $\mathbb{P}^k$ tenemos que Y no intercepta el hiperplano $t = 0$, por lo tanto tendrá que ser una subvariedad compacta en $\mathbb{C}^{k+1}$, entonces será un conjunto finito en $\mathbb{C}^{k+1}$, esto significa que Y consiste de un número finito de líneas que pasan por el origen en $\mathbb{C}^{k+2}$. Supongamos que $p \in Z \cap \Omega$, con $f(p) = g(p)$, considerando un t con $t^{d-d'} = 1$ tenemos de que $f_j(p) = t^{d-d'} g_j(p)$, donde $p = [z_0 : \cdots : z_k]$, entonces el punto $(z_0, \ldots, z_k, t) \in Y$ por lo cual tendríamos que Y es dos dimensional en $\mathbb{C}^{k+2}$, por tanto tal Z no existe.

En el caso de que g es holomorfa podemos contar el número de puntos de intersección. Consideremos el sistema $f_j - t^{d-d'}g_j = 0$, por lo anterior tenemos que los polinomios homogeneos no pueden tener factores comunes, entonces del Teorema de Bezout 8 el sistema tendrá d^{k+1} soluciones, de estas algunas ocurren en el punto $[0 : 0 : \cdots : 1]$, está solución no tendrá no será considerada en $\mathbb{P}^k$, entonces consideremos la intersección de dicho punto. En la coordenada $t = 1$ el sistema resulta $f_j - g_j = 0$, el cual tiene cono tangente g_i pues $d' < d$, además como g holomorfa no habrá conos tangentes comunes, así el número de intersección coincide con el producto de las multiplicidades (vea la Observación 14) el cual para cada uno es d', por tanto la intersección en dicho punto es d'^{k+1} esto nos da $d^{k+1} - d'^{k+1}$ soluciones, pero esto se ha hecho para cada una de las $d - d'$ raíces de la unidad, así sólo tendremos $\frac{d^{k+1}-d'^{k+1}}{d-d'}$ soluciones en $\mathbb{P}^k$.

Definición 29. Sea p un punto periódico de la función $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$.
El *orden de periodicidad* de un punto p es el menor entero k tal que $f^k(p) = p$.

Corolario 4. Si $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, $f \in \mathcal{H}_d$ con $d \geq 2$ entonces el número de puntos periódicos de orden n contando sus multiplicidades es $\frac{d^{n(k+1)}-1}{d^n-1}$.

Prueba. La prueba de este resultado es inmediato si tomamos f^n e $I_{\mathbb{P}^k}$ (la función identidad de $\mathbb{P}^k$) como las funciones f y g en el Teorema anterior.

Ejemplo 15. Considérese la aplicación $[x : y : z] \to [x^2 : y^2 : z^2]$.

Los puntos fijos $[x : y : z]$ de orden 2 satisfacen la ecuación $(z^2)^2 = z$, que equivale a la ecuación $z(z^3 - 1) = 0$, de ahí $z = 0$ o z raíz cúbica de la unidad. Lo mismo pasa para x e y. Haciendo las cuentas estos serán: $[0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0], [0 : 1 : 1], [0 : 1 : w], [0 : 1 : w^2]$, donde $1, w, w^2$ son las raíces cúbicas de la unidad. Cuando la primera coordenada homogénea es 1 no habrá repeticiones, por tanto habrán 16 elementos con primera coordenada homogénea 1, así en total tendremos que existen 21 puntos periódicos de orden 2.

Aplicado el corolario en el ejemplo anterior, tenemos que los puntos periódicos de orden 2 son $\frac{(2^2)^3-1}{2^2-1} = 21$.
El resultado anterior no es válido para aplicaciones meromorfas .

Ejemplo 16. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ definida por $f[z_1 : z_2 : z_3] = [\alpha z_1 z_3^{d-1} + z_3^d P(\frac{z_2}{z_3}) : z_2 z_3^{d-1} + \beta z_3^d : z_3^d]$, donde P es un polinomio de grado d y $\alpha\beta \neq 0$, esta es una aplicación meromorfa y no tiene punto periódicos, en efecto en coordenadas afines $z_3 = 1$ tenemos $f[z_1 : z_2 : 1] = [\alpha z_1 + P(z_2) : z_2 + \beta : 1]$, así siendo una traslación una de las componentes, la aplicación no tendrá puntos periódicos en esta parte de $\mathbb{P}^2$, sólo faltaría ver si en la recta del infinito $\mathbb{L}_\infty : z_3 = 0$ tiene puntos periódicos, pero ahí f no es definida.

Veremos ahora acerca de la abundancia de las órbitas periódicas, para lo cual será necesaria la desigualdad de Lojasicwicz.

Teorema 36. Sea Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ analítica, si $E = \{x \in \Omega / f(x) = 0\}$ entonces para todo compacto $K \subset \Omega$, existen $c, \alpha > 0$ tal que para todo $x \in K$ se tiene que $\mid f(x) \mid \geq c(d(x, E))^\alpha$.

Esta prueba es muy técnica, y no es relevante para nuestro objetivo, se puede encontrar por ejemplo en [M] pg $59 - 62$.

Teorema 37. Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una aplicación holomorfa con grado $d \geq 2$ entonces existen infinitas órbitas periódicas.

Para probar este Teorema necesitaremos el siguiente Lema.

Lema 2. Sean U, $V \subset \mathbb{C}^2$ vecindades de 0 y $f : U \to V$ una aplicación holomorfa tal que $f(0) = 0$. Si 0 es un punto aislado del conjunto de puntos periódicos de f, entonces existe un entero N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar una vecindad $U_n \subset \mathbb{C}^2$ de 0 y un $c_n > 0$ que verifiquen la inecuación

$$\| f^n(z, w) - (z, w) \| \geq c_n \| (z, w) \|^N$$

para todo $(z, w) \in U_n$.

Prueba. Sean α ,γ los autovalores de $f'(0)$ luego por el desarrollo de Taylor, podemos considerar

$$f = (\alpha z + \beta w + P(z, w), \gamma w + Q(z, w))$$

donde P y Q se anulan al menos de orden dos, además si $\alpha \neq \gamma$ podemos considerar $\beta = 0$ pues se podría diagonalizar $f'(0)$
consideremos $\alpha \neq \beta$ entonces

$$f^n = (\alpha^n z + P_n, \gamma^n w + Q_n)$$

donde P_n ,Q_n se anulan al menos de orden dos luego tendríamos.
$|f^n(z,w)-(z,w)| =| (\alpha^n-1)z+P_n, (\gamma^n-1)w+Q_n| \geq| (\alpha^n-1)z, (\gamma^n-1)w |$ $-| (P,Q) |\geq r^n | z,w | -\epsilon | z,w |$, donde $r = min\{| \alpha^n - 1 || \gamma^n - 1 |\}$ luego el argumento es válido con $N = 1$, por otro lado si consideramos $| \alpha |\neq 1$ y $| \gamma |= 1$ bastaría con tomar $\alpha \neq \gamma$ sino por un cambio de coordenadas tendríamos de que $| \alpha |= 1$ y $| \gamma |= 1$.
Veamos ahora el caso $| \gamma |= 1$ $| \alpha |\neq 1$ entonces $\beta = 0$ y sería equivalente al caso con α y β invertidos, sea $\gamma = e^{2\pi i\theta}$, con $\theta \in I$, si θ fuese irracional sería equivalente al caso con $\alpha \neq \beta$, si $\theta = \frac{p}{q}$ en este caso también es válido para n con $N = 1$ si $n \neq mq$, para el caso faltante reemplazando f^n por f bastaría considerar $\gamma = 1$ así $f = (\alpha z + P, w + Q)$, nosotros veremos el caso mas general $\alpha \neq 1$. De la ecuación $\alpha z + P(z,w) = z$ la variable z se puede resolver impícitamente en torno a 0 desde que $\alpha \neq 1$ obteniendo $z = h(w)$ donde h se anula al menos de orden dos, luego por el desarrollo de Taylor, podemos obtener funciones P', Q' anulándose al menos de orden uno y Q'' anulándose para un orden finito $k > 1$ de modo que: $f = (\alpha(z - h(w) + h(w) + (z - h(w))P', w + Q'' - (z - h(w)Q')$; sea (z_0, w_0) un punto cercano a cero y $(z_n, w_n) = f^n(z_0, w_0)$ denotemos $(z_n, w_n) = (h(w_0)+\Delta_n, w_0+\delta_n)$ veamos el error (Δ_n, δ_n) donde $\Delta_0 = z_0 - h(z_0)$ y $\delta_0 = 0$ $(z_{n+1}, w_{n+1}) = (\alpha(h(w_0)+\Delta_n - h(w_0+\delta_n)) + h(w_0+\delta_n) + (h(w_0)+\Delta_n - h(w_0+\delta_n))P'(h(w_0) + \Delta_n, w_0 + \delta_n), w_0 + \delta_n + Q''(w_0 + \delta_n) + (h(w_0) + \Delta_n - h(w_0 + \delta_n)Q'(h(w_0) + \Delta_n, w_0 + \delta_n)) = o(h(w_0) + \Delta_n, w_0 + \delta_n + Q''(w_0))$ de donde se tiene que $(\Delta_n, \delta_n) = (\alpha^n\Delta_0 + o(| \Delta_0 || \delta_n |), \delta_n + Q''(w_0) + o(| \Delta_0 |, | \delta_n |)$ de lo anterior usando inducción se tiene que
$(\Delta_n, \delta_n) = (\alpha^n\Delta_0 + o(| \Delta_0, Q''(w_0) |), nQ''(w_0) + o(| \Delta_0, Q''(w_0) |)$, así tendríamos de que :
$| (f^n - I)(z_0 w_0) |=| \Delta_n - \Delta_0, \delta_n \geq| (\alpha^n - 1) || \Delta_{0,nQ''(w_0)} | -o(| \Delta_0, Q''(w_0 |)$
luego para todo n tal que $\alpha^n \neq 1$ tendremos de que:
$| (f^n - I)(z_0, w_0) |\geq c_n(| z_0 - h(w_0) | + | Q''(w_0) |)$ y por continuidad $| (f^n - I)(z,w) |\geq c_n(| z - h(w) | + | Q''(w) |)$ en alguna vecindad del cero, si consideramos los puntos (z,w) cerca al origen con la condición de que $| z |\geq| w |$ y debido a que Q'' es de orden k la desigualdad es válida con $N = k$.
Para el caso de los puntos de la forma $| w |\geq| z |$ la desigualdad será válida con $N = 1$ y como $k > 1$ el cualquier caso será válida con $N = k$.
Para concluir la prueba faltaría el caso $| z |=| w |= 1$, supongamos que $\alpha = \gamma$, primero consideremos que α y γ son rotaciones irracionales considerando $\frac{1}{\alpha}f'(0)$ estaríamos en el caso $| \alpha |= 1$ $\gamma \neq 1$ del mismo modo

para el caso de rotaciones racionales $\alpha = \gamma = e^{2\pi i p/q}$ donde p y q coprimos la iteración es válida cuando n no es múltiplo de q, para el caso restante se reduce a considerar $\alpha = \gamma = 1$ y β arbitrario veamos primero el caso $\beta \neq 0$ por un cambio de coordenadas podemos suponer que $\beta = 1$ luego $f = (z + w + P, w + Q)$ donde P y Q se anulan al menos de orden 2, P y Q ambos no se pueden anular en los z ejes sino $f(z, 0) = (z, 0)$, lo cual es absurdo por hipótesis, supongamos ahora que P se anule y Q no es decir $P(z,w) = wP'$ y $Q(z, 0) = az^l + ...$ donde $a \neq 0$ $l \geq 2$, usando inducción se tiene que $f^n(z,w) = (z+nw(1+O(| z,w |))+O(| z^l |), w+N_n az^l+o(| (z,w^l) |)$ por tanto $f^n - I = (nw(1+O(| z,w |))+O(| z^l |), N_n az^l+o(| (z,w^l) |))$. Para el caso $| w | \leq | z |^l$ la segunda componente de $f^n - I$ es $N_n az^l + o(| (z,w^l) |)$ en este caso tenemos que $|f^n - I| \geq |N_n az^l| - \epsilon \mid (z,w^l) \mid \geq c_n \mid (z,w) \mid^l$.
Para el caso de que $|w| \geq |z^l|$ veamos la primera componente de $f^n - I$ que es $nw(1 + o(| z,w |)) + o(| z^l |)$ aquí tendríamos que $|f^n - I| \geq$
$|nw(1 + o(| z,w |)) + o(| z^l |)| \geq nb|w| - c|z^l|$ donde $b, c \in \mathbb{R}^+$ y tomando n suficientemente grande bajo la consideración de que $|w| \geq |z^l|$ tenemos de que $|f^n - I| \geq b_n|w| \geq c_n|(z,w)^l|$. Consideremos el caso que P no se anula en el eje z y Q si es decir $P(z, 0) = az^k + \cdots$ para algún $k \geq 2$ $Q = wQ'(z,w)$ como la derivada de $w + P$ no se anula respecto a w tenemos que existe h holomorfa al menos de orden 2 en el origen tal que $w = h(z)$ ahora haciendo el cambio de coordenadas $w' = w - h(z)$ y $z' = z$ tenemos de que $f(z', 0) = (z', h(z')Q'(z', h(z'))$, observamos que la segunda componente es de orden finito en el origen, sino tendríamos de que $f(z', 0) = (z', 0)$ lo cual es absurdo, como $f(z', 0) = (z', h(z')Q'(z', h(z'))$ tendríamos que en este sistema de coordenadas P se anula y Q no, caso que ya fue visto anteriormente consideremos ahora el caso de que P y Q no se anulan en el z eje es decir $P(z, 0) = az^k + \cdots$, y $Q(z, 0) = bz^l + \cdots$ haciendo el mismo cambio de variable estaremos en el caso de que P se anula en el z eje.
Consideremos ahora el caso de que $\beta = 0$ en este caso tenemos de que $f = (z + P, w + Q)$ donde P y Q se anulan al menos de orden 2 inductivamente tenemos de que $f^n = (z + nP + o(|(P,Q)|), w + nQ + o(|(P,Q)|))$ por tanto tenemos de que $|f^n - I| \geq |(P,Q)|$ ahora como el 0 es un punto fijo aislado de (P,Q) usando la desigualdad de Lojasicwicz tendremos de que $|(P,Q)| \geq |(z,w)|^N$ en alguna vecindad del 0 para algún N entero positivo.
Finalmente consideremos el caso $\alpha \neq \beta$ y ambos de módulo uno en este caso podríamos diagonalizar $f'(0)$ y luego considerando $\frac{1}{\alpha} f'(0)$ estaríamos en el caso $\alpha \neq 1$ y $|\gamma| = 1$ el cual ya fue visto anteriormente. $\square$

Veamos a continuación la prueba del Teorema.
Prueba. Supongamos que hay finitas órbitas periódicas, generadas por la iteración de los puntos periódicos $p_1, \ldots, p_n$, esto es, existen $n_i \in I\!N$ tal que $f^{n_i}(p_i) = p_i$. Luego los puntos p_i son ceros de $f^{n_i} - Id$, entonces existe un punto p tal que la multiplicidad de $f^n - Id$ en p puede ser arbitrariamente grande tomando n suficientemente grande; pues por el Corolario 4 una función holomorfa f de grado d tiene $\frac{d^{3n}-1}{d^n-1}$ puntos periódicos contando multiplicidad, es decir, para n grande el número de puntos periódicos puede ser tan grande como se quiera, por un cambio de coordenadas podemos suponer que $p = 0$ es un cero de f; ahora como la cantidad de ceros de $f^n - Id$ es finita por la hipótesis auxiliar resulta que $p = 0$ es un punto periódico aislado de f, así por el Lema 2 existe $N \in I\!N$ tal que para todo $n \in I\!N$ existe una vecindad U_n de 0 y $c_n > 0$ con

$$c_n \parallel (z,w) \parallel^N \leq \parallel f^n(z,w) - (z,w) \parallel . \tag{3.1}$$

Considerando el polinomio de Taylor P_N de orden N de $f^n - Id$, se cumple de 3.1 que:

$$\parallel f^n - Id - P_N \parallel \leq a \parallel P_{N+1} \parallel \leq b \parallel Id \parallel^N < \frac{b}{c_n} \parallel f^n - Id \parallel$$

en una vecindad de 0 que podemos suponer contenida en U_n, donde $a > 0$ $b > 0$, así por el Teorema de Rouche ([L1] página 520), tenemos que la multiplicidad de $f^n - Id$ es a lo mas N^2, que es el número de puntos de $P_N^{-1}(0)$, lo cual es una contradicción, pues la multiplicidad de $f^n - Id$ es arbitrariamente grande.

3.4 Variedades Excepcionales

Definición 30. Sea $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, $f \in \mathcal{H}_d$. Una variedad algebraica $V \subset \mathbb{P}^k$ es llamada *variedad excepcional* si $f^{-1}(V) = V$.

En esta sección veremos el caso en que V es una hiperficie.

Observación 29. Supongamos que se tenga una hipersuperficie excepcional V, como V tiene un número finito de componentes irreducibles y cada componente irreducible es llevada en una componente irreducible tenemos que existe n tal que f^n lleva cada componente en si misma, entonces cualquier componente irreducible es una variedad excepcional de alguna f^n .

