

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

FOTOGRAMAS CLAVES Y WAVELETS PARA LA
SIMULACIÓN CONTROLADA DE FLUÍDOS

ELABORADO POR:

Bach. Alex David Hernández Maturrano

ASESORA: Dra. Irla Mantilla Núñez

LIMA – PERÚ

Digitalizado por:

2013

Resumen

El presente trabajo se centra específicamente en la formulación e implementación de un modelo matemático para el control virtual de la forma geométrica de un fluido en movimiento, basado en la aplicación de fotogramas claves y la transformada wavelet para esta simulación controlada de fluidos.

Para ello se realiza una formulación lagrangiana de un problema de contorno y condiciones iniciales asociado a un sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales del tipo Navier-Stokes de flujo incomprensible. Este problema se resuelve numéricamente mediante el método de las partículas o SPH (de Smoothed Particle Hydrodynamics) considerando un número mínimo de partículas dentro de un cubo. Una vez resuelto el sistema se procede a diseñar el control. El mecanismo de control está basado en un sistema de partículas externo, denominadas *partículas de control*, las cuales ejercen fuerzas sobre el fluido, junto a superficies triangulizadas que servirán como fotogramas claves de la simulación. Las fuerzas de las partículas de control dependen de la distancia entre éstas partículas y las partículas del fluido, así como también de un cierto radio de influencia con origen en el punto de control. Los fotogramas claves y el método de coordenadas promedio de Ju, Schaefer y Warren nos permiten definir posiciones espaciales y temporales para estas partículas de control.

Otro aporte de la Tesis es optimizar la calidad y el costo computacional para visualizar la simulación 3D de modo fotorealista. Para esto se considera una función de turbulencia basada en la función de ruido de Cook y DeRose. Esta función de ruido es diseñada a partir de un Análisis Multirresolución con B-splines cuadráticas uniformes como funciones de escala. Los resultados computacionales del modelo se han realizado usando el software Blender.

Agradecimientos

Agradezco el resultado de esta tesis a mi asesora, la Dra. Irla Mantilla Núñez que en todo momento fue capaz de transmitirme la disciplina para lograr este trabajo con generosa disposición y apoyo en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional de Ingeniería.

Dedico este trabajo a
mis padres Segundo y Ruth,
por su invaluable apoyo y comprensión...

Introducción

En los últimos años, la animación basada en ecuaciones de la física se ha convertido en un tema recurrente en Computación Gráfica, produciendo animaciones con sorprendente realismo. En particular, significativos avances en el modelado de la dinámica de líquidos y gases han dado impresionantes animaciones que nunca podrían haber sido creadas a mano. Desafortunadamente, la animación basada en la solución de ecuaciones físicas, no permite al animador diseñar libremente la animación, ya que editar directamente los parámetros de simulación afecta a la dinámica de formas complejas e impredecibles. Por lo tanto, los investigadores en Computación Gráfica han comenzado la búsqueda de métodos de control de alto nivel para controlar dinámicas complejas.

No obstante, el control fino de simulaciones basadas en física se mantuvo fuera del alcance hasta hace pocos años. Tal control detallado, desde un punto de vista clásico, requería de cientos de miles de variables libres, incluso en ciertos sistemas previos requería la aproximación de la derivada para cada variable, haciendo el control factible sólo a escalas relativamente groseras. Para hacer el control factible para simulaciones grandes, se necesitaba de técnicas que no desbordaran el número de parámetros de control.

Los trabajos en el control de fluidos orientado a Computación Gráfica fueron iniciados por Foster y sus colaboradores. Foster y Metaxas en 1997 propusieron controles de usuarios sobre los parámetros de fluidos. Más tarde, Foster y Fedkiw en el 2001 controlaron el movimiento de flujo de agua ajustando el campo de flujo de velocidad exactamente en lugares específicos. Sin embargo, ninguno de estos enfoques permitió al usuario cumplir objetivos de alto nivel para una simulación. Recientemente, Treuille y otros 2003 propusieron un nuevo paradigma para controlar simulaciones de humo a través de fotogramas claves definidos por el usuario. Este enfoque guía la simulación hacia las restricciones o fotogramas claves utilizando un conjunto de fuerzas de control, cuyos parámetros se calculan utilizando una optimización no lineal. El principio de los fotogramas claves se continuó en trabajos posteriores como en McNamara y otros 2004 y Wojtan y otros 2006.

Por otro lado, en lo referente a la mejora de los métodos de simulación, los métodos más recientes para simular fluidos resuelven directamente las ecuaciones de Navier-Stokes o las ecuaciones de Euler sobre una malla. Por lo que, si se requieren características finas más pequeñas que un elemento de malla, como es común cuando simulamos fenómenos a gran escala como las explosiones o las erupciones volcánicas, la malla debe ser refinada de alguna manera. Esto resulta en un aumento lineal en el uso de memoria y un más que aumento lineal en el tiempo de ejecución. En vez de seguir esa línea, nosotros seguimos las ideas de Kim y otros 2008 que proponen un algoritmo que genera detalles de fluido

de pequeña escala que se insertan pos-simulación. Bajo esta perspectiva, en esta tesis se pretende captar estas necesidades y fundamentar resultados de control de fluidos según los avances recientes en Computación Gráfica, situándonos en la línea del modelamiento matemático para simulación y visualización realista de fluidos.

Tanto los métodos de control como los de simulación que hemos tomado en cuenta no dependen del método numérico usado en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por esa razón trabajamos con el método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) que es el estado del arte actual en simulación de fluidos. Fujisawa y otros 2011 recogen este método junto con la turbulencia wavelet y partículas-subpartículas de control.

Para los resultados usamos el software libre Blender de animación 3D que implementa estos algoritmos bajo un entorno de diseño asistido por computador con capacidad de render fotorealista. Este software nos permitió concentrarnos en el diseño específico de nuestras escenas 3D en una interfaz flexible, evitando ingresar matrices y otros datos numéricos propios de una programación en consola. No está de más mencionar que la base científica de Blender es mantenida por una gran cantidad de colaboraciones de muchos investigadores en Computación Gráfica alrededor del mundo.

Pasamos a describir brevemente lo que veremos en cada capítulo de la presente tesis. En el capítulo 1 desarrollamos los conceptos y teoremas matemáticos que necesitaremos para abordar nuestro problema. Básicamente los teoremas importantes de análisis de Fourier, wavelets, filtros, las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos y el concepto de turbulencia según la teoría de Kolmogorov. En el capítulo 2 planteamos nuestras hipótesis y el problema que desarrollaremos. En el capítulo 3 se describe la metodología de solución de nuestro problema planteado. Comenzamos con el método SPH, luego desarrollamos el mecanismo de control de fluidos y la inserción de detalles finos pos-simulación. En el capítulo 4 se muestran algunos resultados obtenidos según esta metodología implementadas en Blender.

Índice general

Agradecimientos	2
Resumen	4
Introducción	5
1. Marco teórico y fundamentos matemáticos	9
1.1. Transformación de Fourier y Muestreo	16
1.2. La Transformada Wavelet	27
1.3. Análisis Multirresolución	32
1.4. Análisis Multirresolución y Filtrado	34
1.5. Las ecuaciones de los fluidos	38
1.6. La teoría de turbulencia de Kolmogorov	49
2. Planteamiento del Problema	54
2.1. Antecedentes	54
2.2. Hipótesis	55
2.3. Planteamiento del Problema	55
3. Desarrollo del problema	58

3.1. Método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)	58
3.2. Construcción del proceso de simulación controlada	69
3.3. Turbulencia Wavelet en fluidos	76
3.4. Optimización de visualización de las imágenes	80
4. Resultados y simulación del proceso	86
4.1. SPH	86
4.2. Turbulencia wavelet	87
4.3. Fluido sin control	88
4.4. Agua con control	89
4.5. Permanencia del comportamiento físico	93
4.6. Conclusiones y comentarios	93
Apéndices	95
A. Lista de términos	96
B. Códigos	99
B.1. SPH	99
Bibliografía	104

Capítulo 1

Marco teórico y fundamentos matemáticos

Definición 1. Sea f una función real o compleja. Se define el soporte de f como la clausura del conjunto donde f es diferente de cero, que denotamos como $\text{sop}(f)$. Es decir,

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \text{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) \neq 0\}}$$

Definición 2. Sea X un espacio de medida con medida positiva μ , $\Omega \subset X$ medible y p un número real tal que $1 \leq p < \infty$. Definimos $L^p(\Omega)$ como el conjunto,

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$$

$L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones. Provista con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

es un espacio de Banach. Para el caso $p = 2$, es un espacio de Hilbert separable con el producto escalar definido por:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

para todo $u, v \in L^2(\Omega)$. En especial, cuando $\Omega = \mathbb{R}$; $u \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una función de energía finita o señal.

Definición 3. Sea X un espacio de medida, $\Omega \subset X$ medible. Definimos

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad \begin{array}{l} / f \text{ es medible y existe una constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p sobre } \Omega \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Teorema 1 (Convergencia Monótona, [24]). Sea X un espacio de medida, $\Omega \subset X$ medible y (f_n) una secuencia de funciones medibles que satisfacen:

- a) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq \infty$ sobre Ω
- b) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ sobre Ω .

Entonces, f es medible y

$$\int_{\Omega} f_n \longrightarrow \int_{\Omega} f$$

Teorema 2 (Convergencia Dominada, [24]). Sea X un espacio de medida, $\Omega \subset X$ medible, y (f_n) una secuencia de funciones medibles que satisfacen:

- a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ sobre Ω
- b) Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ sobre Ω

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$

Teorema 3 (Lema de Fatou, [24]). Sea X un espacio de medida, $\Omega \subset X$ medible y $f_n : \Omega \longleftarrow [0, \infty]$ una secuencia de funciones medibles. Entonces,

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Teorema 4 (Fubini, [24]). Si $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces, para c.t.p $x \in \Omega_1$, $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$ y $\int_{\Omega_2} F(x, y) d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$. Similarmente, para c.t.p $y \in \Omega_2$, $F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1)$ y $\int_{\Omega_1} F(x, y) d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$. Además, se cumple también:

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x, y) d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x, y) d\mu_1 = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) d\mu_1 d\mu_2$$

Definición 4 (Convolución). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, luego se define la convolución de f y g como:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y)dy$$

Definición 5 (Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función en $L^1(\mathbb{R})$, la Transformada de Fourier de f se define como:

$$F(f)(s) = \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-isu} du \quad (1.2)$$

Sin embargo, aunque se garantiza que la transformada de Fourier de una función integrable existe, ésta puede ser no integrable, por esta razón trataremos de extender esta definición al espacio $L^2(\mathbb{R})$ que es un espacio más rico en estructura.

Proposición 1 (Propiedades algebraicas de la Transformada en $L^1(\mathbb{R})$).

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta, \lambda, h$ reales.

1. *Linealidad:* $(\alpha f + \beta g)\hat{\ } = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$
2. *Conjugación:* $(\overline{f})\hat{\ }(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$
3. *Traslación:* $(T_h f)\hat{\ }(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-i h \xi}$
4. *Modulación:* si $g(x) = f(x)e^{ihx}$, entonces $\hat{g}(\xi) = (T_h \hat{f})(\xi)$
5. *Dilatación:* si $g(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1}x)$ y $\lambda > 0$, entonces $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda \xi)$

Demostración. La primera se deduce inmediatamente de la linealidad de la integral; la segunda, de las propiedades de la conjugación; para las demás hay que hacer los cambios de variable adecuados. Véase [1] y [6]. □

Proposición 2 (Propiedades analíticas de la transformada en $L^1(\mathbb{R})$).

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

1. $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ con $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$
2. \hat{f} es uniformemente continua sobre \mathbb{R} .
3. Si la derivada f' de f existe y está en $L^1(\mathbb{R})$ y f se anula cuando $|x| \rightarrow \infty$, luego

$$\hat{f}'(\xi) = i \xi \hat{f}(\xi) \quad (1.3)$$

4. *Lema de Riemann-Lebesgue:* $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$

5. Si f y g son integrables,

$$\int f\hat{g} = \int \hat{f}g$$

Demostración.

1. $|\hat{f}(s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f e^{-isu}| du = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| |e^{-isu}| du = \|f\|_1 \Rightarrow \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$
2. Sea δ y s arbitrarios y consideremos

$$\begin{aligned} |\hat{f}(s + \delta) - \hat{f}(s)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} (e^{-i\delta x} - 1) f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\delta x} - 1| |f(x)| dx \end{aligned}$$

Note que el término de la derecha no depende de s . Ahora, desde que $|e^{-i\delta x} - 1| |f(x)| \leq 2|f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$ y $|e^{-i\delta x} - 1| \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica que la diferencia inicial tiende a cero cuando $\delta \rightarrow 0$. Pues, para cualquier secuencia $h_n \rightarrow 0$, $f_n(t) = f(t)(e^{-ih_n t} - 1) \rightarrow 0$, luego,

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ist} (e^{-ih_n t} - 1) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_n [f(t) e^{-ist} (e^{-ih_n t} - 1)] dt = 0$$

y desde que (h_n) fue una secuencia arbitraria se sigue lo dicho.

Luego,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\hat{f}(s + \delta) - \hat{f}(s)| = 0$$

que implica la continuidad uniforme.

3. Existen sucesiones a_n y b_n que tienden respectivamente a $-\infty$ y $+\infty$, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$. Integrando por partes se tiene

$$\int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-its} dx = f(b_n) e^{-ib_n s} - f(a_n) e^{-ia_n s} + is \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-its} dx$$

Haciendo tender n al infinito y teniendo en cuenta que f y f' son integrables, se tiene el resultado.

4. Primero supongamos que $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Luego:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-isu} du = \int_a^b e^{-isu} du = \frac{e^{-isa} - e^{-isb}}{is} \rightarrow 0 \text{ cuando } s \rightarrow 0$$

Luego, la afirmación vale para funciones características sobre intervalos. Como una función simple es una combinación lineal de funciones características, un argumento similar muestra que la afirmación vale también para funciones simples.

Sea $\varepsilon > 0$, como el conjunto de funciones simples sobre \mathbb{R} es denso en $L^1(\mathbb{R})$, sea $g_N(x)$ una función simple tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f - g_N| < \varepsilon/2$.

Luego,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-isu} du \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u) - g_N(u)| du + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(u)e^{-isu} du \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para un N suficientemente grande. Como ε fue arbitrario, se sigue lo requerido.

5. Se escribe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy} dy dx$$

y se aplica el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración.

□

Observación. La función

$$f(x) = e^{-x}u_0(x), \quad u_0(x) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

está en $L^1(\mathbb{R})$, pero su transformada de Fourier

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{1 + is}$$

no está en $L^1(\mathbb{R})$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-t}(e^{-ist})dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+is)t} dt \end{aligned}$$

y desde que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(1+is)t} = 0$

$$= \frac{1}{1 + si}$$

Para s grande, $|\hat{f}(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \approx \frac{1}{|s|}$, por lo tanto, $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$

Proposición 3. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, luego,

$$F(f * g)(s) = F(f)(s) * F(g)(s) \quad (1.4)$$

Demostración. Una aplicación del teorema de Fubini. □

Lema 1. Si f y g están en $L^2(\mathbb{R})$ su convolución define una función continua.

Demostración. La función $|f(x-y)g(y)|$ es integrable porque se mayor puntualmente por $|f(x-y)|^2 + |g(y)|^2$, de modo que la convolución está bien definida. Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h-y) - f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y+h) - f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|^2 dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

que tiende a cero con h por la continuidad respecto a las traslaciones de la norma de $L^2(\mathbb{R})$. □

Proposición 4 (Identidad de Parseval, [1]). Sea f una función en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (es decir, f y f^2 son integrables). Entonces, \hat{f} está en $L^2(\mathbb{R})$ y satisface

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_{L^2} \quad (1.5)$$

Para extender nuestra definición de transformada de Fourier al espacio $L^2(\mathbb{R})$ necesitaremos del siguiente lema

Lema 2.

$$\overline{L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$$

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, la sucesión de funciones :

$$f_n(t) = f(t) \mathbf{1}_{[-n,n]}(t), n \in \mathbb{N}$$

está en $L^2(\mathbb{R})$. También, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos aplicar la desigualdad de Holder, obteniendo

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_{[-n,n]} |f_n| = \int_{[-n,n]} |f_n| \cdot 1 \leq \left(\int_{[-n,n]} |f_n|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{[-n,n]} |1|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq (2n)^{1/2} \|f_n\|_2 \end{aligned}$$

Luego, como $(f_n) \subset L^2(\mathbb{R})$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_2 < \infty$ y entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$. Luego, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, es claro que $f_n - f \in L^2(\mathbb{R})$ y además:

$$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} |f|^2 \right)^{1/2}$$

luego, cuando $n \rightarrow \infty$, $|f|^2$ se integra sobre un conjunto de medida nula, de donde $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

□

Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, por el lema 2 existe una sucesión (f_n) en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R})$; por la Proposición 4 cada $\widehat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$. Mostraremos que esta es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Aplicando Proposición 4 nuevamente.

$$\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_2^2 = \|\widehat{f_m - f_n}\|_2^2 = 2\pi \|f_m - f_n\|_2^2 \quad (1.6)$$

En la ecuación 1.6, para $m > n$, el lado derecho se puede descomponer como:

$$\|f_m - f_n\|_2^2 = \int_{-m}^{-n} |f(t)|^2 dt + \int_n^m |f(t)|^2 dt$$

El lado derecho tiende a 0 cuando $m, n \rightarrow \infty$. Lo que implica que la sucesión $\{\widehat{f}_n\}$ también es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Como $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio completo, la sucesión $\{\widehat{f}_n\}$ converge, de modo que existe una función h de $L^2(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n - h\|_2 = 0$. Diremos que h es la Transformada de Fourier de f , que seguiremos escribiendo \widehat{f} .

Necesitamos comprobar que la definición anterior no depende de la sucesión escogida. Así es, porque si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son dos sucesiones de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que convergen en $L^2(\mathbb{R})$ a f , su diferencia converge a 0; por la Proposición 4

$$\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_2^2 = 2\pi \|f_m - f_n\|_2^2$$

desde que

$$\|f_n - g_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

se sigue que $\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_2 \rightarrow 0$ por tanto \widehat{f} está bien definida.

Por otra parte, está claro que si la función ya estaba en $L^1(\mathbb{R})$ la nueva definición no cambia la Transformada de Fourier porque se puede tomar $f_n = f$ para todo n .

El siguiente teorema resume la teoría de Fourier para $L^2(\mathbb{R})$ y es en este espacio en el que se trabaja en la práctica.

Teorema 5 (Teorema de Plancherel, [1]). *La transformación*

$$F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto \hat{f}$$

donde

$$\hat{f}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(t) e^{-its} dt$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *F es una biyección lineal continua.*
2. (Identidades de Parseval) $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$ ó $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$
3. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces la transformación de Fourier \hat{f} es la misma calculada como una función de $L^1(\mathbb{R})$ o una función de $L^2(\mathbb{R})$.
4. (Inversión)

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \hat{f}(s) e^{ist} ds$$

Las identidades algebraicas de la transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ valen también para $L^2(\mathbb{R})$ desde que el límite es lineal. A continuación analizaremos la relación de la transformada de Fourier con la teoría de muestreo. Esta relación es muy importante y será explotado en varias partes de la propuesta de esta tesis.

1.1. Transformación de Fourier y Muestreo

1.1.1. La señal impulso

No todas las señales del universo físico pueden representarse mediante una función y un ejemplo de ello es justamente la *señal impulso*. Esta señal es caracterizada por tener una *variación instantánea en magnitud*, una intensidad muy grande y energía finita. Se puede intentar representar ésta señal mediante una "función" con las siguientes propiedades:

1. $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ con $f(t_0) \neq 0$, y $f(t) = 0$ si $t \neq t_0$ (variación instantánea)
2. $f(t_0) = \infty$ (una gran intensidad en t_0)

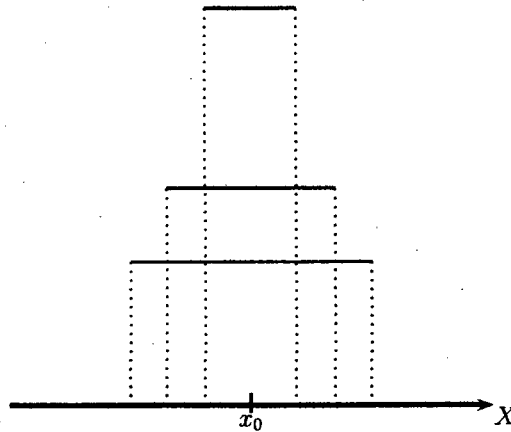


Figura 1.1: Secuencia de señales pulsos convergiendo hacia un impulso en el origen

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt < \infty \text{ (energía finita)}$$

Claramente, la propiedad 2 significa que f , no es, de hecho, una función. Se puede utilizar una extensión adecuada de la noción de una función para modelar dichas señales: eso es hecho de modo satisfactorio con la teoría de distribuciones formalizada por Laurent Schwartz.

Sin embargo, para los fines de esta tesis no será necesario abordar la teoría de distribuciones, bastará definir la *distribución delta de Dirac* por sus propiedades y caracterizarla como el límite de una familia de funciones llamadas *funciones delta nascentes* o también llamados *núcleos de Dirac*.

Esta distribución delta de Dirac, comunmente llamada función delta de Dirac puede ser definida como la “función” que tiene las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \quad (1.8)$$

Al comparar esta dos propiedades con las propiedades de una señal impulso es claro por que la función delta de dirac es también conocida como la función impulso unitario.

Para conceptualizar la función delta de Dirac, consideremos un rectángulo con un lado a lo largo de el eje X centrado alrededor de $x = x_0$ tal que el área del rectángulo sea

1 (esto es equivalente a una distribución de probabilidad uniforme). Obviamente hay muchos rectángulos que cumplen esto, como se muestra Figura 1.1. Se puede construir una función delta de Dirac, comenzando con un cuadrado de alto y la ancho igual a 1. Si reducimos a la mitad la anchura y el doble de la altura, el área permanecerá constante. Podemos repetir este proceso tantas veces como se desee. Como la anchura va a cero, la altura será infinito, pero el área permanecerá igual a 1. Cualquier rectángulo de área uno, centrado en x_0 , se puede expresar como:

$$\delta_\varepsilon(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - x_0| \geq \varepsilon/2 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |x - x_0| < \varepsilon/2 \end{cases}$$

La función delta de Dirac, localizada en $x = x_0$, puede ser definida como el límite de $\delta_\varepsilon(x - x_0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x - x_0) \quad (1.9)$$

La función δ_ε es llamada una *función delta nascente*. Existen muchas funciones delta nascentes, por ejemplo el pulso gaussiano y el lorentziano entre los más conocidos.

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\alpha^2}} \quad (\text{pulso gaussiano})$$

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\frac{\alpha}{(x - x_0)^2 + \alpha^2} \right] \quad (\text{pulso lorentziano})$$

Existe otra forma de definir la distribución delta de Dirac y es mediante la siguiente ecuación.

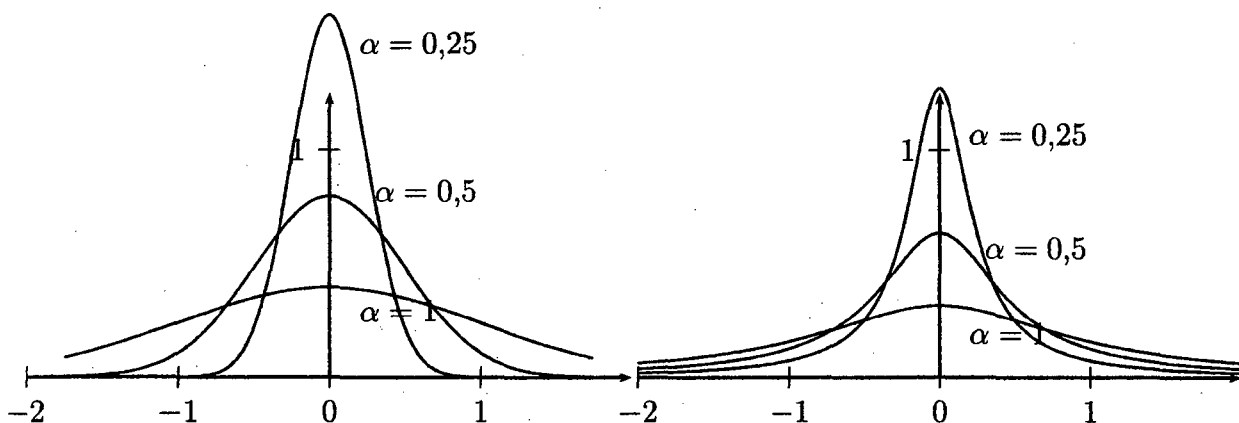


Figura 1.2: Aproximación Gaussiana(izquierda) y Loretziana(derecha) de la función delta de Dirac.

Proposición 5 (Propiedad de filtrado). Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, es decir, una función en $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto, la distribución δ es definida vía:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\delta(x)dx = \psi(0) \quad (1.10)$$

entendiendo la integral arriba como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\delta(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\delta_\epsilon(x)dx$$

Se comprueba que si f es continua en \mathbb{R} se tiene:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(t-u)du \quad (1.11)$$

Así, al realizar la integral, la delta selecciona entre todos los valores posibles de una función arbitraria continua $f(x)$ su valor en $x = x_0$. Esta propiedad es la análoga, en el continuo, a la ecuación $\sum_i a_i \delta_{ij} = a_j$ que selecciona una sola componente del vector \mathbf{a} .

