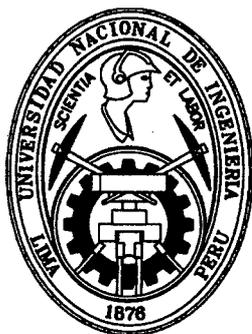


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



Tesis para optar el título profesional de:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TITULADA

**Análisis Asintótico de la Dispersión Acústica
por una Superficie Tipo III**

PRESENTADA POR

John Raul Inga De La Cruz

ASESOR

Prof. William Carlos Echegaray Castillo

LIMA-PERÚ

2013

Digitalizado por:

Consortio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse

CATÁLOGO DE PUBLICACIÓN

Inga De La Cruz, John Raul

Análisis Asintótico de la Dispersión Acústica por una Superficie Tipo III / John Raul Inga De La Cruz.—EPM - FC - UNI, 2013.

64 p.: il.

Tesis (Licenciatura) —Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, 2013.

Asesor: Echegaray Castillo, William Carlos

Tesis: Matemática

Ecuación de Helmholtz, Dispersión de Ondas, Comportamiento Asintótico

A mis padres, Raul Inga y Estela De la Cruz,
a mis hermanos y familiares más próximos.

AGRADECIMIENTOS

Agradesco a Dios, por estar siempre a mi lado en mis caídas, luchas, victorias y derrotas.

A la facultad de Ciencias de la UNI, por ofrecerme la oportunidad de realizar esta Licenciatura.

A mi asesor el profesor William Carlos Echegaray Castillo, por direccionar y auxiliar en la ejecución de mi trabajo.

A los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNI, que de alguna manera contribuyeron en mi formación.

A todos mis amigos, por el incentivo y apoyo.

Índice

RESUMEN	vii
1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Información Básica sobre Dispersión por Superficies Ásperas	1
1.2 La Naturaleza de las Superficies Ásperas	2
1.3 Punto de partida del Trabajo	2
1.4 Presentación y Objetivo del Trabajo	4
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	5
3 LA FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	10
3.1 El dominio Lipschitz	10
3.2 El problema de Dispersión	12
3.3 Existencia y Unicidad del PEDH	14
4 EL MÉTODO DEL CAMPO NULO	20
4.1 Consideraciones previas	20
4.2 Las ecuaciones del campo nulo	22
5 APROXIMACIONES	26
5.1 Aproximación asintótica para la función de Hankel	26
5.2 Aproximación para $Q(\theta)$	27
5.3 Aproximación para $\varphi(\theta)$	29
5.4 Aproximación para u_s	29
5.5 El orden de aproximación de u_s^M	31
6 COMPORTAMIENTO FAR-FIELD	36
6.1 Comportamiento de u_s^M para r muy grande	36
6.2 El patrón de campo distante	38
6.3 La media de la sección transversal de dispersamiento.....	39
7 UNA SUPERFICIE TIPO III	42
7.1 La representación de $R'(\theta)$	44

7.2	La representación de $R(\theta)$	51
8	CONCLUSIONES	56
	APÉNDICE A	58
	BIBLIOGRAFÍA	61

RESUMEN

La dispersión acústica por una superficie continuamente diferenciable pero con tangente fractal, el llamado caso tipo III, primeramente introducido por Jakeman en [27] y [26], ha sido tratado computacionalmente para perturbaciones ásperas de superficies planas e ilimitadas. El presente trabajo analiza teóricamente la dispersión acústica de una perturbación aleatoria áspera de tipo III de un círculo, utilizando el método de campo nulo y aproximaciones asintóticas. Los resultados principales son: una expresión asintótica para la onda dispersada y el patrón de campo distante. Por la falta de artículos y libros tratando este tema, el presente trabajo pretende servir como base para futuros trabajos.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Información Básica sobre Dispersión por Superficies Ásperas

El libro clásico sobre dispersión de onda por superficies ásperas es "The scattering of Electromagnetic waves from rough surfaces" de Beckmann y Spizzichino [6], los resultados obtenidos en ese libro son aún utilizados como base. Beckmann también publicó trabajos relacionados a dispersión de onda por superficies ásperas [2], [3], [4], [5]. En el libro de Bass y Fuks [1], se considera la teoría de Kirchoff y la teoría de perturbaciones, incluyendo efectos complicados tales como superficies "self-shadowing" y escalas múltiples de aspereza. La dispersión múltiple también es considerado utilizando técnicas de ecuaciones integrales. Fortuin [15] hizo un estudio sobre dispersión de onda acústica en la superficie del mar, donde estudió superficies periódicas y aleatorias. Las teorías de perturbación y de Kirchoff son utilizadas y modelos de predicción son comparados con observaciones experimentales de la dispersión de la superficie del mar. Otros trabajos pueden ser encontrados en Horton [18], Shmelev [38], Valenzuela [42] y Ishimaru [19]. Un trabajo específico para ondas electromagnéticas fue hecho por McGinn y Sykes [34]. Trabajos sobre la teoría son dados en Ogilvy [35], [36]. Los métodos descriptivos para las propiedades estadísticas de superficies ásperas aleatorias fueron estudiados en Thomas [40].

La dispersión de onda por superficies ásperas fue estudiado primero por Rayleigh en 1877, que consideró el problema de una onda plana monocromática incidente normalmente en una superficie sinusoidal, [37]. Ese trabajo inició el desenvolvimiento del llamado "criterio de Rayleigh", que sirve para determinar el grado de aspereza (o rugosidad) de una superficie.

1.2 La Naturaleza de las Superficies Ásperas

Lo que se conoce sobre la naturaleza de las superficies ásperas aleatorias es que nunca dos superficies ásperas son idénticas, aunque sea formadas por un proceso bien controlado. Para superficies creadas sobre condiciones menos rigurosas (tal como el mar abierto, paisajes o una superficie quebrada) no es posible anticipar la altura (o forma) de cualquier parte de la superficie así se conozcan las alturas de las partes adyacentes de la superficie y la naturaleza aleatoria es aún más notoria. Así, aquella superficie puede ser considerada como un proceso aleatorio, esto es, "un proceso que no tiene memoria". Para describir tales superficies, son necesarias técnicas estadísticas. Una superficie áspera es usualmente descrita en terminos de desvío con respecto a una "superficie de referencia" suave. La forma y localización de la superficie de referencia son escogidas con buen criterio, de acuerdo con el comportamiento de largo alcance de la superficie. Por ejemplo, la descripción de un cilindro áspero envuelve mediciones de los desvíos de la altura con respecto a una superficie cilíndrica suave, mientras que la altura de la superficie de un mar áspero tendría que ser calculada con respecto a un plano suave. La naturaleza de una superficie áspera es dada principalmente por dos aspectos: primero, la propagación de las alturas alrededor de la superficie de referencia y, segundo, la variación de esas alturas a lo largo de la superficie. Una variedad de distribuciones estadísticas y parámetros pueden ser utilizadas para describir esas propiedades de la superficie. La mas conocida es constituida por las funciones de distribución de la altura de la superficie y de las funciones de autocorrelación de la superficie.

1.3 Punto de partida del Trabajo

Dispersión por objetos fractales han recibido gran interes en los recientes años por investigaciones teóricas y experimentales que envuelven dispersión acústica, eletromagnética, de neutrones, etc. Por lo menos dos trabajos excelentes fueron pu-

blicados, [20] y [46], y un libro de Ogilvy, [36], que también trata este tema, mientras que resultados experimentales son obtenidos por Teixeira [39]. En [20], se hace una revisión de una buena parte de los trabajos de Jaggard y sus asociados, publicados en artículos por Jaggard & Kim [21], [29], [30]; Jaggard & Sun [22], [23], [24], [25] y Kim, Grebel & Jaggard [28]. Pero antes, varias contribuciones fueron dadas por Berry & Blackwell [8] y Berry [7]. En sus trabajos [27] y [26], Jakeman propone la clasificación de superficies en tres tipos:

- (I) Superficie fractal, la cual es continua pero no es diferenciable y tiene espectro de ley de potencia (power-law spectrum), es decir, su espectro de potencia es de la forma $\frac{c}{\omega^p}$ ([14] pg 158, [7] pg 783). Este tipo de superficie genera solamente difracción y efectos de interferencia.
- (II) Superficies variando suavemente, las cuales son diferenciables de todas las ordenes y tienen propiedades espectrales del tipo gaussiano. Tales superficies generan efectos ópticos geométricos asociados a radios o normales en la onda dispersada inicial.
- (III) Clase intermediaria, formada por superficies donde la altura es continua y diferenciable pero la tangente es fractal. El concepto de radio es válido para este modelo, pero en la ausencia de derivadas de orden superior de la superficie, no ocurre catástrofes geométricas en la propagación de las ondas.

Una modificación para (I) fué propuesta con la noción de superficie "fractal" de banda acotada (ver [20]). La superficie tipo (III) y la superficie fractal de banda acotada pueden ser obtenidas a través de una formulación de ecuación integral. El tipo (III) fue analizado por Macaskill en [32] en un intento de establecer la existencia del "enhanced backscattering", no obstante el análisis aún no sea convincente. El único tratamiento razonablemente riguroso de tales problemas del cual se tiene conocimiento es dado en el trabajo de Jaggard and Sun [24].

1.4 Presentación y Objetivo del Trabajo

La discusión tratada en este trabajo es el análisis de la dispersión de una onda incidente, con una frecuencia muy grande, por una superficie acotada del tipo (III). Consideramos que esa superficie acotada tiene frontera Lipschitz, pero su tangente es un fractal. Este trabajo tiene como finalidad obtener una expresión para la aproximación de la onda dispersada, también obtener una expresión para el patrón de campo distante (distante del dispersador u obstáculo, en la literatura es llamado far field pattern), la media de la sección transversal de la dispersión (mean scattering cross-section) para campos distantes del dispersador (scatterer) y un ejemplo de superficie tipo III que satisface las condiciones impuestas en este trabajo.

El trabajo es dividido de la siguiente forma: en el capítulo 2 daremos algunos conceptos básicos que nos permite usarlos en los capítulos siguientes. En el capítulo 3, definimos el dominio (una superficie tipo III), el problema exterior de Dirichlet para la ecuación de Helmholtz, también garantizamos la existencia y unicidad del problema en estudio. En el capítulo 4, obtenemos las ecuaciones de campo nulo, las cuales sirven para obtener una aproximación para $\frac{\partial u_s(y)}{\partial \nu}$, la derivada normal exterior de la onda dispersada en la frontera. En el capítulo 5, utilizamos la aproximación asintótica de la función de Hankel de primera especie para obtener una aproximación para la onda dispersada. En el capítulo 6, analizamos el comportamiento de campo distante de la onda dispersada aproximada, u_s^M , también obtenemos una expresión para el patrón de campo distante y la media de la sección transversal de la dispersión. En el capítulo 7, damos un ejemplo de superficie tipo III. Por último, en el capítulo 8, presentamos las conclusiones.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En el presente capítulo daremos algunos conceptos básicos que nos permite usarlos posteriormente.

Espacios L_p

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no-vacío, $p \in [1, \infty)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y definamos

$$L_p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f(t)|^p dt < \infty\}$$

Este conjunto $L_p(\Omega)$ es un espacio vectorial y está dotado de la norma

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Espacio de Sobolev $W^{m,p}$

Definamos $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \widehat{\mathbb{N}}^n$ es una n -tupla de enteros no negativos $\alpha_i \geq 0$. Para un multi-índice α definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$|\alpha|$ es el orden del multi-índice. Además, si β es un multi-índice y $\alpha \geq \beta$ si y solo si $\alpha_i \geq \beta_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice, entonces definimos

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Sean $m \geq 0$, $p \geq 1$ y Ω un subconjunto de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega), \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq m\},$$

el cual es un espacio vectorial normado equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

que es llamada la norma de Sobolev.

Función Lipschitz y Función continuamente Hölder

Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se llama Lipschitz si existe una constante positiva C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega$$

Observe que esta condición implica la continuidad de f . Ahora, f es continuamente Hölder con exponente γ ($0 < \gamma \leq 1$), si existe una constante $C > 0$ tal que f satisface la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|^\gamma, \quad \forall x, y \in \Omega$$

La notación O y o

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Decimos que $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ si existe $M > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que para todo x con $0 < \|x - x_0\| < \delta$ se tiene que $|f(x)| \leq M|g(x)|$. En otras palabras, si $g(x) \neq 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$. Ejemplos: $2\cos(x) = O(1)$ cuando $x \rightarrow x_0$ para cualquier x_0 , dado que $|2\cos(x)| \leq 2$; $x + 1 = O(x^2)$ cuando $x \rightarrow x_0$ para cualquier $x_0 > 1$, dado que para todo $x > 1$ se tiene $x + 1 \leq 2x^2$.

La expresión $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Ejemplos: $2x = o(x^2)$ cuando $x \rightarrow \infty$, $2x^2 \neq o(x^2)$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\cos(x) = o(\frac{1}{x})$ cuando $x \rightarrow 0$.

Las funciones de Bessel

Las funciones de Bessel son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

donde α es un número real o complejo. El caso mas común es cuando α es un entero n . El número α se denomina orden de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación.