Teorema 38. Sean V_i $i = 1, 2, \ldots, r$ las componentes irreducibles de una variedad excepcional de la aplicación holomorfa $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ de grado al menos dos, si los V_i son ceros de polinomios irreducibles h_i entonces $\sum grado(h_i) \leq k + 1$. En particular existen a lo más $k + 1$ componentes irreducibles del conjunto excepcional, y si existen $k + 1$ todos los h_i han de ser lineales.

La prueba de este Teorema requerirá del siguiente Lema.

Lema 3. Sea X es una hipersuperficie excepcional de $f \in \mathcal{H}_d$.
Si $X = \{z \in \mathbb{P}^k : h(z) = 0\}$ donde h es un polinomio homogéneo irreducible entonces existe una constante c tal que h, f satisfacen la ecuación funcional de Böttcher $h \circ f = ch^d$.

Prueba. Puesto que X es totalmente invariante el polinomio $h \circ f$ sólo se anula en $\widetilde{X}$ la preimagen de X en $\mathbb{C}^{k+1}$, por medio de la aplicación natural $\pi : \mathbb{C}^{k+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^k$ y como el grado de la composición es $deg(h)d$, entonces la ecuación es válida.

Ahora si estamos en condiciones de probar el Teorema.
Prueba. Sea $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{P}^k$ la proyección natural, denotaremos por $\widetilde{V_i}$ la hipersuperficie compleja homogénea irreducible que es la preimagen de V_i por medio de π, nosotros podemos escribir

$$\widetilde{V_i} = \{h_i(z_0, \ldots, z_k) = 0\}$$

donde h_i es un polinomio irreducible. Ahora un conjunto excepcional dado por $h = h_1 \cdots h_r = 0$ es parte del conjunto de puntos críticos de f, esto se obtiene derivando la relación $h \circ f = ch^d$ obtenida en el Lema 3, tenemos así que el Jacobiano de f tiene como factor a $(\prod h_i)^{d-1}$, y por el Teorema 34 sabemos que el conjunto de puntos críticos tiene grado a lo más $(k+1)(d-1)$. Por lo tanto $\sum \text{grado}(h_i) \leq k + 1$.

Teorema 39. El conjunto de aplicaciones holomorfas sin hipersuperficies excepcionales es abierto en la topología de Zariski de $\mathcal{H}_d$.

Prueba. Identificando los polinomios homogéneos h de grado $l \leq k + 1$ con el espacio proyectivo asociado a sus coeficientes $\mathbb{P}^{N_l}$, nosotros definimos la subvariedad algebraica

$$\Sigma_l = \{(f, h) \in \mathcal{H}_d \times \mathbb{P}^{N_l} / h \circ f = ch^d, \text{ para algún } c \in \mathbb{C}\}.$$

De el Lema 3, observamos que si f tiene una variedad excepcional entonces el par (f,h) está en Σ_l para alguna h y para algún $l \leq k+1$, por el Teorema de la Aplicación Propia la proyección de Σ_l en $\mathcal{H}_d$ es un conjunto analítico en particular un conjunto cerrado, entonces el cojunto de las aplicaciones que no tienen a $h=0$ como hipersuperficie excepcional es abierto, y como la unión arbitraria de abiertos es abierto se concluye.

3.5 Conjuntos Excepcionales en $\mathbb{P}^2$

Ahora discutiremos las diferentes posibilidades del conjunto excepcional en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$.

Teorema 40. Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una aplicación holomorfa de grado d, y sea E su conjunto excepcional.

1. Si el E contiene 1 línea compleja excepcional entonces existen coordenadas homogéneas $[z : w : t]$ de $\mathbb{P}^2$ tal que

   $$f([z : w : t]) = [f_0([z : w : t]) : f_1([z : w : t]) : t^d]$$

   donde $f_0([z : w : 0])$ y $f_1([z : w : 0])$ tienen términos de grado d no degenerados.

2. Si el E contiene 2 líneas complejas excepcionales entonces existen coordenadas homogéneas $[z : w : t]$ de $\mathbb{P}^2$ tal que

   $$f([z : w : t]) = [f_0([z : w : t]) : w^d : t^d]$$

   donde $f_0([z : 0 : 0]) = z^d$.

3. Si el E contiene 3 líneas complejas excepcionales entonces existen coordenadas homogéneas $[z : w : t]$ de $\mathbb{P}^2$ tal que

   $$f([z : w : t]) = [z^d : w^d : t^d].$$

Prueba. 1.- Primero supongamos que el conjunto excepcional es dado por una línea, esta línea por un cambio de coordenadas lineales podemos suponer que es dada por $\mathbb{L}_\infty = \{[z : w : t] \in \mathbb{P}^2 : t = 0\}$ que es la línea infinito, si escribimos f en coordenadas homogéneas

$$f([z : w : t]) = [f_0([z : w : t]) : f_1([z : w : t]) : f_2([z : w : t])]$$

entonces $f_2([z:w:0])=0$, de ahí $f_2([z:w:t])=t^r g([z:w:t])$, donde $g([z:w:t])$ es un polinomio de grado $d-r>0$. Si $g[z:w:0]\neq 0$ se tendría $f^{-1}(\mathbb{L}_\infty)=\{[z:w:t]\in\mathbb{P}^2 : g([z:w:t])=0\}\cup\mathbb{L}_\infty$, luego $\mathbb{L}_\infty$ no sería un conjunto excepcional, así la única posibilidad es que $f_3([z:w:t])=t^d$.

Nuevamente puesto que $f(\mathbb{L}_\infty)=\mathbb{L}_\infty$, se tiene que f_0 y f_1 en las coordenadas afines $t=1$ son polinomios, escribamos

$$f_i=\sum_{j=0}^{d}P_{ij}(x,y)$$

donde P_{ij} son polinomios homogéneos de grado j en las variables (x,y). Veamos que $P_{id}\not\equiv 0$ para ello cambiemos las coordenadas $u=\frac{1}{x}$ y $v=\frac{y}{x}$. Entonces tenemos

$$f_i=\sum_{j=0}^{d}u^{d-j}P_{ij}(1,v)$$

Pero como $\mathbb{L}_\infty=\{(u,v)\in\mathbb{C}^2 : u=0\}$ es invariante por f y $f_i(0,v)=P_{id}(0,v)$ debe cumplirse que P_{id} debe ser no nulo, así ambos P_{id} tienen que ser no nulos, sino existiría otra recta en la imagen de $\mathbb{L}_\infty$ por medio de f, luego la aplicación tendrá la forma $[z:w:t]\to[f_0:f_1:t^d]$ donde los polinomios $f_0(z,w,0)$ y $f_1(z,w,0)$ tienen términos de grado d.

2.- Para el caso que la variedad excepcional tenga dos líneas que por un cambio de coordenadas lineales podemos suponer que son dadas justamente por $t=0$, $w=0$ y razonando como en la parte 1, f_1 tendrá la forma w^d así la función será $[f_0:w^d:t^d]$, donde f_0 tiene término de grado d no nulo.

3.- Por último consideremos el caso cuando las variedades excepcionales contienen tres líneas, dos de esas rectas pueden ser descritas por las ecuaciones $t=0$ $w=0$. Veamos que no es posible que las tres rectas se interceptan en un punto. Supongamos que las tres rectas se interceptan en un punto y sea este punto $[1:0:0]$, escribamos la tercera línea en coordenadas homogéneas $a.z+b.w+c.t=0$ como el punto $[1:0:0]$ esta en la línea resulta que $a=0$ por tanto la ecuación de esta línea en la coordenada afín $t=1$ es dada por $w=\alpha$, $(\alpha=\frac{-c}{b})$ esto contradice que la línea es excepcional, dado que todas las raíces de $w^d=\alpha^d$ definen líneas en la preimagen tendríamos que la linea no sería excepcional, así las líneas sólo se interceptan en pares, por tanto podemos asumir que las líneas son : $z=0$, $w=0$ y $t=0$, de aquí se tiene que la función $f_0=z^d$.

Teorema 41. Para $d \geq 2$ el conjunto $\widetilde{\mathcal{H}}_d$ de aplicaciones holomorfas f de $\mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ que no tienen conjunto excepcional finito es abierto no vacío en la topología de Zariski del conjunto abierto $\mathcal{H}_d$.

Prueba. Veamos para el caso $E = \{a\}$. Sea $f \in \mathcal{H}_d$ que tiene a E como conjunto excepcional, entonces $\{z \in \mathbb{P}^k : f(z) = a\} = \{a\}$, así

$$\phi_i(E) = \{f \in \mathcal{H}_d : f(a) = a\}$$

$\phi_i(E)$ es el conjunto de funciones que tienen a E como conjunto excepcional, este conjunto es claramente es cerrado en $\mathcal{H}_d$ y no puede ser todo, pues tenemos que la función $[x^d : y^d : z^d]$ no tiene un único punto excepcional. En efecto, si consideramos $a = [a_o : a_1 : a_2]$ como punto excepcional tenemos las ecuaciones $x_i^d = a_i$, para que estas ecuaciones tengan una única solución debe cumplirse $a_i = 0$; luego el complemento del conjunto anterior es abierto y no vacío en la topología de Zariski.
Este razonamiento puede ser hecho para todo $E \subset \mathbb{P}^k$ finito.

Observación 30. En $\mathbb{P}^1$ los conjuntos excepcionales de una aplicación holomorfa $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ siempre están en el conjunto de Fatou; sin embargo para aplicaciones holomorfas definidas en espacios proyectivos de dimensión mayor o igual a 2 esto no es verdad, como será apreciado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 17. Sea $f([z : w : t]) = [w^d + \lambda z t^{d-1} : z^d : t^d + P(z, w)]$ donde P es un polinomio homogéneo de grado d, tenemos que $p = [0 : 0 : 1]$ es un punto excepcional pues $f^{-1}(p) = p$.
Si $|\lambda| > 1$ entonces p esta en el conjunto de Julia de f, puesto que los autovalores de $f'(p)$ son λ y 0.

Existe una cota para el número de elementos de un conjunto excepcional finito de las aplicaciones dadas en $\mathcal{H}_d$.

Teorema 42. Existe una constante $c(d) \in \mathbb{N}$, tal que para cualquier $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $f \in \mathcal{H}_d$ con conjunto excepcional finito, entonces dicho conjunto excepcional tendrá a lo mas $c(d)$ elementos.

Prueba. Podemos suponer que $d \geq 3$, en efecto si $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ y $f \in \mathcal{H}_2$ cuyas coordenadas homogéneas son $[f_0 : f_1 : f_2]$ con conjunto excepcional finito E, entonces $g = f \circ f$ tiene conjunto excepcional conteniendo el de

f, por tanto si es que existe $c(4)$ tendrá que ser mayor a $c(2)$. El grado topológico de f es d^2 y un punto excepcional tiene una sola preimagen por esta razón todo punto excepcional esta en el conjunto crítico.

Consideremos primero el caso en que el punto excepcional p es un punto regular del conjunto crítico C, y $f(p)$ es un punto regular de $f(C)$ como el conjunto de valores regulares forma una variedad podemos tomar dos parametrizaciones locales $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = (z, w)$ $\phi = (\phi_1, \phi_2) = (u, v)$ tal que $\varphi(p) = (0,0)$, $\varphi(f(p)) = (0,0)$, $C : w = 0$, $f(C) : v = 0$ y f en esas coordenadas se escribe

$$\phi \circ f \circ \varphi(z, w) = (z, w^l)$$

para algún $l > 0$.
Del Teorema 34 el grado del conjunto crítico es $3(d-1)$ de donde tenemos que $l - 1 \leq 3(d-1)$, luego $l < d^2$ si es que $d \geq 3$. Por lo tanto p no podrá ser excepcional en consecuencia p es un punto singular de C o $f(p)$ es un valor singular de $f(C)$. Como el grado de $f(C)$ es a lo más $3d(d-1)$, para cualquier f el número de puntos singulares de C o de $f(C)$ es acotado, luego por el Teorema de Bezout y lo anterior concluye la demostración del Teorema.

Capítulo 4

Hiperbolicidad en el sentido de Kobayashi

Caratheodory en 1926 define una métrica (vea la definición 35) que generaliza la Hiperbólicidad de las superficies de Riemann de género mayor o igual a 2. Para dimensión mayor esta definición está basada en el espacio $\mathcal{O}(M, \mathbb{D})$. El problema de este espacio se hacia evidente cuando M es compacto pues en este caso aquel espacio se reducía a las funciones constantes.

Ahlfors en 1938 generaliza el Lema de Schwarz-Pick :

Toda función holomorfa f del disco unitario $\mathbb{D}$(con la métrica de Poincaré) sobre una superficie de Riemann S con una métrica hermitiana ds_S^2 de curvatura negativa decrece en distancia, esto es $f^*ds_S^2 \leq ds_{\mathbb{D}}^2$.

Aproximadamente en 1967, Kobayashi inspirado en el trabajo de Ahlfors propone modificar la métrica de Caratheodory basado en el espacio de funciones $\mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$. El motivo principal de este concepto es generalizar el Pequeño Teorema de Picard (toda función holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ es constante). La utilidad de la Hiperbolicidad de Kobayashi en dinámica de iteraciones de aplicaciones holomorfas es recuperar en cierta forma el Teorema de Montel, y es la forma como lo utilizan Fornaess y Sibony.

Empezaremos definiendo la métrica hermitiana, luego recordaremos la métrica de Lobachevski y sus principales propiedades, después definimos la semimétrica de Kobayashi y la variedad es Hiperbólica kobayashi, estudiaremos además las principales propiedades de esta métrica y daremos varios ejemplos.

Enfatizamos la Hiperbólicidad en el sentido de Brody por ser un problema de actualidad y una fuente de ejemplos de variedades hiperbólicas.

Posteriormente definimos el encaje hiperbólico de una variedad, este concepto es mucho mas fuerte que la Hiperbólicidad como veremos por medio de propiedades y ejemplos. Terminamos el Capítulo estudiando los principales resultados que utilizaremos en el capítulo 5, ellos son los Teoremas de Green que darán condiciones suficientes para garantizar que el complemento de una unión de hipersuperficies bajo algunas condiciones geométricas, es un espacio hiperbólico completo.

Todo el contenido de este Capítulo sigue de cerca los tratamientos seguidos en los excelentes textos de Espacios Hiperbólicos [K1], [K2], Lang [L2] y Shabat [S].

4.1 Kobayashi Hiperbólicidad

Comencemos esta sección definiendo y dando las primeras nociones de métrica hermitiana.

Definición 31. Sea V un espacio vectorial complejo, un *producto interno hermitiano* es una aplicación $H : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. H es lineal respecto a la primera variable.
2. $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$ *para todo* $v, w \in V$.
3. $H(v, v) > 0$ *para todo* $v \in V - \{0\}$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V, luego para $v = \sum v_j e_j$, $w = \sum w_k e_k$ y $h_{jk} = H(e_k, e_j)$ tenemos que $H(v, w) = \sum_{j,k} h_{jk} v_j \bar{w}_k = \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k(v, w)$

$$H = \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k.$$

Si escribimos $H = f + ig$ de la condición 2, se tiene que

$$f(v, w) = f(w, v) \quad \text{y} \quad g(v, w) = -g(w, v).$$

Como $g = \frac{1}{2i}(H - \bar{H})$

$$g(v, w) = \sum_{j,k} h_{jk}(v_j \bar{w}_k - w_j \bar{v}_k) = \frac{1}{2i} \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k(v, w)$$

$$g = \frac{1}{2i} \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

es una (1,1) forma.
Por otro lado $f = \frac{1}{2}(H + \bar{H})$ es un producto interno euclidiano.

Ejemplo 18. La métrica Hermitiana usual en el espacio $\mathbb{C}^n$ es definida como $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ donde $H(z, w) = \sum z_j \bar{w}_j = \sum dz_j \otimes d\bar{z}_j(v, w)$ o simplemente $H(v, w) = \sum dz_j d\bar{z}_j(v, w)$, descomponiendo $H = f + ig$ tenemos que

$$g = -\frac{1}{2i} \sum_{j,k} dz_j \wedge d\bar{z}_k \quad \text{y} \quad g^n = g \wedge \ldots \wedge g = k\Omega,$$

donde Ω es la forma de volumen usual en $\mathbb{C}^n$ y $k \in \mathbb{C}$ es una constante adecuada.

Sea M una variedad compleja n dimensional sabemos que TM_p es un espacio vectorial de dimensión real $2n$ con base $\{\partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_n, \partial y_1, \ldots, \partial y_n\}$. Considerando la base $\{(\partial x_1, 0), (\partial x_2, 0), \ldots, (\partial x_n, 0), (\partial y_1, 0), \ldots, (\partial y_n, 0)\}$ que seguiremos denotando por:

$$\{\partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_n, \partial y_1, \ldots, \partial y_n\}$$

obtenemos una estructura vectorial compleja de dimensión $2n$ denotada por TM_p^c, una base alternativa y mas usada es dada por:

$$\partial z_j = \frac{1}{2}(\partial x_j - i\partial y_j).$$

$$\partial \overline{z}_j = \frac{1}{2}(\partial x_j + i\partial y_j).$$

denotaremos por $dz_j, d\overline{z}_j$ sus respectivas funcionales lineales y por $TM_p^{1,0}$ y $TM_p^{0,1}$ los espacios vectoriales generados por $\langle \partial z_i \rangle$ y $\langle \partial \overline{z}_i \rangle$ respectivamente. El espacio vectorial complejo $2n$ dimensional $TM_p^c = TM_p^{1,0} \oplus TM_p^{0,1}$ es llamado el *complexificado* de TM_p, para el caso de una variedad compleja el mismo TM_p tiene estructura compleja, considerando la aplicación J como el producto por $i = \sqrt{-1}$. Existe un isomorfismo natural entre TM_p y $TM_p^{1,0}$ dado por:

$$\partial x_i \longrightarrow \partial z_i.$$

Definición 32. Sea M una variedad compleja, una *métrica hermitiana* en M es una aplicación que a cada punto $p \in M$ le asigna un producto interno hermitiano en TM_p, que localmente se puede expresar como $H(p) = \sum h_{i,j}(p) dz_i \otimes d\bar{z}_j$, donde $h_{i,j}(p)$ es una matriz hermitiana definida positiva y además $h_{i,j}$ es diferenciable en una vecindad de p.

