UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TESIS PARA OPTAR POR EL TITULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TITULADA

CICLICIDAD EN MONOTONÍA GENERALIZADA

PRESENTADO POR

JOHN EDWIN COTRINA ASTO

ASESOR

DR. ELADIO OCAÑA ANAYA

LIMA-PERU

2012

A mi hijo Santiago.

AGRADECIMIENTOS

Para poder realizar ésta tesis de la mejor manera posible fue necesario el apoyo de muchas personas e instituciones a las cuales quiero agradecer.

En primer lugar a mi esposa Phamela Escudero Acero, por darme constantemente su apoyo.

Agradezco a mi asesor Eladio Ocaña Anaya por sus invaluables consejos que me han ayudado mucho en el camino de la comprensión de las matemáticas y esperando no defraudar sus enseñanzas, muestro mi gratitud con ésta tesis.

Particularmente agradezco a la Dra. Yboon García Ramos, por hacerme el honor de revisar y ser parte mi jurado.

Agradezco al profesor Pedro Canales, por ser parte mi jurado.

También debo agradecer a Orestes Bueno, colega y amigo, que contribuyo enormemente en ésta tesis .

Mis sinceros agradecimientos a mi facultad, la Facultad de Ciencias de la UNI y al IMPA de Brasil, que me permitieron iniciar y culminar ésta tesis.

Resumen

Es conocido que toda matriz real semi-definida positiva es un caso particular de un operador *monótono*, también que toda matriz real simétrica semi-definida positiva es un caso particular de un operador *cíclicamente monótono*. Motivados por el concepto de $p-$*monotonía* introducida en [5] o $r-$*ciclicidad monótona* introducida en [12], introducimos el concepto de *ciclicidad de orden* p dentro de las matrices cuadradas semi-definidas positivas, permitiendonos clasificarlas. Mostramos en ésta tesis que todo operador *multivaluado* lineal casi-monótono es monótono e introducimos el concepto de ciclicidad en *monotonía generalizada* y terminamos comprobando que para el caso lineal, la ciclicidad en monotonía generalizada es la misma que la ciclicidad en monotonía.

Índice general

Introducción

Aproximadamente en los años 60 se introduce el concepto de *monotonía*. En esas epocas, el matemático italiano Guido Stampacchia, utiliza la monotonía, para resolver un problema sobre ecuaciones diferenciales parciales. Luego, se utilizo dicho concepto para resolver otros tipos de problemas, como por ejemplo: *Desigualdades variacionales*, *Problemas de complementariedad*, *Problemas de equilibrio*, *Equilibrios de mercado*, *Tráfico de equilibrios*, etc. El lector interesado puede revisar la siguiente referencia [7] para ver estos y otros problemas. Así, el concepto de monotonía fue extendido y conocido en la actualidad como la *monotonía generalizada*, es decir *pseudo-monotonía*, *casi-monotonía*, etc, también para resolver ciertos problemas, como los mencionados anteriormente.

Por un lado, es conocido que toda función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si su gradiente $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador monótono. Pero no todo operador monótono proviene del gradiente de una función convexa, por ejemplo el operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-y, x)$ es monótono pero no proviene del gradiente de una función convexa. También, es conocido que todo operador de la forma $T(x) = Ax + b$ es monótono si y solo si A es una matriz semi-definida positiva. La condición para que T provenga del gradiente de una función convexa es la simetría de la matriz A. Luego, en los trabajos [5, 12] se introdujo sobre la familia de operadores de la forma $T(x) = Ax$, lineales, en espacios finitos dimensionales el concepto de *monotonía cíclica de orden p natural*, donde el mayor orden de ciclicidad define el *indice* de simetría de la matriz A. También es conocido que todo operador lineal, es casi-monótono si y solo si es monótono.

Por otro lado, un operador multivaluado $A : X \rightrightarrows X^*$ es llamado lineal si su gráfico, $\{(x, x^*) \in X \times X^* : \; x^* \in A(x)\}$, es un subespacio vectorial de $X \times X^*$, donde X es un espacio de Banach y X^* es su dual topológico, extendiendo asi a los operadores lineales. Así, las dos propiedades más resaltantes de los operadores multivaluados lineales son

- $A(0)$ es un subespacio vectorial de X^*,
- $A(x) = x^* + A(0)$ para todo (x, x^*) en el gráfico de A,

que pueden ser vistos en [4]. Además si el operador multivaluado es monótono, se deduce que

$$A(0) \subseteq \operatorname{dom}(A)^{\perp},$$

donde $\operatorname{dom}(A) = \{x \in X : \; A(x) \neq \emptyset\}$. Este resultado fue probado por H. Bauschke et al. en [3].

En ésta tesis probaremos que todo operador multivaluado lineal es casi-monótono si y solo si es monótono. Luego, introduciremos el concepto de ciclicidad de orden natural en monotonía generalizada para operadores multivaluados. Seguido comprobaremos que para el caso lineal ciclicidad en monotonía generalizada se reduce a ciclicidad en monotonía, de la siguiente manera. Todo operador multivaluado lineal $A : X \rightrightarrows X^*$, posee una selección lineal $A_0 : \mathrm{dom}\,(A) \to X^*$. De manera que si además A es casi-monótono con ciclicidad de cierto orden, entonces también lo sera A_0. Lo que nos permite, restringirnos al caso de operados punto a punto (o univaluados). Tomando como primer caso los espacios finitos dimensionales, observamos que todo operador lineal tiene una representación matricial dependiendo de las bases escogidas y que todas las representaciones matriciales estan relacionadas via *semejanza* y dado que monotonía es equivalente a la propiedad de semi-definida positiva. Estudiaremos como primer caso las matrices semi-definidas positivas. Seguido y por último su extensión al caso infinito dimensional.

La tesis esta organizada en tres capítulos, la primera parte donde fijaremos las notaciones y enunciamos los resultados más relevantes que usaremos para el desarrollo de la misma. En el Capítulo 2 clasificaremos a las matrices semi-definidas positivas según su ciclicidad. Finalmente, en el Capítulo 3, presentamos nuestra definición de *ciclidad* para monotonía generalizada.

Capítulo 1

Preliminares y notaciones

En este capítulo presentamos las herramientas y notaciones que necesitamos para desarrollar esta tesis. Comenzando por el álgebra lineal, recordando las definiciones de espacio vectorial, transformaciones lineales y las matrices, seguido del análisis funcional donde veremos la definición de espacios de Banach, recordando para ello la defінción de espacios topológicos y espacios métricos completos. Terminamos este capítulo con el análisis multivaluado, donde daremos la definición de un operador multivaluado y consideraremos dos operadores en particular, uno de ellos extiende el concepto de transformaciones lineales, aqui llamados *operadores multivaluados lineales*, y el otro es la *monotonía generalizada*.

1.1. Álgebra lineal

Un **Espacio vectorial** sobre un cuerpo K, es un conjunto X, en el que se han definido dos operaciones:

Una interna $+ : X \times X \to X$ llamada **adición**, la cual a cada par $(x, y) \in X \times X$ le asocia un elemento de X denotado por $x + y$ que cumple las siguientes condiciones:

1) $x + y = y + x$ para todo $x, y \in X$ (propiedad commutativa);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z, \in X$ (propiedad asociativa);

3) Existe un elemento denotado por 0 tal que:

$$x + 0 = x \text{ para todo } x \in X \text{ (elemento neutro);}$$

4) Para todo $x \in X$ existe un elemento $-x \in X$ tal que

$$x + (-x) = 0 \text{ (inverso aditivo).}$$

La otra operación, externa $\cdot : K \times X \to X$, llamada **multiplicación escalar**, la cual a cada par $(\alpha, x) \in K \times X$ le asocia un elemento de X denotado por $\alpha \cdot x$ (o simplemente αx) que cumple las siguientes condiciones

1) $1 \cdot x = x$ para todo $x \in X$;

2) $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x)$ para todo $\alpha, \beta \in K$ y todo $x \in X$;

Las operaciones interna y externa estan relacionadas por las siguientes leyes distributivas:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \text{ y } \alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$$

para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha, \beta \in K$.

Donde K es un cuerpo. En el caso $K = \mathbb{R}$ diremos que es un **espacio vectorial real**

Ejemplo 1.1. $\mathbb{R}^n$ con la suma de coordenadas y producto por un escalar usual es un ejemplo clásico de espacio vectorial real.

Un subconjunto V de un espacio vectorial X es llamado **subespacio vectorial de** X, si V con las operaciones de suma y multiplicación escalar de X es un espacio vectorial.

Sea U un subconjunto del espacio vectorial X. El subespacio vectorial generado por U, denotado por span$U$ es, por definición, el conjunto de todas las combinaciones lineales

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots \alpha_m u_m$$

donde $u_1, \cdots, u_m \in U$.

Sea X un espacio vectorial. Se dice que un conjunto $U \subseteq X$ es **linealmente independiente** si ningún vector $u \in U$ es combinación lineal de otros vectores de U. Para evitar ambigüedades, si U tiene un único elemento $u \neq 0$, se dice que U es linealmente independiente. Cuando U es linealmente independiente se dice también que los elementos de U son *vectores linealmente independientes.*

Una **base** de un espacio vectorial X es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq X$ linealmente independiente que genera X, i.e. span$\mathcal{B} = X$.

Se dice que un espacio vectorial X tiene dimensión finita si admite una base $\mathcal{B}$ con un número finito de elementos. Este número, que es el mismo para todas las bases de X, se llama la **dimensión** del espacio vectorial X. Por extensión, se dice que el espacio vectorial $X = \{0\}$ tiene dimensión cero.

Dados X e Y espacios vectoriales reales, una **transformación lineal** de X en Y, es una aplicación $T : X \to Y$ tal que

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En el caso en que $Y = \mathbb{R}$, T será llamada **funcional lineal**.

Asociado a un espacio vectorial real X, consideramos el conjunto

$$X' := \{T : X \to \mathbb{R}; T \text{ es funcional lineal}\}$$

el cual provisto de las operaciones:

$$+ : X' \times X' \to X', \ (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \quad \text{para todo } x \in X$$

y

$$\cdot : \mathbb{R} \times X' \to X', \ (\alpha \cdot T_2)(x) = \alpha \cdot T_2(x) \quad \text{para todo } x \in X$$

es un espacio vectorial real llamado el **espacio vectorial dual (algebraico)** de X.

Un **producto interno** en un espacio vectorial X es *lineal por la izquierda*, *hermítiana* y *positiva* en X. Más precisamente, un producto interno es una función $X \times X \to K$, que a cada par de vectores $x, y \in X$ le asigna un elemento de K, $\langle x, y \rangle$, llamado producto interno de x por y, de modo que sean válidas las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in K$

1. Linealidad por la izquierda: $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
2. hermitianicidad $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. Definida positiva: $\langle x, x \rangle \geq 0$, y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, el **producto interno canónico** de los vectores $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ se define por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Este es el producto interno que consideraremos en $\mathbb{R}^n$.

Otro ejemplo de espacio vectorial son las *matrices* que veremos a continuación.

Matrices

En general una matriz $m \times n$, o de m filas y n columnas es un ordenamiento de números tal como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{ij} \in K$ para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, cuya ubicación es única.

Por comodidad las matrices se denotan con letras mayúsculas tales como $A, B, C, \cdots$ etc y sus componentes con las minúsculas. Así:

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \quad C = \cdots \text{etc.}$$

El conjunto de matrices $m \times n$ con coeficientes en K, se denota con $K^{m \times n}$. Donde K significa para nuestro estudio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En el caso general K es cualquier cuerpo.