Se define la función de Bessel $J_\alpha(x)$ como

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$, $\text{Re}(z) > 0$ es la función Gamma de Euler, una generalización del factorial para números complejos. Estas funciones cumplen

- Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$ entonces $J_\alpha(x)$ y $J_{-\alpha}(x)$ son linealmente independientes y por tanto una solución general de la ecuación de Bessel puede expresarse como una combinación lineal de ellas.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ entonces se cumple

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

por lo que las dos soluciones dejan de ser linealmente independientes. En este caso, la segunda solución linealmente independiente será una función de Bessel de segunda especie.

Las funciones de Bessel de segunda especie y de orden α , denotadas por $Y_\alpha(x)$, son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel. Para α no enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie $J_\alpha(x)$ mediante la siguiente fórmula:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\text{sen}(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z}$$

En el caso que tengamos un orden entero n , la función es definida como el siguiente límite

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por otro lado, cuando α es entero, $Y_\alpha(x)$ es la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel, dado que el Wronskiano de J_α y Y_α es diferente de cero.

Otra formulación importante de las dos soluciones linealmente

independientes de la ecuación de Bessel, son las funciones de Hankel, $H_\alpha^{(1)}(x)$ y $H_\alpha^{(2)}(x)$, definidas por

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(1)}(x) &= J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) \\ H_\alpha^{(2)}(x) &= J_\alpha(x) - iY_\alpha(x) \end{aligned}$$

donde i es la unidad imaginaria, $H_\alpha^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie de orden α y $H_\alpha^{(2)}$ es la función de Hankel de segunda especie de orden α .

La característica fundamental de las funciones de Hankel, es su comportamiento asintótico para valores grandes del argumento. Poseen la siguiente forma que las determinan unívocamente

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4})} \\ H_\alpha^{(2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

Obtención de la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Esta ecuación se llama ecuación de Helmholtz, en honor al físico alemán Herman Ludwing Ferdinand von Helmholtz por su trabajo pionero en la teoría matemática de la acústica y electromagnetismo. El operador Δ denota el Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

el parámetro k se llama número de onda.

La ecuación de Helmholtz resulta de aplicar la técnica de separación de variables a la ecuación de onda, como veremos a continuación.

Sea la ecuación de onda

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(x, t) \quad (2.1)$$

suponiendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ y reemplazando en (2.1), tenemos

$$X(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t^2} = c^2 T(t) \Delta X(x)$$

de lo cual sigue

$$\frac{1}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} \quad (2.2)$$

Notar que el lado derecho de (2.2) depende solamente de x y que el lado izquierdo depende solamente de t . Luego hacemos

$$\frac{1}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 \quad (2.3)$$

y

$$\frac{\Delta X(x)}{X(x)} = -k^2, \quad (2.4)$$

entonces de la ecuación (2.4) obtenemos la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta X(x) + k^2 X(x) = 0$$

La ecuación (2.4) también puede escribirse como:

$$\Delta X(x) = -k^2 X(x)$$

y como el operador Δ es lineal, se considerarán dos casos:

- a) cuando $-k^2$ es valor propio.
- b) cuando $-k^2$ no es valor propio.

3 LA FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

3.1 El dominio Lipschitz

Las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2 serán representados por x_1 y x_2 . Las coordenadas polares serán representadas por r y ϕ , donde el ángulo polar ϕ es medido con respecto al semi-eje positivo x_1 y están relacionadas por $(x_1, x_2) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$, pero si el punto (x_1, x_2) pertenece a la frontera del dominio Lipschitz, $\partial\Omega$ definido posteriormente en (3.4), será representado en coordenadas polares por θ y $R(\theta)$, (ver Figura 3.1).

Para obtener una perturbación aleatoria áspera del tipo III de un círculo, comenzamos por definir la función

$$F_{\mathbf{Y}} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

teniendo las siguientes características :

- Es una función Lipschitz con respecto a θ .
- Es una función de variable aleatoria en \mathbf{Y} , \mathbf{Y} denota el espacio muestral de la variable o variables aleatorias.
- $F_{\mathbf{Y}}(0) = F_{\mathbf{Y}}(2\pi)$.
- $F'_{\mathbf{Y}}$ es una función fractal, para lo cual $F''_{\mathbf{Y}}$ no existe.

donde, ' denota la derivada con respecto a θ ($' = \frac{d}{d\theta}$) y '' denota la segunda derivada con respecto a θ ($'' = \frac{d^2}{d\theta^2}$).

Observación 1. Haremos un abuso de notación, denotando $F_{\mathbf{Y}}(\theta)$ por $F(\theta)$. □

La region donde trabajaremos es definida, en coordenadas polares, de la siguiente manera:

$$R(\theta) = 1 + \epsilon F(\theta); \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.2)$$

donde:

ϵ ($0 < \epsilon \ll 1$) es elegido de tal forma que $0 < R_0 \leq R(\theta)$,
para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, donde R_0 es una constante (ver Figura 3.1).

Observación 2. Del hecho que la función F es Lipschitz y definida sobre un intervalo compacto, tenemos que F es acotada inferior y superiormente. Así eligiendo un $\epsilon \ll 1$, o un ϵ adecuado como el dado en la proposición 7.2.2, podemos obtener una constante R_0 satisfaciendo la condición anterior, de esta manera tenemos una perturbación aleatoria del círculo unitario. \square

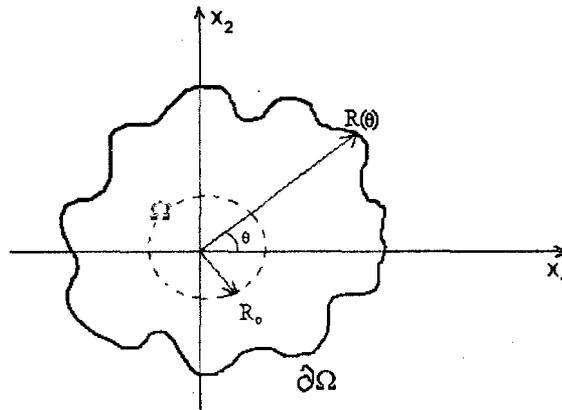


Figura 3.1: Gráfico de la region Ω y de la frontera $\partial\Omega$

Definimos la region Ω por :

$$\Omega = \{(r \cos\theta, r \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r < R(\theta)\} \quad (3.3)$$

tal que la frontera $\partial\Omega$ de Ω es:

$$\partial\Omega = \{(R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (3.4)$$

Trabajamos sobre la condición de que la región Ω es un dominio Lipschitz acotado, para que eso ocurra basta ver que la función $F(\theta)$ sea Lipschitz y como consecuencia

de esto, garantizamos la existencia de $F'(\theta)$ en casi toda parte. Para más detalle sobre la definición de Dominio Lipschitz, vea la definición 3.3.1 o el artículo de G. Verchota [43]. Note que $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ es conexo, $\bar{\Omega}$ denota la cerradura de Ω . Del análisis, tenemos que toda función lipschitz definida en un intervalo compacto es acotado, además la derivada también es limitada casi siempre. Entonces, se define R_1 y R_2 por:

$$(\forall \theta \in [0, 2\pi]) : R(\theta) \leq R_1 ; \quad (3.5)$$

$$(\forall \theta \in I) : |R'(\theta)| \leq R_2 \quad (3.6)$$

donde, $I = \{\theta \in [0, 2\pi] : R'(\theta) \text{ existe}\}$, $\mu([0, 2\pi] \setminus I) = 0$ según Lebesgue.

Observación 3. *Habiendo establecido las condiciones para F y por consiguiente, para R , se tiene que $\partial\Omega$ representa exactamente nuestra superficie aleatoria áspera tipo III.* \square

3.2 El problema de Dispersión

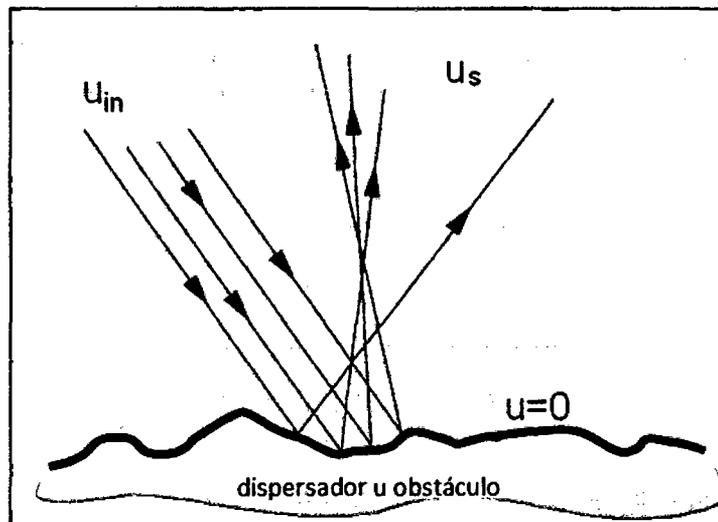


Figura 3.2: Gráfico de la dispersión acústica

De la literatura ([11] pg 38, [36] pg 67), tenemos que la onda total, denotada por u , en la presencia de un obstáculo toma la forma $u = u_{in} + u_s$; onde u_{in} es la onda incidente y u_s es la onda dispersada. Aquí trabajaremos sobre condiciones

acústicas ideales, esto es, sobre las condiciones de Dirichlet. Así $u = 0$ en la frontera, que es lo mismo $u_s = -u_{in}$ en la frontera (ver Figura 3.2).

Una onda plana incidente tiene la siguiente forma:

$$u_{in}(x) = e^{i\kappa \cdot x} \quad (3.7)$$

donde $x, \kappa \in \mathbb{R}^2, i = \sqrt{-1}$, observe que $u_{in} \in L^2(\partial\Omega)$. En coordenadas polares, $\kappa = (k \cos\alpha, k \operatorname{sen}\alpha)$ y $x = (r \cos\phi, r \operatorname{sen}\phi)$, donde $k > 0$ es el número de onda y α es el ángulo polar de κ .

Como:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot x &= \langle (k \cos\alpha, k \operatorname{sen}\alpha), (r \cos\phi, r \operatorname{sen}\phi) \rangle \\ &= kr \cos\phi \cos\alpha + kr \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\alpha \\ &= kr \cos(\phi - \alpha) \end{aligned}$$

entonces, la onda plana incidente en coordenadas polares está dada por:

$$u_{in}(r, \phi) = e^{ikr \cos(\phi - \alpha)} \quad (3.8)$$

Por otro lado, la onda dispersada u_s satisface el Problema Exterior de Dirichlet para la ecuación de Helmholtz, de ahora en adelante denominado PEDH:

$$\Delta u_s(x) + k^2 u_s(x) = 0; \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}; \quad u_s \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}) \quad (3.9)$$

$$u_s(x) = -u_{in}(x); \quad x \in \partial\Omega; \quad u_{in} \in L^2(\partial\Omega) \quad (3.10)$$

$$u_s^*(x) \in L^2(\partial\Omega) \quad (3.11)$$

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_s(x) - iku_s(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right); \quad |x| \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

donde (3.9) es la Ecuación de Helmholtz, (3.10) es nuestra condición de frontera también llamada condición de Dirichlet, (3.12) es la condición de radiación de Sommerfeld en el infinito en \mathbb{R}^2 ($f(x) = o(g(x))$) cuando $x \rightarrow \infty$ si y solamente si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$) y $u_s^*(x) = \sup_{y \in \Gamma^+(x)} |u_s(y)|; x \in \partial\Omega$ es la función maximal no tangencial de u_s donde $\Gamma^+(x)$ es un cono truncado con vértice en x y una componente convexa en $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ (ver Figura 3.3). El espacio lineal $\mathcal{R}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$ es definido por todas las funciones $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$ tales que $u \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$, $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$ y exista una función $g \in L^2(\partial\Omega)$ tal que

$\lim_{y \rightarrow x, y \in \Gamma^+(x)} (\nu(x), \nabla u(y)) = g(x)$ en norma $L^2(\partial\Omega)$, $\nu(x)$ denota el vector exterior normal unitario a $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ en $x \in \partial\Omega$.

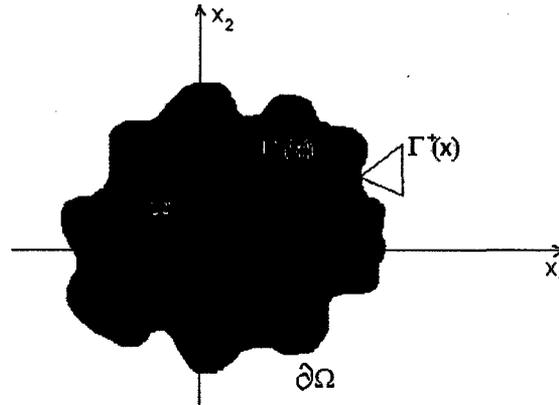


Figura 3.3: Gráfico del cono doblemente truncado con vértice en $x \in \partial\Omega$

La solución fundamental para la ecuación de Helmholtz en \mathbb{R}^2 es ([11], pg 106):

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|); \quad x, y \in \mathbb{R}^2 \quad (3.13)$$

donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie de orden cero.