Proposición 6. Toda variedad compleja admite métrica hermitiana.

Prueba. Sea M una variedad compleja n dimensional $p \in M$ y consideremos una parametrización (f_i, U_i) .
En $\mathbb{C}^n$ tenemos la métrica hermitiana usual $<,>$ esto nos permite definir una métrica en U_i dada por:

$$H_i(p)(u,v) =< f_i'(p)u, f_i'(p)v >$$

donde $u, v \in TM_p$, consideremos ahora una partición de la unidad $\{\lambda_i\}$ subordinada al cubrimiento (U_i, f_i) y definimos $\Phi_i(p) = \lambda_i H_i(p)$ esta aplicación es una métrica hermitiana en el interior del soporte de λ_i y fuera de el se anula.
A partir de esto obtenemos una métrica global dada por $\phi(p) = \Sigma_i \Phi_i(p)$, de la definición tenemos que ϕ es antisimétrica y lineal respecto a la primera variable, además si $p \in M$ entonces estaría en el soporte de algún λ_i así tenemos que $\Phi_i(p)(v,v) > 0$, por tanto $\phi(p)(v,v) > 0$.

Es costumbre denotar la forma cuadrática definida por la métrica hermitiana por:

$$ds^2_M(p)(v) = H(p)(v,v).$$

La métrica hermitiana define una distancia. Sean $p, q \in M$ definimos

$$d(p,q) = \inf\{l(\alpha) : \alpha \text{ es una curva que une } p \text{ a } q\}$$

donde $\alpha : [0,1] \to M$ es regular a trozos en la partición: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ definimos:

$$l(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{ds^2_M(\alpha(p))\alpha'(t)} dt.$$

Ejemplo 19. Sobre el disco $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ tenemos definida la métrica de Poincaré.

$$ds^2_r(p) = \frac{4r^2 dz d\bar{z}}{(r^2 - |p|^2)^2}.$$

La distancia inducida por esta métrica hermitiana es llamada la distancia *hiperbólica* o de *Lobachevski* dada por:

$$\rho(z,w) = \ln \frac{|1+\overline{w}z| + |z-w|}{|1+\overline{w}z| - |z-w|},\ donde\, z,\ w \in \mathbb{D}_r.$$

Mediante el biholomorfismo $z \to Rz$ podemos definir una métrica en un disco de radio R.
Debemos recalcar también que a partir de la forma cuadrática $ds_r^2(z)(v) = E(z)v_1^2 + F(z)v_2^2$, donde $v = (v_1, v_2) \in T_p\mathbb{D}$ y $E = G = \frac{4r^2}{(r^2-|z|^2)^2}$ podemos calcular la curvatura

$$K(p) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\right)_y + \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}}\right)_x\right\} = -1.$$

Veamos un par de propiedades fundamentales de la distancia de Lobachevski.

Proposición 7. La distancia ρ verifica las siguientes propiedades:

1. Toda función holomorfa $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ contrae distancia, esto es

$$\rho(g(z), g(w)) \leq \rho(z,w).$$

   En particular si g es un biholomorfismo entonces preserva distancia.

2. El espacio métrico $(\mathbb{D}, \rho)$ es completo.

Prueba. La primera parte es consecuencia del Teorema de Schwarz-Pick [L2] página 13.

Para la segunda afirmación empezaremos viendo que una sucesión converge en la métrica ρ si y sólo si converge en la métrica euclidiana $|\,.\,|$ de $\mathbb{R}^2$. En efecto de la definición de ρ tenemos que ella es continua, luego si $|z_n - a| \to 0$, entonces $\rho(z_n, a) \to 0$, esto prueba una implicación.
Para el otro caso supongamos que $\rho(z_n, a) \to 0$, por una conjugación podemos suponer que a es 0, por lo tanto tenemos $\log \frac{1+|z_n|}{1-|z_n|} \to 0$ y esto implica que $|z_n| \to 0$.
Finalmente consideremos la suceción z_n la cual es de *Cauchy* en el disco con respecto a la métrica ρ, esto es, dado $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(z_n, z_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_0$, en particular tenemos que $\rho(z_n, z_{n_o}) < \epsilon$ para $n \geq n_0$, por tanto la sucesión $\rho(0, z_n)$ esta acotada, consideremos S el

supremo del conjunto de los términos de esta sucesión de la definición de ρ tenemos que:

$$|z_n| \leq \frac{e^S - 1}{e^S + 1} < 1.$$

Por lo tanto existe una subsucesión z_{n_k} la cual converge en $|\,.\,|$ a un punto $a \in \mathbb{C}$ en $\overline{\mathbb{D}_{\frac{e^S-1}{e^S+1}}} \subset \mathbb{D}$ y por la parte (1) existe k_0 tal que $k \geq k_0$ implica que $\rho(z_{n_k}, a) < \epsilon$ para $k \geq k_0$, consideramdo $n_k \geq n_0$ tenemos que

$$\rho(z_n, a) \leq \rho(z_n, z_{n_k}) + \rho(z_{n_k}, a) < 2\epsilon.$$

$\square$

Ejemplo 20. Para construir una métrica hermitiana sobre $\mathbb{P}^n$, es natural pensar inducir una métrica de $\mathbb{C}^{n+1}$ en $\mathbb{P}^n$ por la proyección.

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^n \end{array}$$

En $\mathbb{C}^{n+1}$ tenemos la métrica $H = \sum dz_j \otimes d\bar{z}_j$ para llevarla a $\mathbb{P}^n$ necesitamos que no dependa del representante de la clase a la cual pertenece, para esto adaptamos la métrica anterior para que tenga esta propiedad.

La forma mas simple de expresar dicha métrica, a la cual continuaremos denotando por H es:

$$H(z) = \sum \frac{1}{|z|^2} dz_j \otimes d\overline{z}_j.$$

Así, $H(\lambda z) = H(z)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, donde

$$H = f + ig : \mathbb{P}^n \to (T\mathbb{P}^n)^* \otimes (\overline{T\mathbb{P}^n})^*.$$

En coordenadas $u_0 = 1$, esto es en la carta $\varphi_0(1, u_1, \ldots, u_n) = [1 : u_1 : \ldots : u_n]$ tendremos que:

$$\begin{aligned} \varphi_0^* g &= dd^c ln(1 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2) \\ &= \frac{\sum du_j \wedge d\overline{u}_j}{(1 + \sum u_j \overline{u}_j)^2} - \frac{(\sum \overline{u}_i du_i) \wedge (\sum u_i \overline{u}_i)}{(1 + \sum u_i \overline{u}_i)^2}. \end{aligned}$$

Esta métrica es llamada *métrica de Study-Fubini.*

4.2 Semidistancia de Kobayashi

Definición 33. Fijemos dos puntos $p, q \in M$.

1. Una *cadena* en M de p a q es una familia $\sigma = \{f^j, (\xi_j', \xi_j'')\}$, donde $j \in \{1, ..., m\}$, $m \in I\!N$, $f^j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$ y $(\xi_j', \xi_j'') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ son tales que.
$$f^1(\xi_1') = p, \quad f^m(\xi_m'') = q \quad y \quad f^j(\xi_j'') = f^{j+1}(\xi_{j+1}'),$$
para $j = 1, \ldots, m-1$.

2. La *longitud de una cadena* $\sigma = \{f^j, (\xi_j', \xi_j'')\}$ es por definición el número
$$l(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_j', \xi_j'')$$
donde ρ es la distancia de Lobachevski en $\mathbb{D}$.

3. La *semidistancia de Kobayashi* entre los puntos $p, q \in M$ es dada por
$$K_M(p, q) = \inf\{l(\sigma) : \sigma = \{f^j, (\xi_j', \xi_j'')\} \text{ es una cadena de } p \text{ a } q\}.$$

Ejemplo 21. En $\mathbb{D}$ se cumple que $K_{\mathbb{D}}(x, y) = \rho(x, y)$. En efecto tomando la identidad de $\mathbb{D}$ tenemos que $K_{\mathbb{D}} \leq \rho$, por otro lado si consideramos una cadena $\{f^j, (\xi_j', \xi_j'')\}$ cualquiera en $\mathbb{D}$ de x a y tendremos que.
$$\rho(x, y) \leq \sum_{j=1}^{m} \rho(f_j(\xi_j'), f_j(\xi_j'')) \leq \sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_j', \xi_j'').$$
La primera desigualdad es la desigualdad triangular, mientras que la segunda desigualdad es consecuencia del Teorema Schwarz-Pick. $\square$

Ejemplo 22. En el plano tenemos que $K_{\mathbb{C}}(x, y) = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{C}$. En efecto, si $x \neq y$ considere un $n_0 \in I\!N$ de modo que $n_0 > |x| + |y|$ claramente $\mathbb{D}_{n_0}$ contiene x y $y - x$. Ahora considere para todo $n \in I\!N$ las aplicaciones holomorfas
$$\begin{array}{ccccc} f_n : \mathbb{D} & \stackrel{nI}{\rightarrow} & \mathbb{D}_n & \stackrel{I+x}{\rightarrow} & \mathbb{C} \\ z & \rightarrow & nz & \rightarrow & nz + x \end{array}$$
por la definición de los f_n tenemos $f_n(0) = x$ y $f_n(\frac{y-x}{n}) = y$.
Como $K_{\mathbb{C}}(x, y) \leqslant \rho(\frac{y-x}{n}, 0) = ln\dfrac{1+ \mid \frac{y-x}{n} \mid}{1- \mid \frac{y-x}{n} \mid}$, tenemos que $K_{\mathbb{C}}(x, y) = 0$. $\square$

Veamos algunos resultados básicos de esta semimétrica.

Teorema 43. En cualquier variedad compleja M la semidistancia de *Kobayashi* posee las propiedades de semimétrica.

Prueba. Que K_M sea positiva es consecuencia directa de su definición; para la desigualdad triangular tenemos que si σ_1 es una cadena de p a q y σ_2 es una cadena de q a r entonces la unión de ambas cadenas σ será una cadena de p a r, luego por la desigualdad triangular de ρ y propiedades del ínfimo se tiene la desigualdad triangular de K_M. □

Veamos ahora uno de los principales motivos por el cual se define esta semimétrica.

Teorema 44. Toda aplicación holomorfa $f : M \to N$ contrae semidistancia de Kobayashi, esto es:

$$K_N(f(p), f(q)) \leq K_M(p, q).$$

Prueba. Basta ver que la aplicación f induce por medio de la composición una aplicación $\mathcal{O}(\mathbb{D}, M) \to \mathcal{O}(\mathbb{D}, N)$. □

Proposición 8. La semimétrica de Kobayashi es continua.

Esta prueba es bien técnica, una demostración puede ser encontrada en [L2] página 17.

Observación 31. Algunas consecuencias inmediatas del Teorema 44 son:

1. La semidistancia de Kobayashi es invariante bajo aplicaciones biholomorfas.

2. Si M y N son variedades holomorfas con $M \subset N$ entonces $K_N \leq K_M$. Para esto tome la inclusión $i : M \to N$ en el Teorema.

3. Si $f : \mathbb{D} \to M$ entonces tenemos que $K_M(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$.
   Veamos ahora que K_M es la mayor semimétrica con esta propiedad.

Proposición 9. Si d es una *semimétrica* en M tal que $d(f(\xi'), f(\xi'')) \leq \rho(\xi', \xi'')$ para todas las aplicaciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to M$ entonces

$$d(p, q) \leq K_M(p, q)$$

para todo $p, q \in M$.

Prueba. Sea $\sigma = \{f^j, (\xi_j', \xi_j'')\}$ una cadena en M de p a q por la desigualdad triangular tenemos que $d(p,q) \leq \sum_{j=1}^{m} d(f^j(\xi_j'), f^j(\xi_j''))$ y por hipótesis tenemos que f^j no incrementa la distancia, es decir

$$d(f^j(\xi_j'), f^j(\xi_j'')) \leq \rho(\xi_j', \xi_j'')$$

para todo j, luego tomando el ínfimo a las desigualdades anteriores se tiene la afirmación. $\square$

Se puede extender la definición de semidistancia de Kobayashi de modo natural al producto de variedades.

Definición 34. Sean M y N variedades complejas, definimos

$$K_{M\times N}((x,y),(x',y')) = \max\{K_M(x,y), K_N(x',y')\}.$$

Definición 35. Dados dos puntos $p, q \in M$ la *semidistancia de Caratheodory* entre p y q es definido por

$$C_M(p,q) = \sup_{\phi\in\mathcal{O}(M,\mathbb{D})} \rho(\phi(p), \phi(q)),$$

donde ρ es la distancia de *Lobachevski.*

Tenemos que esta semimétrica está relacionada con la de Kobayashi por.

Proposición 10. En cualquier variedad compleja la semidistancia de *Caratheodory* no excede a la semidistancia de Kobayashi.

Prueba. Como en la definición de la semimétrica K_M elegimos puntos $p = p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k = q$ en M, $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ puntos en $\mathbb{D}$ y funciones $f_i : \mathbb{D} \to M$ con la condición de que $f_i(a_i) = p_{i-1}$ y $f_i(b_i) = p_i$, si f es una aplicación holomorfa de M en $\mathbb{D}$ entonces tenemos que:

$$\sum \rho(a_i, b_i) \geq \sum \rho(f\circ f_i(a_i), f\circ f_i(b_i)) \geq \rho(f\circ f_1(a_1), f\circ f_k(b_k)) = \rho(f(p), f(q))$$

de donde $C_M(p,q) \leq K_M(p,q)$. $\square$

Definición 36. Una variedad compleja es *Hiperbólica en el sentido de Kobayashi* si la semimétrica de Kobayashi es realmente una métrica, esto es $K_M(p,q) > 0$ si $p \neq q$.

Observación 32. Toda subvariedad M de una variedad hiperbólica N hereda esta propiedad. En efecto sean $p, q \in M$ tal que $K_M(p,q) = 0$. De la Observación (31) tenemos que $0 \leq K_N \leq K_M$ lo que implica $K_N(p,q) = 0$. Entonces por ser N hiperbólica tenemos $p = q$.

La propiedad de hiperbolicidad es invariante por biholomorfismos.

Ejemplo 23. Todo disco $\mathbb{D}_r$ es hiperbólico en el sentido de Kobayashi, esto es consecuencia del Ejemplo (21).

Ejemplo 24. El plano complejo $\mathbb{C}$ no es hiperbólico Kobayashi, esto es consecuencia del Ejemplo (22).

Ejemplo 25. El plano complejo menos un punto $\mathbb{C} - \{p\}$ no es hiperbólico. Por una traslación podemos suponer que $\mathbb{C} - \{p\}$ es $\mathbb{C} - \{0\}$ pero ahí tenemos la aplicación $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ holomorfa y sobreyectiva que relaciona el espacio en mención con el Ejemplo (24). Tome $x, y \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces existen $x', y' \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(x') = x$ y $\exp(y') = y$ y por el Teorema 44 $0 \leq K_{\mathbb{C}-\{0\}}(x,y) \leq K_{\mathbb{C}}(x', y') = 0$.
En cambio si quitamos dos puntos a $\mathbb{C}$ veremos que si es hiperbólico, pues su cubrimiento sería el disco unidad y mas adelante veremos que un espacio es hiperbólico si y solo si su cubrimiento tiene esta propiedad.

Ejemplo 26. El espacio proyectivo unidimensional $\mathbb{P}^1$ no es hiperbólico. En efecto, si fuese hiperbólico de la observación (32) el conjunto $\{[z_1 : 1] \in \mathbb{P}^1 : z_1 \in \mathbb{C}\}$ sería hiperbólico, y como este espacio es biholomorfo a $\mathbb{C}$ tendríamos que $\mathbb{C}$ sería hiperbólico.

Ejemplo 27. Procediendo como en el Ejemplo (26) tendremos que si a $\mathbb{P}^2$ le quitamos hasta 3 rectas linealmente independientes (ver la Definición 39 para precisar este concepto) tendremos que los conjuntos resultantes no serían hiperbólicos, ya que tienen dentro una copia de $\mathbb{C} - \{0\}$, si no fuesen linealmente independientes podríamos quitar infinitas rectas por ejemplo $L_n = \{[z_1 : z_2 : 1] \in \mathbb{P}^2 : z_2 = n\}$ y el espacio resultante continuaría siendo no hiperbólico, dado que $\mathbb{P}^2 - \cup L_n$ tiene una copia de $\mathbb{C}$.

Observación 33. De la definición de semimétrica producto tenemos que el producto de variedades hiperbólicas es hiperbólica, de esto y del hecho que $\mathbb{D}$ es Kobayashi hiperbólico tenemos que todo dominio acotado de $\mathbb{C}^n$ es Kobayashi hiperbólico.