$K^{m \times n}$ está provista de las operaciones de **suma** y **producto por un escalar**, en forma análoga a $\mathbb{R}^n$. Es decir, si $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$, son elementos de $K^{m \times n}$, entonces:

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}] \in K^{m \times n} \\ \lambda A &= [\lambda a_{ij}], \ \forall \lambda \in K \end{aligned}$$

con estas operaciones $K^{m\times n}$ es un espacio vectorial sobre K; donde el opuesto de A es $-A = [-a_{ij}]$ y la matriz cero es $0 = [0]$.

Existe el **producto de matrices** bajo ciertas restricciones, el cual es como sigue: Si $A = [a_{ij}] \in K^{m\times n}$ y $B = [b_{jt}] \in K^{n\times p}$ entonces

$$AB = [c_{it}] \in K^{m\times p}, \qquad \text{donde } c_{it} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jt}.$$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

1. $(AB)C = A(BC)$ es asociativo.
2. $A(B + C) = AB + AC$ es distributivo con respecto a la suma.
3. $AB \neq BA$ en general, es decir no es commutativo.

La **transpuesta** de $A = [a_{ij}] \in K^{m\times n}$, es por definición $A^t = [a_{ji}] \in K^{n\times m}$.

Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, denotaremos por $\overline{A}$ a la matriz $[\overline{a}_{ij}]$, donde $\overline{a}_{ij}$ es el conjugado de a_{ij}. Además definimos $A^* = \overline{A}^t$.

El conjunto de matrices *cuadradas* $K^{n\times n}$, tiene importantes propiedades, por ejemplo el producto se efectua sin restricciones, se puede definir el concepto de *matriz inversa*, etc.

Para cada n, existe una matriz llamada **Identidad**, que es:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

y tiene la propiedad: $AI_n = I_nA = A$, para toda matriz A en $K^{n\times n}$.

Una matriz $A \in K^{n\times n}$ diremos que es **inversible** si existe otra matriz $B \in K^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$. En este caso diremos que B es la inversa de A.

Existen muchas familias de matrices que tienen una denominación particular que podemos señalar: Dado $A = [a_{ij}] \in K^{n\times n}$, se dice:

1. Diagonal si, $a_{ij} = 0 \ \ \forall i \neq j$
2. Triangular superior si, $a_{ij} = 0 \ \ \forall j < i$
3. Triangular inferior si, $a_{ij} = 0 \ \ \forall i < j$
4. Simétrica si, $A^t = A$
5. Antisimétrica si, $A^t = -A$
6. Ortogonal si, $A^tA = I_n$

Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice:

1. Hermitiana si, $A^* = A$
2. Antihermitiana si, $A^* = -A$
3. Unitaria si, $A^*A = I_n$
4. Normal si, $A^*A = AA^*$

Un tipo particular de matrices que estudiaremos son las **matrices de rotación** en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Es decir, consideraremos las matrices del siguiente tipo

$$R = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

con a, b números reales tales que $a^2 + b^2 \neq 0$. Así podemos asociar a este tipo de matrix un ángulo θ que cumpla las siguientes condiciones

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ y } \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

luego

$$R = \sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Denotando

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

tenemos que $R = \sqrt{a^2+b^2}R_\theta$. Ahora, no es dificil verificar, haciendo las cuentas, que en $\mathbb{R}^2$, para cualquier $v_0 \in \mathbb{R}^2$ se verifica sin mucha complicación es

$$\langle v_0, R_\theta v_0\rangle = \|v_0\|^2\cos\theta.$$

Una propiedad que se observa de las matrices de rotación es la siguiente:

$$R_\theta + R_\theta^t = 2\cos(\theta)I$$

es decir la suma de dicha matriz de rotación con su transpuesta es un multiplo de la identidad. Más aún no es dificil ver que toda matriz de rotación es normal. En general, si consideramos $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con la propiedad

$$A + A^* = I.$$

Podemoms deducir que

$$AA^* = A(I - A) = A - A^2 = (I - A)A = A^*A$$

es decir, A es normal.

Sea A una matrix de orden $n \times n$. Entonces el escalar λ es un **autovalor** de A si y sólo si $A - \lambda I$ no es inversible[1]. Sea $x \in K^n$. Entonces x es llamado un **autovector** correspondiente al autovalor λ si y sólo si $(A - \lambda I)x = 0$.

[1] Las matrices no inversibles son conocidas en la literatura también como singulares

Desde que $A - \lambda I$ es singular si y solo si existe x no nulo tal que $(A - \lambda I)x = 0$, $Ax = \lambda x$. Observemos que para un autovector x de A, Ax es un multiplo escalar de x.

Considerando ahora la matriz R_θ como una matriz compleja de $\mathbb{C}^2$, podemos observar que tiene autovalor

$$\lambda = \cos\theta + i\text{sen}\theta.$$

El siguiente resultado es conocido como el Teorema Espectral.

Teorema 1.2. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Existe una base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.*

La prueba de dicho resultado es el Teorema 13.6 que puede verse en la pagina 186 del libro [9].

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama **semi-definida positiva** si $\langle Av, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de la matriz semi-definida positiva A y v su correspondiente autovector, entonces $\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle \geq 0$, por tanto $\lambda \geq 0$. Concluyendo que todos los autovalores de una matriz semi-definida positiva son no negativos.

Por otro lado, si todos los autovalores de una matriz simétrica A son no negativos, tenemos que para la base ortonormal $\{v_1, \cdots v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A (que existe gracias al Teorema 1.2), con $Av_i = \lambda_i v_i$. Para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, luego

$$\langle Av, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_iAv_i, \sum_{i=1}^n a_iv_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i\lambda_iv_i, \sum_{i=1}^n a_iv_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_ia_i^2 \geq 0.$$

Lo cual muestra que A es una matriz semi-definida positiva.

Como conclusión tenemos que toda matriz simétrica es semi-definida positiva si y solo si sus autovalores son no negativos.

Supongamos que las bases $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$ y $U' = \{u'_1, \cdots u'_n\}$ son bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$, es decir de vectores unitarios ortogonales dos a dos. La matriz $P = [p_{ij}]$ que cumple:

$$\forall i = 1, \cdots, n \quad u'_i = \sum_{k=1}^n p_{ki}u_k,$$

es conocido como la **matriz de paso** de U a U', es una matriz ortogonal. En efecto, para cualesquiera $i, j = 1, \cdots, n$ tenemos

$$u'_i = \sum_{k=1}^n p_{ki}u_k \quad \text{y} \quad u'_j = \sum_{k=1}^n p_{kj}u_k,$$

luego $\langle u'_i, u'_j\rangle = \sum_{k=1}^n p_{ki}p_{kj}$, por tanto $P^tP = I$.

Como una consecuencia del Teorema 1.2 (Teorema Espectral) tenemos, para toda matriz simétrica semi-definida positiva, existe una base ortonormal U, de manera que la matriz de paso P de la base canonica $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a U, satisface que

$$P^t A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

donde los λ_i son los autovalores de A no negativos.

Presentamos a continuación el siguiente resultado que es el Teorema 14.3 que puede verse en la pagina 211 de [9].

Proposición 1.1. *Sea A una matriz ortogonal de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Existe una matriz de paso ortogonal P tal que*

$$P^t A P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_1 & & & \\ & & & & & & -\operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\alpha_k & \operatorname{sen}\alpha_k \\ & & & & & & & & & -\operatorname{sen}\alpha_k & \cos\alpha_k \end{bmatrix}$$

El siguiente resultado esta presentado como el Teorema 15.1 en la pagina 186 de [9].

Teorema 1.3. *Sea A una matriz normal de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Existe una matriz de paso ortogonal P tal que*

$$P^t A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \alpha_1 & -\beta_1 & & & \\ & & & \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_s & -\beta_s \\ & & & & & & \beta_s & \alpha_s \end{bmatrix};$$

donde lo elementos omitidos son iguales a cero.

El último resultado nos dice que A puede ser *"llevado"* a una matriz diagonal por bloques. Podemos deducir del útimo resultado que si A es simétrica entonces la matriz diagonal por bloques solo tiene bloques de matrices de orden 1. Si A no tiene autovectores entonces la matriz diagonal por bloques solo tiene bloques de orden 2.

Relación entre transformaciones lineales y matrices

Sean X e Y dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m respectivamente. Fijando bases $\mathcal{B}_X = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $\mathcal{B}_Y = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ de X e Y, respectivamente y sea $T : X \to Y$ una transformación lineal, las expresiones

$$Tu_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i, \qquad j = 1, \cdots, n$$

determinan la matriz $A_T = [a_{ij}] \in K^{m\times n}$, la cual es llamada **matriz asociada** a T en las bases $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$.Tomando ahora las nuevas bases en X e Y, $\mathcal{B}'_X = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\} \subset X$ y $\mathcal{B}'_Y = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_m\} \subset Y$. Entonces la transformación lineal T tiene asociada a las bases $\mathcal{B}'_X$ y $\mathcal{B}'_Y$ otra representación matricial, denotada por $A'_T = [a'_{ij}] \in K^{m\times n}$. La cual verifica

$$Tu'_j = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij} v'_i, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Por un lado la transformación lineal $I_X : X \to X$, la identidad en X con las bases $\mathcal{B}'_X$ y $\mathcal{B}_X$ (en ese orden) también tiene una representación matricial, denotada por $P = [p_{ij}] \in K^{n\times n}$ y cumple

$$I_X u'_j = u'_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} u_k, \qquad j = 1, \cdots, n$$

la cual es inversible, cuya inversa resulta de considerar las bases $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}'_X$ (en ese orden). Por otro lado, la transformación lineal $I_Y : Y \to Y$ la identidad en Y con las bases $\mathcal{B}'_Y$ y $\mathcal{B}_Y$ también tiene una representación matricial, denotada por $Q = [q_{ij}] \in K^{m\times m}$, que también es inversible y cumple

$$I_Y v'_j = v'_j = \sum_{k=1}^{m} q_{kj} v_k, \qquad j = 1, \cdots, m.$$

Luego

$$\begin{aligned} Tu'_j &= T\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj} u_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_{kj} T u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} v_i \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_{kj} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj}\right) v_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Tu'_j &= \sum_{r=1}^{m} a'_{rj} v'_r \\ &= \sum_{r=1}^{m} a'_{rj} \sum_{i=1}^{m} q_{ir} v_i \\ &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a'_{rj} q_{ir} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{m} q_{ir} a'_{rj}\right) v_i \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj} = \sum_{r=1}^{m} q_{ir} a'_{rj}$$

esto es $A_T P = Q A'_T$.

Desde que Q es inversible uno infiere en $A'_T = Q^{-1} A_T P$.

En el caso particular que $X = Y$, $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y$ y $\mathcal{B}'_X = \mathcal{B}'_Y$ se tiene que $Q = P$ y por tanto

$$A'_T = P^{-1} A_T P.$$

De lo anterior deducimos que todo operador lineal $T : X \to Y$ puede asociarle una matriz con respecto a un par de bases, y que si cambiamos de bases cambiamos de matriz, pero que dichas matrices siguen relacionadas mediante matrices de paso. Por esta razón estudiaremos simplemente a las matrices. .

El lector interesado en los resultados no demostrados, es invitado a revisar las siguientes referencias [9] y [11], libros de álgebra lineal.

1.2. Análisis funcional

Sea X un conjunto no vacío cualquiera, denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X. Un subconjunto τ de $\mathcal{P}(X)$ se dirá que es una topología de X si se cumplen:

1.- $X, \phi \in \tau$;

2.- Si $A, B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$;

3.- Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Al par (X, τ) se le llama **espacio topológico** y a los elementos de una topología τ se les llama **abiertos**.

Dado un subconjunto A de X definimos el interior de A denotado por $\text{int}(A)$ con respecto a la topología τ como la unión de todos los abiertos contenidos en A, es decir, es el abierto más grande, en el sentido de inclusión, contenido en A.