3.3 Existencia y Unicidad del PEDH

Los teoremas de existencia, unicidad y de representación de Green para el PEDH fueron estudiados primeramente para el caso donde Ω es un dominio C^2 acotado y puede ser encontrado en el libro de Colton y Kress [11] (pg 78-79). En nuestro interés, donde Ω es un dominio Lipschitz acotado puede ser encontrado en el artículo de Chagmei Liu [31]; citaremos, aquí solo los teoremas que necesitamos tal cual se encuentran en el mencionado artículo:

Preliminares

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado, asumimos que $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ es conexo, donde $\bar{\Omega}$ denota la cerradura de Ω . Se denota la frontera de Ω por $\partial\Omega$. Un cilindro $Z(x, r)$ es definido como un cilindro recto, abierto, doblemente truncado y centrado en $x \in \mathbb{R}^n$ con radio igual a r . Una coordenada cilíndrica, $Z = Z(P, r)$, $P \in \partial\Omega$, será definida de la siguiente manera:

- (i) Las bases de Z están a una distancia positiva de $\partial\Omega$.
- (ii) Existe un sistema de coordenadas rectangulares para \mathbb{R}^n , (\mathbf{x}, \mathbf{s}) , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}$, con el \mathbf{s} -eje conteniendo el eje de Z .
- (iii) Existe una función asociada $\psi = \psi_Z : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, esto es, $|\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $C = C_Z < \infty \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$.
- (iv) $Z \cap \Omega = Z \cap \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) : \mathbf{s} > \psi(\mathbf{x})\}$.
- (v) $P = (0, \psi(0))$.

La dupla (Z, ψ) será llamada un par coordenado. Además, definimos $Z^+ = Z \setminus \bar{\Omega}$ y $Z^- = Z \cap \Omega$ y serán llamados cilindro exterior y cilindro interior, respectivamente. Para un número positivo τ , $\tau Z(P, r)$ denota el cilindro $\{x \in \mathbb{R}^n : P + \frac{x-P}{\tau} \in Z\}$, esto es, la dilatación de Z en torno de P por un factor τ .

Un cono es definido como un cono abierto, circular y doblemente truncado con dos componentes convexas no nulas. Si $P \in \partial\Omega$, $\Gamma(P)$ denota un cono con vértice en P , una componente en Ω y la otra en $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. La componente interior a Ω es denotado por $\Gamma^-(P)$ y la componente ~~interior~~ exterior a $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ es denotado por $\Gamma^+(P)$ (ver Figura 3.3, para el caso \mathbb{R}^2).

Asociamos un cono, $\Gamma(P)$, para cada $P \in \partial\Omega$. La familia $\{\Gamma(P) : P \in \partial\Omega\}$ es llamada **regular** si existe un cubrimiento finito de $\partial\Omega$ por coordenadas cilíndricas, definido anteriormente, tal que para cada $(Z(P, r), \psi)$ existen tres conos γ_1, γ_2 y γ_3 cada uno

con vértice en el origen y ejes a lo largo de los ejes de Z tales que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\subset \overline{\gamma_2} \setminus \{0\} \subset \gamma_3 \\ \text{para todo } (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) &= P \in \frac{4}{5}Z \cap \partial\Omega \\ \gamma_1 + P &\subset \Gamma(P) \subset \overline{\Gamma(P)} \setminus \{P\} \subset \gamma_2 + P \\ (\gamma_3 + P)^- &\subset \Omega \cap Z \quad \text{y} \\ (\gamma_3 + P)^+ &\subset Z \setminus \overline{\Omega} \end{aligned}$$

Definición 3.3.1 (Dominio Lipschitz). *Un subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un dominio Lipschitz si para cada $P \in \partial\Omega$ existe un sistema de coordenadas rectangulares, (\mathbf{x}, s) , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, una vecindad $U(P) \equiv U \subset \mathbb{R}^n$ conteniendo P y una función $\psi_P \equiv \psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$(i) \quad |\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})| \leq C_P |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}, C_P < \infty;$$

$$(ii) \quad U \cap \Omega = \{(\mathbf{x}, s) : s > \psi(\mathbf{x})\} \cap U$$

El sistema de coordenadas (\mathbf{x}, s) puede ser tomada como una rotación y traslación del sistema de coordenadas estándar (coordenadas rectangulares) para \mathbb{R}^n .

Observación 4. *Todas las definiciones establecidas anteriormente, en esta sección, pueden ser encontradas en el artículo de G. Verchota [43] y las siguientes definiciones pueden ser encontradas en el artículo de Chagmei Liu [31].* \square

Sea Ω un dominio Lipschitz, se asume que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ es conexo. Fijamos una familia regular de conos $\{\Gamma\}$ y sus coordenadas asociadas y cilindros $\{Z\}$ como definidos anteriormente. Para una función $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, la función maximal no tangencial es denotada por u^* :

$$u^*(P) = \sup_{x \in \Gamma(P)} |u(x)|$$

donde Γ es $\Gamma^+(P)$ o $\Gamma^-(P)$ dependiendo de donde la función u está definida.

Recordemos la solución fundamental

$$G(x - y, k) = \frac{i}{4} \left(\frac{k}{2\pi|x - y|} \right)^{\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}^{(1)}(k|x - y|)$$

de la ecuación de Helmholtz en \mathbb{R}^n donde $H_\omega^{(1)}(z)$ denota la función de Hankel de primera especie de orden ω .

Sea K un operador en $L^2(\partial\Omega)$ definido por:

$$Kf(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \partial\Omega, |y-P| > \epsilon} \frac{\partial G(P-y, k)}{\partial \nu(y)} f(y) dS(y), \quad P \in \partial\Omega \quad (3.14)$$

donde $\nu(y)$ denota el vector exterior normal unitario en y .

El Problema Exterior de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} & (3.15) \\ u(x) &= f(x); \quad x \in \partial\Omega; f \in L^2(\partial\Omega) \\ u^* &\in L^2(\partial\Omega) \\ \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) - iku(x) &= o\left(\frac{1}{|x|}\right); \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

donde la última ecuación de (3.15) es la condición de Sommerfeld en el infinito en \mathbb{R}^3 . Por otro lado, para cualquier dominio U con frontera ∂U Lipschitz, definimos el espacio lineal $\mathcal{R}(U)$ de todas las funciones de variable compleja $u \in C^2(U)$ tales que $u \in H^1(U)$, $\Delta u \in L^2(U)$ y exista una función $g \in L^2(\partial U)$ tal que $\lim_{x \rightarrow P, x \in \Gamma(P)} (\nu(P), \nabla u(x)) = g(P)$ en norma $L^2(\partial U)$, donde $\Gamma(P)$ puede ser $\Gamma^+(P)$ o $\Gamma^-(P)$ dependiendo de donde este definida la función u . Así, si $u, v \in \mathcal{R}(U)$, eso es suficiente para que tenga validez la primera y segunda identidad de Green:

$$\begin{aligned} \int_U u \Delta v dx &= \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_U (\nabla u, \nabla v) dx \\ \int_U (u \Delta v - v \Delta u) dx &= \int_{\partial U} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS \end{aligned}$$

Lema 3.3.1. *El potencial de camada doble*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu(y)} \gamma(y) dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$$

donde $\gamma \in L^2(\partial\Omega)$, es una solución del problema exterior de Dirichlet, (3.15), si

$$\frac{1}{2} \gamma(x) + K\gamma(x) = f(x) \quad \text{para casi todo } x \in \partial\Omega$$

donde el operador K es dado en (3.14).

Teorema 3.3.1. *El Problema Exterior de Dirichlet, (3.15), tiene a lo más una solución.*

Teorema 3.3.2. *El Problema Exterior de Dirichlet, (3.15), tiene solución y es única.*

Demostración. La unicidad viene del teorema 3.3.1. Ahora probaremos que tiene solución. Si k^2 no es un autovalor de Neumann entonces $N(\frac{1}{2}I + K) = \{0\}$. Luego $N(I + (\frac{1}{2}I + K_0)^{-1}H_k) = \{0\}$ (donde K_0 y H_k están definidos en el anexo) entonces para cualquier $f \in L^2(\partial\Omega)$ y $f \neq 0$ la ecuación

$$\left(\frac{1}{2}I + K\right)\psi = f$$

tiene solución y es única, además

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu} \psi(y) d\sigma$$

es la solución para (3.15).

Si k^2 es un autovalor de Neumann, buscamos una solución de (3.15) de la forma

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu} \psi(y) d\sigma - \sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j u_j(x), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

donde $u_j, j = 1, 2, \dots, m_N$ son definidos por (A.1) del teorema A.0.1 (que se encuentra en el anexo). De acuerdo a la observación después del teorema A.0.1 (que se encuentra en el anexo), podemos asumir que $u_j^+|_{\partial\Omega}$ sea real. Utilizando (A.3), vemos que u resuelve el problema exterior de Dirichlet provisto que ψ y los coeficientes $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, m_N$ son escogidos tal que

$$\left(\frac{1}{2}I + K\right)\psi = f - \sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \psi_j \quad (3.16)$$

por el teorema A.0.1 podemos determinar los coeficientes para ser la única solución del sistema lineal

$$\sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \langle \psi_j, \phi_l \rangle = \langle f, \phi_l \rangle, l = 1, 2, \dots, m_N$$

entonces por la segunda parte de la alternativa de Fredholm, podemos concluir que la ecuación integral (3.16) tiene una solución, con eso se termina la prueba. ■

Observación 5. *Notar que la solución para la ecuación integral 3.16 no es única cuando k^2 es un autovalor de Neumann pero la solución del problema exterior de Dirichlet es única.* \square

Observación 6. *Los Teoremas 3.3.1 y 3.3.2 y el Lema 3.3.1 fueron demostrados para \mathbb{R}^3 en [31], pero al final del artículo menciona que esos resultados también son válidos para \mathbb{R}^2 haciendo algunas consideraciones. Es con esas consideraciones que nosotros estamos trabajando y así está garantizada la existencia y unicidad de la solución de nuestro problema PEDH, (3.9)-(3.12).* \square

Teorema 3.3.3. *Sea $u \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ una solución de la ecuación de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

satisfaziendo la condición de radiación de Sommerfeld

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) - iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right); \quad |x| \rightarrow \infty$$

uniformemente para todas las direcciones $\frac{x}{|x|}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} G(x-y, k) \right) ds(y) &= 0, \quad x \in \Omega \\ \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} G(x-y, k) \right) ds(y) &= u(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{aligned}$$

Observación 7. *El teorema 3.3.3 fue demostrado para \mathbb{R}^3 en el libro [11] (pg. 70), pero también menciona que el resultado es válido para \mathbb{R}^2 .* \square

Finalmente, utilizando la condición de frontera (3.10) y definiendo :

$$\varphi(y) = \frac{\partial u_s(y)}{\partial \nu} \tag{3.17}$$

para nuestro problema PEDH el teorema de representación queda:

$$\int_{\partial\Omega} \left(-u_{in}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \varphi(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.18}$$

$$\int_{\partial\Omega} \left(-u_{in}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \varphi(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = u_s(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \tag{3.19}$$

4 EL MÉTODO DEL CAMPO NULO

El método del campo nulo, primeramente obtenido por Waterman [44] y [45], aprovecha el hecho de que el campo (acústico o eletromagnético) se anula en la frontera del dispersador (u obstáculo), es decir, $u = 0$ en la frontera (ver figura 3.2), y a través de expansiones se establece un conjunto infinito de ecuaciones llamadas "ecuaciones de campo nulo"(como puede ver en [44] y [45]).