De los ejemplos anteriores el complementar de uno o dos puntos en $\mathbb{P}^1$ no es hiperbólico, lo mismo pasa con el complementar en $\mathbb{P}^2$ de tres rectas en posición general; que pasaría si quitamos mas de dos puntos a $\mathbb{P}^1$, y si quitamos mas de tres rectas en posición general a $\mathbb{P}^2$. Más adelante responderemos esta preguntas.

4.3 Invariancia por Cubrimientos

Definición 37. Sean M y N espacios topológicos. Diremos que M es un *cubrimiento* de N si existe una aplicación continua $\pi : M \to N$ tal que para cada abierto U en N tendremos que $\pi^{-1}(U) = \cup_i U_i$ y además $\pi|_{U_i} : U_i \to U$ es un homeomorfismo.

Se debe tener presente que este concepto es mucho mas fuerte que el homeomorfismo local, además de la propia definición todo recubrimiento es necesariamente sobreyectivo.
Debemos recalcar que si un espacio N es localmente conexo por caminos entonces siempre tiene *cubrimiento* ver [Ot] página 32.

Definición 38. Sean M, N y X espacios topológicos y $f : M \to N$ una aplicación continua. La aplicación continua $F : M \to X$ es un *levantamiento* de f por medio del recubrimiento $\pi : X \to N$ si y solo si $f = \pi \circ F$.

Teorema 45. Sea $f : U \to V$ continua, U simplemente conexo, conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sea $g : M \to V$ aplicación recubridora.
Dados $p \in U$, $q \in M$ tal que $f(p) = g(q)$ existe un único levantamiento $F : U \to M$ tal que $F(p) = q$.

Para una referencia ver [Ot] páginas 26-27
A continuación veremos que desde el punto de vista de la Hiperbólicidad en el sentido de Kobayashi existe una estrecha relación entre una variedad y su cubrimiento.

Lema 4. Si M es una variedad compleja y $\pi : \widetilde{M} \to M$ un cubrimiento de M entonces para todo $p, q \in M$

$$K_M(p,q) = \inf_{\widetilde{q} \in \pi^{-1}(q)} K_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}), \ \textit{donde } \widetilde{p} \in \pi^{-1}(p) \textit{ es arbitrario.}$$

Prueba. Como $\pi : \widetilde{M} \to M$ es un cubrimiento podemos dotar de una estructura holomorfa al espacio recubridor $\widetilde{M}$ de modo que la aplicación de recubrimiento π se torna holomorfa. Por el Principio de contracción y la sobreyectividad de π tenemos que $K_M(p,q) \leq \inf K_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q})$.
Supongamos ahora que se cumpla la desigualdad estricta, así existe $\epsilon > 0$ tal que $K_M(p,q) + \epsilon < \inf K_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q})$ entonces existe una cadena $\{f^j, (\xi_j', \xi_j'')\}$ en M de p a q tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_j', \xi_j'') < K_M(p,q) + \epsilon$$

denotemos por $\widetilde{f^j}$ el levantamiento de f^j vía π tal que $\widetilde{f^j}(\xi_1') = \widetilde{p}$ donde p es un punto fijado y $\widetilde{f^{j+1}}(\xi_{j+1}') = \widetilde{f^j}(\xi_j'')$ con $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ entonces $\widetilde{q} = \widetilde{f^m}(\xi_m'') \in \pi^{-1}(q)$; así tenemos una cadena $\widetilde{\sigma}$ en $\widetilde{M}$ desde $\widetilde{p}$ hasta $\widetilde{q}$, luego por definición de la métrica de *Kobayashi* tenemos que

$$K_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \leq \sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_j', \xi_j'') < K_M(p,q) + \epsilon$$

lo cual es absurdo. □

Teorema 46. M es hiperbólica si y sólo si su cubrimiento $\widetilde{M}$ es hiperbólico.

Prueba. Supongamos que M es hiperbólico y que $K_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = 0$ entonces por el Lema 4 tendríamos que $K_M(\pi(\widetilde{p}), \pi(\widetilde{q})) = 0$ en vista de la hiperbolicidad de K_M tenemos que $\pi(\widetilde{p}) = \pi(\widetilde{q})$, nosotros denotaremos este punto por p.
Sea $B = \{p' \in M : K_M(p', p) < \epsilon\}$ y $\widetilde{B}$ la vecindad de $\widetilde{p}$ suficientemente pequeña tal que $\pi|_{\widetilde{B}} : \widetilde{B} \to B$ resulta un biholomorfismo, debido a que $K_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = 0$ para todo $\epsilon > 0$ podemos escoger una cadena $\tilde{\sigma} = \{f^j, (\xi_j', \xi_j'')\}$ de $\widetilde{p}$ a $\widetilde{q}$ tal que $l(\tilde{\sigma}) < \epsilon$. La cadena $\tilde{\sigma}$ induce una cadena $\sigma = \{\pi \circ f^j, (\xi_j', \xi_j'')\}$ en M. Por el Principio de Contracción $l(\sigma) \leq l(\tilde{\sigma}) < \epsilon$ y por definición de la métrica de Kobayashi en M podemos suponer que la cadena σ estará en B. Pero el origen $\widetilde{p}$ de la cadena levantada $\tilde{\sigma}$ estará en $\widetilde{B}$, y puesto que $\pi|_{\widetilde{B}}$ es

un biholomorfismo tenemos que la cadena levantada $\tilde{\sigma}$ está en $\widetilde{B}$, entonces $\widetilde{q} \in \widetilde{B}$. Por la inyectividad en $\widetilde{B}$ habrá un sólo punto que es proyectado a p luego $\widetilde{p} = \widetilde{q}$ probando así que $\widetilde{M}$ es hiperbólico.
Supongamos ahora que $\widetilde{M}$ es hiperbólico y que $K_M(p,q) = 0$ tomemos $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ por el Lema (4) tenemos que existe una sucesión $\widetilde{q}_n \in \pi^{-1}(q)$ tal que $K_{\widetilde{M}}(\widetilde{q}_n, \widetilde{p}) \to 0$, entonces por la hiperbolicidad tenemos que $\widetilde{q}_n \to \widetilde{p}$, luego por continuidad tenemos que $q = \lim \pi(\widetilde{q}_n) = \pi(\widetilde{p}) = p$, así M es hiperbólica. □

Observación 34. Usando la prueba del Teorema anterior se puede probar que.
$K_{\tilde{B}}(p,q) = K_B(\pi(p), \pi(q))$, donde $\tilde{B}$ y B son como en la prueba del Teorema.

Ejemplo 28. El Teorema de Uniformación de Riemann [N] página 156 nos dice que toda componente conexa de $\mathbb{P}^1$ menos tres puntos puede ser recubierta por $\mathbb{D}$. Entonces del Teorema 46 y Ejemplo 21 resulta que dichas componentes tienen que ser hiperbólicas en el sentido de Kobayashi.

Definición 39 (Independencia Lineal)**.** Sea $k \leq n+1$ diremos que k hiperplanos $H_i : \Sigma_{j=0}^{n} a_{i,j} x_j = 0$ en $\mathbb{P}^n$, donde $i \in \{0, ..., k\}$, son *linealmente independientes* si los espacios vectoriales en $\mathbb{C}^{n+1}$ que definen dichos hiperplanos son linealmente independientes, es decir los vectores $v_i = (a_{i,0}, ...a_{i,n})$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}^{n+1}$, o equivalentemente los funcionales lineales que definen los vectores v_i son linealmente independientes.

Definición 40 (Posición General)**.** Sean $H_1, \ldots, H_m$ con $m \geq n+1$ hiperplanos en $\mathbb{P}^n$, diremos que están en *posición general* si cualquier grupo de $n+1$ de ellos son linealmente independientes.

Ejemplo 29. En $\mathbb{P}^2$ consideremos los hiperplanos :
$x_0 = 0.$
$x_1 = 0.$
$x_2 = 0.$
$x_0 + x_1 + x_2 = 0.$
Están en posición general pues considerando la combinación lineal:

$$\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 + \lambda(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) = 0,$$

donde los π_i son las proyecciones canónicas resulta que $\alpha = \beta = \lambda = 0$ y es claro que los tres primeros son linealmente independientes entre ellos.

A este caso particular de posición general de hiperplanos se le suele llamar *posición standar.*

Observación 35. De lo anterior tenemos que si $n+1$ hiperplanos en $\mathbb{P}^n$ están en posición general ellos no tienen un punto en común en $\mathbb{P}^n$.
En efecto, que estos hiperplanos están en posición general se traduce en la condición: $det(a_{i,j}) \neq 0$, donde $(a_{i,j})$ es la matriz dada por el sistema de hiperplanos $H_i = 0$. A su vez esta condición implicaría que el sistema homogéneo $H_i = 0$, $0 \leq i \leq n$ sólo tiene solución trivial, esta observación será usada para dar un ejemplo de variedad hiperbólica en $\mathbb{P}^2$.

Ejemplo 30. Consideremos en $\mathbb{P}^2$ cuatro líneas complejas L_j, $j = 1, \ldots, 4$ en posición general y sean $A = L_1 \cap L_2$, $B = L_3 \cap L_4$ y L_0 la línea compleja que pasa por los puntos A y B.
La variedad $M = \mathbb{P}^2 - \cup_{i=0}^4 L_i$ es hiperbólica. En efecto como dos líneas cualquiera son biholomorfas podemos asumir que L_0 es la línea infinito, así tenemos que $\mathbb{P}^2 - L_0 = \mathbb{C}^2$ y $M = \mathbb{C}^2 - \cup_{i=1}^4 L_i$ como A y B son puntos del infinito entonces L_1 es paralelo a L_2 y L_3 es paralelo a L_4 en $\mathbb{C}^2$, ahora por el hecho de estar en posición general de la observación anterior tenemos que L_1 no es paralelo a L_3 por tanto por un cambio de coordenadas podemos asumir que las cuatro rectas son dadas por las ecuaciones $L_1 : z_1 = 0$; $L_2 : z_1 = 1$; $L_3 : z_2 = 0$ y $L_4 : z_2 = 1$. Por lo cual $M = (\mathbb{C} - \{0,1\}) \times (\mathbb{C} - \{0,1\})$ y como el cubrimiento de $\mathbb{C} - \{0,1\}$ es el disco unitario tenemos que $\mathbb{C} - \{0,1\}$ es hiperbólico por tanto M es hiperbólico.

Sean M una variedad compleja, $p \in M$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$ coordenadas locales en M tal que $z(p) = 0$. Denotemos por $B_r = \{q \in M : |z(q)| < r\}$ y $B_1 = B$ vecindades de p, cabe resaltar que las B_r son variedades hiperbólicas pues son biholomorfas a bolas abiertas acotadas de $\mathbb{C}^n$, sigamos denotando $\mathbb{D}_\delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \delta\}$ y $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}$ los discos de radio δ y 1 en $\mathbb{C}$.

Lema 5. Sean $r > 0$ y $1 > \delta > 0$ tal que para todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to M$ que verifican la condición $f(0) = p \in B_r$, se tiene que $f(\mathbb{D}_\delta) \subset B$. Entonces para todo $q \in M - B$ la distancia de Kobayashi $K_M(p, q) > 0$.

Prueba. Sea $q \in M - B$ y consideremos la cadena $\sigma = \{f^j, (\xi_j^{'}, \xi_j^{''})\}_{j=1}^m$ en M desde p a q. Por una conjugación en el disco $\mathbb{D}$ podemos suponer que todos $\xi_j^{'} = 0$, por tanto sólo necesitamos mostrar que la suma $|\sigma| = \sum_{j=1}^m \rho(0, \xi_j^{''})$ sea acotada inferiormente por una constante positiva. Si en la cadena existe un punto $\xi_j^{''}$ que no esta en $\mathbb{D}_{\frac{\delta}{2}}$ entonces $|\sigma| \geq \rho(0, \frac{\delta}{2}) > 0$ y ya estaría probado; por tanto es suficiente considerar cadenas tal que todos los $\xi_j'' \in \mathbb{D}_{\frac{\delta}{2}}$. Consideremos $p_j = f^j(\xi_j'') = f^{j+1}(0)$, existe un número $1 \leq l \leq m$ tal que $p_1, \ldots, p_{l-1} \in B_r$ y p_l no esta en B_r, esto se tiene porque q no esta en B. Puesto que $f^l(0) = p_{l-1} \in B_r$ y $\xi_l'' \in \mathbb{D}_\delta$ entonces por la hipótesis del lema tenemos que $p_l \in B - B_r$, escojamos ahora una constante λ tal que para todo $\xi \in \mathbb{D}_{\frac{\delta}{2}}$ se tenga que $\rho(0,\xi) \geq \lambda\rho_\delta(0,\xi)$, luego por el principio de contracción y la desigualdad triangular tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{m} \rho(0,\xi_j'') \geq \lambda \sum_{j=1}^{m} \rho_\delta(0,\xi_j'') \geq \lambda \sum_{j=1}^{m} K_B(p_{j-1},p_j) \geq \lambda K_B(p,p_l)$$

como K_B es métrica (B es hiperbólica) y $p_l \in B - B_r$ tenemos lo deseado.

Definición 41. Diremos que una variedad hiperbólica M es *completa* si es completa como espacio métrico con la métrica de Kobayashi.

Proposición 11. Sea M una variedad compleja, entonces M es hiperbólica completa si y sólo si su cubrimiento $\tilde{M}$ lo es.

Prueba. Supongamos $\tilde{M}$ es hiperbólico completo y consideremos

$$\tilde{B}_r = \{\tilde{q} \in \tilde{M}/d_{\tilde{M}}(\tilde{p},\tilde{q}) \leq r\}.$$

$$B_r = \{q \in M/d_M(p,q) \leq r\}.$$

con $\pi(\tilde{p}) = p$, como $d_M(p,q) = \inf_{\tilde{q}} d_{\tilde{M}}(\tilde{p},\tilde{q})$ con $\tilde{q} \in \pi^{-1}(q)$ resulta que $B_r \subset \pi(\tilde{B}_{r+\delta})$ donde $\delta > 0$, como $\tilde{B}_{r+\delta}$ es compacto y B_r es cerrado resulta que B_r es compacto, por tanto M completo.
Sea M es hiperbólico completo y $\tilde{p}_i$ una sucesión de Cauchy en $\tilde{M}$, puesto que $d_M(\pi(\tilde{p}),\pi(\tilde{q})) \leq d_{\tilde{M}}(\tilde{p},\tilde{q})$ la sucesión $\{\pi(\tilde{p}_i)\}$ es de Cauchy en M por tanto converge a algún punto $p \in M$, tomemos $\epsilon > 0$ y U una 2ϵ vecindad de p en M tal que en $\pi^{-1}(U)$ π resulta un homeomorfismo. Sea N tal que para $i > N$ se tiene que $\pi(p_i)$ está en la ϵ vecindad de p, luego cualquier punto fuera de U está al menos a una ϵ distancia de $\pi(\tilde{p}_i)$ para $i > N$, si $\tilde{U}_i$ es una componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ conteniendo $\tilde{p}_i$ vemos que la ϵ vecindad de $\tilde{p}_i$ esta en $\tilde{U}_i$ para $i > N$. Sean $\tilde{q} \in \tilde{M}$ $/d_{\tilde{M}}(\tilde{p}_i\tilde{q}) < \epsilon$ y $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, ..b_k \in D$, $f_1, f_2, \ldots f_k \in O(D,\tilde{M})$ tal que $\Sigma\rho(a_i,b_i) < \epsilon$, consideremos $\widehat{a_j, b_j}$ la geodésica de a_i a b_i y $\tilde{C}$ como la curva de $\tilde{p}$ a $\tilde{q}$ obtenida adjuntando $f_i(\widehat{a_j, b_j})$ en M.

Sea $C = \pi(\tilde{C})$, por construcción C está contenida en la ϵ vecindad de $\pi(\tilde{p}_i)$ por tanto $C \subset U$, así $\tilde{C}$ está en $\tilde{U}_i$ si $\tilde{p} \in \tilde{U}_i$ es tal que $\pi(\tilde{p}) = p$, resulta así que $\{\tilde{p}_i\}$ converge a $\tilde{p}$.

Ejemplo 31. $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$ es completo pues su cubrimiento

$$z \to e^{2\pi i z}$$

es la mitad del plano superior el cual es biholomorfo a $\mathbb{D}$.

Observación 36.

1. Si M y N son variedades hiperbólicas completas entonces de la Definición 34 resulta que $M \times N$ es también hiperbólica completa.

2. Si N es hiperbólico completo y $M \subset N$ es cerrado entonces de la Observación 32-1 y del hecho topológico que todo conjunto cerrado dentro de un espacio métrico completo es completo con la métrica inducida se tiene que M es también es hiperbólico completo.

Proposición 12. Sean M y N variedades complejas y $f : M \to N$ aplicación holomorfa, $N' \subset N$ es un subespacio hiperbólico completo y $M' = f^{-1}(N')$. Si M es hiperbólico completo entonces M' es hiperbólico completo.

Prueba. Denote por G_f el gráfico de la aplicación $f : M \to N$, que es un subconjunto cerrado de $M \times N$. Sea $f' = f|_{M'}$ y G'_f su gráfico, entonces $G'_f = G_f \cap (M \times N')$ por lo tanto G'_f es cerrado en $M \times N'$ ahora por el Teorema 34 y la observación anterior G'_f es hiperbólico completo y puesto que la proyección $(x, y) \in M \times N' \xrightarrow{\pi} x \in M$ induce un biholomorfismo entre G'_f y M' concluimos que M' es hiperbólico completo. □

Corolario 5. Sea M una variedad hiperbólica completa y $f : M \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa acotada, entonces el abierto

$$M' = \{p \in M : f(p) \neq 0\} = M - V(f)$$

es hiperbólico completo.