Un subconjunto F de X es llamado **cerrado** respecto de la topología τ si su complemento $F^c = X \backslash F$ pertenece a τ, asi podemos ver que X y ϕ son cerrados. Este concepto de cerradura tiene la propiedad de ser estable bajo intersecciones arbitrarias, es decir, la intersección arbitraria de cerrados sigue siendo cerrado, gracias a esto y a que X es cerrado definimos la clausura de un subconjunto A de X, denotado por $\overline{A}$, como la intersección de todos los cerrados que contienen a A, y éste es el cerrado más pequeño, en el sentido de inclusión, que contiene a A.

Dado (X, τ) un espacio topológico, un subconjunto V de X se dirá que es una vecindad de un punto $x_0 \in X$ si existe $U \in \tau$ con la propiedad de que $x_0 \in U \subseteq V$. Denotaremos por $V(x_0)$ al conjunto de todas las vecindades de x_0.

Dados dos espacios topológicos (X, τ_1) y (Y, τ_2), diremos que la aplicación $f : X \to Y$ es continua con respecto a τ_1 y τ_2 si se cumple:

$$f^{-1}(V) = \{x \in X; f(x) \in V\} \in \tau_1 \quad \text{para todo } V \in \tau_2.$$

Sea X un conjunto no vacío. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es llamada una **métrica** si cumple las siguientes propiedades:

i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$, siendo $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Un conjunto X no vacío dotado de una métrica d, será llamado **espacio métrico** y lo denotaremos por (X, d). La propiedad iii) es conocida en la literatura como la **Desigualdad triangular**.

Sea (X, d), dado $a \in X$ y $r > 0$ denotaremos por:

- $B(a, r)$ al conjunto $\{x \in X; d(x, a) < r\}$.
- $\overline{B}(a, r)$ al conjunto $\{x \in X; d(x, a) \leq r\}$.

Los cuales son llamadas respectivamente la bola abierta y la bola cerrada de centro a y radio r.

Dado un espacio métrico (X, d), consideramos τ como la colección de todos los subconjuntos de X que son uniones arbitrarias de bolas abiertas, entonces τ es una topología en X, la clausura y el interior de $A \subseteq X$ con respecto a esta topología son caracterizadas como:

- $\overline{A} = \{x \in X; \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ se cumple que } B(x, \epsilon) \cap X \neq \phi\}$.
- $\text{int}(A) = \{x \in X; \text{existe } r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}$.

En un espacio métrico (X, d), una sucesión $(x_n) \subseteq X$ converge a $x_0 \in X$ si: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ se cumple que $d(x_n, x_0) < \epsilon$.

Una sucesión $(x_n) \subseteq X$ se dirá que es de Cauchy si y sólo si: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq n_0$ se cumple que $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Es fácil ver que toda sucesión convergente es de Cauchy en un espacio métrico cualquiera, sin embargo lo réciproco no es cierto, por ejemplo considerar los números racionales con la métrica dada por el valor absoluto, esto motiva la siguiente definición.

Un espacio métrico (X, d), se dirá que es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

La clausura del conjunto A puede ser expresada por sucesiones, es decir:

$$\overline{A} = \{x \in X; \text{existe una sucesión } (x_n) \subseteq X \text{ que converge a } x\}.$$

Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$. se dirá que f es continua en $x_0 \in X$ si se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si tomamos $x \in X$ con $d_1(x, x_0) < \delta$ implica que $d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Como consecuencia de la continuidad en un punto se tiene que

f es continua si y sólo si f es continua en todo punto de X.

Sea X un espacio vectorial real. Una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es llamada una **norma** si se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$.

2) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4) $a \in \mathbb{R}$, $x \in X$: $\|ax\| = |a|\|x\|$.

Un espacio vectorial real X dotado de una norma $\|\cdot\|$, será llamada **Espacio Normado** y lo denotaremos por el par $(X, \|\cdot\|)$.

Obsérvese que $\mathbb{R}^n$ con la norma *euclidiana*, definida como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

es un ejemplo común de espacio normado. En general todo espacio vectorial con producto interno tiene una norma inducida por el producto interno.

Veamos otro ejemplo de espacio normado

Ejemplo 1.4. Sea (R, τ) un espacio topológico. consideremos el conjunto:

$$X = \{f : R \to \mathbb{R}; f \text{ es una función acotada}\}$$

es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por un real. Definamos $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ como:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in R\}$$

No es dificil mostrar que $\|\cdot\|$ es una norma, por lo tanto X es una espacio normado con norma $\|\cdot\|$

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Entonces la función d: $X \times X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$$

es una métrica, que llamaremos **métrica inducida**. De donde tenemos que (X, d) es un espacio métrico. Todo espacio normado con la métrica inducida es un espacio métrico completo se llama **Espacio de Banach**.

Dados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados, una norma de una transformación lineal $T : X \to Y$, se define por:

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\|_Y; x \in X \text{ y } \|x\|_X \leq 1\} \tag{1.1}$$

en el caso $\|T\| < \infty$, diremos que T es **acotada** [2].

Denotaremos por X^* al conjunto

$$\{f : X \to \mathbb{R}; f \text{ es funcional lineal y acotada}\}$$

el cual es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma y producto por un real. Por lo cual recibe el nombre de **espacio dual (topológico)** de X, y la función definida en (1.1) es una norma en X^*. Además X^* es un espacio de Banach sin importar si X es un espacio de Banach. La prueba de dicha afirmación puede ser vista por ejemplo en [10].

1.3. Análisis multivaluado

El análisis multivaluado es el estudio de los conjuntos en el espíritu de análisis matemático y topología general. En lugar de considerar las colecciones de puntos solamente, establecer valores de análisis considera colecciones de conjuntos. Si una colección de conjuntos está dotado de una topología, o hereda una topología apropiada de un espacio topológico subyacente, entonces la convergencia de los conjuntos pueden ser estudiados, recomendamos al lector ver el libro de J.P Aubin [1] para mayor información.

Dados dos conjuntos cualesquiera X e Y (sin ninguna otra propiedad). Un operador multivaluado[3] es una función A de X hacia el conjunto potencia de Y, es decir , para todo $x \in X$ se cumple que $A(x) \subseteq Y$ posiblemente no vacío. Por conveniencia denotaremos al operador multivaluado A de la siguiente manera $A : X \rightrightarrows Y$. El dominio de A, denotada por $\mathrm{dom}(A)$, el rango de A, denotada por $\mathrm{ran}(A)$, y la gráfica de A, denotada por $\mathrm{graph}(A)$, son respectivamente, los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(A) &:= \{x \in X; A(x) \neq \phi\} \\ \mathrm{ran}(A) &:= \bigcup_{x\in \mathrm{dom}(A)} A(x) \\ \mathrm{graph}(A) &:= \{(x,y) \in X \times Y; y \in A(x)\} \end{aligned}$$

No es dificil ver que:

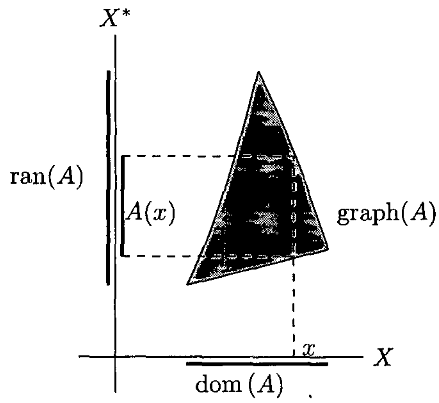
- El $\mathrm{dom}(A)$ es la proyección de la $\mathrm{graph}(A)$ sobre su primera coordenada.

- Si $A : X \rightrightarrows Y$ es un operador multivaluado, se cumple que:

$$A(x) = \{y; (x,y) \in \mathrm{graph}(A)\}.$$

[2]El concepto de transformación lineal acotada es equivalente al concepto de continuidad de la transformación lineal

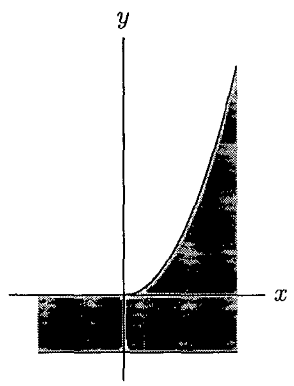
[3]El termino función punto conjunto es más convencional, el termino multifunción o correspondencia es más contemporáneo. Nosotros usaremos a lo largo de todo este trabajo el termino operador multivaluado.



Ejemplo 1.5. $A : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definido por:

$$A(x) = \begin{cases} [-1, 0] & \text{si } x < 0 \\ [-1, x^2] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

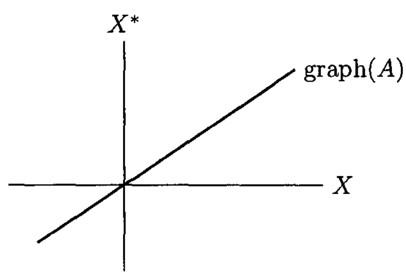
El dom$(A) = \mathbb{R}$ y ran$(A) = [-1, +\infty[$.



Para mayor información sobre operadores multivaluados recomendamos ver la siguiente referencia [1].

Operadores multivaluados lineales

Un operador multivaluado $A : X \rightrightarrows X^*$ es **lineal**, si graph(A) es a subespacio lineal de $X \times X^*$.



De la definición se sigue que si tomamos $x_1^*, x_2^* \in A(0)$ entonces $(0, x_1^*), (0, x_2^*) \in$ graph(A), luego para cualquier par de números reales a y b se tiene que $a(0, x_1^*)+$

$b(0, x_2^*) \in \text{graph}(A)$ lo cual muestra que $A(0)$ es un subespacio vectorial de X^*. Siguiendo la misma idea, podemos ver que dado $(x, x^*) \in \text{graph}(A)$, entonces claramente para cualquier $(0, x_0^*) \in \text{graph}(A)$ se tiene que la suma $(x, x^* + x_0^*) \in \text{graph}(A)$ es decir $A(0)+x^* \subseteq A(x)$. Pero como podemos ver de manera recíproca $A(x) - x^* \subseteq A(0)$, por tanto $A(x) = x^* + A(0)$. En conclusión hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 1.2 ([4]). *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado lineal. Entonces se cumplen las siguientes:*

1. *$A(0)$ es un subespacio vectorial de X^*.*
2. *Para todo $(x, x^*) \in \text{graph}(A)$, $A(x) = x^* + A(0)$.*

Gracias a este último resultado podemos ver que un operador A es univaluado si y solo si $A(0) = \{0\}$. En particular, los operadores univaluados lineales son simplemente las *transformaciones lineales* estudiadas en el Álgebra Lineal.

Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado lineal. Una **selección** de A es una transformación lineal $A_0 : \text{dom}\,(A) \subset X \to X^*$ tal que $\text{graph}(A_0) \subseteq \text{graph}(A)$.

Usando el *axioma de elección* podemos construir una selección para cualquier operador multivaluado lineal $A : X \rightrightarrows X^*$. Sea $\mathcal{B} = \{z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una base para $\text{dom}\,(A)$ y elijamos $z_\lambda^* \in A(z_\lambda)$, para cada $\lambda \in \Lambda$. De esto, la transformación lineal $A_0 : \text{dom}\,(A) \subset X \to X^*$ tal que $A_0(z_\lambda) = z_\lambda^*$ es una selección de A. Además, por la Proposición 1.2, item *2*, podemos descomponer A como

$$A = \text{graph}(A_0) \oplus (\{0\} \times A(0)). \tag{1.2}$$

Monotonía generalizada

Los operadores monótonos fueron utilizados en las ecuaciones diferenciales parciales desde hace 70 años por lo menos. Sin embargo, el tratamiento moderno de los operadores de este tipo comenzó alrededor de 1960 por Kachurovskii y Minty, que fueron probablemente los primeros en relacionar los operadores monótonos con las funciones convexas. Poco después, Browder estudio los operadores monótonos multivaluados y dio pasos decisivos en esa dirección. Remitimos al lector interesado en el tratado de Hu-Papageorgiou para más detalles históricos y una presentación moderna de la teoría.