4.1 Consideraciones previas

- Trabajamos con coordenadas polares, y para realizar operaciones vectoriales en esas coordenadas, consideramos los siguientes vectores ortonormales: radial (\vec{r}) y tangencial (\vec{t}), definidos por:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sen\theta \\ \vec{t} &= -\vec{i}\sen\theta + \vec{j}\cos\theta\end{aligned}$$

donde, \vec{i} y \vec{j} son los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2 , X_1 y X_2 respectivamente, y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- En esas coordenadas, el operador gradiente tiene la siguiente forma:

$$\nabla = \vec{r}\frac{\partial}{\partial R} + \vec{t}\frac{1}{R(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} \quad (4.1)$$

- El vector tangente unitario a $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ en $\partial\Omega$ es:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}R'(\theta) + \vec{t}R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}}$$

- Luego, el vector exterior normal unitario a $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ en $\partial\Omega$ es:

$$\vec{\nu} = \frac{-\vec{r}R(\theta) + \vec{t}R'(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}}$$

Definimos:

$$\beta = \beta(\theta) = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)} \quad (4.2)$$

- La derivada en la dirección normal a $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ en $\partial\Omega$ es:

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \nabla \cdot \vec{\nu} = \beta^{-1} \left(-R(\theta) \frac{\partial}{\partial R} + \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \quad (4.3)$$

- Para $x = (r \cos\phi, r \sin\phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$ y $y = (R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta) \in \partial\Omega$, tenemos del cálculo:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(r \cos\phi, r \sin\phi) - (R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta)| \\ &= \sqrt{(r \cos\phi - R(\theta) \cos\theta)^2 + (r \sin\phi - R(\theta) \sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + R^2(\theta) - 2rR(\theta) \cos(\theta - \phi)} \end{aligned}$$

Definimos:

$$w = |x - y| = \sqrt{r^2 + R^2(\theta) - 2rR(\theta) \cos(\theta - \phi)} \quad (4.4)$$

- Por otro lado, escogiendo $x = (r \cos\phi, r \sin\phi) \in \Omega$ cualquiera tal que $0 < r < R_0$ y $y = (R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta) \in \partial\Omega$, recordando la definición (3.2) de $R(\theta)$, tenemos que $r < R(\theta)$ para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (ver Figura 4.1). Entonces utilizando la fórmula de adición de Gegenbauer ([33], pg 107; [9], pg 196), tenemos la siguiente expansión:

$$H_0^{(1)}(kw) = J_0(kr)H_0^{(1)}(kR(\theta)) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr)H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi))$$

donde $H_m^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie de orden m y J_m es la función de Bessel de primera especie de orden m . De esta manera, tenemos una expansión para la solución fundamental de Helmholtz, (3.13), y también para su derivada normal, (4.3) :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{i}{4} J_0(kr)H_0^{(1)}(kR(\theta)) \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr)H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} &= \frac{i}{4} J_0(kr) \frac{\partial}{\partial\nu} \left[H_0^{(1)}(kR(\theta)) \right] \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \frac{\partial}{\partial\nu} \left[H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi)) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

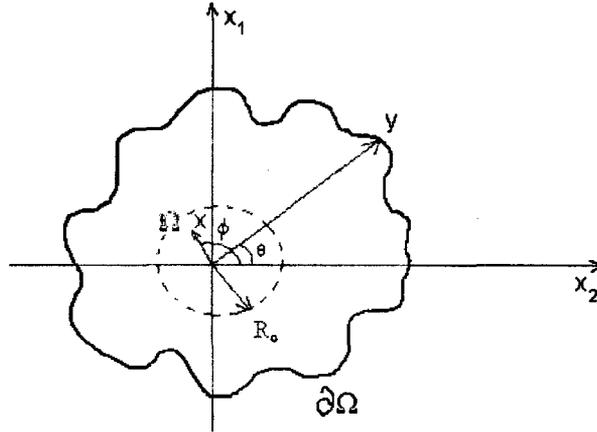


Figura 4.1: Gráfico de la variable $x \in \Omega$ y la variable $y \in \partial\Omega$

4.2 Las ecuaciones del campo nulo

Observamos que un resultado de Fabes, Kenig y Verchota [13] sobre el problema de Stokes también puede ser establecido en el caso de la ecuación de Helmholtz, vía técnicas similares que no son discutidas aquí (vea apéndice de [10] y [12]). De hecho, si u_s es la solución del PEDH (3.9)-(3.12), tenemos que :

$$\left\| \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(\partial\Omega) \|u_{in}\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)} \quad (4.7)$$

donde, $C(\partial\Omega)$ es una constante que depende de la frontera de Ω . Los espacios usuales de Lebesgue y Sobolev son L^2 y $W^{1,2}$, respectivamente. Evidentemente, teniendo la existencia de solución y esta estimativa, tenemos que las integrales en (3.18) están bien definidas, así están garantizadas las ecuaciones del campo nulo.

Observación 8. *Notar que, de la definición de u_{in} , dada en (3.7), se tiene que $\|u_{in}\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)} = O(k)$. Entonces utilizando (3.17) en (4.7), se obtiene:*

$$\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(\partial\Omega)O(k) \quad (4.8)$$

donde $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \rightarrow \infty$ si y solamente si $\exists M > 0, \exists x_0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x > x_0$ □

Por otro lado, para la obtención de las ecuaciones del campo nulo, comenzamos utilizando (3.18). Así, tenemos:

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y) = - \int_{\partial\Omega} u_{in}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y); \quad x \in \Omega$$

Utilizamos las ecuaciones (4.5) y (4.6), recordamos que el diferencial de arco en coordenadas polares es $ds(y) = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)} d\theta = \beta d\theta$ y definimos

$$u_{in}(\theta) = u_{in}(R(\theta), \theta) = e^{ikR(\theta) \cos(\theta - \alpha)} \quad (4.9)$$

$$\varphi(\theta) = \varphi(R(\theta), \theta) \quad (4.10)$$

donde $u_{in}(\theta)$ y $\varphi(\theta)$ son las respectivas transformaciones en coordenadas polares de $u_{in}(y)$ y $\varphi(y)$, (3.8) y (3.17) respectivamente, para $y \in \partial\Omega$, es decir

$$y = (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta).$$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{iJ_0(kr)}{4} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_0^{(1)}(kR(\theta)) \beta d\theta + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi)) \beta d\theta \\ &= - \frac{iJ_0(kr)}{4} \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_0^{(1)}(kR(\theta))] \beta d\theta + \\ & \quad - \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi))] \beta d\theta \end{aligned}$$

Del hecho que los $\{J_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ son ortogonales, tenemos:

$$(a) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_0^{(1)}(kR(\theta)) \beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_0^{(1)}(kR(\theta))] \beta d\theta$$

$$(b) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi)) \beta d\theta = \\ - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi))] \beta d\theta \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Luego, utilizando la identidad trigonométrica $\cos(m(\theta - \phi)) = \cos(m\theta) \cos(m\phi) + \sin(\theta) \sin(m\phi)$ en la ecuación (b), tenemos:

$$\begin{aligned} & \cos(m\phi) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m\theta) \beta d\theta + \sin(m\phi) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \sin(m\theta) \beta d\theta \\ &= - \cos(m\phi) \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m\theta)] \beta d\theta + \end{aligned}$$

$$-\operatorname{sen}(m\phi) \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \operatorname{sen}(m\theta)] \beta d\theta \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

De manera análoga, utilizando el hecho de que $\{\operatorname{sen}(mz), \operatorname{cos}(mz)\}_{m=1}^{\infty}$ son ortogonales, tenemos:

$$(b_1) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \operatorname{cos}(m\theta) \beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \operatorname{cos}(m\theta)] \beta d\theta$$

$$\forall m \in \mathbb{N}$$

$$(b_2) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \operatorname{sen}(m\theta) \beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \operatorname{sen}(m\theta)] \beta d\theta$$

$$\forall m \in \mathbb{N}$$

Luego, haciendo $(b_1) \pm i(b_2)$ para un mismo m y utilizando $e^{\pm im\theta} = \operatorname{cos}(m\theta) \pm i \operatorname{sen}(m\theta)$, obtenemos las así llamadas "Ecuaciones de campo nulo":

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] \beta d\theta; \quad m \in \mathbb{Z} \quad (4.11)$$

teniendo en cuenta la ecuación (a) para el caso $m = 0$.

Por otro lado, utilizando (4.3) y recordando la identidad ([33], pg 67):

$$\frac{d}{dz} H_m^{(1)}(z) = \frac{m}{z} H_m^{(1)}(z) - H_{m+1}^{(1)}(z); \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (4.12)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] \beta d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \left[-R(\theta) \frac{\partial}{\partial R} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] + \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] \right] \beta^{-1} \beta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \left[R(\theta) \left(\frac{m}{kR(\theta)} H_m^{(1)}(kR(\theta)) - H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right) k e^{im\theta} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \left(e^{im\theta} \frac{d}{d\theta} [H_m^{(1)}(kR(\theta))] + im e^{im\theta} H_m^{(1)}(kR(\theta)) \right) \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[m H_m^{(1)}(kR(\theta)) - k R(\theta) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) - im \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} H_m^{(1)}(kR(\theta)) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \left(\frac{m}{kR(\theta)} H_m^{(1)}(kR(\theta)) - H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right) k R'(\theta) \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[m \left(1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) H_m^{(1)}(kR(\theta)) + \right. \\
&\quad \left. k \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right] d\theta \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Utilizando (4.13) y (4.11), tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta &= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[m \left(1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) H_m^{(1)}(kR(\theta)) + \right. \\
&\quad \left. k \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right] d\theta \\
&\quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

5 APROXIMACIONES

El propósito de esta sección es obtener una aproximación para u_s . Para eso necesitamos de otras aproximaciones.

5.1 Aproximación asintótica para la función de Hankel

- La aproximación asintótica para la función de Hankel de primera especie es dada por ([33] pg 139; [11] pg 107):

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)$$

donde $\nu \in \mathbb{R}$ es fijo y $z \in \mathbb{R}$ es "muy grande" (con lo cual suponemos que $|\nu| \ll |z|$).

- Para nuestros propósitos necesitamos suponer que $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ y del hecho que $0 < R_0 \leq R(\theta) \leq R_1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenemos :

$$H_m^{(1)}(kR(\theta)) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad (5.1)$$

$\forall m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm M\}$.

- Por otro lado, para $x = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ y $y = (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) \in \partial\Omega$, además suponiendo que $2R_1 \leq r$ y $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$, tenemos:

$$\frac{M}{k} \ll R_0 \leq R(\theta) \leq R_1 \leq r - R_1 \leq r - R(\theta) \leq w \leq r + R(\theta) \leq r + R_1 \quad (5.2)$$

así:

$$H_m^{(1)}(kw) = \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad \forall m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm M\} \quad (5.3)$$

5.2 Aproximación para $Q(\theta)$

Definimos :

$$Q(\theta) = \varphi(\theta) \frac{e^{ikR(\theta)} \beta}{\sqrt{R(\theta)}} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5.4)$$

se busca una aproximación de $Q(\theta)$, para $M \in \mathbb{N}$ (donde $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$), de la forma :

$$Q_M(\theta) = \sum_{m=-M}^M C_m e^{-im\theta} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5.5)$$

donde

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\theta) e^{im\theta} d\theta \quad (5.6)$$

también definimos

$$D_m = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \quad (5.7)$$

Luego, reemplazando (5.1) para el lado izquierdo de (4.14) y utilizando (5.6) y (5.7), tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta &\approx \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} e^{im\theta} \beta d\theta \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{e^{ikR(\theta)} e^{im\theta}}{\sqrt{R(\theta)}} \beta d\theta \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \int_0^{2\pi} Q(\theta) e^{im\theta} d\theta \\ &= 2\pi D_m C_m \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta \approx 2\pi D_m C_m \quad (5.8)$$

Utilizando (4.14), (5.1) y (5.8), tenemos:

$$\begin{aligned} 2\pi D_m C_m &\approx \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[m \left(1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) H_m^{(1)}(kR(\theta)) + \right. \\ &\quad \left. k \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[m \left(1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + \right. \\
&\quad \left. k \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - (m+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[m \left(1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) + \right. \\
&\quad \left. - ik \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \right] d\theta \\
&= D_m \int_0^{2\pi} \frac{u_{in}(\theta) e^{i(m\theta + kR(\theta))}}{\sqrt{R(\theta)}} \left[m \left(1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) + \right. \\
&\quad \left. - ik \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \right] d\theta
\end{aligned}$$

Simplificando y utilizando (4.9), tenemos:

$$C_m \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(kR(\theta) \cos(\theta - \alpha) + m\theta + kR(\theta))}}{\sqrt{R(\theta)}} \left[m \left(1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) + \right. \\
\left. - ik \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \right] d\theta$$

Utilizando nuevamente el hecho de que $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$, $m \leq M$ y las expresiones $\left| 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right|$ y $\left| \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right|$ son acotadas, entonces la contribución principal de C_m es:

$$C_m \approx -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta)[\cos(\theta - \alpha) + 1]}}{\sqrt{R(\theta)}} \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) e^{im\theta} d\theta; \forall m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm M\} \quad (5.9)$$

Luego, recordando la definición del núcleo de Dirichlet (ver Titchmarsh [41], pg 402), denotado por D_M , es dado por:

$$D_M(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^M \cos(l\theta) = \begin{cases} \frac{\text{sen}((M + \frac{1}{2})\theta)}{2\text{sen}(\frac{\theta}{2})}; & \theta \neq 2\pi k \\ M + \frac{1}{2}; & \theta = 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5.10)$$

Y definiendo :

$$P(\theta) = \frac{e^{ikR(\theta)[\cos(\theta - \alpha) + 1]}}{\sqrt{R(\theta)}} \left(\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \quad (5.11)$$

sigue :

$$\begin{aligned}
Q_M(\theta) &= \sum_{m=-M}^M C_m e^{-im\theta} \\
&\approx \sum_{m=-M}^M \left[-\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) e^{im\hat{\theta}} d\hat{\theta} \right] e^{-im\theta} \\
&= -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) \sum_{m=-M}^M e^{im(\hat{\theta}-\theta)} d\hat{\theta} \\
&= -\frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta}-\theta) d\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

5.3 Aproximación para $\varphi(\theta)$

De la definición de Q , (5.4), tenemos:

$$\varphi(\theta) = e^{-ikR(\theta)} \sqrt{R(\theta)} Q(\theta) \beta^{-1}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{5.13}$$

y de la aproximación Q_M , (5.12), tenemos una aproximación para φ , dada por:

$$\varphi_M(\theta) = e^{-ikR(\theta)} \sqrt{R(\theta)} Q_M(\theta) \beta^{-1}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{5.14}$$

5.4 Aproximación para u_s

Cálculos previos

En esta subsección $x = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, $y = (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) \in \partial\Omega$, $2R_1 \leq r$ y $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$, como en (5.3).

