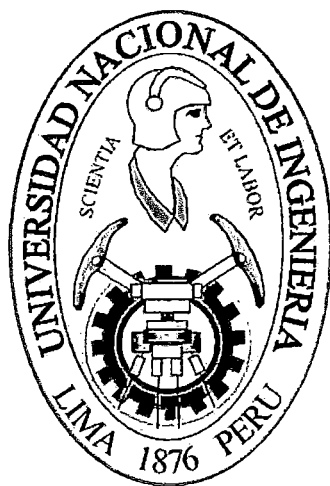


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGRNIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



Tesis para Optar  
el Título Profesional de  
LICENCIADO en MATEMÁTICA

TITULADA  
**Aplicaciones de Variable de Estado y su  
Implementación Numérica**

Presentado por

**Mario Oria Chavarría**

Asesor

Mag. William Carlos Eche garay Castillo

LIMA - PERÚ

2013

**Digitalizado por:**

Consortio Digital del  
Conocimiento MebLatam,  
Hemisferio y Dalse

## CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

ORIA CHAVARRIA, MARIO

APLICACIÓN DE VARIABLE DE ESTADO Y SU IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA / MARIO ORIA CHAVARRIA. – EPM - FC - UNI, 2013.

258 p.: il.

Tesis (Licenciatura)—Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, Lima, 2013. Asesor: WILLIAM CARLOS ECHEGARAY CASTILLO

Palabras claves: Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales, Valores y Vectores Propios, Exponenciales de Matrices, Descomposición de Valor Singular, Controlabilidad, Observabilidad y Estabilidad de Sistemas Dinámicos Lineales Invariantes en el Tiempo.

A las personas que hacen feliz mi vida: a mis hijos Marife y Mario, las personitas que me dan energía cada día, a mi esposa Marlene, por el apoyo y amor de siempre, a mis padres Pompeyo y Paulina, por su esfuerzo y amor.

Agradezco al Profesor WILLIAM ECHEGARAY, por sus sabios consejos, tiempo y paciencia, y a todas aquellas personas que de una u otra forma me ayudaron a terminar este trabajo.

# RESUMEN

En general, los sistemas, como se les conoce en Ingeniería, son conjuntos de partes interactuantes que como un todo exhiben comportamientos peculiares. Como se verá en el Capítulo 2, la formalización matemática de tales sistemas corresponde a la de los sistemas dinámicos, que se definen de la siguiente manera:

Un sistema dinámico se define formalmente en la literatura de sistemas como un arreglo  $[T, X, U, \Xi, Y]$ , donde

1.  $X$  es un espacio de estado dado, un conjunto cuyos elementos caracterizan las diferentes situaciones (estados) del sistema;  $T$  es un intervalo de tiempo.
2.  $U$  es un espacio de funciones sobre  $T$  que representan las entradas o excitaciones del sistema.
3. Para todo tiempo inicial  $t_o \in T$ , cualquier estado inicial  $x_o \in X$ , y cualquier entrada  $u \in U$  definida para  $t \geq t_o$ , los futuros estados del sistema son determinados por la *aplicación de transición*  $\Xi : T \times X \times U \rightarrow X$ , que se escribe como  $\Xi(t_1; t_o, x(t_o), u(t)) = x(t_1)$ .

y además se satisfacen los siguientes axiomas:

4. La propiedad de identidad de la aplicación de transición, esto es,  
$$\Xi(t_o; t_o, x(t_o), u(t_o)) = x(t_o).$$
5. La propiedad de semigrupo de la aplicación de transición, esto es,  
$$\Xi(t_2; t_o, x(t_o), u(t)) = \Xi(t_2; t_1, \Xi(t_1; t_o, x(t_o), u(t)), u(t)).$$
 El axioma de la propiedad de semigrupo establece que es irrelevante si el sistema llega al estado en el tiempo  $t_2$  por una transición directa desde el estado en el instante  $t_o$ , o por primero ir a un estado intermedio en el instante  $t_1$ ,

y entonces reiniciar desde el estado en el instante  $t_1$  y moverse al estado en el instante  $t_2$ . En cualquier caso el sistema, que satisface el axioma de semigrupo, llegará al mismo estado en el instante  $t_2$ .

6. La propiedad de causalidad, esto es,

$$\Xi(t; t_o, x(t_o), u_1(t)) = \Xi(t; t_o, x(t_o), u_2(t)), \quad \forall t_o, t \in T \text{ si y sólo si } u_1(t) = u_2(t), \quad \forall t \in T.$$

7. Toda salida del sistema es una función de la forma

$$g : T \times X \times U \rightarrow Y$$

donde  $Y$  es el espacio de salida, esto es, el conjunto de las reacciones externas posibles del sistema ante las excitaciones a que es sometido.

8. La aplicación de transición  $\Xi$  y la aplicación de salida  $g$  son funciones continuas.

9. Si adicionalmente el sistema satisface el siguiente axioma, entonces se dice que es *invariante en el tiempo*:  $\Xi(t_1; t_o, x(t_o), u(t)) = \Xi(t_1 + \tau; t_o + \tau, x(t_o), u(t - \tau)), \quad \forall \tau$ , donde  $t_o, t_1 \in T$ .

Como se verá en el Capítulo 2, esta definición aplica a los llamados sistemas en tiempo continuo y se deja extender a los sistemas en tiempo discreto.

Ahora bien, frecuentemente es deseable intervenir (controlar) los sistemas con la finalidad de modificar su comportamiento. En su gran mayoría los sistemas reales son del tipo que después definiremos como no lineal; sin embargo, en este trabajo de tesis nos ocupamos del estudio de estrategias de control de sistemas lineales, para lo cual empleamos el concepto de variable de estado que es definido en el Capítulo 2. Este estudio es importante porque con frecuencia, para fines prácticos, los sistemas no lineales se dejan aproximar por sistemas lineales, sus versiones

linealizadas, las cuales estudiamos en el Capítulo 2, y porque facilita el estudio más intrincado de los sistemas no lineales.

El presente trabajo ha sido planteado como sigue: En el Capítulo 2 se dan las definiciones básicas acerca de señales y sistemas, y se muestra la simulación del comportamiento de sistemas empleando el software SIMULINK de MATLAB; también se estudia la solución de la ecuación de estado de sistemas lineales. Esta información es de gran utilidad en la presentación posterior de los conceptos de controlabilidad y observabilidad de sistemas. El Capítulo 3 trata acerca de la función de transferencia y la respuesta impulsiva de sistemas lineales, conceptos útiles también en la discusión posterior de la estabilidad de los sistemas. En el Capítulo 4 estudiamos la controlabilidad de los sistemas lineales, tópico ligado a la intervini-bilidad de los sistemas; aquí se pone énfasis en la realimentación de estados como medio de alterar el comportamiento de un sistema. El problema de la estimación de los estados de un sistema a partir de mediciones de la entrada y salida de él se estudian en el Capítulo 5. El Capítulo 6 se ocupa de la estabilidad de los sistemas. Finalmente, en el Capítulo 7 presentamos algunas aplicaciones de la teoría estudiada en los capítulos anteriores en el control de sistemas no lineales.

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2. SEÑALES Y SISTEMAS</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2.1. Sistemas</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1.1. Descripción . . . . .	3
2.1.2. Consideraciones en el Estudio de los Sistemas . . . . .	4
<b>2.2. Señales</b> . . . . .	<b>5</b>
2.2.1. Clasificación de las Señales . . . . .	5
2.2.1.1. Señales en Tiempo Continuo y Señales en Tiempo Discreto . . . . .	5
2.2.1.2. Señales Determinísticas y Señales Aleatorias . . . . .	6
2.2.2. Algunas Señales Elementales . . . . .	7
2.2.2.1. La Función Escalón . . . . .	7
2.2.2.2. La Función Impulso Unitario . . . . .	8
2.2.2.3. La Función Rampa . . . . .	10
2.2.3. Conversión Entre Señales Continuas y Discretas . . . . .	11
<b>2.3. Sistemas en Tiempo Continuo</b> . . . . .	<b>11</b>
2.3.1. Clasificación . . . . .	15
2.3.1.1. Sistemas Lineales . . . . .	15
2.3.1.2. Sistemas Invariantes en el Tiempo . . . . .	15



2.3.1.3. Sistemas Causales . . . . .	17
2.3.1.4. Sistemas Concentrados y Sistemas Distribuidos . . . . .	17
2.3.1.5. Sistemas Continuos . . . . .	18
2.3.2. La Noción de Estado . . . . .	19
2.3.2.1. Re-definiciones de Linealidad, Invariancia en el Tiempo, etc. . . . .	19
2.3.2.2. Notación de Sistemas en Tiempo Continuo . . . . .	25
2.3.3. Linealización de Sistemas . . . . .	26
2.3.3.1. Preliminares . . . . .	26
2.3.3.2. Procedimiento para Linealizar un Sistema . . . . .	27
<b>2.4. Sistemas en Tiempo Discreto . . . . .</b>	<b>30</b>
2.4.1. Introducción . . . . .	30
2.4.2. Clasificación de los Sistemas en Tiempo Discreto . . . . .	31
2.4.2.1. Sistemas Lineales . . . . .	31
2.4.2.2. Sistemas Invariantes en el Tiempo . . . . .	32
2.4.2.3. Sistemas Causales . . . . .	32
2.4.2.4. Sistemas Distribuidos en el Tiempo . . . . .	33
2.4.3. La Noción de Estado . . . . .	33
2.4.3.1. Re-definiciones de Linealidad, Invariancia en el Tiempo, etc. . . . .	34
2.4.4. Caracterización de un Sistema en Tiempo Discreto . . . . .	35
2.4.4.1. Notación de Sistemas en Tiempo Discreto . . . . .	35

<b>2.5. Modelos de Estado de Sistemas Lineales.</b> . . . . .	<b>36</b>
2.5.1. Sistemas en Tiempo Continuo . . . . .	36
2.5.1.1. El Modelo de Estado de un Sistema Lineal Variante en el Tiempo (LVT). . . . .	36
2.5.1.2. El Modelo de Estado de un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LIT). . . . .	38
2.5.2. Sistemas Lineales en Tiempo Discreto . . . . .	39
2.5.2.1. El Modelo de Estado Lineal Variante en el Tiempo en Tiempo Discreto	39
2.5.2.2. El Modelo de Estado Invariante en el Tiempo en Tiempo Discreto .	39
2.5.2.3. Discretización de un Sistema Lineal en Tiempo Continuo . . . . .	41
<b>2.6. Introducción a la Simulación de Sistemas</b> . . . . .	<b>42</b>
2.6.1. Respuestas de Sistemas Lineales . . . . .	42
2.6.2. Linealización de Sistemas . . . . .	45
<b>3. MATRICES DE TRANSFERENCIA</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>3.1. Solución de la Ecuación de Estado en Tiempo Continuo</b> . . . . .	<b>54</b>
3.1.1. Existencia y Unicidad de las Soluciones . . . . .	54
3.1.2. El Espacio Solución de $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ . . . . .	55
3.1.3. La Matriz de Transición de Estado . . . . .	57
3.1.4. La Forma Exponencial de la Matriz de Transición de Estado . . . . .	58
3.1.5. La Matriz Fundamental . . . . .	60

3.1.6. Propiedades de la Matriz de Transición de Estado . . . . .	61
3.1.7. La Solución Completa de la Ecuación de Estado . . . . .	62
3.1.7.1. Caso Variante en el Tiempo . . . . .	63
3.1.7.2. Caso Invariante en el tiempo . . . . .	66
<b>3.2. Solución de la Ecuación de Estado en Tiempo Discreto . . . . .</b>	<b>67</b>
3.2.1. La Matriz de Transición de Estado y sus Propiedades . . . . .	67
3.2.2. La Matriz Fundamental . . . . .	69
3.2.3. La Solución Completa del Modelo de Estado en Tiempo Discreto . . . . .	70
3.2.4. El Caso Invariante en el Tiempo . . . . .	72
3.2.5. Discretización de Sistemas Lineales en Tiempo Continuo . . . . .	73
3.2.6. Sistemas Lineales en Tiempo Continuo con Entrada Seccionalmente Constante . . . . .	74
<b>3.3. Respuesta Impulsiva y Función de Transferencia . . . . .</b>	<b>77</b>
3.3.1. Caso: Sistemas en Tiempo Continuo . . . . .	77
3.3.1.1. Respuesta Impulsiva . . . . .	77
3.3.1.2. Función de Transferencia . . . . .	80
3.3.1.3. Relación Entre la Respuesta Impulsiva y la Función de Transferencia . . . . .	81
3.3.2. Caso: Sistemas Lineales en Tiempo Discreto . . . . .	82
3.3.2.1. Respuesta Impulsiva . . . . .	82
3.3.2.2. Repaso: La Transformada $\mathcal{Z}$ . . . . .	85

3.3.2.3. Función de Transferencia . . . . .	86
3.3.2.4. Relación Entre la Respuesta Impulsiva y la Función de Transferencia	87
<b>4. CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LIT . . . . .</b>	<b>90</b>
4.1. Introducción . . . . .	90
4.2. Definiciones Básicas y Equivalencias . . . . .	90
4.3. Caracterización del Subespacio Controlable . . . . .	93
4.4. Equivalencias a la Controlabilidad de Sistema . . . . .	106
4.5. Controlabilidad y Modos Dirigidos . . . . .	111
4.6. Controlabilidad de Sistemas en Tiempo Discreto . . . . .	118
4.7. Reubicación de Polos por Realimentación de Estado . . . . .	121
4.7.1. Fundamentación . . . . .	121
4.7.2. El Caso de Entrada Simple . . . . .	123
4.7.2.1. Sistema en la Forma Canónica Controlable con entrada Simple . . .	124
4.7.2.2. El Caso General de Entrada Simple . . . . .	126
4.7.3. El Caso Multientrada . . . . .	130
4.7.3.1. Algoritmo de Asignación Espectral-Caso Multientrada . . . . .	130
4.7.4. Asignabilidad Espectral y Controlabilidad Incompleta . . . . .	132
<b>5. OBSERVABILIDAD DE SISTEMAS LIT . . . . .</b>	<b>143</b>
5.1. Introducción . . . . .	143

<b>5.2. Definiciones Básicas y Equivalencias</b> . . . . .	143
<b>5.3. Equivalencias Para la Observabilidad de un Sistema</b> . . . . .	151
<b>5.4. Observabilidad y Modos Dirigidos</b> . . . . .	154
<b>5.5. Diseño Básico de Observadores Dinámicos</b> . . . . .	155
5.5.1. Observadores Identidad . . . . .	155
5.5.2. Observadores Para Sistemas No Observables . . . . .	159
5.5.3. Observadores de Orden Reducido . . . . .	160
5.5.4. El Teorema de Separación . . . . .	163
5.5.5. La Forma Canónica de Kalman . . . . .	168
<b>5.6. Observabilidad y Sistemas en Tiempo Discreto</b> . . . . .	175
<b>6. ESTABILIDAD DE SISTEMAS LIT</b> . . . . .	<b>181</b>
<b>6.1. Introducción</b> . . . . .	181
<b>6.2. Definiciones Previas</b> . . . . .	183
<b>6.3. Estabilidad y la Matriz <math>H(t)</math></b> . . . . .	185
<b>6.4. Estabilidad y la Matriz <math>H(s)</math></b> . . . . .	191
<b>6.5. Estabilidades BIBS y BIBO</b> . . . . .	194
<b>6.6. Estabilidad Asintótica de la Trayectoria de Estado</b> . . . . .	198
<b>6.7. El caso en Tiempo Discreto</b> . . . . .	199
<b>6.8. Estabilidad en el Sentido de Lyapunov</b> . . . . .	200

<b>7. CONTROL DE UN SISTEMA NO LINEAL . . . . .</b>	<b>209</b>
7.1. El Sistema CPI . . . . .	209
7.1.1. El Modelo Linealizado . . . . .	211
7.2. El Controlador Lineal . . . . .	212
7.3. El Observador de Estados . . . . .	215
7.4. Simulación Numérica . . . . .	217
7.4.1. Simulación del Sistema CPI Linealizado con Realimentación de Estados	218
7.4.2. Sistema CPI Linealizado con Realimentación y Estimación de Estados	219
7.4.3. Sistema CPI con Realimentación y Estimación de Estados . . . . .	222
7.5. Conclusiones . . . . .	224
<b>APÉNDICE A-1. SIMBOLOGÍA . . . . .</b>	<b>226</b>
<b>APÉNDICE A-2. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE MATRICES . . . . .</b>	<b>228</b>
A-2.1. La Descomposición $S + N$ . . . . .	228
<b>APÉNDICE A-3. EXPONENCIALES Y POTENCIAS DE MATRICES . . . . .</b>	<b>230</b>
A-3.1. Exponenciales de Matrices . . . . .	230
A-3.2. Algoritmo de Leverrier-Souriau-Faddeeva-Frame Para Calcular $(s\mathbb{I} - A)^{-1}$ . . . . .	233
A-3.3. Vectores Propios Izquierdos . . . . .	237

<b>A-3.4. Descomposición de <math>e^{At}</math> y <math>A^k</math></b> . . . . .	<b>238</b>
A-3.4.1. Descomposición de $e^{At}$ . . . . .	238
A-3.4.1.1. Matrices con Valores Propios Diferentes . . . . .	238
A-3.4.1.2. Matrices con Valores Propios Repetidos . . . . .	241
A-3.4.2. Descomposición de $A^k$ . . . . .	244
<b>APÉNDICE A-4. LA DESCOMPOSICIÓN DE VALOR SINGU-</b>	
<b>LAR</b> . . . . .	<b>246</b>
<b>A-4.1. Inversas Laterales de Matrices</b> . . . . .	<b>246</b>
<b>A-4.2. La Descomposición De Valor Singular</b> . . . . .	<b>248</b>
A-4.2.1. Pseudoinversas de Matrices . . . . .	253
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> . . . . .	<b>256</b>

# 1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo de tesis se estudia el control de los sistemas lineales empleando el concepto de variable de estado y se desarrolla una aplicación al control de un sistema no lineal aproximado por su versión linealizada y se simulan los efectos correspondientes sobre el sistema empleando el módulo SIMULINK de MATLAB.

El estudio del control de los sistemas lineales es importante porque a pesar de que la mayor parte de los sistemas reales es no lineal, en muchos casos se dejan aproximar aceptablemente por sistemas lineales, y también porque facilita el estudio de la más intrincada teoría del control de los sistemas no lineales.

Entre los conceptos más importantes que consideramos se encuentran el de controlabilidad de un sistema, que está relacionado con la posibilidad de intervenir sobre él, de modo que su comportamiento se modifique de alguna manera deseada; en la práctica esto se hace a través de la llamada realimentación de estado, la cual estudiamos en detalle tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Otro concepto importante que estudiamos es el de observabilidad de un sistema, el cual está relacionado con la posibilidad de reconstruir el estado del sistema a partir de mediciones de la entrada y la salida de él. En la práctica es difícil medir directamente el estado de un sistema y, dado que se requiere del estado para realimentarlo, resultan de gran importancia las técnicas que permiten la aproximación del estado de un sistema. En particular estudiamos la técnica del observador asintótico que se caracteriza por emplear un sistema de dinámica similar a la del sistema sobre el que se le aplica; el estado de este sistema réplica, cuando es adecuadamente diseñado, muy rápidamente se parece al estado del sistema original y se le puede realimentar en lugar del estado del sistema.

Finalmente, presentamos como aplicación el diseño de un observador y un realimentador de estado de un sistema no lineal sobre la base de la versión



linealizada de éste y estudiamos el comportamiento del conjunto total sistema no lineal con observador y realimentador de estado.

## 2 SEÑALES Y SISTEMAS

En este capítulo revisamos conceptos y definiciones sobre señales y sistemas e introducimos alguna nomenclatura y notación, los cuales serán útiles en nuestro estudio, bajo el enfoque de espacio de estado de los sistemas.

### 2.1. Sistemas

#### 2.1.1. Descripción

**Definición 2.1.** *Un sistema es un conjunto de partes interactuantes que como un todo muestra un comportamiento distintivo.*

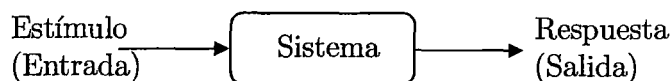


Figura 2.1: Representación esquemática de un sistema.

Como ejemplo, en la Figura 2.2 se muestran las representaciones esquemáticas de tres sistemas. El primero de estos sistemas es un aparato electrónico, un televisor, en el que la entrada es una señal electromagnética y la salida está constituida por la imagen y sonido resultantes; el segundo sistema, que puede identificarse con una fábrica, tiene por entrada a materia prima y labor humana, y por respuesta a los productos terminados; finalmente se muestra un sistema constituido por una cierta población que, ante la exposición a una fuente de enfermedad epidémica, muestra un modo propio de difusión de la enfermedad, consecuencia de la forma como está organizada esta población, es decir, de cómo interactúan los miembros de ella.

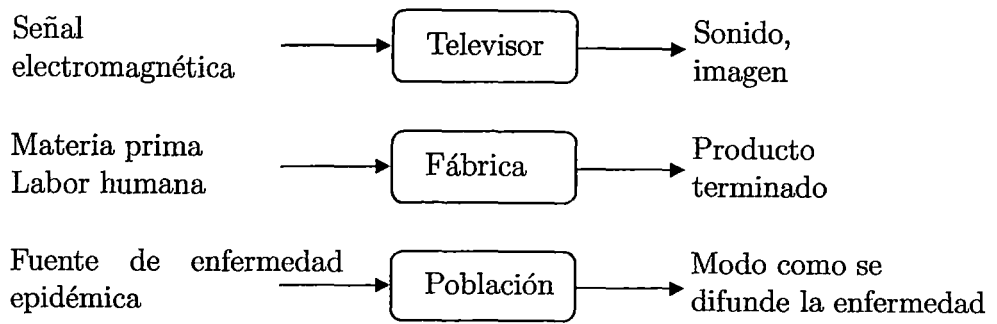


Figura 2.2: Ejemplos de sistemas.