1.1.2. Filtros

Definición 6. Se define un filtro como una función $L : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$; el filtro es llamado lineal si el operador L es lineal y se denomina espacio-invariante(o invariante en el tiempo) si un retardo del tiempo puede ser aplicado tanto antes como después del filtrado, con el mismo resultado, es decir,

$$L(f(t - t_0)) = (Lf)(t - t_0)$$

Además, se denomina *respuesta impulsiva del filtro* L a la imagen $L\delta$ de la señal impulso bajo el filtro.

Teorema 6. Sea L un filtro lineal y espacio-invariante y f una señal, entonces

$$Lf(t) = h * f \quad (1.12)$$

donde $h = L\delta$

Demostración. En efecto, la espacio-invarianza de L da:

$$L(\delta(t - u)) = h(t - u)$$

Por tanto,

$$L(f(t)) = L \int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(u - t)du = L \int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t - u)du \quad (1.13)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u)h(t - u) = \int_{\mathbb{R}} h(u)f(t - u)du = (h * f)(t) \quad (1.14)$$

□

Por tanto, los filtros lineales y tiempo-invariantes son simples de estudiar ya que ellos están completamente determinados por sus valores sobre la señal impulso $h = L\delta(t)$.

Aplicando el filtro L del teorema anterior a e^{ist} , tenemos:

$$\begin{aligned} L(e^{ist}) &= \int_{\mathbb{R}} h(u)e^{is(t-u)} du \\ &= e^{ist} \int_{\mathbb{R}} h(u)e^{-isu} du \\ &= \hat{h}(s)e^{ist} \end{aligned}$$

Esto muestra que cada exponencial e^{ist} es un autovector del filtro L , y el correspondiente autovalor es el valor $\hat{h}(s)$ de la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva h de L .

Este resultado es de suma importancia. Es el enlace entre la teoría de filtros y el análisis de Fourier. De hecho, como una consecuencia inmediata, esto nos da una idea de la acción de un filtro sobre las frecuencias de una señal f como mostraremos abajo.

Del ecuación de la transformada inversa de Fourier tenemos, si f es una señal:

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w)e^{i2\pi wt} dw$$

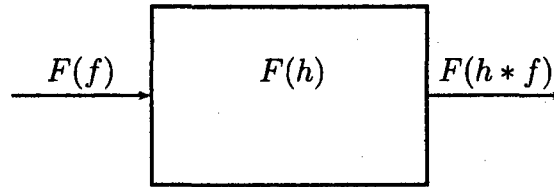


Figura 1.3: Diagrama del efecto de los filtros lineales y espacio-invariantes según la ecuación 1.16.

Aplicando L a f obtenemos:

$$L(f(t)) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) L(e^{iwt}) dw = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) \hat{h}(w) e^{iwt} dw \quad (1.15)$$

Ecuación arriba muestra que el filtro L modula los componentes sinusoidales e^{iwt} de f , amplificándolos o atenuándolos. Desde que $Lf = h * f$, por la unicidad de la transformada inversa de Fourier y la ecuación (1.15) tenemos:

$$F(h * f) = F(h)F(f) \quad (1.16)$$

Donde F es la transformada de Fourier, y en el lado derecho tenemos un producto de dos funciones. La transformada de Fourier $F(h)$ de la respuesta impulsiva es llamada la *función de transferencia* del filtro. La ecuación (1.16) será usada para dar una mejor idea acerca de la operación de filtrado. Para una señal f , los filtros lineales y espacio-invariantes se clasifican de acuerdo con su forma de modificar las frecuencias de la señal. Esta clasificación incluye cuatro tipos básicos:

Definición 7. Se define:

- **Filtro lowpass :** Filtro que atenúa las frecuencias altas de la señal sin cambiar la frecuencias bajas. De la ecuación (1.16) se sigue que el gráfico de la función de transferencia de un filtro ideal lowpass es como en la Figura 1.4.

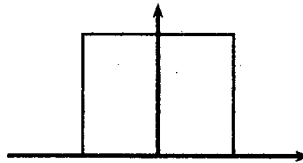


Figura 1.4: Función de transferencia de un filtro ideal lowpass.

- **Filtro highpass :** Filtro tiene un comportamiento complementario al del filtro de paso bajo. Este atenúa las frecuencias bajas y no cambia las frecuencias altas. De la ecuación (1.16) se sigue que el gráfico de la función de transferencia de un filtro ideal highpass es como en la Figura 1.5.

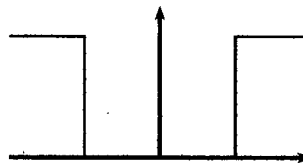


Figura 1.5: Función de transferencia de un filtro ideal highpass.

- **Filtro bandpass :** Filtro cambia tanto las frecuencias altas y bajas de la señal, pero no cambia las frecuencias en algún intervalo del espectro. El gráfico de la función de transferencia de un filtro ideal bandpass se muestra en la Figura 1.6.

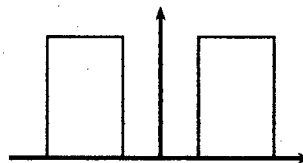


Figura 1.6: Función de transferencia de un filtro ideal bandpass.

- **Filtro bandstop** : Complementario del filtro bandpass. Este filtro afecta las frecuencias sobre un intervalo(banda) del espectro. Frecuencias fuera de la banda de frecuencia no son afectadas. El gráfico de la función de transferencia de un filtro ideal bandstop se muestra en la Figura 1.7.

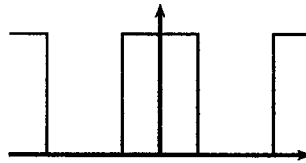


Figura 1.7: Función de transferencia de un filtro ideal bandstop.

1.1.3. La transformada de Fourier y el muestreo de puntos

Existe una forma muy interesante de analizar el muestreo por puntos y es usando un tren de impulsos asociado a la red de muestreo. En un caso unidimensional un tren de impulsos es dado por

$$\delta_{\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

Como se ilustra la Figura 1.8.

La longitud del intervalo Δt es llamado *periodo de muestreo*, y $\omega = 2\pi/\Delta t$ es la *frecuencia de muestreo*. La discretización de la señal es un proceso de 2 pasos. Primero obtenemos la señal

$$f_{\Delta}(t) = f \cdot \delta_{\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \quad (1.17)$$

multiplicando la señal y el tren impulsos. Esto es ilustrado en la Figura (1.9a).

Del "tren de señal" $f_{\Delta} = f \cdot \delta_{\Delta}$, la señal discretizada es obtenida reemplazando $\delta(t)$ por el *impulso unitario discreto*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n=0 \\ 0 & , \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$

Y cambiando la variable a n . Esto es ilustrado en la Figura (1.9b).

El impulso unitario discreto juega el rol de la delta de Dirac cuando trabajamos con señales en dominio discreto. Ahora usaremos la transformada de Fourier para entender el

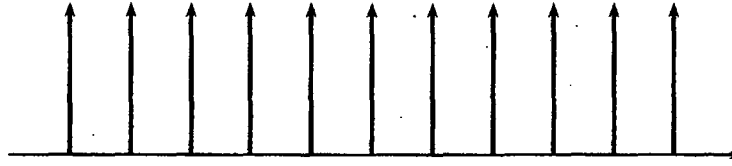


Figura 1.8: Tren de impulsos unidimensional

problema de la reconstrucción de una función a partir de una representación por muestreo de puntos.

Un importante paso en esta dirección es comprender el espectro de una señal muestreada por puntos. Más precisamente, supongamos que tenemos una latice de muestreo uniforme de los números reales con distancia de intervalo Δt . La señal discretizada viene dada por la ecuación (1.17). La relación entre la transformada de Fourier \hat{f} de f y la transformada de Fourier \hat{f}_d de la señal discretizada f_d es dada por:

$$\hat{f}_d(s) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(s - \frac{k}{\Delta t}\right) \quad (1.18)$$

Una clara interpretación de la ecuación (1.18) es muy importante: a parte del factor de escala $1/\Delta t$, esto dice que el espectro de la señal muestreada f_d es obtenida a partir del espectro \hat{f} de la señal continua f trasladándolo por múltiplos de $1/\Delta t$, y sumando sobre todo el espectro trasladado. Esto es ilustrados en la Figura 1.10.

Es importante remarcar que la distancia trasladada varía inversamente con el periodo de muestreo: El período de muestreo es Δt y la distancia trasladada es $1/\Delta t$. Por lo tanto, muestreos más cercanos producen traslaciones más espaciadas y viceversa. Note que, en particular, frecuencias muy altas se introdujeron en el proceso de muestreo por la traslación infinita del espectro. La ecuación (1.18) es el punto clave para entender el problema de la reconstrucción cuando usamos un muestreo uniforme de puntos para representar una función. Este hecho se explica en base al teorema siguiente.

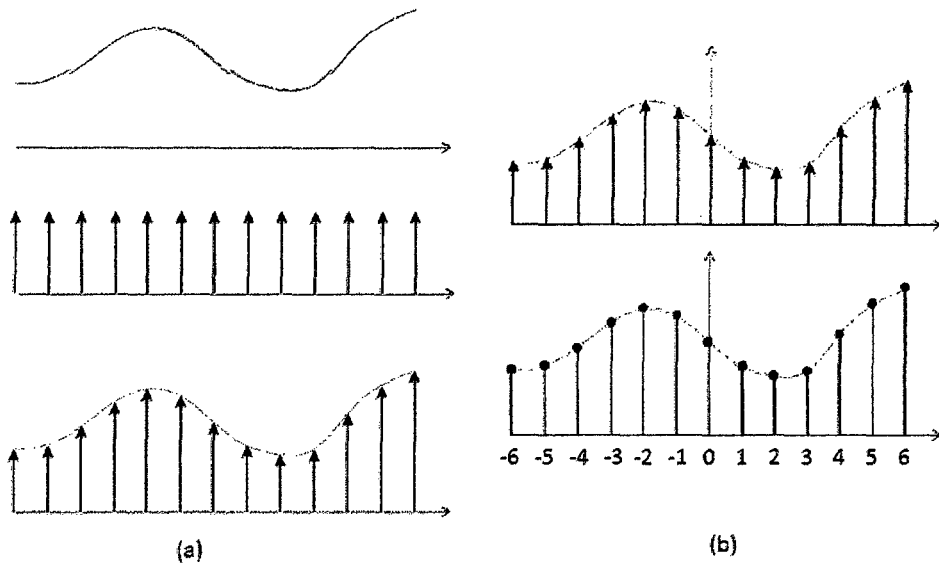


Figura 1.9: Muestreo de una función

Teorema 7 (Teorema de Shannon-Whittaker, [28]). *Considere una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto, $\text{sop}(f) \subset [-\Omega, \Omega]$, y una partición uniforme $t_i, i \in \mathbb{Z}$ de los números reales tal que $\Delta t \leq 1/2\Omega$. Entonces f puede ser reconstruida (exactamente) a partir de su representación por muestreo de puntos $(f(t_i))_{i \in \mathbb{Z}}$. La ecuación de reconstrucción es dada por:*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{1}{2\Omega}\right) \frac{\text{sen}\pi(2\Omega t - k)}{\pi(2\Omega t - k)} \quad (1.19)$$

Definición 8. *Sea una función f tal que su \hat{f} tiene soporte compacto. Entonces se dice que f es una función banda limitada, ya que sus frecuencias se encuentran dentro de un intervalo limitado (banda) del dominio de frecuencias.*

La tasa límite de muestreo $1/2\Omega$ es llamada el *límite Nyquist*. Intuitivamente hablando, a mayor valor de frecuencias presentes en la señal, mayor debe ser la tasa de muestreo si se quiere tener una reconstrucción fiel.

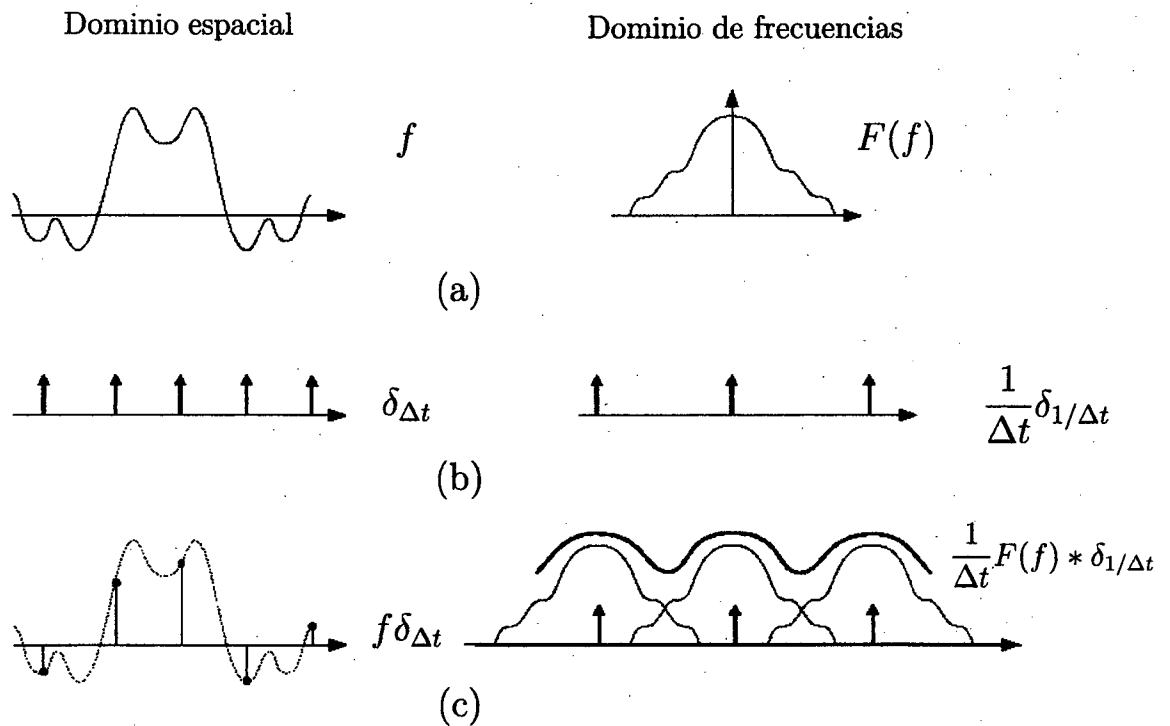


Figura 1.10: Muestreo y el espectro de Fourier: a) Mostramos el gráfico de la función f ; en b) el gráfico de la transformación de Fourier \hat{f} ; en c) el gráfico de la representación de muestreo por puntos (f_i) de f y en d) mostramos la transformación de Fourier de la función muestreada f_d

1.2. La Transformada Wavelet

Definición 9 (Transformada Continua Wavelet). Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y sean $a \neq 0, b$ números reales. La transformada continua wavelet (CWT) de $f \in L^2(\mathbb{R})$ es dada por:

$$(W_\psi f)(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (1.20)$$

y llamamos a ψ la wavelet madre. Las funciones

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1.21)$$

son llamadas wavelets y los términos

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad (1.22)$$

son llamados los coeficientes wavelets continuos de f

Proposición 6 ([1]).

1. (Linearidad) Para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y $c, d \in \mathbb{C}$

$$(W_\psi [cf + dg])(a, b) = c(W_\psi [f])(a, b) + d(W_\psi [g])(a, b)$$

2. (Traslación) Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{C}$

$$(W_\psi [f(t-c)])(a, b) = (W_\psi f)(a, b+c)$$

3. (Escalado) Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $d > 0$,

$$(W_\psi [d^{1/2} f(dt)])(a, b) = (W_\psi f)(da, db)$$

La expresión 1.20 en la Definición 9 es coherente si simplemente pedimos que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, sin embargo, para obtener fórmulas de reconstrucción se necesita de la siguiente condición, llamada *condición de admisibilidad*:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (1.23)$$

y por esta razón es que viene el nombre de Transformada Wavelet, ya que una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface la condición de admisibilidad (1.23) es llamada una wavelet.

Teorema 8 (Relación de Parseval para la Transformada Wavelet). Sea la función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface la condición (1.23), entonces para cualquier $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple:

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dadb}{a^2} \quad (1.24)$$

Demostración. Antes de demostrar la igualdad, caracterizaremos los multiplicandos de la integral, para ello notemos que:

$$\widehat{\psi}_{a,b}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

haciendo el cambio de variable $z = \frac{t-b}{a}$ entonces $dz = \frac{dt}{a}$, así tenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{a,b}(s) &= a \int_{\mathbb{R}} e^{-is(az+b)} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi(z) dz \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isaz} e^{-isb} \psi(z) dz \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-isb} \int_{\mathbb{R}} e^{-isaz} \psi(z) dz \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-isb} \widehat{\psi}(as) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Por otra parte, de la identidad de Parseval obtenemos:

$$W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{a,b} \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}_{a,b}(x)} dx \quad (1.26)$$

Reemplazando (1.25) en (1.26) tenemos:

$$\begin{aligned} W_\psi f(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\frac{a}{\sqrt{|a|}} e^{-ixb} \widehat{\psi}(ax)} dx \\ &= \frac{a}{2\pi \sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{ixb} \overline{\widehat{\psi}(ax)} dx \\ &= \frac{a}{2\pi \sqrt{|a|}} F \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Análogamente obtenemos

$$W_\psi g(a, b) = \frac{a}{2\pi \sqrt{|a|}} F \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \quad (1.28)$$

Con estas consideraciones demostraremos la relación (1.24), para lo cual denotamos:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi} f(a, b) \overline{W_{\psi} g(a, b)} \frac{dadb}{a^2}$$

Usando las relaciones (1.27) y (1.28) obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{4\pi^2|a|} F \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) F \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) \frac{dadb}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2|a|} F \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) F \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (-b) dadb \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2|a|} F \left\{ \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (b) F \left\{ \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \right\} (b) dbda \end{aligned}$$

La última igualdad viene de la propiedad de conjugación de la Proposición 1 que vale también para funciones en $L^2(\mathbb{R})$. De la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi|a|} \overline{\widehat{f}(x) \widehat{\psi}(ax)} \widehat{g}(x) \widehat{\psi}(ax) dx da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi|a|} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \widehat{g}(x) \widehat{\psi}(ax) dx da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi|a|} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 dx da \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 dx \frac{da}{|a|} \end{aligned}$$

utilizando el teorema de Fubini (4) obtenemos

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(ax)|^2}{|a|} da \right) dx$$

Luego hacemos el cambio de variable $u = ax$ para la integral en paréntesis, obteniendo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{|u|} du \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} C_{\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} dx = \frac{C_{\psi}}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_2 \end{aligned}$$

aplicando nuevamente la identidad de Parseval tenemos que:

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_2 = \frac{1}{C_{\psi}} I$$

Lo cual termina la demostración. □

Teorema 9. Si ψ satisface la condición (1.23), entonces para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ se cumplen las siguientes relaciones:

i) *Fórmula de inversión*

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2} \quad (1.29)$$

ii) *Isometría*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \quad (1.30)$$

Demostración. Para la prueba de (1.30) basta tomar $g = f$ en (1.24), así tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \langle f, f \rangle_2 = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2}$$

Para probar (1.29), sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y ψ una wavelet, de (1.24) tenemos:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_2 &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \psi_{a,b}(t) dt} \frac{dad b}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(t) \psi_{a,b}(t)} dt \frac{dad b}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \overline{g(t)} \psi_{a,b}(t) dt \frac{dad b}{a^2} \end{aligned}$$

utilizando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_2 &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2} \right) \overline{g(t)} dt \\ &= \frac{1}{C_\psi} \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, g \right\rangle_2 \end{aligned}$$

Así podemos concluir que

$$\langle C_\psi f, g \rangle_2 - \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, g \right\rangle_2 = 0$$

es decir, para todo $g \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple

$$\left\langle C_\psi f - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, g \right\rangle_2 = 0$$

luego, como $L^2(\mathbb{R})$ es de Hilbert separable:

$$C_\psi f - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2} = 0$$

de donde se deduce lo requerido. □

Podemos leer ecuación (1.29) de la transformada wavelet inversa de dos maneras distintas:

- La función f puede ser recuperada a partir de su transformada wavelet;
- La función f se puede descomponer como una superposición de sus coeficientes tiempo-frecuencia $\psi_{a,b}(t)$.

1.2.1. Comentarios sobre la transformación wavelet

La ecuación (1.20) que define la transformación Wavelet puede ser escrita como un producto convolución.

$$(W_\psi f)(a, b) = (f * \psi_a)(b)$$

donde

$$\psi_a(u) = |a|^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{-u}{a}\right)} \quad (1.31)$$

Por tanto la transformación wavelet es un filtro lineal espacio-invariante. Además, si escogemos las wavelets de la ecuación 1.21 como siendo ortonormales entonces obtenemos una base(ortonormal) de $L^2(\mathbb{R})$. De esta manera, se suele definir una wavelet ortogonal como:

Definición 10. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función tal que la familia de funciones

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

donde j y k son enteros arbitrarios, es una base ortonormal para el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Entonces se dice que ψ es una wavelet ortogonal.

Finalmente, podemos obtener la transformación wavelet a partir de la transformación de Fourier de una señal dada, simplemente usando (1.22) junto a la identidad de Parseval.

$$\begin{aligned}(W_\psi f)(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{a,b}} \rangle \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w) \overline{\widehat{\psi}(aw)} e^{iwb} dw\end{aligned}\tag{1.32}$$

1.3. Análisis Multirresolución

Un ejemplo claro y bien conocido de la utilización de escalas o “niveles de resolución” se produce en los mapas. Utilizando una escala pequeña se puede observar sólo los detalles macroscópicos de las regiones asignadas, mientras al cambiar la escala se puede observar o representar más detalles sobre el objeto representado en el mapa.

La representación multirresolución o Análisis Multirresolución (AMR) es un modelo matemático adecuado para formalizar la representación de la escala en el universo físico. Como veremos, este problema está intrínsecamente relacionado a los wavelets.

Definición 11 (Análisis Multirresolución). *Se define una representación multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$ como una sucesión de subespacios cerrados V_j , $j \in \mathbb{Z}$, de $L^2(\mathbb{R})$, satisfaciendo las siguientes propiedades:*

$$V_j \subset V_{j+1};\tag{1.33}$$

$$f(u) \in V_j \text{ si, y solo si, } f(2u) \in V_{j+1}.\tag{1.34}$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}.\tag{1.35}$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).\tag{1.36}$$

$$f(x) \in V_0 \text{ si y sólo si } f(x - m) \in V_0 \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}\tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}\text{Existe una función } \phi \in V_0 \text{ tal que el conjunto } \{\phi(u - k); k \in \mathbb{Z}\} \\ \text{base ortonormal de } V_0.\end{aligned}\tag{1.38}$$

La función ϕ se llama la función escala de la representación multirresolución. Cada uno de los espacios V_j se llama espacios escala.

Note que las condiciones (1.33), (1.36), (1.35) significan que toda función en $L^2(\mathbb{R})$ puede ser aproximada por elementos de los subespacios V_j y cuando $j \rightarrow \infty$ la precisión de la

aproximación crece. Las condiciones (1.34), (1.37) expresan la invarianza del sistema de subespacios $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ con respecto a las traslaciones y dilataciones.

Es inmediatamente claro que podemos adoptar dos formas de ver un AMR .

- Tomamos los subespacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ como nuestros objetos básicos. Ellos tienen que satisfacer las condiciones (1.33)-(1.37) que por lo general son bastante fáciles de comprobar. Luego tenemos que encontrar una función de escala que satisfaga (1.38). Esto usualmente no es tan obvio.
- Empezamos con función ϕ . Definimos V_0 como $span\{\Phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ y los otros espacios V_j se definen por la condición (1.34). Condición (1.37) es automáticamente satisfecha y sólo tenemos que comprobar las condiciones (1.33)-(1.35) y (1.38).

Ejemplo 1 (Análisis Multirresolución Haar). . Considere la función

$$\phi(t) = \chi_{[0,1]} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } t \geq 1 \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1) \end{cases}$$

Se comprueba que ϕ es una función de escala de una representación multirresolución. En este caso,

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}); f|_{[2^j k, 2^j(k+1)]} = \text{constante}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Es decir, la proyección de una función f en el espacio escala V_j está dada por una función que es constante en los intervalos $[2^j k, 2^j(k+1)]$. Esta es la representación multirresolución de Haar. *Para una demostración detallada véase [18].*

1.3.1. Comentarios sobre el Análisis Multirresolución

Supongamos que tenemos un AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ en $L^2(\mathbb{R})$ con función de escalamiento Φ . Introducimos los subespacios W_j de $L^2(\mathbb{R})$ definidos por la condición:

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \tag{1.39}$$

Sea J_j el operador dilatación diádica ($J_j f(x) = f(2^j x)$). Es sencillo comprobar que $2^{j/2} J_j$ es un operador unitario, luego por definición de AMR (1.34), $J_j(V_1) = V_{j+1}$. Por tanto tenemos:

$$V_{j+1} = J_j(V_0 \oplus W_0) = J_j(V_0) \oplus J_j(W_0) = V_j \oplus J_j(W_0)$$

Esto da

$$W_j = J_j(W_0) \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \tag{1.40}$$

De las condiciones (1.33), (1.35) y (1.36) de la Definición 11 obtenemos una descomposición ortogonal

$$L^2(\mathbb{R}) = \oplus \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (1.41)$$

Por tanto si encontramos una función $\Psi \in W_0$ tal que $\{\Psi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en W_0 , esta será una wavelet(esto es claro de (1.40) , (1.41) y de la definición 10) y se dice que está asociada con el análisis multirresolución.