Prueba. Por ser acotada podemos considerar $f(M) \subset \mathbb{D}$ entonces el resultado es consecuencia de la proposición 12 aplicado a $N = \mathbb{D}$, $N' = \mathbb{D} - \{0\}$ y M.

Definición 42. Sea N una variedad, $M \subset N$ es dicho *localmente hiperbólico completo* en N si para todo $p \in \overline{M}$ existe una vecindad V_p de p en N tal que $V_p \cap M$ es hiperbólico completo.

Proposición 13. Sean X, Y variedades complejas, $\pi : X \dashrightarrow Y$ una aplicación holomorfa, si Y es hiperbólico completo, y para $y \in Y$ existe U vecindad tal que $\pi^{-1}(U)$ es completo, entonces X es hiperbólico completo.

Para una referencia de este resultado ver [L2] pag 26-27.
En particular si Y hiperbólica completa y $X \subset Y$ tal que X es localmente hipebólico y completo tenemos que X hiperbólico completo.

Corolario 6. Sea M una variedad compleja y X un conjunto analítico entonces:

1. $M - X$ es localmente Hiperbólico completo en M.

2. Si M hiperbólico completo entonces $M - X$ es hiperbólico completo.

Prueba. Sea $p \in X$ y V_p una vecindad si $f_p : V_p \dashrightarrow \mathbb{C}$ es un función holomorfa tal que $V_p \cap X : f_p = 0$, entonces $V_p - (V_p \cap X)$ es hiperbólico completo por tanto $M - X$ es localmente completo, la segunda afirmación es consecuencia de la Proposición 13.

Un concepto importante en estas notas es el de encaje hiperbólico.

4.4 Encaje Hiperbólico

Según Royden(ver [N1] pag 5-6) la semimétrica de Kobayashi se puede introducir del modo siguiente.

Definición 43. Fijemos $p \in M$ y un vector $v \in T_pM$. Definimos $\widetilde{K}_M(p).v = \inf\{r > 0,\ \text{existe } \varphi : \mathbb{D} \dashrightarrow M \quad \text{holomorfa con } \varphi(0) = p \text{ y } r\varphi'(0) = v\}$.

Observación 37. Lo anterior también se puede definir del modo siguiente. $\widetilde{K}_M(p).v = \inf\{1/r :\ \text{existe } \varphi : \mathbb{D}_r \dashrightarrow M\text{holomorfa}\varphi(0) = p\text{y}\varphi'(0) = v\}$.

En efecto si $\varphi : \mathbb{D} \dashrightarrow M$ con $\varphi(0) = p$ y $r\varphi'(0) = v$ considerando la función $\gamma = \varphi r : \mathbb{D}_{\frac{1}{r}} \dashrightarrow M$ tenemos que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$ por tanto r es un elemento del segundo conjunto, del mismo modo si $\varphi : \mathbb{D}_r \dashrightarrow M$ holomorfa, $\varphi(0) = p$ y $\varphi'(0) = v$ considerando $\varphi\frac{1}{r} = \gamma$ resulta que $\dfrac{1}{r}$ es un elemento del primer conjunto.

Observación 38. 1. De la definición se tiene que

$$\widetilde{K}_M(p)(cv) = |c|\widetilde{K}_M(p).(v) \ donde \ c \in \mathbb{C}.$$

Basta considerar el caso $c \neq 0$, sea $f : \mathbb{D} \to M$ tal que $f(0) = p$ y $rf'(0)(e_1) = v$ por la linealidad de $f'(0)$ tenemos que $f'(0)(rce_1) = cv$, considerando la función rcf definida en $D_{\frac{1}{|rc|}}$ resulta que $\widetilde{K}_M(p)(cv) \leq |rc|$ de donde tomando infimo tenemos que $\widetilde{K}_M(p)(cv) \leq |c|\widetilde{K}_M(p)(v)$. Del mismo modo $\widetilde{K}_M(p)(v) = \widetilde{K}_M(p)(\frac{c}{c}v) \leq \frac{1}{|c|}\widetilde{K}_M(p)(cv)$, así $|c|\widetilde{K}_M(p)(v) \leq \widetilde{K}_M(p)(cv)$, por tanto $\widetilde{K}_M(p)(cv) = |c|\widetilde{K}_M(p)(v)$.

2. Si $U_1 \subset U_2$ entonces $\widetilde{K}_{U_1}(p)v \geq \widetilde{K}_{U_2}(p)v$ para todo punto $p \in U_1$ y vector tangente $v \in T_pU_1$.

3. Si $\pi : M \to N$ es un recubrimiento y sean $U \subset N$ y $V \subset M$ tal que $\pi|_V : V \to U$ es un biholomorfismo entonces

$$\widetilde{K}_V(p)v = \widetilde{K}_U(\pi(p))\pi'(p)v.$$

Podemos introducir la semidistancia entre dos puntos del modo estandar

$$\tilde{K}_{M(p,q)} = d_{\widetilde{K}_M}(p,q) = \inf\{\int_0^1 \widetilde{K}_M(\gamma(t))\gamma'(t)dt\}.$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los caminos de clase C^1 por partes.

Un resultado importante debido a Royden es el siguiente Teorema.

Teorema 47. Se cumple de que: $\tilde{K}_M(p,q) = K_M(p,q)$.

Para una prueba ver [N1] pg 16 - 18.

Lema 6. Sea M una variedad hiperbólica y K abierto tal que $\overline{K}$ es compacto, son equivalentes:

1. Para todo $p \in \overline{K}$ y toda vecindad U de p existe V vecindad de p tal que $\overline{V} \subset U$ y $K_K(\overline{V} \cap K, K - U) > 0$.

2. Para todos $p, q \in \overline{K}$ con $p \neq q$ existen vecindades U_p, U_q en M tal que $K_K(\overline{U}_p \cap K, \overline{U}_q \cap K) > 0$.

3. Para todos $p, q \in \overline{K}$ con $p \neq q$ y p_n, q_n sucesiones convergiendo a p y q respectivamente se tiene que $K_K(p_n, q_n) \nrightarrow 0$.

Prueba. Sean $p, q \in \overline{K}$ con $p \neq q$ por 1 tenemos que para toda vecindad U de p existe V vecindad de p tal que $\overline{V} \subset U$ y $K_K(\overline{V} \cap K, K - U) > 0$, como $p \neq q$ y U arbitrario podemos tomar $\overline{U}_q \subset K - U$ y $\overline{U}_p = \overline{V}$ y se tendrá la afirmación.
Para ver (3) a partir de (2) tomemos $p_n \to p$ y $q_n \to q$ podemos suponer $p_n \in \overline{U}_p$ y $q_n \in \overline{U}_q$ de donde se obtiene la conclusión.
Finalmente para ver la parte (1) a partir de (3) supondremos existen $p \in \overline{K}$ y U vecindad de p tal que para toda vecindad $\overline{V} \subset U$ de p se tiene $K_K(\overline{V} \cap K, K - U) = 0$, por definición de distancia existen sucesiones $p_n \in \overline{V} \cap K$ y $q_n \in K - U$ tal que $K_k(p_n, q_n) \to 0$ y como $\overline{K}$ es compacto podemos suponer $p_n \to p' \in \overline{K}$ y $q_n \to q' \in \overline{K}$ con $K_k(p_n, q_n) \to 0$ lo cual contradice (3).

Definición 44. Sea M una variedad compleja y $K \subset N$ un subconjunto abierto tal que $\overline{K}$ es compacto. Diremos que K está hiperbólicamente encajado en M si se cumple cualquiera de las afirmaciones equivalentes del Lema anterior.

Observación 39.

1. Si M es hiperbólico entonces es un encaje hiperbólico en si mismo.
2. Es claro que si M es un encaje hiperbólico entonces es hiperbólico, más el recíproco no es cierto como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 32. En $\mathbb{P}^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2] : (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}\}$ consideramos los siguientes conjuntos.

$$\begin{aligned}
L_0 &= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 : z_0 = 0,\ z_2 = 1\}.\\
L_1 &= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 : z_0 = 1,\ z_2 = 1\}.\\
L_\infty &= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 : z_2 = 0\}.\\
H_+ &= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 : z_1 z_2 = z_0^2\}.\\
H_- &= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 : z_1 z_2 = -z_0^2\}.
\end{aligned}$$

Sea $M = \mathbb{P}^2 - (L_0 \cup L_1 \cup L_\infty \cup H_+ \cup H_-)$. Todos los conjuntos pueden ser visto en coordenadas afines: $z_2 = 1$ salvo L_∞, así en las coordenadas (z_0, z_1) podemos definir el biholomorfismo.

$$\begin{array}{cccc}
\varphi: & M & \to & (\mathbb{C} - \{0,1\}) \times (\mathbb{C} - \{-1,1\}). \\
 & (z_0, z_1) & \to & (z_0, z_0 z_1)
\end{array}$$

Así M es hiperbólica según el Ejemplo 28; sin embargo M no es encajado hiperbólico. En efecto consideremos en las coordenadas (z_0, z_1) los puntos

$(0,0)$ y $(0,1)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ considere las aplicaciones holomorfas

$$\begin{array}{rccc} f_k: & \mathbb{D}_k & \to & M \\ & t & \to & (\frac{1}{k}, t) \end{array}$$

y los puntos $p_k = f_k(0) = (\frac{1}{k}, 0)$ y $q_k = f_k(1) = (\frac{1}{k}, 1)$, tenemos que $p_k \to (0,0)$ y $q_k \to (0,1)$ y $K_M(p_k, q_k) \leq K_{\mathbb{D}_k}(0,1) = K_{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{k}) \to 0$ por tanto $K_M(p_k, q_k) \to 0$, por tanto M no es encajado hiperbólico en $\mathbb{P}^2$.

Proposición 14. Sea N una variedad hiperbólica y $M \subset N$ un subconjunto abierto de N tal que $\overline{M}$ es compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. M está hiperbólicamente encajado en N.

2. Si ds es la métrica de Poincaré en $\mathbb{D}$, entonces dado una métrica hermitiana ds_N^2 en N, existe una constante $c > 0$ tal que:

$$f^*(c^2 ds_N^2) \leq ds^2$$

para todo $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$.

Prueba.
Supongamos que (2) no se cumple, esto es existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$ y puntos $(p_n) \in \mathbb{D}$ tal que

$$f^*(ds_N^2)(p_n) > n ds^2(p_n), \ldots (*)$$

como ds^2 es una métrica invariante por biholomorfismos en $\mathbb{D}$ podemos asumir que $p_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $v \in T_0\mathbb{D}$ es tal que $ds^2(0)(v) = 1$ entonces de la inecuación $(*)$ tenemos $ds_N^2(f(0))(f'(0).v) > n$, ahora puesto que $(f_n(0))$ es una sucesión en M y $\overline{M}$ es compacto, entonces tendremos un punto $p \in \overline{M}$ tal que $f_n(0) \to p$, consideremos U una vecindad de p biholomorfa a $\mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ y supongamos que exista $r < 1$ tal que $f_n(\mathbb{D}_r) \subset U$ para todo $n \geq n_0$; como $f_n(0) \in \overline{M}$ tenemos que $f_n(0)$ está en una vecindad compacta de p en U por tanto tendríamos $\{f_n|_{\mathbb{D}_r} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, U)\}$ y como $\{f_n(0)\}$ es relativamente compacto, entonces la familia $\{f_n|_{\mathbb{D}_r}\}$ es relativamente compacta en $\mathcal{O}(\mathbb{D}_r, U)$ por tanto existe una subsucesión que converge en $\mathcal{O}(\mathbb{D}_r, U)$; esto no es posible pues $ds_M^2(0)(f'(0).v) > n$, por tanto un tal r no existe, esto significa que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $z_k \in \mathbb{D}$ y un entero n_k

tal que $|z_k| < \frac{1}{k}$ y $f_{n_k}(z_k) \notin U$, considerando ahora sucesiones $p_k = f_{n_k}(0)$ y $q_k = f_{n_k}(z_k)$, y considerando de ser necesario una subsucesión que podemos asumir que (q_k) converge a un punto $q \notin U$, ahora puesto que

$$K_M(p_k, q_k) \leq K_{\mathbb{D}}(0, z_k)$$

tendríamos de que $K_M(p_k, q_k) \to 0$, cuando $k \to \infty$ y esto contradice el hecho que M es hiperbólicamente encajado en N. Para (2) implica (1) consideremos d la aplicación distancia inducida por la métrica hermitiana $c^2 ds_N^2$ entonces de (2) tenemos

$$d(f(p), f(q)) \leq \rho(p, q)$$

para $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$, luego por el Teorema 9 tenemos que $d \leq K_M$ en M, así si damos dos puntos $p \neq q \in \overline{M} - M$ y p_n, q_n convergiendo a p y q respectivamente como $d(p_n, q_n) \leq K_M(p_n, q_n)$ y además $d(p, q) \neq 0$, tendremos de que $K_M(p_n, q_n) \nrightarrow 0$.

Observación 40. Considerando las notaciones del Teorema 42 para todo punto $p \in M$ tendremos que existe una vecindad U de p y una constante $b > 0$ tal que para todo $q \in U \cap M$ se cumple:

$$b^2 ds_N^2(q)v \leq \widetilde{K}_M^2(q)v.$$

En efecto, sea $r > 0$ y $f : \mathbb{D} \to M$ tal que $f(0) = q$ y $rf'(0)e = v$ $e = \partial z \in T_0\mathbb{D}$, del Teorema 42 tenemos $f^*(c^2 ds_N^2)(p) \leq ds^2(p)$, haciendo $p = 0$ y evaluando en re tenemos $c^2 ds_N^2(f(0))rf'(0)e \leq r^2 ds^2(0)e$ por tanto tendremos de que $c^2 ds_N^2(f(0))rf'(0)e \leq r^2 ds^2(0)e$ es decir

$$b^2 ds_N^2(q)v \leq r^2 ds^2(0).$$

luego tomando el ínfimo sobre r en esta última desigualdad obtenemos nuestra observación.

Teorema 48. Sea M un abierto hiperbólicamente encajado en N. Si N es localmente hiperbólico completo, entonces M hiperbólico completo.

El Teorema es consecuencia del siguiente lema.

Lema 7. Sean M y N como en el Teorema, consideremos $p \in \overline{M}$ y una vecindad V_p de p en N, se $W_p \subset V_p$ es otra vecindad de p tal que:

$$\delta = K_M(W_p \cap M, M - V_p) > 0$$

y un $\delta' < \frac{\delta}{2}$; entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$K_M(q, q') \geq cK_{V_p \cap M}(q, q')$$

para todo $q, q' \in W_p \cap M$ con $K_M(q, q') < \delta'$.

Prueba. Sean $q, q' \in W_p \cap M$ tal que $K_M(q, q') < \delta'$, considere una cadena $\sigma = \{f^j, (0, z_j^{''})\}$ de q a q' tal que $l(\sigma) < \delta'$; ahora denotemos $q = p_0 = f_0(0)$ $p_1 = f_1(0) = f_0(z_0^{''}), \ldots, p_{k-1} = f_k(0) = f_{k-1}(z_{k-1}^{''})$ y $q' = p_k = f_k(z_k^{''})$. Puesto que $q \in W_q$ y $l(\sigma) < \delta'$ tendremos que:

$$k_M(W_p, p_{i-1}) = \inf_{r \in W_p} K_M(r, p_{i-1}) \leq K(q, p_{i-1}) < l(\sigma) < \delta'.$$

Sean r y r' números positivos tal que:

$$\rho(0, r) = \frac{\delta}{2} \text{ y } \rho(0, r') = \delta'$$

entonces por hipótesis $f_i(\mathbb{D}_r) \subset \{r \in M : K_M(r, p_{i-1}) < \frac{\delta}{2}\} \subset V_p$, consideremos ahora una constante c verificando:

$$\rho(0, z) \leq c\rho_r(0, z) \quad z \in \mathbb{D}_r.$$

como $l(\sigma) < \delta'$, tenemos que $z_i^{''} \in \mathbb{D}_r$ y

$$\sum \rho(0, z_j^{''}) \geq c \sum \rho_r(0, z_j^{''}) \geq c \sum K_{V_p \cap M}(f_j(0), f_j(z_j^{''})) \geq K_{V_p \cap M}(q, q')$$

como esta desigualdad es válida para toda cadena σ de q a q' de longitud menor que δ' tenemos $K_M(q, q') \geq cK_{V_p \cap M}(q, q')$.

Prueba del Teorema 48: Del Lema toda sucesión de puntos de $W_p \cap M$ que es de Cauchy con respecto a K_M será de Cauchy respecto la métrica $K_{V_p \cap M}$, por tanto la sucesión será convergente así M será completo.

Corolario 7. Si M es una variedad compleja compacta y X un conjunto analítico entonces si $M - X$ es hiperbólicamente encajado en M entonces es hiperbólico completo.

Este resultado sigue del Teorema 48 y el Corolario 6.

4.5 Brody Hiperbólico

Definición 45. Diremos que X es *Brody hiperbólico* si cualquier aplicación holomorfa $f : \mathbb{C} \to X$ es constante.

Observación 41. Si M es una variedad hiperbólica y $f : \mathbb{C} \to M$ es una aplicación holomorfa, entonces de el Ejemplo (24) tenemos la desigualdad $K_M(f(p), f(q)) \leq K_{\mathbb{C}}(p, q) = 0$. Luego f es constante, así tenemos que si una variedad es hiperbólica entonces es Brody hiperbólica mas el recíproco no es cierto como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 33. La variedad $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| < 1, |z_1 z_2| < 1\} - \{(0, z_2)/|z_2| \geq 1\}$ es Brody hiperbólica más no hiperbólica.