Frecuentemente se monitorea la respuesta de un sistema y se hacen ajustes en él para mejorar su salida (calidad, apariencia, cantidad, etc.) En la Figura 2.3 se muestra el esquema simplificado de un sistema controlado.

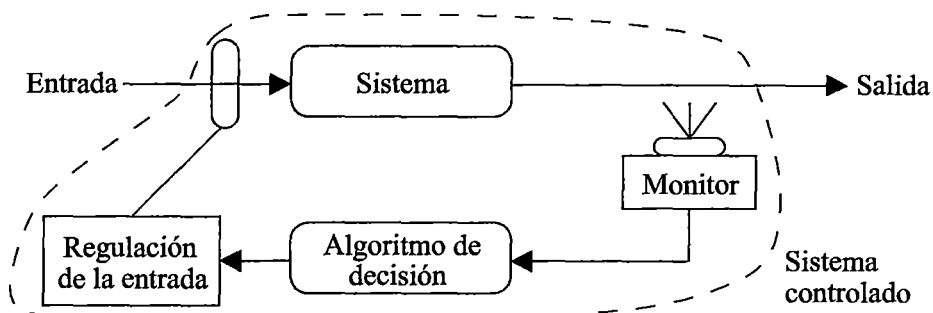


Figura 2.3: Esquema de un sistema controlado.

### 2.1.2. Consideraciones en el Estudio de los Sistemas

- Las entradas y las salidas de los sistemas son frecuentemente representadas por señales o funciones de un parámetro  $t$  que asumiremos es el concepto físico tiempo. Un caso de sistema en el que las funciones no son dependientes del tiempo es el del que se encarga del procesamiento de imágenes en  $\mathbb{R}^2$ , pues, por ejemplo, el hacer más nítida una imagen tiene que ver con la intensidad de colores en un punto  $(x, y)$ , de modo

que aquí las funciones son dependientes de las coordenadas de puntos en  $\mathbb{R}^2$ ). Las señales o funciones pueden estar definidas en tiempo continuo o en tiempo discreto.

- Por conveniencia práctica se usan simplificaciones formalizadas de las relaciones entre las señales pertinentes en el desempeño de los sistemas y son llamadas modelos matemáticos. Se consideran sólo las características dominantes de los sistemas.

## 2.2. Señales

### 2.2.1. Clasificación de las Señales

#### 2.2.1.1. Señales en Tiempo Continuo y Señales en Tiempo Discreto

**Definición 2.2.** Una señal en *tiempo continuo* está definida en todo instante  $t$  (ver la Figura 2.4).

**Definición 2.3.** Una señal en tiempo discreto se define sólo en instantes de tiempo discretos. La variable independiente tiene únicamente valores discretos, los cuales suelen estar espaciados de manera uniforme (Ver la Figura 2.5).

Una señal en tiempo discreto se deriva a menudo de una señal en tiempo continuo *muestreándola* (tomando sus valores) a una tasa uniforme. Por ejemplo, si  $\Delta$  es el periodo de muestreo y  $n$  denota un entero que puede tomar valores positivos y negativos, el muestreo de una señal en tiempo continuo  $x(t)$  en el tiempo  $t = t_0 + n\Delta$  producirá una muestra de valor  $x(t_0 + n\Delta)$ . Por conveniencia en la representación, escribimos

$$x[n] = x(t_0 + n\Delta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

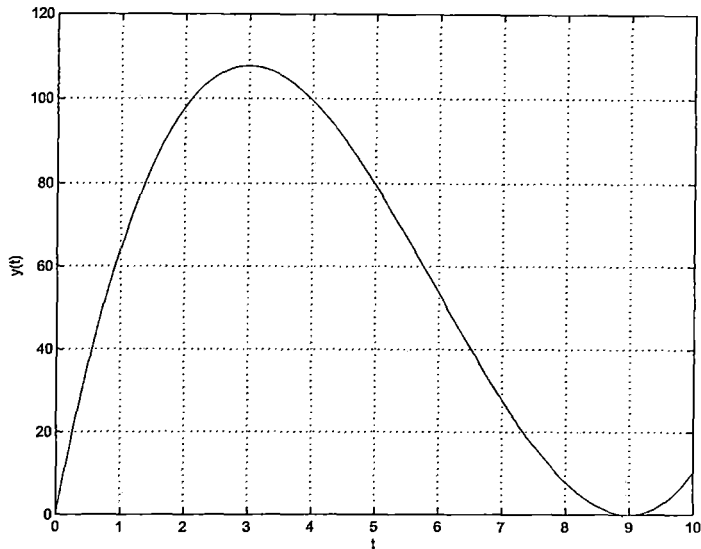


Figura 2.4: Señal  $x(t)$  en tiempo continuo.

De este modo, una señal en tiempo discreto se representa por medio de una sucesión de números,  $\dots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots$ . Esta sucesión se escribe como  $\{x[n] / n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $\{x[n]\}_0^\infty$ , o simplemente  $x[n]$ . Nótese que la señal en tiempo discreto  $x[n]$  de la Figura 2.5 es consecuencia del muestreo con  $t_0 = 0$  y  $\Delta = 1$  de la señal en tiempo continuo  $x(t)$  de la Figura 2.4.

#### 2.2.1.2. Señales Determinísticas y Señales Aleatorias

**Definición 2.4.** Una *señal determinística* es aquella en torno a la cual no hay incertidumbre con respecto a su valor en cualquier tiempo. Un ejemplo de este tipo de señales es  $x(t) = e^{-3t} \cos(t - 4)$ .

Por otra parte, una *señal aleatoria* es aquella en la que hay incertidumbre antes de su ocurrencia real. Tal señal debe verse como parte de un todo o grupo de señales, con cada señal en el grupo con diferente forma de onda. Además cada señal dentro del grupo tiene cierta probabilidad de ocurrencia. El agrupamiento de

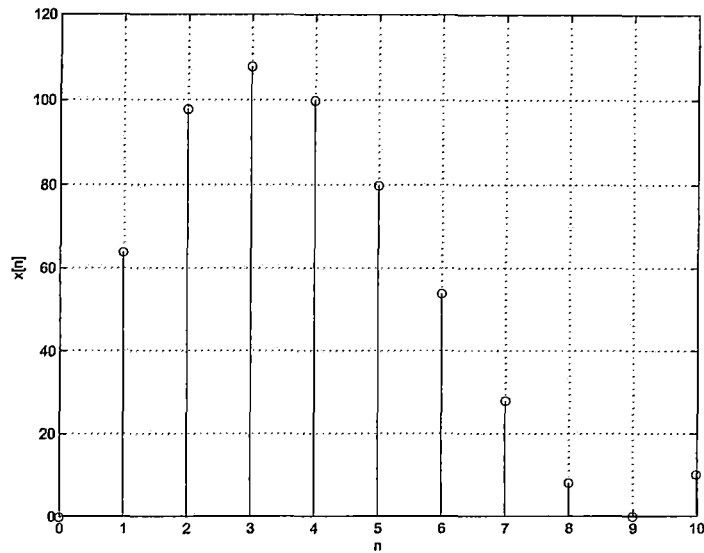


Figura 2.5: Señal (sucesión)  $\{x[n]\}_0^\infty$  (de modo simplificado,  $x[n]$ ) en tiempo discreto ( $n$  empieza en cero sólo por conveniencia.)

tales señales se conoce como un *proceso aleatorio*. El *ruido* generado en el amplificador de un receptor de radio o televisión es un ejemplo de una señal aleatoria.

## 2.2.2. Algunas Señales Elementales

### 2.2.2.1. La Función Escalón

**En Tiempo Continuo** La función escalón unitario  $1^+(t)$  en tiempo continuo es definida como (ver la Figura 2.6).

$$1^+(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

**En Tiempo Discreto** La función escalón unitario  $1^+[n]$  en tiempo discreto es definida como (ver la Figura 2.7)

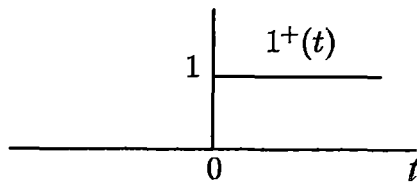


Figura 2.6: Señal escalón unitario en tiempo continuo.

$$1^+[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

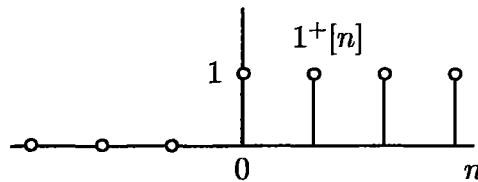


Figura 2.7: Señal escalón unitario en tiempo discreto.

### 2.2.2.2. La Función Impulso Unitario

**En Tiempo Continuo** La función impulso en tiempo continuo,  $\delta(t)$  se define a partir del siguiente par de relaciones:

$$\delta(t) = 0, \quad \forall t \neq 0 \quad (2.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.4)$$

Nótese que

$$1^+(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

y

$$\delta(t) = \frac{d1^+(t)}{dt}$$

La última ecuación requiere de interpretación porque  $1^+(t)$  no es diferenciable en  $t = 0$ :

Definiendo (ver la Figura 2.8)

$$1_{\Delta}^+ t = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/\Delta, & t \in [0, \Delta] \\ 1, & t > \Delta \end{cases} \quad \text{y} \quad \delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\Delta, & t \in [0, \Delta] \\ 0, & t > \Delta \end{cases} ,$$

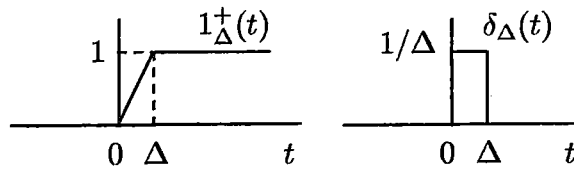


Figura 2.8: Señales  $1_{\Delta}^+(t)$  y  $\delta_{\Delta}(t)$ .

se tiene lo siguiente:

$$1^+(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 1_{\Delta}^+(t), \quad (2.5)$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{d}{dt} 1_{\Delta}^+(t), \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^t k \delta(\tau) d\tau = k \cdot 1^+(t), \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Aunque  $\delta(0) = \infty$ , representamos a  $\delta(t)$  y a su escalamiento  $k\delta(t)$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$  como en la Figura 2.9.

**Observación 2.1.**

$$\begin{aligned} 1^+(t) &= \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma \\ x(t)\delta(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t)\delta_{\Delta}(t) = x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t - t_0) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t)\delta_{\Delta}(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \end{aligned}$$



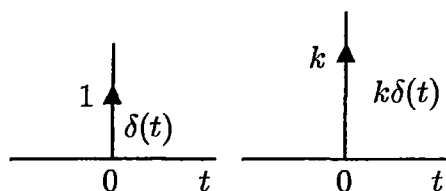


Figura 2.9: Señales  $\delta(t)$  y  $k\delta(t)$ .

### En Tiempo Discreto

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\delta[n] = 1^+[n] - 1^+[n-1] \quad (2.9)$$

$$1^+[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \underbrace{=} \sum_{m=n-k}^{\infty} \delta[n-k] \quad (2.10)$$

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \quad (2.11)$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \quad (2.12)$$

### 2.2.2.3. La Función Rampa

#### En Tiempo Continuo

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

O, equivalentemente,

$$\dot{r}(t) = t \cdot 1^+(t) \quad (2.14)$$

#### En Tiempo Discreto

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

O, equivalentemente,

$$r[n] = n \cdot 1^+[n] \quad (2.16)$$

### 2.2.3. Conversión Entre Señales Continuas y Discretas

En las aplicaciones, los sistemas frecuentemente contienen componentes, o subsistemas, los cuales son tanto discretos y continuos. Una situación típica es ilustrada en la Figura 2.10, donde una señal en tiempo continuo o analógica es procesada usando un algoritmo de procesamiento digital implementado sobre un computador digital de propósito general o usando un chip procesador digital de señales (DSP). También es común para la secuencia resultante de este procesamiento digital que sea convertida de vuelta en una señal analógica con el propósito de conducir un motor, un sistema estéreo, o lo que sea. La conversión de una señal analógica a una sucesión es lograda por un circuito de muestreo y retención en conjunción con un convertidor analógico a digital (ADC), mientras que la conversión de una sucesión a una señal analógica requiere un convertidor digital a analógico (DAC).

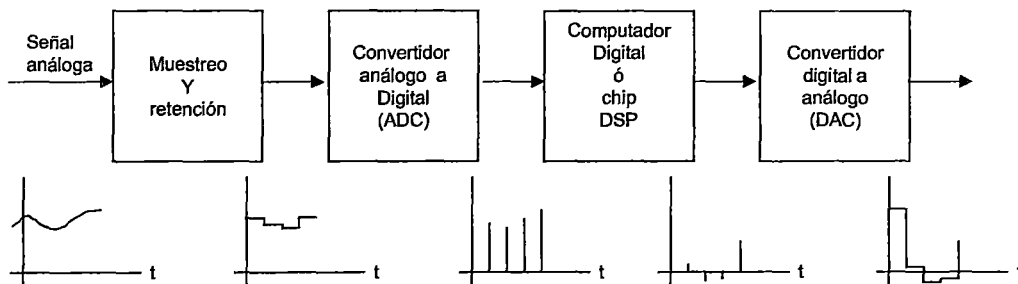


Figura 2.10: Sistema de procesamiento digital de señales.

## 2.3. Sistemas en Tiempo Continuo

Como ya se ha dicho (véase la Sección 2.1.2), el modelo matemático de un sistema  $N$  se especifica a través de la relación entre cualquier entrada admisible

a él,  $u$ , y su correspondiente respuesta,  $y$ . Nosotros representamos esta relación así:

$$y = N[u], \quad (2.17)$$

donde

$u$ : entrada al sistema

$y$ : salida o respuesta del sistema

$N$ : operador que relaciona a  $u$  y a  $y$

Esquemáticamente representamos esta relación como

$$u(\cdot) \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow y(\cdot)$$

$y(\cdot) = N[u(\cdot)]$

$$u(\cdot) \in U, y(\cdot) \in Y$$

donde

$U$ : conjunto de todas las entradas admisibles

$Y$ : conjunto de todas las salidas admisibles,

y gráficamente, como en la Figura 2.11.

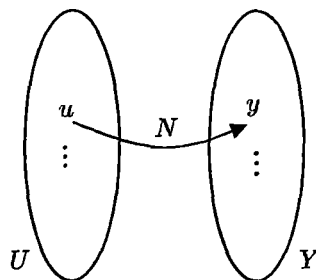


Figura 2.11: Sistema  $N$  con entrada  $u$  y salida  $y$ .

Frecuentemente  $y(t)$  y  $u(t)$  están relacionadas a través de ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, ecuaciones integro-diferenciales, etc.

Debido al amplio uso de las transformadas de Laplace en el estudio de redes y sistemas, diremos que las señales de entrada y salida *admisibles* son aquellas que admiten la transformada de Laplace.

**Definición 2.5.** Una señal en tiempo continuo  $f(\cdot)$  es admisible si

a) *Es seccionalmente continua.*

Recuérdese que  $f(\cdot)$  es seccionalmente continua en  $[a, b]$  si  $\exists p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  en  $(a, b)$ , con  $a < p_1 < \dots < p_n < b$  tal que

- $f$  es continua en todos los subintervalos abiertos de  $[a, b]$  limitados por dos puntos adyacentes de  $\{a, p_1, \dots, p_n, b\}$ . Véase en la Figura 2.12) la gráfica de una señal seccionalmente continua,

▪

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{t \rightarrow p_i^\pm} f(t), & i = 1, \dots, n \\ &\exists \lim_{t \rightarrow a^+} f(t), & \exists \lim_{t \rightarrow b^-} f(t) \end{aligned}$$

b)  $\exists t_0 / f(t) = 0, \forall t \leq t_0$

c)  $\exists c_1, c_2$  reales tales que  $|f(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}$

d) *Se conforma a las dimensiones impuestas por el modelo del sistema. Esto significa que las propiedades de la señal son tales que aplicada ésta, no da lugar a la alteración ni a la destrucción del sistema.*

Las condiciones anteriores, básicamente garantizan la existencia de la transformada de Laplace de una señal admisible.

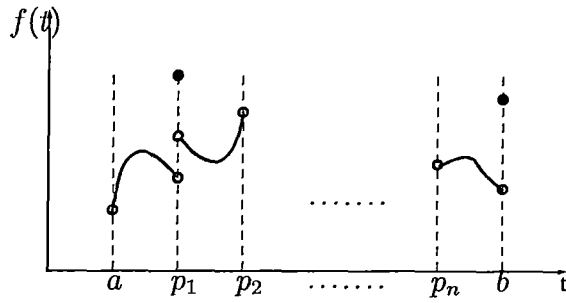


Figura 2.12: Gráfica de una señal seccionalmente continua.

### Oservación 2.2.

- a) Como consecuencia de la definición anterior, se tiene que los conjuntos de todas las señales admisibles de entrada y salida son subespacios vectoriales del espacio de todas funciones definidas sobre  $\mathbb{R}$ . Asimismo, se observa que si  $u(\cdot)$  es admisible,  $u(\cdot - a)$  también lo es, para toda  $a$  real.
- b) En general, trabajaremos con un espacio de funciones admisibles cuyos elementos se comportan lo suficientemente bien, matemáticamente hablando, como para que ocurra que para toda sucesión  $\{u_n(\cdot)\}$  de funciones admisibles  $u_n(\cdot)$  tal que  $u(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\cdot)$ , también  $u(\cdot)$  es admisible (esto es lo mismo que decir que el espacio de funciones admisibles será considerado como un espacio métrico completo).

Espacios admisibles con las características mencionadas se encuentran usualmente en aplicaciones de ingeniería.

### 2.3.1. Clasificación

#### 2.3.1.1. Sistemas Lineales

**Definición 2.6.** *Un sistema descrito por el operador  $N$  es lineal si y sólo si satisface el principio de homogeneidad y el principio de aditividad:*

- *Homogeneidad:*  $N[\alpha u(\cdot)] = \alpha N[u(\cdot)]; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u(\cdot) \in U.$
- *Aditividad:*  $N[u_1(\cdot) + u_2(\cdot)] = N[u_1(\cdot)] + N[u_2(\cdot)], \forall u_1, u_2 \in U.$
- *El que un sistema lineal deba satisfacer los principios de homogeneidad y aditividad es equivalente a que el sistema deba satisfacer el llamado principio de superposición,*  
$$N[\alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot)] = \alpha N[u_1(\cdot)] + \beta N[u_2(\cdot)], \forall u_1, u_2 \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Esta definición preliminar considera que las señales están definidas sobre  $(-\infty, \infty)$  y que el sistema está relajado en  $-\infty$ , es decir, sin condiciones iniciales en  $t = -\infty$ . Más adelante se modificará esta definición para considerar intervalos  $[t_0, \infty)$  y condiciones iniciales en  $t_0$ .

Aunque el mundo real es predominantemente no lineal, se deben estudiar los sistemas lineales porque frecuentemente pueden ser usados en modelos de sistemas reales con suficiente aproximación dentro de un rango de operación, y también para mejor comprensión y estudio de los sistemas no lineales.

#### 2.3.1.2. Sistemas Invariantes en el Tiempo

**Definición 2.7.** *Un sistema denotado por el operador  $N : U \rightarrow Y$  es invariante en el tiempo si siempre que  $y(\cdot) = N[u(\cdot)]$ , ocurre que  $y(\cdot - a) = N[u(\cdot - a)], \forall a \in \mathbb{R}$  (ver la Figura 2.13).*

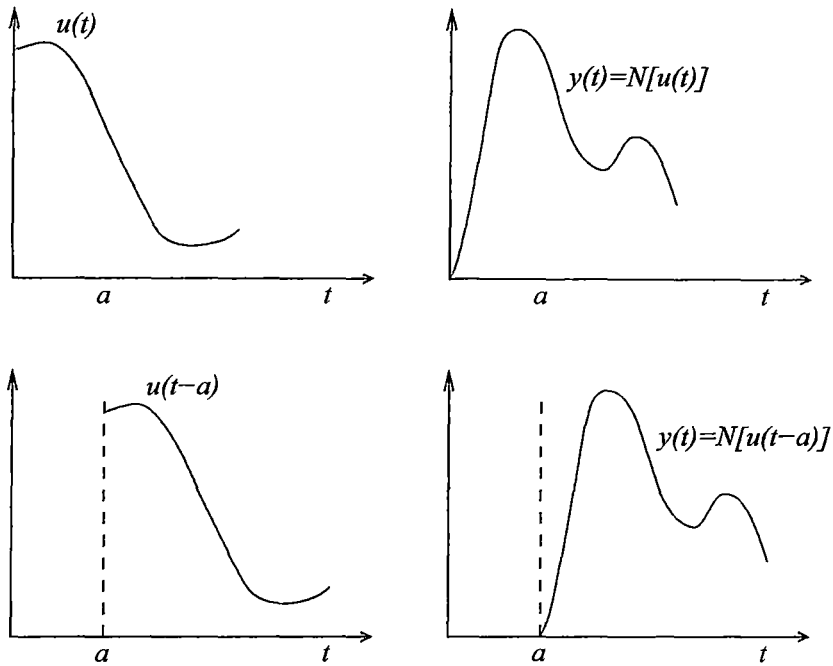


Figura 2.13: Invariancia en el tiempo.

Puede decirse que la invariancia de un sistema significa que su estructura interna no cambia con el tiempo, de modo que se comportará del mismo modo ante el mismo estímulo.