1.4. Análisis Multirresolución y Filtrado

Se puede conseguir una visualización muy informativa de la sucesión de espacios escala V_j trabajando en el dominio de la frecuencia. Para marcar las ideas trabajemos en la partición diádica, donde el espacio V_j tiene frecuencia de muestreo 2^j .

La proyección ortogonal de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ en V_j se obtiene usando una operación de filtrado de f con los diferentes núcleos de $\phi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$ que definen filtros de paso bajo. Se indica la frecuencia de corte de estos filtros por α_j (véase la Figura 1.11), llegamos a la conclusión de que cada espacio V_j está constituido por funciones cuyas frecuencias están contenidos en el intervalo $[-\alpha_j, \alpha_j]$, $\alpha_j > 0$.

Cuando se pasa del espacio V_j al espacio V_{j+1} cambiamos de la escala 2^{-j} a una escala más fina 2^{-j-1} . Por lo tanto la banda de frecuencia aumenta a un intervalo $[-\alpha_{j+1}, \alpha_{j+1}]$. El gráfico del espectro de $\phi_{j+1,k}$ es la curva de puntos en la Figura 1.11. El espacio escala V_{j+1} consiste en el conjunto de todas las funciones cuyo espectro está contenido en $[-\alpha_{j+1}, \alpha_{j+1}]$.

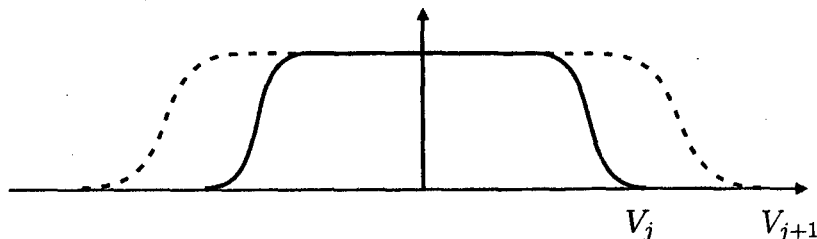


Figura 1.11: Espectro de la función de escala.

Para cada espacio V_j , con escala 2^{-j} , tenemos el operador representación $R_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$, dada por la proyección ortogonal sobre V_j

$$R_j(f) = \text{Proy}_{V_j}(f) = \sum_k \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}.$$

De la condición (1.36) de la definición de una representación multiresolución, tenemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} R_j(f) = f, \quad (1.42)$$

esto es, con una escala más fina es con la que se consigue obtener una mejor representación de la función f . Esto se ilustra en la Figura 1.12 que muestran una función f , y su representación en los espacios de escala V_0 y V_1 de la representación multiresolución de Haar.

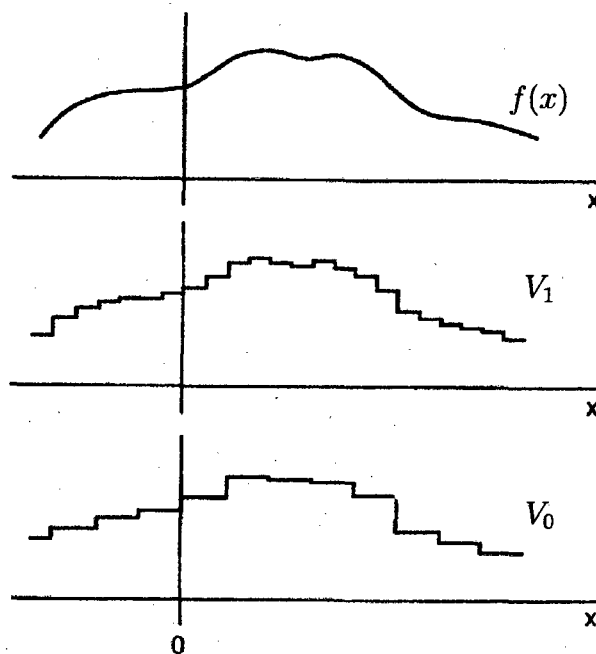


Figura 1.12: Aproximaciones a escala de una función.

Hay otra manera de interpretar la ecuación (1.42). En la Figura 1.13 vemos que el espacio V_{j+1} se obtiene a partir del espacio V_j mediante la adición de todas las funciones de $L^2(\mathbb{R})$ con frecuencias en la banda $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ del espectro. Este “espacio de detalle” es justamente el espacio W_j de la ecuación 1.39.

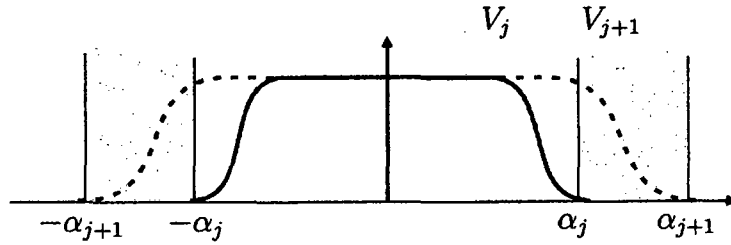


Figura 1.13: Banda de frecuencias entre V_j y V_{j+1} .

El espacio W_j contiene los detalles de la señal en la escala V_j . La ecuación 1.39 dice que una función representada en un espacio escala más fino V_{j+1} se obtiene a partir de la representación en un espacio escala más grueso del espacio V_j , mediante la adición de los detalles. Estos detalles se pueden obtener mediante un filtrado de paso de banda, cuya banda de paso es exactamente el intervalo $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$.

Finalmente describimos un ejemplo del uso práctico de las wavelets.

Ejemplo 2 (Ruido Wavelet). *Las funciones de ruido son bloques esenciales en la construcción de shaders en computación gráfica. El ruido Wavelet, diseñado por Cook y DeRose, es la función de ruido $N(x)$ construida de la siguiente manera:*

1. Se construye un Análisis Multirresolución de subespacios V_j de dimensión finita con las funciones base B-spline cuadráticas uniformes $B(x)$ como generador para V_0 . Similar a como se hizo en el taller de prácticas profesionales (véase [19]).
2. Se construye la función $R(x) = \sum_i r_i B(2x - i)$ donde r_i son números aleatorios (pseudoaleatorios) generados en cada paso e i varía entre los nodos de la partición del dominio. $R(x) \in V_1$.
3. Se calcula el submuestreo $R^\downarrow(x) \in V_0$ de $R(x)$.

$$R^\downarrow(x) = \sum_i r_i^\downarrow B(x - i)$$

$$r_i^\downarrow = \sum_k a_{k-2i} r_k$$

Los coeficientes a_{k-2i} son elementos de la matriz de análisis A según las notaciones usuales¹.

¹Puede revisarse la sección de banco de filtros de cualquier libro de wavelets

4. Se calcula $R^{\downarrow\uparrow}(x)$ sobremuestreando $R^{\downarrow}(x)$

$$R^{\downarrow\uparrow}(x) = \sum_i r_i^{\downarrow\uparrow} B(x - i)$$

$$r_i^{\downarrow\uparrow} = \sum_k p_{i-2k} r_k^{\downarrow}$$

$$R^{\downarrow\uparrow}(x) \in V_1.$$

5. Se calcula $N(x)$ sustrayendo $R^{\downarrow\uparrow}(x)$ de $R(x)$

$$N(x) = \sum_i r_i B(2x - i) - \sum_i r_i^{\downarrow\uparrow} B(2x - i)$$

$$= \sum_i n_i B(2x - i)$$

$$\text{donde } n = r_i - r_i^{\downarrow\uparrow}.$$

Esta función de ruido fue desarrollado como un reemplazo para el ruido de Perlin. Se prueba que este ruido existe sólo en una banda espectral estrecha, lo que hace posible un filtrado más sofisticado. Usaremos esta propiedad de banda límite como un primer paso en la construcción de una función de turbulencia incompresible. En la Figura 1.14 se muestra el proceso de construcción de la función $N(x)$.

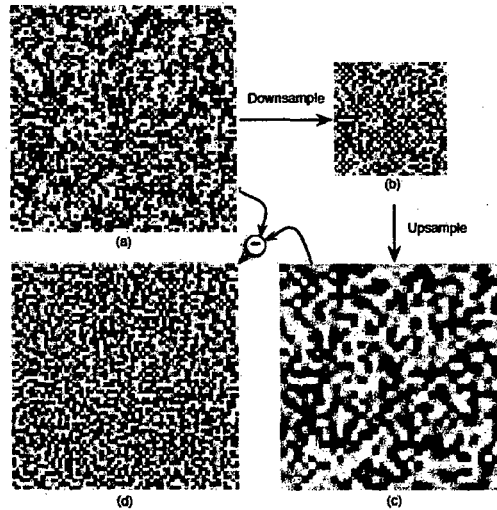


Figura 1.14: a) Imagen R de ruido aleatorio, b) Imagen submuestreada a la mitad R^{\downarrow} , c) Imagen a mitad de resolución $R^{\downarrow\uparrow}$, d) Imagen de ruido N . Figura tomada de [7].

1.5. Las ecuaciones de los fluidos

Esta sección está dedicada a presentar los conceptos básicos y los resultados matemáticos de la dinámica de fluidos.

La mecánica de fluidos se rige por tres ecuaciones fundamentales: La ecuación de continuidad, la ecuación de cantidad de movimiento, y la ecuación de conservación de energía. Estas ecuaciones son derivadas de los principios de conservación de la mecánica y termodinámica, aplicada a fluidos. Este conjunto de ecuaciones, en su forma diferencial, se les llama ecuaciones de Navier-Stokes.

1.5.1. Principios básicos y supuestos

Para modelar matemáticamente el fenómeno físico del movimiento de un fluido, es necesario hacer algunas suposiciones básicas acerca de nuestros objetos de estudio.

- *La ley de la conservación de la masa*: también conocida como la ley Lomonosov-Lavoisier, dice que:

“La masa de un sistema cerrado de sustancias deben permanecer constante, independientemente de los procesos que actúan en el interior del sistema.”

De hecho, esta ley es sólo aproximadamente cierta. Dado que, según la relatividad especial, la masa relativista (m) depende del propio marco de referencia. Sin embargo, para velocidades bajas (mucho más bajas que la luz), la variación en la masa aparente es insignificante. Para nuestro modelamiento matemático de la dinámica de fluidos, se supone que “*la masa no se crea ni se destruye*” ($\frac{dm}{dt} = 0$).

- *Leyes del movimiento de Newton*: las tres leyes físicas que proporcionan relaciones entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento del mismo. Forman la base de la *mecánica clásica*, de la cual la mecánica de fluidos continuos es una subdisciplina. Una formulación moderna de las tres leyes de Newton es:

Primera ley “Si ninguna fuerza externa actúa sobre una partícula, entonces es posible seleccionar un conjunto de marcos de referencia, llamados marcos de referencia inerciales, de los cuales se observa de que la partícula se mueve sin ningún cambio en la velocidad.”

Segunda ley “Observado sobre un marco de referencia inercial, la *fuerza neta* (\vec{F}) sobre una partícula es igual a la tasa de cambio de su *momento lineal* ($\vec{p} = m\vec{v}$)”. Esta ley también puede ser escrita como $F = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$.

Tercera ley “Siempre que A ejerce una fuerza sobre B, B al mismo tiempo ejerce una fuerza sobre A con la misma magnitud y en la dirección opuesta.”

- La *primera ley de la termodinámica*, la cual dice que

“El aumento de la energía interna (U) de un sistema termodinámico es igual a la cantidad de energía añadida al sistema como resultado de un calentamiento (Q) menos la cantidad de energía perdida como el resultado del trabajo realizado por el sistema sobre el entorno (W).”

en ecuaciones esto significa que $dU = \delta Q - \delta W$. En palabras simples representa el supuesto de que “la energía no se crea ni se destruye”.

- La *hipótesis del continuo*: Aunque los fluidos están compuestos de moléculas que chocan unas con otras, a gran escala, pueden ser considerados como un continuo, es decir, sus propiedades se puede asumir funciones continuas definidas sobre subconjuntos de \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. Esta suposición nos proporciona una muy buena aproximación para los fenómenos macroscópicos de interés.

Además de los principios generales de la mecánica de fluidos continuos, para facilitar la presentación, se supone una convención estándar de suavidad [5] “Las propiedades de los fluidos (por ejemplo, velocidad, densidad, tensión, etc) son suaves (de clase C^∞) con respecto a la posición y el tiempo sobre el cierre del dominio del fluido, de tal forma que las operaciones estándares del cálculo se puede realizar sin inconvenientes.

1.5.2. Visión lagrangiana y euleriana

Queremos describir matemáticamente el movimiento de una región de fluido durante un intervalo de tiempo dado. Tal descripción puede estar basada en la idea de estudiar la trayectoria tomada por cada una de las “partículas infinitesimales” que componen el fluido. Esta idea nos lleva a asociar el movimiento del fluido con una transformación geométrica que va desde la configuración que este fluido presenta en un instante de tiempo de referencia hacia la configuración que presenta en otro instante de tiempo. Formalizaremos estos conceptos y la intuición física.

Definición 12 (Región de fluido). Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado tal que la frontera $\partial\mathcal{D}$ es suave². Si \mathcal{D} es supuesto “lleno con un fluido”, decimos que \mathcal{D} es una región de fluido.

Definición 13 (Configuración de Referencia y tiempo instantáneo). La configuración de referencia es una región de fluido Ω_0 fijado en un instante de tiempo de referencia $t_0 \in \mathcal{I}$, donde \mathcal{I} es un intervalo (de tiempo) durante el cual estamos interesado en estudiar la dinámica del fluido.

Definición 14 (Movimiento del fluido y mapa de flujo). El movimiento del fluido es la familia $\{\varphi_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ de mapas continuos $\varphi_t : \overline{\Omega_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyos φ_t , para cada $t \in \mathcal{I}$, lleva la posición $x_0 \in \Omega_0$ de una partícula del fluido (en la configuración de referencia) hacia su posición de partícula en el tiempo t . Con esto definimos el mapa de flujo de fluido como la función $\varphi : \overline{\Omega_0} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x_0, t) = \varphi_t(x_0), \forall x_0 \in \Omega_0$.

La idea intuitiva de que dos cuerpos diferentes no pueden ocupar simultáneamente la misma porción de espacio puede ser expresada como una propiedad para nuestra definición de movimiento del fluido: “para cada $t \in \mathcal{I}$, $\varphi_t|_{\Omega_0}$ es suave y tiene inversa suave sobre $\Omega_t = \varphi_t(\Omega_0)$ ”. Otra propiedad intuitiva es asegurar la continuidad de $\varphi(x_0, \cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$, para cada $x_0 \in \Omega_0$ ³. Intuitivamente, esto significa que “ninguna partícula puede desaparecer y reaparecer bruscamente en otra posición”, es decir, la trayectoria de una partícula de fluido es (al menos) continua.

Definición 15 (Trayectoria). La trayectoria $x : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de una partícula del fluido inicialmente localizada en el punto $x_0 \in \Omega_0$ puede ser definida por $x(t) = \varphi(x_0, t)$ y, de nuestra convención de suavidad, x describe una curva suave en \mathbb{R}^n .

Esta descripción del movimiento de un fluido a través del mapa de flujo de fluido y las trayectorias de las partículas con respecto a una configuración de referencia es la también llamada *descripción lagrangiana* y los puntos en Ω_0 son conocidos como *coordenadas materiales*.

Otro enfoque para describir el movimiento de partículas es a través de la definición de un campo vectorial suave $\mathbf{u} : \overline{\mathcal{D}} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido en una región de fluido fijo \mathcal{D} . Definimos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ como la velocidad de la partícula de fluido que pasa a través de $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ en el tiempo $t \in \mathcal{I}$:

²Aquí usamos nuestra *convención de suavidad*. En este caso la convención fue usada para evitar los requerimientos técnicos que nos permitan invocar el *Teorema de la divergencia* en cálculos posteriores.

³De hecho, nosotros sólo necesitamos que φ sea diferenciable sobre $\overline{\Omega_0} \times \mathcal{I}$ y sus derivadas temporales (al menos la primera y la segunda) son continuas sobre $\overline{\Omega_0} \times \mathcal{I}$

$$\mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}_0, t), t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t), \mathbf{x}_0 = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$$

Esta es la también llamada *descripción Euleriana* y los puntos en \mathcal{D} son conocidos como *coordenadas espaciales*.

Definición 16 (Derivada material y derivación a través de trayectorias).

1. La derivada material con respecto al campo \mathbf{u} es es operador $\frac{D}{Dt} : \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$.
2. La derivada de f a través de la trayectoria pasando por el punto \mathbf{x} en el tiempo t es dado por $\frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t)$

Físicamente la derivada material representa la variación instantánea de una cantidad física en relación al tiempo de un elemento de fluido que se mueve en el espacio.

Teorema 10 (Teorema de transporte de Reynolds, [5]). Sea $f : \overline{\mathcal{D}} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente suave y $\Omega_t = \varphi(\Omega_0, t) \subseteq \mathcal{D}$ para cada $t \in \mathcal{I}$ y $\Omega_0 \subseteq \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} es una región de fluido, entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right) dV$$

donde dV denota un elemento de volumen.

El siguiente corolario del teorema de transporte establece una conexión entre las visiones lagrangiana y euleriana (en una forma integral).

Corolario 1. Con Ω_t y f como en el teorema de transporte, sea $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ fijo que coincide con Ω_t en $t = t_1$, luego, en el tiempo t_1 :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_1} f dV + \int_{\partial \Omega_1} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (1.43)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal y dA un elemento de superficie sobre $\partial \Omega_1$

Demostración. De la identidad $\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div}(\mathbf{u})$, es suficiente notar que $\frac{Df}{Dt} +$

$f \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{u})$. De los teorema de transporte y de la divergencia tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} f dV \right) |_{t_1} &= \int_{\Omega_1} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right) dV = \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{u}) \right) dV \\ &= \int_{\Omega_1} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(f\mathbf{u}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_1} f dV + \int_{\partial\Omega_1} f\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned}$$

□

El lado izquierdo de la expresión (1.43) denota la tasa de cambio de el “contenido de f ” de un fluido ocupando la región $\Omega_1 \subseteq \mathcal{D}$ en el tiempo t_1 . El primer término del lado derecho es la tasa de cambio del “contenido de f ” de este *dominio espacial fijo*. Y el último término es la tasa de salida de f a través de la frontera fija de Ω_1 (“flujo de f a través de $\partial\Omega_1$ ”).

1.5.3. Conservación de la masa e incomprensibilidad

En esta sección trataremos con el primero de nuestros principios básicos, la *ley de la conservación de la masa*, y su relación con la incomprensibilidad en fluidos. El supuesto que asegura la conservación de la masa de una región de fluido en movimiento puede ser expresada matemáticamente como:

Definición 17 (Masa y densidad). *Sea Ω_0 una región de fluido. Existe una función suave $\rho(\mathbf{x}, t)$ tal que, para cualquier subregión de fluido $\mathcal{W} \subseteq \Omega_0$ y todo $t \in \mathcal{I}$*

$$0 < m(\mathcal{W}, t) = \int_{\varphi(\mathcal{W}, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} m(\mathcal{W}, t) = 0$$

donde $m(\mathcal{W}, t)$ es la masa del fluido en $\varphi(\mathcal{W}, t)$ y la función $\rho(\mathbf{x}, t)$ definida de esta forma es llamada densidad de masa.

De esta definición, la conservación de la masa puede ser expresada en términos de ρ y \mathbf{u} como una aplicación del teorema del transporte de Reynolds:

$$0 = \frac{d}{dt} m(\mathcal{W}, t) = \frac{d}{dt} \int_{\varphi(\mathcal{W}, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\varphi(\mathcal{W}, t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right) (\mathbf{x}, t) dV$$

De esta forma, de la suavidad de ρ , tenemos la equivalencia

$$\int_{\varphi(\mathcal{W},t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right) (\mathbf{x}, t) dV \iff \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (1.44)$$

En la cual el lado izquierdo es llamado la *forma integral de la ley de la conservación de la masa*, mientras que el lado derecho que es llamado la *forma diferencial de la ley de la conservación de la masa* (o la ecuación de continuidad). De estas formas de la conservación de la masa, y aplicando una vez más el teorema de transporte, podemos probar el siguiente resultado.

Corolario 2. Sea \mathcal{D} una región de fluido, \mathcal{I} un intervalo, $f : \bar{\mathcal{D}} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ suave y $\Omega_t = \varphi(\Omega_0, t) \subseteq \mathcal{D}$. Entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Df}{Dt} dV$$

Demostración. Por el teorema de transporte de Reynolds tenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D}{Dt}(\rho f) + (\rho f) \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right) dV$$

usando la forma integral de la ley de la conservación de la masa:

$$= \int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{Df}{Dt} + f \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right) \right) dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Df}{Dt} dV$$

□

Aunque los fluidos reales cambian de volumen, la mayoría de fluidos de “interés” pueden ser aproximados, con un alto grado de exactitud, por flujos incompresibles. Esto significa que, para muchas aplicaciones prácticas (por ejemplo, la simulación de fluidos para animación por computadora), podemos asumir la incompresibilidad de nuestros flujos de fluidos⁴.

Definición 18 (Flujo incompresible). Decimos que φ es un flujo incompresible cuando, para cualquier región de fluido $\mathcal{W} \subseteq \Omega_0$ y todo $t \in \mathcal{I}$

$$\operatorname{volumen}(\mathcal{W}) = \operatorname{volumen}(\varphi(\mathcal{W}, t)) \iff \int_{\mathcal{W}} dV = \int_{\varphi(\mathcal{W},t)} dV \iff \frac{d}{dt} \int_{\varphi(\mathcal{W},t)} dV = 0$$

⁴Tenga en cuenta que esto no se cumple para simulaciones en alta velocidad, como flujos supersónicos y las ondas de choque. El estudio de cómo se comportan los fluidos en estas situaciones es generalmente llamado “flujo compresible”.

De esta definición y del teorema de transporte, tenemos que, para flujos incomprensibles,

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\varphi(\mathcal{W},t)} dV = \int_{\varphi(\mathcal{W},t)} \operatorname{div}(\mathbf{u})dV \iff \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

donde el lado derecho es frecuentemente conocido como la *condición de incomprensibilidad*.

De la ecuación de continuidad (1.44) , y como $\rho > 0$, un fluido es incomprensible si sólo si $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, esto es, *la densidad de masa es constante siguiendo el fluido*. Si el fluido es *homogéneo*, es decir, ρ constante en el espacio, se sigue también que el flujo es incomprensible sí y solo si ρ es constante en el tiempo. Luego, para fluidos homogéneos incomprensibles, $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho > 0$.

1.5.4. Fluidos viscosos newtonianos

En esta sección incorporamos a nuestro modelo el principio de las leyes de movimiento de Newton. Comenzaremos definiendo una segunda ley del movimiento de Newton en el contexto de la mecánica de fluidos continuos.

Definición 19 (Momentum lineal). *El momentum(lineal) de una región de fluido Ω_t es dada por la integral*

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)dV$$

Con esta definición de momentum, la segunda ley de Newton puede ser escrita como

$$\{\text{Fuerza neta sobre } \Omega_t\} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV$$

Donde la segunda igualdad vale por el corolario 2. La fuerza neta sobre Ω_t es debido a la contribución de fuerzas externas y fuerzas internas.

El ejemplo clásico de fuerza externa es la *gravedad*. El campo gravitatorio actúa sobre el fluido *por unidad de volumen*. Luego pueden ser modeladas por el producto $\rho \mathbf{b} : \Omega_t \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (donde $\mathbf{b} : \Omega_t \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial denotando el campo de fuerzas externas *por unidad de masa*, abusando de la nomenclatura comunmente llamado *body force field*).

Un ejemplo de fuerza interna es la fuerza de *presión hidrostática* que es la que uno siente cuando bucea. Esta fuerza es debida al peso del fluido y aumenta con la profundidad. Estas fuerzas son modeladas como un campo $\tau : \overline{\Omega}_t \times \mathcal{I} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que depende de la posición \mathbf{x} en la frontera de la región del fluido, el instante de tiempo t y la normal

\mathbf{n} (hacia afuera) en el punto \mathbf{x} sobre la frontera $\partial\Omega_t$. De esto, la fuerza neta sobre Ω_t es dada por:

$$\begin{aligned}\{\text{fuerza neta sobre } \Omega_t\} &= \{\text{fuerzas internas}\} + \{\text{fuerzas externas}\} \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})dA + \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)dV\end{aligned}$$

A partir de aquí se puede seguir varios cálculos para obtener diversas relaciones matemáticas(Véase [5]). Los detalles de este modelaje escapan a los fines esta tesis, razón por la cual no los abordaremos. Sin embargo, mencionamos el siguiente resultado que fundamenta posteriores definiciones. *Forma diferencial de la ley del balance de momentum.*

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{Div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} \quad (1.45)$$

donde $\mathbf{T} : \overline{\Omega}_t \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es un campo tensorial tal que $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ es simétrico ($\forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega}_t \times \mathcal{I}$).