(i) Recordando (4.3), (4.4) y (4.12), se sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0^{(1)}(kw)}{\partial \nu(y)} &= -\beta^{-1} \left[R(\theta) \frac{\partial}{\partial R} H_0^{(1)}(kw) - \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_0^{(1)}(kw) \right] \\
&= -\beta^{-1} \left[R(\theta) [-H_1^{(1)}(kw)] \frac{k}{w} [R(\theta) - r \cos(\theta - \phi)] + \right.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{R'(\theta)}{R(\theta)}[-H_1^{(1)}(kw)]\frac{k}{w}[R(\theta)R'(\theta) - r(R'(\theta)\cos(\theta - \phi) + \\
& \qquad \qquad \qquad - R(\theta)\sin(\theta - \phi))] \\
& = -\frac{\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)}{w}[-R^2(\theta) + rR(\theta)\cos(\theta - \phi) + R'^2(\theta) + \\
& \qquad \qquad \qquad - r[\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)}\cos(\theta - \phi) - R'(\theta)\sin(\theta - \phi)]] \\
& = -\frac{\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)}{w}[R'^2(\theta) - R^2(\theta) + \\
& \qquad \qquad \qquad r[R(\theta)\cos(\theta - \phi) - \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)}\cos(\theta - \phi) + R'(\theta)\sin(\theta - \phi)]]
\end{aligned}$$

Definiendo:

$$A(r, \phi, \theta) = R'^2(\theta) - R^2(\theta) + r \left[R(\theta)\cos(\theta - \phi) - \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)}\cos(\theta - \phi) + R'(\theta)\sin(\theta - \phi) \right] \quad (5.16)$$

Se tiene:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} = -\frac{i\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)A(r, \phi, \theta)}{4w} \quad (5.17)$$

(ii) Utilizando (5.17), (5.3), (4.9) y definiendo

$$d = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = -i \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (5.18)$$

tenemos :

$$\begin{aligned}
u_{in}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu} & = -u_{in}(\theta) \frac{i\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)A(r, \phi, \theta)}{4w} \\
& = -\frac{ik}{4} u_{in}(\theta) H_1^{(1)}(kw) \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \beta^{-1} \\
& \approx -\frac{ik}{4} u_{in}(\theta) \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \beta^{-1} \\
& = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{k} u_{in}(\theta) e^{ikw} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} \beta^{-1} \\
& = -d \frac{\sqrt{k} e^{ik(R(\theta)\cos(\theta - \alpha) + w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} \beta^{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } u_{in}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu} \approx -d \frac{\sqrt{k} e^{ik(R(\theta)\cos(\theta - \alpha) + w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} \beta^{-1} \quad (5.19)$$

(iii) Por otro lado, utilizando (3.13), (5.14) y (5.3), tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi(y)\Phi(x, y) &= \varphi(y)\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kw) \\
&\approx \sqrt{R(\theta)}e^{-ikR(\theta)}Q_M(\theta)\beta^{-1}\frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi kw}}e^{i(kw-\frac{\pi}{4})} \\
&= i\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{k}\sqrt{w}}\beta^{-1} \\
&= id\frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{k}\sqrt{w}}\beta^{-1} \\
\text{Así, } \varphi(y)\Phi(x, y) &\approx id\frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{k}\sqrt{w}}\beta^{-1} \tag{5.20}
\end{aligned}$$

con $Q_M(\theta)$ definido en (5.12)

La Aproximación para u_s

Recordando (3.19)

$$u_s(x) = -\int_{\partial\Omega} u_{in}(y)\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)}ds(y) - \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$$

y utilizando (5.19) y (5.20), tenemos una aproximación para u_s , denotada por u_s^M , dada por:

$$\begin{aligned}
u_s^M(r, \phi) &= d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta)\cos(\theta-\alpha)+w)}A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}}d\theta \\
&\quad - i\frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{w}}d\theta \tag{5.21}
\end{aligned}$$

para todo $x = (r\cos\phi, r\sen\phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ tal que $r \geq 2R_1$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Además, $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$.

5.5 El orden de aproximación de u_s^M

Recordando que $y \in \partial\Omega$ y $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, entonces $y = (R(\theta)\cos\theta, R(\theta)\sen\theta)$ y $x = (r\cos\phi, r\sen\phi)$ son sus respectivas transformaciones en coordenadas polares. Luego utilizando (4.9) y (5.17), sigue :

$$u_{in}(y)\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} = -\frac{ik e^{ikR(\theta)\cos(\theta-\alpha)}H_1^{(1)}(kw)A(r, \phi, \theta)\beta^{-1}}{4w} \tag{5.22}$$

Utilizando (4.10), (3.13) y (5.13), sigue :

$$\varphi(y)\Phi(x, y) = \frac{i}{4}\sqrt{R(\theta)}Q(\theta)H_0^{(1)}(kw)e^{-ikR(\theta)}\beta^{-1} \quad (5.23)$$

Recordando (3.19) y $ds(y) = \beta d\theta$, donde $\beta = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}$. Tenemos u_s en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} u_s(r, \phi) &= \frac{ik}{4} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta)\cos(\theta-\alpha)} H_1^{(1)}(kw) A(r, \phi, \theta)}{w} d\theta \\ &\quad - \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} Q(\theta) H_0^{(1)}(kw) e^{-ikR(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (5.24)$$

Lema 5.5.1. Si $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in I$ y $r \geq 2R_1$. Entonces $\left| \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \right| \leq R_3$. Donde R_3 es una constante que no depende de r, ϕ ni θ .

Demostración. Recordando (3.2), (3.5) y (3.6), tenemos:

$$0 < R_0 \leq R(\theta) \leq R_1, \forall \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } |R'(\theta)| \leq R_2, \forall \theta \in I.$$

Utilizando (5.2), sigue :

$$R_1 \leq r - R_1 \leq w \quad (5.25)$$

$$\frac{r}{w} \leq 1 + \frac{R_1}{w} \leq 2 \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{w} \leq \frac{1}{R_1} \quad (5.27)$$

Así:

$$\begin{aligned} \left| \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \right| &= \left| \frac{R'^2(\theta) - R^2(\theta)}{w} + \frac{r}{w} \left[R(\theta) \cos(\theta - \phi) - \frac{R^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. R'(\theta) \operatorname{sen}(\theta - \phi) \right] \right| \\ &\leq \frac{|R'^2(\theta)| + |R^2(\theta)|}{|w|} + \left| \frac{r}{w} \right| \left[|R(\theta)| + \frac{|R^2(\theta)|}{|R(\theta)|} + |R'(\theta)| \right] \\ &\leq \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1} + 2 \left[R_1 + \frac{R_2^2}{R_0} + R_2 \right] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\left| \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \right| \leq R_3 \quad ; \forall r \geq 2R_1; \forall \phi \in [0, 2\pi]; \forall \theta \in I \quad (5.28)$$

$$\text{donde } R_3 = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1} + 2 \left[R_1 + \frac{R_2^2}{R_0} + R_2 \right] \quad \blacksquare$$

Lema 5.5.2. Sea $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k; 2R_1 \leq r$. Entonces

$$\left| \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kw) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right| \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Demostración. Utilizando (5.3), sigue:

$$\begin{aligned} H_1^{(1)}(kw) &= \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= -ie^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikw}}{\sqrt{kw}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= -i4d \frac{e^{ikw} \sqrt{k}}{k\sqrt{w}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Utilizando (5.27), sigue:

$$\begin{aligned} \left| \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kw) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right| &= \left| d \frac{e^{ikw} \sqrt{k}}{\sqrt{w}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right| \\ &= \left| d \frac{e^{ikw} \sqrt{k}}{\sqrt{w}} O\left(\frac{1}{k}\right) \right| \\ &\approx \frac{|d|\sqrt{k}}{\sqrt{R_1}} O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\approx O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \end{aligned}$$

■

Lema 5.5.3. Si $\theta \in I$. Entonces la función $Q(\theta)$, definida en (5.4), es acotada.

Demostración. Recordando (3.2), (3.5), (3.6) y (4.2), tenemos: $0 < R_0 \leq R(\theta) \leq R_1, \forall \theta \in [0, 2\pi]; |R'(\theta)| \leq R_2, \forall \theta \in I$ y $\beta = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}$. Así, utilizando (4.8), (5.4) y si $\theta \in I$, sigue:

$$\begin{aligned} \|Q(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &= \left\| \varphi(\theta) \frac{e^{ikR(\theta)} \beta}{\sqrt{R(\theta)}} \right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ &\leq \|\varphi(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}{\|\sqrt{R(\theta)}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}} \\ &\leq C(\partial\Omega) O(k) \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{\sqrt{R_0}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Con lo cual tenemos el resultado. Notamos que, al utilizar el criterio de equivalencia de normas entre $\|\cdot\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)}$, la constante $C(\partial\Omega)$, utilizada arriba, no necesariamente es la misma que en (4.8). ■

Lema 5.5.4. Sea $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$; $2R_1 \leq r$. Entonces

$$\left| \frac{1}{4}Q(\theta)H_0^{(1)}(kw) - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right| \approx o_M(\sqrt{k})$$

Demostración. Utilizando (5.3)

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(kw) &= \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikw}}{\sqrt{kw}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= 4d \frac{e^{ikw}}{\sqrt{kw}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ademas, de (5.30) y de la teoría de series de Fourier tenemos $|Q(\theta) - Q_M(\theta)| \approx o_M(k)$ y utilizando el lema 5.5.3, sigue:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4}Q(\theta)H_0^{(1)}(kw) - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right| &= \left| \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right| \\ &\leq \frac{|d|}{\sqrt{kw}} |Q(\theta) - Q_M(\theta)| + \frac{|d||Q(\theta)|}{\sqrt{kw}} O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\leq \frac{|d|}{\sqrt{kw}} |Q(\theta) - Q_M(\theta)| + \\ &\quad \frac{|d|C(\partial\Omega)O(k)\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{\sqrt{kw}\sqrt{R_0}} O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\approx o_M(\sqrt{k}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &\approx o_M(\sqrt{k}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

recordando que $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$. ■

Proposición 5.5.1. Sea $2R_1 \leq r$; $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$. Entonces

$$|u_s(r, \phi) - u_s^M(r, \phi)| \approx o_M(\sqrt{k})$$

Demostración.

Utilizando (5.24), (5.21), Lema 5.5.1, Lema 5.5.2 y Lema 5.5.4, tenemos :

$$\begin{aligned}
|u_s(r, \phi) - u_s^M(r, \phi)| &= \left| \frac{ik}{4} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta) \cos(\theta-\alpha)} H_1^{(1)}(kw) A(r, \phi, \theta)}{w} d\theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} Q(\theta) H_0^{(1)}(kw) e^{-ikR(\theta)} d\theta \right. \\
&\quad \left. - d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta) \cos(\theta-\alpha)+w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} d\theta \right. \\
&\quad \left. + i \frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)} Q_M(\theta) e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{w}} d\theta \right| \\
&\leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta) \cos(\theta-\alpha)} A(r, \phi, \theta)}{w} \left[\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kw) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right] d\theta \right| \\
&\quad + \left| \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{-ikR(\theta)} \left[\frac{1}{4} Q(\theta) H_0^{(1)}(kw) + \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta) e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right] d\theta \right| \\
&\approx \int_0^{2\pi} R_3 O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) d\theta + \int_0^{2\pi} \sqrt{R_1} o_M(\sqrt{k}) d\theta \\
&\approx O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + o_M(\sqrt{k}) \\
&\approx o_M(\sqrt{k})
\end{aligned}$$

recordando que $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ y $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ■

6 COMPORTAMIENTO FAR-FIELD

En este capítulo, haremos un análisis de la onda dispersada aproximada, u_s^M , para r "muy grande", esto es, un análisis para campos muy distantes del dispersador (u obstáculo), de ahora en adelante llamado "campo distante".

6.1 Comportamiento de u_s^M para r muy grande

Recordando (5.2), tenemos las siguientes relaciones:

$$0 \leq \frac{M}{k} \ll R_0 \leq R(\theta) \leq R_1 < 2R_1 \quad (6.1)$$

Pero ahora trabajaremos con r "muy grande". Así $r \gg r_0$, donde:

$$r_0 = \max\{2R_1, k, 4R_1^2\} \quad (6.2)$$

recordando que $M \ll k$; $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sigue que $1 \ll r_0$.