Sea X un espacio de Banach real con norma $\|\cdot\|$, y sea X^* su dual topológico. Para $x \in X$ y $x^* \in X^*$, usaremos la notación $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$, y de esto tenemos el *producto de dualidad* $\pi : X \times X^* \to \mathbb{R}$, $\pi(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle$.

Un operador multivaluado $A : X \rightrightarrows X^*$ se llama

1. **monótono** si para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$ se cumple
$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$
2. **pseudo-monótono** si para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$ la siguiente implicación ocurre
$$\langle y - x, x^* \rangle \geq 0 \;\Rightarrow\; \langle y - x, y^* \rangle \geq 0$$

3. **casi-monótono** si para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$ la siguiente implicación ocurre

$$\langle y - x, x^* \rangle > 0 \;\Rightarrow\; \langle y - x, y^* \rangle \geq 0$$

Claramente monotonía implica pseudo-monotonía y esta a su vez implica casi-monotonía, los réciprocos no son ciertos. La definición de operador pseudo-monótono es equivalente a para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$ la siguiente implicación ocurre

$$\langle y - x, x^* \rangle > 0 \;\Rightarrow\; \langle y - x, y^* \rangle > 0.$$

El siguiente resultado da una caracterización de la pseudo-monotonía y casi-monotonía.

Proposición 1.3. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ operador multivaluado. Entonces A es casi-monótono si y sólo si para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$ se cumple que*

$$\min\{\langle y - x, x^* \rangle, \langle x - y, y^* \rangle\} \leq 0.$$

Además A es pseudo-monótono si y sólo si A es casi-monótono y si el $\min\{\langle y - x, x^* \rangle, \langle y - x, y^* \rangle\} = 0$ entonces $\langle y - x, x^* \rangle = \langle y - x, y^* \rangle = 0$.

Prueba: Veamos el caso, casi-monótono. Sean $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$, entonces si $\langle y - x, x^* \rangle \leq 0$ no hay nada que probar. Así, supongamos que $\langle y - x, x^* \rangle > 0$ entonces por casi-monotonía de A se tiene $\langle y - x, y^* \rangle \geq 0$. Por tanto $\min\{\langle y - x, x^* \rangle, \langle x - y, y^* \rangle\} \leq 0$.

El réciproco, si $\langle y - x, x^* \rangle > 0$ se tiene que $\langle x - y, y^* \rangle \leq 0$ que es equivalente a $\langle y - x, y^* \rangle \geq 0$.

Ahora asumamos que A es pseudo-monótono. Sean $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}A$ tal que $\min\{\langle y - x, x^* \rangle, \langle x - y, y^* \rangle\} = 0$ entonces por la pseudo-monotonía de A entonces $\langle y - x, y^* \rangle \geq 0$ y $\langle x - y, x^* \rangle \geq 0$ por tanto $\langle y - x, y^* \rangle = \langle y - x, x^* \rangle = 0$.

Réciprocamente, $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$ tal que $\langle y - x, x^* \rangle > 0$ entonces por hipótesis el mínimo es estrictamente negativo pues caso contrario implicaria que ambos seán ceros, por tanto $\langle y - x, y^* \rangle > 0$.

□

No es dificil ver que todo operador monótono y lineal A cumple que para todo $(x, x^*) \in \text{graph}(A)$ se tiene que

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x - 0, x^* - 0 \rangle \geq 0.$$

Desde que A es lineal, entonces para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in \text{graph}(A)$ se tiene que $(x + y, x^* + y^*) \in \text{graph}(A)$. Por tanto, de la parte previa concluimos que todo operador lineal A es monótono si y sólo si para todo $(x, x^*) \in \text{graph}(A)$ se tiene que

$$\langle x, x^* \rangle \geq 0.$$

Proposición 1.4. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador casi-monótono y lineal. Entonces A es monótono.*

Prueba: Tomando cualquier $(x, x^*) \in \mathrm{graph}(A)$ y sea $(x_0, x_0^*) = (x, x^*) = (-x_1, -x_1^*)$. Por casi-monotonía,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \min\{\langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle, \langle x_0 - x_1, x_1^* \rangle\} \\ &= \min\{-2\langle x, x^* \rangle, -2\langle x, x^* \rangle\} \\ &= -2\langle x, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Esto implica que $\langle x, x^* \rangle \geq 0$, para cualquier $(x, x^*) \in \mathrm{graph}(A)$. Por lo tanto, A es monótono. □

Concluimos que, para operadores multivaluados lineales, monotonía y casi-monotonía son equivalentes.

El siguiente resultado fue presentado por Bauschke *et al.* [3] en espacios de Banach reflexivos [4] y luego en espacios de Banach en general en [2].

Lema 1.6 ([2, Proposition 5.1, item (i)]). *Si $A : X \rightrightarrows X^*$ es un operador lineal monótono, entonces*

$$A(0) \subseteq \mathrm{dom}\,(A)^{\perp}. \tag{1.3}$$

Prueba: Sea $x_0^* \in A(0)$ fijo pero arbitrario. Supongamos que existe $(x, x^*) \in \mathrm{graph}(A)$ tal que $\langle x, x_0^* \rangle \neq 0$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\langle x, x_0^* \rangle > 0$. Como $A(0)$ es un subespacio vectorial tenemos que para todo $t > 0$, $tx_0^* \in A(0)$. Entonces para t positivo suficientemente grande

$$\langle x, x^* - tx_0^* \rangle < 0$$

lo cual sería una contradicción con la monotonía de A. □

[4] Un espacio se dice reflexivo si este coincide con el espacio dual de su espacio dual, es decir $X = (X^*)^*$.

Capítulo 2

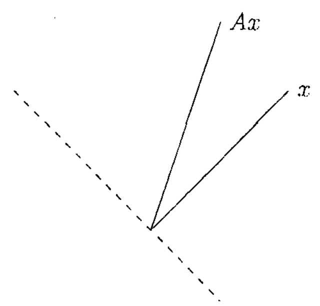
Matrices semi-definidas $p-$positivas

Este capítulo es devoto al estudio de las matrices semi-definidas positivas, donde introducimos el concepto de matrices *semi-definidas $p-$positivas*, el cual nos permite clasificarlas, según su orden. Comenzamos este capítulo recordando la definición de matriz semi-definida positiva. Antes, introduciremos una subfamilia llamada *semi-definida positiva*$^+$, la cual fue introducida por A. Iusem en [8] y luego J.P. Crouzeix et al en [6] con el objetivo de resolver problemas de desigualdad variacional. Posteriormente J.P. Crouzeix y C. Gutan en [5], vuelven a utilizar dicho concepto con el objetivo de estudiar la asimetría de las matrices semi-definidas positivas.

2.1. Matrices semi-definidas positivas

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se llama **semi-definida positiva** si para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, Ax\rangle \geq 0.$$



Geométricamente nos dice que el ángulo formado por los vectores x y Ax no puede ser mayor de $\pi/2$. Así podemos ver que toda matrix de rotación con ángulo comprendido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ es semi-definida positiva.

Una propiedad remarcable de esta familia de matrices es: Dada una matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrix semi-definida positiva entonces la matrix P^tAP es semi-definida positiva. En efecto pues, dado $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\langle x, P^tAPx\rangle = \langle Px, APx\rangle \geq 0.$$

Si además, la matrix P es inversible el recíproco se da. En efecto pues para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = Py$, luego

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Py, APy\rangle = \langle y, P^tAPy\rangle \geq 0.$$

Otra propiedad que podemos remarcar, es la siguiente: A es semi-definida positiva si y sólo si A^t es semi-definida positiva. Esta se deduce de la misma definición.

Matrices semi-definidas positivas$^+$

Dentro de las matrices semi-definidas positivas definimos las matrices **semi-definidas positivas$^+$**, como aquellas matrices A tal que

$$(A + A^t)v = 0 \Rightarrow Av = 0.$$

Si denotamos por $\mathcal{P}^s$ y $\mathcal{P}^+$ al conjunto de las matrices semi-definitas positivas y matrices semi-definitas positivas$^+$ respectivamente, tenemos por definición $\mathcal{P}^+ \subseteq \mathcal{P}^s$. Mostraremos que dicha familia $\mathcal{P}^+$ esta estrictamente contenida en $\mathcal{P}^s$ con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.1. Sea A una matrix real de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definida como sigue

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

seguido tomemos $x_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces no es dificil ver que $Ax_0 = (x, 2x+y)$ luego

$$\langle x_0, Ax_0\rangle = (x + y)^2 \geq 0$$

es decir A es semi-definida positiva. Por otro lado, es facil ver que

$$A + A^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Remarquemos que A es inversible y $A + A^t$ no lo es. Así exite un vector no nulo (por ejemplo $(1, -1)$) que anula $A + A^t$, lo cual nos dice que $A \notin \mathcal{P}^+$.

Ahora, por un lado si consideramos A una matriz cuadrada de $\mathbb{R}^{n\times n}$ anti-simétrica no nula, entonces claramente todo vector v de $\mathbb{R}^n$ anula a la matriz $A + A^t = A - A = 0$. Como la matrix es no nula existe un vector v_0 de $\mathbb{R}^n$ tal que $Av_0 \neq 0$. Así hemos probado que A no es semi-definida positiva$^+$. Por otro lado, si consideramos A una matriz simétrica de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y $p \geq 1$. Entonces $A + A^t = 2A$ por tanto si $v \in \mathbb{R}^n$ es tal que $(A + A^t)v = 0$ entonces trivialmente $Av = 0$ por tanto A es semi-definida positiva$^+$. En conclusión hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ semi-definida positiva. se cumplen las siguientes:*

i) Si A es antisimétrica, entonces $A \notin \mathcal{P}^+$.

ii) Si A es simétrica, entonces $A \in \mathcal{P}^+$.

2.2. Matrices semi-definidas $p-$positivas

Sea $p \in \mathbb{N}$, una matrix A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ es llamada **semi-definida $p-$positiva** si para todo $v_1, v_2, \cdots, v_p \in \mathbb{R}^n$, $v_{p+1} = 0$ ocurre

$$\sum_{i=1}^{p} \langle v_i - v_{i+1}, Av_i \rangle \geq 0.$$

Claramente, una matriz semi-definida 1-positiva es una matriz semi-definida positiva. También podemos ver que toda matrix semi-definida $p-$positiva es semi-definida $q-$positiva para $1 \leq q \leq p$. En efecto, pues si consideramos $v_1, \cdots, v_q \in \mathbb{R}^n$ y $v_{q+1} = \cdots = v_p = v_{p+1} = 0$ tenemos por definición

$$\sum_{i=1}^{q} \langle v_i - v_{i+1}, Av_i \rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle v_i - v_{i+1}, Av_i \rangle \geq 0.$$

Asociado a una matriz real A de orden $n \times n$, definimos la matriz triángular por bloques M de orden $np \times np$, donde los bloques son matrices de orden $n \times n$

$$M_{ij} = \begin{cases} A & \text{si } i = j \\ -A & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

seguido a todo vector $v \in \mathbb{R}^{np}$ lo podemos ver como un vector del producto cartesiano de p veces $\mathbb{R}^n$, es decir $v = (v_1, \cdots, v_p)$ luego

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle v_i - v_{i+1}, Av_i \rangle$$

con $v_{p+1} = 0$. De donde deducimos que A es semi-definida $p-$positiva si y sólo si M es semi-definida positiva.