**Nota 2.1.** En general, toda ecuación diferencial en  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $t$ , representa un sistema invariante en el tiempo [variante en el tiempo] si y sólo si  $\nexists$   $[\exists]$  factores de  $u$ ,  $y$ ,  $u^{(i)}$ ,  $y^{(j)}$  dependientes de la variable independiente  $t$ .

**Nota 2.2.** Cualquier ecuación diferencial de la forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)}y}{dt^{(i)}} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{(j)}u}{dt^{(j)}}$$

con  $a_i$ ,  $b_j$  constantes,  $\forall j = 1, \dots, m$ , representa un sistema lineal invariante en el tiempo.

### 2.3.1.3. Sistemas Causales

**Definición 2.8.** *Un sistema  $N : U \rightarrow Y$  es causal, o lo que es lo mismo, es no anticipativo, si  $\forall T$  ocurre que  $\forall u_1, u_2 \in U / u_1(t) = u_2(t), \forall t < T, N[u_1(t)] = N[u_2(t)], \forall t < T$ .*

**Oservación 2.3.** *Se puede decir que un sistema es causal si en todo instante  $t$ , su respuesta depende únicamente de los valores de la entrada en  $t$  y en instantes anteriores a  $t$ .*

**Nota 2.3.** *Sabemos que para sistemas lineales, una señal de entrada idénticamente nula debe producir una respuesta idénticamente nula. Este hecho puede ser usado para mostrar que un sistema lineal es causal si y sólo si, para toda señal  $u(t)$  tal que  $u(t) = 0, \forall t < T$ , la respuesta o salida correspondiente  $y(t)$  satisface  $y(t) = 0, \forall t < T$ .*

### 2.3.1.4. Sistemas Concentrados y Sistemas Distribuidos

Esta definición obedece al hecho de que en ciertos sistemas las señales involucradas tienen longitudes de onda mucho más grandes que el tamaño físico de sus componentes; en otros sistemas, las longitudes de onda de las señales involucradas son de tamaño comparable a las dimensiones físicas de los componentes del sistema. En los primeros, las señales afectan instantáneamente a todo el sistema y sus componentes, denominándoseles por ello *Sistemas Concentrados*, y a los segundos, *Sistemas Distribuidos*, debido a que el estado de sus componentes depende de la localización de estos dentro del sistema y del tiempo.

En general, se dice que los sistemas cuyos modelos matemáticos no contienen retrasos o predictores y no son descritos por ecuaciones diferenciales parciales, son sistemas concentrados; en caso contrario, se dice que estos sistemas son distribuidos.



**Definición 2.9.** *Un sistema es concentrado si sus variables de entrada-salida pueden ser caracterizadas por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias; de otro modo, se dice que el sistema es distribuido, y es representado por ecuaciones diferenciales parciales o por expresiones matemáticas que incluyen retrasos y/o predictores.*

**Observación 2.4.** *En general, todos los circuitos que contienen sólo capacitores ideales, inductores, resistores, transformadores, y fuentes independientes, son concentrados, por supuesto, siempre que las dimensiones del sistema sean muy pequeñas frente a las longitudes de onda de las señales involucradas, en caso contrario los circuitos serían distribuidos (recuérdese la ecuación en derivadas parciales de las líneas de transmisión).*

#### 2.3.1.5. Sistemas Continuos

**Definición 2.10.** *Se dice que un sistema  $N : U \rightarrow Y$  es continuo si y sólo si  $\forall \{u_n\} \subset U$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ , se cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N[u_n] = N[u]$ .*

**Observación 2.5.** *Los sistemas discontinuos representan anomalías matemáticas en el sentido que el análisis de Fourier, común al análisis de sistemas, puede fallar en ellos (pueden no existir las transformadas o series de Fourier de las señales involucradas). En adelante, asumiremos que los sistemas son continuos a menos que se establezca otra cosa.*

**Ejemplo 2.1.** *Sea el sistema  $N : U \rightarrow Y$  para el que*

$$u(t) \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow \begin{cases} 1, \text{ si } u(t) > 0 \\ 0, \text{ si } u(t) \leq 0 \end{cases}$$

*Si  $\{u_n\} \subset U$  es una sucesión de entradas admisibles de elementos*

$$u_n(t) = \frac{1}{n} 1^+(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N[u_n(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^+(t) = 1^+(t) \neq 0(t) = N[0(t)] = N[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)],$$

de modo que el sistema no es continuo. ◁

### 2.3.2. La Noción de Estado

**Definición 2.11.** El estado  $x(t)$  de un sistema es el conjunto mínimo de variables internas, cuyos valores al tiempo  $t_0$  son suficientes para especificar de modo único las salidas del sistema, dada la señal de entrada sobre  $[t_0, \infty)$ ,  $\forall t_0$ .

**Oservación 2.6.** La elección del estado de un sistema no es única: se pueden formar conjuntos diferentes de variables de estado para un mismo sistema.

#### 2.3.2.1. Re-definiciones de Linealidad, Invariancia en el Tiempo, etc.

**Definición 2.12.** Sea  $y(t) = N[u(t), x(t_0)]$  la respuesta de un sistema a la señal de entrada  $u(t)$  definida en  $[t_0, \infty)$ , con estado inicial  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ . Entonces el sistema es lineal si y sólo si para cualquier par de señales admisibles de entrada  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ , y cualquier escalar  $k$ , se cumple

$$k(N[u_1(t), x(t_0)] - N[u_2(t), x(t_0)]) = N[k(u_1(t) - u_2(t)), 0(t_0)], \quad \forall t \geq t_0,$$

$\forall$  estado inicial  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  al tiempo  $t_0$ , donde  $0(t_0)$  es el vector cero en  $t_0$ .

De modo equivalente, un sistema es lineal si y sólo si se cumplen a la vez:

- *Propiedad de separación:*

$$N[u(t), x(t_0)] = N[0(t), x(t_0)] + N[u(t), 0(t_0)], \quad \forall t \geq t_0,$$

donde

$$N[0(t), x(t_0)] = \text{Respuesta del sistema a la entrada } 0(t), \text{ con estado inicial } x(t_0) \text{ al tiempo } t_0 \text{ (respuesta de entrada cero.)}$$

$$N[u(t), 0(t_0)] = \text{Respuesta del sistema a la entrada } u(t), \text{ con estado inicial } 0(t_0) \text{ al tiempo } t_0 \text{ (respuesta de estado cero.)}$$

- *Linealidad de estado cero:*

$$N[u_1(t) + u_2(t), 0(t_0)] = N[u_1(t), 0(t_0)] + N[u_2(t), 0(t_0)], \quad \forall t \geq t_0,$$

$\forall u_1, u_2$  entradas admisibles.

- *Linealidad de entrada cero:*

$$N[0(t), x_1(t_0) + x_2(t_0)] = N[0(t), x_1(t_0)] + N[0(t), x_2(t_0)], \quad \forall t \geq t_0,$$

$\forall x_1(t_0), x_2(t_0)$  vectores de estado inicial al tiempo  $t_0$

**Observación 2.7.** *Se puede probar también que un sistema  $N$  es lineal*

$$\Leftrightarrow N[ku(t), rx(t_0)] = kN[u(t), 0(t_0)] + rN[0, x(t_0)], \quad (2.18)$$

$$\forall k, r \in \mathbb{R}, \forall u \in U, \forall x(t_0)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow N[\alpha(u_1(t), x_1(t_0)) + \beta(u_2(t), x_2(t_0))] \\ = \alpha N[u_1(t), x_1(t_0)] + \beta N[u_2(t), x_2(t_0)], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u_i \in U, \forall x_i(t_0), i = 1, 2$$

**Definición 2.13.** Sea un sistema lineal  $y(t) = N[u(t), x(t_0)]$ , donde  $y(t)$  es la respuesta del sistema  $N$  cuando la entrada a él es  $u(t)$ ,  $x(t)$  es el vector de estado o respuesta de estado correspondiente, y  $x(t_0)$  es el valor del vector de estado en el instante inicial  $t_0$ . Denotando la relación entre  $x(t)$ ,  $u(t)$ , y  $x(t_0)$  como  $x(t) = N_e[u(t), x(t_0)]$ , donde  $N_e$  es llamado operador de respuesta de estado del sistema, se define lo siguiente:

$x_h(t) = N_e[0(t), x_h(t_0) = x(t_0)]$ , la respuesta de estado de entrada cero del sistema,  
y

$x_{nh}(t) = N_e[u(t), x_{nh}(t_0) = 0(t_0)]$ , la respuesta de estado de estado cero del sistema.

**Oservación 2.8.** Siendo  $N$  un sistema lineal, y tomando en cuenta la Definición 2.13, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 y(t) &= N[u(t), x(t_0)] \\
 &= N[(0(t) + u(t), x(t_0) + 0(t_0))] \\
 &= N[(0(t), x(t_0)) + (u(t), 0(t_0))] \\
 &= N[0(t), x(t_0)] + N[u(t), 0(t_0)] \\
 &= N[0(t), x_h(t_0) = x(t_0)] + N[u(t), x_{nh}(t_0) = 0(t_0)],
 \end{aligned}$$

de modo que se observa que la relación entre  $x(t)$ ,  $x_h(t)$  y  $x_{nh}(t)$  es

$$x(t) = x_h(t) + x_{nh}(t)$$

o, lo que es lo mismo,

$$N_e[u(t), x(t_0)] = N_e[0(t), x(t_0)] + N_e[u(t), 0(t_0)] \quad (2.20)$$

De modo similar, se puede probar que un sistema  $N$  es lineal si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones:

$$N_e[ku(t), rx(t_0)] = kN_e[u(t), 0(t_0)] + rN_e[0, x(t_0)], \quad (2.21)$$

$$\forall k, r \in \mathbb{R}, \forall u \in U, \forall x(t_0)$$

$$\Leftrightarrow N_e[\alpha(u_1(t), x_1(t_0)) + \beta(u_2(t), x_2(t_0))] \\ = \alpha N_e[u_1(t), x_1(t_0)] + \beta N_e[u_2(t), x_2(t_0)], \quad (2.22)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u_i \in U, \forall x_i(t_0), i = 1, 2$$

**Definición 2.14.** Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si dado que  $y(t) = N[u(t), \xi]$ ,  $t \geq t_0$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , vector constante, estado inicial al tiempo  $t_0$ , se cumple que  $y(t - T) = N[u(t - T), \xi]$ ,  $t \geq t_0 + T$ ,  $\forall T$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , vector constante, estado inicial al tiempo  $t_0 + T$ .

Podemos decir que un sistema es invariante en el tiempo, con tiempo y estado iniciales si en todo instante, ante el mismo estímulo, y con el mismo estado inicial, responde de la misma manera, o lo que es lo mismo, si su estructura interna no varía con el tiempo.

**Ejemplo 2.2.** Sea el sistema  $N : U \rightarrow Y$  para el que la señal de entrada  $u_1(t) = e^{-t} \cos(2\pi t) 1^+(t)$  provoca la señal de salida  $y_1(t) = 0.5e^{-t} \cos(2\pi t + 0.14\pi) 1^+(t)$ , donde

$$1^+(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{función escalón}$$

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, determínese la respuesta  $y_2(t)$  del sistema  $N$  a la señal de entrada  $u_2(t) = 0.5u_1(t - 1)$ .

## Solución

$$\begin{aligned}N[u_2(t)] &= N[0.5u_1(t-1)] \\&= 0.5N[u_1(t-1)] \text{ linealidad de } N \\&= 0.5 (N[u_1(t)])|_{t=t-1} \text{ invariancia en } t \text{ de } N \\&= 0.5 [0.5e^{-t} \cos(2\pi t + 0.14\pi)1^+(t)]|_{t=t-1} \\&= 0.25e^{1-t} \cos(2\pi t + 0.14\pi - 2\pi)1^+(t-1)\end{aligned}$$

◁

El siguiente teorema es de gran utilidad cuando la entrada es la derivada o integral de alguna otra función de  $t$ .

**Teorema 2.1.** *Si  $N$  es un sistema lineal, continuo, invariante en el tiempo, se cumplen:*

$$\begin{aligned}N[D_t u(t)] &= D_t N[u(t)] \\N\left[\int_{\tau}^t u(t) dt\right] &= \int_{\tau}^t N[u(t)] dt \\N[D_t u(t), x(t_0)] &= N[0(t), x(t_0)] + D_t N[u(t), 0(t_0)] \\N\left[\int_{\tau}^t u(t) dt, x(t_0)\right] &= N[0(t), x(t_0)] + \int_{\tau}^t N[u(t), 0(t_0)] dt,\end{aligned}$$

donde:

$u(t)$  = entrada admisible

$t_0$  = tiempo inicial

$x(t_0)$  = estado inicial al tiempo  $t_0$

$D_t u(t)$  = derivada de la función  $u(t)$

$\int_{\tau}^t u(t) dt$  = integral definida de la función  $u(t)$

(Nótese que  $N[u(t)] = N[u(t), 0(t_0)]$ ,  $t > t_0$ )

**Ejemplo 2.3.** Sea el sistema  $N$  para el que

$$u(t) = 1^+(t) \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow y(t) = (1 - e^{-t})1^+(t)$$

- a) Si este sistema es lineal, agrupado, invariante en el tiempo y causal, complete la figura siguiente (recuérdese que  $D_t 1^+(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{si } t = 0 \\ 0, & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$ ):

$$u(t) = \delta(t - 2) \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow y(t) = ?$$

- b) Si ahora el sistema  $N$  se conoce, sólo es causal e invariante en el tiempo, complete la siguiente figura:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow y(t) = ?,$$

donde  $u(t)$  tiene el comportamiento esbozado en la Figura 2.14.

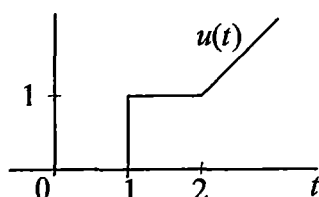


Figura 2.14: Entrada  $u(t)$  del Ejemplo 2.3.

### Solución

a)

$$\begin{aligned} y(t) &= N[\delta(t - 2)] = N[(D_t 1^+(t))|_{t=t-2}] \\ &= N[D_t 1^+(t)]|_{t=t-2} : N \text{ es invariante en el tiempo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \underbrace{(D_t N[1^+(t)])}_{\text{dato}} \Big|_{t=t-2} : N \text{ es lineal, continuo e in-} \\
&\quad \text{variante en el tiempo} \\
&= \{D_t ((1 - e^{-t})1^+(t))\} \Big|_{t=t-2} \\
&= [e^{-t}1^+(t)] \Big|_{t=t-2} = e^{-(t-2)}1^+(t-2)
\end{aligned}$$

b) Si ahora el sistema  $N$  es sólo causal e invariante en el tiempo.

En este caso, nótese que  $u(t) = 1^+(t-1)$ ,  $\forall t \leq 2$ .

Como el sistema es causal,

$$\begin{aligned}
N[u(t)] &= N[1^+(t-1)], \forall t \leq 2 \text{ (causalidad)} \\
&= N[1^+(t)] \Big|_{t=t-1}, \forall t \leq 2 \text{ (invariancia)} \\
&= [(1 - e^{-t})1^+(t)] \Big|_{t=t-1}, \forall t \leq 2 \\
&= (1 - e^{-(t-1)})1^+(t-1), \forall t \leq 2
\end{aligned}$$

### 2.3.2.2. Notación de Sistemas en Tiempo Continuo

1. Sistema no lineal variante en el tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\
y(t) &= g(x(t), u(t), t)
\end{aligned}$$

( $x$  es el vector de estado: corrientes, voltajes, posición, etc.)

2. Sistema no lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\
y(t) &= g(x(t), u(t))
\end{aligned}$$



3. Sistema lineal variante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

4. Sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

### 2.3.3. Linealización de Sistemas

#### 2.3.3.1. Preliminares

**Teorema 2.2.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto, se cumple que<sup>1</sup>  
 $\forall x \in \Omega, \exists \delta > 0 / B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n / \|y - x\| < \delta\} \subset \Omega$  y,  $\forall h \in \mathbb{R}^n$  con  $\|h\| < \delta$ , se satisface<sup>2</sup>

$$f(x + h) = f(x) + \mathcal{D}f(x)h + \Phi(x, h)h,$$

donde

$$\mathcal{D}f(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{bmatrix}$$

es la matriz jacobiana de  $f$  en  $x$ ,

$$\nabla f_j(x) = \left( \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_n} \right), \quad y$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(x, h) = 0.$$

---

<sup>1</sup> $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$

<sup>2</sup>Éste es un desarrollo en serie de Taylor de un paso de  $f$  en  $x + h$  alrededor de  $x$ .

### 2.3.3.2. Procedimiento para Linealizar un Sistema

Supóngase que se representa un sistema no lineal con las siguientes ecuaciones de estado matriciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t),\end{aligned}\tag{2.23}$$

$$x \in \mathcal{M}(n, 1), y \in \mathcal{M}(r, 1), u \in \mathcal{M}(m, 1), f : \mathbb{R}^{m+n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, g \in \mathbb{R}^{m+n+1} \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

y que se conoce que  $x_o(t)$  es una solución de la ecuación diferencial de (2.23) correspondiente a la entrada  $u_o(t)$  y a un vector de estado inicial constante.

**Nota 2.4.** Comúnmente, cuando se cumple  $\frac{d}{dt}x_o(t) = \dot{x}_o(t) = f(x_o(t), u_o(t), t)$ , se denomina a  $(x_o(t), u_o(t))$  punto de operación del sistema.

Usando el teorema anterior y considerando  $(x(t), u(t))$ , un punto de operación suficientemente cercano a  $(x_o(t), u_o(t))$ , se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \cong f(x_o(t), u_o(t), t) + (A|B) \begin{bmatrix} x(t) - x_o(t) \\ u(t) - u_o(t) \end{bmatrix} \\ \text{ó } \dot{x}(t) &\cong \dot{x}_o(t) + A(x(t) - x_o(t)) + B(u(t) - u_o(t)), \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \cong g(x_o(t), u_o(t), t) + (C|D) \begin{bmatrix} x(t) - x_o(t) \\ u(t) - u_o(t) \end{bmatrix} \\ \text{ó } y(t) &\cong y_o(t) + C(x(t) - x_o(t)) + D(u(t) - u_o(t)),\end{aligned}$$

donde

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \Bigg|_{(x_o(t), u_o(t), t)}, \quad B = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{array} \right] \Bigg|_{(x_o(t), u_o(t), t)}, \tag{2.24}$$

$$C = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{array} \right]_{(x_o(t), u_o(t), t)}, \quad D = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_r}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial u_m} \end{array} \right]_{(x_o(t), u_o(t), t)}. \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \text{ó} \quad A &= \frac{\partial f(x_o, u_o)}{\partial x}, & B &= \frac{\partial f(x_o, u_o)}{\partial u}, \\ C &= \frac{\partial g(x_o, u_o)}{\partial x}, & D &= \frac{\partial g(x_o, u_o)}{\partial u}. \end{aligned}$$

Escribiendo

$$\begin{aligned} y_o(t) &= g(x_o(t), u_o(t), t), \\ \Delta x(t) &= x(t) - x_o(t) \\ \Delta y(t) &= y(t) - y_o(t) \\ \Delta u(t) &= u(t) - u_o(t), \end{aligned}$$

se tiene que una aproximación al sistema (2.23) es el llamado sistema linealizado cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o(t) + \Delta x(t) \\ y(t) &= y_o(t) + \Delta y(t), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x}(t) &= A \Delta x(t) + B \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C \Delta x(t) + D \Delta u(t) \end{aligned}$$

Nótese que las ecuaciones de estos últimos dos renglones representan a un sistema lineal.

**Ejemplo 2.4.** Un sistema no lineal es descrito por las siguientes ecuaciones con variables de entrada  $u_1$ ,  $u_2$ , y salida  $y$ :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + (\sin v)\frac{dv}{dt} + u_2v = u_1 + u_2, \quad y = (\cos v)u_2$$

- a) ¿Es el sistema descrito por estas ecuaciones variante en el tiempo o invariante en el tiempo?
- b) Halle las matrices de espacio de estado  $A, B, C, D$  para el sistema linealizado en el punto de operación constante definido por  $u_1 = 0, u_2 = 1$ .

**Solución** Desde que el sistema es de segundo orden en  $v$ , sea  $x_1 = v$ ,  $x_2 = \dot{v}$ , dando las ecuaciones de espacio de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(\sin x_1)x_2 - u_2x_1 + u_1 + u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

$$y = (\cos x_1)u_2 = G$$

- a) Como  $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ , el sistema es invariante en el tiempo.

Las ecuaciones son no lineales debido a los términos  $(\sin x_1)x_2$  y  $u_2x_1$ .