Lema 6.1.1. *Sea $r_0 \ll r$, entonces $w \approx r$.*

Demostración. Dado que $r_0 \ll r$ y utilizando (6.1), sigue:

$$\frac{R^2(\theta)}{r^2} \ll \frac{R(\theta)}{r} \ll 1 \quad (6.3)$$

$$\left| \frac{2R(\theta)}{r} \cos(\theta - \phi) \right| \leq \frac{2R_1}{r} \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \ll 1 \quad (6.4)$$

Por otro lado, recordando la definición de w , (4.4), podemos escribir:

$$w = r \sqrt{1 + \frac{R^2(\theta)}{r^2} - \frac{2R(\theta)}{r} \cos(\theta - \phi)}$$

con lo cual sigue el resultado. ■

Lema 6.1.2. *Sea $r_0 \ll r$, entonces:*

$$\frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} \ll \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} \ll 1 \quad (6.5)$$

$$\frac{R(\theta)}{r} \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \ll 1 \quad (6.6)$$

Demostración. La relación (6.5) sigue del hecho de que $k \ll r$ y $1 \ll k$. Por otro lado, dado que $4R_1^2 \ll r$, $1 \ll r$ y utilizando (6.1), sigue:

$$\frac{R(\theta)}{r} < \frac{2R_1}{r} \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \ll 1$$

■

Ahora analizamos u_s^M . Sea $r_0 \ll r$ y utilizando Lema 6.1.1 en (5.21), tenemos:

$$\begin{aligned} u_s^M(r, \phi) &\approx d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta)\cos(\theta-\alpha)+r)}}{r\sqrt{r}} A(r, \phi, \theta) d\theta \\ &\quad - i \frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)} e^{ik(r-R(\theta))}}{\sqrt{r}} Q_M(\theta) d\theta \\ &= d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} \int_0^{2\pi} e^{ikr\left(\frac{R(\theta)\cos(\theta-\alpha)}{r}+1\right)} A(r, \phi, \theta) d\theta \\ &\quad - i \frac{d}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{ikr\left(1-\frac{R(\theta)}{r}\right)} Q_M(\theta) d\theta \end{aligned}$$

utilizando (6.4) y (6.6)

$$\approx d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} \int_0^{2\pi} e^{ikr} A(r, \phi, \theta) d\theta - i \frac{d}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{ikr} Q_M(\theta) d\theta$$

utilizando (5.16) y (5.12)

$$\begin{aligned} &= d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} [R'^2(\theta) - R^2(\theta)] d\theta + \\ &\quad d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \left[\left(R(\theta) - \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \right) \cos(\theta - \phi) + R'(\theta) \operatorname{sen}(\theta - \phi) \right] d\theta + \\ &\quad - i \frac{d}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{ikr} \left(-\frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\hat{\theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

Utilizando $\int_0^{2\pi} R'(\theta) \operatorname{sen}(\theta - \phi) d\theta = -\int_0^{2\pi} R(\theta) \cos(\theta - \phi) d\theta$, sigue :

$$\begin{aligned} u_s^M(r, \phi) &\approx d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} [R'^2(\theta) - R^2(\theta)] d\theta - d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \\ &\quad - \frac{d\sqrt{k}}{\pi\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta} \end{aligned}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} [R'^2(\theta) - R^2(\theta)] d\theta \\
 L_2 &= -d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \\
 L_3 &= -\frac{d\sqrt{k}}{\pi\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta}
 \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
 L_1 &\approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}}\right) \\
 L_2 &\approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}}\right) \\
 L_3 &\approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}}\right)
 \end{aligned}$$

Luego, utilizando el hecho de que $L_1 \approx 0$, por (6.5), en comparación con los otros dos, sigue:

$$\begin{aligned}
 u_s^M(r, \phi) &\approx -d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \\
 &\quad - \frac{d\sqrt{k}}{\pi\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

para $r_0 \ll r$; $\forall \phi \in [0, 2\pi]$.

6.2 El patrón de campo distante

El comportamiento de campo distante de u_s (dado en [11], pg 226), es:

$$u_s(r, \phi) = \frac{1}{4} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \mathbf{F}(\phi; k) + O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right)$$

donde $\mathbf{F}(\phi; k)$ es el patrón de campo distante (far field pattern).

Utilizando (5.18), (6.7) y como $L_1 \approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{r^{\frac{3}{2}}}\right)$, sigue:

$$\begin{aligned} u_s^M(r, \phi) \approx & \frac{1}{4} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[ik \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \right. \\ & \left. + \frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta} \right] \\ & + O\left(\frac{\sqrt{k}}{r^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

así, nuestro patrón de campo distante es:

$$\mathbf{F}(\phi; k) = ik \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta + \frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta} \quad (6.9)$$

6.3 La media de la sección transversal de dispersamiento

La media, denotada por $\langle \rangle$, de la sección transversal de dispersamiento para grandes distancias del dispersador es:

$$\sigma(k, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle 2\pi r \frac{|u_s(r, \phi)|^2}{|u_{in}(r, \phi)|^2} \rangle \quad (6.10)$$

de donde buscamos una expresión para su aproximación:

$$\sigma_M(k, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle 2\pi r \frac{|u_s^M(r, \phi)|^2}{|u_{in}(r, \phi)|^2} \rangle \quad (6.11)$$

Observación 9. La media, $\langle \rangle$, es tomada sobre el espacio muestral \mathbf{Y} de la variable aleatoria (o variables aleatorias) de las cuales dependen las funciones R y R' . \square

De la definición de $u_{in}(r, \phi)$, (3.8), sigue que $|u_{in}(r, \phi)| = 1$; $\forall r, \forall \phi$. Entonces utilizando (6.8) y (6.9), tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle 2\pi r \frac{|u_s^M|^2}{|u_{in}|^2} \rangle &= \langle 2\pi r |u_s^M|^2 \rangle \\
&\approx \frac{1}{4k} \langle |\mathbf{F}(\phi; k)|^2 \rangle \\
&= \frac{k}{4} \left\langle \left[\int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \cos(\theta_1 - \phi) d\theta_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_3 d\theta_4 \right] \right\rangle \\
&= \frac{k}{4} \left\langle \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \cos(\theta_1 - \phi) \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_1 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) \cos(\theta_3 - \phi) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) \cos(\theta_1 - \phi) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_3 d\theta_4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta_1)R(\theta_3)} P(\theta_2) \bar{P}(\theta_4) D_M(\theta_2 - \theta_1) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \right\rangle \\
&= \frac{k}{4} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_1 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) \right\rangle \cos(\theta_3 - \phi) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_3 d\theta_4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \sqrt{R(\theta_1)R(\theta_3)} P(\theta_2) \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_2 - \theta_1) D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \right]
\end{aligned} \tag{6.12}$$

De esta manera, $\sigma_M(k, \phi)$ queda definida aproximadamente por (6.12), con P dado por (5.11). \bar{P} denota el conjugado de P . Recordamos que P es una variable aleatoria que depende de $R(\theta)$ y $R'(\theta)$.

7 UNA SUPERFICIE TIPO III

Para obtener una superficie tipo III para el caso estudiado aquí, la función $R(\theta)$ tiene que satisfacer las siguientes condiciones:

- Es una función Lipschitz con respecto a la variable θ .
- $R(\theta) > 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.
- $R(0) = R(2\pi)$

Su derivada $R'(\theta)$ tiene que cumplir las siguientes condiciones:

- Es un fractal.
- Como consecuencia de la fractalidad de $R'(\theta)$, sigue que $R''(\theta)$ no existe.

Una Función de tipo Weierstrass

Un tipo de función fractal muy bien conocida es la función de Weierstrass, siguiendo Kenneth Falconer ([14] pg 146), definida por:

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m t) \quad (7.1)$$

donde $1 < D < 2$, $\lambda > 1$ y t en un intervalo compacto, sin pérdida de generalidad se puede elegir $t \in [0, 1]$. Esa función es continua pero no es diferenciable en todo punto, su dimensión Hausdorff-Besicovitch es D . Para h muy pequeño, se cumple la siguiente estimativa:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq ch^{2-D} \quad (7.2)$$

donde c no depende de h (demostrado en [14] pg 148). Perciba que la serie (7.1) es absolutamente convergente, así $f(t)$ está bien definida y es acotada:

$$|f(t)| \leq \frac{\lambda^{D-2}}{1 - \lambda^{D-2}} \quad (7.3)$$

Por otro lado, una función de Weierstrass aleatoria puede ser considerada, [14] pg 247, de la siguiente forma:

$$X(t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m t + \phi_m) \quad (7.4)$$

donde $\lambda > 1; 1 < D < 2$. Las variables aleatorias y_m son independientes con distribución Gaussiana estándar, esto es, tiene media cero y varianza uno. Las fases ϕ_m son variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0, 2\pi)$.

Definición de la media muestral $\langle \rangle$

Sea cada $y_m, m \in \mathbb{Z}$ una variable aleatoria con distribución uniforme en $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ e independientes. Entonces la respectiva media de y_m , denotada por $\langle \rangle_m$, es definida por:

$$\langle (\dots) \rangle_m = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_m}{2\sqrt{3}}; \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (7.5)$$

de donde es fácil obtener $\langle y_m \rangle_m = 0, \langle y_m^2 \rangle_m = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

Sea \mathbf{Y} el espacio muestral de las variables aleatorias independientes y_m . Entonces la media muestral, denotada por $\langle \rangle$, en \mathbf{Y} es dada por:

$$\langle (\dots) \rangle = \prod_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_p}{2\sqrt{3}} \quad (7.6)$$

donde

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_p}{2\sqrt{3}} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \dots \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \dots \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_{-\infty}}{2\sqrt{3}} \dots \frac{dy_0}{2\sqrt{3}} \dots \frac{dy_{\infty}}{2\sqrt{3}} \quad (7.7)$$

Por otro lado, si f y g son funciones que solo dependen de la variable y_m y y_n respectivamente, entonces es fácil obtener:

$$\begin{aligned} \langle f(y_m) \rangle &= \langle f(y_m) \rangle_m \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\ \langle f(y_m)g(y_n) \rangle &= \langle f(y_m) \rangle_m \langle g(y_n) \rangle_n; \quad m \neq n \end{aligned}$$

así :

$$\langle y_m \rangle = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (7.8)$$

$$\langle y_m y_n \rangle = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (7.9)$$

7.1 La representación de $R'(\theta)$

En el presente trabajo, proponemos la siguiente forma para $R'(\theta)$:

$$R'(\theta) = \epsilon \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right] \quad (7.10)$$

donde:

- (i) $\lambda > 1$; $1 < D < 2$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.
- (ii) $\epsilon > 0$, el valor apropiado para ϵ será definido posteriormente en la proposición 7.2.2, para que cumpla (3.2).
- (iii) Cada variable aleatoria y_m tiene distribución uniforme en $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, así $\langle y_m \rangle = 0$; $\langle y_m^2 \rangle = 1$; $|y_m| \leq \sqrt{3} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.
- (iv) Las variables aleatorias son independientes, lo cual indica: $\langle y_m y_n \rangle = \langle y_m \rangle \langle y_n \rangle = 0$; $\forall m \neq n$.

La principal razón para definir así $R'(\theta)$, dado en (7.10), es para garantizar todas las condiciones impuestas al inicio de este capítulo, como será demostrado posteriormente.

Observación 10. De la definición de $R(\theta)$ en (3.2), tenemos $R'(\theta) = \epsilon F'(\theta)$. Del cual $F'(\theta)$ es definido por:

$$F'(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \quad (7.11)$$

con las mismas hipótesis hechas en (7.10). \square

Lema 7.1.1. La serie $\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)]$ definida en (7.10) es absolutamente convergente y acotada para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Demostración. Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{-N_0} 2\pi < 1$ así $\lambda^{-N_0} \theta < 1$; $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, entonces $1 - \cos(\lambda^{-m} 2\pi) \leq \lambda^{-2m} 4\pi^2$; $\forall m \geq N_0$ y $|\operatorname{sen}(\lambda^{-m} \theta)| \leq \lambda^{-m} \theta$; $\forall m \geq N_0$ $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Sigue:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N_0+1}^{-1} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{-N_0} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| + \\
&\quad \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{N_0-1} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} 2\pi)] \right| + \\
&\quad \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=N_0}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} 2\pi)] \right| \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-3)m} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sum_{m=1}^{N_0-1} \lambda^{(3-D)m} \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(3-D)m} \lambda^{-2m} 4\pi^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\frac{1}{1 - \lambda^{D-3}} \right] + \\
&\quad \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\frac{\lambda^{(3-D)N_0} - 1}{\lambda^{3-D} - 1} - 1 \right] + \\
&\quad 2\sqrt{3} \pi \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(1-D)m} \\
&= \frac{\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\pi(\lambda^{3-D} - 1)} + \frac{2\sqrt{3} \pi \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right| &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{m=-N_0+1}^{-1} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{m=-\infty}^{-N_0} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right| \\
&\leq \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right| + \\
&\quad \left| \sum_{m=1}^{N_0-1} y_{-m} \lambda^{(2-D)m} \operatorname{sen}(\lambda^{-m} \theta) \right| + \\
&\quad \left| \sum_{m=N_0}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(2-D)m} \operatorname{sen}(\lambda^{-m} \theta) \right| \\
&\leq \sqrt{3} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} + \sqrt{3} \sum_{m=1}^{N_0-1} \lambda^{(2-D)m} + \\
&\quad \sqrt{3} \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(2-D)m} \lambda^{-m} |\theta| \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{1 - \lambda^{D-2}} + \frac{\sqrt{3} (\lambda^{(2-D)N_0} - \lambda^{2-D})}{\lambda^{2-D} - 1} + \\
&\quad \frac{2\pi\sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \\
&= \frac{\sqrt{3} \lambda^{(2-D)N_0}}{\lambda^{2-D} - 1} + \frac{2\pi\sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \tag{7.13}
\end{aligned}$$

Luego, utilizando (7.12) y (7.13), tenemos:

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \leq L \tag{7.14}$$

donde:

$$L = \frac{\sqrt{3} \lambda^{(2-D)N_0}}{\lambda^{2-D} - 1} + \frac{\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\pi(\lambda^{3-D} - 1)} + \frac{4\pi\sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \tag{7.15}$$

■

Proposición 7.1.1. *Las funciones $F'(\theta)$ y $R'(\theta)$, dadas en (7.11) y (7.10) respectivamente, están bien definidas y son acotadas, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Demostración. Por el Lema 7.1.1, $F'(\theta)$ y $R'(\theta)$ están bien definidas. Y por (7.14), tenemos:

$$|F'(\theta)| \leq L, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.16)$$

$$|R'(\theta)| \leq \epsilon L, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.17)$$

donde L es definido en (7.15) ■

Proposición 7.1.2. *Sea $\lambda > 1; 1 < D < 2$, y_m variable aleatoria con distribución uniforme en $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ e independiente. Entonces $F'(\theta)$ y $R'(\theta)$ no son diferenciables para todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$ en casi todo \mathbf{Y} , donde \mathbf{Y} es el espacio muestral de las variables aleatorias y_m .*

Demostración. Definiendo:

$$F'_1(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta)$$

$$F'_2(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{-1} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(2-D)m} \operatorname{sen}(\lambda^{-m} \theta)$$

$$F'_3(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)]$$

Tenemos: $F'(\theta) = F'_1(\theta) + F'_2(\theta) + F'_3(\theta)$. Además, las funciones $F'_1(\theta)$, $F'_2(\theta)$ y $F'_3(\theta)$ están bien definidas y son convergentes, puede ser demostrado de manera análoga al Lema 7.1.1.