Mostraremos posteriormente que existen matrices semi-definidas $p-$positivas que no son semi-definidas $(p+1)-$positivas (ver el Capítulo 3). Sin embargo podemos observar lo siguiente, si A es una matriz de orden n semi-definida $2-$positiva y tomamos cualquier vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $(A + A^t)v = 0$, deduciendo que$\langle v, Av \rangle = 0$. Ahora consideremos $v_1 = x$,$v_2 = tv$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y t real que escogeremos convenientemente luego y $v_3 = 0$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \langle v_i - v_{i+1}, Av_i \rangle &= \langle tv - x, tAv \rangle + \langle x, Ax \rangle \\ &= -t\langle x, Av \rangle + \langle x, Ax \rangle \end{aligned}$$

ahora si $Av \neq 0$ entonces podemos tomar $x = Av$ y t positivo suficientemente grande de manera que

$$\sum_{i=1}^{3} \langle v_i - v_{i+1}, Av_i \rangle < 0$$

lo cual sería una contradicción, pues A es semi-definida $2-$positiva. Por tanto $Av = 0$ lo que muestra que $A \in \mathcal{P}^+$.

Así hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $A \in \mathcal{P}^+$ siempre que A sea semi-definida $p-$positiva con $p \geq 2$.*

De la Proposición 2.1 parte i) y la Proposición 2.2 tenemos que ninguna matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ antisimétrica puede ser semi-definida $p-$positiva para cualquier $p \geq 2$.

Ahora, si consideramos A una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica semi-definida positiva entonces es semi-definida $1-$positiva. Por otro lado, si consideramos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $v_3 = 0$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\langle v_i - v_{i+1}, Av_i\rangle &= \langle v_1 - v_2, Av_1\rangle + \langle v_2 - v_3, Av_2\rangle \\ &= \langle v_1 - v_2, Av_1\rangle + \langle v_2, Av_2\rangle \\ &= \langle v_1, Av_1\rangle + \langle v_2, Av_2\rangle - \langle v_2, Av_1\rangle\end{aligned}$$

Si $\langle v_2, Av_1\rangle \leq 0$ entonces $\sum_{i=1}^{3}\langle v_i - v_{i+1}, Av_i\rangle \geq 0$. Pero, en caso $\langle v_2, Av_1\rangle > 0$ entonces

$$\begin{aligned}\langle v_1, Av_1\rangle + \langle v_2, Av_2\rangle - \langle v_2, Av_1\rangle &= \sum_{i=1}^{2}\langle v_i, Av_i\rangle - 2\langle v_2, Av_1\rangle + \langle v_2, Av_1\rangle \\ &= \langle v_1 - v_2, A(v_1 - v_2)\rangle + \langle v_2, Av_1\rangle\end{aligned}$$

la última igualdad ocurre por que A es simétrica. Finalmente desde que A es semi-definida positiva deducimos que $\sum_{i=1}^{3}\langle v_i - v_{i+1}, Av_i\rangle \geq 0$. En ambos casos uno tiene

$$\sum_{i=1}^{3}\langle v_i - v_{i+1}, Av_i\rangle \geq 0$$

lo que muestra que A es semi-definida $2-$positiva.

En vista de lo anterior, podemos mostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. A es semi-definida positiva si y solo si A es semi-definida $p-$positiva para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Prueba: Desde que semi-definitiva $p-$positiva implica semi-definida positiva. Nos enfocaremos en probar la otra implicación.

Procedamos por contradicción. Supongamos que existen $v_1, v_2, \cdots, v_p \in \mathbb{R}^n$ y $v_{p+1} = 0$ tales que

$$\sum_{i=1}^{p}\langle v_i - v_{i+1}, Av_i\rangle < 0. \tag{2.1}$$

De otro lado, como $\langle v_i - v_{i+1}, Av_i\rangle = \langle v_i - v_{i+1}, A(v_i - v_{i+1})\rangle + \langle v_i - v_{i+1}, Av_{i+1}\rangle$, entonces, desde que A es semi-definida positiva y de la desigualdad (2.1) se tiene que

$$\sum_{i=1}^{p}\langle v_i - v_{i+1}, Av_{i+1}\rangle < 0. \tag{2.2}$$

Luego, de las desigualdades (2.1) y (2.2) y desde que A es simétrica se observa que

$$\sum_{i=1}^{p}\langle v_i, Av_i\rangle < \sum_{i=1}^{p}\langle v_{i+1}, Av_i\rangle = \sum_{i=1}^{p}\langle Av_{i+1}, v_i\rangle < \sum_{i=1}^{p}\langle v_{i+1}, Av_{i+1}\rangle.$$

Como $v_{p+1} = 0$ entonces la última sumatoria la podemos re-escribir, es decir

$$\sum_{i=1}^{p}\langle v_{i+1}, Av_{i+1}\rangle = \sum_{i=2}^{p}\langle v_i, Av_i\rangle$$

lo cual contradice que A sea semi-definida positiva. □

El siguiente resultado extiende las dos propiedades mencionadas para matrices semi-definidas positivas.

Proposición 2.4. *Sean A y P dos matrices reales de orden $n \times n$. Denotemos por $B = P^tAP$, entonces*

i) si A es semi-definida $p-$positiva entonces B es semi-definida $p-$positiva

ii) si P es invertible, entonces A es semi-definida $p-$positiva (semi-definida positiva$^+$) si y sólo si B es semi-definida $p-$positiva (semi-definida positiva$^+$).

Prueba:

i) Sean $v_1, v_2, \cdots, v_p \in \mathbb{R}^n$ y $v_{p+1} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\langle v_i - v_{i+1}, Bv_{i+1}\rangle &= \sum_{i=1}^{p}\langle v_i - v_{i+1}, P^tAPv_{i+1}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle Pv_i - Pv_{i+1}, APv_{i+1}\rangle \geq 0\end{aligned}$$

por tanto B es semi-definida $p-$positiva.

ii) Sean $v_1, v_2, \cdots, v_p \in \mathbb{R}^n$ y $v_{p+1} = 0 \in \mathbb{R}^n$. Como P es inversible entonces existen $u_1, \cdots, u_p \in \mathbb{R}^n$ tales que $Pu_i = v_i$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ y considerando $u_{p+1} = 0$ tenemos que $Pu_{p+1} = v_{p+1}$. Luego

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\langle v_i - v_{i+1}, Av_{i+1}\rangle &= \sum_{i=1}^{p}\langle Pu_i - Pu_{i+1}, APu_{i+1}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle u_i - u_{i+1}, P^tAPu_{i+1}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle u_i - u_{i+1}, Bu_{i+1}\rangle \geq 0\end{aligned}$$

por tanto A es semi-definida $p-$positiva.

Finalmente, como $B + B^t = P^t(A + A^t)P$ y P es invertible, se deduce que $A \in \mathcal{P}^+$ si y solo si $A \in \mathcal{P}^+$. □

Para toda matriz A semi-definida positiva, existe una matriz diagonal D de orden $q \times q$ cuyas entradas en la diagonal son todos números reales positivos, una matriz ortogonal P de orden $n \times n$ y

$$P^t(A + A^t)P = \begin{bmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seguido denotemos por T a la matriz

$$T = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}.$$

Ahora, no es dificil probar que

$$T[P^t(A + A^t)P]T = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $(P^tAP)^t = P^tA^tP$ y T es diagonal, se deduce que $(TP^tAPT)^t = TP^tA^tPT$ luego

$$TP^tAPT + (TP^tAPT)^t = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Y como $(PT)^t = TP^t$ tenemos que TP^tAPT sigue siendo semi-definida positiva. Además si $A \in \mathcal{P}^+$, también TP^tAPT. Asi, expresando

$$TP^tAPT = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

donde B_{11} es de orden $q \times q$. Tomando vectores de la forma $v = (v_q, v_{n-q})$ donde $v_q = 0$ es de q coordenadas. Se tiene que $TP^tAPTv = 0$, es decir $(B_{12}v_{n-q}, B_{22}v_{n-q}) = 0$ para todo $v_{n-q} \in \mathbb{R}^{n-q}$. Por tanto $B_{12} = 0$ y $B_{22} = 0$. Como $B_{12} + B_{21}^t = 0$ se sigue que $B_{21} = 0$.

En resumen, desde que $A \in \mathcal{P}^+$, existe una matrix B de orden $q \times q$ tal que $B + B^t = I_q$ y

$$TP^tAPT = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gracias a la Proposición 2.4 tenemos que, A es semi-definida p−positiva si y sólo si B es semi-definida p−positiva. Ahora, como $B + B^t = I_q$, entonces B es una matriz normal. Por lo tanto, gracias al Teorema 1.3 existe una matriz diagonal por bloques Λ de orden $q \times q$ y una matriz unitaria Q de orden $q \times q$ tal que $Q^tBQ = \Lambda$. Aquí, la matriz Λ es de la forma

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_q \end{bmatrix},$$

donde Λ_i es una matriz de orden 1×1 (un número real) o una matriz de orden 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \neq 0$.

Como la matriz B de la descomposición previa satisface $B + B^t = I_q$, entonces B es no singular y por tanto cada una de las matrices Λ_i es no singular también. Además, desde que $A \in \mathcal{P}^+$, esta es semi-definida positiva y así las entradas de la diagonal de cada Λ_i son no negativas. Esto es, Λ_i satisface

$$\Lambda_i > 0, \quad \text{si } \Lambda_i \text{ es una matriz de orden } 1 \times 1, \text{ y}$$

$$\alpha_i \geq 0 \ \text{ y } \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \quad \text{si } \Lambda_i \text{ es una matriz de orden } 2 \times 2.$$

Más aún, desde que $B + B^t = I_q$ tenemos que $\Lambda + \Lambda^t = I_q$. Por tanto, todas las matrices de orden 1×1 y la parte real de las matrices de orden 2×2 son iguales a $1/2$.

De esto se sigue el siguiente resultado

Proposición 2.5. *Con las mismas notaciones de la discusión previa, uno tiene*

i) A es semi-definida $p-$positiva si y solo si Λ también lo es;

ii) Si Λ es semi-definida $p-$positiva entonces cada Λ_i también lo es.

El réciproco de *ii*) es también cierto y puede deducirse facilmente de la Proposición 3.4 enunciada posteriormente en el siguiente capítulo.

A partir de la Proposición 2.5, nos enfocaremos en las matrices de orden 2×2 de la forma

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

con $0 < |\theta| < \pi/2$. Así, la matriz

$$R + R^t = 2\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

es definida positiva.

Por otro lado, dado que $0 < |\theta| < \pi/2$ entonces $\pi/3 < |\theta| < \pi/2$ ó existe $p \geq 2$ natural tal que

$$\frac{\pi}{p+2} < |\theta| \leq \frac{\pi}{p+1}.$$

Claramente, la matriz R definida anteriormente es semidefinida $1-$positiva, ahora en el caso en que $\pi/3 < |\theta| \leq \pi/2$. Si consideramos los vectores $x_1 = e_1 \in \mathbb{R}^2$, $x_2 = Rx_1$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\langle x_i - x_{i+1}, Rx_i\rangle &= \|x_1\|^2\cos\theta + \|x_2\|^2\cos\theta - \langle x_2, Rx_1\rangle \\ &= \|e_1\|^2 2\cos\theta - \|e_1\|^2 \\ &= 2\cos\theta - 1. \end{aligned}$$

Como $\pi/3 < |\theta| \leq \pi/2$ se sigue que $0 \leq \cos\theta < 1/2$, por tanto $2\cos\theta - 1 < 0$, lo cual nos dice que R no es semi-definida $2-$positiva.