Definición 20 (Fluidos ideales). *Un flujo de fluido es llamado ideal si sus fuerzas internas son dadas por un campo de tensión tal que $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$, donde $p : \overline{\Omega}_t \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada la función presión.*

Esta definición es una simplificación de las ecuaciones considerando que $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$ es paralelo a \mathbf{n} , es decir, se asume la inexistencia de fuerzas tangenciales sobre una superficie del dominio del fluido, que aproxima una omisión de los efectos de la fricción viscosa, es por eso que los flujos ideales son llamados también *no viscosos*. Esta simplificación es razonable para flujos gaseosos, pero es muy restrictiva para muchos otros flujos(agua, leche, miel, etc).

La ley del balance de momentum para fluidos ideales queda como

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{b} \quad (1.46)$$

Junto con la ley de conservación de la masa, las ecuaciones arriba forman un sistema de $n + 2$ incógnitas (\mathbf{u}, ρ y p) y $n + 1$ ecuaciones (n del balance de momentum y 1 de la conservación de la masa). Una forma de "cerrar" este sistema de ecuaciones es relacionar p y ρ mediante una *ecuación de estado*⁵, que especifica la presión como una función de la densidad. De esta forma se impone $p(\mathbf{x}, t) = f(\rho(\mathbf{x}, t))$ donde $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es suave. Ejemplos comunes de ecuaciones de estado usadas en computación gráfica son:

⁵Para una discusión detallada de la interpretación física de las *ecuaciones de estado* revise [2]

- $p(\rho) = c^2(\rho - \rho_0)$ donde c es la velocidad del sonido en el fluido (la máxima velocidad alcanzada por una onda de propagación) y ρ_0 es una densidad de referencia.
- $p(\rho) = p_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]$, donde ρ_0 y p_0 son densidad y presión de referencia, respectivamente, y γ es una constante (usualmente escogida como $\gamma = 7$).

Otra forma de completar el sistema es asumir incompresibilidad, eso se verá para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Si en vez de asumir $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$, asumimos que $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \sigma(\mathbf{x}, t)$, donde σ es tal que (Véase [5]):

1. σ depende linealmente de los gradientes de velocidad $\nabla \mathbf{u}$.
2. σ es invariante bajo una rotación de cuerpo rígido.
3. σ es simétrica.

entonces podemos tomar

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

donde $\lambda(\mathbf{x}, t)$ y $\mu(\mathbf{x}, t)$ son *coeficientes de viscosidad* no negativos y $\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$ es la parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}$. Asumiendo viscosidad constante, incompresibilidad y la ley del balance del momentum (1.45), resulta en un sistema de EDP's para modelar la dinámica de fluidos, llamado las *ecuaciones de Navier-Stokes* (para fluidos newtonianos viscosos homogéneos e incompresibles)

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \\ \text{div}(\mathbf{u}) &= 0 \end{aligned} \tag{1.47}$$

donde $\tilde{p} = \frac{1}{\rho}p$, $\nu = \frac{1}{\rho}\mu$ es conocida como la *viscosidad cinemática*. A este sistema hay que agregarle condiciones de frontera y/o iniciales con el fin de obtener una solución numérica particular. Esto se realizará en el capítulo de resultados.

En el último siglo y medio, estas ecuaciones han pasado el test de la aplicación siendo utilizadas por físicos e ingenieros con notable éxito en muy diversos campos, entre ellos la hidráulica, la meteorología y la aeronáutica, y su rango de validez está bien establecido. Pertenecen ya, junto a las ecuaciones de Newton, Schrödinger y Maxwell, a las ecuaciones básicas de la física aplicada.

1.5.5. Acerca de la existencia de soluciones de las ecuaciones Navier-Stokes

El término no lineal $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ de la derivada material en la ecuación (1.47) se llama término convectivo o de transporte y en la coordenada i vale:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.48)$$

Puede parecer una simple complicación técnica pero no es sólo eso: su no linealidad, aunque sea solo cuadrática, es la razón de que las soluciones de la ecuación puedan en principio desarrollar singularidades y los matemáticos no han logrado decidir si este fenómeno ocurre o no tras incesantes esfuerzos teóricos y computacionales durante todo el siglo pasado.

Algunos de los resultados parciales conocidos son los siguientes([9])

- Existencia local (Leray, 1933-34). El problema está bien propuesto. Existe un tiempo T que depende del dato inicial tal que hay soluciones regulares para todo t en $[0, T]$. En particular para $\nu > 0$

$$u \in C([0, T], H^1) \cap L^2([0, T], H^2)$$

- Existencia global para $n = 2$ (Leray, Wolibner, Kato, Yudovich, Ladyzhenskaya) con $\nu \geq 0$.
- Existencia de soluciones débiles. En 1934 Leray introdujo la noción de solución débil y probó la existencia de soluciones débiles para las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Resultados de dato pequeño para $n = 3$ y con respecto a la viscosidad $\nu > 0$ (Leray, Fujita y Kato, Giga y Miyakawa, Kato, Weissler): Si la norma $\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ (o la norma L^3) es suficientemente pequeña, entonces existe solución global.
- Criterios de singularidades (blow-up):
Si $\nu > 0$,

$$\int_0^T \|u\|_{L^r}^k dt = \infty \Leftrightarrow \text{singularidad en el tiempo } T,$$

donde r, k verifican $\frac{2}{r} + \frac{3}{k} = 1$, para $3 < r \leq \infty$ (Leray, Giga, Ladyzhenskaya, Prodi y Serrin). El caso crítico $k = 3$ y $r = \infty$ lo establecieron Escauriaza, Seregin y

Sverak

Si $\nu = 0$, (Beale, Kato y Majda)

$$\int_0^T |\nabla \times u|_{L^\infty} dt = \infty \Leftrightarrow \text{singularidad en el tiempo } T$$

- Combinando técnicas analíticas de integrales singulares con argumentos geométricos, Constantin, Fefferman y Majda probaron que si la dirección del vector vorticidad $\xi(x) = \frac{w(x)}{|w(x)|}$ se mantiene lisa en regiones donde la vorticidad es alta, entonces no puede producirse una singularidad.
- En el caso $\nu > 0$, la existencia de una singularidad es equivalente a que la presión se haga $-\infty$ en el punto de singularidad (Sverak y Seregin, 2002).
- Hiperviscosidad (Ladyzhenskaya): Para $\alpha \geq \frac{5}{4}$, cambiando $-\Delta$ por $(-\Delta)^\alpha$, hay existencia de soluciones globales.
- Existencia global de datos iniciales particulares: Recientemente Chemin, Gallagher y Paicu prueban que en dimensión 3 (con $\nu > 0$) existen soluciones globales en el tiempo con dato inicial que no es pequeño.
- **El problema del Instituto Clay** ([11]). Este es el problema de Cauchy para el sistema Navier-Stokes. Consideramos el fluido viscoso, homogéneo e incompresible:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + f, & (\nu > 0, x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (1.49)$$

donde $u_0(x)$ es un campo vectorial de clase C^∞ y divergencia nula sobre \mathbb{R}^3 . El campo f , también regular, representa la acción de las fuerzas externas. Para obtener soluciones físicamente razonables se requiere que $\mathbf{u}(x, t)$ no crezca indefinidamente cuando $|x| \rightarrow \infty$. Por tanto se restringe la atención a fuerzas f y condiciones iniciales u_0 que satisfacen:

$$|\partial_x^\alpha \mathbf{u}_0(\mathbf{x})| \leq C_{\alpha, K} (1 + |\mathbf{x}|)^{-K}, \quad \text{sobre } \mathbb{R}^3, \forall \alpha, K > 0 \quad (1.50)$$

y

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha, K, m} (1 + |\mathbf{x}| + t)^{-K}, \quad \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \forall \alpha, m, K > 0 \quad (1.51)$$

Declaramos admisibles las soluciones clásicas $(\mathbf{u}, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ con

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 dx < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

o bien soluciones $(\mathbf{u}, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ periódicas (asumiendo \mathbf{u}_0 y f también periódicas) satisfaciendo:

$$\mathbf{u}_0 \text{ suave} \tag{1.52}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha, K, m} (1 + |t|)^{-K}, \quad \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \forall \alpha, m, K > 0 \tag{1.53}$$

El problema fundamental consiste en determinar si las ecuaciones de Navier-Stokes admiten o no soluciones suaves, físicamente razonables. Para dar un margen razonable de resolución sin perder la esencia del problema, se pide una prueba de una de las siguientes cuatro afirmaciones.:

- A: Existencia y suavidad de las soluciones de Navier-Stokes sobre \mathbb{R}^3 .:** Tomamos ν constante positiva y $f = 0$ y suponemos que \mathbf{u}_0 es suave, de divergencia nula y satisface (1.50). Demostrar que existen funciones $\mathbf{u}, p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, \mathbf{u} de energía finita, que resuelven el sistema (1.49).
- B: Existencia y suavidad de las soluciones de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.:** Tomamos ν constante positiva y $f = 0$ y suponemos que \mathbf{u}_0 es suave, de divergencia nula y periódica. Demostrar que existen funciones $\mathbf{u}, p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, \mathbf{u} periódica, que resuelven el sistema (1.49).
- C: Colapso de las soluciones sobre \mathbb{R}^3 :** Tomamos ν constante positiva. Encontrar un dato inicial \mathbf{u}_0 y una función f con las condiciones (1.50) y (1.51), tales que no existe una solución clásica $(u, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ de energía finita del sistema (1.49).
- D: Colapso de las soluciones sobre $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$:** Tomamos ν constante positiva. Encontrar un dato inicial \mathbf{u}_0 y una función f periódicas con la condición (1.53), tales que no existe una solución clásica $(u, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ periódica del sistema (1.49).

Este problema forma parte de los siete problemas del milenio del Instituto Clay de Matemáticas.

1.6. La teoría de turbulencia de Kolmogorov

El comportamiento turbulento y rotacional de los fluidos tiene vital influencia en la percepción visual del movimiento de un fluido.

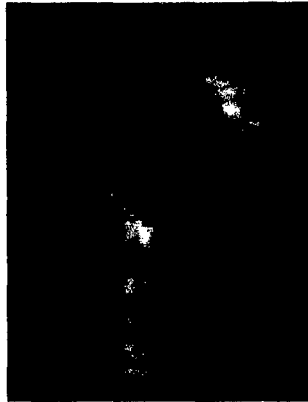


Figura 1.15: Flujo turbulento

1.6.1. Turbulencia

En un flujo de fluido el número de Reynolds, el cual es definido como:

$$Re = \frac{LV}{\nu}$$

donde L y V son la escala y velocidad características del fluido, y ν es la viscosidad (cinemática), establece una relación entre la fuerza inercial y la fuerza de la viscosidad. Por debajo de un determinado número de Reynolds se habla de flujos laminares que tienen soluciones analíticas y numéricas sencillas modelando con una formulación matemática como la de las ecuaciones de Navier-Stokes^{1.47}. A partir de un número de Reynolds crítico el flujo se vuelve inestable y si sigue creciendo dando lugar a un flujo turbulento. En la Figura 1.15 se observa como un flujo laminar debido a una inestabilidad se hace inestable produciéndose la transición a un flujo turbulento. Resulta complicado, a pesar de que se tiene una idea intuitiva, definir la turbulencia. Vamos a expresar en cambio alguna de sus propiedades

- Tiene una distribución espacial de las variables fluidas muy irregular. Además, su evolución temporal también lo es.
- Es muy disipativa necesitando de un aporte de energía exterior para mantenerse en el tiempo.
- Es un proceso caótico, de forma que para poder predecir la evolución de los sistemas sería necesario una precisión en las condiciones iniciales imposible de obtener experimental o numéricamente.

- Esta gran sensibilidad a las condiciones iniciales y su irregularidad hacen que estos flujos sean casi aleatorios y que su simulación directa con las ecuaciones de Navier-Stokes sea extremadamente costosa.

A consecuencia de estas características, para analizar los flujos turbulentos se recurre generalmente a la estadística. Dada una variable fluida, si se promedia en un intervalo de tiempo suficiente, los valores medios locales obtenidos se comportan de forma determinista, variando en el espacio y tiempo mucho más suavemente que los valores instantáneos. Por tanto, el objetivo principal de los métodos analíticos y numéricos empleados en turbulencia es el cálculo de las magnitudes medias del flujo. De este planteamiento surge el problema de cierre de la turbulencia que, a pesar del esfuerzo realizado en más de medio siglo, no se ha resuelto aún.

1.6.2. Cascada de Kolmogorov

A partir de los trabajos de Kolmogorov aparece el modelo de *cascada de energía*, en el que se postula que la turbulencia está formada por torbellinos de diferentes tamaños. Los torbellinos más grandes, que tienen una longitud característica del orden del dominio fluido, se vuelven inestables y van transfiriendo energía a torbellinos más pequeños que a su vez también la van transmitiendo a torbellinos aún más pequeños creando la llamada *cascada de energía*. Esta cascada de energía va creando torbellinos pequeños a partir de los más grandes hasta llegar a una escala en la que los efectos de la viscosidad la disipan. Se puede comprobar que en las escalas grandes, el tiempo característico de variación del movimiento de los torbellinos, puede estimarse a partir de su longitud característica (L) y la velocidad característica (V) de las fluctuaciones turbulentas de velocidad, determinadas por las condiciones de contorno impuestas al sistema (caudal, diferencias de presiones, etc.). Las escalas grandes tienen una gran dependencia de las condiciones iniciales y de contorno, pero como en un flujo turbulento el número de Reynolds es muy alto, los valores característicos asociados a los torbellinos pequeños son mucho menores que los de los grandes, por este motivo el movimiento asociado a las escalas pequeñas resulta estadísticamente independiente de las condiciones de iniciales y de contorno. El principal aporte del modelo de Kolmogorov es que predice adecuadamente la distribución de energía entre las diferentes escalas, esto es, en estado estacionario la transferencia de energía entre todos los tamaños de torbellinos tiene que ser la misma e igual a la que se inyecta a través de los mayores. A continuación se presentan los tres resultados principales proporcionados por Kolmogorov en 1941 (conocida como la teoría K41).

1.6.3. Principales resultados de la teoría K41

Existen tres resultados principales de la teoría K41, la tasa de disipación finita, la ley 2/3 y la ley 4/5. Los primeros dos de éstos se derivan de un análisis dimensional y observaciones experimentales. El tercer resultado, por otro lado, es un resultado matemáticamente demostrable a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Disipación finita: Si, en un experimento de flujo turbulento, todos los parámetros de control se mantienen constantes excepto para la viscosidad, que se reduce tanto como sea posible, la disipación de energía por unidad de masa $de/dt \sim \epsilon$ se comporta de una manera consistente con un límite positivo finito.

Ley 2/3 de Kolmogorov: En un flujo turbulento con número de Reynolds muy alto, el incremento de la velocidad media cuadrática $(\delta\mathbf{u}(l)^2)$ entre dos puntos separados por una distancia l se comporta aproximadamente como la potencia dos tercios de la distancia. Esto se puede expresar como:

$$S_2(l) = (\delta\mathbf{u}(l)^2) = C\epsilon^{2/3}l^{2/3} \quad (1.54)$$

donde C es una constante y ϵ es la tasa media de disipación.

El $k^{-5/3}$ espectro de energía: Ahora podemos usar la ecuación (1.54) para derivar el ampliamente citado rango inercial $k^{-5/3}$ del espectro de energía turbulenta. Para hacer esto, primero observamos que S_2 en la ecuación (1.54) expresa energía. Lo denotamos como ϵ como recordatorio de que se trata de energía. Así, se escribe

$$\epsilon = (\delta\mathbf{u}(l)^2) = C\epsilon^{2/3}l^{2/3} \quad (1.55)$$

Pero lo que se necesita es una función del número de onda k . En [12] justifica físicamente expresar una parte incremental de ϵ en el espacio de Fourier como $d\epsilon = dE(k)dk$. De esto se sigue que la pequeña escala de energía correspondiente a todos los números de onda superiores a un arbitrario k debe ser:

$$\epsilon(k) = \int_k^\infty d\epsilon = \int_k^\infty E(k)dk$$

Se realiza la aproximación

$$E(k) \simeq k^{-n}, \quad 1 < n < 3 \quad (1.56)$$

y la sustitución de esto en la integral del lado derecho lleva a

$$\begin{aligned}\epsilon(k) &\simeq \int_k^\infty k^{-n} dk \\ &= -\frac{1}{1-n} k^{-n+1} \\ &\simeq -\frac{1}{1-n} E(k) dk\end{aligned}$$

Ahora hay que observar que el rango de n dado anteriormente garantiza que:

$$C_n = -\frac{1}{n-1} > 0$$

y puesto que k es arbitrario podemos escribir $E(k) = C_n E(k) k$ para cualquier k . A partir de la ecuación (1.55) obtenemos:

$$C_n E(k) k = C \epsilon^{2/3} k^{-2/3}$$

donde se ha tomado $k = 1/l^6$ y una reordenación lleva al conocido resultado de Kolmogorov para el espectro de energía:

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.57)$$

Ley 4/5 de Kolmogorov: En el límite infinito del número de Reynolds, la función longitudinal de tercer orden de una turbulencia isotrópica homogénea, evaluada para incrementos pequeños l en comparados con la integral escala, está dada en términos de la tasa de disipación media de energía por unidad de masa como:

$$S_{3||}(l) = -\frac{4}{5} \epsilon l$$

La derivación de la ley 4/5 es larga y no trivial, y no será desarrollada aquí, para más detalle revise [12]. Esta sección tiene como fin presentar los fundamentos conceptuales de la turbulencia. En la siguiente sección usaremos el espectro de energía $k^{-5/3}$ para el modelaje de la turbulencia.

⁶Véase [12]

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

2.1. Antecedentes

La Computación Gráfica es una rama de la matemática aplicada cuyo problema fundamental es *la transformación de datos en imágenes*. Uno de los problemas actuales en ese campo es el control fino de simulaciones basadas en ecuaciones físicas, específicamente aquellas que modelan el control del flujo de agua, gas(p.e humo) y fuego. Esta necesidad viene principalmente del campo de la cinematografía, donde se requiere crear efectos visuales involucrando dichos fluidos, deseando siempre que la simulación se comporte al máximo de realismo posible, tanto en el fenómeno como en apariencia visual. Junto a esta necesidad está la exigencia de algoritmos computacionalmente rápidos, razón por la cual este tipo de simulación se diferencia de una simulación física de fluidos aplicada a problemas reales.

Permitir al usuario un control de simulaciones basadas en leyes físicas es sumamente interesante, lo cual amerita investigar. Este estudio también está relacionado a otras aplicaciones tales como la enseñanza de fenómenos virtuales en educación y en la investigación forense para la reconstrucción de escenas.

En la dinámica de fluidos para Computación Gráfica, la solución de los problemas está directamente relacionada con la construcción de nuevos modelos matemáticos basados en las ecuaciones en derivadas parciales del tipo Navier-Stokes y técnicas de dinámica de fluidos computacional. Por esta razón, la brecha divisoria entre los problemas abiertos y resueltos se va reduciendo con la contribución del desarrollo de estos conocimientos.

2.2. Hipótesis

Hipótesis 1:

Asumiendo que el flujo es incompresible y es gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes no lineal y transitorio; es posible simular dicho desplazamiento mediante el método Hidrodinámico de Partículas Suavizadas (SPH) para flujos cuasi-incompresibles.

Hipótesis 2:

Es posible controlar la dinámica del desplazamiento de un fluido incompresible, asumiendo la variación del término de las fuerzas externas de la ecuación (1.47) bajo la técnica de manipulación de agentes externos proveedores de fuerzas de atracción basadas en fotogramas claves.

Hipótesis 3:

Es posible mejorar la rapidez del proceso computacional de los algoritmos matemáticos fundamentado en la idea básica de que a menor cantidad de puntos de la malla de discretización (número de partículas del fluido) menor será el tiempo de cálculo computacional. Trabajando de este modo, se obtiene una respuesta rápida pero no óptima. Para la optimización del resultado es posible agregar detalles finos pos-simulación usando la teoría de Kolmogorov con wavelets.

2.3. Planteamiento del Problema

Asumiendo las hipótesis 1, 2 y 3 para un flujo dado de cierto fluido, nuestro fluido tiene una viscosidad uniforme y la presión obedece a una *ecuación de estado* del tipo $p(\mathbf{x}, t) = f(\rho(\mathbf{x}, t))$. Bajo estos supuestos, las ecuaciones que rigen tal flujo de fluidos son:

$$\text{Ecuación de continuidad: } \frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

$$\text{Ecuación del momentum: } \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} \quad (2.2)$$

Aunque una ecuación de estado que garantice un aumento grande de la presión con la densidad simula un comportamiento incompresible, el uso explícito de esta ecuación de

estado no implica la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por lo tanto, es conceptualmente incorrecto adoptar una ecuación de estado y asumir $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ para simplificar las ecuaciones que gobiernan el movimiento, aunque esta ecuación de estado sea diseñada para dirigir el sistema a un estado cuasi-incompresible. Esto fue hecho por Müller y otros en [22], cuando adoptaron $\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$ como su ecuación del momentum y $p = c^2(\rho - \rho_0)$ como su ecuación de estado.

Contrario a Müller y otros nosotros adoptamos la forma diferencial de la ecuación del momentum (1.45) como fue derivada en la sección 1.5.4 con $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \sigma$ y $\sigma = \lambda \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$. De esta forma, tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\text{Div}(\sigma) + \mathbf{b}, \quad \text{con } \sigma = \lambda \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.3)$$

que, asumiendo incompresibilidad, garantiza λ y μ constantes, dando lugar, en esa asunción, al sistema (1.47). Usamos esta forma de la ecuación del momentum con el fin de evitar el cálculo numérico de derivadas de segundo orden. Además, dado que usamos el método SPH y éste tiene mejores resultados simulando fluidos cuasi-incompresibles mediante una ecuación de estado que exprese un comportamiento incompresible, tenemos los siguientes problemas a resolver:

PROBLEMA 1: Para simular el fluido

Suponiendo que tenemos un fluido cuasi-incompresible dentro de un cubo $[-N, N]^3$ en \mathbb{R}^3 con N entero suficientemente grande y sea $\mathcal{C} \subset [-N, N]^3$ el cubo unitario $[0, 1]^2 \times [N-1, N]$ centrado en la parte superior de $[-N, N]^3$, el problema consiste en hallar numéricamente la velocidad \mathbf{u} y la presión p tales que satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \text{Div}(\sigma) + \mathbf{g}, & (\mathbf{x} \in (-N, N)^3, t > 0) \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho &= -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
p(\rho) &= p_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^7 - 1 \right] \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= 0, & \mathbf{x} \in [-N, N]^3 \\
\rho(\mathbf{x}, 0) &= 0, & \mathbf{x} \in [-N, N]^3 - \mathcal{C} \\
\rho(\mathbf{x}, 0) &= 1, & \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma = \partial[-N, N]^3, t \geq 0 \\
\sigma &= \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \\
\nu, \lambda, \mu > 0, \mathbf{g} &= (0, 0, -10), p_0 = 1
\end{aligned} \tag{2.4}$$

PROBLEMA 2: Para controlar el fluido

Para controlar el flujo se propone modificar el término de las fuerzas externas del sistema 2.4 de manera no explícita mediante un sistema de partículas.

Sea S una superficie triangulizada en \mathbb{R}^3 (más adelante la denominaremos fotograma clave), $L : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con I intervalo compacto, una función tal que $L(S, t)$ describirá la evolución en el tiempo t de esta superficie S y P_t un muestreo de puntos de $L(S, t)$ en cada instante $t \in I$. Sea un sistema de partículas p_i sin masa con radio de influencia h cuyas posiciones para cada $t \in I$ son P_t . Cada partícula posee fuerzas de atracción y de empuje \mathbf{f}_a y \mathbf{f}_v respectivamente. El problema consiste en encontrar una expresión para estas fuerzas que dependa de la partícula p_i de control y de las partículas de fluido.

PROBLEMA 3: Para optimizar la visualización del fluido

Para aumentar la resolución de las imágenes necesitamos un mecanismo de inyección de turbulencia pos-simulación. Para ello se requiere la reformulación de la turbulencia de Kolmogorov usando la transformada wavelet en vez de la transformada de Fourier.

Capítulo 3

Desarrollo del problema

3.1. Método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)

En esta sección describiremos el método *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)* para simular flujos de fluidos. El método SPH es un método lagrangiano sin malla, consiste en una interpolación de las propiedades físicas de un sistema hidrodinámico y de la aproximación de las derivadas espaciales de campos continuos utilizando un conjunto discreto de partículas no conectadas.