Prueba. Consideremos la aplicación

$$h : M \longrightarrow \{(w_1, w_2),\ |w_1| < 1\ |w_2| < 1\}$$

donde $h(z_1, z_2) = (z_1, z_1 z_2)$ tenemos que h es inyectivo si $z_1 \neq 0$. Consideremos ahora una función holomorfa $f : \mathbb{C} \longrightarrow M$ del Teorema de Lioville tenemos que $h \circ f$ es constante por tanto f es constante o bien toma valores en $M \bigcap \{z_1 = 0\}$ el cual se identifica con $\{z_2 \in \mathbb{C}/|z_2| < 1\}$ por tanto f será constante y M es Brody hiperbólico.

Sea $p = (0, b) \in M$ con $b \neq 0$ y $p_n = (1/n, b) \in M$, de la continuidad de K_M tenemos de que $K_M(0, p) = \lim K_M(0, p_n)$ consideremos la aplicación $f(x) = (a_n x/n, a_n b x)$ donde $|a_n| = min\{n, \sqrt{\frac{n}{|b|}}\}$.
Si $x < 1$ tenemos que $f(x) \in M$ y $f(1/a_n) = p_n$ luego del principio de contracción tenemos que:

$$K_M(0, p_n) \geq \rho(0, 1/a_n) = log\frac{|a_n| + 1}{|a_n| - 1}$$

de donde $K_M(0, p) = 0$.

Nuestro objetivo es ahora ver que sobre las variedades compactas Brody hiperbólico equivale a Kobayashi hiperbólico.

Observación 42. Si ds^2_M es métrica de M tal que $ds^2_M \leq \tilde{K}^2_M$, es fácil ver de que M es hiperbólico, ahora si M fuese relativamente compacto en una variedad compleja N, tendremos que además está encajado.

En efecto de la definición de $\tilde{K}_M$ y la condición, tenemos de que:

$$ds_M^2(f(0))f'(0)v \leq \tilde{K}_M^2(f(0))f'(0)v \leq 4ds^2(0)v$$

para $v \in T_0\mathbb{D}$ y $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$, luego de la Proposición 14 tendremos de que M está hiperbólicamente encajada.

Ahora centremos nuestra atención en el Teorema de Brody. Previo a este teorema probaremos un lema importarte de por si.

Lema 8. Sea M una variedad compleja con una métrica ds_M^2. Dado $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, M)$ definamos

$$u = \frac{f^* ds_M^2}{r^2 ds_r^2}$$

sobre $\mathbb{D}_r$ tal que $u(0) > c > 0$ en estas condiciones podemos encontrar una aplicación $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, M)$ tal que:

1. La función $\frac{g^* ds_M^2}{r^2 ds_r^2}$ es acotada por c sobre $\mathbb{D}_r$ y alcanza el máximo valor c en el origen.

2. $g = f \circ \mu_r \circ \varphi$ donde φ es un automorfismo de $\mathbb{D}_r$ y $\mu_r(z) = rz$ con $0 < r < 1$.

Prueba. Para cada $t \in [0,1[$ definamos $f_t \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, M)$ donde $f_t(z) = f \circ \mu_t = f(tz)$ para $z \in \mathbb{D}_r$, también $u_t = \frac{f_t^* ds_M^2}{r^2 ds_r^2} = \frac{(f \circ \mu_t)^* ds^2}{r^2 ds_r^2}$.

Entonces tenemos

$$u_t = \frac{\mu_t^* f^* ds_M^2}{\mu_t^*(r^2 ds_r^2)} . \frac{\mu_t^* ds_r^2}{ds_r^2} = \mu_t^*(u) \frac{t^2(r^2 - |z|^2)^2}{(r^2 - |tz|^2)^2}.$$

Considere también

$$U(t) = \sup_{z \in \mathbb{D}_r} u_t(z) = \sup_{z \in \mathbb{D}_r} u(tz) \frac{t^2(r^2 - |z|^2)^2}{(r^2 - |tz|^2)^2}.$$

De la definición de u_t tenemos que para cada $t \in [0,1[$ $u_t(z)$ se aproxima a cero en el borde $\partial\mathbb{D}_r$, luego el $\sup_{z \in \mathbb{D}_r} u_t(z)$ es alcanzado en el interior de $\mathbb{D}_r$.

Se puede verificar sin mucha dificultad que $U(t)$ es continua en $[0,1[$ y puesto que $U(t) \geq u_t(0) = u(0)t^2 > r > c$ para algún $r > 0$, entonces tomando límite tenemos que $\lim_{t \to 1^-} U(t) > c$.
Por tanto $U(t) > c$ para t próximo de 1. Por otro lado $U(0) = 0$, así tenemos que $c = U(t_0)$ para algún $t_0 \in]0,1[$. Sea $z_0 \in \mathbb{D}_r$ un punto tal que $c = \sup_{z \in \mathbb{D}_r} u_{t_0}(z) = u_{t_0}(z_0)$ y considere φ una automorfismo de $\mathbb{D}_r$ tal que $\varphi(z_0) = 0$. Entonces $g = f \circ \mu_{t_0} \circ \varphi$ es la función buscada.

Observación 43. Como $t_0 < 1$ tenemos de que $\overline{g(\mathbb{D}_{r_n})} \subset f(\mathbb{D}_{r_n})$.

Teorema 49 (Brody). Sea X espacio complejo compacto entonces X es Brody hiperbólico si y sólo si es Kobayashi hiperbólico.

Prueba. El regreso ya fue visto, supongamos ahora de que M no es hiperbólico y consideremos ds^2_M una métrica sobre M. Si existe un $a > 0$ tal que $ads^2_M \leq \tilde{K}^2$, entonces por la Observación 42 M, debería ser hiperbólico, por tanto existe un $p \in M$ y una sucesión (v_n) en T_pM tal que $ds^2_M(p).v_n = 1$ y $\tilde{K}^2(p).v_n < \frac{1}{n}$.

De la definición de $\tilde{K}$ tenemos que existe una sucesión (r_n) de números reales positivos tal que $\lim r_n = \infty$ y una sucesión de funciones f_n en $\mathcal{O}(\mathbb{D}_{r_n}, M)$ tal que $df_n(0)e = v_n$, como $ds^2_{r_n}(e) = \frac{1}{2r_n^2}$ tendremos que:

$$u_n = \frac{ds^2_M(p).df(0)e}{r_n^2 ds^2_{r_n}(0)e} = \frac{ds^2_M(p).v_n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Luego aplicando el Lema 8 a cada f_n y constante $0 < c < \frac{1}{2}$, obtenemos una sucesión g_n en $\mathcal{O}(\mathbb{D}_{r_n}, M)$ tal que:

1. $g_n^* ds^2_M \leq c r_n^2 ds^2_{r_n}$ y la igualdad vale en el origen.

2. $\overline{g_n(\mathbb{D}_{r_n})} \subset f_n(\mathbb{D}_{r_n})$.

Por 1 la familia de aplicaciones $g_n \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{r_n}, M)$ es equicontinua. Mejor aún

$$g_n^* ds^2_M \leq c r_n^2 ds^2_{r_n} \leq c r_m^2 ds^2_{r_m}, \text{ para } n \geq m$$

la familia $\mathfrak{F}_m = \{g_n|_{\mathbb{D}_{r_m}} : n \geq m\}$ es equicontinua para cada m fijado. Puesto que la familia $\mathfrak{F}_1 = \{g_n|_{\mathbb{D}_{r_n}} : n \geq 1\}$ es equicontinua del Teorema de Ascoli-Arzelà (M es compacta) por tanto existe una subsucesión que seguiremos llamando g_n que converge a una aplicación $h_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{r_1}, M)$ razonando de la misma manera para $\mathfrak{F}_2$ respecto a la subsucesición anterior tenemos de que existe una subsucesión de g_n que seguiremos llamando g_n convergiendo a h_2 en $\mathcal{O}(\mathbb{D}_{r_2}, M)$ y además $h_1 = h_2$ en $\mathbb{D}_{r_1}$ de este modo para cada $\mathfrak{F}_m$ tenemos una subsucesión h_m donde $h_m \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{r_m}, M)$ tal que $h_m = h_{m-1}$. Por lo tanto tenemos una función holomorfa $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, M)$ que es extensión de todos los h_n dada por $h = \lim h_n$, además como $g_n^* ds^2_M \leq g_n^* ds^2_M(0) = c r_n^2 ds^2_{r_n}(0) = 4cdzd\overline{z}$ tenemos que:

$$h^* ds^2_M(0) = \lim g_n^* ds^2_M(0) = 4cdzd\overline{z} \neq 0$$

esto es h no es constante de donde M no es Brody hiperbólico.

Observación 44. De la prueba del teorema anterior tenemos de que $h^*ds_M^2 \leq 4cdzd\overline{z}$.

Definición 46. Sea $h : \mathbb{C} \to M$ una curva entera no constante sobre una variedad compleja M. Si existe una métrica ds_M^2 y una constante $c > 0$ que satisface la propiedad:

$$h^*ds_M^2 \leq cdzd\overline{z} \tag{4.1}$$

h será llamada *línea compleja.*

Observación 45. De la observación del Teorema de Brody tenemos que si una variedad compacta no es Brody hiperbólico entonces existe una línea compleja.

Teorema 50. Sea M una variedad compleja compacta. Dada una curva entera $f : \mathbb{C} \to M$, existe una línea compleja $h : \mathbb{C} \to M$, tal que $h(\mathbb{C}) \subset \overline{f(\mathbb{C})}$.

Prueba. Sea (r_n) una sucesión de números reales positivos con $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ y $f_n = f|_{\mathbb{D}_{r_n}}$ sin perdida de generalidad podemos suponer que $f'(0) \neq 0$. Considere $e \in T_0\mathbb{D}$ y $v = df(0)e$, multiplicando ds_M^2 por una constante podemos suponer que $ds_M^2(f(0))v = 1$, considerando $v = v_n$ tenemos de que $\dfrac{ds_M^2 f_n(0)v_n}{r_n^2 ds_{r_n}^2(e)} = \frac{1}{2}$, entonces si consideramos c tal que $0 < c < \frac{1}{2}$, por el Lema 8 tenemos de que existe una sucesión g_n satisfaciendo :

1. $g_n^* ds_M^2 \leq c r_n^2 ds_{r_n}^2$.

2. $\overline{g_n(\mathbb{D}_{r_n})} \subseteq f_n(\mathbb{D}_{r_n})$.

Pues $g_n = f_n \circ \mu_{r_n} \circ \varphi_n$ y siguiendo el argumento del Teorema anterior obtenemos $h : \mathbb{C} \to M$ como el límite de los g_n y de la parte 2 tenemos de que $h(\mathbb{C}) \subset \overline{f(\mathbb{C})}$.

Definición 47. Sea $h : \mathbb{C} \to M$ una línea compleja sobre una variedad M y $S \subset M$, h es llamada *línea compleja límite de* S si para cada disco $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{C}$ la restricción $h|_{\mathbb{D}_r}$ es el límite de una sucesión en $\mathcal{O}(\mathbb{D}_r, S)$.

Observación 46. De la definición tenemos $h(\mathbb{C}) \subset \overline{S}$.

Teorema 51. Sea N una variedad compleja y $M \subset N$ relativamente compacto. M no es hiperbólicamente encajado en N si y sólo si existe una línea compleja $h : \mathbb{C} \to N$ límite de M.

Prueba. Considere una métrica ds_N^2 en N y supongamos que M no es hiperbólicamente encajado en N, entonces no existe una métrica ds'^2_N en N tal que $ds'^2_N \leq \tilde{K}_M^2$ en M. Por lo tanto no existe $a > 0$ tal que $ads_N^2 \leq \tilde{K}_M^2$. Procediendo análogamente como en el Teorema de Brody tenemos que existe una linea compleja $h : \mathbb{C} \to M$. Recíprocamente si existe una línea compleja $h : \mathbb{C} \to N$ límite de M entonces para todo par de puntos $p, q \in h(\mathbb{C}) \subset \overline{M}$ con $p = h(z)$ y $q = h(w)$ tendremos que existe $r > 0$ tal que $z, w \in \mathbb{D}_r$, por tanto tenemos sucesiones $z_n = f_n(z)$ y $w_m = f_n(w)$ tal que $z_n \to p$ y $w_n \to q$ como $\tilde{K}$ contrae distancias tenemos $\tilde{K}_M(f_n(z), f_n(w)) \leq \tilde{K}_{\mathbb{C}}(z, w) = 0$ y esto contradice el hecho que M es hiperbólicamente encajado.

Recordemos el Teorema de Hurwitz en una variable compleja.

Teorema 52. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y f_n una sucesión de $\mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ de funciones nunca nulas. Si la sucesión converge a $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ entonces f es idénticamente nula o nunca nula.

El siguiente resultado es una generalización de este Teorema.

Teorema 53. Sea M una variedad compleja y $X = \cup_{i=1}^m X_i$ una unión de conjuntos analíticos en M, donde cada X_i es irreducible.
Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y h_m una sucesión en $\mathcal{O}(D, M - X)$ que converge a $h \in \mathcal{O}(D, M)$. Entonces $h(D) \subset M - X$ o $h(D) \subset \cap_{i \in I} X_i - \cup_{j \in J} X_j$, donde $I = \{i : h(0) \in X_i\}$ y $J = \{j : h(0) \notin X_j\}$.

Prueba. Suponga que $h(0) \in X$, U una vecindad de 0 y $X|_U : f = f_1 \cdots f_m = 0$ donde los $X_i|_U : f_i = 0$. Sea i tal que $f_i(h(0)) = 0$. Por hipótesis $(f_i \circ h_m)$ es nunca cero, luego del Teorema de Hurwitz $f_i \circ h$ es idénticamente cero, ya que $f_i(h(0)) = 0$. Por lo tanto $h(D) \subset X_i$.

Teorema 54 (Green). Sea X la unión de un número finito conjuntos analíticos irreducibles $X_1, \ldots, X_m$ de una variedad compleja compacta M. Si se cumple que :

1. $M - X$ no tiene línea compleja.

2. Para cada partición $\{i_1, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_r\} = \{1, \ldots, m\}$ el espacio $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k} - (X_{j_1} \cup, \ldots \cup X_{j_r})$ no tiene línea compleja.

entonces $M - X$ es completo hiperbólico e hiperbólico encajado en M.

Prueba. Suponga que $M - X$ no es hiperbólicamente encajado en M. Por el Teorema 51 existe una línea compleja límite $h \in (\mathbb{C}, M)$ de $M - X$. Por lo tanto del Teorema 53 $h(\mathbb{C}) \subset M - X$ o $h(\mathbb{C}) \subset \cap_{i \in I} X_i - \cup_{j \in J} X_j$, donde $I = \{i : h(0) \in X_i\}$ y $J = \{j : h(0) \notin X_j\}$ esto es una contradicción con la hipótesis (2) lo que agota todas las posibilidades, así $M - X$ es hiperbólicamente encajado en M. Si aplicamos el Corolario 7 concluimos que $M - X$ es también completo hiperbólico.

4.6 Los Teoremas de Green

Sean $h_0, \ldots, h_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones enteras sin ceros estas son llamadas unidades en el anillo de funciones holomorfas $\mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Supongamos que ellas satisfagan la ecuación:

$$h_0 + h_2 + \cdots + h_n = 0. \tag{4.2}$$

Podemos fácilmente conseguir soluciones del modo siguiente.
Consideremos una unidad $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y sean $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_r$ constantes no cero con $\sum_{j=0}^{r} c_j = 0$.
Definiendo $h_i = c_i h$ tendremos que estas cumplen la ecuación
$h_0 + \cdots + h_r = 0$.

Definición 48. Sean h_i con $i \in \{0, 1, ...n\}$ una familia de unidades que verifican $h_0 + h_1 + \cdots + h_n = 0$.
Diremos que $i \backsim j$ si existe una constante no nula c tal que $h_i = ch_j$ [1]

Teorema 55. Si $h_0 + \cdots + h_n = 0$, y $\{S_j\}$ es una partición de $\{0, \ldots, n\}$ según la clase de equivalencia anterior, entonces $\sum_{i \in S_j} h_i = 0$, además si $n \leq 2$ entonces sólo existe una clase de equivalencia.

Este resultado muy técnico requiere fundamentalmente de la Teoría de Nevalina. El método empleado para la demostración no será usado para este trabajo, por lo cual sólo haremos uso de ella, para mayores detalles ver [L2].

Teorema 56. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ es una aplicación holomorfa. Asumamos que la imagen de f está en el complemento de $n+2$ hiperplanos en posición general

[1] la relación anterior forma las llamadas clases de equivalencia de Borel

entonces la imagen de f esta contenida en un subespacio lineal de dimensión $\leq \frac{n}{2}$. Mas generalmente si la imagen esta contenida en el complemento de $n+p$ hiperplanos en posición general, entonces esta imagen esta contenida en un subespacio lineal de dimensión $\leq \frac{n}{p}$.