- b) El punto de operación es definido por  $u_{01} = 0, u_{02} = 1$ , y es constante; esto es,  $\dot{x}_{01} = 0, \dot{x}_{02} = 0$ . Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de espacio de estado, obtenemos

$$0 = x_{02}, \Rightarrow x_{02} = 0$$

$$0 = -(\sin x_{01})0 - 1 \cdot x_{01} + 0 + u_{02} = -x_{01} + 1, \Rightarrow x_{01} = 1,$$

de modo que el punto de operación constante definido por  $u_{01} = 0$  y  $u_{02} = 1$  es

$$(x_o, u_o) = ((1, 0), (0, 1))$$

Además,

$$y_o = (\cos x_{01})u_{02} = \cos(1).$$

Entonces

$$A = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \Big|_{(x_o, u_o)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -\sin(1) \end{array} \right]$$

$$B = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{array} \right] \Big|_{(x_o, u_o)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 - x_1 \end{array} \right] \Big|_{(x_o, u_o)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right],$$

$$C = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} \end{array} \right] \Big|_{(x_o, u_o)} = \left[ \begin{array}{cc} (-\sin x_1)u_2 & 0 \end{array} \right] \Big|_{(x_o, u_o)} = \left[ \begin{array}{cc} -\sin(1) & 0 \end{array} \right],$$

$$D = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial G}{\partial u_1} & \frac{\partial G}{\partial u_2} \end{array} \right] \Big|_{(x_o, u_o)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & \cos x_1 \end{array} \right] \Big|_{(x_o, u_o)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & \cos(1) \end{array} \right].$$

◁

## 2.4. Sistemas en Tiempo Discreto

### 2.4.1. Introducción

**Definición 2.15.** Los sistemas en tiempo discreto son aquellos cuyas entradas  $u(t)$  y salidas  $y(t)$  están definidas en puntos aislados del tiempo  $t_o, t_1, t_2, \dots, t_i < t_j, \forall j > i$ . Frecuentemente se tiene  $t_k = t_o + k\Delta t$ , con  $\Delta t = \text{constante}$ . En este caso, se acostumbra usar  $y[k]$  y  $u[k]$  en lugar de  $y(t_o + k\Delta t)$  y  $u(t_o + k\Delta t)$ , respectivamente,

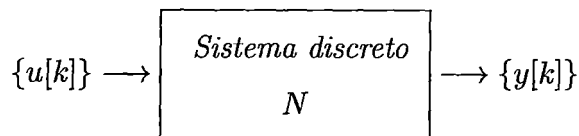
y se denota un sistema en tiempo discreto como:

$$\{y[k]\} = N[\{u[k]\}],$$

o, de modo simplificado,

$$y[k] = N[u[k]], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

con la siguiente representación gráfica:



**Definición 2.16.** Se dice que una sucesión  $\{u[k]\}_{-\infty}^{\infty}$  es admisible si existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $u[k] = 0, \forall k \leq k_0$  y tiene transformada  $\mathcal{Z}$  lateral. De modo similar se define una sucesión  $\{y[k]\}_{-\infty}^{\infty}$  admisible.

## 2.4.2. Clasificación de los Sistemas en Tiempo Discreto

### 2.4.2.1. Sistemas Lineales

**Definición 2.17.** Un sistema en tiempo discreto  $L$  es lineal si  $\forall \{u_1[k]\}_{k=0}^{\infty}$  y  $\{u_2[k]\}_{k=0}^{\infty}$  señales admisibles de entrada y,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$L[\alpha\{u_1[k]\}_{k=0}^{\infty} + \beta\{u_2[k]\}_{k=0}^{\infty}] = \alpha L[\{u_1[k]\}_{k=0}^{\infty}] + \beta L[\{u_2[k]\}_{k=0}^{\infty}]$$

siempre que el sistema esté inicialmente relajado, esto es, todas las condiciones iniciales son cero.

### 2.4.2.2. Sistemas Invariantes en el Tiempo

**Definición 2.18.** Un sistema en tiempo discreto  $N$  es invariante en el tiempo si, siempre que  $\{y[k]\} = N[\{u[k]\}]$ , entonces para cualquier entero  $R$ ,

$$\{y[k - R]\} = N[\{u[k - R]\}].$$

**Ejemplo 2.5.** Sea el sistema  $\{u[k]\} \rightarrow \boxed{\mathbb{N}} \rightarrow \{y[k]\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , con

$$y[k + 1] + y[k] = 2u[k], \quad y[0] = 0$$

(Sistema lineal invariante en el tiempo, en tiempo discreto).

Veamos la respuesta  $\{y[k]\}$  del sistema a  $\{u[k]\} = \{\delta[k]\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

$$u[0] = 1, \quad y[0] = 0$$

$$y[1] = 2u[0] - y[0] = 2(1) - 0 = 2$$

$$y[2] = 2u[1] - y[1] = 0 - 2 = -2$$

$$y[3] = 2u[2] - y[2] = 2(0) - (-2) = 2$$

$\vdots$

Se tiene:

$$\{\dots, \underbrace{u[2]}_0, \underbrace{u[1]}_0, \underbrace{u[0]}_1\} \rightarrow \boxed{\mathbb{N}} \rightarrow \{\dots, \underbrace{y[2]}_{-2}, \underbrace{y[1]}_2, \underbrace{y[0]}_0\}$$

$\triangleleft$

### 2.4.2.3. Sistemas Causales

**Definición 2.19.** Un sistema  $N : U \rightarrow Y$  es causal, o lo que es lo mismo, es no anticipativo, si  $\forall P \in \mathbb{Z}$  ocurre que  $\forall u_1, u_2 \in U / u_1[k] = u_2[k], \forall k \leq P$ ,  $N[u_1[k]] = N[u_2[k]], \forall k \leq P$ .

#### 2.4.2.4. Sistemas Distribuidos en el Tiempo

En comparación a las ecuaciones diferenciales de los sistemas en tiempo continuo, las ecuaciones en diferencias son modelos para sistemas en tiempo discreto. Por ejemplo, una ecuación en diferencias de orden  $n$  toma la forma

$$y[k+n] + a_1[k]y[k+n-1] + \dots + a_n[k]y[k] = b_0[k]u[k] + b_1[k]u[k+1] + \dots + b_m[k]u[k+m]$$

Reordenando esta ecuación, obtenemos

$$y[k+n] = b_0[k]u[k] + b_1[k]u[k+1] + \dots + b_m[k]u[k+m] - a_1[k]y[k+n-1] - \dots - a_n[k]y[k]$$

Como se ve, esta última ecuación muestra que el  $(k+n)$ -ésimo término en la sucesión de la respuesta depende de valores de la sucesión de salida y de varios términos de la sucesión de entrada. De este modo, en el instante  $(k+n)$ -ésimo, el valor de la salida depende de valores retrasados de los de entrada y salida. En consecuencia, tomando en cuenta la Definición 2.9, tenemos que sistemas como éstos son de naturaleza distribuida en el tiempo.

#### 2.4.3. La Noción de Estado

El establecimiento de las versiones en tiempo discreto de las definiciones de vector de estado, y de sistema lineal y de sistema invariante en el tiempo con tiempo y estado iniciales es como sigue:

**Definición 2.20.** *El estado  $x[n]$  de un sistema es el conjunto mínimo de variables internas, cuyos valores al tiempo  $n_0$  son suficientes para especificar de modo único las salidas del sistema, dada la señal de entrada sobre  $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ .*



**Oservación 2.9.** *La elección del estado de un sistema no es única: se pueden formar conjuntos diferentes de variables de estado para un mismo sistema.*

2.4.3.1. Re-definiciones de Linealidad, Invariancia en el Tiempo, etc.

**Definición 2.21.** *Sea  $y(t) = N[u[n], x[n_0]]$  la respuesta de un sistema a la señal de entrada  $u[n]$  definida en  $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ , con estado inicial  $x[n_0] \in \mathbb{R}^n$ . Entonces el sistema es lineal si y sólo si para cualquier par de señales admisibles de entrada  $u_1[n]$  y  $u_2[n]$ , y cualquier escalar  $k$ , se cumple*

$$k(N[u_1[n], x[n_0]] - N[u_2[n], x[n_0]]) = N[k(u_1[n] - u_2[n]), 0[n_0]], \quad \forall n \geq n_0,$$

$\forall$  estado inicial  $x[n_0] \in \mathbb{R}^n$  al tiempo  $n_0$ , donde  $0[n_0]$  es el vector cero en  $n_0$ .

*De modo equivalente, un sistema es lineal si y sólo si se cumplen a la vez:*

- *Propiedad de separación:*

$$N[u[n], x[n_0]] = N[0[n], x[n_0]] + N[u[n], 0[n_0]], \quad \forall n \geq n_0,$$

donde

$N[0[n], x[n_0]] =$  *Respuesta del sistema a la entrada  $0[n]$ , con estado inicial  $x[n_0]$  al tiempo  $n_0$  (respuesta de entrada cero.)*

$N[u[n], 0[n_0]] =$  *Respuesta del sistema a la entrada  $u[n]$ , con estado inicial  $0[n_0]$  al tiempo  $n_0$  (respuesta de estado cero.)*

- *Linealidad de estado cero:*

$$N[u_1[n] + u_2[n], 0[n_0]] = N[u_1[n], 0[n_0]] + N[u_2[n], 0[n_0]], \quad \forall n \geq n_0,$$

$\forall u_1, u_2$  entradas admisibles.

- *Linealidad de entrada cero:*

$$N[0[n], x_1[n_0] + x_2[n_0]] = N[0[n], x_1[n_0]] + N[0[n], x_2[n_0]], \quad \forall n \geq n_0,$$

$\forall x_1[n_0], x_2[n_0]$  vectores de estado inicial al tiempo  $n_0$

### **Oservación 2.10.**

**Definición 2.22.** *Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si dado que  $y[n] = N[u[n], \xi]$ ,  $n \geq n_0$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , vector constante, estado inicial al tiempo  $n_0$ , se cumple que  $y[n - T] = N[u[n - T], \xi]$ ,  $n \geq n_0 + T$ ,  $\forall T \in \mathbb{N}$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , vector constante, estado inicial al tiempo  $n_0 + T$ .*

*Podemos decir que un sistema es invariante en el tiempo, con tiempo y estado iniciales si en todo instante, ante el mismo estímulo, y con el mismo estado inicial, responde de la misma manera, o lo que es lo mismo, si su estructura interna no varía con el tiempo.*

## 2.4.4. Caracterización de un Sistema en Tiempo Discreto

### 2.4.4.1. Notación de Sistemas en Tiempo Discreto

1. *Sistema no lineal variante en el tiempo:*

$$x[k + 1] = f(x[k], u[k], k)$$

$$y[k] = g(x[k], u[k], k)$$

*( $x$  es el vector de estado: corrientes, voltajes, posición, velocidad, etc.)*

2. Sistema no lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned}x[k + 1] &= f(x[k], u[k]) \\ y[k] &= g(x[k], u[k])\end{aligned}$$

3. Sistema lineal variante en el tiempo:

$$\begin{aligned}x[k + 1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k]\end{aligned}$$

4. Sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned}x[k + 1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k]\end{aligned}$$

## 2.5. Modelos de Estado de Sistemas Lineales.

### 2.5.1. Sistemas en Tiempo Continuo

2.5.1.1. El Modelo de Estado de un Sistema Lineal Variante en el Tiempo (LVT).

**Definición 2.23.** *Un modelo de estado para un sistema lineal concentrado variante en el tiempo es un conjunto  $\{A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)\}$  de cuatro funciones matriciales que definen una ecuación diferencial vectorial de primer orden que se denomina*

ecuación de estado, y una ecuación vectorial, llamada ecuación de salida,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.26}$$

donde

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  Es el vector de estado (vector de variables de estado),

$u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada al sistema,

$y(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de salida del sistema,

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  son matrices de funciones componentes reales seccionalmente continuas en  $t$ .

$x(t_0) = x_0$  es el vector de estado inicial al tiempo  $t_0$  (condición inicial para (2.26))

Una representación en diagrama de bloques de la Ecuación (2.26) es mostrada en la Figura 2.15.

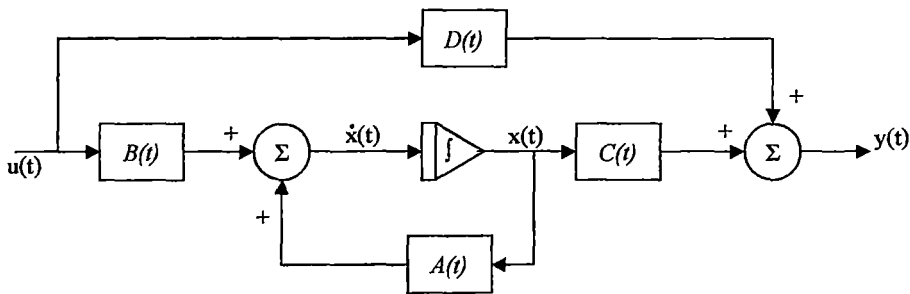


Figura 2.15: Diagrama de bloques de un modelo de estado lineal, variante en el tiempo para sistemas concentrados

### 2.5.1.2. El Modelo de Estado de un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LIT).

*Está definido en forma similar al caso de un sistema LVT, pero considerando que las matrices  $A, B, C$ , y  $D$  del sistema tienen componentes constantes.*

#### Observaciones

- *La selección del vector de estado de un sistema no es única, de modo que se pueden tener diversos modelos de estado representando a un mismo sistema, correspondiendo cada uno de ellos a una selección de un conjunto particular de variables de estado.*
- *Se dice que dos modelos de estado son equivalentes de estado cero si con estados iniciales cero y entradas iguales, las respuestas de los dos coinciden.*
- *Cualquier modelo de estado lineal invariante en el tiempo*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

*tiene una representación de modelo de estado equivalente de estado cero*

$$\dot{z}(t) = [TAT^{-1}]z(t) + [TB]u(t)$$

$$y(t) = [CT^{-1}]z(t) + Du(t)$$

*bajo la transformación de estado  $z = Tx$ , donde  $T$  es no singular.*

## 2.5.2. Sistemas Lineales en Tiempo Discreto

### 2.5.2.1. El Modelo de Estado Lineal Variante en el Tiempo en Tiempo Discreto

**Definición 2.24.** *Un modelo de estado para un sistema lineal variable en el tiempo en tiempo discreto es un conjunto  $\{A[\cdot], B[\cdot], C[\cdot], D[\cdot]\}$  de cuatro funciones matriciales en tiempo discreto que definen una ecuación vectorial en diferencias de primer orden*

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k] \\x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde

$x[k] \in \mathbb{R}^n$  es la sucesión vectorial de vectores de estado ,

$\{u[k]\} \in \mathbb{R}^m$  es la sucesión vectorial de entrada al sistema,

$\{y[k]\} \in \mathbb{R}^r$  es la sucesión vectorial de salida del sistema,

$A[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B[k] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C[k] \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D[k] \in \mathbb{R}^{r \times m}$  son matrices de funciones componentes reales en tiempo discreto.

$x[0] = x_0$  es el vector de estado inicial al tiempo  $k = 0$  (condición inicial para (2.27))

### 2.5.2.2. El Modelo de Estado Invariante en el Tiempo en Tiempo Discreto

**Definición 2.25.** *Un modelo de estado para un sistema lineal invariante en el tiempo en tiempo discreto es un conjunto  $\{A, B, C, D\}$  de cuatro matrices constantes que*

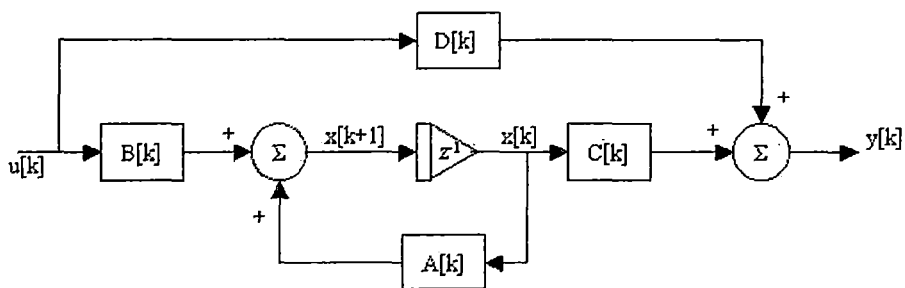


Figura 2.16: Diagrama de bloques de un modelo de estado lineal, variante en el tiempo en tiempo discreto

definen una ecuación vectorial en diferencias de primer orden

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

donde

$x[k] \in \mathbb{R}^n$  es la sucesión vectorial de vectores de estado ,

$\{u[k]\} \in \mathbb{R}^m$  es la sucesión vectorial de entrada al sistema,

$\{y[k]\} \in \mathbb{R}^r$  es la sucesión vectorial de salida del sistema,

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$  son matrices de funciones componentes reales en tiempo discreto.

$x[0] = x_0$  es el vector de estado inicial al tiempo  $k = 0$  (condición inicial para (2.28))

### 2.5.2.3. Discretización de un Sistema Lineal en Tiempo Continuo

*Sea el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

con  $x(t_0)$  el vector de estado inicial.

*Para aproximar este sistema mediante uno en tiempo discreto, usamos la aproximación de Euler hacia adelante:*

$$\dot{x}(t_k) \cong \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$$

con  $x(t_k)$  el valor muestreado de la señal en tiempo continuo al tiempo  $t_k$ .

*Sustituyendo en la ecuación del sistema se obtiene*

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \cong A(t_k)x(t_k) + B(t_k)u(t_k)$$

*Sea  $h = t_{k+1} - t_k$  un tamaño de paso fijo, para todo  $k$ . Entonces la ecuación anterior da lugar a*

$$x(t_{k+1}) \cong [\mathbb{I} + h A(t_k)]x(t_k) + h B(t_k)u(t_k)$$

*Luego, designando  $x(t_k)$  mediante  $x[k]$  y definiendo una nueva matriz  $A$  mediante  $A[k] = [\mathbb{I} + hA(t_k)]$ , y una nueva matriz  $B$  por  $B[k] = hB(t_k)$ , etc., se obtiene el modelo de estado lineal en tiempo discreto, variable en el tiempo:*

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k],\end{aligned}$$

donde  $y[k] = y(t_k)$ ,  $u[k] = u(t_k)$ , respectivamente, etc.



## 2.6. Introducción a la Simulación de Sistemas

Presentamos aquí la simulación del comportamiento en el dominio del tiempo de dos sistemas utilizando SIMULINK.

### 2.6.1. Respuestas de Sistemas Lineales

**Ejemplo 2.6.** Supóngase que un sistema  $y(t) = N[u(t), x(t_0)]$  tiene las ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Este sistema se puede representar en diagrama de bloques como se muestra en la Figura 2.17.

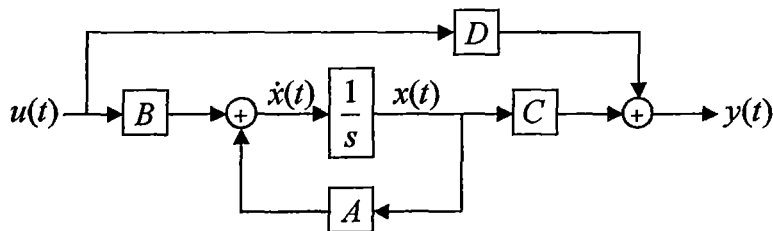


Figura 2.17: Diagrama de bloques del sistema  $N$ .

La simulación del sistema  $N$  en el entorno SIMULINK de MATLAB se realiza empleando el diagrama de bloques de la Figura 2.18.

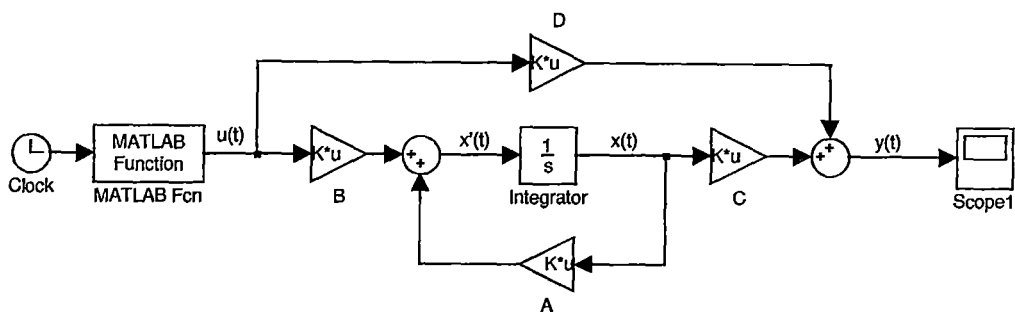


Figura 2.18: Diagrama de bloques SIMULINK para la simulación del sistema  $N$ .