Ahora, consideremos la siguiente matriz compleja

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

un cálculo sencillo muestra que $QQ^* = I$, es decir es una matriz unitaria compleja. Por otro lado, dicha matriz satisface lo siguiente

$$QRQ^* = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}.$$

Recordando que R es semi-definida $p-$positiva si y solo si la matriz H es semi-definda positiva, donde H es una matriz triangular por bloques de orden $2p$, definido como sigue

$$H = \begin{cases} R & \text{si } i = j \\ -R & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definiendo la siguiente matriz compleja de orden $2p$

$$Q_p = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Q & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & Q & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & Q \end{bmatrix}$$

podemos observar mediante un cálculo sencillo de producto de matrices que

$$H_R = Q_p(H+H^t)Q_p^* = \begin{bmatrix} 2\cos\theta I_2 & -QR^tQ^* & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -QRQ^* & 2\cos\theta I_2 & -QR^tQ^* & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -QRQ^* & 2\cos\theta I_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2\cos\theta I_2 & -QR^tQ^* \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -QRQ^* & 2\cos\theta I_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz H es semi-definida positiva si y solo si la matriz H_R es semi-definida positiva. Luego, hacemos las permutaciones de columnas de posiciones i y $2i-1$, seguido de las permutaciones de las filas de posición i y $2i-1$, donde $i \in \{2, \cdots, p\}$. Despues, si p es par se hace las permutaciones de columnas de posiciones $p+1+i$ y $2p-i$, seguido de las permutaciones de filas de posiciones $p+1+i$ y $2p-i$ con $i \in \{1, \cdots, p/2-1\}$. Para p impar, hacemos las permutaciones de las siguientes columnas de posiciones $p+i$ y $2p-i$, seguido de las permutaciones de filas de posiciones $p+i$ y $2p-i$ con $i \in \{1, \cdots, (p-1)/2\}$. Para obtener una matriz diagonal por bloques de la siguiente forma

$$H_R^p = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

las matrices bloques C_1 y C_2 son de orden p y de la forma siguiente:

$$C_1 = e^{i\theta}T + e^{-i\theta}T^t \quad \text{y} \quad C_2 = e^{-i\theta}T + e^{i\theta}T^t$$

donde T es la matriz triangular de orden p definida por

$$T = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por un lado, H_R es semi-definida positiva si y solo si H_R^p lo es. Por otro lado, desde que $C_2^* = C_2, C_1^* = C_1$ y $C_2^t = C_1$, se tiene que H_R^p es semi-definida positiva si y sólo si C_1 lo es. Pero C_1 es hermitiana, por tanto C_1 es semi-definida positiva si y solo si todos sus autovalores son no negativos.

Calculamos sus autovalores de la manera clásica. Sea 2μ un autovalor de C_1 y $v = (v_1, \cdots, v_p) \in \mathbb{C}^p$ un autovector asociado. Poniendo $v_0 = v_{p+1} = 0$, tenemos que para cada $j = 1, \cdots, p$

$$e^{-i\theta}v_{j+1} + 2(\mu - \cos\theta)v_j + e^{i\theta}v_{j-1} = 0 \tag{2.3}$$

que es equivalente a

$$v_{j+1} + 2(\mu - \cos\theta)e^{i\theta}v_j + e^{2i\theta}v_{j-1} = 0.$$

Asociado a la ecuación cuadratica: $s^2 + 2be^{i\theta}s + e^{2i\theta} = 0$, con $b = (\mu - \cos\theta)$. tenemos que las soluciones son:

$$s_1 = (-b + \sqrt{b^2-1})e^{i\theta} \quad \text{y} \quad s_2 = (-b - \sqrt{b^2-1})e^{i\theta}.$$

Para cada $j = 1, \cdots, p$ definamos $v_j = s_1^j - s_2^j$, y haciendo $v_0 = v_{p+1}=0$. Podemos verificar mediante un cálculo sencillo que para $1 \leq j \leq p-1$ se verifica la ecuación (2.3). Luego, para $j = p$, se tiene que

$$\begin{aligned} v_{p+1} + 2be^{i\theta}v_p + e^{2i\theta}v_{p-1} &= 2be^{i\theta}(s_1^p - s_2^p) + e^{2i\theta}(s_1^{p-1} - s_2^{p-1}) \\ &= s_1^{p-1}(2be^{i\theta}s_1 + e^{2i\theta}) - s_2^{p-1}(2be^{i\theta}s_2 + e^{2i\theta}) \\ &= s_1^{p-1}(-s_1^2) - s_2^{p-1}(-s_2^2) \\ &= s_2^{p+1} - s_1^{p+1}, \end{aligned}$$

deduciendo que $\left(\dfrac{s_1}{s_2}\right)^{p+1}$ debe ser igual a 1, para que $v = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ sea un autovector asociado al autovalor 2μ. Por tanto $\dfrac{s_1}{s_2} = e^{\frac{2il\pi}{p+1}}$, con $l = 0, 1, \cdots, p+1$. Los casos $l = 0$ o $l = p+1$ significan que la matriz de rotación son en realidad la matriz identidad, es decir $\theta = 0$ lo cual seria una contradicción. Por tanto $\dfrac{s_1}{s_2} = e^{\frac{2il\pi}{p+1}}$ sólo tiene sentido para $l = 1, \cdots, p$. Resolviendo la última ecuación en función de 2μ, tenemos que

$$2\mu = 2\left[\cos\theta - \cos\left(\frac{il\pi}{p+1}\right)\right].$$

Como, todos los autovalores son no negativos, entonces $\cos\theta - \cos\left(\frac{il\pi}{p+1}\right) \geq 0$ para todo $l = 1, \cdots, p$, deduciendo que $|\theta| \leq \dfrac{\pi}{p+1}$. Concluyendo en el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Sea R la matriz de rotación definida como antes. Entonces R es semi-definida $p-$positiva si y solo si $|\theta| \leq \frac{\pi}{p+1}$.*

Capítulo 3

Ciclicidad en monotonía generalizada

En este capítulo introducimos el concepto de "*ciclicidad*" en monotonía generalizada, y daremos algunas propiedades remarcables. Terminamos mostrando que para el caso lineal, todo se reduce a la monotonía cíclica.

Ciclicidad en monotonía generalizada

Un operador multivaluado $A : X \rightrightarrows X^*$ es llamado:

- **Monótono p-cíclico**, si para cualquier subconjunto finito $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^p$ de graph(A), , considerando $(x_{p+1}, x_{p+1}^*) = (x_0, x_0^*)$,

$$\sum_{i=0}^{p} \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle \leq 0. \tag{3.1}$$

- **Ciclicamente monótono** si es monótono $p-$cíclico para todo $p \in \mathbb{N}$.

- **Casi-monótono p-cíclico** si, para cualquier subconjunto finito $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^p$ de graph(A), considerando $(x_{p+1}, x_{p+1}^*) = (x_0, x_0^*)$

$$\min_{i=0,\ldots,p} \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle \leq 0; \tag{3.2}$$

- **Ciclicamente casi-monótono** si es casi-monótono $p-$cíclico para todo $p \in \mathbb{N}$.

- **Pseudo-monótono p-cíclico** si A es casi-monótono p-cíclico y, si el mínimo en (3.2) es 0, entonces $\langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle = 0$, para todo $i = 0, \ldots, p$.

- **Ciclicamente pseudo-monótono** si es pseudo-monótono $p-$cíclico para todo $p \in \mathbb{N}$.

Es claro que A es *monótono* (resp. *casi-monótono*, *pseudo-monótono*), si este es monótono 1-cíclico (resp. casi-monótono 1-cíclico, pseudo-monótono 1-cíclico), y A es *cíclicamente monótono* (resp. *cíclicamente casi-monótono*, *cíclicamente pseudo-monótono*) si este es monótono p-cíclico (resp. casi-monótono p-cíclico, pseudo-monótono p-cíclico), para todo $p \in \mathbb{N}$. Además es claro de la definición que monotonía p-cíclica implica pseudo-monotonía p-cíclica y esta implica casi-monotonía p-cíclica.

Proposición 3.1. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador (pseudo-)monótono p-cíclico. Entonces este es (pseudo-)monótono q-cíclico, para todo $q < p$.*

Prueba: Es suficiente probar para $q = p-1$. Tomemos $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^{p-1} \subset \operatorname{graph}(A)$ y definamos $\{(y_i, y_i^*)\}_{i=0}^{p}$ como

$$\begin{aligned} (y_i, y_i^*) &= (x_i, x_i^*), \quad \forall i = 0, \dots, p-1, \\ (y_p, y_p^*) &= (x_0, x_0^*). \end{aligned} \tag{3.3}$$

De esto se tiene,

$$\begin{aligned} \langle y_{i+1} - y_i, y_i^* \rangle &= \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle, \quad i = 0, \dots, p-2, \\ \langle y_p - y_{p-1}, y_{p-1}^* \rangle &= \langle x_0 - x_{p-1}, x_{p-1}^* \rangle, \\ \langle y_{p+1} - y_p, y_p^* \rangle &= \langle x_0 - x_0, x_0^* \rangle = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

por tanto, para el caso monótono $p-$cíclico tenemos que

$$0 \geq \sum_{i=0}^{p} \langle y_{i+1} - y_i, y_i^* \rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle.$$

Lo cual prueba la monotonía $(p-1)$-cíclica de A.

Ahora para el caso pseudo-monótono p-cíclico, primero probaremos que A es casi-monótono $(p-1)$-cíclico. Para ello procedamos por contradicción y supongamos que

$$\langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle > 0, \quad \forall i = 0, \dots, p-1,$$

y definiendo como en (3.3) $\{(y_i, y_i^*)\}_{i=0}^{p}$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle y_{i+1} - y_i, y_i^* \rangle &= \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle > 0, \quad i = 0, \dots, p-2, \\ \langle y_p - y_{p-1}, y_{p-1}^* \rangle &= \langle x_0 - x_{p-1}, x_{p-1}^* \rangle > 0, \\ \langle y_{p+1} - y_p, y_p^* \rangle &= \langle x_0 - x_0, x_0^* \rangle = 0, \end{aligned}$$

es decir, $\min_{i=0,\dots,p} \langle y_{i+1} - y_i, y_i^* \rangle = 0$. Esto es una contradicción desde que A es pseudo-monótono p-cíclico. Por lo tanto A es casi-monótono p-cíclico.

Ahora, sea $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^{p-1} \subset \operatorname{graph}(A)$ tal que

$$\min_{i=0,\dots,p-1} \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle = 0,$$

y definamos $\{(y_i, y_i^*)\}_{i=0}^{p}$ como en (3.3). Sigue de la ecuación (3.4) que

$$\min_{i=0,\dots,p-1} \langle y_{i+1} - y_i, y_i^* \rangle = 0.$$

Por lo tanto, por la pseudo-monotonía p-cíclica de A, $\langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle = 0$, para todo $i = 0, \dots, p-1$. □

El resultado anterior no se aplica al caso de casi-monotonía p-cíclica. En efecto, consideremos graph$(A) = \{(0,1),(1,-1)\}$. Tomando $(x_0, x_0^*) = (0,1)$ y $(x_1, x_1^*) = (1,-1)$, es claro que

$$\langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle = 1 > 0, \quad \text{and} \quad \langle x_0 - x_1, x_1^* \rangle = 1 > 0.$$

Por lo tanto A no es casi-monótono 1-cíclico. Sin embargo, este es casi-monótono p-cíclico, para todo $p > 1$ desde que cualquier conjunto de $p+1$ elementos tiene elementos repetidos los cuales hacen que el mínimo en (3.2) sea trivialmente 0. Además, para $p > 1$, A es también un ejemplo de un operador casi-monótono p-cíclico que no es pseudo-monótono p-cíclico.