Este método presenta varias ventajas sobre los métodos tradicionales con malla. En primer lugar, SPH garantiza la conservación de la masa sin un cálculo adicional ya que las partículas se representan con masa. En segundo lugar, el SPH calcula la presión a partir de contribuciones ponderadas de las partículas vecinas en vez de solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Finalmente, a diferencia de las técnicas con malla el SPH crea una superficie libre de líquido de dos fases que interactúan directamente desde que las partículas representan el fluido más denso (normalmente agua) y el espacio vacío representa el fluido más ligero (normalmente aire). Por estas razones, es posible simular el movimiento de fluido en tiempo real usando SPH. Sin embargo, tanto las técnicas basadas en mallas como SPH todavía requieren de la generación de una superficie libre con una técnica de poligonización como metaballs, marching cubes u otros métodos de visualización de data escalar.

La principal idea del método SPH está basada en el concepto de la representación integral de una función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$\mathbf{x} \in \Omega$. Esa representación es hecha a través de la convolución de f con la distribución delta de Dirac según la ecuación 1.11 que también vale para funciones vectoriales.

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x')\delta(x - x')dx' \quad (3.1)$$

Dado que δ no es una función se trabaja con la descripción “funcional” de ésta mediante los núcleos de Dirac, de tal forma que:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x')\delta(x - x')dx' = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega} f(x')W_h(x - x')dx' \right\}$$

Motivado por esta relación, la *aproximación SPH*, $\langle f \rangle$, del campo f es definida sobre una familia dada de *funciones núcleo suaves* $\{W_h\}$, para un $h > 0$ como:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(t)W_h(x - t)dt \quad (3.2)$$

donde h es llamado *longitud suave*, que a su vez define el *radio de influencia* κh de la función W (esto es, $\exists \kappa > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \geq \kappa h \rightarrow W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = 0$). En base a las condiciones que tiene que satisfacer un núcleo de Dirac, las variantes de este método eligen una función par(simétrica) que cumplen las siguientes condiciones:

- *No negativo*: $\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, W_h(x) \geq 0$
- *Suavidad*: $\forall h > 0, W_h \in C^k(\mathbb{R}^n)$ donde $k > 1$
- *Partición de la unidad*: $\forall h > 0, \int_{\Omega} W_h(x)dx = 1$.
- *Soporte compacto*: $\forall h > 0 : W_h(x - x') = 0$, cuando $\exists \kappa > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x - x'\| > \kappa h$.
- *Convergencia*: $W_h \rightarrow \delta$, cuando $h \rightarrow 0$.

Existen muchas funciones núcleo en la literatura[17], las más comunes son la función gaussiana y las funciones spline(note que la gaussiana, a pesar de no tener soporte compacto, decae rápidamente para cero, luego posee “numéricamente” la propiedad del soporte compacto). En esta tesis usaremos una función spline de quinto orden $W_h(x) = \frac{\alpha_n}{h^n} w\left(\frac{\|x\|}{h}\right)$ con:

$$w(x) = \begin{cases} (3 - q)^5 - 6(2 - q)^5 + 15(1 - q)^5 & ; 0 \leq q \leq 1 \\ (3 - q)^5 - 6(2 - q)^5 & ; 1 \leq q \leq 2 \\ (3 - q)^5 & ; 2 \leq q \leq 3 \\ 0 & ; 3 < q \end{cases}$$

y la constante de normalización del núcleo $\alpha_1 = 120, \alpha_2 = \frac{7}{748\pi}, \alpha_3 = \frac{3}{359\pi}$ en los espacios 1D, 2D y 3D respectivamente.

3.1.1. Discretización del fluido

Como el método SPH es un método puramente lagrangiano, todo el sistema es representado por un conjunto finito de partículas que poseen atributos individuales. Consecuentemente, la representación integral continua SPH puede ser discretizada a través de una sumatoria sobre todas las partículas que están en el interior de una región limitada. Así, el elemento de volumen infinitesimal dx' en la ecuación (3.1) es representado en una partícula j por el volumen ΔV_j y que a su vez es determinado por atributos físicos de la propia partícula como:

$$\Delta V_j = \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.3)$$

siendo m_j la masa de la partícula y ρ_j la densidad de la partícula. La forma discreta de la aproximación SPH es dada por la ecuación:

$$\begin{aligned} \langle f(x) \rangle &= \sum_{j \in N(x)} f(x_j) W_h(x - x_j) \Delta V_j \\ &= \sum_{j \in N(x)} f(x_j) W_h(x - x_j) \frac{m_j}{\rho_j} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde x_j es la posición de la partícula j y el conjunto $N(x)$ contiene todas las partículas cuya distancia a partir de x es menor que el radio de influencia del núcleo κh . La aproximación para una función evaluada en una partícula i puede ser escrita directamente como:

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j \in N(x_i)} f(x_j) W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.5)$$

donde $W_{ij} = W_h(x_i - x_j)$.

A partir de la definición de la aproximación SPH, es sencillo deducir:

1. $\langle f_1 + f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle + \langle f_2 \rangle$
2. $\langle f_1 f_2 \rangle \approx \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle$
3. En la ecuación anterior, suponiendo que f_2 es una función constante c vale la igualdad: $\langle c f_1 \rangle = c \langle f_1 \rangle$

3.1.2. Aproximación de las derivadas espaciales

Desde que el enfoque SPH es usado para aproximar ecuaciones diferenciales parciales a través de una formulación integral, el ingrediente principal para capturar la dinámica de

un sistema es saber cómo representar y discretizar los operadores diferenciales a través del método SPH. La aproximación SPH del gradiente de una función escalar $f(x)$ es inicialmente obtenida mediante la sustitución de $f(\mathbf{x})$ por $\nabla f(\mathbf{x})$ en la ecuación (3.1).

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}'} f(\mathbf{x}') W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.6)$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}'}$ denota el gradiente de la función f en relación a la variable \mathbf{x}' . Haciendo una integración por partes de la ecuación (3.6) tenemos:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}'} [f(\mathbf{x}') W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.7)$$

Podemos utilizar el teorema de la divergencia de Gauss para representar la primera integral del lado derecho de la ecuación (3.7) como una integral sobre la superficie de borde $S = \partial\Omega$ del dominio de integración Ω :

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_S f(\mathbf{x}') W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.8)$$

con \mathbf{n} siendo un vector unitario normal a la superficie S . Si el soporte de W estuviera contenido en el interior de Ω , tendríamos que la integral de superficie del lado derecho de (3.7) es nula. En caso contrario, si el soporte de W intercepta a S , el soporte de W es truncado en la superficie de borde S para que la integral de superficie también se anule. Por tanto, bajo tales circunstancias podemos simplificar la ecuación (3.8) de la siguiente forma:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.9)$$

Por la regla de la cadena y del hecho de que W_h es simétrico tenemos:

$$\nabla_{\mathbf{x}} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\nabla_{\mathbf{x}'} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.10)$$

Por tanto, sustituyendo (3.10) en (3.9) se sigue que:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.11)$$

Resumiendo, para calcular la aproximación SPH de el gradiente de una función $f(x)$ basta apenas calcular el gradiente de la aproximación de la función, o sea

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \nabla \langle f(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.12)$$

La versión discreta del gradiente se sigue directamente de la ecuación (3.11)

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}_j) \nabla W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.13)$$

Finalmente, la aproximación del gradiente de una función evaluada en una partícula i puede ser escrita como:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} f(\mathbf{x}_j) \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.14)$$

donde, por la regla de la cadena se sigue que

$$\nabla_i W_{ij} = \nabla W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{\mathbf{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (3.15)$$

con $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ y $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$.

Así como en el método de diferencias finitas donde las derivadas espaciales son discretizadas utilizando una malla fija en el espacio, definiremos unas reglas para el cálculo discreto de los operadores diferenciales a través de la formulación SPH.

Regla SPH I para el gradiente: Sea $A(\mathbf{x})$ un campo escalar, se sigue que

$$\langle \nabla A(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} (A(\mathbf{x}_j) - A(\mathbf{x}_i)) \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.16)$$

Note que el término $\sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} A(\mathbf{x}_i) \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} = A(\mathbf{x}_i) \nabla_i \langle W_{ij} \rangle = 0$

Regla SPH I para el jacobiano: Sea $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ un campo vectorial, se sigue que

$$\langle \nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} (\mathbf{A}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)) \otimes \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.17)$$

Regla SPH I para la divergencia: Sea $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ un campo vectorial, se sigue que

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} (\mathbf{A}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)) \cdot \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.18)$$

A pesar de que las aproximaciones (3.16) y (3.18) son aceptables, ellas poseen una deficiencia, no son simétricas en relación a los índices i y j . Para obtener aproximaciones simétricas del gradiente de un campo escalar, necesitamos definir un nuevo conjunto de reglas. Consideremos la identidad:

$$\frac{\nabla f}{g} = \frac{f}{g^\alpha} \nabla \left(\frac{1}{g^{1-\alpha}} \right) + \frac{1}{g^{2-\alpha}} \nabla \left(\frac{f}{g^{\alpha-1}} \right) \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

A través de la identidad (3.19) , podemos establecer una aproximación SPH de la siguiente forma:

$$\left\langle \frac{\nabla A(\mathbf{x}_i)}{\rho_i} \right\rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} \left(\frac{A(\mathbf{x}_j)}{\rho_i^{2-\alpha} \rho_j^\alpha} + \frac{A(\mathbf{x}_i)}{\rho_i^\alpha \rho_j^{2-\alpha}} \right) \nabla_i W_{ij} m_j \quad (3.20)$$

Y a partir de la aproximación (3.20), podemos crear un nuevo conjunto de reglas SPH para la aproximación del gradiente de campos escalares y la divergencia de campos vectoriales.

Regla SPH II para el gradiente. Sea $A(\mathbf{x})$ un campo escalar y $\alpha = 1$:

$$\langle \nabla A(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} (A(\mathbf{x}_i) + A(\mathbf{x}_j)) \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.21)$$

Regla SPH II para el divergente. Sea $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ un campo vectorial y $\alpha = 1$:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} (\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{A}(\mathbf{x}_j)) \cdot \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.22)$$

Regla SPH III para el gradiente. Sea $A(\mathbf{x})$ un campo escalar y $\alpha = 2$:

$$\left\langle \frac{\nabla A(\mathbf{x}_i)}{\rho_i} \right\rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} \left(\frac{A(\mathbf{x}_i)}{\rho_i^2} + \frac{A(\mathbf{x}_j)}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} m_j \quad (3.23)$$

Regla SPH III para el divergente: Sea $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ un campo vectorial y $\alpha = 2$:

$$\left\langle \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)}{\rho_i} \right\rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} \left(\frac{\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)}{\rho_i^2} + \frac{\mathbf{A}(\mathbf{x}_j)}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} m_j \quad (3.24)$$

3.1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes usando SPH

En esta sección mostraremos con detalles la aplicación del método SPH en dinámica de fluidos. El enfoque SPH consiste en discretizar un fluido a través de un sistema de partículas donde las derivadas espaciales de las ecuaciones Navier-Stokes en la forma de lagrangiana (2.1)+(2.3)+(Ecuación de estado) o nuestro problema (2.4) se calculan para cada partícula con las reglas definidas en la sección anterior. Más allá de que las partículas sean el centro de interpolación, cada partícula representa un elemento del fluido, osea, poseen atributos del fluido como por ejemplo, masa, posición, velocidad, viscosidad, presión, etc.

3.1.3.1. Aproximación SPH de la ecuación de continuidad

Generalmente en sistemas SPH la aproximación de la densidad en una partícula i es realizada utilizando la ecuación (3.5).

$$\rho_i = \sum_{j \in N(x_i)} \rho_j W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} = \sum_{j \in N(x_i)} m_j W_{ij} \quad (3.25)$$

Sin embargo, la aproximación (3.25) requiere un ciclo extra de cálculo, pues la densidad es calculada antes que los otros parámetros, tornándose así en una simulación más lenta desde el punto de vista computacional. Otra opción para el cálculo de la densidad es a través de la ecuación de continuidad (2.1), simplemente aplicando la aproximación (3.18) en (2.1). Sea \mathbf{u}_i la velocidad de una partícula i , de esta manera la versión SPH de la ecuación de continuidad es de la forma:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i(\nabla \cdot \mathbf{u}_i) = -\rho_i \sum_{j \in N(x_i)} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3.26)$$

3.1.3.2. Aproximación SPH de la ecuación del momentum

La aceleración en cada partícula i es dada por la ecuación del momentum (2.3). Semejante a la aproximación de la ecuación de continuidad, aplicaremos las reglas de aproximación SPH en cada término de la ecuación (2.3).

Presión

En el método SPH para flujos cuasi-incomprensibles, al contrario de los métodos con malla, donde la presión de un fluido incomprensible es la solución implícita de una ecuación de Poisson ([27],[16],[20]), la presión es una función explícita de la densidad local del fluido según una ecuación de estado adecuada ([17]). Así la presión p_i puede ser calculada con una ecuación de estado sugerida por Batchelor[2] que tiene la forma

$$p_i = B \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (3.27)$$

Con $\gamma = 7$ y ρ_0 es la densidad de referencia. El parámetro B es el término relacionado a las fluctuaciones de densidad del fluido y es estimado por:

$$B = \frac{c^2 \rho_0}{\gamma} \quad (3.28)$$

donde c es la velocidad del sonido. La velocidad del sonido representa la velocidad puntual más rápida de propagación de onda en ese medio, en simulaciones SPH ella es escogida como siendo aproximadamente diez veces mayor a la velocidad esperada del flujo del fluido. La ecuación (3.27) es conocida como la *ecuación de Tait*. Para simular fluidos incomprensibles con bajo número de Reynolds también se usa siguiente ecuación de estado :

$$p_i = c^2(\rho - \rho_0) \quad (3.29)$$

Después de actualizar la presión en todas las partículas usando una de las ecuaciones de estado descritas arriba, podemos evaluar el gradiente de la presión en la ecuación (2.3) en cada partícula. Se sigue por la aproximación (3.23) que:

$$\left\langle \frac{1}{\rho_i} \nabla p_i \right\rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (3.30)$$

donde las presiones p_k son dadas por la ecuación de estado $f(\rho_k)$

Viscosidad A fin de calcular las fuerzas viscosas, primero necesitamos calcular el tensor de deformación \mathbf{D}_i en cada partícula i , por la aproximación (3.17) tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \mathbf{u}_i \rangle &= \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \\ \mathbf{D}_i &= \frac{1}{2} (\langle \nabla \mathbf{u}_i \rangle + \langle \nabla \mathbf{u}_i \rangle^T) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{vw}^T$. Después del cálculo del tensor de deformación, el término de viscosidad es calculado por la regla (3.22)

$$\left\langle \frac{1}{\rho_i} \right\rangle Div(\sigma_i) = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (\sigma_j - \sigma_i) \nabla_i W_{ij} \quad (3.31)$$

donde $\sigma_k = \lambda tr(\mathbf{D}_k) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}_k$ como antes. Note que con este esquema pueden ser adaptadas expresiones más generales para la tensión viscosa σ y que no son requeridas derivadas de segundo orden.

Fuerzas externas: El término de fuerzas en la ecuación del momentum cuenta las fuerzas externas. Para calcular \mathbf{b}_i , se puede aplicar directamente el esquema discreto de aproximación SPH , resultando en:

$$\langle \mathbf{b}_i \rangle = \sum_{j \in N(\mathbf{x}_i)} \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{b}_j W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.32)$$

esto permite que una fuerza aplicada sobre una partícula se extienda a otras dentro de su soporte.

Ahora describimos cómo hacer frente a las fronteras. El enfoque clásico es usar “partículas fantasmas repulsivas”, que son partículas de frontera que rodean la superficie. Si alguna partícula cae dentro el radio de influencia de una partícula de frontera, se ve afectada por la fuerza repulsiva. Estas fuerzas repulsivas de frontera se calculan usando una expresión matemática similar al potencial de Lennard-Jones utilizado en dinámica molecular (Véase [17]). Por tanto, la fuerza de repulsión sobre la partícula de fluido i que interacciona con una partícula fantasma b es:

$$\frac{1}{m_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}_{ib}) = \begin{cases} D \left(\left(\frac{r_0}{r_{ib}} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r_{ib}} \right)^4 \right) \frac{\mathbf{r}_{ib}}{r_{ib}^2} & , \text{ para } r_{ib} \leq r_0 \\ 0 & , \text{ para } r_{ib} > r_0 \end{cases}$$

donde D es una constante que depende del problema (y debe ser del mismo orden de magnitud que el cuadrado de la mayor velocidad de flujo esperada), $\mathbf{r}_{ib} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_b$, $r_{ib} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_b\|$.

Tiempo : Después de discretizar las ecuaciones de Navier-Stokes mediante aproximaciones SPH, resulta en un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El desarrollo numérico de este sistema se puede realizar mediante el empleo de cualquier método numérico estándar para EDO's. Nosotros usamos el método del punto medio, pues este método da mejores resultados que el método de Euler a un costo computacional razonable. Veamos en qué consiste.

Dado el problema de valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

El método de Euler hacia delante toma la solución en el tiempo t_n y avanza hasta el instante t_{n+1} con el valor de la derivada $f(y_n, t_n)$ en el tiempo t_n .

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

donde $h = \Delta t$. La idea del método del punto medio es tomar ventaja de la información de la derivada en los tiempos t_n y t_{n+1} para incrementar el orden de exactitud. Así, la derivada en el instante inicial es usada para aproximar la derivada en el punto

medio de intervalo y este valor es usado para avanzar la solución al siguiente paso. Es decir, la aproximación del método del punto medio se escribe como.

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (3.33)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (3.34)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 \quad (3.35)$$

Este método también es conocido como el método de Runge-Kutta de segundo orden.

3.1.3.3. La estabilidad del método

Finalmente, la estabilidad del método depende de cómo es escogido el paso de tiempo Δt . Para esto se sigue el *criterio de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)*. Para nuestra integración temporal tenemos (Según [17]):

$$\Delta t = 0,1 \min_i \left\{ \frac{h}{\|\mathbf{u}_i\| + c} \right\} \quad (3.36)$$

donde c es la velocidad del sonido.

3.1.3.4. Las ecuaciones de Navier-Stokes discretizadas

Puesto que hemos discretizado la masa de fluido en un número finito de partículas de fluido, la dinámica de este sistema es dictada por la forma en que cada partícula varía en el tiempo su posición, su velocidad y su densidad. Por lo tanto, el comportamiento de nuestra sistema es descrito por cómo $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, $\frac{D\rho}{Dt}$ y $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ son determinados para cada partícula a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ de esta partícula. Por lo tanto, para la partícula i , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \mathbf{u}_i; \quad p_i = f(\rho_i) \\ \frac{d\rho_i}{dt} &= -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle \\ \mathbf{D}_i &= \frac{1}{2} \left(\langle \nabla \mathbf{u}_i \rangle + \langle \nabla \mathbf{u}_i \rangle^T \right) \\ \sigma_i &= \lambda \text{tr}(\mathbf{D}_i) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}_i \\ \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} &= - \left\langle \frac{1}{\rho_i} \nabla p_i \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\rho_i} \text{Div} \sigma_i \right\rangle + \langle \mathbf{b}_i \rangle \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.1.4. Simulación del fluido

Un procedimiento recurrente en este algoritmo es la búsqueda de partículas vecinas. Dado que se usan núcleos con soporte compacto de radio κh sólo un número finito de partículas estarán dentro del área de influencia de una partículas dada. La búsqueda de partículas vecinas es una tarea pesada y requiere estructuras de datos eficientes que puedan realizar consultas de partículas que distan entre sí una distancia menor que el radio de influencia del núcleo. Ejemplos de estructuras de datos para esta tarea son : *grids uniformes, tablas hash, octrees, kd-trees y bsp-trees*.

Estas estructuras de datos difieren en la complejidad computacional de su construcción o actualización, como también en el consumo de memoria. Estructuras de datos no jerárquicas tales como las *grids* pueden ser construidas y actualizadas eficientemente, mientras las estructuras de datos jerárquicas como *octrees*, son generalmente más caras de construir y actualizar, aunque pueden ser bastante eficientes cuando la *longitud suave* del núcleo es variable.

El pseudocódigo de la simulación del fluido con el método SPH se muestra en el Algoritmo 1.

Busqueda de partículas vecinas basado en grids

Este algoritmo se recomienda para los casos en los que el núcleo tiene longitud suave constante. En esta implementación, una grid uniforme es construida sobre el dominio del problema (Figura 3.1). Para núcleos con un radio de influencia κh , el ancho de la celda será κh y una celda puede ser identificada a través de su vértice mínimo, es decir, el vértice que posea los valores mínimos en las tres coordenadas. Cada celda de la grid está asociada con una lista encadenada de todas las partículas que ocupan una porción de espacio dentro de la celda. Dado una grid 3D, un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es llevado a una celda de la grid con índice (I, J, K) de la siguiente manera:

$$(I, J, K) = (\lfloor \frac{x}{\kappa h} \rfloor, \lfloor \frac{y}{\kappa h} \rfloor, \lfloor \frac{z}{\kappa h} \rfloor) \quad (3.38)$$

donde $\lfloor \rfloor$ representa la menor parte entera. A través del mapeo (3.38) podemos almacenar las partículas en las listas asociadas a las celdas de la grid. Note que la construcción de la grid es muy eficiente, porque las partículas son agregadas a las listas en tiempo constante $O(1)$, resultando en una complejidad de construcción y actualización de $O(n)$, donde n es el número de las partículas del sistema.

Después de la construcción de la grid, dada una partícula i , sus partículas vecinas sólo pueden estar en la misma celda ocupada por la partícula i o en sus celdas directamente

Algoritmo 1: Simulación de un fluido mediante el método SPH.

Entrada: $\rho_0, t_0, t_{max}, \mu, \lambda$, Número de partículas, h

Output: u_i

```
1 Repetir
2   | Búsqueda de partículas vecinas;
3   | Para cada partícula  $i$  hacer
4   |   | Actualice la presión  $p_i$  (ec. 3.27)
5   |   | Fin
6   |   | Para cada partícula  $i$  hacer
7   |   |   | Calcule la derivada de la densidad (ec. 3.26);
8   |   |   | Calcule la aceleración (ec. 3.37);
9   |   |   | Fin
10  |   | Para cada partícula  $i$  hacer
11  |   |   | Actualice  $u_i$  y  $\rho_i$  con el integrador del punto medio;
12  |   |   | Si existe condición de frontera entonces
13  |   |   |   | Generar partículas fantasmas repulsivas;
14  |   |   |   | Fin
15  |   |   | Fin
16  |   | Actualice  $\Delta t$  usando la condición CFL (ec. 3.36);
17  |   |  $t = t + \Delta t$ 
18 hasta  $t < t_{total}$ ;
```

adyacentes. Por lo tanto, la búsqueda de partículas que tienen una distancia menor que κh a partir de la partícula i se restringe a 3^d donde d es la dimensión del espacio. Si el número medio de partículas por celdas es suficientemente pequeño, la complejidad del algoritmo basado en grid uniforme es $O(n)$. El algoritmo se vuelve menos eficiente cuando la longitud suave varía en función del tiempo, así el espaciamiento de la red puede no ser óptimo para todas las partículas.

3.2. Construcción del proceso de simulación controlada

El sistema de control utiliza otro conjunto de partículas que localmente ejercen fuerzas sobre el fluido. Estas partículas de control se generan utilizando una secuencia de formas objetivo llamado los fotogramas clave (o en inglés, *keyframes*). Cada partícula de control

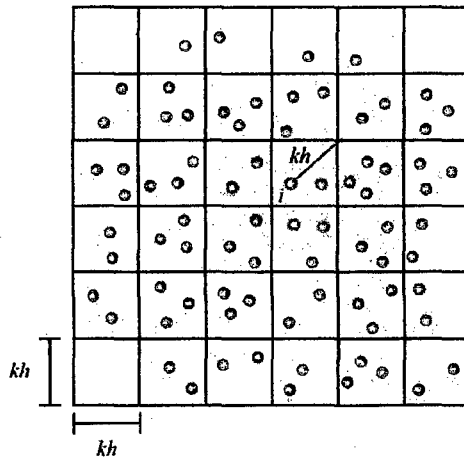


Figura 3.1: Búsqueda de partículas vecinos usando una grid uniforme bidimensional con ancho de celda kh . La región amarilla representa las celdas donde se realiza la búsqueda.

cuenta con fuerzas para atraer el fluido o influir en el campo de velocidad. Estas dos fuerzas se pueden utilizar para generar una amplia variedad de efectos.

3.2.1. Generación del dominio del desplazamiento del fluido

Por ser el SPH un método sin malla no hay un dominio explícito. O por lo menos la formulación matemática del método no precisa de un dominio. Sin embargo, para evitar un desborde numérico y lentitud en la simulación definimos un cubo frontera que será el dominio donde todas las partículas interactuarán. Para inicializar la posición de las partículas, las situamos en una malla regular, que generalmente es un cuadrado mallado regularmente. Podemos optar por generar posiciones regulares a partir del mallado del cuadrado o usar algún algoritmo de números aleatorios. Después de esta inicialización la dinámica de las partículas es gobernada por la dinámica del flujo según sus ecuaciones.



a)

b)

c)

Figura 3.2: Dominio y cuadrado inicializador de partículas. a) Partículas generadas regularmente a partir de un cuadrado. b) Partículas generadas aleatoriamente a partir de un cuadrado. c) La dinámica de las partículas ya no depende del cuadrado.