Mediante la simulación verificamos ahora que el sistema  $N$  es lineal observando que satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{si } y_i(t) &= N[u_i(t), x_{01}(t_0)], \quad i = 1, 2, \\
 \Rightarrow y_3(t) &= N[\alpha_1(u_1(t), x_{01}(t_0)) + \alpha_2(u_2(t), x_{02}(t_0))] \quad (2.29) \\
 &= \alpha_1 N[u_1(t), x_{01}(t_0)] + \alpha_2 N[u_2(t), x_{02}(t_0)] \\
 &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2
 \end{aligned}$$

Para esto consideramos los siguientes valores en nuestra simulación:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \sin(t) & x_{01}(0) &= (1, 0)^t \\
 u_2(t) &= \cos(t) & x_{02}(0) &= (0, 1)^t \\
 u_3(t) &= 2u_1(t) + 3u_2(t) & x_{03}(0) &= 2x_{01}(0) + 3x_{02} \\
 &= 2\sin(t) + 3\cos(t) & &= (2, 3)^t
 \end{aligned}$$

El diagrama de bloques SIMULINK que empleamos para la simulación es mostrado en la Figura 2.19. En este diagrama se han especificado los arreglos (matrices)  $y_1, y_2, y_3$  que son matrices de dos columnas, la primera de las cuales tiene los valores del tiempo,  $t$ , y la segunda, los valores de las salidas correspondientes. Luego de la simulación se pueden observar las curvas de  $y_1, y_2$ , y  $y_3$  directamente en

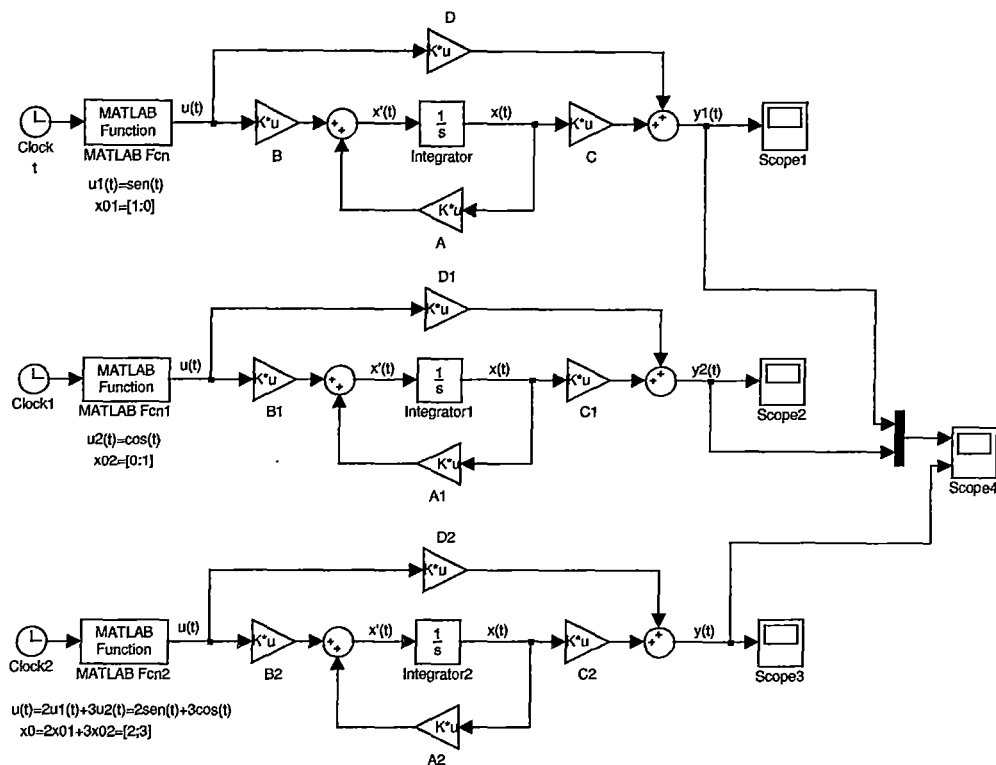


Figura 2.19: Diagrama de bloques SIMULINK empleado para obtener  $y_1 = N[u_1, x_{01}]$ ,  $y_2 = N[u_2, x_{02}]$  y  $y_3 = N[2(u_1, x_{01}) + 3(u_2, x_{02})]$ .

las ventanas de los bloques scope. Nosotros hemos empleado los arreglos  $y_1$ ,  $y_2$ , y  $y_3$  para graficar las salidas escribiendo lo siguiente en la línea de órdenes de MATLAB:

```
plot(y1(:,1),y1(:,2),'*',y2(:,1),y2(:,2),'x',
     y3(:,1),y3(:,2),'+',y1(:,1),2*y1(:,2)+3*y2(:,2))
grid; xlabel('tiempo, t');
text(7.5,-2.5,'y_1(t)') text(8,6,'y_2(t)') text(6.5,12,'y_3(t)')
```

La gráfica que se obtiene es mostrada en la Figura 2.20. Notamos que las curvas de  $y_1$ ,  $y_2$ , y  $y_3$  se han graficado con “\*”, “x”, y “+”, respectivamente. Adicionalmente se ha graficado  $2y_1 + 3y_2$  (línea suave), la cual pasa por los mismos puntos que la curva  $y_3$ , de modo que se comprueba que el sistema  $N$  satisface la propiedad de la Ecuación (2.29), así que, efectivamente, el sistema  $N$  es lineal. <

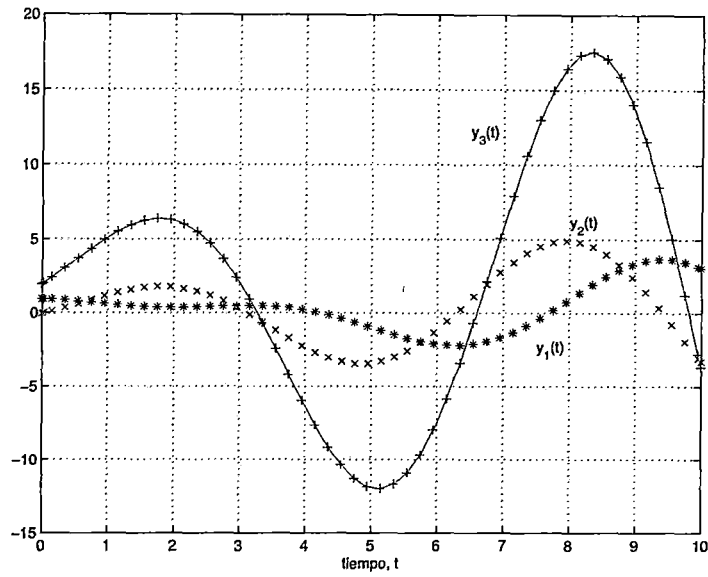


Figura 2.20: Gráficas de  $y_1 = N[u_1, x_{01}]$ ,  $y_2 = N[u_2, x_{02}]$  y  $y_3 = N[2(u_1, x_{01}) + 3(u_2, x_{02})]$ . Nótese que  $y_3 = 2y_1 + 3y_2$ .

### 2.6.2. Linealización de Sistemas

#### Ejemplo 2.7. El Sistema Carrito-Péndulo Invertido (CPI)

En la Figura 2.21 se muestra el sistema CPI. Con el propósito de simplificar las ecuaciones del modelo matemático del sistema se considera despreciable el peso de la varilla.

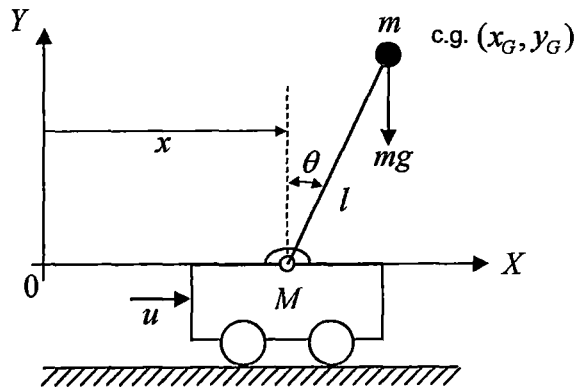


Figura 2.21: El sistema CPI

Obtenemos las ecuaciones del movimiento del sistema CPI empleando las ecuaciones de la Dinámica de Lagrange como sigue:

Las expresiones para las energías potencial  $P(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$  y cinética  $K(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$  del sistema CPI son, respectivamente,

$$K(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\{(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-l\dot{\theta} \sin \theta)^2\},$$

y

$$P(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = mgl \cos \theta.$$

Al definir el Lagrangiano  $L$  del sistema como  $L = K - P$  y emplear las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= u, \\ \text{y} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \end{aligned}$$

se obtienen las ecuaciones

$$(M + m)\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} = u \quad (2.30)$$

y

$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta. \quad (2.31)$$

Reordenando, se puede escribir lo siguiente:

$$\ddot{x} = \frac{u + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \cos \theta}{M + m - m \cos^2 \theta}$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g \sin \theta - u \cos \theta - ml \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2}{Ml + ml - ml \cos^2 \theta}$$

Definiendo las variables de estado  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = x$ , y  $x_4 = \dot{x}$ , y las variables de salida  $y_1 = x_1 = \theta$ , y  $y_2 = x_3 = x$ , se obtiene la expresión matemática que

caracteriza al sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

con

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(M + m)g \sin x_1 - u \cos x_1 - ml \sin x_1 \cdot \cos x_1 \cdot x_2^2}{Ml + ml - ml \cos^2 x_1} \\ x_4 \\ \frac{u + ml \sin x_1 \cdot x_2^2 - mg \sin x_1 \cdot \cos x_1}{M + m - m \cos^2 x_1} \end{bmatrix}$$

Con  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,  $M = 2 \text{ kg}$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , se tiene:

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{20.601 \sin x_1 - u \cos x_1 - 0.05 \sin x_1 \cdot \cos x_1 \cdot x_2^2}{1.05 - 0.05 \cos^2 x_1} \\ x_4 \\ \frac{u + 0.05 \sin x_1 \cdot x_2^2 - 0.981 \sin x_1 \cdot \cos x_1}{2.1 - 0.1 \cos^2 x_1} \end{bmatrix}$$

Observamos que  $(x_o(t), u_o(t)) = (0(t), 0(t))$  [Estado inicial:  $x(0) = 0$ ] es un punto de operación del sistema.

Linealizaremos ahora el sistema alrededor del punto de operación mencionado tomando en cuenta:

$$\Delta x = x - \underbrace{0(t)}_{x_o(t)} = x(t)$$

$$\Delta u = u(t) - 0(t) = u(t)$$

Linealizaremos el sistema alrededor del punto de operación  $(0(t), 0(t))$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \bigg|_{(0(t), 0(t))} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \bigg|_{(0(t), 0(t))} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Usando el ToolBox de MATEMÁTICA SIMBÓLICA de MATLAB (véanse las órdenes correspondientes en la línea de comandos en la Página 49) se obtiene el siguiente modelo linealizado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (2.32)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Para  $m = 1\text{kg}$ ,  $M = 2\text{kg}$ ,  $l = 0.5\text{m}$ , y  $g = 9.81\text{m/s}^2$ , el modelo linealizado queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Nótese que estas ecuaciones tienen la forma: 
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Los comandos empleados y las correspondientes respuestas de MATLAB en la linealización de este sistema (Ejemplo 2.7) se muestran a continuación:

```
% Construcción de las variables simbólicas
% x1, x2, x3, x4, u, m, M, l, g:
syms x1 x2 x3 x4 u m M l g
% Ingreso de f(x,u):
f=[x2;
    ((M+m)*g*sin(x1)-u*cos(x1)...
    -m*l*sin(x1)*cos(x1)*x2^2)/(M*l+m*l-m*l*(cos(x1))^2);
x4;
(u+m*l*sin(x1)*x2^2-m*g*sin(x1)*cos(x1))/(M+m-m*(cos(x1))^2)];
% Calculo de los jacobianos en el punto de operacion:
```



```

v=[x1,x2,x3,x4]; U=[u]; % Vectores de derivación via jacobiano
x1=0;x2=0;x3=0;x4=0;u=0; % Punto de operación
% jacobiano de f respecto de v en el punto de operación:
subs(jacobian(f,v))

```

```
ans =
```

```

[ 0      , 1, 0, 0]
[ (M+m)*g/M/l, 0, 0, 0]
[ 0      , 0, 0, 1]
[ -m*g/M , 0, 0, 0]

```

```

% jacobiano de f respecto d U en el punto de operación
subs(jacobian(f,U))

```

```
ans =
```

```

[ 0 ]
[ -1/M/l ]
[ 0 ]
[ 1/M ]

```

```
% jacobianos para m=0.1kg, M=2kg, l=0.5m, g=9.81m/s2:
```

```
%
```

```
% Dando valores a m, M, l, y a g:
```

```
m=0.1;M=2;l=0.5;g=9.81; subs(jacobian(f,v))
```

```
ans =
```

```

      0      1.0000      0      0
20.6010      0      0      0

```

```

      0      0      0      1.0000
-0.4905    0      0      0

```

```
subs(jacobian(f,U))
```

```
ans =
```

```

      0
-1.0000
      0
      0.5000

```

**Nota** Obviamente, este sistema se pudo linealizar fácilmente a partir de las Ecuaciones (2.30) y (2.31) suponiendo:

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1, \quad \theta \cdot \dot{\theta}^2 \cong 0, \quad \text{para } \theta \text{ pequeño.}$$

Estas ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = mg\theta \end{cases} \quad (2.33)$$

Eliminando  $\ddot{x}$  de la Ecuación (2.33):

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u$$

Eliminando  $\ddot{\theta}$  de la Ecuación (2.33):

$$M\ddot{x} = u - mg\theta$$

Definiendo  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = x$ ,  $x_4 = \dot{x}$ , y  $y_1 = \theta$ ,  $y_2 = x$ , queda el sistema linealizado anterior (2.32).

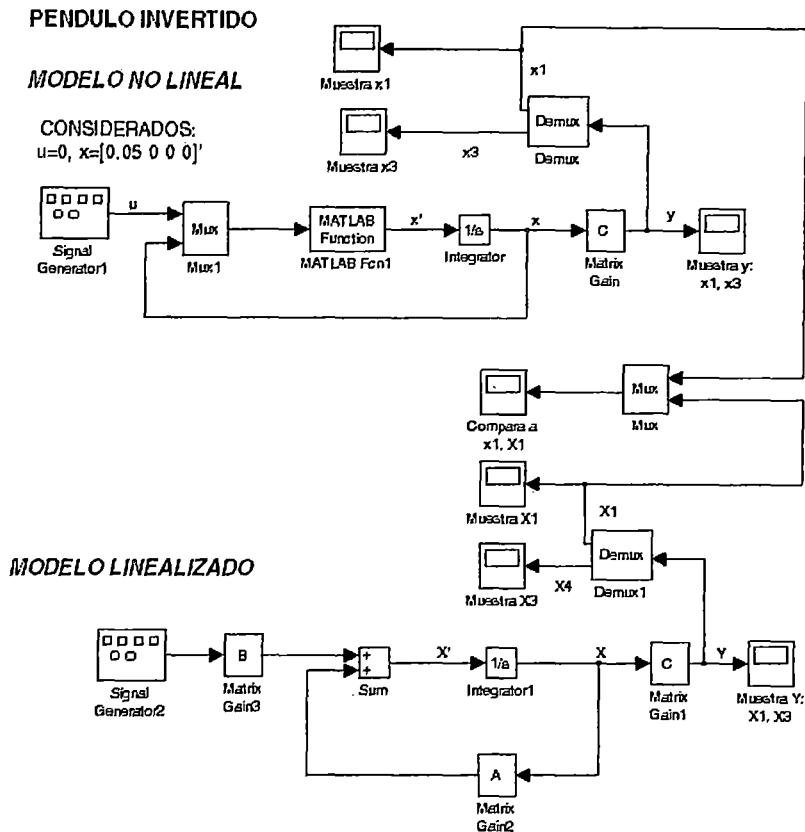


Figura 2.22: Comparación en SIMULINK de los sistemas no lineal y linealizado: Péndulo invertido

Comparamos los sistemas no lineal y linealizado de la siguiente manera: establecemos el mismo estado inicial en ambos sistemas, los exponemos a la misma excitación, y se obtienen gráficos de las variables de estado  $x_i, X_i$  frente a  $t$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , donde  $x_i$  es variable de estado del modelo no lineal, y  $X_i$  es variable de estado del modelo linealizado.

En la Figura 2.22 se muestra el diagrama SIMULINK de los sistemas original y linealizado a los que se impuso el mismo estado inicial  $(x(0), u(0)) = ((0.05, 0, 0, 0), 0)$  y la misma entrada  $u(t) = 0$  (esto produce un punto de operación vecino de  $(x_o, u_o) = (0, 0)$ ). La Figura 2.23 muestra sólo la gráfica  $x_1, X_1$  frente a  $t$  de los sistemas simulados.

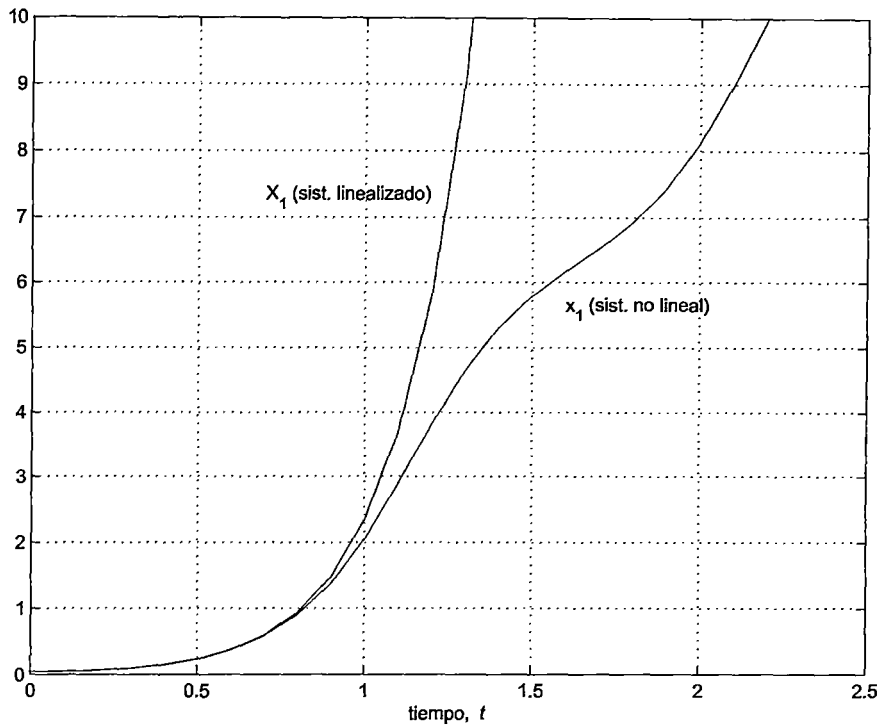


Figura 2.23: Comparación de  $x_1$  con  $X_1$

Como se ve, al correr la simulación, los valores de las variables de los sistemas no lineal y linealizado son similares durante la primera unidad de tiempo: la linealización es correcta. ◀

## 3 MATRICES DE TRANSFERENCIA

### 3.1. Solución de la Ecuación de Estado en Tiempo Continuo

*En el cálculo de la solución de la ecuación de estado  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  son útiles los conceptos de matriz de transición de estado, y de matriz fundamental, las cuales están asociadas a soluciones linealmente independientes de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ . En este capítulo estudiamos estos conceptos así como su empleo en el cálculo de la solución de la ecuación de estado.*

#### 3.1.1. Existencia y Unicidad de las Soluciones

*Los siguientes resultados son demostrados en el Capítulo 10 de la referencia [5] y los emplearemos como base en nuestros estudios:*

**Teorema 3.1.** *Si  $A(t)$  es seccionalmente continua<sup>1</sup>, entonces, para toda condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , existe una única solución  $\phi(t, t_0, x_0)$  de la ecuación diferencial  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ .*

**Teorema 3.2.** *Si  $A(t)$  y  $B(t)$  son seccionalmente continuas en  $[t_0, \infty)$ , entonces existe una única solución  $\phi(t, t_0, x_0, u)$  de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  sobre  $[t_0, \infty)$ .*

*En lo que sigue, consideraremos que las matrices  $A(t)$  y  $B(t)$  de las ecuaciones de la forma  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  son seccionalmente continuas.*

---

<sup>1</sup>Una función matricial  $A$  seccionalmente continua en  $[t_0, t]$  tiene todas sus funciones componentes seccionalmente continuas en  $[t_0, t]$ .

### 3.1.2. El Espacio Solución de $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t})$

**Teorema 3.3.** Sea  $A(t) \in \mathcal{M}(n, n)$  una función matricial  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  seccionalmente continua en  $[t_o, t]$ . Entonces el conjunto de todas las soluciones de la ecuación  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , una de cuyas bases es el conjunto  $\{\phi_i(t, t_o, \eta_i) / i = 1, \dots, n\}$ , donde  $\phi_i(t, t_o, \eta_i)$  es la solución de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  tal que  $\phi_i(t_o, t_o, \eta_i) = \eta_i$ , siendo  $\{\eta_i / i = 1, \dots, n\}$  la base estándar<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* De acuerdo al Teorema 3.1, por ser  $A(t)$  seccionalmente continua en  $[t_o, t]$ , la solución  $\phi_i(t, t_o, \eta_i)$  de la ecuación  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , con vector de estado inicial  $x(t_o) = \eta_i$ , existe y es única,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Llamando  $W$  al conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , observamos que  $\forall x_1, x_2 \in W, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) &= \alpha_1 \dot{x}_1(t) + \alpha_2 \dot{x}_2(t) \\ &= \alpha_1 A(t)x_1(t) + \alpha_2 A(t)x_2(t) \\ &= A(t)(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) \end{aligned}$$

Entonces,  $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \in W$ , de modo que  $W$  es un espacio vectorial.

Veamos ahora que  $\{\phi_i(t, t_o, x_o) / i = 1, \dots, n\}$  es una base de  $W$ :

Notamos que  $\forall x \in W / x(t_o) = x_o$ , con  $x_o = \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i$ , y  $\psi(t, t_o, x_o)$  definida como

$$\psi(t, t_o, x_o) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(t, t_o, \eta_i)$$

---

<sup>2</sup> $\eta_i = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{i\text{-posiciones}}, 0, \dots, 0)^t$  es el  $i$ -ésimo vector de la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ .

se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t, t_o, x_o) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{\phi}_i(t, t_o, \eta_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A(t) \phi_i(t, t_o, \eta_i) \\ &= A(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(t, t_o, \eta_i) = A(t) \psi(t, t_o, x_o)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\psi(t_o, t_o, x_o) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(t_o, t_o, \eta_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i \\ &= x_o\end{aligned}$$

Entonces,  $\psi(t, t_o, x_o) \in W$  y  $\psi(t_o, t_o, x_o) = x_o$ . Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , con  $A(t)$  seccionalmente constante, debe ocurrir que  $x(t) = \psi(t, t_o, x_o) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(t, t_o, \eta_i) \in \text{span}\{\phi_i(t, t_o, \eta_i) / i = 1, \dots, n\}$ , por lo que  $W = \text{span}\{\phi_i(t, t_o, \eta_i) / i = 1, \dots, n\}$ .

También, suponiendo que es cierto que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(t, t_o, \eta_i) = 0, \quad \forall t \in [t_o, t]$$

debe cumplirse, en particular, que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(t_o, t_o, \eta_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i = 0$$

Ya que  $\{\eta_i / i = 1, \dots, n\}$  es linealmente independiente, debe ocurrir únicamente que  $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ , de modo que  $\{\phi_i(t, t_o, \eta_i) / i = 1, \dots, n\}$  es un conjunto linealmente independiente.