Ahora mostraremos que si adicionamos la hipótesis de linealidad al operador multivaluado casi-monótono p-cíclico, entonces también será casi-monótono q-cíclico para todo $q < p$.

Proposición 3.2. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador lineal casi-monótono p-cíclico. Entonces este es casi-monótono q-cíclico, para todo $q < p$.*

Prueba: Es suficiente a probar para $q = p - 1$. Asumiendo que A no es casi-monótono $(p-1)$-cíclico. Entonces existen $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^{p-1} \subset$ graph(A) tal que

$$\langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle > 0, \quad \forall i = 0, \ldots, p-1.$$

Fijemos $t \in \mathbb{R}$ y definimos,

$$(y_i, y_i^*) = (x_i, x_i^*), \ \forall i = 0, \ldots, p-1,$$
$$(y_p, y_p^*) = (1-t)(x_0, x_0^*) + t(x_{p-1}, x_{p-1}^*),$$

donde $(y_p, y_p^*) \in$ graph(A), por linealidad de A. De esto,

$$\langle y_{i+1} - y_i, y_i^* \rangle = \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle > 0, \quad i = 0, \ldots, p-2,$$
$$\langle y_p - y_{p-1}, y_{p-1}^* \rangle = (1-t)\langle x_0 - x_{p-1}, x_{p-1}^* \rangle, \tag{3.5}$$
$$\langle y_0 - y_p, y_p^* \rangle = t\langle x_0 - x_{p-1}, (1-t)x_0^* + t x_{p-1}^* \rangle. \tag{3.6}$$

La ecuación (3.5) es positiva, cuando tomamos $t < 1$. De la ecuación (3.6) obtenemos

$$\langle y_0 - y_p, y_p^* \rangle = t(1-t)\langle x_0 - x_{p-1}, x_0^* \rangle + t^2 \langle x_0 - x_{p-1}, x_{p-1}^* \rangle.$$

Ahora, si $\langle x_0 - x_{p-1}, x_0^* \rangle \geq 0$ entonces la ecuación (3.6) sera positiva cuando consideremos $t \in]0,1[$. Caso contrario, es suficiente tomar $t < 0$ cuando $\langle x_0 - x_{p-1}, x_0^* \rangle < 0$. □

Ahora, nos preguntamos: ¿si monotonía p-cíclica implica casi-monotonía $p+1$-cíclica?. La respuesta a dicha interrogante es negativa, y la veremos en el Lema 3.2 parte *iv*) de la siguiente sección.

3.1. Casi-monotonicidad cíclica implica monotonicidad cíclica

En esta sección consideraremos el operador univaluado $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $F(x) = Ax - a$, donde A es una matriz de orden $n \times n$ y $a \in \mathbb{R}^n$, estos operadores son conocidos en la literatura como operadores afines lineales.

Podemos ver que dicho operador F es monótono si y sólo A es semi-definida positiva. De manera similar el concepto de monotonía $p-$cíclica es equivalente a las matrices semi-definidas $p-$positivas, para el caso del operador F.

El siguiente resultado extiende la Proposición 2.4.

Lema 3.1. *Sean A y P dos matrices reales de orden $n \times n$. Denotemos por $B = P^t AP$, entonces*

i) si A es casi-monótona $p-$cíclica entonces A es casi-monótona $q-$cíclica para todo q con $1 \leq q \leq p$.

ii) si A es casi-monótona $p-$cíclica entonces B es casi-monótona $p-$cíclica.

iii) si P es invertible, entonces A es casi-monótona $p-$cíclica si y sólo si B es casi-monótona $p-$cíclica.

Prueba: La parte i) es consecuencia directa de la Proposición 3.2. La parte ii) se sigue de la siguiente igualdad

$$\langle x_{i+1} - x_i, Bx_i \rangle = \langle Px_{i+1} - Px_i, APx_i \rangle.$$

En la parte iii) sólo debemos probar el recíproco de ii), y se sigue de que para todo x_i existe y_i con $i = 1, \cdots, p$ tal que $x_i = Py_i$, uno tiene que

$$\langle x_{i+1} - x_i, Ax_i \rangle = \langle Py_{i+1} - Py_i, APy_i \rangle = \langle y_{i+1} - y_i, P^t APy_i \rangle.$$

□

La proposición siguiente muestra que la casi-monotonicidad $p-$cíclica implica semi-definida positiva$^+$, cuando $p > 1$.

Proposición 3.3. *Asumamos que $p > 1$. Si A es casi-monótona $p-$cíclica, entonces $A \in \mathcal{P}^+$.*

Prueba: En vista del Lema 3.1, podemos asumir que $p = 2$. Ahora, por contradicción, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $(A + A^t)v = 0$ y $Av \neq 0$. Se sigue que $\langle Av, v \rangle = 0$ y $\|Av\| > 0$. Para $\gamma \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{R}^n$ consideremos $x_0 = v$, $x_1 = w - v$ y $x_2 = v - \gamma Av$. Luego

$$\begin{aligned} \langle Ax_0, x_1 - x_0 \rangle &= \langle Av, w - 2v \rangle \\ &= \langle Av, w \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ax_1, x_2 - x_1 \rangle &= \langle A(-v + w), v - \gamma Av + v - w \rangle \\ &= \gamma \|Av\|^2 + \langle Av, w \rangle + 2\langle Aw, v \rangle - \gamma \langle Aw, Av \rangle - \langle Aw, w \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ax_2, x_0 - x_2 \rangle &= \langle A(v - \gamma Av), v - (v - \gamma Av) \rangle \\ &= \gamma(\|Av\|^2 - \gamma \langle A^2 v, Av \rangle). \end{aligned}$$

Tomando w de manera que su norma sea lo suficientemente pequeña satisfaciendo $\langle Av, w\rangle > 0$, y $\gamma > 0$ satisfaciendo $\|Av\|^2 - \gamma\langle A^2v, Av\rangle > 0$, los tres productos $\langle Ax_0, x_1 - x_0\rangle$, $\langle Ax_1, x_2 - x_1\rangle$ y $\langle Ax_2, x_0 - x_2\rangle$ son todos estrictamente positivos. Se sigue que A no es casi-monótona 2−cíclica. $\square$

El réciproco de este resultado no es verdad, consideremos por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{con } \pi/3 < |\theta| < \pi/2.$$

Claramente $A \in \mathcal{P}^+$ y no es dificil mostrar que A no es 2−cíclicamente casi-monótona.

Ahora asumamos que $A \in \mathcal{P}^+$, entonces del Capítulo 2, existe una matriz diagonal Λ de la forma siguiente

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & & & \\ & \Lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \Lambda_q & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

donde Λ_i es una matrix de orden 1×1 (un número real) o una matrix de orden 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \neq 0$. Además, desde que $A \in \mathcal{P}^+$, esta es semi-definida positiva y así las entradas de la diagonal de cada Λ_i son no negativas. Esto es, Λ_i satisface

$$\Lambda_i > 0, \quad \text{si } \Lambda_i \text{ es una matrix de orden } 1 \times 1, \text{ y}$$

$$\alpha_i \geq 0 \ \text{ y } \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \quad \text{si } \Lambda_i \text{ es una matrix de orden } 2 \times 2.$$

Las propiedades siguientes son consecuencias directas de la discusión previa y del Lema 3.1.

Lema 3.2. *Con las mismas notaciones de la discusión previa, uno tiene*

i) A es casi-monótona $p-$cíclica si y sólo si Λ también lo es;

ii) si Λ es casi-monótona $p-$cíclica, entonces cada Λ_i también lo es;

iii) Λ_i (de orden 2×2) es casi-monótona $p-$cíclica si y sólo si la matrix

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix},$$

con $\cos\theta_i = \alpha_i/(\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2})$ y $\sin\theta_i = \beta_i/(\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2})$, también lo es. En este caso, por que $\alpha_i \geq 0$ y $\alpha_i^2 + \beta^2 > 0$, entonces $0 < |\theta_i| \leq \pi/2$.

iv) cuando $|\theta_i| = \pi/2$ *en iv),* Λ_i *es monótona pero no casi-monótona* $2-$*cíclica.*

Prueba: La prueba de $i)$ a $iii)$ son consecuencias directas del Lema 3.1.

Probaremos $iv)$. Claramente, en este caso, Λ_i es monótona. Para probar que esta matriz no es casi-monótona 2-cíclica es suficiente considerar los vectores $x_0 = (1,0)$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, $x_2 = \frac{1}{2}(1,-\sqrt{3})$ y $x_3 = x_0$. Así, los tres productos

$$\langle \Lambda_i x_0, x_1 - x_0\rangle, \quad \langle \Lambda_i x_1, x_2 - x_1\rangle \quad \text{y} \quad \langle \Lambda_i x_2, x_0 - x_2\rangle$$

son estrictamente positivos. Acorde a la definición, Λ_i no es casi-monótona 2-cíclica. □

La monotonicidad $p-$cíclica para operadores afines fueron estudiados por J.P. Crouzeix y Gutan en [5].

La siguiente proposición muestra la equivalencia entre la monotonicidad $p-$cíclica y la casi-monotonicidad $p-$cíclica para la matriz R.

Proposición 3.4. *Asumamos que R es casi-monótona $p-$cíclica sobre $\mathbb{R}^2$, entonces es monótona $p-$cíclica sobre $\mathbb{R}^2$.*

Prueba: Si $p = 1$, entonces el resultado es trivialmente satisfecho. Ahora, supongamos que $p > 1$. Desde que $0 < |\theta| < \pi/2$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\pi/(q+2) < |\theta| \leq \pi/(q+1)$. Según el Lema 2.2, R es monótona $q-$cíclica pero no monótona $(q+1)-$cíclica, concluyendo así que $p \leq q$.

Para concluir la prueba basta con probar que R tampoco es casi-monótona $(q+1)-$cíclica. Para $m \in \mathbb{N}$, denotemos $\beta = \theta/m$ y

$$S = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Haciendo un cálculo simple de producto de matrices, tenemos que para todo $k, r \in \mathbb{N}$,

$$R^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}, \quad S^r = \begin{bmatrix} \cos r\beta & \sin r\beta \\ -\sin r\beta & \cos r\beta \end{bmatrix}$$

y

$$R^k S^r = S^r R^k = \begin{bmatrix} \cos(k\theta - r\beta) & -\sin(k\theta - r\beta) \\ \sin(k\theta - r\beta) & \cos(k\theta - r\beta) \end{bmatrix}.$$

Tomemos $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo pero arbitrario y para $i = 1, \cdots, q+1$ definamos

$$x_i = \begin{cases} S^i R^{2i} x_0 & \text{para } i = 1, \cdots, q+1, \\ x_0 & \text{para } i = q+2. \end{cases}$$

Para $i = 0, 1, \cdots, q$, uno tiene

$$\begin{aligned} \langle Rx_i, x_{i+1} - x_i\rangle &= \langle Rx_i, SR^2 x_i\rangle - \|x_i\|^2 \cos\theta \\ &= \|Rx_i\|^2 \cos(\theta - \beta) - \|x_i\|^2 \cos\theta \\ &= \|Rx_0\|^2[\cos(\theta - \beta) - \cos\theta], \end{aligned}$$

y para $i = q+1$,

$$\begin{aligned}
\langle Rx_{q+1}, x_0 - x_{q+1}\rangle &= \langle Rx_{q+1}, x_0\rangle - \|x_{q+1}\|^2\cos\theta \\
&= \langle S^{q+1}R^{2q+3}x_0, x_0\rangle - \|x_{q+1}\|^2\cos\theta \\
&= \|x_0\|^2\cos[(2q+3)\theta - (q+1)\beta] - \|x_i\|^2\cos\theta \\
&= \|x_0\|^2(\cos[(2q+3)\theta - (q+1)\beta] - \cos\theta).
\end{aligned}$$

Desde que $\pi/(q+2) < |\theta| \leq \pi/(q+1)$, se tiene que $-|\theta| \leq 2\pi - (2q+3)|\theta| < |\theta|$ y como $\beta = \theta/m$, tomando m suficientemente grande,

$$|\theta - \beta| < |\theta| \quad \text{and} \quad -|\theta| < 2\pi - |(2q+3)\theta - (q+1)\beta| < |\theta|.$$

Por tanto, para todo $i = 0, 1, \cdots, q+1$,

$$\langle Rx_i, x_{i+1} - x_i\rangle > 0.$$

Esto muestra que R no es casi-monótona $(q+1)$-cíclica. □

Corolario 3.3. *Con las mismas notaciones del Lema 3.2, Λ es casi-monótona p-cíclica si y sólo si Λ es monótona p-cíclica.*

Prueba: Asumiendo que Λ es casi-monótona p-cíclica. Del Lema 3.2, cada Λ_i es casi-monótona p-cíclica y por tanto de la Proposición 3.4, estas matrices son monótonas p-cíclicas. Aplicando nuevamente el Lema 3.2 deducimos que Λ es monótona p-cíclica. □

El resultado anterior es resumido en el siguiente teorema cuya prueba es la conjunción del Corolario 3.3 y el Lema 3.2.