3.2.2. Fotogramas claves

Para llevar a cabo simulaciones de fluidos con una visualización del flujo de una forma determinada por el usuario, se usa el paradigma de *fotogramas claves*, los cuales son instantes específicos de la animación deseada, dejando que los otros cuadros (o fotogramas) sean extrapolados a partir de estos fotogramas claves. Una representación de fotogramas de una animación clásica se muestra en la Figura 3.3. En nuestro caso, los fotogramas claves son definidos por superficies triangulizadas que aproximan nuestra animación en los instantes deseados. Además, estos fotogramas no se extrapolan sino que la transición entre fotogramas es gobernado por las ecuaciones del fluido. En un lenguaje formal, dada una superficie triangulizada $S \subset \mathbb{R}^3$, un conjunto de fotogramas claves para S sería la familia $\{L(S, t)\}_{t \in I}$ con I intervalo compacto, de imágenes de una función $L : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Además, para un control continuo pedimos que $L(S, t)$ sea una transformación homeomórfica de S para todo $t \in I$. Si consideramos I como un intervalo de tiempo finito, es natural identificar $L(S, 0) = S$. El caso útil es cuando L es constante salvo un número finito de puntos. Más adelante se generarán partículas de control sobre estos fotogramas claves que guiarán el flujo hacia la geometría del fotograma clave.



Figura 3.3: Fotogramas claves para el salto de una lámpara. Al estilo del corto Luxo Jr. de Pixar.

3.2.3. Generando partículas de control

Similar a como se hizo para inicializar las partículas de fluido, dada una superficie triangulizada $S \in \mathbb{R}^3$ utilizamos las caras del fotograma clave $L(S, 0)$ como fuentes. Se generan las posiciones iniciales de las partículas de control en el interior de las caras de $L(S, 0)$ utilizando el método de coordenadas promedio de [15]. Este es un método estable y rápido que genera una función de interpolación de un conjunto de valores definidos sobre los vértices de una superficie triangulizada. Presenta un excelente desempeño sobre superficies cerradas. Véase el algoritmo 2.

3.2.4. Atracción del flujo

Una partícula de control p_i está definida por su posición \mathbf{p}_i , su velocidad \mathbf{v}_i , y su radio de influencia h_i . La atracción del fluido se logra mediante una fuerza que “jala” el fluido hacia las partículas de control. Con el fin de preservar la mayor parte del comportamiento del fluido tanto como sea posible, esta fuerza se escala pequeña cuando la región de influencia de la partícula de control está suficientemente cubierta con el líquido. Sea V_e el volumen de un elemento de fluido (el volumen de una partícula para SPH). Un factor de escala es definido para la fuerza de atracción como:

$$\alpha_i = 1 - \min \left(1, \sum_e V_e W(d_{i,e}, h) \right)$$

donde $d_{i,e} = |\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_e|$ es la distancia entre p_i y el centro \mathbf{x}_e del centro del elemento de fluido e , y W es la función kernel asociado a las partículas de control. Sólo para el caso del control, una función lineal de caída de ancho $h/2$ puede ser suficiente para W .

Algoritmo 2: Algoritmo de coordenadas promedio para superficies triangulizadas.

Entrada: Vértices p_i , f_i , error ε

- 1 **Para** cada vértice p_j con valor f_j **hacer**
- 2 $d_j \leftarrow \|p_j - x\|;$
- 3 **Si** $d_j < \varepsilon$ **entonces**
- 4 | retorna f_j
- 5 **Fin**
- 6 $u_j \leftarrow (p_j - x)/d_j;$
- 7 **Fin**
- 8 $totalF \leftarrow 0;$
- 9 $totalW \leftarrow 0;$
- 10 **Para** cada triángulo con vértices p_1, p_2, p_3 y valores f_1, f_2, f_3 **hacer**
- 11 $l_i \leftarrow \|u_{i+1} - u_{i-1}\| // \text{for } i = 1, 2, 3;$
- 12 $\theta_i \leftarrow 2\arcsen[l_i/2];$
- 13 $h \leftarrow (\sum \theta_i)/2;$
- 14 **Si** $\pi - h < \varepsilon$ **entonces**
- 15 | $w_i \leftarrow \text{sen}(\theta_i)d_{i-1}d_{i+1};$
- 16 | Retorna $(\sum w_i f_i)/(\sum w_i);$
- 17 **Fin**
- 18 $c_i \leftarrow (2\text{sen}[h]\text{sen}[h - \theta_i]) / (\text{sen}[\theta_{i+1}]\text{sen}[\theta_{i-1}]) - 1;$
- 19 $s_i \leftarrow \text{sign}[\det[u_1, u_2, u_3]]\sqrt{1 - c_i^2};$
- 20 $w_i \leftarrow (\theta_i - c_{i+1}\theta_{i-1} - c_{i-1}\theta_{i+1}) / (d_i \text{sen}[\theta_{i+1}]s_{i-1});$
- 21 $totalF+ = \sum w_i f_i;$
- 22 $totalW+ = \sum w_i$
- 23 **Fin**
- 24 $f_x \leftarrow totalF/totalW;$

$$W(d, h) = \begin{cases} 1 & , d \leq h/2 \\ 2 - 2\frac{d}{h} & , d > h/2, d < h \\ 0 & , d \geq h \end{cases}$$

sin embargo, para mejores resultados es común usar un kernel spline normalizado con soporte h .

$$W(d, h) = \begin{cases} \frac{315}{64\pi h^9} (h^2 - d^2)^3 & , d < h \\ 0 & , d \geq h \end{cases}$$

Finalmente, las fuerzas de atracción que ejerce la partícula de control p_i en un elemento del fluido e se obtiene como:

$$\mathbf{f}_a(e) = w_a \sum_i \alpha_i \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_e}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_e\|} W(d_{i,e}, h) \quad (3.39)$$

donde w_a es una constante global que define la intensidad de la fuerza de atracción. Si w_a es negativo, la ecuación (3.39) resultará en una fuerza de repulsión.

Mientras que la fuerza de atracción empuja el fluido hacia las partículas de control que aún no están cubiertas con fluido, una segunda fuerza es usada para modificar la velocidad del fluido de acuerdo con el flujo determinado por las partículas de control. Una fuerza de velocidad por volumen \mathbf{f}_v para un elemento del fluido e es definido de manera similar a las fuerzas de atracción.

$$\mathbf{f}_v(e) = w_v \sum_i [\mathbf{v}_i - \mathbf{v}(e)] W(d_{i,e}, h) \quad (3.40)$$

donde \mathbf{v}_e es la velocidad del elemento fluido e , y w_v es una constante que define la influencia de la fuerza de velocidad. Finalmente, la fuerza total por volumen $\mathbf{f}(e)$ que actúa sobre cada elemento del fluido contiene la suma de las fuerzas de atracción y de velocidad.

$$\mathbf{f}(e) = \mathbf{f}_a(e) + \mathbf{f}_v(e) + \mathbf{f}_f(e) \quad (3.41)$$

donde $\mathbf{f}_f(e)$ es la fuerza dada por efectos físicos (por ejemplo, gravedad). Usando $\mathbf{f}(e)$ obtenemos una nueva velocidad $\mathbf{v}'(e)$ de un elemento de fluido que se utiliza entonces para la siguiente etapa de SPH.

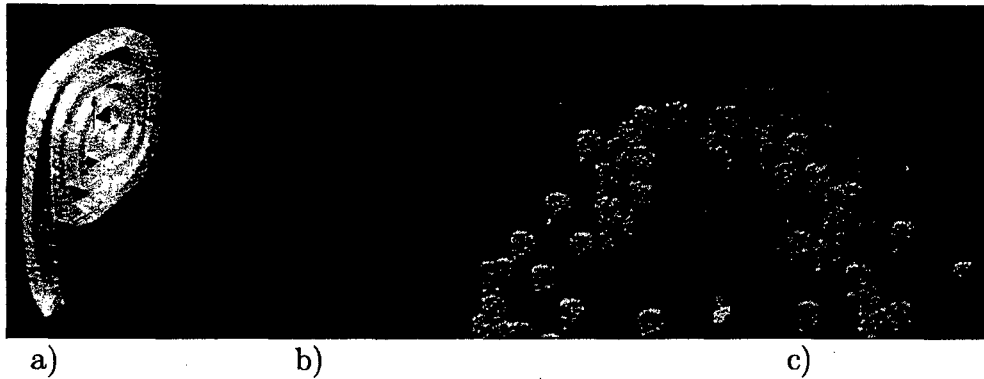
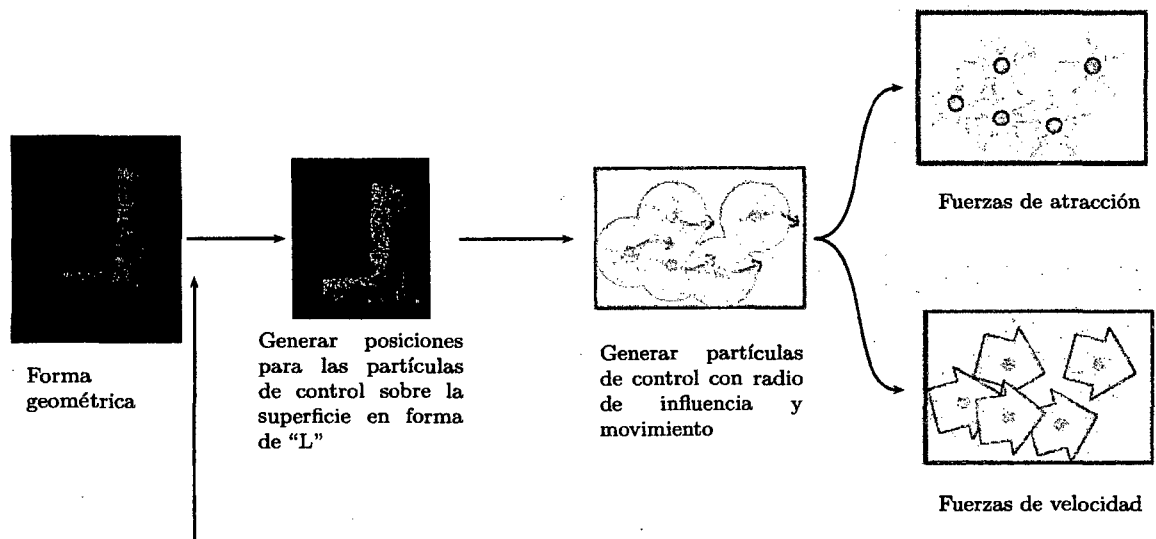


Figura 3.4: a) Fotograma clave para una simulación de fluido que evoluciona hacia la letra “P” de la marca Perú, b) Partículas de control generadas a partir del fotograma clave, c) Las partículas de fluido son atraídas por las partículas de control.

3.2.5. Proceso de control

Generamos partículas de control a partir de una superficie triangulizada, que en nuestra aplicación es un fotograma clave. Dada una superficie triangulizada, por el método de coordenadas promedio de Ju y otros podemos generar puntos (posiciones iniciales para las partículas) en las caras de los triángulos de la superficie mediante la función de interpolación definida en ese trabajo.



Algoritmo de coordenadas promedio de [15]

Figura 3.5: Proceso de generación de las partículas de control para un fotograma clave diseñado como la letra "L" en 3D.

3.3. Turbulencia Wavelet en fluidos

En esta sección detallaremos cómo Kim y otros[16] construyeron una función de turbulencia incomprensible de uso eficiente. Esta función de turbulencia será usada para inyectar detalles finos en una simulación grosera (con un tamaño de discretización pequeño) para obtener una simulación visualmente más fina.

3.3.1. Generando un campo de ruido

La función de ruido wavelet w es una función escalar, mientras que nosotros estamos interesados en campos vectoriales. Tal como hicieron Bridson y otros[3] con la función de ruido de Perlin, podemos construir un campo vectorial de divergencia nula tomando el

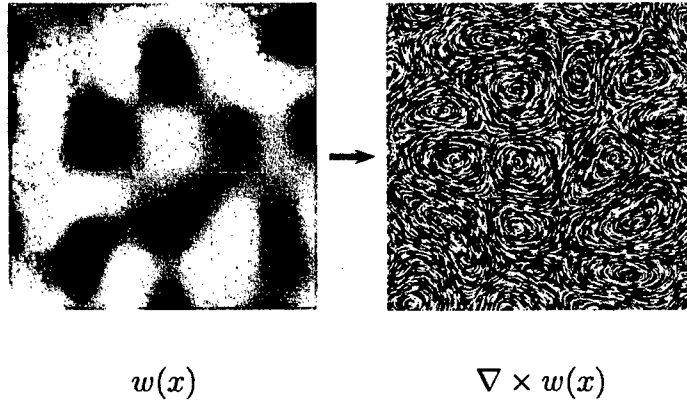


Figura 3.6: Rotacional sobre un ruido wavelet 2D. Se usó el MakerNoise del Comprehensive Perl Archive Network(CPAN) para generar una imagen 2D con ruido wavelet con opción de multiresolución.

rotacional de w . Tenemos, respectivamente los campos vectoriales en 2D y 3D usando:

$$\nabla \times w_{2D} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{w} = \nabla \times w = \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z}, \frac{\partial w_3}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_3}{\partial y} \right) \quad (3.43)$$

Utilizamos el caso 3D (3.43). El campo vectorial resultante es incomprensible pues $\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial w_3}{\partial z \partial y} = 0$. Este caso requiere tres entradas de ruido diferentes, lo que hemos denotado como w_1, w_2 y w_3 . Las funciones de ruido son infinitamente derivables pues son una interpolación B-spline. El campo conserva las mismas propiedades de banda límite de la señal original porque la diferenciación es un filtro de paso alto lineal en el dominio de frecuencias, el cual, por definición, no agrega nuevas frecuencias. Esto es suficiente para garantizar que el campo vectorial 2D es banda límite. Adicionalmente, se observa que la adición de dos señales juntas, también es lineal, por lo que el caso 3D es también banda límite.

Desde una perspectiva visual, $\nabla \times w$ genera un campo vectorial distribuido aleatoriamente de remolinos de tamaño fijo estrechamente compactados. En lo subsiguiente, utilizaremos $\nabla \times w$ para generar un campo vectorial de acuerdo con la teoría de turbulencia de Kolmogorov.

3.3.2. Modelo Wavelet- Partícula

En la dinámica de fluidos pueden pasar dos cosas con los remolinos. Ellos se pueden dividir a la mitad de su tamaño original (difusión frontal) o pueden fusionarse en remolinos más grandes (difusión posterior). Remolinos muy pequeños se pierden debido a la dispersión numérica o debido al límite de Nyquist. Para generar remolinos de pequeña escala, la difusión frontal debe ser reproducida de manera que cada remolino grande se divida en dos pequeños remolinos de acuerdo con la distribución de energía 5/3 de Kolmogorov. La energía del remolino se evalúa a partir de la componente espectral del campo velocidad \mathbf{u} en la banda espectral k :

$$\hat{\epsilon}(k) = \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}(k)|^2 \quad (3.44)$$

Para detectar la ubicación en la que el flujo turbulento se producirá, debemos tener en cuenta tanto la distribución espacial como la distribución frecuencial de la energía (es decir, $\hat{\epsilon}(k, x)$). La solución clásica es aplicar la transformada de Fourier con ventana para realizar este análisis, sin embargo esta sufre de un compromiso entre las resoluciones espacial y de frecuencia, que son dependientes del tamaño de la ventana. Kim y otros solucionaron este problema utilizando la transformada wavelet y luego calculando la energía de cada celda de la malla. Nuestro enfoque consiste en aplicar esta transformada wavelet con el método de partículas (SPH) como solucionador de la ecuación 1.49, tal como fue hecho recientemente por Fujisawa y otros 2011. El método de partículas es un método lagrangiano. No existe una malla donde se pueda definir explícitamente vecindades de valores. En su lugar, una alternativa sería calcular la transformada wavelet definiendo una *grid* que tiene proyectado el campo de velocidad de las partículas, similar a la búsqueda de partículas vecinas. Sin embargo, esto incrementaría el uso de memoria y tiempo de cálculo y también eventualmente causaría dispersión numérica cuando la velocidad de la partícula se proyecte sobre la celda malla. Por lo tanto, se determina directamente la transformada wavelet del campo velocidad, que denotaremos con la virgulilla, $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, y el espectro de energía, $\tilde{\epsilon}(s, x)$, en una escala s tomando una suma ponderada de las partículas vecinas calculadas utilizando el método SPH ya descrito.

Generalizando la ecuación (1.20) para tres dimensiones, tenemos que la transformación wavelet de \mathbf{u} , a través del eje x , es:

$$\tilde{\mathbf{u}}(s, a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{s}} \iiint_{-\infty}^{\infty} u(x) \psi\left(\frac{x-a}{s}, \frac{y-b}{s}, \frac{z-c}{s}\right) dx dy dz$$

donde s es la escala wavelet, a, b y c son valores tradicionales a lo largo de cada eje, y ψ es la wavelet madre. Luego, la transformada wavelet discreta de la velocidad u_i , para la

partícula es i es.

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{\sqrt{s}\psi_{sum}} \sum_j u_j \psi \left(\frac{x_i - x_j}{s}, \frac{y_i - y_j}{s}, \frac{z_i - z_j}{s} \right) \quad (3.45)$$

donde $\psi_{sum} = \sum_j \psi$ y j varía en las partículas vecinas de i . Si se utiliza una malla, el número de partículas alrededor de una celda individual es constante. Por el contrario, cuando se usa el método de partículas, el número de partículas vecinas variará según la posición de la celda y el tiempo, de modo que el valor absoluto de la transformada wavelet tiende a ser grande cerca de la superficie de un líquido. Esto es porque sólo hay una número pequeño de partículas en la superficie del líquido y la influencia de una partícula, por lo tanto, será grande. Para evitar esto, se introduce ψ_{sum} para normalizar el valor. La energía de vórtice $\tilde{e}_i(k)$ se puede calcular mediante la sustitución de \tilde{u} en 3.44.

3.3.3. Modelo con Turbulencia Wavelet-Kolmogorov

Si calculamos e_t para cada banda k de $\tilde{u}(\mathbf{x}, k)$ obtenemos un espectro de energía $\tilde{e}_t(k)$. Uno de los puntos importante de la teoría de Kolmogorov es que el espectro de energía de un fluido turbulento se aproxima a cinco tercios de la distribución de energía según la ecuación (1.57) que reescribimos aquí:

$$e_t(k) = C\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}} \quad (3.46)$$

Donde C y ε son la constante de Kolmogorov y la tasa media de disipación de energía por unidad de masa. El exponente de escala $-\frac{5}{3}$ es válido tanto para el espectro de Fourier como el wavelet, pues de (1.32), en su versión vectorial, notamos que la variable k no se altera al pasar de la transformada de Fourier a la transformada wavelet.

Usando nuestra función de ruido w , podemos construir proceduralmente un campo de velocidad que produce esta distribución de energía. Primero observamos que (3.46) puede reescribirse, para valores espectrales potencias de 2, como la relación de recurrencia:

$$e_t(2k) = e_t(k)2^{-\frac{5}{3}}, \quad e_t(1) = C\varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

Las velocidades se pueden reescribir de forma análoga usando (3.44):

$$|\tilde{u}(\mathbf{x}, 2k)| = |\tilde{u}(\mathbf{x}, k)|2^{-\frac{5}{6}}, \quad |\tilde{u}(\mathbf{x}, 1)| = 2^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{2}{6}} \quad (3.47)$$

Desde que $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ es banda límite, puede ser sustituido por $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, k)$. La función turbulencia wavelet de Kim y otros es entonces una versión en serie de (3.47):

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=i_{min}}^{i_{max}} \mathbf{w}(2^i \mathbf{x}) 2^{-\frac{5}{6}(i-i_{min})} \quad (3.48)$$

donde $[i_{min}, i_{max}]$ es el ancho de banda espectral que se aplica a $\mathbf{y}(\mathbf{x})$. Estos valores originalmente tienen sentido para un método euleriano, en nuestro caso queremos generar una turbulencia partícula-escala, y con este fin i_{max} es el diámetro de la partícula (análogo al ancho de la celda en un método euleriano) e i_{min} es determinado basado en la escala wavelet s .

3.4. Optimización de visualización de las imágenes

3.4.1. Generación de la superficie libre

Aquí queremos generar una superficie poligonal a partir de la simulación con partículas usando isosuperficies. Una isosuperficie de valor c es dada como $S = f^{-1}(c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{x}) = c\}$ donde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar. La función f es definida tal que un punto \mathbf{x} está en el interior de la superficie S si tenemos $f(\mathbf{x}) < c$ y cuando \mathbf{x} está en el exterior de S tenemos $f(\mathbf{x}) > c$. Luego, para verificar si un punto \mathbf{x} está dentro o fuera de una superficie S basta observar el signo de $f(\mathbf{x}) - c$.

La visualización de superficies implícitas es realizada con mallas triangulares obtenidas a través del algoritmo Marching Cubes. Ahora, visualizar superficies con singularidades como puntas y esquinas, requiere información adicional tal como el gradiente de la superficie. El algoritmo *Dual marching cubes (DMC)* es una extensión del algoritmo de *MC* que usa información del gradiente para detectar y reconstruir singularidades a través de una malla adaptativa. La ventaja de las superficies implícitas es su consistencia desde el punto de vista de no poseer auto-intersecciones y de lidiar intrínsecamente con los cambios topológicos.

La captura de la superficie libre del fluido es dado implícitamente a través de la aproximación SPH de la función característica dado por Monaghan en [21]:

$$\chi(\mathbf{x}) = \sum_{j \in N(\mathbf{x})} \frac{m_j}{\rho_j} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (3.49)$$

el isovalor es tomado en $[0, 1]$, pues el núcleo posee soporte compacto y es partición de la unidad.

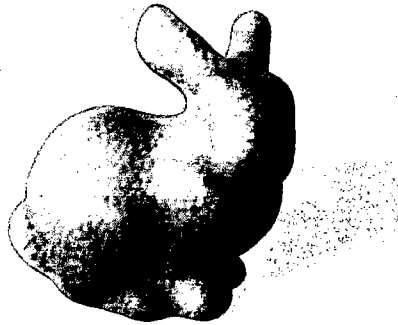


Figura 3.7: Visualización de la superficie implícita extraída del modelo Stanford Bunny constituido de partículas.

3.4.2. Textura de fluidos

Resolver las ecuaciones del movimiento de los fluidos es sólo una parte del trabajo en una simulación fotorealista de fluidos. Como paso siguiente debemos brindar el color a cada elemento de la escena: fondo, fluido, otros elementos decorativos, etc. Esta es otra área de la computación gráfica que se perfecciona constantemente. Los métodos de textura-advección (line integral convolution, lagrangian-Eulerian advection, image-based flow visualization, etc) son los estándares para esta tarea y están implementados en el sistema de materiales del software Blender. Estos métodos permiten texturizar un campo vectorial o flujo dando la apariencia fotorealista. Aquí no desarrollaremos estos métodos, pues involucran temas matemáticos que aumentarían el volumen de esta tesis y nos harían perder el objetivo central propuesto. Se puede encontrar una descripción simple de estos métodos en [23].

3.4.3. Detección de la difusión y distorsión de la forma del flujo

Siendo n el número de partículas. La difusión frontal puede ser detectado ponderando $\mathbf{y}(\mathbf{X})$ por $\tilde{e}(\mathbf{x}, \frac{n}{2})$ en lugar de $e_t(\frac{n}{2})$. Esto extrapola a nivel local el espectro de energía con la misma intuición como la ec. (3.50). Luego transportamos un conjunto de coordenadas de textura $c = (c_u, c_v, c_w)$ a lo largo del flujo, y evaluamos y utilizando el valor advectado.

Si detectamos que las coordenadas de textura locales están causando que y se desvie fuera de su banda espectral original, ellos son regenerados a los valores locales originales. Específicamente nosotros estamos advectando remolinos. Cuantificamos la cantidad de deformación local mediante el Jacobiano de las coordenadas de textura, que denotamos $J(\mathbf{c}(\mathbf{x}))$.

Para los autovalores $\lambda(\mathbf{c}(\mathbf{x}))$ de $J(\mathbf{c}(\mathbf{x}))$, si $\max(|\lambda(\mathbf{c}(\mathbf{x}))|) \geq 2$, desde el punto de vista físico, el remolino local se ha difundido frontalmente en una banda espectral superior. Si $\min(|\lambda(\mathbf{c}(\mathbf{x}))|) \leq \frac{1}{2}$, entonces el remolino ha difundido posteriormente a una banda inferior. En ambos casos, el remolino ya no es físicamente (o visualmente) coherente, por lo que la coordenada de textura debería ser regenerada.