El que  $\{\phi_i(t, t_o, \eta_i) / i = 1, \dots, n\}$  sea un conjunto linealmente independiente que genera a  $W$  nos permite concluir que  $\{\phi_i(t, t_o, \eta_i) / i = 1, \dots, n\}$  es una base de  $W$ . □

### 3.1.3. La Matriz de Transición de Estado

**Definición 3.1.** Se define la matriz de transición de estado,  $\Phi(t, t_0)$ , de la ecuación diferencial  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , con  $A(t) \in \mathcal{M}(n, n)$  seccionalmente continua en  $[t_0, t]$ , como

$$\Phi(t, t_0) = [\phi_1(t, t_0, \eta_1) | \phi_2(t, t_0, \eta_2) | \dots | \phi_n(t, t_0, \eta_n)],$$

donde  $\phi_i(t, t_0, \eta_i)$  es la solución de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  tal que  $\phi_i(t_0, t_0, \eta_i) = \eta_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , siendo  $\{\eta_i / i = 1, \dots, n\}$  la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.4.** Algunas propiedades de la matriz de transición de estado  $\Phi(t, t_0)$  del sistema  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  son las siguientes:

1.  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}$
2.  $\Phi(t, t_0)$  satisface la ecuación diferencial matricial  $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$ ,  $M(t_0) = \mathbb{I}$ , donde  $A(t), M(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

*Demostración.*

1.  $\Phi(t_0, t_0) = [\phi_1(t_0, t_0, \eta_1) | \dots | \phi_n(t_0, t_0, \eta_n)] = [\eta_1 | \dots | \eta_n] = \mathbb{I}$
2. Derivando  $\Phi(t, t_0)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= [\dot{\phi}_1(t, t_0, \eta_1) | \dots | \dot{\phi}_n(t, t_0, \eta_n)] \\ &= [A(t)\phi_1(t, t_0) | \dots | A(t)\phi_n(t, t_0, \eta_n)] = A(t)\Phi(t, t_0) \end{aligned}$$

□

#### Proposición 3.1.

La solución de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , con  $x(t_0) = x_0$ , es  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ ,  $\forall t$ .

*Demostración.* Sea  $x(t)$  una solución de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , con  $x(t_0) = x_0$ . Observamos los siguientes hechos:



- $D_t(\Phi(t, t_0)x_0) = A(t)\Phi(t, t_0)x_0 = A(t)(\Phi(t)x_0)$ , y
- $(\Phi(t_0, t_0)x_0)|_{t=t_0} = \Phi(t_0, t_0)x_0 = \mathbb{I}x_0 = x_0$

Entonces  $\Phi(t, t_0)x_0$  también es una solución de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  que satisface  $x(t_0) = x_0$ . Por el teorema de existencia y unicidad,  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ .  $\square$

### 3.1.4. La Forma Exponencial de la Matriz de Transición de Estado

*Bajo ciertas condiciones, la matriz de transición de estado tiene la forma exponencial*

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(q) dq\right)$$

*En esta sección estudiaremos las condiciones bajo las cuales esto sucede.*

**Definición 3.2.** *Dos matrices  $A$  y  $B$  conmutan si y sólo si  $AB = BA$ .*

**Teorema 3.5.**

*Si  $A(t)$  y  $\hat{A}(t) = \int_{t_0}^t A(q) dq$  conmutan,  $\forall t$ , entonces la matriz de transición de estado de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $t \in [t_0, t]$ , está dada por la siguiente expresión:*

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(q) dq\right)$$

*Demostración.* Evidentemente,  $\exp\left(\int_{t_0}^t A(q) dq\right)|_{t=t_0} = \mathbb{I}$ . También, si  $A(t)$  y  $\hat{A}(t)$  conmutan, se tiene que para  $k \geq 1$ ,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{k!} \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)^k \right\} = \frac{A(t)}{(k-1)!} \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)^{k-1}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \exp \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)^k \\
 &= A(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)^{k-1} \\
 &= A(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)^k \\
 &= A(t) \exp \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)
 \end{aligned}$$

Como se vé,  $\exp \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)$  es una solución de la ecuación diferencial matricial  $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$  con  $M(t) = \mathbb{I}$ . Sabemos que  $\Phi(t, t_0)$  también es una solución de esta ecuación, de modo que por el teorema de existencia y unicidad, se debe cumplir la relación  $\Phi(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t A(q) dq \right)$ .  $\square$

*En el siguiente teorema se dan tres casos en que  $A(t)$  y  $\hat{A}(t)$  conmutan, así como las correspondientes formas de  $\Phi(t, t_0)$ .*

**Teorema 3.6.**  *$A(t)$  y  $\hat{A}(t) = \int_{t_0}^t A(q) dq$  conmutan si cualquiera de las siguientes afirmaciones se cumple:*

1.  $A(t) = cte$ . En este caso  $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$
2.  $A(t) = \alpha(t)M$ , donde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, y  $M$  es una matriz constante. En este caso,  $\Phi(t, t_0) = \exp \left( M \int_{t_0}^t \alpha(q) dq \right)$
3.  $A(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t)M_i$ , donde  $\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es función,  $\forall i = 1, \dots, k$  y los  $M_i$ 's son matrices constantes que satisfacen la condición  $M_i M_j = M_j M_i$ ,  $\forall i \neq j$ . En este caso,  $\Phi(t, t_0) = \prod_{i=1}^k \exp \left[ M_i \int_{t_0}^t \alpha_i(q) dq \right]$ .

### 3.1.5. La Matriz Fundamental

**Definición 3.3.** Toda matriz  $M(t) \in \mathcal{M}(n, n)$  que satisface la ecuación diferencial matricial

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t), \quad M(t_0) = M_0, \quad (3.1)$$

con  $\det(M_0) \neq 0$ , es una matriz fundamental de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ .

**Nota 3.1.** La matriz de transición de estado es una matriz fundamental porque satisface la Ecuación (3.1), con  $M_0 = \mathbb{I}$ .

**Proposición 3.2.** Si  $\det(M_0) \neq 0, \Rightarrow \det(M(t)) \neq 0 \forall t$ .

*Demostración.* Supóngase que  $\exists t_1 \in \mathbb{R} / \det(M(t_1)) = 0$ , o lo que es lo mismo, que  $\exists \nu \neq 0 / M(t_1)\nu = 0$ . Definiendo  $z(t) = M(t)\nu$ , observamos que  $\dot{z}(t) = A(t)z(t)$  y  $z(t_1) = 0$ , y que, por el teorema de existencia y unicidad,  $z(t) = 0, \forall t$ . Esto implica que, en particular,  $z(t_0) = M_0\nu = 0$ , o que  $\det(M_0) = 0$ , lo cual representa una contradicción. Por lo tanto,  $\det(M(t)) \neq 0, \forall t$ .  $\square$

**Nota 3.2.** Lo último significa que el conjunto de todas columnas de una matriz fundamental  $M(t)$  es una base del espacio de soluciones de la ecuación  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ .

**Corolario 3.1.** Si  $M(t)$  es una matriz fundamental de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , entonces la matriz de transición de estado de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  es dada por  $\Phi(t, t_0) = M(t)[M(t_0)]^{-1}$ .

*Demostración.*

Como  $D_t(M(t)[M(t_0)]^{-1}) = A(t)(M(t)[M(t_0)]^{-1})$  y  $M(t)[M(t_0)]^{-1}|_{t=t_0} = \mathbb{I}$ , se tiene que  $M(t)[M(t_0)]^{-1}$  es una solución de la ecuación diferencial matricial  $\dot{P}(t) = A(t)P(t)$  con  $P(t_0) = \mathbb{I}$ . Sabemos que  $\Phi(t, t_0)$  también es una solución de esta ecuación diferencial matricial, entonces, por el teorema de existencia y unicidad concluimos que  $\Phi(t, t_0) = M(t)[M(t_0)]^{-1}$ .  $\square$

### 3.1.6. Propiedades de la Matriz de Transición de Estado

**Teorema 3.7** (Propiedad de semigrupo).

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0), \quad \forall t_1, t_0, t$$

*Demostración.* Se verifica fácilmente que  $\Phi(t, t_0)$  y  $\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$  son dos soluciones de la ecuación diferencial matricial  $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$  con  $M(t_1) = \Phi(t_1, t_0)$ . Por el teorema de existencia y unicidad se concluye que  $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$ ,  $\forall t_1, t_0, t$ .

□

**Teorema 3.8** (Propiedad inversa).

$\Phi(t, t_0)$  es no singular, y  $[\Phi(t, t_0)]^{-1} = \Phi(t_0, t)$ ,  $\forall t, t_0$ .

*Demostración.* Por la Proposición 3.2, la matriz de transición de estado,  $\Phi(t, t_0)$ , que es una matriz fundamental, satisface  $\det(\Phi(t, t_0)) \neq 0$ ,  $\forall t, t_0$ , o lo que es lo mismo,  $\Phi(t, t_0)$  es invertible,  $\forall t, t_0$ . Además, por la propiedad de semigrupo de una matriz de transición de estado, se cumple:  $\Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0) = \Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}$ , de modo que se prueba que  $[\Phi(t, t_0)]^{-1} = \Phi(t_0, t)$ ,  $\forall t, t_0$ .

□

**Teorema 3.9** (Fórmula de Liouville).

$$\det[\Phi(t, t_0)] = \exp \left[ \int_{t_0}^t \text{tr}[A(q)]dq \right]$$

*Demostración.* Para  $h$  suficientemente pequeña, se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(t+h, t_0) &\cong \Phi(t, t_0) + hA(t)\Phi(t, t_0) \\ &= h[h^{-1}\mathbb{I} + A(t)]\Phi(t, t_0) \end{aligned}$$

Tomando determinantes en ambos lados se obtiene

$$\det[\Phi(t+h, t_0)] = h^n \det \left[ \frac{1}{h}\mathbb{I} + A(t) \right] \det[\Phi(t, t_0)]$$

La aplicación del algoritmo de Leverrier (Teorema A-3.5) con los ajustes necesarios para los signos resulta en

$$\begin{aligned} h^n \det \left[ \frac{1}{n} \mathbb{I} + A(t) \right] &= h^n \left[ \left(\frac{1}{h}\right)^n + a_1(t) \left(\frac{1}{h}\right)^{n-1} + \dots + a_n(t) \right] \\ &= 1 + a_1(t)h + a_2(t)h^2 + \dots + a_n(t)h^n \\ &\cong 1 + h \operatorname{tr}[A(t)] \end{aligned}$$

nuevamente, para  $h$  suficientemente pequeña. Esto a su vez da lugar a la aproximación

$$\det[\Phi(t+h, t_0)] \cong [1 + h \operatorname{tr}[A(t)]] \det[\Phi(t, t_0)]$$

Restando  $\det[\Phi(t, t_0)]$  de ambos lados de esta ecuación, definiendo

$$\Delta \det[\Phi(t, t_0)] \triangleq \det[\Phi(t+h, t_0)] - \det[\Phi(t, t_0)]$$

y dividiendo por el tamaño de paso  $h$  se llega a

$$\frac{\Delta \det[\Phi(t, t_0)]}{h} \cong \operatorname{tr}[A(t)] \det[\Phi(t, t_0)]$$

Haciendo tender  $h$  hacia cero, la continuidad y la diferenciabilidad seccional de  $\Phi(t, t_0)$ , implican

$$\frac{d}{dt} \det[\Phi(t, t_0)] = \operatorname{tr}[A(t)] \det[\Phi(t, t_0)]$$

que es una ecuación diferencial cuya solución es  $\exp \left[ \int_{t_0}^t \operatorname{tr}[A(q)] dq \right]$ . □

### 3.1.7. La Solución Completa de la Ecuación de Estado

*En las secciones anteriores se resolvió la ecuación de estado homogénea, es decir, para el sistema autónomo, sin excitación o entrada externa  $u(t)$ . A continuación desarrollamos la solución completa del sistema dinámico.*

### 3.1.7.1. Caso Variante en el Tiempo

**Teorema 3.10.** *La solución completa de la ecuación dinámica de estado variante en el tiempo*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

es

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq, \quad (3.3)$$

donde

1.  $\Phi(t, t_0)x_0$  es la respuesta de estado de entrada cero.

2.  $\int_{t_0}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq$  es la respuesta de estado, de estado inicial cero.

*Demostración.* Antes de demostrar formalmente este teorema, realizaremos una derivación heurística de él con la finalidad de mostrar la aplicación de propiedades de los sistemas lineales estudiadas hasta este momento.

**Derivación heurística:** Sean  $P = \{t_i / i = 0, 1, \dots, m\}$ , con  $t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ , una partición de  $[t_0, t]$ , y  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , el  $i$ -ésimo intervalo de  $[t_0, t]$ , de tamaño  $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$ .

Definamos ahora

$$u_i(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ 0, & t \in [t_0, t] \setminus [t_{i-1}, t_i] \end{cases}$$

de modo que

$$u(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m u_i(t)$$

Veamos una aproximación a la respuesta de estado (Definición 2.13),  $x(t) = N_e[u(t), x_0]$ , del sistema  $N$  en el instante  $t$  a la entrada  $u$  cuando  $x_0$  es el estado en

el instante inicial  $t_o$ :

$$\begin{aligned}
x(t) &= N_e[u(t), x_o] \\
&= N_e[0(t), x_o] + N_e[u(t), 0(t_o)] \\
&= \Phi(t, t_o)x_o + N_e \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m u_i(t), 0(t_o) \right] \\
&= \Phi(t, t_o)x_o + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m N_e [u_i(t), 0(t_o)] \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
N_e[u_i(t), 0(t_o)]|_{t=t_i} &\cong N_e[u_i(t), 0(t_o)]|_{t=t_{i-1}} + \left( \frac{d}{dt} N_e[u_i(t), 0(t_o)] \right) \Big|_{t=t_{i-1}} \Delta_i t \\
&= N_e[u_i(t), 0(t_o)]|_{t=t_{i-1}} \\
&\quad + \left( A(t_{i-1}) N_e[u_i(t), 0(t_o)]|_{t=t_{i-1}} + B(t_{i-1})u_i(t_{i-1}) \right) \Delta_i t
\end{aligned}$$

Como  $N_e[u_i(t), 0(t_o)]|_{t=t_{i-1}} = 0$ , esta ecuación se reduce a

$$N_e[u_i(t), 0(t_o)]|_{t=t_i} \cong B(t_{i-1})u_i(t_{i-1})\Delta_i t$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
N_e[u_i(t), 0(t_o)] &\cong \Phi(t, t_i) N_e[u_i(t), 0(t_o)]|_{t=t_i} \\
&= \Phi(t, t_i)B(t_{i-1})u_i(t_{i-1})\Delta_i t \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.5) en (3.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
x(t) &= N_e[u(t), x_o] \\
&= \Phi(t, t_o)x_o + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \Phi(t, t_i)B(t_{i-1})u_i(t_{i-1})\Delta_i t \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Recordando la definición de la integral de Riemann podemos escribir (3.6) como

$$x(t) = N_e[u(t), x_o] = \underbrace{\Phi(t, t_o)x_o}_{\text{Respuesta de estado de entrada cero.}} + \underbrace{\int_{t_o}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq}_{\text{Respuesta de estado con estado inicial cero.}}$$

### Derivación formal:

- Respecto a la existencia y unicidad de la solución de (3.2), ellas son sustentadas por el Teorema 3.2
- En lo que sigue de nuestra prueba, resulta útil la regla de Leibnitz para derivar bajo el signo integral. Esta regla dice lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi(\alpha) &= \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x, \alpha) dx, \\ \Rightarrow \frac{d\phi}{d\alpha} &= \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x, \alpha) dx + f(u_2(\alpha), \alpha) \frac{du_2}{d\alpha} - f(u_1(\alpha), \alpha) \frac{du_1}{d\alpha} \end{aligned}$$

Aplicando esta regla, se tiene:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[ \Phi(t, t_o)x_o + \int_{t_o}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq \right] \\ &= \dot{\Phi}(t, t_o)x_o + \frac{d}{dt} \int_{t_o}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq \\ &= A(t)\Phi(t, t_o)x_o + \int_{t_o}^t \frac{\partial}{\partial t} \{ \Phi(t, q)B(q)u(q) \} dq + \Phi(t, t)B(t)u(t) \\ &= A(t)\Phi(t, t_o)x_o + \int_{t_o}^t A(t)\Phi(t, q)B(q)u(q)dq + B(t)u(t) \\ &= A(t) \left[ \Phi(t, t_o)x_o + \int_{t_o}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq \right] + B(t)u(t) \end{aligned}$$

De este modo, se observa que  $\Phi(t, t_o)x_o + \int_{t_o}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq$  satisface la ecuación diferencial (3.2), luego, por unicidad, la solución completa de (3.2) es (3.3).



□

**Corolario 3.2.** *La respuesta del modelo de estado variante en el tiempo,*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

es

$$y(t) = \underbrace{C(t)\Phi(t, t_0)x_0}_{\text{Respuesta de entrada cero}} + \underbrace{C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, q)B(q)u(q)dq + D(t)u(t)}_{\text{Respuesta de estado cero}}, \quad (3.7)$$

### 3.1.7.2. Caso Invariante en el tiempo

*De particular interés resulta la respuesta de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, cuyas ecuaciones son de la forma*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

donde las matrices  $A, B, C$ , y  $D$  son constantes. Los teoremas y proposiciones siguientes consecuencias inmediatas de los Teoremas 3.5, 3.6, 3.8, y 3.10 del caso variante en el tiempo, de modo que, en su mayor parte, dejamos sus pruebas como ejercicios para el lector.

**Proposición 3.3.** *A y  $\hat{A} = \int_{t_0}^t A dq$  conmutan.*

**Teorema 3.11.**

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A dt} = e^{A(t-t_0)} = \Phi(t - t_0, 0)$$

**Observación 3.1.** *Debido a lo que afirma este teorema, se acostumbra escribir  $\Phi(t - t_0)$  en lugar de  $\Phi(t, t_0)$ .*

**Teorema 3.12.** *La solución completa para la dinámica de estado lineal invariante en el tiempo tiene la forma*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-q)}Bu(q)dq \quad (3.8)$$

**Corolario 3.3.** *La respuesta del sistema de modelo de estado lineal invariante en el tiempo es*

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

donde  $x(t)$  es dada por la Ecuación (3.8).

## 3.2. Solución de la Ecuación de Estado en Tiempo Discreto

*En esta sección tratamos la matriz de transición de estado, la matriz fundamental, y la solución de la ecuación de estado en tiempo discreto*

$$x[k+1] = A[k]x[k] + B[k]u[k]$$

$$y[k] = C[k]x[k] + D[k]u[k]$$

### 3.2.1. La Matriz de Transición de Estado y sus Propiedades

**Definición 3.4.** *La matriz de transición de estado del modelo de estado en tiempo discreto  $x[k+1] = A[k]x[k]$  es la matriz  $\Phi[n, k]$  que satisface  $x[n] = \Phi[n, k]x[k]$ ,  $\forall x[k]$ .*

Podemos derivar una expresión para  $\Phi[n, k]$  observando el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 x[k+1] &= A[k]x[k] \\
 x[k+2] &= A[k+1]x[k+1] = A[k+1]A[k]x[k] \\
 &\vdots = \\
 x[n] &= A[n-1]A[n-2] \dots A[k+1]A[k]x[k] = \prod_{j=k}^{n-1} A[j]x[k]
 \end{aligned}$$

Esto sugiere la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.**

$$\Phi[n, k] = \prod_{j=k}^{n-1} A[j] = A[n-1]A[n-2] \dots A[k+1]A[k]$$

Las siguientes proposiciones exponen tres propiedades de la matriz de transición de estado.

**Proposición 3.5.**

$$\Phi[k+1, j] = A[k]\Phi[k, j], \quad \Phi[j, j] = \mathbb{I}, \quad k \geq j$$

**Proposición 3.6** (Propiedad de semigrupo). Para  $n \geq k \geq j$ ,

$$\Phi[n, k]\Phi[k, j] = \Phi[n, j]$$

**Proposición 3.7** (Propiedad de Inversión). Si  $A[k]$  es no singular,  $\forall k$ ,

$$(\Phi[n, k])^{-1} = \prod_{j=n-1}^k (A[j])^{-1}$$

### 3.2.2. La Matriz Fundamental

La noción de matriz fundamental está asociada a la de una base del conjunto de soluciones de la ecuación  $x[k+1] = A[k]x[k]$ . Veremos aquí la relación que hay entre la matriz de transición de estado y la matriz fundamental.

En el desarrollo de nuestro estudio resulta de gran utilidad el siguiente teorema cuya demostración es sencilla.

**Teorema 3.13.** *El conjunto solución de la ecuación de estado  $x[k+1] = A[k]x[k]$ , con  $A[k] \in \mathcal{M}(n, n)$ , es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .*

**Definición 3.5.** *Un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación dinámica de estado  $x[k+1] = A[k]x[k]$ , donde  $A[k] \in \mathcal{M}(n, n)$ , es un conjunto linealmente independiente de  $n$  de sus soluciones (sucesiones).*

**Oservación 3.2.** *Un conjunto fundamental de soluciones es una base del espacio de soluciones de la ecuación de estado  $x[k+1] = A[k]x[k]$ .*

**Definición 3.6.** *Una matriz fundamental de la ecuación de estado  $x[k+1] = A[k]x[k]$ , con  $A[k] \in \mathcal{M}(n, n)$ , es cualquier matriz cuyas columnas forman un conjunto fundamental de sus soluciones. Es denotada por  $\Psi[k] = [x^1[k]|x^2[k]|\dots|x^n[k]]$ , donde  $\{x^i[k] \mid i = 1, \dots, n\}$  es un conjunto fundamental de soluciones.*

Como cada columna de una matriz fundamental satisface la ecuación de estado  $x^i[k+1] = A[k]x^i[k]$ ,  $\forall k \geq 0$ , resulta la siguiente proposición.