Teorema 3.4. *Sea A una matrix real de orden $n \times n$. Entonces A es casi-monótona $p-$cíclica sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si A es monótona $p-$cíclica sobre $\mathbb{R}^n$.*

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema 3.4.

Corolario 3.5. *Con las mismas notaciones del Teorema 3.4, son equivalentes:*

i) A es casi-monótona $p-$cíclica;

ii) La inversa A^{-1} definida por $A^{-1}(x^*) = \{x : x^* = Ax\}$ es casi-monótona $p-$cíclica;

iii) A^t es casi-monotona $p-$ciclica;

iv) dado $a \in \mathbb{R}^n$, el operador $F(x) = Ax + a$ es casi-monótono $p-$cíclico.

Prueba: Las equivalencias entre los tres primeros enunciados son consecuencias inmediatas del Teorema 3.4 y por el hecho que estas equivalencias ocurren para la propiedad de monotonía p-cíclica.

Así, sólo probaremos la equivalencia entre $i)$ y $iv)$. Pues estas equivalencia ocurren para la propiedad de monotonía p-cíclica, es suficiente probar que para un dado $a \in \mathbb{R}^n$, el operador F es monótono si F es casi-monótono. Tomamos

$v \in \mathbb{R}^n$ un punto arbitrario y definimos $x_0 = tv$ y $x_1 = -tv$ para $t > 0$. De la propiedad de casi-monotonía,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \min[\langle Ax_0 + a, x_1 - x_0\rangle, \langle Ax_1 + a, x_0 - x_1\rangle] \\ &= -2t^2\langle Av, v\rangle + 2t\min[\langle a, v\rangle, -\langle a, v\rangle]. \end{aligned}$$

Se sigue, para todo $t > 0$,

$$t\langle Av, v\rangle - \min[\langle a, v\rangle, -\langle a, v\rangle] \geq 0.$$

Uno deduce que $\langle Av, v\rangle \geq 0$ y así la monotonía de F. □

Corolario 3.6. *A es cíclicamente casi-monótona si y sólo si A es cíclicamente monótona. En este caso, A es simétrica y semi-definida positiva.*

Extensión a dimensión infinita

El resultado siguiente extiende el Teorema 3.4 en el contexto de operadores lineales definidos en espacios de Banach.

Proposición 3.5. *Sea $A : \mathrm{dom}\,(A) \subset X \to X^*$ un operador lineal, no necesariamente definido en todo X. Si A es casi-monótono p-cíclico entonces es monótono p-cíclico.*

Prueba: Sea $A : \mathrm{dom}\,(A) \subset X \to X^*$ un operador casi-monótono p-cíclico, con $p > 1$. Fijemos $\{x_i\}_{i=0}^p \subset \mathrm{dom}\,(A)$. De la casi-monotonía p-cíclica de A,

$$\min_{i=0,\dots,p} \langle x_{i+1} - x_i, A(x_i)\rangle \leq 0.$$

Consideremos $V = \mathrm{span}\{x_0, \dots, x_p\}$. Asumamos, sin perdida de generalidad, que $\{x_i\}_{i=0}^r$ es una base para V, así V es un subespacio lineal de dimensión $r+1$ de X. Sea $\{e_0, \dots, e_r\}$ la base canonica de $\mathbb{R}^{r+1}$ y sea $\psi : V \to \mathbb{R}^{r+1}$ un isomorfismo lineal tal que $\psi(x_i) = e_i$. Consideremos $M = (m_{ij})$ la matrix de orden $(r+1) \times (r+1)$ tal que

$$\langle e_i, Me_j\rangle = m_{ij} = \langle x_i, A(x_j)\rangle.$$

Observemos que ψ y M definidos como antes respectivamente, el producto de dualidad de X en el siguiente sentido

$$\langle \psi(x), M\psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^{r+1}} = \langle x, A(y)\rangle_X, \quad \forall x, y \in V.$$

En efecto, sea $x = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x_i$ y $y = \sum_{i=0}^{r} \beta_i x_i$ y consideremos $v = \psi(x) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i e_i$ y $w = \psi(y) = \sum_{i=0}^{r} \beta_i e_i$. De esto,

$$\begin{aligned} \langle v, Mw\rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^{r} \alpha_i e_i, \sum_{j=0}^{r} \beta_j Me_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} \alpha_i\beta_j \langle e_i, Me_j\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} \alpha_i\beta_j \langle x_i, A(x_j)\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x_i, A\left(\sum_{j=0}^{r} \beta_j x_j\right) \right\rangle = \langle x, A(y)\rangle. \end{aligned}$$

Afirmamos que M es casi-monótona p-cíclica. En efecto, tomemos $\{v_i\}_{i=0}^{p} \subset \mathbb{R}^{r+1}$ y escribamos, para cualquier i,

$$v_i = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{ij} e_j.$$

Definamos $y_i = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{ij} x_j$, so $v_i = \psi(y_i)$. Por lo tanto $\langle v_{i+1} - v_i, Mv_i \rangle = \langle y_{i+1} - y_i, A(y_i) \rangle$. Esto implica nuestra afirmación, como A es casi-monótono p-cíclico. Por el Teorema 3.4, M es también monótono p-cíclico. Así deducimos la monotonía p-cíclica de A observando que

$$\sum_{i=0}^{p} \langle x_{i+1} - x_i, A(x_i) \rangle = \sum_{i=0}^{p} \langle \psi(x_{i+1} - x_i), M\psi(x_i) \rangle.$$

□

Teorema 3.7. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado lineal. Si A es casi-monótono p-cíclico entonces es monótono p-cíclico.*

Prueba: Sea A_0 una selección de A. Notemos que, como A es casi-monótono p-cíclico, A_0 lo es también y de esto por la Proposition 3.5, monótono p-cíclico. Además, Por la Proposición 1.4, A es monótono. Por lo tanto, Por el Lema 1.6,

$$A(0) \subset \operatorname{dom}(A)^{\perp}. \tag{3.7}$$

Tomando $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^{p} \subset A$ arbitrario. Notemos que, por (1.2), podemos escribir

$$x_i^* = A_0(x_i) + w_i^*, \quad w_i^* \in A(0).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p} \langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle &= \sum_{i=0}^{p} \langle x_{i+1} - x_i, A_0(x_i) + w_i^* \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{p} \langle x_{i+1} - x_i, A_0(x_i) \rangle + \langle x_{i+1} - x_i, w_i^* \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{p} \langle x_{i+1} - x_i, A_0(x_i) \rangle \leq 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de la ecuación (3.7), y la última desigualdad se sigue de la monotonía p-cíclica de A_0. Por consecuencia A es también monótono p-cíclico. □

Conclusiones

Toda matriz semi-definida $p-$positiva con $p \geq 2$ es semi-definida positiva$^+$. Una matriz semi-definida positiva es simétrica si y solo si es semi-definida $p-$positiva para todo p natural. Así, toda matriz simétrica semi-definida positiva es semi-definida positiva$^+$. Para cada matriz A semi-definida positiva no simétrica existe p natural tal que A es semi-definida $p-$positiva pero no es semi-definida $(p+1)-$positiva. También, toda matriz no nula, anti-simétrica y semi-definida positiva no es semi-definida positiva$^+$.

Toda matriz semi-definida positiva$^+$ es semejante a una matriz diagonal por bloques, donde dichos bloques ,son de orden 1 o 2, estan formados por los autovalores de la matriz. Si A es semi-definida $p-$positiva y B es semejante a A entonces B también es semi-definida $p-$positiva, y reciprocamente. Luego, el máximo p natural para el cual una matriz es semi-definida $p-$positiva esta determinado por sus bloques de orden 2, los cuales resultan ser matrices de rotación. Por tanto, una matriz es semi-definida $p-$positiva si y solo si sus matrices de rotación, de la matriz diagonal por bloques semejante, tienen ángulo menor o igual que $\pi/(p+1)$.

El concepto de monotonicidad $p-$ciclica para el caso de operadores lineales en espacios de dimensión finita es equivalente a que su matriz de representación sea semi-definida $p-$positiva. Así, para este caso lineal, se tiene que casi-monotonicidad $p-$cíclica es equivalente a monotonicidad $p-$cíclica.

Todo operador multivaluado lineal es casi-monótono si y solo si es monótono. Todo operador multivaluado (pseudo-)monótono $p-$cíclico es (pseudo-)monótono $q-$cíclico, para todo $1 \leq q \leq p$. En general los operadores multivaluados casi-monótonos no tienen la propiedad anterior. Pero, si adicionamos la condición de linealidad sobre el operador, se obtiene la propiedad mencionada. Más aún, un operador multivaluado lineal es casi-monótono $p-$cíclico si y solo si es monótono $p-$cíclico.

Bibliografía

[1] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009. Reprint of the 1990 edition [MR1048347].

[2] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, X. Wang, and L. Yao. The Brézis-Browder theorem in a general Banach space. *ArXiv e-prints*, Oct. 2011.

[3] H. H. Bauschke, X. Wang, and L. Yao. Monotone linear relations: maximality and Fitzpatrick functions. *J. Convex Anal.*, 16(3-4):673–686, 2009.

[4] R. Cross. *Multivalued linear operators*. Pure and applied mathematics. M. Dekker, 1998.

[5] J.-P. Crouzeix and C. Gutan. A measure of asymmetry for positive semidefinite matrices. *Optimization*, 52(3):251–262, 2003.

[6] J.-P. Crouzeix, P. Marcotte, and D. Zhu. Conditions ensuring the applicability of cutting-plane methods for solving variational inequalities. *Math. Program.*, 88(3, Ser. A):521–539, 2000.

[7] F. Facchinei and J.-S. Pang. *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. Vol. I.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2003.

[8] A. N. Iusem. On some properties of paramonotone operators. *J. Convex Anal.*, 5(2):269–278, 1998.

[9] E. Lages Lima. *Álgebra lineal.* Colección textos del IMCA. IMCA, Lima-Perú, 1998.

[10] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[11] H. Schneider and G. P. Baker. *Matrices an linear algebra.* University of Wisconsin. HOLT RINEHART AND WINSTON, INC, New York, Chicago, San Francisco, Atlanta, Dallas, Montreal, Toronto and London, 1968.

[12] C. S. Smith and M. Knott. Cycle properties of square matrices. *Linear Algebra Appl.*, 258:345–350, 1997.