3.4.4. Inyección de Turbulencias

Usamos minúsculas para denotar variables en la resolución más baja n^3 y mayúsculas para resoluciones altas N^3 . Definimos una función de interpolación $I(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ que interpola \mathbf{u} en la ubicación de alta resolución \mathbf{X} , y $\mathcal{A}(\mathbf{U}, D)$ como la advección de D por \mathbf{U} .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\longrightarrow I(\mathbf{u}, \mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathbf{X}) \\ D &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{U}, D) \longrightarrow D(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

Ahora nos centraremos en la síntesis de N^3 partículas de un campo de velocidad \mathbf{U} . El método más simple es la interpolación de velocidades: $\mathbf{U}(\mathbf{X}) = I(\mathbf{u}, \mathbf{X})$. Esto suaviza las velocidades de acuerdo con el método de interpolación usado, pero no genera ninguna vorticidad nueva (remolino) en la nueva banda espectral $[n, \frac{N}{2}]$. Un método más sofisticado es calcular la energía $e_t(\frac{n}{2})$ de los remolinos más pequeños de \mathbf{u} y usamos este valor para ponderar nuestra función de turbulencia ([16]):

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = I(\mathbf{u}, \mathbf{X}) + 2^{-\frac{5}{6}} \cdot e_t\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{X}) \quad (3.50)$$

Nosotros sólo queremos inyectar energía en la nueva banda $[n, \frac{N}{2}]$, luego establecemos $i_{min} = \log_2 n$ y $i_{max} = \log_2 \frac{N}{2}$ en $\mathbf{y}(\mathbf{X})$. Intuitivamente, este enfoque supone que el espectro de energía de \mathbf{u} sigue la distribución de Kolmogorov, calcula el último valor resuelto, $e_t(\frac{n}{2})$, y lo usa esta para extrapolar energías sobre la nueva banda $[n, \frac{N}{2}]$.

3.4.5. Velocidad de alta resolución

Así como las coordenadas de textura transportadas se estiran y rotan, y también lo hace. Esto, potencialmente viola la incompresibilidad porque, como las coordenadas de textura se deforman, las derivadas $[\partial w/\partial c_u, \partial w/\partial c_v, \partial w/\partial c_w]$ ya no corresponden a las derivadas a lo largo de los ejes cartesianos $[\partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial w/\partial z]$. Las derivadas pueden ser obtenidas proyectando los ejes cartesianos en el espacio de textura y tomando la derivada direccional.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial c_u} & \frac{\partial w}{\partial c_v} & \frac{\partial w}{\partial c_w} \end{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{c}(\mathbf{x}))^{-1} [\mathbf{v}_x \ \mathbf{v}_y \ \mathbf{v}_z] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Las derivadas cartesianas resultantes son entonces usadas en (3.43). Denotamos $\mathbf{z}(\mathbf{c})$ a la función de turbulencia modificada que toma una coordenada de textura y realiza esta proyección.

Nuestra ecuación final para generar un campo de velocidad en alta resolución es:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = I(\mathbf{u}, \mathbf{X}) + 2^{-\frac{5}{6}} I \left(\tilde{\mathbf{e}} \left(\mathbf{x}, \frac{n}{2} \right), \mathbf{X} \right) \mathbf{z}(I(\mathbf{c}, \mathbf{X})) \quad (3.51)$$

Como antes, los valores $i_{min} = \log_2 n$ y $i_{max} = \log_2 \frac{N}{2}$ se usan para evaluar \mathbf{z} sobre las bandas espectrales apropiadas.

3.4.6. Proceso de control y detalles finos

Una vez generadas las partículas de control según los fotogramas claves deseados, podemos hacer el control del flujo del fluido de manera sencilla haciendo interactuar las partículas del fluido con las partículas de control. Después de ello el flujo adquiere la forma geométrica del fotograma clave. Seguido viene el proceso de aumento de detalles finos mediante la turbulencia wavelet y la visualización final mediante algoritmos de renderización (textura-advection, image-based flow visualization, etc). El proceso de control y visualización final para el fotograma clave de la Figura 3.5 se muestra en la Figura 3.8.

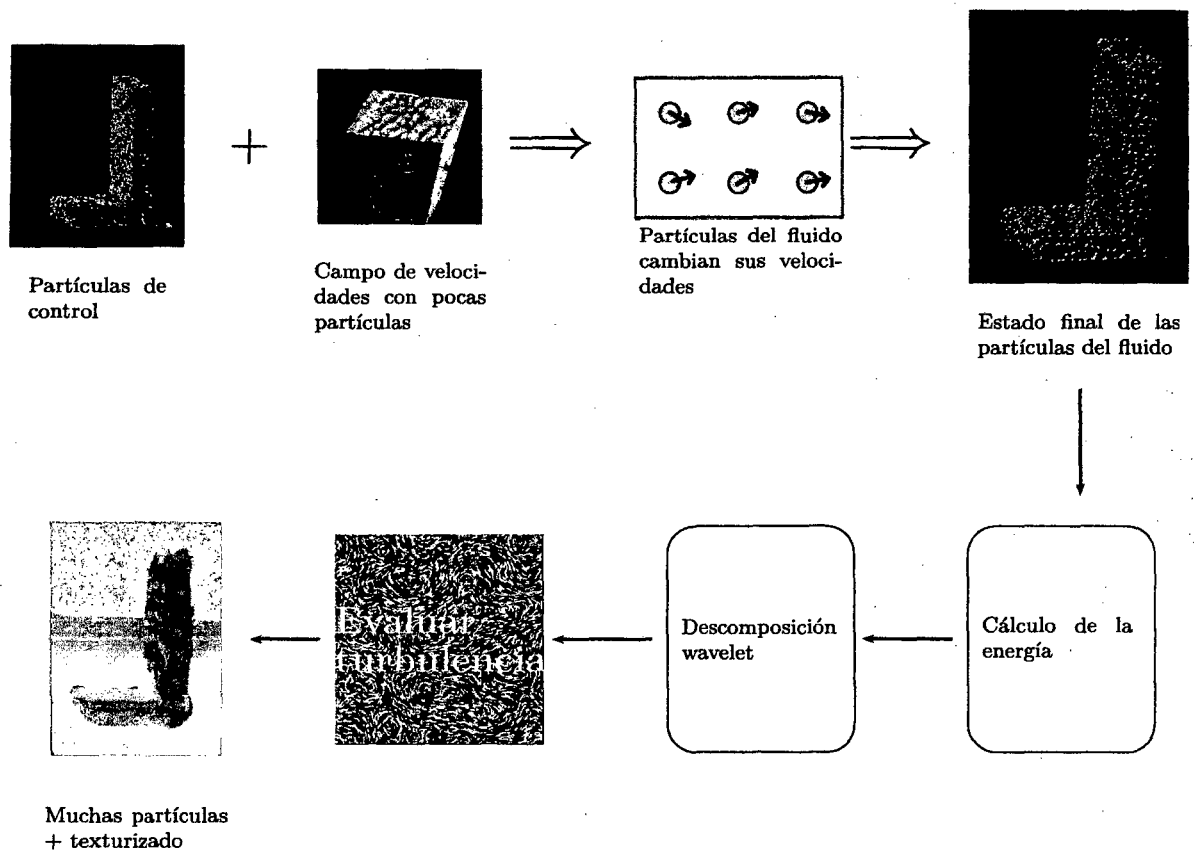


Figura 3.8: Esquema del método de control de fluidos con turbulencia wavelet.

Finalmente, el método de simulación de fluidos que soporta control de la geometría sigue los siguientes pasos:

1. Resolver el campo de velocidades a partir de las ecuaciones del movimiento con SPH.
2. Actualizar de la posición y la velocidad de las partículas según los fotogramas claves y partículas de control.
3. Cálculo de la distribución de la energía a través del análisis wavelet.
4. Añadir la función de turbulencia wavelet de Kim y otros.

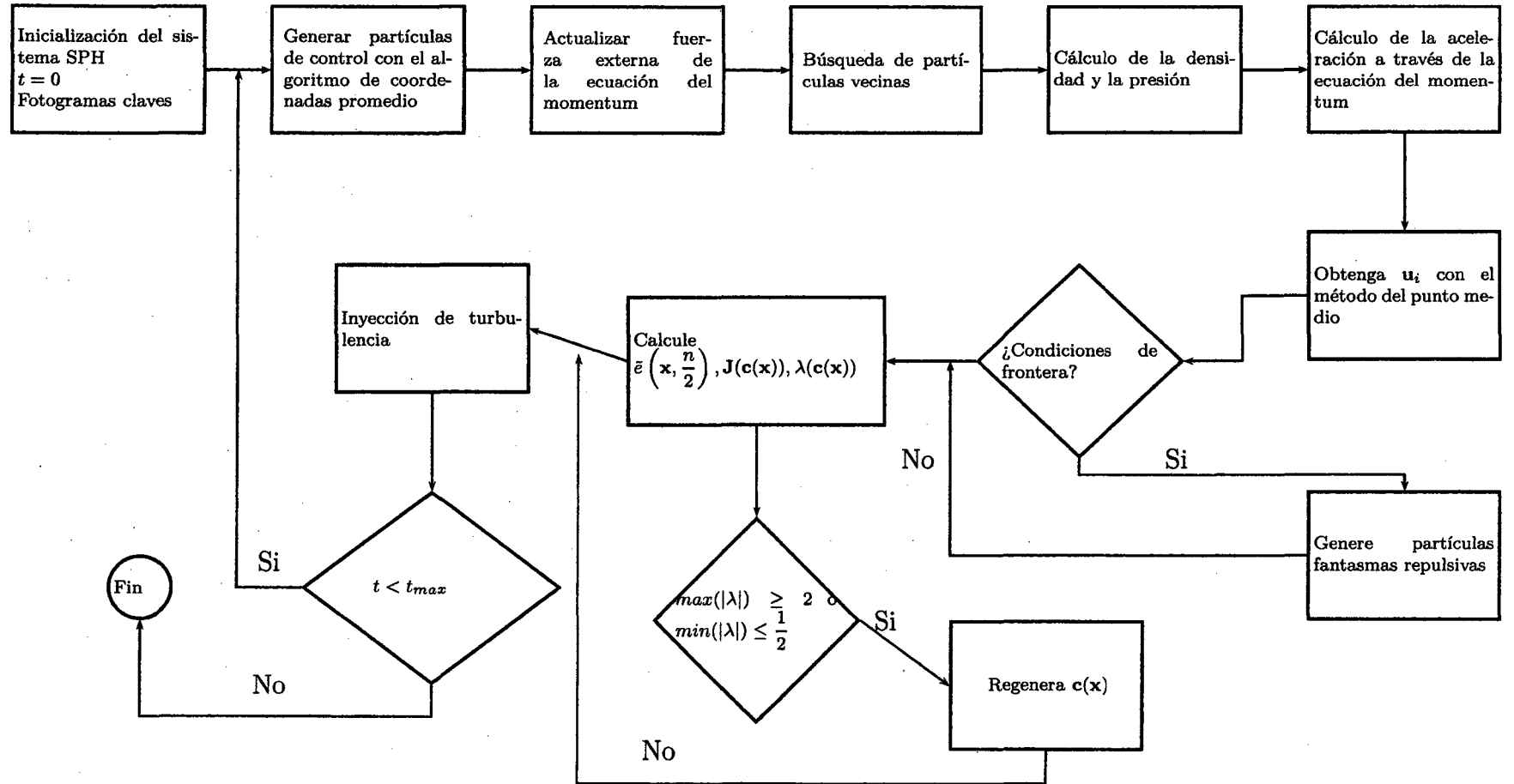


Figura 3.9: Diagrama de flujo del proceso de simulación, control y visualización de un fluido con SPH.

Capítulo 4

Resultados y simulación del proceso

Para los resultados gráficos usamos el software Blender. Este es un proyecto libre de alto apoyo científico con resultados gráficos a la altura de softwares comerciales, razón por la cual es usado como plataforma base para muchos trabajos en Computación Gráfica. Nils Thürey, uno de los autores de la turbulencia wavelet[16] y del control preservando detalles mediante partículas de control[26] implementó estos algoritmos para Blender.

Este software nos permite diseñar nuestras escenas y los fotogramas claves de manera sencilla y a la vez realizar simulaciones de fluidos teniendo control de los parámetros. Además, en su versión 2.63 cuenta con un motor de renderizado 3D (Cycles) que logra imágenes realistas mediante los últimos algoritmos en ese campo. Esto nos ahorró mucho tiempo en cuanto a la implementación de los algoritmos tratados en esta tesis y de otros algoritmos necesarios pero no referentes a nuestros objetivos, como son la interfaz de diseño sensitiva al mouse, algoritmos de visualización geométrica en tiempo real, algoritmos clásicos de modelamiento geométricos, el algoritmo de coordenadas promedio de [15], los algoritmos de texturización- renderización, etc.

El sistema es inicializado, para el caso del agua con una densidad $\rho_0 = 1000kg/m^3$, viscosidad de $\mu = \lambda = 10^{-3}Ns/m^2$ y gravedad de $g = 10m/s^2$ y para el caso de humo con densidad de $\rho_0 = 1kg/m^3$.

4.1. SPH

Blender implementa dos algoritmos para la simulación de fluidos: el Lattice Boltzmann Method (LBM) y el Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method (link). El primero

es euleriano y el segundo lagrangiano.

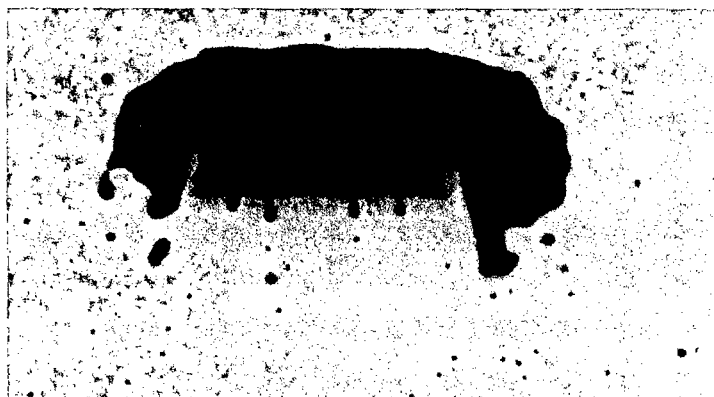


Figura 4.1: Prueba del sistema de partículas de Blender. Generación de un fluido viscoso (color rojo) sobre un obstáculo (palabra BLENDER) con 10000 partículas.

4.2. Turbulencia wavelet

Este software nos permite generar partículas en cada iteración (número de partículas dinámico). Esto es adecuado para una simulación de humo sin control. Consideremos 32^3 partículas por iteración. Vamos a testear la diferencia visual entre una simulación sin turbulencia wavelet y la misma simulación con turbulencia wavelet. Esto se puede ver en la Figura 4.2. Para este caso se considera viscosidad cero (el humo se considera no viscoso) y como fuerzas externas la gravedad. Un plano horizontal genera las partículas a la razón mencionada arriba.

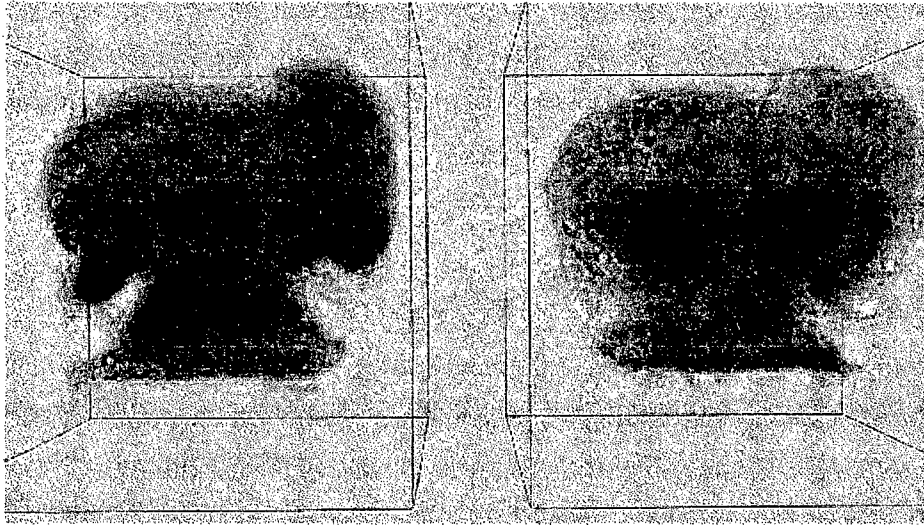


Figura 4.2: Comparación humo sin turbulencia wavelet(izquierda) y con turbulencia wavelet(derecha). 32^3 partículas por iteración, Wavelet B-spline cuadrática.

4.3. Fluido sin control

Según la formulación del sistema (2.4), con $N = 10$, un cubo unitario formado por 180^3 partículas de fluido con las propiedades viscosas del agua. Visualización sin textura cristalina.

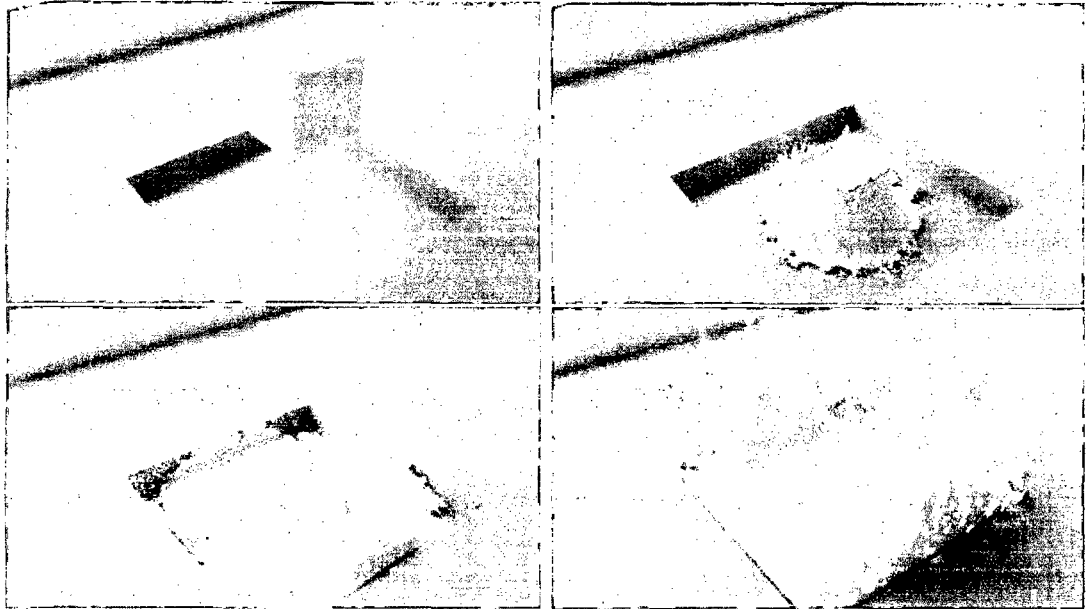


Figura 4.3: Cubo de agua que cae. Simulación sin control.

4.4. Agua con control

Bajo las mismas condiciones anteriores, un cubo unitario de agua que se deja caer y después se levanta un cubo más pequeño, luego este se desdobra. Se usaron 180^3 partículas y dos superficies S_1 y S_2 , ambas cubos unitarios. Las evoluciones $L_1(S_1, t)$ y $L_2(S_2, t)$ generan el efecto animado. Comenzaron superpuestos desde abajo del recipiente y fueron subiendo para luego separarse en el aire. El fluido adquirió esa evolución. Esto se muestra en las Figuras 4.4 y 4.5. Las partículas de control se generan sobre estas superficies como ya se explicó. Los parámetros fueron $n = 1000$, $h = 0,75$, $w_a = 0,2$, $w_v = 0,3$.

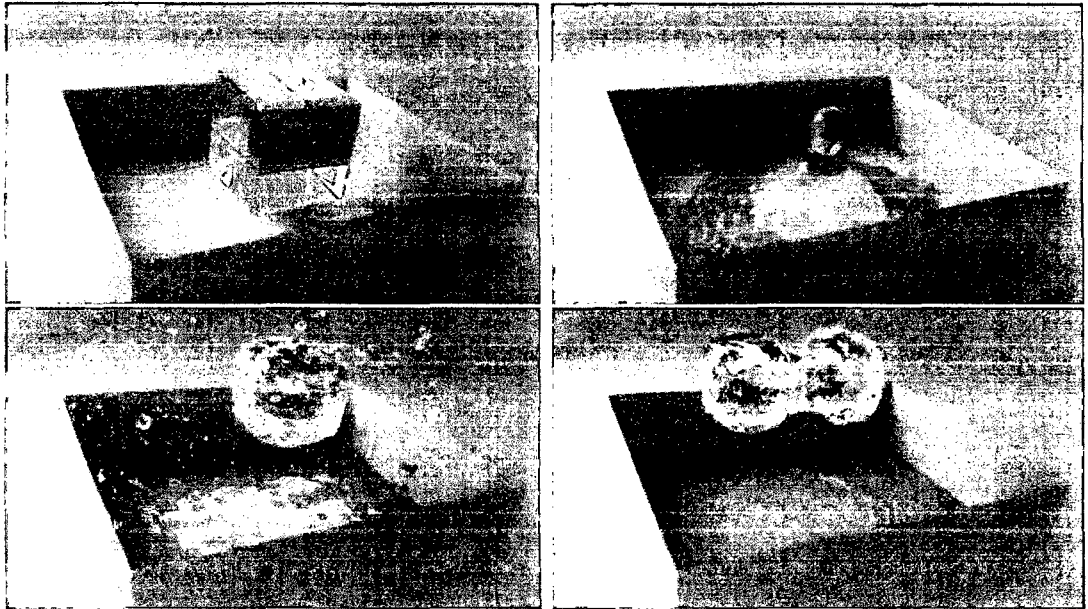


Figura 4.4: Control de un cubo de agua que se desdobra.



Figura 4.5: Conjunto de fotogramas claves para la Figura 4.4.

Si cambiamos los fotogramas claves del ejemplo anterior por los de la Figura 4.6, las partículas de control muestreadas alrededor de estos fotogramas claves dan lugar al flujo mostrado en la Figura 4.7.



Figura 4.6: Conjunto de fotogramas claves de la Figura 4.7. $L(S,0)$ =cubo unitario sin caras superior e inferior(izquierda), $L(S,t)$ es un enconamiento continuo y $L(S,t_{final})$ =superficie de la derecha.

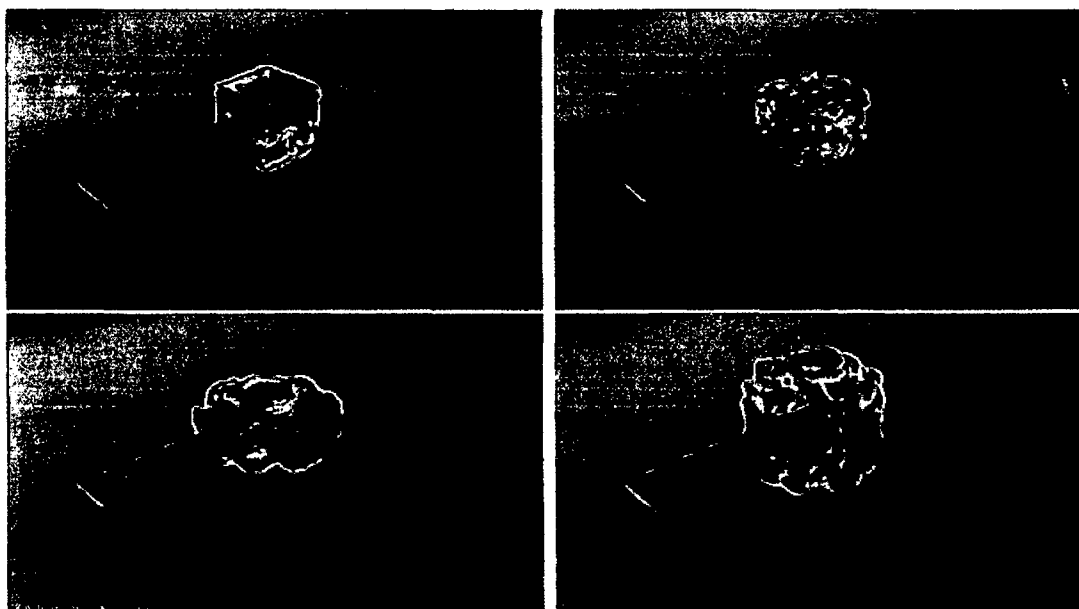


Figura 4.7: Cubo de agua controlado con los fotogramas de la Figura 4.6.

Finalmente, terminamos generando un flujo de agua que muestre la palabra LABOSIN. Se

usaron 200^3 partículas de fluido y 1000 partículas de control por cada letra(superficie) con las propiedades del agua mencionadas al principio. Se usaron 7 conjuntos de fotogramas como se muestra en la Figura 4.8 y evoluciones $L_i(S_i, .), i = 1, 2, \dots, 7$ verticales de diseño elaborado(mediante Blender).



Figura 4.8: Fotograma para elaborar la palabra LABOSIN con agua. Nótese que la letra B se reemplazó por el número 8. Esto pues así se deja notar un mejor resultado.

El resultado final se muestra en la Figura 4.9.