Prueba. Consideraremos primero el caso $p = 2$ y los hiperplanos en forma standar (ver Ejemplo 28). Sea la partición $S_1 \cup \ldots \cup S_q \cup K$ de $\{0, \ldots, n\}$ en clases de equivalencia de Borel $i \sim j$ si $\frac{h_i}{h_j}$ es constante, donde K es la clase de las aplicaciones constantes. Dada una clase $S \neq K$ fijemos $i \in S$, para $j \in S$ y $j \neq i$ tenemos la relación lineal $x_j - c_j x_i = 0$. Sea s_k el número de elementos de S_k con $s_o = \text{card}(K)$. Entonces relacionando el primer elemento con los restantes, obtendremos al menos el siguiente número de relaciones lineales independientes:

$$(s_1 - 1) + \cdots + (s_q - 1) + (s_0 - 1) = n + 1 - (q + 1) = n - q \leq \frac{n}{2}$$

la última relación se obtiene desde que $n \geq 2q$, esto probaría la primera parte. Para el caso general el argumento es el mismo ya que si $H_1(x), \ldots, H_{n+p}(x)$ son hiperplanos con coordenadas homogéneas $[x_0 : \ldots : x_n]$, cualquiera $n+1$ de esas son linealmente independientes y $n+2$ satisfacen la relación lineal con coeficientes no todos nulos, de otro modo $n+1$ de ellos serían linealmente independientes. Si $f = (f_0, \ldots, f_n)$ donde las f_i son funciones enteras sin ceros comunes. Nosotros obtenemos $n+p$ funciones $H_k(f) = h_k$ $k = 1, \ldots, n+p$ las cuales son unidades. Particionamos el conjunto de índices de acuerdo a la relación de equivalencia la relación $i \sim j$ si $h_i = ch_j$ para alguna constante c, así $\{1, \ldots, n+p\} = \bigcup S = S_1 \bigcup \ldots, \bigcup S_q$, donde S denota una clase de equivalencia.

Nosotros primero exigimos que el complemento de S tenga a lo más n elementos, de otro modo habría al menos $n+1$ elementos que estarían en el complemento, escogemos $n+1$ de tales elementos y un elemento en S así obtenemos el conjunto de $n+2$ índices y lo denotaremos por J así $J \cap S$ tiene exactamente un elemento; existe una relación $\sum_{j \in J} a_j H_j = 0$ con $a_j \neq 0$ para todo $j \in J$ entonces tenemos la relación $\sum_{j \in J} a_j h_j = 0$ esto contradice el Teorema de Borel entonces $\{1, \ldots, n+p\} - S$ tiene a lo mas n elementos por tanto S tiene al menos p elementos. Si q es el número de clases de equivalencia de los índices es consecuencia que $q \leq (n+p)/p$. Si T es cualquier subconjunto de $\{1, \ldots, n+p\}$ consistiendo de $n+1$ elementos entonces las formas H_i $(i \in T)$ son linealmente independientes, escribimos $T = T_1 \bigcup \ldots \bigcup T_q$ donde

$T_k = T \cap S_k$ si $t_k = \text{card}(T_k)$ cada T_k da $t_k - 1$ ecuaciones, así se obtienen al menos $t_1 - 1 + \ldots t_q - 1$ ecuaciones linealmente independientes entonces $qn + 1 - q \geq n + 1 - \frac{n}{p} + p = n - \frac{n}{q}$ entonces la dimensión de la intersección es $\leq \frac{n}{q}$.

Corolario 8. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ una función holomorfa tal que la imagen esta contenida en el complemento de $2n+1$ hiperplanos en posición general entonces f es constante.

Prueba. Tomando $p = n+1$ en el Teorema de Fujimoto-Green tenemos que la dimensión de la imagen es cero.

Teorema 57. Si $X_1, \ldots, X_{2n+1}$ son $2n+1$ hiperplanos en $\mathbb{P}^n$ en posición general. Si $X = X_1 \cup \ldots \cup X_{2n+1}$ entonces:

1. $\mathbb{P}^n - X$ es Brody hiperbólico.

2. Para cada partición $\{i_1, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_r\} = \{1, \ldots, 2n+1\}$ el espacio complejo $X_{i_1} \cap, \ldots \cap X_{i_k} - (X_{j_1}, \cup, \ldots, \cup X_{j_r})$ es Brody hiperbólico.

3. $\mathbb{P}^n - X$ es hiperbólico completo y hiperbólicamente encajado en $\mathbb{P}^n$.

Prueba. Si $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ y sea $X_I = \cap_{i \in I} X_i$ nosotros podemos identificar X_I con el espacio proyectivo de dimensión $n-k$, la intersección de los hiperplanos X_j con X_I para $j \notin I$ son hiperplanos en posición general en X_I, esto es consecuencia de la definición de posición general. Luego el caso primero y segundo es una caso especial del Corolario anterior y el tercer caso es el Teorema de Green 54.

Definición 49. Sean X una subvariedad algebraica irreducible de $\mathbb{P}^n$ y $P_1, \ldots, P_m$ polinomios homogéneos definiendo las secciones de hipersuperficies $Y_i = X \cap (P_i = 0)$ de X. Diremos que esas secciones son no *redundantes* si ninguna de ellas esta contenida en la unión de las otras.

Teorema 58 (Green). Si $f : \mathbb{C} \to X \subset \mathbb{P}^n$ es una función holomorfa omitiendo $\text{dim}X + 2$ secciones de hipersuperficies de subvariedad algebraica no redundantes entonces la imagen de f esta en un subconjunto algebraico propio de X.

Prueba. Sea $d = \dim X$ y $P_1, \ldots, P_{d+2}$ los polinomios homogéneos que definen las secciones de hipersuperficies podemos suponer que cada uno de esos polinomios es del mismo grado multiplicando por factores convenientes, los cocientes $\frac{P_i}{P_j}$ definen aplicaciones racionales en X y puesto que X tiene dimensión d este será el grado de trascendencia del cuerpo de funciones (vea [Sh] página 67) en consecuencia existe un polinomio homogéneo Q no nulo en $d+2$ variables tal que $Q(P_1, \ldots, P_{d+2}) = 0$ en X. Sea $f = (f_0, \ldots, f_n)$ donde los f_i son funciones enteras sin ceros comunes entonces $P_i(f) = h_i$ $i \in \{1, \ldots, d+2\}$ son $d+2$ funciones enteras además $Q(h_1, \ldots, h_{d+2}) = 0$. Expresemos Q como una suma de monomios $Q(t_1, \ldots, t_{d+2}) = \sum_M M(t)$ donde $M(t)$ es un monomio dado por $M(t) = t_1^{m_1} \ldots {}_{d+2}^{m_{d+2}}$ y los coeficientes son constantes no todas cero. Cada $M(h)$ es una función entera sin ceros, por el Teorema de Borel existe una relación lineal entre dos distintos monomios esto es $h_1^{m_1} \ldots . h_{d+2}^{m_{d+2}} = c h_1^{k_1} \ldots h_{d+2}^{k_{d+2}}$ con alguna constante c con algún $k_i \neq m_i$. Si $m_1 > k_1$ dividimos por $h_1^{k_1}$ y similarmente los otros índices, obtenemos así la relación $\prod_{i \in I} h_i^{r_i} = c \prod_{i \notin I} h_i^{r_i}$ con potencias $r_i > 0$ y un adecuado conjunto de índices I. Esto implica que el polinomio $R = \prod_{i \in I} P_i^{r_i} - c \prod_{i \notin I} P_i^{r_i}$ se anula en la imagen de f. Por otro lado R no se anula en X, de otro modo una de las secciones sería redundante con lo cual se tiene el resultado.

Capítulo 5

Hiperbólicidad y Dinámica

El objetivo de la Geometría de Kobayashi es obtener sobre ciertos espacios una métrica donde toda función holomorfa contrae esta distancia. Consecuencia de ello es que sobre estos espacios la iteración de una función holomorfa determina una familia equicontinua y por lo tanto normal. En este Capítulo probaremos dos resultados los cuales relacionan fuertemente la Geometría Hiperbólica con la dinámica de los endomorfismos. El primero de ellos nos da un criterio de hiperbólicidad y el otro nos muestra la influencia de la propiedad de encaje hiperbólico en el complemento de la iteración de los puntos críticos sobre el endomorfismo.

5.1 Generación de Espacios Hiperbólicos

El siguiente teorema nos muestra como a partir de funciones holomorfas en $\mathcal{H}_d$ se pueden generar espacios Hiperbólicos encajados y completos en el plano proyectivo.

Teorema 59. Sea $d \geq 2$ existe un subconjunto abierto Zariski $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}_d$ con la siguiente propiedad: Si $f \in \mathcal{H}'$ y C su conjunto crítico, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. No hay puntos en $\mathbb{P}^2$ dados en $f^n(C)$ para tres diferentes n, $0 \leq n \leq 4$.

2. $\mathbb{P}^2 - (\bigcup_0^4 f^n(C))$ es hiperbólico completo e hiperbólicamente encajado en $\mathbb{P}^2$.

Para la demostración de este Teorema será fundamental el siguiente Lema además hay que recordar el Teorema Pequeño de Picard. No existe función holomorfa no constante en $\mathbb{P}^1$ que omita tres puntos(ver [N] pg 167).

Lema 9. Sea $f = [z^d : w^d : t^d]$ entonces existe una perturbación arbitrariamente pequeña g de f tal que las cinco variedades $g^n(C)$, $n \in \{0, \ldots, 4\}$ no tienen intersección triple.

Prueba. Encontraremos una perturbación de g escogiendo una matriz A cercana a la identidad. Definimos $g = Af$, por la Regla de la Cadena vemos que el conjunto crítico C de f es el mismo que de g. El conjunto crítico C tiene tres componentes

$$C_1 : z = 0, \quad C_2 : w = 0 \quad y \quad C_3 : t = 0$$

y consideremos $0 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq 4$ y $m_i \in \{1, 2, 3\}$ denotemos con $A_{n,m}$ aquellas matrices A para las cuales $g^{n_i}(C_{m_i})$ tiene intersección triple. Denotaremos

$$V_n = \{(A, p_1, p_2, p_3)/A^{n_1} f(p_1) = A^{n_2} f(p_2) = A^{n_3} f(p_3); p_i \in \cup C_i\}$$

el cual es una subvariedad algebraica de $G \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, donde G denota el conjunto de las matrices complejas e inversibles de orden 3×3. Luego por el Teorema de la Aplicación Propia aplicado a la función proyección $\pi : G \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to G$ se tiene que la imagen $A_{n,m}$ es una subvariedad. Ahora si todos los m_i fuesen diferentes para $A = I$ tendríamos que V_n sería vacío luego por continuidad debe serlo cerca de la identidad supongamos por tanto que $m_1 = 1$ y que $2 \leq m_2 \leq m_3 \leq 3$. Considerando $g = [z^d + \epsilon t^d : w^d + \epsilon t^d : t^d]$ y $h(z) = z^d + e$ tendremos que

$$g(w = 0) = [z^d + \epsilon t^d : \epsilon t^d : t^d]$$

$$g^n(w = 0) = [h^n(\frac{z}{t}) : h^n(0) : 1]$$

$$g^n(z = 0) = [\epsilon^n : \epsilon^n : 1]$$

se observa que si algún $m_i = 2$ no habrá triple intersección si e es suficientemente pequeño . Resta considerar el caso cuando todos los $m_i = 1$ primero veremos que $n_1 > 0$ consideremos la familia $g_\epsilon = [z^d + \epsilon w^d : w^d : t^d]$ entonces $g_\epsilon^n(C_1)$ son líneas de la forma $z = n_i w$ en la coordenada $(t = 1)$

lo cual se ve rápidamente al reemplazar en $z = 0$, ahora si $i = 0$ tendremos que $n_0 = 0$, seguidamente consideremos para ϵ fijo las aplicaciones $g_{\epsilon,\delta} = [z^d + \epsilon w^d + \delta t^d : w^d : t^d]$ por inducción se puede ver que las iteraciones de C_1 en $t = 1$ son de la forma

$$g^n(C_1) = [n_n w^{d^n} + O(\delta)(w, \dots, w^{d^n - d}) + \delta + O(\delta^2) : w^{d^n} : 1]$$

donde $O(\delta)(w, \dots, w^{d^n-d})$ representa una expresión de orden δ por un polinomio de grado $d^n - d$ interceptando con C_1 tendremos que
$n_n w^{d^n} + O(\delta)(w, \dots, w^{d^n-d}) + \delta + O(\delta^2) = 0$, resolviendo esta ecuación polinomial en w resulta que w es del orden $O(\delta^{\frac{1}{d^n}})$, por tanto tendremos de que

$w = (\frac{-\delta}{n_n})^{\frac{1}{d^n}}(1 + O(\delta^{\frac{1}{d^n}}))^{\frac{1}{d^n}}$, entonces su coordenada w será dada por $\frac{-\delta}{n_n}(1 + O(\delta^{\frac{1}{d^n}}))$, así podemos ver que la intersección de C_1 con las diferentes imágenes de C_1 tiene diferente módulo, así nos reducimos al caso cuando $1 \leq n_1 < n_2 < n_3$, observe que en el caso previo podemos asumir de que las intersecciones de C_1 con las imágenes de C_1 tienen diferente módulo, para el caso $n_1 = 1 \quad n_2, n_3$ como arriba si p esta en la triple intersección existen a lo mas d preimágenes de p todas en C_1 con el mismo valor $|w|$ como uno de estos puntos a de estar en $g^{n_2-1}(C_1) \cap C_1$ y uno de estos puntos también a de estar en $g^{n_3-2}(C_1) \cap C_1$, así tendremos una contradicción por tener puntos con diferente módulo, por tanto sólo veremos el caso $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4$ y consideremos $A = I$ entonces $g = f$ luego la órbita de C_1 será C_1 a C_2 a C_3 a C_1 por lo que no tendrán intersección triple completando así la prueba.

Volvamos ahora al teorema.

Prueba. Para la parte 1 del Teorema recordemos que $\mathcal{H}_d$ podemos verlo como un subconjunto de el espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$. Definimos el subconjunto algebraico de $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ como

$$F = \{(f, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 : f^{n_1}(p_1) = f^{n_2}(p_2) = f^{n_3}(p_3), p_i \in C_f\}$$

esto claramente es un conjunto analítico por tanto por el Teorema de la Aplicación Propia su proyección $\pi_1(F) = F_1$ es un conjunto analítico, el complemento que sería el conjunto de todas las holomorfas de grado d que no tienen intersección triple en las cinco primeras imágenes de sus conjuntos críticos, esto es de $n_i \in \{0, \dots, 4\}$ luego este conjunto a de ser abierto en la topología de Zariski y no vacío por el lema anterior. En particular, será denso y lo denotaremos por $\mathcal{H}'_d$.

Para la parte 2, sea $f \in \mathcal{H}'$, consideremos el conjunto $\Omega = \mathbb{P}^2 - \bigcup_{n=0}^4 f^n(C)$. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \Omega$, como Ω satisface la condición del Teorema de Green 58, su imagen está contenida en una hipersuperficie compleja compacta X, y así su imagen estará en $X - \bigcup_{n=0}^4 f^n(C)$, por lo tanto omite al menos tres puntos en X. Luego por el Teorema de *Picard* tenemos que φ es constante, del mismo modo se prueba la segunda condición del Teorema de Green 54 con lo cual se concluye la prueba.

5.2 Expansión e Hiperbólicidad de Kobayashi

Mostraremos que las órbitas periódicas de funciones holomorfas no pueden ser atractoras bajo la hipótesis de hiperbolicidad.

Lema 10. Sea M conexo localmente compacto separable con semimétrica d_M y N conexo, localmente compacto y completo con métrica d_N, F el conjunto de funciones holomorfas de M en N con distancia decreciente es decir

$$F = \{f : M \to N \ holomorfa \ / d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y)\},$$

si p es un punto de M y K un compacto contenido en N entonces el conjunto $F(p, K) = \{f \in F : \ f(p) \in K\}$ es compacto.

Prueba. Sea f_n una sucesión en $F(p, K)$, veamos que existe una subsuceción convergiendo a un elemento de $F(p, K)$. Como M es separable consideremos $\{p_i\}$ denso en M y el conjunto

$$K_i = \{q \in N : \ d_N(q, K) \leq d_M(p, p_i)\},$$

el cual por ser una vecindad cerrada de K y a una distancia $d_M(p, p_i)$ del borde de K, resulta que K_i es compacto. Ahora como los $f_n \in F$ tenemos que son decrecientes en distancia de donde

$d_N(f_n(p_i, K) \leq d_N(f_n(p_i), f_n(p)) \leq d_M(p_i, p)$, por tanto los $f_n(p_i) \in K_i$ para todo n. Como los K_i son compactos existe una subsucesión $f_{i_n}(p_i)$ que converge en p_i considerando la subsucesión diagonal tenemos de que existe una subsucesión la cual seguiremos llamando por f_n con la propiedad de que $f_n(p_i)$ converge para todo p_i.

Afirmación $f_n(q)$ converge para todo $q \in M$.

En efecto, como $d_N(f_n(q), f_m(q)) \leq d_N(f_n(q), f_n(p_i)) + d_N(f_n(p_i), f_m(p_i)) + d_N(f_m(p_i), f_m(q)) \leq 2d_M(q, p_i) + d_N(f_n(p_i), f_m(p_i))$.