Observe que:

$$F''_3(\theta) = 0$$

$$F''_2(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(1-D)m} \cos(\lambda^{-m} \theta)$$

donde $|F''_2(\theta)| \leq \sqrt{3} \frac{\lambda^{1-D}}{1 - \lambda^{1-D}}$.

Por otro lado, G.H. Hardy demostró que la función $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta)$ no es diferenciable para todo punto θ , en su artículo "Weierstrass's non-differentiable

function" [16] y, recientemente Heurteaux demostró en su artículo "Weierstrass functions with random phases" [17] que la función $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta + \phi_m)$ no es diferenciable para todo θ en casi todo Φ , donde Φ es el espacio muestral de las fases ϕ_m , siendo que las variables ϕ_m tienen distribución uniforme en $[0, \pi]$ y son independientes. Luego, haciendo $y_m = \sqrt{3} \cos(\phi_m)$ y utilizando

$$\text{sen}(a) \cos(b) = \frac{\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)}{2}$$

tenemos :

$$\begin{aligned} F_1'(\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) \\ &= \sqrt{3} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) \cos(\phi_m) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta + \phi_m) - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta - \phi_m) \right] \end{aligned}$$

Así, utilizando el resultado obtenido por Heurteaux, $F_1'(\theta)$ no es diferenciable para todo θ en casi todo \mathbf{Y} . Por lo tanto, $F'(\theta)$ y $R'(\theta)$ no son diferenciables para todo θ en casi todo \mathbf{Y} . ■

Proposición 7.1.3. Sean $F'(\theta)$ y $R'(\theta)$, dadas en (7.11) y (7.10) respectivamente. Entonces para $|h| < 1$, se cumple:

$$|F'(\theta + h) - F'(\theta)| < b_0 |h|^\rho \quad (7.18)$$

$$|R'(\theta + h) - R'(\theta)| < b_1 |h|^\rho \quad (7.19)$$

donde b_0 y b_1 son constantes que no dependen de h . Además, $0 < \rho < 1$ y $\rho = 2 - D$.

Demostración. Dado $|h| < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\lambda^{-(N+1)} \leq |h| < \lambda^{-N}; \text{ de lo cual} \quad (7.20)$$

$$\lambda^{-(N+1+m)} \leq \lambda^{-m} |h| < \lambda^{-(N+m)}; \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (7.21)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
|F'(\theta + h) - F'(\theta)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] + \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \\
&= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} [\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m \theta)] \right| \\
&\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |y_m| \lambda^{(D-2)m} |\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m \theta)| \\
&\leq \sqrt{3} \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \lambda^{(D-2)m} |\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m \theta)| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^N \lambda^{(D-2)m} |\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m \theta)| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=N+1}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} |\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m \theta)| \right]
\end{aligned}$$

Utilizando (7.20), (7.21) y el Teorema del Valor Medio para los dos primeros sumandos y una adecuada estimativa para el otro sumando, tenemos:

$$\begin{aligned}
|F'(\theta + h) - F'(\theta)| &\leq \sqrt{3} \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \lambda^{(D-2)m} \lambda^m |h| + \sum_{m=0}^N \lambda^{(D-2)m} \lambda^m |h| + \right. \\
&\quad \left. 2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \right] \\
&= \sqrt{3} \left[|h| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{(1-D)m} + |h| \sum_{m=0}^N \lambda^{(D-1)m} + \right. \\
&\quad \left. 2 \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)(N+1+m)} \right] \\
&= \sqrt{3} \left[|h| \left(\frac{1}{1 - \lambda^{1-D}} - 1 \right) + |h| \left(\frac{\lambda^{(D-1)(N+1)} - 1}{\lambda^{D-1} - 1} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda^{(D-2)(N+1)} \frac{1}{1 - \lambda^{D-2}} \Big] \\
= & \sqrt{3} \left[|h| \frac{\lambda^{-N(1-D)} \lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2\lambda^{-(N+1)(2-D)}}{1 - \lambda^{D-2}} \right] \\
< & \sqrt{3} \left[|h| \frac{|h|^{1-D} \lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2|h|^{2-D}}{1 - \lambda^{D-2}} \right] \\
= & \sqrt{3} |h|^{2-D} \left[\frac{\lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2}{1 - \lambda^{D-2}} \right] \\
= & b_0 |h|^\rho
\end{aligned}$$

donde $b_0 = \sqrt{3} \left[\frac{\lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2}{1 - \lambda^{D-2}} \right]$.

Por otro lado, recordando que $R'(\theta) = \epsilon F'(\theta)$. Para $|h| < 1$, sigue:

$$\begin{aligned}
|R'(\theta + h) - R'(\theta)| &= \epsilon |F'(\theta + h) - F'(\theta)| \\
&< \epsilon b_0 |h|^{2-D} \\
&= b_1 |h|^\rho
\end{aligned}$$

donde $b_1 = \epsilon b_0$. ■

Observación 11. Las ecuaciones (7.18) y (7.19) dicen que F' y R' son uniformemente Hölder de orden $\rho = 2 - D$, con constantes b_0 y b_1 respectivamente. □

Corolario 7.1.1. Sean $F'(\theta)$ y $R'(\theta)$, dadas en (7.11) y (7.10) respectivamente. Entonces para $|h| < 1$

$$\begin{aligned}
\langle |F'(\theta + h) - F'(\theta)|^2 \rangle &\approx c_1 |h|^{2\rho} \\
\langle |R'(\theta + h) - R'(\theta)|^2 \rangle &\approx c_2 |h|^{2\rho}
\end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes que no dependen de h ni de θ .

Demostración. Inmediatamente de la Proposición 7.1.3, integrando con respecto a \mathbf{Y} en (7.18) y (7.19). Debemos recordar que \mathbf{Y} es el espacio muestral de las variables aleatorias y utilizar (7.6). ■

Proposición 7.1.4. Las funciones $F'(\theta)$ y $R'(\theta)$, dadas en (7.11) y (7.10) respectivamente, tienen media cero.

Demostración. Utilizando (iii), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \langle F'(\theta) \rangle &= \left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right\rangle \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle y_m \rangle \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle y_m \rangle \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Con lo cual, sigue:

$$\begin{aligned}
 \langle R'(\theta) \rangle &= \langle \epsilon F'(\theta) \rangle \\
 &= \epsilon \langle F'(\theta) \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Consecuentemente :

$$\langle F'(\theta + h) - F'(\theta) \rangle = 0 \quad \forall \theta, \theta + h \in [0, 2\pi] \quad (7.22)$$

$$\langle R'(\theta + h) - R'(\theta) \rangle = 0 \quad \forall \theta, \theta + h \in [0, 2\pi] \quad (7.23)$$

■

7.2 La representación de $R(\theta)$

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, se obtiene $R(\theta)$ de $R'(\theta)$:

$$R(\theta) = R(0) + \int_0^\theta R'(\hat{\theta}) d\hat{\theta}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta R'(\hat{\theta})d\hat{\theta} &= \int_0^\theta \epsilon \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \hat{\theta}) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right] d\hat{\theta} \\
&= \epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \int_0^\theta \text{sen}(\lambda^m \hat{\theta}) d\hat{\theta} + \\
&\quad - \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^\theta d\hat{\theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \\
&= \epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \left[\frac{1 - \cos(\lambda^m \theta)}{\lambda^m} \right] + \\
&\quad - \frac{\epsilon \theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \\
&= \epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] + \\
&\quad - \frac{\epsilon \theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)]
\end{aligned}$$

Entonces, definiendo $R(0) = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
R(\theta) &= 1 + \epsilon \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right], \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.24)
\end{aligned}$$

De lo cual $F(\theta)$ queda establecido por:

$$\begin{aligned}
F(\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \\
&\quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.25)
\end{aligned}$$

Observación 12. Notemos que $R(0) = R(2\pi)$ y $F(0) = F(2\pi)$, de esa manera la definición establecida en (3.2) es satisfecha. Además, $F(\theta)$ y $R(\theta)$ son funciones continuas con respecto a θ , pues son sumas de funciones continuas. \square

Lema 7.2.1. Si $|y_m| \leq \sqrt{3} \quad \forall m \in \mathbb{Z}; \lambda > 1; 1 < D < 2$. La serie:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)]$$

es absolutamente convergente y acotada para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Demostración. Del Lema 7.1.1, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda^{-N_0} 2\pi| < 1$.

Luego $|\lambda^{-N_0} \theta| < 1; \forall \theta \in [0, 2\pi]$ y $1 - \cos(\lambda^{-m} \theta) \leq \lambda^{-2m} \theta^2; \forall m \geq N_0;$

$\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Sigue:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| &\leq \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\ &+ \left| \sum_{m=-N_0+1}^{-1} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\ &+ \left| \sum_{m=-\infty}^{-N_0} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\ &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\ &+ \left| \sum_{m=1}^{N_0-1} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} \theta)] \right| \\ &+ \left| \sum_{m=N_0}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} \theta)] \right| \\ &\leq 2\sqrt{3} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-3)m} + 2\sqrt{3} \sum_{m=1}^{N_0-1} \lambda^{(3-D)m} \\ &+ \sqrt{3} \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(3-D)m} \lambda^{-2m} \theta^2 \\ &\leq \frac{2\sqrt{3}}{1 - \lambda^{D-3}} + 2\sqrt{3} \frac{\lambda^{(3-D)N_0} - \lambda^{3-D}}{\lambda^{3-D} - 1} + \\ &\quad \sqrt{3} 4\pi^2 \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(1-D)m} \\ &= 2\sqrt{3} \frac{\lambda^{(3-D)N_0}}{\lambda^{3-D} - 1} + 4\pi^2 \sqrt{3} \frac{\lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \quad (7.26) \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando el resultado (7.12) del Lema 7.1.1, sigue:

$$\left| \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \leq 2\pi \left[\frac{\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\pi(\lambda^{3-D} - 1)} + \frac{2\sqrt{3} \pi \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \right] \quad (7.27)$$

Así:

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \leq B \quad (7.28)$$

donde

$$B = \frac{4\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\lambda^{3-D} - 1} + \frac{8\pi^2 \sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \quad (7.29)$$

■

Proposición 7.2.1. *Las funciones $F(\theta)$ y $R(\theta)$, dadas en (7.25) y (7.24) respectivamente, están bien definidas y son acotadas para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Demostración. Utilizando el Lema 7.2.1, sigue que las funciones $F(\theta)$ y $R(\theta)$ están bien definidas y además:

$$|F(\theta)| \leq B, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.30)$$

$$|R(\theta)| \leq 1 + \epsilon B, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.31)$$

■

Proposición 7.2.2. *Sea $R(\theta)$, dada en (7.24), donde $\theta \in [0, 2\pi]$. Entoces para $0 < \epsilon < \frac{1}{B}$ se tiene $R(\theta) > 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Donde B es definido en (7.29).*

Demostración. Utilizando el resultado (7.30) de la proposición 7.2.1, sigue:

$$0 < 1 - \epsilon B \leq 1 + \epsilon F(\theta) = R(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.32)$$

■

Proposición 7.2.3. *Las funciones $F(\theta)$ y $R(\theta)$, dadas en (7.25) y (7.24) respectivamente, son lipschitz con respecto a θ .*

Demostración. Sean $\theta_1 < \theta_2$; $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$. Como $F(\theta)$ es continua y diferenciable, entonces por el Teorema del Valor Medio, tenemos:

$$|F(\theta_1) - F(\theta_2)| \leq |F'(\theta^*)| |\theta_1 - \theta_2|, \quad \theta^* \in \langle \theta_1, \theta_2 \rangle$$

Luego por la proposición 7.1.1

$$|F(\theta_1) - F(\theta_2)| \leq L|\theta_1 - \theta_2| \quad ; \forall \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$$

con L definido en (7.15). De la misma manera, tenemos:

$$|R(\theta_1) - R(\theta_2)| \leq \epsilon L|\theta_1 - \theta_2|$$

■

8 CONCLUSIONES

Utilizando el criterio de dominio Lipschitz, establecemos la superficie aleatoria áspera tipo III en \mathbb{R}^2 . Representado exactamente por $\partial\Omega$, dado por:

$$\partial\Omega = \{(R(\theta)\cos\theta, R(\theta)\sin\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

donde $R(\theta)$ satisface algunas condiciones, ver (3.2).