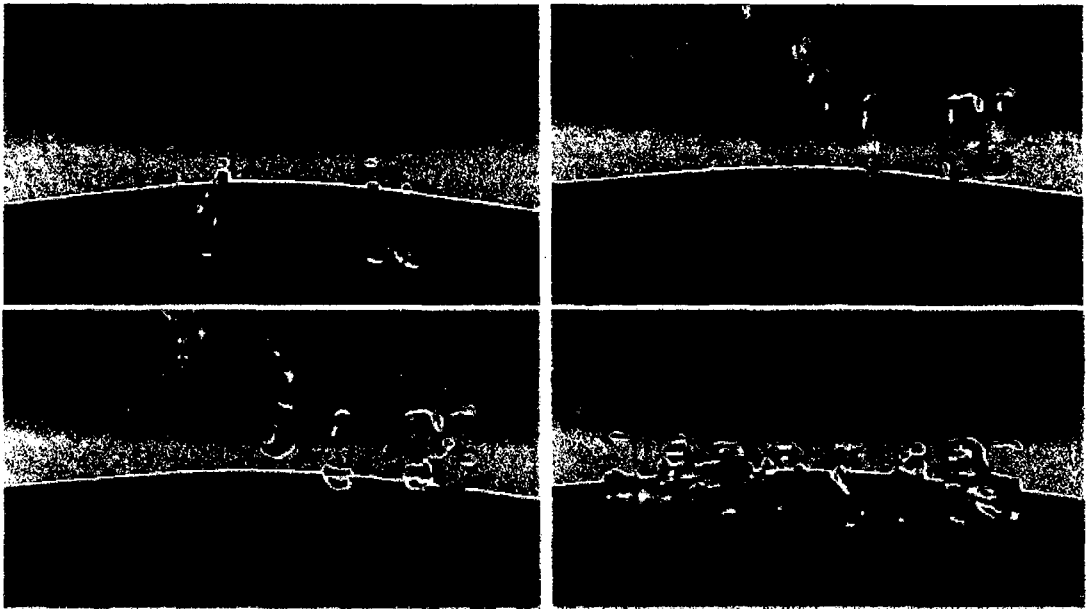


Figura 4.9: Palabra LABOSIN formada de agua.

4.5. Permanencia del comportamiento físico

Agua formada por 180^3 partículas de fluido interactúa con el fotograma clave de la Figura 3.4. Este ejemplo muestra como esta metodología de control, usando las ecuaciones físicas, nos permite generar efectos visuales manteniendo el comportamiento físico del fluido. En la Figura 4.10, por ejemplo, variando el radio de influencia h_i , la intensidad de atracción w_a y la influencia de la fuerza de velocidad w_v , se logra el efecto visual de la letra "P" de la marca Perú con diferentes versiones de flujo de agua, lo cual es complicado de hacer con la edición manual de una fotografía.

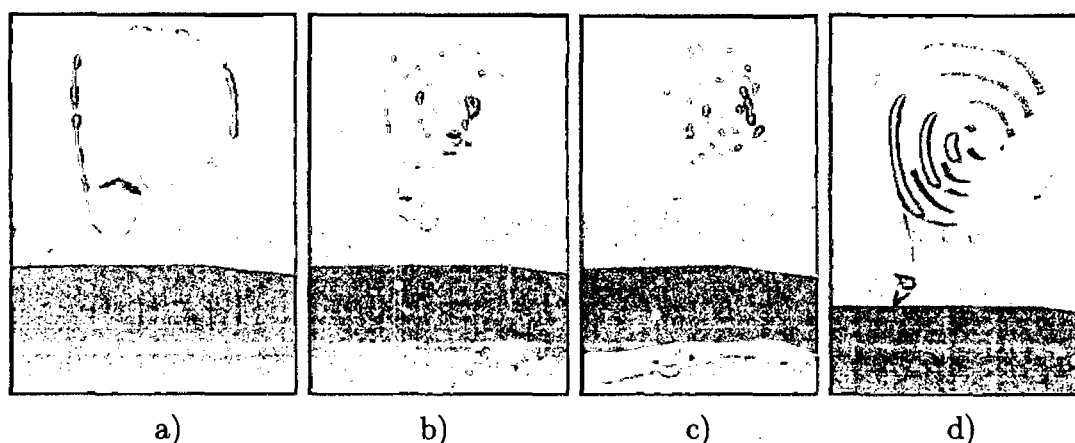


Figura 4.10: Comparación de las diferentes versiones de control para el fotograma de la letra "P" de la marca Perú y un objeto similar con la textura de agua. a) $h = 0,75$; $w_a = 0,2$; $w_v = 0,2$ b) $h = 0,8$; $w_a = 0,1$; $w_v = 0,3$ c) $h = 0,1$; $w_a = 1$; $w_v = 0,5$ d) Objeto 3D de la letra "P" de la marca Perú con la textura de agua.

4.6. Conclusiones y comentarios

Se ha logrado alcanzar los siguientes objetivos: Se encontró numéricamente la velocidad usando el método SPH, en la cual se ha considerado la ecuación de estado de [2] para obtener la presión con respecto a la densidad. Se ha construido el algoritmo de control basado en fotogramas claves y partículas de control y se construyó una función de turbulencia junto con el algoritmo de inyección de ésta para agregar detalles finos a la simulación con un número de partículas bajo. Se desprende de este trabajo que:

1. Es posible realizar simulaciones de fluidos con un comportamiento no físico diverso mediante la técnica de los fotogramas claves y las partículas de control. Sin embargo, una vez satisfecho el fotograma clave esta técnica conserva el comportamiento físico del fluido y ese es el punto importante de este enfoque, pues queremos que un fluido adopte cierto comportamiento, pero que siga siendo un fluido. Un control sobre fluidos que obvie totalmente el comportamiento físico de estos y que sólo busque la visualización de la textura debería de hacerse por otros métodos.
2. El método de la turbulencia wavelet aproxima los componentes de alta frecuencia de \mathbf{U} como una turbulencia. Si bien esto puede producir resultados aceptables, ya que $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ es ponderada globalmente, esto puede producir pequeños remolinos espontáneos en las regiones donde no hay precursor de escala más grande. La ponderación debería, en lugar de variar espacialmente, ser añadida con la turbulencia sólo cuando un remolino en \mathbf{u} se disperse frontalmente en una frecuencia irresoluble previa.
3. Sobre la complejidad computacional, para los métodos lagrangianos, esta es, generalmente, $O(n^2)$, donde n es el número de partículas. Se puede mejorar usando implementaciones especiales en la búsqueda de partículas vecinas, pero no se llega a una complejidad lineal. Para el proceso de fotorealismo, casi todos los pasos ocurren sobre las n^3 partículas, usando las N^3 partículas sólo al final para la generación de \mathbf{U} y advección de D . El algoritmo requiere seis matrices adicionales de tamaño n^3 : \mathbf{c} , $\min(|\lambda|)$, $\max(|\lambda|)$ y $\tilde{\epsilon}$. Los valores de \mathbf{J} pueden ser descartados una vez que λ es calculado. Si $\mathcal{A}(\mathbf{U}, D)$ es implementado usando un esquema semi-lagrangiano, sólo D es instanciado explícitamente porque cada $\mathbf{U}(X)$ se pierde después de calcular $D(\mathbf{X})$. Como se usan partículas para seguir la densidad, D explícito es innecesario y se consigue un uso de la memoria $O(n^3)$.
4. Los obstáculos no son muy usados en nuestras simulaciones, sin embargo, pueden ser incorporados con menores modificaciones. El principal problema es que, si las velocidades dentro de un obstáculo son puestos a cero, la discontinuidad en \mathbf{u} puede provocar un salto en $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, \frac{n}{2})$. Para evitar esto se extrapola valores de energía a partir del borde del obstáculo hacia adentro usando el método de marcha rápida (fast marching method) antes de calcular $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, \frac{n}{2})$. Para dar un control de usuario sobre la turbulencia, \mathbf{y} puede ser ponderada por una función volumétrica arbitraria $v(\mathbf{X})$ además de $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, \frac{n}{2})$. Un usuario puede amplificar la turbulencia en las regiones estableciendo $v(\mathbf{x}) > 1$ o puede suprimir detalles especificando $v(\mathbf{x}) < 1$. En cualquier caso, el valor inicial $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, \frac{n}{2})$ proporciona una buena configuración predeterminada.

Apéndices

Apéndices A

Lista de términos

1. **Advección:** Es variación de una cantidad escalar en un punto dado, por efecto de un campo vectorial. Por ejemplo: el transporte de una sustancia contaminante por la corriente de un río, el transporte de una propiedad atmosférica, como el calor o la humedad, por efecto del viento o el transporte de ciertas propiedades, como la salinidad, por las corrientes marinas. En coordenadas cartesianas el operador advección es:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

donde $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ es el campo vectorial que transporta la cantidad escalar.

2. **Aliasing:** En Computación Gráfica, el aspecto escalonado de líneas diagonales cuando no hay suficientes píxeles en la imagen o en la pantalla para representarlos realísticamente. También llamada "stair-stepping" y "jaggies"¹.
3. **Fast Marching Method:** El método de marcha rápida es un método numérico para resolver problemas de frontera de la forma:

$$F(x)|\nabla T(x)| = 1$$

Típicamente, dicho problema describe la evolución de una curva cerrada, como una función del tiempo con velocidad en la dirección normal a un punto de la curva. La función de la velocidad es especificada, y el tiempo en el que la frontera cruza un punto se obtiene resolviendo la ecuación.

¹<http://computer.yourdictionary.com/>

4. **Marching Cubes Method:** Es un algoritmo usado en computación gráfica, publicado en los procedimientos de SIGGRAPH 1987 por Lorensen y Cline, para la extracción de una malla poligonal de una isosuperficie a partir de un campo escalar tridimensional.

El algoritmo procede a través del campo escalar, tomando ocho vecindades a la vez (por lo tanto formando un cubo imaginario), entonces determina el(los) polígono(s) necesarios para representar la parte de la isosuperficie que pasa a través de este cubo. Los polígonos individuales se fusionan en la superficie deseada. Un método análogo de dos dimensiones se llama el algoritmo *marching squares*.

5. **Metaballs:** Es el nombre de una técnica de Computación Gráfica para simular la interacción orgánica entre diferentes objetos n-dimensionales (como gotas de miel mezclándose por su superficie). Fue propuesto por Jim Blinn en 1982.
6. **Motor de renderizado:** En general, el motor de renderizado o motor de interpretación, es cualquier software que se encarga de interpretar y representar contenido. Puede ser un motor de renderizado web o un motor de renderizado 3D. Para el primer caso, el motor permite mostrar en pantalla contenido con estilo, estructura y forma de acuerdo a contenido marcado e información de formateo. Para el segundo caso, el motor permite generar una imagen a partir de un modelo 3D interpretando la información geométrica, de materiales y de iluminación de la escena.
7. **Shader:** Un shader es un programa de computadora que corre sobre la Unidad de procesamiento gráfico(GPU) de manera independiente. Es una tecnología reciente y que ha experimentado una gran evolución destinada a proporcionar al programador una interacción con la GPU hasta ahora imposible. Los shaders son utilizados para "sombrear" con una luz y oscuridad una imagen y actualmente también para realizar transformaciones y crear efectos especiales.
8. **Texture Advections Methods:** En computación gráfica, los métodos de advección de texturas son una familia de métodos para visualizar densamente campos vectoriales o flujos. Los científicos pueden utilizar las imágenes y animaciones creadas para comprender mejor estos flujos e investigar sobre ellos. En comparación a las técnicas que visualizan líneas de corriente, streaklines o líneas de tiempo, los métodos de esta familia no necesitan ningún punto semilla y puede producir una imagen completa a cada paso.

Los métodos de esta familia tienen en común que curvan una imagen completa (o textura) de acuerdo con el flujo para crear una nueva imagen que está deformada por el flujo. Si eso se hace en intervalos de tiempo suficientemente pequeños y con

suficiente frecuencia, las imágenes se pueden combinar para crear una animación visual del flujo.

Apéndices B

Códigos

B.1. SPH

Existen muchas implementaciones eficientes del método SPH. Una de las más conocidas es Fluids v.2, de Rama Hoetzlein, un simulador de fluidos de código abierto, basado en SPH y escrito en C++. Nosotros mostramos un código simple no optimizado de los procesos importantes del método SPH según fue desarrollado en el capítulo anterior.

```
#include <math.h>
#include <string.h>
#define FOR_EACH_PARTICLE for(i=0;i<N;++i){
#define END_FOR_EACH_PARTICLE }
#define FOR_EACH_PAIR for(i=0;i<(N-1);++i){ for(j=i+1;j<N;++j){
#define END_FOR_EACH_PAIR }}

float W(float h, float dx, float dy) {
static const float r2pi = 0.15915494309189535f;
float rh2 = 1.0f / ( h * h );
return r2pi * rh2 * exp( - 0.5f * rh2 * ( dx * dx + dy * dy ) );
}
void gradW(float h, float dx, float dy, float* gradWx, float* gradWy)
float scale = -W(h, dx, dy) / ( h * h );
*gradWx = scale * dx;
*gradWy = scale * dy;
}
```

```

void wGradW(float h, float dx, float dy,
float* w, float* gradWx, float* gradWy) {
*w = W(h, dx, dy);
float scale = - (*w) / ( h * h );
*gradWx = scale * dx;
*gradWy = scale * dy;
}
void computeDensities( float h, float m, unsigned int N,
float* x, float* y, float* rho ) {
register unsigned int i, j;
float Wh = W(h, 0.0f, 0.0f);
FOR_EACH_PARTICLE
rho[i] = Wh;
END_FOR_EACH_PARTICLE
FOR_EACH_PAIR
Wh = W(h, x[i]-x[j], y[i]-y[j]);
rho[i] += Wh;
rho[j] += Wh;
END_FOR_EACH_PAIR
FOR_EACH_PARTICLE
rho[i] *= m;
END_FOR_EACH_PARTICLE
}

void computeStressTensors( float h, float m, float lambda, float mu,
unsigned int N, float* rho, float* x, float* y, float* u, float* v,
float* s11, float* s12, float* s22 ) {
register unsigned int i, j;
float twomu = mu+mu, gradWx, gradWy, du, dv;
float d11, twod12, d22, lambdaTrD;
float s11rho, s12rho, s22rho, rrho;
memset(s11, 0, N * sizeof(float));
memset(s12, 0, N * sizeof(float));
memset(s22, 0, N * sizeof(float));
FOR_EACH_PAIR
gradW(h, x[i]-x[j], y[i]-y[j], &gradWx, &gradWy);
du = u[j]-u[i];
dv = v[j]-v[i];
d11=du * gradWx;

```

```

twod12=du * gradWy + dv * gradWx;
d22=dv * gradWy;
lambdaTrD=lambda * ( d11 + d22 );
s11rho = lambdaTrD + twomu * d11;
s12rho =mu * twod12;
s22rho = lambdaTrD + twomu * d22;
rrho= 1.0f / rho[j];
s11[i] += s11rho * rrho;
s12[i] += s12rho * rrho;
s22[i] += s22rho * rrho;
rrho= 1.0f /rho[i];
s11[j] += s11rho * rrho;
s12[j] += s12rho * rrho;
s22[j] += s22rho * rrho;
END_FOR_EACH_PAIR

```

```

FOR_EACH_PARTICLE
s11[i] *= m;
s12[i] *= m;
s22[i] *= m;
END_FOR_EACH_PARTICLE
}

```

```

void addAccelerations( float h, float m, float B, float n, float rho0,
unsigned int N, float* rho, float* x, float* y,
float* s11, float* s12, float* s22, float* f, float* g ) {
register unsigned int i, j;
float Wh, gradWx, gradWy, rrhoi, rrhoj, pi, pj, scale, a, b;
FOR_EACH_PAIR
wGradW(h, x[i]-x[j], y[i]-y[j], &Wh, &gradWx, &gradWy);
rrhoi = 1.0f / rho[i];
rrhoj = 1.0f / rho[j];

/* Ecuaciones de Estado */

pi = (1.0f+B)*pow(rho[i]/rho0,n)-B;
pj = (1.0f+B)*pow(rho[j]/rho0,n)-B;
scale = m * ( pi * rrhoi * rrhoi + pj * rrhoj * rrhoj );
a = - scale * gradWx;

```

```

b = - scale * gradWy;
f[i] += a; f[j] += -a;
g[i] += b; g[j] += -b;
scale = m * rrhoi * rrhoj;
a = scale * ((s11[i]+s11[j])*gradWx + (s12[i]+s12[j])*gradWy);
b = scale * ((s12[i]+s12[j])*gradWx + (s22[i]+s22[j])*gradWy);
f[i] += a; f[j] += -a;
g[i] += b; g[j] += -b;
END_FOR_EACH_PAIR
}

```

```

void enforceBoundaryConditions( float dt, float epsilon, float h,
float* x, float* y, float* u, float* v ) {
float x0 = (*x) - dt * (*u);
float y0 = (*y) - dt * (*v);
float gap = 0.75f * h;
if ( (*x) < 0.0f+gap ) {
*x = 0.0f+gap;
*u = -epsilon * ((*x) - x0) / dt;
}
if ( 1.0f-gap < (*x) ) {
*x = 1.0f-gap;
*u = -epsilon * ((*x) - x0) / dt;
}
if ( (*y) < 0.0f+gap ) {
*y = 0.0f+gap;
*v = -epsilon * epsilon * ((*y) - y0) / dt;
}
if ( 1.0f-gap < (*y) ) {
*y = 1.0f-gap;
*v = -epsilon * epsilon * ((*y) - y0) / dt;
}
if ( x0 <= 0.5f && 0.5f < *x+gap && 0.125f < y0+gap ) {
*x = 0.5f-gap;
*u = -epsilon * ((*x) -x0) / dt;
} else if ( 0.5f <= x0 && *x-gap < 0.5f && 0.125f < y0+gap ) {
*x = 0.5f+gap;
*u = -epsilon * ((*x) -x0) / dt;
}
}

```

```

}
}

void step( float dt, float h, float m, float lambda, float mu, float ep
float B, float n, float rho0, unsigned int N, float* rho,
float* x, float* y, float* u, float* v, float* f, float* g,
float* s11, float* s12, float* s22 ) {
computeDensities( h, m, N, x, y, rho );
computeStressTensors( h, m, lambda, mu, N, rho,
x, y, u, v, s11, s12, s22 );
addAccelerations( h, m, B, n, rho0, N, rho,
x, y, s11, s12, s22, f, g );
register unsigned int i;
FOR_EACH_PARTICLE
u[i] += dt * f[i];
v[i] += dt * g[i];
x[i] += dt * u[i];
y[i] += dt * v[i];
enforceBoundaryConditions( dt, epsilon, h, &x[i], &y[i], &u[i], &v[i]
END_FOR_EACH_PARTICLE
}

```

Bibliografía

- [1] BACHMAN, GEORGE; NARICI, LAWRENCE y BECKENSTEIN, EDWARD: *Fourier and wavelet analysis*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd^a edición, 2000. ISBN 978-0-387-98899-3.
- [2] BATCHELOR, G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 0-521-66396-2.
- [3] BRIDSON, ROBERT; HOURIHAM, JIM y NORDENSTAM, MARCUS: «Curl-noise for procedural fluid flow». *ACM Trans. Graph.*, 2007, **26(3)**. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1276377.1276435.
<http://doi.acm.org/10.1145/1276377.1276435>
- [4] BRIDSON, ROBERT y MÜLLER-FISCHER, MATTHIAS: «Fluid simulation: SIGGRAPH 2007 course notes». En: *ACM SIGGRAPH 2007 courses*, SIGGRAPH '07, pp. 1–81. ACM, New York, NY, USA. ISBN 978-1-4503-1823-5, 2007. doi: 10.1145/1281500.1281681.
<http://doi.acm.org/10.1145/1281500.1281681>
- [5] CHORIN, ALEXANDRE J. y MARSDEN, JERROLD E.: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, 3rd^a edición, 1993. ISBN 978-0387979182.
- [6] CHUI, CHARLES K.: *An introduction to wavelets*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1992. ISBN 0-12-174584-8.
- [7] COOK, ROBERT L. y DEROSE, TONY: «Wavelet noise». *ACM Trans. Graph.*, 2005, **24(3)**, pp. 803–811. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1073204.1073264.
<http://doi.acm.org/10.1145/1073204.1073264>
- [8] DAUBECHIES, INGRID: *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1^a edición, 1992. ISBN 0898712742.
<http://www.amazon.com/gp/product/0898712742>

- [9] DIEGO, CÓRDOBA GAZOLAZ: «Las ecuaciones de Navier-Stokes». Jornada sobre los problemas del milenio. Real Sociedad Matemática Española, 2011.
<http://garf.ub.es/milenio/img/Navier-Stokes.pdf>
- [10] FEDKIW, RONALD; STAM, JOS y JENSEN, HENRIK WANN: «Visual simulation of smoke». En: *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '01, pp. 15–22. ACM, New York, NY, USA. ISBN 1-58113-374-X, 2001. doi: 10.1145/383259.383260.
<http://doi.acm.org/10.1145/383259.383260>
- [11] FERFFERMAN, CHARLES L.: «Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation». Descripción de los 7 problemas Clay Mathematics Institute.
http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf
- [12] FRISCH, U. y KOLMOGOROV, A. N.: *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995. ISBN 0521457130.
- [13] FUJISAWA, MAKOTO; MIMURA, GO; AMANO, TOSHIYUKI; MIYAZAKI, JUN y KATO, HIROKAZU: «A Fast Simulation Method Using SPH and Wavelet for Sub-Particle-Scale Turbulent Flow». pp. 67–72, 2011. doi: 10.2312/PE/PG/PG2011short/067-072.
<http://diglib.eg.org/EG/DL/PE/PG/PG2011short/067-072.pdf>
- [14] JONAS GOMES, LUIZ VELHO: «From Fourier Analysis to Wavelets». Course Notes SIGGRAPH '99, 1999.
http://www.irisa.fr/prive/kadi/Mustafa/Wavelet_Fourier_Transfom.PDF
- [15] JU, TAO; SCHAEFER, SCOTT y WARREN, JOE: «Mean value coordinates for closed triangular meshes». *ACM Trans. Graph.*, 2005, **24**(3), pp. 561–566. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1073204.1073229.
<http://doi.acm.org/10.1145/1073204.1073229>
- [16] KIM, THEODORE; THÜREY, NILS; JAMES, DOUG y GROSS, MARKUS: «Wavelet turbulence for fluid simulation». *ACM Trans. Graph.*, 2008, **27**(3), pp. 50:1–50:6. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1360612.1360649.
<http://doi.acm.org/10.1145/1360612.1360649>
- [17] LIU, G. R. y LIU, M. B.: *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. World Scientific Publishing Company, 2003. ISBN 9812384561.
- [18] MANTILLA NUÑEZ, I. y HERNÁNDEZ MATURRANO, A.: «Análisis Multirresolución y wavelets». Seminario de Matemática Pura y Aplicada II- Facultad de Ciencias UNI, 2010.

- [19] MANTILLA NUÑEZ, IRLA. y HERNÁNDEZ MATURRANO, A.: « Control multirresolución de curvas paramétricas mediante wavelets B-splines». Taller de prácticas pre-profesionales - Facultad de Ciencias UNI, 2012.
- [20] MCNAMARA, ANTOINE; TREUILLE, ADRIEN; POPOVIĆ, ZORAN y STAM, JOS: «Fluid control using the adjoint method». *ACM Trans. Graph.*, 2004, **23(3)**, pp. 449–456. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1015706.1015744.
<http://doi.acm.org/10.1145/1015706.1015744>
- [21] MONAGHAN, J J: «Smoothed particle hydrodynamics». *Reports on Progress in Physics*, 2005, **68(8)**. doi: 10.1088/0034-4885/68/8/R01.
- [22] MÜLLER, MATTHIAS; CHARYPAR, DAVID y GROSS, MARKUS: «Particle-based fluid simulation for interactive applications». En: *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, SCA '03, pp. 154–159. Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland. ISBN 1-58113-659-5, 2003.
<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=846276.846298>
- [23] NEYRET, FABRICE: «Advected Textures». En: *ACM-SIGGRAPH/EG Symposium on Computer Animation (SCA)*, , 2003.
<http://www-evasion.imag.fr/Publications/2003/Ney03>
- [24] RUDIN, WALTER: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third^a edición, 1987. ISBN 0-07-054234-1.
- [25] STAM, JOS y FIUME, EUGENE: «Turbulent wind fields for gaseous phenomena». En: *Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '93, pp. 369–376. ACM, New York, NY, USA. ISBN 0-89791-601-8, 1993. doi: 10.1145/166117.166163.
<http://doi.acm.org/10.1145/166117.166163>
- [26] THÜREY, N.; KEISER, R.; PAULY, M. y RÜDE, U.: «Detail-preserving fluid control». *Graphical Models*, 2009, **71(6)**, pp. 221–228. ISSN 1524-0703. doi: 10.1016/j.gmod.2008.12.007. 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation (SCA 2006).
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1524070309000022>
- [27] TREUILLE, ADRIEN; MCNAMARA, ANTOINE; POPOVIĆ, ZORAN y STAM, JOS: «Keyframe control of smoke simulations». *ACM Trans. Graph.*, 2003, **22(3)**, pp. 716–723. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/882262.882337.
<http://doi.acm.org/10.1145/882262.882337>

- [28] VELHO, LUIZ; FRERY, ALEJANDRO C. y GOMES, JONAS: *Image Processing for Computer Graphics and Vision*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd^a edición, 2008. ISBN 1848001924, 9781848001923.
- [29] WOJTAN, CHRIS; MUCHA, PETER J. y TURK, GREG: «Keyframe control of complex particle systems using the adjoint method». En: *Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, SCA '06, pp. 15–23. Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland. ISBN 3-905673-34-7, 2006.
<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1218064.1218067>
- [30] WOJTASZCZYK, P.: *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, 1997. ISBN 0-521-57020-4.