Sea $\epsilon > 0$, de la densidad de $\{p_i\}$ tomemos p_i tal que $2d_M(q,p_i) < \frac{\epsilon}{2}$ y como $f_n(p_i)$ es de cauchy, resulta que existe n_0 tal que si $n,m \geqslant n_0$ $d_N(f_n(p_i), f_m(p_i)) < \frac{\epsilon}{2}$, entonces

$f_n(q)$ es una sucesión de cauchy por tanto convergente, así definimos

$$f(q) = \lim_n f_n(q)$$

como cada f_n es decreciente resulta que f lo es y como $f_n(p) \in K$ compacto $f(p) \in K$. Finalmente para ver que f es holomorfa veamos la convergencia uniforme en compactos de M. Sea C un compacto de M y $\epsilon > 0$ para cada $q \in C$ escojamos n_q tal que $d_N(f_n(q), f(q)) \leq \dfrac{\epsilon}{4}$ para $n > n_q$ sea U_q una $\frac{\epsilon}{4}$ vecindad de $q \in M$ para $x \in U_q$ y $n > n_q$ tenemos de que $d_N(f(x), f_n(x)) \leq d_N(f_n(x), f_n(q)) + d_N(f_n(q), f(q)) + d_N(f(q), f(x)) \leq 2d_M(x,q) + d_N(f_n(q), f(q)) < \epsilon$ considerando el cubrimiento $\{U_q\}_{q\in C}$ de C podemos extraer un subcubrimiento finito U_{q_i} $1 \leq i \leq n$ tomando m el máximo de tales n_{q_i} resulta de que si $n > m$ entonces $d_N(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in C$.

Teorema 60. Si M es una variedad compleja hiperbólica y $0 \in M$.

Si $f : M \to M$ es una función holomorfa tal que $f(0) = 0$, entonces se cumple que:

1. Los autovalores de $df(0)$ tienen módulo no mayor a 1.

2. Si $df(0)$ es la transformación lineal identidad entonces f es la transformación identidad de M.

3. Si $|\det(df(0))| = 1$ entonces f es un biholomorfismo.

Prueba. Si d es la distancia dada por la métrica hiperbólica, consideremos $r > 0$ tal que $B_r(0) = \{p \in M : d(p,0) \leq r\}$ sea compacta. Ahora consideremos F_0 como las funciones de $B_r(0)$ en si mismo fijando al 0 y que decrecen la distancia. El lema anterior implica que F_0 es compacto.
1.- Dado $f : M \to M$ con $f(0) = 0$ y sea λ un autovalor de $df(0)$, como f es decreciente en distancia de Kobayashi tenemos que $f(B_r(0)) \subseteq B_r(0)$, por tanto $f^k|_{B_r}$ forma una sucesión en F_0, el cual por ser compacto tendrá una subsucesión convergente en F_0 en particular como $(df(0))^k$ tiene autovalor λ^k esta sucesión de autovalores a de tener una subsuceión convergente por tanto necesariamente $|\lambda| \leq 1$

2.- Denotemos por $d^m f(0)$ todas las derivadas parciales hasta orden m en 0 de f, de la fórmula de Taylor y del hecho que $f'(0) = I$ tenemos que para mostrar f es la identidad es suficiente ver que $d^m f(0) = 0$ para todo $m \geq 2$.

Sea $m \geq 2$ el menor entero tal que $d^m f(0) \neq 0$. Entonces $d^m f^k(0) = kd^m f(0)$ para todo k, de donde $(d^m f^k(0))$ no converge contradiciendo nuevamente la compacidad de F_0.

3.- Por la parte 1 tenemos que si $|det(df(0))| = 1$ entonces $|\lambda_i| = 1$ donde λ_i es autovalor de $df(0)$, considerando la forma canónica de Jordan si es necesario podemos suponer que $df(0)$ es diagonal caso contrario tendrá al menos un bloque de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

el correspondiente a este bloque para la matriz $df(0)^k$ será

$$A = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

de donde tendríamos de que $df(0)^k$ diverge lo cual será absurdo pues F_0 es compacto, así tenemos que $df(0)$ es una matriz diagonal, ahora como $|\lambda_i| = 1$ tendremos $\lambda_i = e^{iq}$ del hecho de ser convergente tendremos necesariamente de que $q \in Q$, por tanto podemos encontrar una subsucesión $df(0)^{n_k}$ convergiendo a la matriz identidad, en adelante cuando hagamos referencia una sucesión nos estaremos refiriendo a esta sucesión f_{n_k}. Denotemos ahora por E_0 el conjunto de funciones holomorfos de M en M fijando el 0.

Supongamos primeramente que M es completo por el lema anterior tendremos de que E_0 es compacto así existe una subsucesión de f^{n_k} que podemos considerarla ella misma convergiendo a un función holomorfa $h \in E_0$ por tanto $dh(0) = \lim df^{k_n}(0) = I$, luego por la parte 2 tenemos de que $h = I$ nuevamente como E_0 es compacto podemos encontrar una subsucesión de $f^{n_k - 1}$ denotada por ella misma convergiendo a $g \in E_0$ de donde tendremos de que

$$fog = f \lim f^{n_k - 1} = \lim f^{n_k} = I,$$

del mismo modo se obtiene que $gof = I$ por tanto f biholomorfismo.

Si M no es completo consideremos $r > 0$ de modo que la bola $B_r(0) = B_r$

sea compacta denotemos nuevamente por F_0 el conjunto de funciones de B_r en B_r con 0 como punto fijo y que sean decrecientes en d_M, es decir como en el caso 1 por el lema tendremos de que F_0 es compacto así obtendremos una subsucesión de f^{n_k} convergiendo a $h \in B_r$ además de la convergencia uniforme resulta que h es holomorfa en el interior de la bola B_r y $dh(0) = \lim df^{k_i}(0) = I$, luego de la parte 2 h será la identidad en B_r, por tanto podemos considerar W el mas grande conjunto abierto de M con la propiedad de que alguna subsucesión de f^{n_k} converge a la identidad para ello basta considerar W como la unión de los abiertos $B_{r_j} = W_j$ con esta propiedad, como en cada f_{k_i} existe una subsucesión convergiendo a la identidad en W_i y como familia W_i puede ser considerada numerable por ser el espacio separable, podemos considerar la subsuceción diagonal f^{n_n} que la denotaremos por f^n obteniendo así una sucesión convergiendo en W a la identidad, además como el interior de B_r esta contenido en W resulta de que $W \neq \phi$. Veamos ahora que W cerrado sea $p \in \overline{W}$ y U una vecindad de p tal que $\overline{U}$ sea compacta de la continuidad de los f^n y del hecho que en W es la identidad resulta de $\lim f^n(p) = p$, ahora como cada f^n es decreciente en distancia tendremos de que existe V vecindad de p de modo que $f^n(V) \subset U$ si denotamos con F el conjunto de todos los funciones con distancia decreciente de V en $\overline{U}$ fijando al punto p del lema tendremos de que F será compacto, así existe una subsucesión de f^n que podemos considerarla ella misma la cual converge en V y como en $W \bigcap V$ converge a la identidad, del Teorema de la Identidad, tendremos que en realidad converge a la identidad en V, considerando M conexo; sino haceamos lo mismo para cada componente y tendremos que $W = M$ con todo lo dicho tendremos una subsuceción f^n convergiendo a la identidad en M como la familia f^n está contenida en un compacto por el lema tendremos de que existe una subsucesión de f^{n-1} considerada como ella misma convergiendo a g así tendremos de que $fog = fo \lim f^{n-1} = \lim f^n = I$ análogamente tendremos de que $gof = I$ por tanto f biholomorfismo.

Teorema 61. Si $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ es una aplicación holomorfa con conjunto crítico C y $\mathcal{C} = \overline{\bigcup_{j=0}^{+\infty} f^j(C)}$, supongamos que $\mathbb{P}^k \setminus \mathcal{C}$ este encajado hiperbólicamente en $\mathbb{P}^k$. Si p es un punto periódico de f con $f^l(p) = p$, y autovalores λ_i $1 \leq i \leq k$ y $p \notin \mathcal{C}$ entonces $|\lambda_i| \geq 1$, además o bien $|\lambda_1 \cdots \lambda_k| > 1$, o f es un automorfismo de la componente de $\mathbb{P}^k \setminus \mathcal{C}$ que contiene a p.

Prueba. Mostraremos primero que los autovalores de la derivada de la l-ésima iteración de todos los puntos periódicos tienen todos módulo al menos uno. Consideremos $U = \mathbb{P}^k - \mathcal{C}$ y si $U_1 = U - f^{-1}(\mathcal{C})$ se observa que

$U_1 \subset U$. De la definición de U_1 tenemos que $f : U_1 \to U$ es un recubrimiento debido a que justamente le estamos quitando los puntos críticos y sabemos que ahí la funciones son localmente biholomorfismos. Como la métrica de Kobayashi es invariante por funciones recubridoras (Observación 38), tenemos $K_U(f(x)).f'(x)v = K_{U_1}(x).v$ y como $U_1 \subset U$ resulta que $K_{U_1}(x).v \geq K_U(x).v$, de donde

$$K_U(f(x)).f'(x)v \geq K_U(x).v \quad x \in U,\ v \in T_xU. \tag{5.1}$$

Si v_i es el autovector correspondiente para λ_i tendremos de que $(f^l)'(p)v_i = \lambda_i^l v_i$ aplicando esto a la ecuación (5.1) tendremos de que

$$|\lambda_{i^l}|K_U(p)v_i = K_U(f^l(p))(f^l)'(p).v_i \geq \ldots \geq K_U(p)v_i > 0.$$

como consecuencia de esta desigualdad obtenemos que $|\lambda_i| \geq 1$.
Sea Ω una componente de U conteniendo p y si $\Omega_l \subset \Omega$ es la componente conexa de $f^{-l}(\Omega)$ que contiene a p. Consideremos M el cubrimiento universal de Ω_l y $\pi : M \to \Omega_l$ la aplicación de recubrimiento, como $\Omega_l \subset U$ tendremos que es hiperbólicamente encajado por tanto se tiene que M es hiperbólicamente encajado (la Hiperbólicidad es invariante por recubrimiento), también de lo definido anteriormente tenemos que $\pi' = f^l o\pi : M \to \Omega$ será una función recubrimiento.

Debemos recalcar para uso posterior en esta prueba que los automorfismos de M dejan invariante K_M. Escojamos una k-forma holomorfa α no nula en p luego fijemos una métrica hermitiana del fibrado tangente TM. Sea $\|\,.\,\|$ una forma de volumen en el espacio de las $(0,k)$ formas tal que los automorfismos holomorfos preservan el volumen. Fijemos un punto $q \in M$ con la condición de que $\pi(q) = p$.
A partir de esto definamos:

$$E_\Omega^N(p,q,\alpha) = \inf\{\|\gamma\|_q^2;\ g(q) = p,\ g_*(\gamma) = \alpha\},$$

donde g recorre a lo largo de todas funciones holomorfas con jacobiano no nula de M a Ω con la condición de que $g(q) = p$, del mismo modo definimos

$$E_{\Omega_1}^N(p,q,\alpha) = \inf\{\|\gamma\|_q^2;\ g(q) = p,\ \pi(q) = p,\ g_*(\gamma) = \alpha\},$$

donde g recorre a lo largo de todas funciones holomorfas con jacobiano no nulo de M a Ω_l con la condición de que $g(q) = p$, para continuar con la prueba necesitamos del siguiente lema.

Lema 11. Las funciones extremales existen y son sobreyectivas.

Prueba. Nosotros probaremos el lema para E^M_Ω para el caso $E^M_{\Omega_l}$ es de modo análogo. Por definición de ínfimo sea g_n una sucesión minimizante de M a $\mathbb{P}^k - \mathcal{C}$ el cual por hipótesis es hiperbólicamente encajado entonces por la Observación 40 la familia $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua con respecto a la métrica en $\mathbb{P}^k$, así por el Teorema de Arzelà-Ascoli existe una subsucesión $g_{n_k} \to g$ y $g(p) = p$. El límite g será la función minimizante y además $\det(g') \neq 0$ esto es debido a la convergencia uniforme. Si $\widetilde{g}$ cumple con la condición de que $\pi' \circ \widetilde{g} = g$ y $\widetilde{g}(q) = q$ por el Teorema 60 tendremos $|\det(\widetilde{g}'(q))| \geq 1$. Si $|\det(\widetilde{g}'(q))| > 1$ de la Regla de la Cadena tenemos $|\det(\pi')||\det(\widetilde{g}')| < |\det(g')|$ en p y esto contradice la minimalidad de g. Entonces $|\det(\widetilde{g}'(q))| = 1$, así $\widetilde{g}$ es un automorfismo en particular g es sobreyectiva.

Continuamos ahora con la prueba del teorema.
Puesto que f^l es recubrimiento de Ω_l sobre Ω, y $f^l(p) = p$

$$\mathrm{E}^{\mathrm{M}}_{\Omega_\mathrm{l}}(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \alpha) = \mathrm{E}^{\mathrm{M}}_{\Omega}(\mathrm{f}^\mathrm{l}(\mathrm{p}), \mathrm{q}, \mathrm{f}^\mathrm{l}_*(\mathrm{p})(\alpha)). \tag{5.2}$$

Si $\Omega_l = \Omega$ la identidad (5.2) implicaría que $|\det(f^l)'(p)| = 1$, entonces del Teorema 60 la aplicación f^l será un automorfismo de Ω. Si Ω_l es un subconjunto propio de Ω del Lema 11 tenemos que el elemento que minimiza $E^M_{\Omega_l}$ no minimiza a E^M_Ω pues no sería sobreyectivo sobre Ω, por tanto$E^M_{\Omega_l} > E^M_\Omega$ luego la ecuación 5.2 nos dirá de que $|\det(f^l)'(p)| > 1$, teniendo así que el producto de sus autovalores tiene módulo mayor a 1.

Observación 47. Como una forma de volumen es invariante por automorfismos tenemos de que podemos denotar $E^N_\Omega(p, q, \alpha)$ por $E^N_\Omega(p, \alpha)$.

Proposición 15. Si C denota el conjunto crítico de una función holomorfa $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ de grado al menos dos tal què $\mathbb{P}^k - \overline{\bigcup_{n=0}^\infty f^{-n}(C)}$ está hiperbólicamente encajado entonces

$$\mathcal{J}_f \subset \bigcap_{N>0} \overline{\bigcup_{n \geq N} f^{-n}(C)} =: \mathbf{J}(C).$$

Prueba. Supongamos existe p que no esta en $J(C)$, entonces de la definición tenemos que existe N tal que $B(p, r)$ no intercepta a $\overline{\bigcup_{n\geq N} f^{-n}(C)}$, por tanto para todo $n \geq N$ tendremos $f^n(B(p, r)) \bigcap \overline{\bigcup_{k=0}^\infty f^{-k}(C)} = \emptyset$, y como por hipótesis $\mathbb{P}^k - \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(C)}$ está hiperbólicamente encajado, entonces de la Observación 40 la familia $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(p,r)$ en $\mathbb{P}^k$ con la métrica de este espacio es equicontinua, luego del Teorema de Arzelà-Ascoli $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es normal. Por lo tanto $p \in \mathcal{F}(f)$.

Referências Bibliográficas

[B] A. BEARDON, *Iteration of Rational Function*, Springer-Verlag (1991).

[FJ] C. FAVRE AND M. JONSSON, *Brolin's Theorem to curves in two complex dimension.* Preprint avalaible at http://fr.arXiv.org/abs/math.DS/0105260.

[FS1] J. E. FORNAESS AND N. SIBONY, *Complex dinamics in higher dimensional I*, Asterisque (1994) pag. 201-213.

[FS2] J. E. FORNAESS AND N. SIBONY, *Dynamics of* $\mathbb{P}^2$*(examples)* www.math.lsa.umich.edu/ fornaess/complexdynamics.html.

[G] R. GUNNING, *Introduction Several Complex Variables*, Tomo 2 Wadsworkth and Brooks / Cole advanced Books and Software (1990).

[F] W. FULTON, *Curvas Algebráicas*, Reverte (1971).

[Gr1] M. GREEN, *The hyperbolicity of the complement of* $2n+1$ *hyperplanes on general position in* $\mathbb{P}^k$ *and results*, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977) pag. 109-113.

[Gr2] M. GREEN, Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varietes, Amer. J. Math. 97 (1975) pag. 43-75.

[K1] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings* Marcel Dekker ,Inc , New York 1970.

[K2] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic Complex Spaces*, Springer-Verlag CSM (1998).

[L1] S. LANG, *Algebra*, Springer-Verlag GTM, Third Edition (2002).

[L2] S. LANG, *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*, Springer-Verlag (1987).

[Li] E. LIMA, *Analisis Real*, Proyecto Euclides-IMPA Vol 2 (1981).

[N1] J. NOGUCHI- T. OCHIAI, *Geometric Funtion theory in Several Complex Variables*, AMS Traslations American Mathematical Society (1984).

[N] J. NOGUSHI, *Introduction to Complex Analysis*, AMS Traslations American Mathematical Society)(1992).

[R] ROYDEN, *Remarks on the Kobayashi metric, several Complex Variables II*, LNM Springer-Verlag Vol. 185 (1975) pag 125 -137.

[S] B.V. SHABAT, *Introduction to complex analysis* part II AMS Traslations (1992).

[Sh] IGOR R . SHAFAREVICH, *Basic Algebraic Geometry 1* Springer- Verlang (1988).

[Ot] OTTO FOSTER *Lectures on Riemamm Surfaces* Springer-Verlang (1981).

[Si] N. SIBONY, *Dynamique des Applications Rationnlles de* $\mathbb{P}^k$, Panoramas et Syntheses in Dynamique et Geométrie Complexes Soc. Math. France.

[M] BERNAND MALGRAGE , *Ideals of Differentiable Functions* , Tata Institute of fundamental Resarch, 1966.