Utilizando el método de campo nulo y la aproximación de la función de Hankel establecemos una aproximación de la onda dispersada:

$$u_s^M(r, \phi) = d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta)\cos(\theta-\alpha)+w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} d\theta + \\ -i \frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)} Q_M(\theta) e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{w}} d\theta$$

ver (5.21).

El patrón de campo distante es:

$$F(\phi; k) = ik \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta + \frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta}$$

ver (6.9).

La aproximación de la media de la sección transversal de dispersamiento para grandes distancias del dispersador es:

$$\sigma_M(k, \phi) = \frac{k}{4} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_1 d\theta_3 \right. \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) \right\rangle \cos(\theta_3 - \phi) \times \\ \times D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \times \\ \times D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_3 d\theta_4 \\ \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \sqrt{R(\theta_1)R(\theta_3)} P(\theta_2) \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \times \right. \\ \left. \times D_M(\theta_2 - \theta_1) D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \right]$$

ver (6.12).

Finalmente, un ejemplo de superficie aleatoria áspera tipo III es obtenido por la definición de $R(\theta)$, dado por:

$$R(\theta) = 1 + \epsilon \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right]$$

ver (7.24).

Cabe indicar que para el desarrollo del presente trabajo hemos desarrollado los lemas 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3, 5.5.4, 6.1.1, 6.1.2, 7.1.1, 7.2.1 así como las proposiciones 5.5.1, 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3, 7.1.4, 7.2.1, 7.2.2, 7.2.3 y el corolario 7.1.1, los cuales nos permitieron entender y describir mejor el problema a resolver.

Apêndice A

Aquí mencionamos un teorema y su prueba tal cual se encuentra en el artículo de C. Liu [31]

Es conocido que $G(x, k)$ puede ser escrito en la forma:

$$G(x, k) = G_0(x) + h(x, k)$$

donde

$$G_0(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n|x|^{n-2}}, \quad (\omega_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})})$$

$$h(x, k) = \frac{i}{4}(2\pi)^{\frac{2-n}{2}} \frac{1}{|x|^{\frac{n-4}{2}}} \int_0^k k^{\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-4}{2}}^1(k|x|) dk$$

Sean K_0, H_k y K^* operadores sobre $L^2(\partial\Omega)$ definidos por:

$$K_0 f(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|y-P|>\epsilon} \frac{\partial G_0(P-y, k)}{\partial \nu(y)} f(y) d\sigma(y), \quad P \in \partial\Omega$$

$$H_k f(P) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h(P-y, k)}{\partial \nu(y)} f(y) d\sigma(y), \quad P \in \partial\Omega$$

$$K^* f(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|y-P|>\epsilon} \frac{\partial G(P-y, k)}{\partial \nu(P)} f(y) d\sigma(y), \quad P \in \partial\Omega$$

Teorema A.0.1. Sea $\phi_1, \dots, \phi_{m_N}$ una base del espacio $N(\frac{1}{2}I + K^*)$ y se define

$$u_j(x) = \int_{\partial\Omega} G(x-y, k) \phi_j(y) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \quad (\text{A.1})$$

$j = 1, 2, \dots, m_N$. Entonces:

$$\phi_j(P) = -\frac{\partial u_j^+}{\partial \nu}(P), \quad P \in \partial\Omega \quad (\text{A.2})$$

$j = 1, 2, \dots, m_N$, y las funciones

$$\psi_j(P) = -\bar{u}_j^+, \quad P \in \partial\Omega \quad (\text{A.3})$$

$j = 1, 2, \dots, m_N$ forman una base para el espacio $N(\frac{1}{2}I + K)$. La matriz

$$\langle \psi_j, \phi_l \rangle = \int_{\partial\Omega} \bar{u}_j^+ \frac{\partial \bar{u}_l^+}{\partial \nu} d\sigma(y) \quad (\text{A.4})$$

$j = 1, 2, \dots, m_N$ es regular.

Para probar el teorema, necesitamos del siguiente Lema.

Lema A.0.2. Sea $u \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ una solución para la ecuación de Helmholtz satisfaciendo la condición de radiación y

$$\text{Im}(k \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} d\sigma) \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

entonces $u = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

La prueba de este Lema se hace imitando la prueba del teorema 3.12 del libro [11] y será omitido aquí.

Prueba del teorema A.0.1 Desde que $\frac{1}{2}\phi_j + K^*\phi_j = 0$ claramente tenemos $\frac{\partial u_j^-}{\partial \nu} = 0$. Usando la relación de salto para el potencial de camada simple tenemos $\phi_j = -\frac{\partial u_j^+}{\partial \nu}$ en $\partial\Omega$ y $\bar{u}_j^+ = \bar{u}_j^- \in U = N(\frac{1}{2}I + K)$ por el teorema 3.5 de [31] pg 15. Ahora asumiremos que $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, m_N$ resuelve el sistema

$$\begin{bmatrix} \langle \psi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_1, \phi_{m_N} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \psi_{m_N}, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_{m_N}, \phi_{m_N} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{m_N} \end{bmatrix} = 0$$

y definimos

$$u = \sum_{j=1}^{m_N} \bar{\alpha}_j u_j$$

entonces

$$\int_{\partial\Omega} \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = 0$$

esto implica $u = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ por el Lema A.0.2. En particular, $\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega$ y además

$$\sum_{j=1}^{m_N} \bar{\alpha}_j \phi_j = 0$$

Así $\alpha_j = 0, j = 1, 2, \dots, m_N$ desde que ϕ_j son linealmente independientes. El argumento anterior implica que $\det(\langle \psi_j, \phi_i \rangle) \neq 0$ y $\psi_j, j = 1, 2, \dots, m_N$ son linealmente independientes: es decir ellos forman una base para $N(\frac{1}{2}I + K)$ desde que $\dim N(\frac{1}{2}I + K) = m_N$. Así el teorema está provado.

Observación 13. Desde que los autovalores de Neumann interior son reales, podemos elegir bases $\phi_1, \dots, \phi_{m_N}$ para $N(\frac{1}{2}I + K^*)$ en el teorema A.0.1 tal que $\psi_1, \dots, \psi_{m_N}$ sean valores reales. □

Bibliografía

- [1] F. Bass y F.I. Fucks, *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Oxford: Pergamon, 1979.
- [2] P. Beckmann, A new approach to the problem of reflection from a rough surface. *Acta Techn.*, 2:311-355, 1957.
- [3] P. Beckmann. Scattering by composite rough surfaces. *Proceedings of the IEEE*, 53:1012-1015, 1965.
- [4] P. Beckmann, Shadowing of random rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-13(3): 384-388, 1965.
- [5] P. Beckmann, Scattering of light by rough surface. *Progress in Optics*, vol VI ed E Wolf (Amsterdam: North Holland), 1967.
- [6] P. Beckmann and A. Spizzichino. The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces. *Oxford: Pergamon. Reprinted 1987 by Artech House Inc., Norwood, Massachusetts, USA*, 1963.
- [7] M.V. Berry. Diffractals, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 12(6):781-797, 1979.
- [8] M.V. Berry and T.M. Blackwell. Diffractals Echoes. *Journals of Physics A: Mathematical and General*, 14(11):3101-3110, 1981.
- [9] N. Blestein. *Mathematical Methods for wave phenomena*. Academic Press. New York, 1984.
- [10] R.M. Brown and Z. Shen. Estimates for the Stokes operator Lipchitz domains. *Indiana University Mathematics Journal*, 44(4):1183-1206, 1995.

- [11] D. Colton and R. Kress. *Integral Equations Methods in scattering theory*. Kriener Publishing Company, Malabar Florida, 1992.
- [12] E. Fabes. Layer potential methods for boundary value problems on Lipschitz domains. *Lecture Notes in Math*, 1344: 55-80, 1988
- [13] E.B. Fabes, C. Kenig and G. Verchota. The Dirichlet problem for the Stokes System on Lipschitz domain. *Duke Math. J.*, 57(3):769-793, 1988.
- [14] Kennet J. Falconer. *Fractal Geometry: mathematical foundations and applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.
- [15] L. Fortuin. Survey of literature on reflection and scattering of sound waves at the sea surface. *Journal Ac. Soc. Am.*, 47:1209-1228, 1969.
- [16] G.H. Hardy. Weierstrass's Non-differentiable Function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 17(3):301-325, 1916.
- [17] Y. Herteaux. Weierstrass Functions with Random Phases. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(8):3065-3077, 2003.
- [18] C.W. Horton. A review of a reverberation, scattering and eco structure. *Journal Ac. Soc. Am.*, 51:1049-1061, 1972.
- [19] A. Ishimaru. *Wave propagation and scattering in random media*, volumen II, ch21. New York: Academic, 1978.
- [20] D.L. Jaggard. On Fractal Electrodynamics. Em H.N. Kritikos and D.L. Jaggard, editores, *Recent Advances in Electromagnetic Theory*, 183-224. New York: Springer Verlag, 1990.
- [21] D.L. Jaggard and Y. Kim. Diffraction by band-limited fractal screens. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(6):1055-1062, 1987.
- [22] D.L. Jaggard and X.Sun. Fractal Surface Scattering: A generalized Rayleigh solution. *Journal of Applied Physics*, 68(11):5456-5462, 1990.
- [23] D.L. Jaggard and X.Sun. Scattering from fractally corrugated surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 7(6):1131-1139, 1990.

- [24] D.L. Jaggard and X.Sun. Scattering from Fractally Fluted Cylinders. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 4(7):599-611, 1990
- [25] D.L. Jaggard and X.Sun. Wave scattering from non-random fractal surfaces. *Optics Communications*, 78(1):20-24, 1990.
- [26] E. Jakeman. Fresnel scattering by a corrugated random surfaces with fractal slope. *Journal of the Optical Society of America*, 72(8):1034-1041, 1982.
- [27] E. Jakeman. Scattering by a corrugated random surfaces with fractal slope. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15:L55-L59, 1982.
- [28] Y. Kim, H. Grebel and D.L. Jaggard. Diffraction by fractally serrated apertures. *Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science and Vision*, 8(1):20-26, 1991.
- [29] Y. Kim and D.L. Jaggard. The Fractal random array. *Proceedings of the IEEE*, 74(9):1278-1280, 1986.
- [30] Y. Kim and D.L. Jaggard. Optical beam propagation in a band-limited fractal medium. *Journal of the Optical Society of America A*, 5(9):1419-1426, 1988.
- [31] C. Liu. The Helmholtz equation on Lipschitz domains. *IMA preprint*, 1356,1995.
- [32] C. Macaskill. Geometric optics and enhanced backscatter from very rough surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 8(1):88-96, 1991.
- [33] W. Magnus, F. Oberhettinger and RP Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, tercera edicion, 1966.
- [34] A. McGinn and Sykes. Microwave scattering from natural targets. *United Kingdom atomic energy authority report. AERE-R*, (9768), 1960.
- [35] J.A. Ogilvy. Wave scattering from rough surfaces. *Rep. Prog. Phys.*, 50:1553-1608, 1987.
- [36] J.A. Ogilvy. *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. Great Britain, J.W. Arrowsmith Ltd., Brisol, 1991.

- [37] Lord Rayleigh. *The theory of sound*. New York: Dover (first edition 1877, New York: Macmillan), 1945.
- [38] A.B. Shmelev. Wave scattering by statistically uneven surfaces. *Sov. Phys-Usp.*, 15:173-183, 1972.
- [39] J. Teixeira. Experimental methods for studying fractal aggregates. In: *H.E. Stanley and N. Ostrowsky, Editors. On Growth and Form, Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics*, Nijhoff, Dordrecht, Boston, 145-162, 1986.
- [40] T.R. Thomas. *Rough surfaces*. New York: Longman, 1982.
- [41] E.C. Titchmarsh. *The Theory of functions*. 2ed. London: Oxford University, 1953.
- [42] G.R. Valenzuela. Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic- a review. *Boundary Layer Meteorology*, 13:427-429, 1978.
- [43] G. Verchota. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains. *Journal of Functional Analysis*, 59(3):572-611, 1984.
- [44] P.C. Waterman. Matrix formulation of electromagnetic scattering. *Proceedings of the IEEE*, 53(8):805-812, 1965.
- [45] P.C. Waterman. New formulation of acousting scattering. *The journal of the acoustical society of America*, 45:1417-1429, 1969.
- [46] B.J. West. Sensing scaled scintillations. *Journal of the Optical Society of America A*, 7(6):1074-1100, 1990.