**Proposición 3.8.** *Toda matriz fundamental satisface la ecuación matricial en diferencias  $\Psi[k+1] = A[k]\Psi[k]$ .*

**Nota 3.3.** *La matriz de transición de estado es una matriz fundamental.*

**Proposición 3.9.** *Si  $A[k]$  es no singular (invertible),  $\forall k$ , entonces cualquier matriz fundamental asociada,  $\Psi[k]$ , es no singular,  $\forall k$ .*

*Demostración.* Supóngase que la matriz fundamental,  $\Psi[k]$ , no es no singular  $\forall k$ , esto es, que  $\exists k_0$  tal que  $\Psi[k_0]$  es no singular, mientras que  $\Psi[k_0 + 1]$  es singular.

Como  $\Psi[k_0 + 1] = A[k_0]\Psi[k_0]$ , por ser  $\Psi$  una matriz fundamental, el cálculo del determinante de ambas partes de esta ecuación resulta en  $|\Psi[k_0 + 1]| = |A[k_0]||\Psi[k_0]|$ . Debido a nuestra suposición, se cumple que  $|\Psi[k_0 + 1]| = 0$  y  $|\Psi[k_0]| \neq 0$ , de modo que  $|A[k_0]|$  debiera ser igual a cero, o, lo que que es lo mismo,  $A[k_0]$  debiera ser singular, hecho que estaría en contradicción con la naturaleza no singular de  $A[k]$ ,  $\forall k$ . De este modo, concluimos que  $\Psi[k]$  es no singular,  $\forall k$ .  $\square$

**Proposición 3.10.** *Si  $A[k]$  es no singular,  $\forall k$ , entonces la matriz de transición de estado  $\Phi[n, k]$  y cualquier matriz fundamental de soluciones  $\Psi[k]$  de la ecuación de estado  $x[k + 1] = A[k]x[k]$ , con  $A[k] \in \mathcal{M}(n, n)$ , satisfacen la relación  $\Phi[n, k] = \Psi[n]\Psi^{-1}[k]$ ,  $\forall n \geq k$ .*

*Demostración.* Como para toda solución  $\{x[k]\}$  de  $x[k + 1] = A[k]x[k]$  se cumple  $x[n] = \Phi[n, k]x[k]$ , sigue que  $\Psi[n] = \Phi[n, k]\Psi[k]$  y, ya que por la Proposición 3.9,  $\Psi[k]$  es no singular,  $\forall k$ , entonces  $\Phi[n, k] = \Psi[n]\Psi^{-1}[k]$ .  $\square$

### 3.2.3. La Solución Completa del Modelo de Estado en Tiempo Discreto

*Dada la ecuación de estado*

$$x[k + 1] = A[k]x[k] + B[k]u[k],$$

por evaluación directa se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x[1] &= A[0]x[0] + B[0]u[0] \\
 x[2] &= A[1]x[1] + B[1]u[1] \\
 x[2] &= A[1]A[0]x[0] + A[1]B[0]u[0] + B[1]u[1] \\
 x[3] &= A[2]x[2] + B[2]u[2] \\
 &= A[2]A[1]A[0]x[0] + A[2]A[1]B[0]u[0] + A[2]B[1]u[1] + B[2]u[2] \\
 &= \Phi[3, 0]x[0] + \Phi[3, 1]B[0]u[0] + \Phi[3, 2]B[1]u[1] + \Phi[3, 3]B[2]u[2] \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

De este modo, para  $k \geq 1$ ,

$$x[k] = \Phi[k, 0]x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi[k, j+1]B[j]u[j]$$

**Oservación 3.3.** En  $k = 0$  la suma no está definida, de modo que la fórmula se reduce a  $x[0]$ , la condición inicial dada.

**Teorema 3.14.** Sea el modelo de estado en tiempo discreto

$$\begin{aligned}
 x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k], \text{ con condición inicial } x[0], \\
 y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k]
 \end{aligned}$$

y una sucesión de entrada  $\{u[k]\}$ ,  $k \geq 0$ . La solución de la ecuación en diferencias está dada por

$$\begin{aligned}
 x[k] &= \Phi[k, 0]x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi[k, j+1]B[j]u[j], \\
 y[k] &= C[k]\Phi[k, 0]x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} C[k]\Phi[k, j+1]B[j]u[j] + D[k]u[k]
 \end{aligned}$$

### 3.2.4. El Modelo de Estado en Tiempo Discreto Invariante en el Tiempo

El modelo de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo, en tiempo discreto tiene la forma

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k], \quad x[0] = x_0 \\y[k] &= Cx[k] + Du[k]\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde las matrices  $A, B, C, D$  son constantes.

El Teorema 3.14, con  $A[k] = A, \forall k$  da lugar al siguiente teorema.

**Teorema 3.15.** El sistema de la Ecuación (3.9), con sucesión de entrada  $\{u[k]\}$ ,  $k \geq 0$  tiene como solución

$$\begin{aligned}x[k] &= A^k x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu[j] \\&= A^k x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu[k-1-j],\end{aligned}\tag{3.10}$$

donde la matriz de transición de estado ahora tiene la forma

$$\Phi[k, j] = \Phi[k-j, 0] \equiv \Phi[k-j] = A^{k-j}$$

**Observación 3.4.** Si  $A$  tiene la factorización  $A = TDT^{-1}$ , entonces la ecuación (3.10) se reduce a

$$x[k] = TD^k T^{-1} x[0] + T \sum_{j=0}^{k-1} D^{k-1-j} T^{-1} Bu[j]\tag{3.11}$$

$$\text{ó } x[k] = TD^k T^{-1} x[0] + T \sum_{j=0}^{k-1} D^j T^{-1} Bu[k-1-j]\tag{3.12}$$

### 3.2.5. Discretización de Sistemas Lineales en Tiempo Continuo

Considérese la ecuación en tiempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.13)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.14)$$

Si el conjunto de ecuaciones va a ser resuelto en una computadora, debe ser discretizado como sigue. Debido a que

$$\dot{x}(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x(t+T) - x(t)}{T},$$

podemos aproximar (3.13) como

$$x(t+T) = x(t) + Ax(t)T + Bu(t)T \quad (3.15)$$

Si calculamos  $x(t)$  y  $y(t)$  solamente en  $t = kT$ , para  $k = 0, 1, \dots$ , entonces (3.13) y (3.14) se vuelven

$$x((k+1)T) = (\mathbb{I} + TA)x(kT) + T Bu(kT) \quad (3.16)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (3.17)$$

Definiendo  $x[k] = x(kT)$ ,  $u[k] = u(kT)$ ,

$$\hat{A} = \mathbb{I} + TA, \quad y[k] = y(kT), \quad \hat{B} = BT$$

podemos escribir (3.13) y (3.14) como

$$x[k+1] = \hat{A}x[k] + \hat{B}u[k]$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$



Estas ecuaciones describen un sistema lineal en espacio de estado, invariante en el tiempo, en tiempo discreto. Estas ecuaciones pueden ser calculadas fácilmente en una computadora.

Esta discretización es la más fácil de llevar a cabo, pero produce los resultados más imprecisos para la misma  $T$ . A continuación discutimos una discretización diferente.

### 3.2.6. Sistemas Lineales en Tiempo Continuo con Entrada Seccionalmente Constante

Si una entrada  $u(t)$  es generada por una computadora digital, seguida por un convertidor digital a analógico, entonces  $u(t)$  será seccionalmente constante. Esta situación surge frecuentemente en el control por computadora de sistemas de control. Sea

$$u(t) = u(kT) \triangleq u[k], \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T \quad (3.18)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Esta entrada cambia sus valores solamente en instantes discretos de tiempo. Para esta entrada, la solución de (3.13), según el Teorema 3.12 es

$$x[k+1] \triangleq x((k+1)T) = e^{A(k+1)T - KT} x(KT) + \int_{KT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T - \tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

la cual puede escribirse, después de sustituir (3.18) e introducir la nueva variable  $\alpha = kT + T - \tau$ , como

$$x[k+1] = e^{AT} x[k] + \left( \int_0^T e^{A\alpha} d\alpha \right) Bu[k]$$

De este modo, si una entrada cambia de valor solamente en instantes discretos de tiempo  $kT$  y si calculamos solamente las respuestas en  $t = kT$ , entonces

(3.13) y (3.14) se vuelven

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (3.20)$$

$$y[k] = C_d x[k] + D_d u[k] \quad (3.21)$$

con

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B, \quad C_d = C, \quad D_d = D \quad (3.22)$$

Esta es una ecuación de un sistema lineal en espacio de estado en tiempo discreto. Nótese que no hay aproximación envuelta en esta derivación.

De la discusión anterior podemos plantear la discretización de un sistema lineal invariante en el tiempo de la siguiente manera alterna (véase la Figura 3.1):

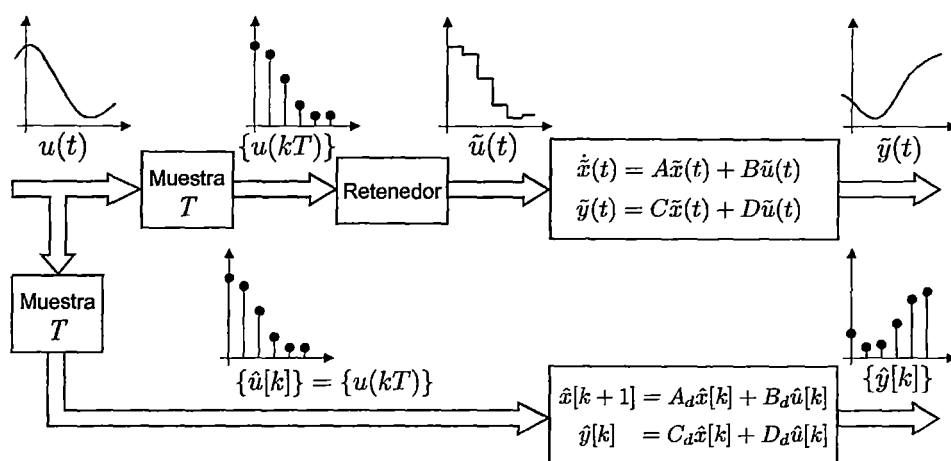


Figura 3.1: Discretización a través de la aproximación seccionalmente constante de la entrada. Obsérvese que  $\tilde{y}(kT) = \hat{y}[k] \approx y(kT), \forall k$ .

Si un sistema lineal invariante en el tiempo en tiempo continuo de entrada  $u(t)$ , salida  $y(t)$  y vector de estado  $x(t)$  tiene ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

un sistema en tiempo discreto que lo aproxima (su discretización) es el que resulta de considerar la aproximación seccionalmente constante  $\tilde{u}(t)$  de  $u(t)$  definida como

$$\tilde{u}(t) = u(kT), \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T$$

La respuesta del sistema lineal (3.23) a la entrada  $\tilde{u}(t)$  con condición inicial  $x_0$  en  $t = 0$  será  $\tilde{y}(t)$ , una aproximación a  $y(t)$ , la respuesta del sistema (3.23) a la entrada  $u(t)$  con  $x(0) = x_0$ . En este caso la relación entre  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  y  $\tilde{x}(t)$  es

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t), & \tilde{x}(0) &= x_0 \\ \tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

Como ya se estudió, el sistema lineal invariante en el tiempo (3.23) es aproximado por el sistema lineal en tiempo discreto (su discretización) de ecuación

$$\begin{aligned} \hat{x}[k+1] &= A_d\hat{x}[k] + B_d\hat{u}[k], & \hat{x}[0] &= x_0 \\ \hat{y}[k] &= C_d\hat{x}[k] + D_d\hat{u}[k] \end{aligned}$$

donde

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B, \quad C_d = C, \quad D_d = D \quad (3.24)$$

Tómese en cuenta que  $\hat{x}[k] = \tilde{x}(kT) \cong x(kT)$ , y  $\hat{y}[k] = \tilde{y}(kT) \cong y(kT)$ ,  $\forall k$ , y que la aproximación mejora haciendo  $T$  más pequeño.

**Ejemplo 3.1.** *Supóngase que se desea determinar la discretización, según lo estudiado en la Sección 3.2.6, para el periodo de muestreo  $T = 0.1$  del sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, se puede verificar que las matrices del sistema discretizado son  $C_d = [1 \ 0]$ ,  $D_d = 0$ , y

$$A_d = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-0.1} & 0 \\ 0 & e^{-0.2} \end{bmatrix}, \quad B_d = \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B = \begin{bmatrix} 1 - e^{-0.1} \\ 0.5(1 - 2^{-0.2}) \end{bmatrix}$$

◁

### 3.3. Respuesta Impulsiva y Función de Transferencia

#### 3.3.1. Caso: Sistemas en Tiempo Continuo

##### 3.3.1.1. Respuesta Impulsiva

**Definición 3.7.** *La respuesta impulsiva de un sistema lineal, agrupado, variante en el tiempo es una aplicación matricial  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times m}$  definida como*

$$H(t, \tau) = [h_1(t, \tau) \mid \dots \mid h_m(t, \tau)],$$

donde cada columna  $h_i(t, \tau)$  es la respuesta de estado cero del sistema relajado en  $-\infty$  a la entrada impulsiva  $\delta(t - \tau)\eta_i$ , con

$$\eta_i = ( \underbrace{0, \dots, 1}_{i\text{-posiciones}}, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, m$$

**Oservación 3.5.** Para sistemas causales,  $H(t, \tau) = [0]$  siempre que  $t < \tau$ .

**Teorema 3.16.** La respuesta,  $y(t)$ , de un sistema lineal, de operador  $N$ , de matriz de respuesta impulsiva  $H(t, \tau)$ , ante la entrada  $u(t)$ , está dada por la siguiente relación:

$$y(t) = N[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, \tau)u(\tau)d\tau \quad (3.25)$$

*Demostración.* Supóngase que  $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^t$ , donde

$$u_i(t) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k u_i(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

donde  $P$  es una partición del intervalo de tiempo sobre el que está definida  $u$ , y  $\|P\|$  es la norma de  $P$ , de modo que podemos escribir

$$u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)\eta_i = \sum_{i=1}^m \left( \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k u_i(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \right) \eta_i$$

Entonces, por la linealidad del sistema, y la definición de la integral de Riemann,

$$\begin{aligned} y(t) = N[u(t)] &= \sum_{i=1}^m \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k u_i(k\Delta)N[\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\eta_i]\Delta \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} u_i(\tau)h_i(t, \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

□

**Oservación 3.6.** El Teorema 3.16 es válido tanto para sistemas lineales concentrados como para sistemas distribuidos.

**Teorema 3.17.** *La respuesta impulsiva de un modelo de estado lineal, agrupado, variante en el tiempo de ecuaciones*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t),\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ , y  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es:

$$H(t, \tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau), & t \geq \tau \\ [0] & , t < \tau \end{cases}$$

*Demostración.* Tomando en cuenta la naturaleza causal de nuestro sistema y el Corolario 3.2, la respuesta  $h_i(t, \tau)$  del sistema relajado en  $-\infty$  ( $x(-\infty) = 0$ ) a la entrada  $\delta(t - \tau)\eta_i$  es

$$h_i(t, \tau) = \begin{cases} C(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t, q)B(q)\delta(q - \tau)dq \eta_i + D(t)\delta(t - \tau) \eta_i, & t \geq \tau \\ [0, \dots, 0]^t \in \mathbb{R}^r & , t < \tau \end{cases}$$

$$\text{ó } h_i(t, \tau) = \begin{cases} [C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau)]\eta_i, & t \geq \tau \\ [0, \dots, 0]^t \in \mathbb{R}^r & , t < \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(t, \tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau), & t \geq \tau \\ [0] \in \mathbb{R}^{r \times m} & , t < \tau \end{cases}$$

□

**Ejercicio 3.3.1.** *Verifíquese que la respuesta  $y(t)$  de un sistema lineal, causal, relajado en  $t_0$ , de ecuaciones  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ ,  $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ , y de respuesta impulsiva  $H(t, \tau)$  satisface la relación*

$$y(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau)u(\tau)d\tau = C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t), \quad t \geq t_0.$$

**Corolario 3.4.** Si  $A, B, C$ , y  $D$  son matrices constantes, la respuesta impulsiva del modelo de estado invariante en el tiempo es

$$H(t, \tau) = \begin{cases} Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau), & t \geq \tau \\ [0] \in \mathbb{R}^{r \times m} & , t < \tau \end{cases} \quad (3.26)$$

**Oservación 3.7.** En el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo se verifica la relación  $H(t, \tau) = H(t - \tau, 0)$ . Por esta razón, en el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo, se acostumbra escribir  $H(t - \tau)$  en vez de  $H(t, \tau)$ .

### 3.3.1.2. Función de Transferencia

Sea el modelo de estado invariante en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\begin{aligned} sx(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s) \end{aligned}$$

Resolviendo para  $x(s)$  e  $y(s)$  resulta:

$$\begin{aligned} x(s) &= \underbrace{(s\mathbb{I} - A)^{-1}x(0)}_{\text{Representa a la respuesta de estado de entrada cero.}} + \underbrace{(s\mathbb{I} - A)^{-1}Bu(s)}_{\text{Representa a la respuesta de estado de estado cero.}} \\ y(s) &= \underbrace{C(s\mathbb{I} - A)^{-1}x(0)}_{\text{Representa a la respuesta de entrada cero.}} + \underbrace{[C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D]u(s)}_{\text{Representa a la respuesta de estado cero.}} \end{aligned}$$

Nótese que si  $x(0) = 0$ ,

$$\Rightarrow y(s) = [C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D]u(s)$$

También, si  $u(t) = 0$ , entonces  $x(s) = (s\mathbb{I} - A)^{-1}x(0)$ , de modo que

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbb{I} - A)^{-1}\} \quad (3.27)$$

**Definición 3.8.** La función de transferencia del modelo de estado invariante en el tiempo se define como

$$H(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D \quad (3.28)$$

### 3.3.1.3. Relación Entre la Respuesta Impulsiva y la Función de Transferencia

**Teorema 3.18.** En el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo, en tiempo continuo, se cumple la siguiente relación:

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

*Demostración.* De la Ecuación (3.26) se tiene

$$H(t) = \begin{cases} Ce^{At}B + D\delta(t), & t \geq 0 \\ [0] \in \mathbb{R}^{r \times m}, & t < 0 \end{cases}$$

Sabemos además que, por (3.27),  $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbb{I} - A)^{-1}\}$ , y que, por la Definición 3.8,  $H(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D$ . Entonces

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D = H(s)$$

□



### 3.3.2. Caso: Sistemas Lineales en Tiempo Discreto

#### 3.3.2.1. Respuesta Impulsiva

**Definición 3.9.** La respuesta impulsiva de un sistema lineal variante en el tiempo es una aplicación matricial  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times m}$  definida como

$$H[k, j] = [ h_1[k, j] \mid h_2[k, j] \mid \dots \mid h_m[k, j] ], \quad (3.29)$$

donde cada columna  $h_i[k, j]$  es la respuesta de estado cero del sistema relajado en  $-\infty$  a la entrada impulsiva  $\delta[k - j]\eta_i$ , con

$$\eta_i = [ \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{i\text{-posiciones}}, 0, \dots, 0 ]^t \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, m$$

**Oservación 3.8.** Para sistemas causales,  $H[k, j] = 0, \forall k < j$ .

**Teorema 3.19.** La respuesta  $y[n]$  de un sistema lineal de operador  $N$ , de respuesta impulsiva  $H[n, j]$  a la entrada  $u[n]$  está dada por la siguiente relación:

$$y[n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H[n, j]u[j]$$

*Demostración.* Como

$$u[n] = \sum_{i=1}^m u_i[n]\eta_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta[n - j]u_i[j] \right) \eta_i$$

entonces, por la linealidad del sistema,

$$\begin{aligned}
 y[n] = N[u[n]] &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_i[j] N[\delta[n-j]\eta_i] \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i[n, j] u_i[j] \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m h_i[n, j] u_i[j] \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} H[n, j] u[j]
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.20.** *La respuesta impulsiva de un modelo de estado lineal, variante en el tiempo, de ecuaciones*

$$\begin{aligned}
 x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\
 y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k]
 \end{aligned}$$

es

$$H[k, j] = \begin{cases} C[k]\Phi[k, j+1]B[j], & k > j \\ D[j] & , k = j \\ [0] \in \mathcal{M}(r, m) & , k < j \end{cases}$$

*Demostración.* Tomando en cuenta la naturaleza causal de nuestro sistema y el Teorema 3.14, la respuesta  $h_i[k, j]$  del sistema relajado en  $-\infty$  ( $x[-\infty] = 0$ ) a la

entrada  $\delta[k - j]\eta_i$  es

$$h_i[k, j] = \begin{cases} C[k] \sum_{p=-\infty}^{k-1} \Phi[k, p+1] B[p] \delta[p - j] \eta_i + D[k] \delta[k - j] \eta_i, & k \geq j \\ [0, \dots, 0]^t \in \mathbb{R}^n & , k < j \end{cases}$$

$$\text{ó } h_i[k, j] = \begin{cases} C[k] \Phi[k, j+1] B[j] \eta_i, & k > j \\ D[j] \eta_i & , k = j \\ [0, \dots, 0]^t \in \mathbb{R}^n & , k < j \end{cases}$$

Entonces

$$H[k, j] = \begin{cases} C[k] \Phi[k, j+1] B[j], & k > j \\ D[j] & , k = j \\ [0] \in \mathcal{M}(r, m) & , k < j \end{cases}$$

□

**Corolario 3.5.** *La respuesta  $y[k]$  de un sistema lineal, causal, relajado en  $k_0$ , de ecuaciones  $x[k+1] = A[k]x[k] + B[k]u[k]$ ,  $y[k] = C[k]x[k] + D[k]u[k]$ , y de respuesta impulsiva  $H[k, j]$  satisface la relación*

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} H[k, p] u[p] = \sum_{p=k_0}^k H[k, p] u[p] \\ &= C[k] \sum_{p=k_0}^{k-1} \Phi[k, p+1] B[p] u[p] + D[k] u[k], \quad k \geq k_0 \end{aligned}$$

*Demostración.*  $\forall k \geq k_o$ ,

$$\begin{aligned}
 y[k] &= \sum_{p=k_o}^k H[k, p]u[p] = \sum_{p=k_o}^{k-1} H[k, p]u[p] + H[k, k]u[k] \\
 &= \sum_{p=k_o}^{k-1} C[k]\Phi[k, p+1]B[p]u[p] + D[k]u[k] \\
 &= C[k] \sum_{p=k_o}^{k-1} \Phi[k, p+1]B[p]u[p] + D[k]u[k]
 \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.6.** Si  $A, B, C$ , y  $D$  son matrices constantes, la respuesta impulsiva para el modelo de estado invariante en el tiempo es

$$H[k, k_o] = \begin{cases} CA^{k-k_o-1}B & , k > k_o \\ D & , k = k_o \\ [0] \in \mathcal{M}(r, m) & , k < k_o \end{cases} \quad (3.30)$$

**Oservación 3.9.** En el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo, se verifica la relación  $H[k, k_o] = H[k - k_o, 0]$ . Por esta razón, en el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo, se acostumbra escribir  $H[k - k_o]$  en vez de  $H[k, k_o]$ .

### 3.3.2.2. Repaso: La Transformada $\mathcal{Z}$

**Definición 3.10** (La Transformada  $\mathcal{Z}$ ). Definimos la transformada  $\mathcal{Z}$  de una señal en tiempo discreto  $\{u[k]\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  como

$$\mathcal{Z}\{u[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} u[k]z^{-k} \equiv u[z],$$

con  $z$  una variable compleja.

**Ejemplo 3.2.** Si  $u[k] = a^k 1^+[k]$ ,  $\Rightarrow \mathcal{Z}\{u[k]\} = \frac{z}{z-a}$ , con región de convergencia  $|z| > |a|$ . ◁

**Teorema 3.21** (Algunas propiedades de la transformada  $\mathcal{Z}$ ). *Dos importantes propiedades de la transformada  $\mathcal{Z}$  son*

$$\mathcal{Z}\{u[k-n]\} = z^{-n}u[z] + u[-1]z^{-n+1} + \dots + u[-n+1]z^{-1} + u[-n]$$

$$\mathcal{Z}\{u[k+n]\} = z^n u[z] - u[0]z^n - u[1]z^{n-1} - \dots - u[n-1]z$$

### 3.3.2.3. Función de Transferencia

*Sea el modelo de estado invariante en el tiempo*

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

*Aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$  se obtiene:*

$$zx[z] - zx[0] = Ax[z] + Bu[z]$$

$$y[z] = Cx[z] + Du[z]$$

*Resolviendo para  $x[z]$  e  $y[z]$  resulta:*

$$x[z] = \underbrace{(z\mathbb{I} - A)^{-1}Bu[z]}_{\text{Representa a la respuesta de estado de estado cero}} + \underbrace{z(z\mathbb{I} - A)^{-1}x[0]}_{\text{Representa a la respuesta de estado de entrada cero}}$$

$$y[z] = \underbrace{[C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D]u[z]}_{\text{Representa a la respuesta de estado cero}} + \underbrace{Cz(z\mathbb{I} - A)^{-1}x[0]}_{\text{Representa a la respuesta de entrada cero}}$$

Nótese que si  $x[0] = 0$ , entonces

$$y[z] = [C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D] u[z]$$

También, si  $u[k] = 0$ , entonces  $x[z] = z(z\mathbb{I} - A)^{-1}x[0]$ , de modo que

$$\Phi[k] = A^k = \mathcal{Z}^{-1} \{z(z\mathbb{I} - A)^{-1}\} \quad (3.31)$$

**Definición 3.11.** La función de transferencia del modelo de estado invariante en el tiempo se define como

$$H[z] = C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D$$

#### 3.3.2.4. Relación Entre la Respuesta Impulsiva y la Función de Transferencia

**Teorema 3.22.** En el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo, en tiempo discreto, se cumple la siguiente relación:

$$H[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H[z]\}$$

*Demostración.* De la Ecuación (3.30) con  $k_0 = 0$ , se tiene:

$$\mathcal{Z}\{H[k]\} = z^{-1}C \sum_{k=0}^{\infty} A^k B z^{-k} + D$$

Si  $A$  no es defectuosa y  $A = T\Lambda T^{-1}$ , donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{H[k]\} &= z^{-1}CT \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k z^{-k} T^{-1}B + D \\
 &= z^{-1}CT[\mathbb{I} - z^{-1}\Lambda]^{-1}T^{-1}B + D \\
 &= z^{-1}C[\mathbb{I} - z^{-1}A]^{-1}B + D \\
 &= C[z\mathbb{I} - A]^{-1}B + D \\
 &= H[z]
 \end{aligned}$$

con región de convergencia  $|z| > \max_i |\lambda_i|$ ,  $i = 1, \dots, n$ . □

*En la última parte de la prueba anterior se hizo uso del siguiente hecho:*

la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (s^{-1}\lambda)^k = 1 + s^{-1}\lambda + s^{-2}\lambda^2 + \dots = (1 - s^{-1}\lambda)^{-1}$$

converge para  $|s^{-1}\lambda| < 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1}\Lambda)^k &= \mathbb{I} + z^{-1}\Lambda + z^{-2}\Lambda^2 + \dots \\
 &= (\mathbb{I} - z^{-1}\Lambda)^{-1},
 \end{aligned}$$

$\forall z$  tal que  $|\hat{\lambda}| < 1$ ,  $\forall \hat{\lambda}$  valor propio de  $z^{-1}\Lambda$ , o lo que es lo mismo,  $\forall \hat{\lambda}$  valor propio de  $z^{-1}A$ . Como  $\hat{\lambda} = z^{-1}\lambda$ , con  $\lambda$ , un valor propio de  $A$ , la serie converge para  $|z^{-1}\lambda| < 1$ ,  $\forall \lambda$  valor propio de  $A$ .

*Demostración. (Prueba alternativa del Teorema 3.22)*

De la Ecuación (3.30) se tiene

$$H[k] = \begin{cases} CA^{k-1}B & , k > 0 \\ D & , k = 0 \\ [0] \in \mathcal{M}(r, m) & , k < 0 \end{cases}$$

Sabemos además que, por (3.31),  $A^k = \mathcal{Z}^{-1}\{z(z\mathbb{I} - A)^{-1}\}$ , y que, por la Definición 3.11,  $H[z] = C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D$ . Entonces

$$\mathcal{Z}\{H[k]\} = D + Cz^{-1}z(z\mathbb{I} - A)^{-1}B = C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D = H[z]$$

□



## 4 CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LIT

### 4.1. Introducción

*Aquí nos ocupamos del problema de caracterizar aquellos estados que son mutuamente transferibles de uno a otro mediante alguna entrada en un intervalo finito de tiempo.*

### 4.2. Definiciones Básicas y Equivalencias

*Empezamos esta sección explicando lo que se debe entender por un estado controlable de un sistema invariante en el tiempo en tiempo continuo de ecuación dinámica de estado  $\dot{x} = Ax + Bu$ .*

**Definición 4.1.** *Un estado  $x_o = x(t_o) \in \mathbb{R}^n$  es controlable sobre  $[t_o, t_1]$  si existe una entrada  $u(t)$  definida sobre  $[t_o, t_1]$  tal que*

$$0 = \Phi(t_1 - t_o)x_o + \int_{t_o}^{t_1} \Phi(t_1 - q)Bu(q)dq$$

*Se dice que tal entrada  $u(t)$  conduce o transfiere  $x(t)$  de  $x_o$  a 0 (brevemente, conduce o transfiere  $x_o$  a 0). Debido a la estructura asumida invariante en el tiempo, un simple cambio en la variable de integración y/o una traslación del intervalo  $[t_o, t_1]$  demuestra que si  $x_o$  es controlable sobre  $[t_o, t_1]$ , es controlable sobre todo intervalo finito de tiempo. Parte de la demostración de esta afirmación es como sigue:*

*$x_o$  es controlable sobre  $[t_o, t_1]$  si existe  $u(t)$  en  $[t_o, t_1]$  tal que*

$$0 = \Phi(t_1 - t_o)x_o + \int_{t_o}^{t_1} \Phi(t_1 - q)Bu(q) dq$$

Haciendo en esta ecuación  $q = \tau - P$ , con  $P$  una constante real cualquiera, obtenemos

$$0 = \Phi(t_1 - t_0)x_0 + \int_{t_0+P}^{t_1+P} \Phi(t_1 - \tau + P)Bu(\tau - P) d\tau$$

ó

$$0 = \Phi((t_1 + P) - (t_0 + P))x_0 + \int_{t_0+P}^{t_1+P} \Phi((t_1 + P) - \tau)B \underbrace{u(\tau - P)}_{\bar{u}(\tau)} d\tau$$

de modo que si  $x_0$  es controlable sobre  $[t_0, t_1]$ , es controlable sobre  $[t_0 + P, t_1 + P]$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}$  pues la última ecuación nos dice que  $\bar{u}(t) = u(t - P)$  conduce  $x_0$  a 0 sobre el intervalo de tiempo  $[t_0 + P, t_1 + P]$ .

**Definición 4.2.** Se dice que el modelo de estado  $\dot{x} = Ax + Bu$  es controlable (frecuentemente llamado completamente controlable) si y sólo si todo estado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es controlable.

Aquí, al decir “el par  $(A, B)$  es controlable” entenderemos que nos referimos a que el sistema es controlable.

**Teorema 4.1.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $(A, B)$  es controlable sobre  $[t_0, t_1]$
2.  $\forall x_0 = x(t_0), \exists u(t), t_0 \leq t \leq t_1$  que conduce  $x_0$  a 0.
3.  $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u(t), t_0 \leq t \leq t_1$  que conduce  $x_0$  a  $x_1$ .
4.  $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u(t), t_0 \leq t \leq t_1$  que conduce  $0 = x(t_0)$  a  $x_1 = x(t_1)$ .

*Demostración.*

1  $\iff$  2: por la definición de controlabilidad.

Veamos la prueba de 2  $\iff$  3:

( $\Leftarrow$ )

Haciendo  $x_1 = 0$  en la afirmación 3 se obtiene la afirmación 2:  $\forall x_0 =$

$x(t_0)$ ,  $\exists u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  que conduce  $x_0$  a 0.

( $\implies$ )

Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  cualesquiera, y sea  $x_0 = x_1 - x_2$ . Se tiene que 2 implica la existencia de  $u(t)$  de modo que

$$0 = \Phi(t_1 - t_0)(x_1 - x_2) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q)Bu(q) dq$$

ó

$$\Phi(t_1 - t_0)x_2 = \Phi(t_1 - t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q)Bu(q) dq \quad (4.1)$$

Dado que  $\Phi(t_1 - t_0)(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ , por la naturaleza no singular de  $\Phi(t)$ ,  $\forall t$ , la definición  $\hat{x}_2 = \Phi(t_1 - t_0)x_2$ , nos permite notar que (4.1) dice que  $2 \Rightarrow 3$ :  $\forall x_1, \hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists u(t)$  que conduce  $x_1$  a  $\hat{x}_2$ .

Veamos ahora la prueba de  $3 \iff 4$ :

( $\implies$ )

Haciendo  $x_0 = x(t_0) = 0$  y  $x_1 = x(t_1)$  en 3 se obtiene 4:  $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists u(t)$  que conduce 0 a  $x_1$ .

( $\impliedby$ )

Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  cualesquiera. Entonces 4 implica que  $\exists u(t)/$

$$x_2 - x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q)Bu(q) dq \quad (4.2)$$

Como  $\det \Phi(t_1 - t_0) \neq 0$ ,  $\exists \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n / x_1 = \Phi(t_1 - t_0)\hat{x}_1$ . Reemplazando en (4.2), queda:

$$x_2 = \Phi(t_1 - t_0)\hat{x}_1 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q)Bu(q) dq$$

Esta ecuación implica que  $\forall \hat{x}_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  que lleva  $\hat{x}_1$  a  $x_2$ , esto es, que se cumple 3.  $\square$

**Proposición 4.1.** *El conjunto de todos los estados controlables es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  y es llamado el subespacio controlable.*

*Demostración.* Sea  $W$  el subespacio controlable. Observamos lo siguiente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x_i \in W$  con correspondientes  $u_i, i = 1, 2$  tales que

$$0 = \Phi(t_1 - t_0)x_i + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q)Bu_i(q) dq, \quad i = 1, 2,$$

se deduce

$$0 = \Phi(t_1 - t_0)(\alpha x_1 + \beta x_2) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q)B(\alpha u_1 + \beta u_2) dq,$$

esto es, que  $\forall x_1, x_2 \in W$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in W$ . Esto significa que el subespacio controlable es efectivamente un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

### 4.3. Caracterización del Subespacio Controlable

*A continuación caracterizamos el subespacio controlable del par  $(A, B)$  en términos del espacio columna de la matriz de controlabilidad*

$Q = [ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ]$ , donde  $n$  es el orden de la matriz  $A$ .

**Lema 4.1.** *Defínase la matriz  $Q_k = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B ]$ . Si para algún  $k$ ,  $\text{rango}[Q_{k+1}] = \text{rango}[Q_k], \Rightarrow \text{rango}[Q_j] = \text{rango}[Q_k], \forall j \geq k$ .*

*Demostración.* El lema es trivialmente cierto si  $j = k$  ó  $j = k+1$ . De aquí, supóngase que  $j > k+1$ . La condición de que  $\text{rango}[Q_k] = \text{rango}[Q_{k+1}]$  significa que  $\text{rango}[ B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B ] = \text{rango}[ Q_k \quad A^k B ]$ , donde  $Q_{k+1} = [ Q_k \quad A^k B ]$ . De este modo, las columnas de  $Q_{k+1}$  son combinaciones lineales de las columnas de  $Q_k$ , esto es, existen matrices  $M_0, M_1, \dots, M_{k-1}$  de dimensiones apropiadas tales que

$$A^k B = [B]M_0 + [AB]M_1 + \dots + [A^{k-1}B]M_{k-1} \quad (4.3)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por  $A$  se obtiene

$$A^{k+1}B = [AB]M_0 + [A^2B]M_1 + \dots + [A^k B]M_{k-1} \quad (4.4)$$

Esta ecuación muestra que las columnas de  $A^{k+1}B$  son combinaciones lineales de las columnas de  $Q_{k+1} = [B \ AB \ \dots \ A^k B]$ . Ahora, obsérvese que  $Q_{k+2} = [Q_{k+1} \ A^{k+1}B]$ . De este modo, de la ecuación (4.4), las columnas de  $Q_{k+2}$  son combinaciones lineales de las columnas de  $Q_{k+1}$ , las cuales son a su vez combinaciones lineales de las columnas de  $Q_k$ . Por lo tanto,

$$\text{rango}[Q_k] = \text{rango}[Q_{k+1}] = \text{rango}[Q_{k+2}]$$

Continuando inductivamente el argumento, se llega a que  $\text{rango}[Q_j] = \text{rango}[Q_k]$ ,  $\forall j \geq k$ , siempre que  $\text{rango}[Q_k] = \text{rango}[Q_{k+1}]$ , lo que se deseaba probar.  $\square$

**Lema 4.2.**  $\forall p \in \mathbb{N} / p > n$ ,

$$\text{rango}[B \ AB \ \dots \ A^{p-1}B] = \text{rango}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B].$$

*Demostración.* Considérese nuevamente la matriz  $Q_k$ . Recordando la definición del rango de una matriz y sus propiedades, advertimos que debe cumplirse  $\text{rango}[Q_{k+1}] \geq \text{rango}[Q_k]$ ,  $\forall k$ .

Como toda matriz  $Q_k$  tiene  $n$  filas,  $\text{rango}[Q_k] \leq n$ ,  $\forall k$ .

En vista de lo anterior, el rango de cada matriz en la sucesión  $\{Q_1, \dots, Q_n\}$  o excede al rango de la matriz anterior, o se mantiene igual a él. Por el Lema 4.1, si los rangos de dos matrices sucesivas alguna vez coinciden, el rango se mantiene fijo para todos los términos sucesivos. De aquí,  $\text{rango}[Q_n]$  es  $n$ , ó  $\text{rango}[Q_{n-1}] = \text{rango}[Q_n] < n$ . Esto implica el resultado del lema.  $\square$

**Corolario 4.1.** Sea  $Q = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ .

Entonces,  $\forall x_o \in \text{span-col}[Q]$ ,  $Ax_o \in \text{span-col}[Q]$ .

*Demostración.* Desde que  $Q = Q_n$ , como se definió antes, la prueba del primer lema implica el resultado deseado.  $\square$

*El Corolario 4.1 del Lema 4.2 dice que el espacio columna de  $Q$  es  $A$ -invariante:  $A(\text{span-col}[Q]) \subset \text{span-col}[Q]$ . Como  $A$  relaciona el vector de estado a su derivada, este corolario implica que todos los cambios en estados que yacen en  $\text{span-col}[Q]$  deben tomar lugar dentro de los confines de  $\text{span-col}[Q]$ . Intuitivamente hablando, movimiento empezado dentro de  $\text{span-col}[Q]$  permanece dentro de  $\text{span-col}[Q]$ . Más formalmente, si  $x_0 \in \text{span-col}[Q]$ , entonces  $x(t) = e^{At}x_0 \in \text{span-col}[Q]$ .*

*Como veremos luego, los lemas anteriores y la  $A$ -invariancia de  $\text{span-col}[Q]$  permiten el desarrollo de una transformación de estado la cual extrae y hace explícita la parte controlable del par  $(A, B)$ . Específicamente, veremos que existe una transformación de estado  $x = [U_1 \ U_2]z$  tal que*

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

*en la cual todos los aspectos controlables de  $x$  se proyectan sobre la parte  $z_1$  de  $z$ . Este sistema equivalente juega un un importante papel en la caracterización del subespacio controlable.*

*Empezamos definiendo dos matrices  $U_1$  y  $U_2$  como sigue:*

*Sean  $p = \text{rango}[Q]$ ,  $U_1$  una matriz  $n \times p$  cuyas columnas forman una base para el espacio columna de  $Q$ , y  $U_2$  una matriz  $n \times (n - p)$  cuyas columnas en conjunción con aquellas de  $U_1$  forman una base para  $\mathbb{R}^n$ , esto es,  $\text{span-col}[U_1 \ U_2] = \mathbb{R}^n$ . Varias proposiciones concernientes a  $[U_1 \ U_2]$  surgen de esta definición.*

**Proposición 4.2.**  $[U_1 \ U_2]^{-1}$  existe.

*Demostración.* El resultado es obvio desde que la matriz  $n \times n$   $[ U_1 \ U_2 ]$  tiene  $n$  columnas linealmente independientes las cuales son una base para  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Proposición 4.3.**  $AU_1 = U_1 \bar{A}_{11}$  para una apropiada matriz  $\bar{A}_{11}$  de orden  $p \times p$ .

*Demostración.* Del Corolario 4.1 del Lema 4.2,  $AU_1 \in \text{span-col}[Q]$ .

Cada columna de  $AU_1$  es de este modo una combinación lineal de las columnas de  $U_1$ . En forma de ecuación, esto significa que  $AU_1 = U_1 \bar{A}_{11}$  para alguna apropiada matriz  $\bar{A}_{11}$ .  $\square$

**Proposición 4.4.**

$$A[ U_1 \ U_2 ] = [ U_1 \ U_2 ] \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

para apropiadas matrices  $\bar{A}_{ij}$ .

*Demostración.* De la Proposición 4.3,  $AU_1 = [ U_1 \ U_2 ] \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$ , para una apropiada  $\bar{A}_{11}$ .

Ahora, las columnas de  $[ U_1 \ U_2 ]$  representan una base para  $\mathbb{R}^n$ . Pero cada columna de  $AU_2$  es un elemento de  $\mathbb{R}^n$ . De aquí, deben existir matrices  $\bar{A}_{12}$  y  $\bar{A}_{22}$  tales que  $AU_2 = [ U_1 \ U_2 ] \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$  lo cual establece la proposición.  $\square$

**Proposición 4.5.** Las matrices apropiadas  $\bar{A}_{ij}$  de la Proposición 4.4 son dadas por

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = [ U_1 \ U_2 ]^{-1} A [ U_1 \ U_2 ]$$

*Demostración.* Esta sigue directamente de la proposiciones 4.2 y 4.4.  $\square$

**Proposición 4.6.** Para una apropiada matriz  $B_1$  de orden  $p \times m$ ,

$$[ U_1 \ U_2 ]^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Demostración.* Como  $\text{span-col}[B] \subset \text{span-col}[Q]$ , siendo

$Q = [ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ]$ , y ya que las columnas de  $U_1$  forman una base de  $\text{span-col}[Q]$ ,  $\exists B_1 \in \mathcal{M}(p, m)$  tal que  $B = U_1 B_1$ , o, equivalentemente,

$$B = [ U_1 \ U_2 ] \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad [ U_1 \ U_2 ]^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

**Proposición 4.7.** Dada  $\dot{x} = Ax + Bu$ , la transformación de estado

$$[ U_1 \ U_2 ]z = x$$

produce la dinámica de estado equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.5)$$

donde  $\text{rango}[ B_1 \ \bar{A}_{11}B \ \dots \ \bar{A}_{11}^{p-1}B_1 ] = p$ .

*Demostración.* Con  $T = [ U_1 \ U_2 ]$ , la dinámica de estado equivalente resulta ser

$$\dot{z} = (T^{-1}AT)z + (T^{-1}B)u \quad (4.6)$$

De las proposiciones anteriores y la Ecuación (4.6), podemos escribir

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$



con

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11} &\in \mathcal{M}(p, p), \bar{A}_{12} \in \mathcal{M}(p, n-p), \\ \bar{A}_{22} &\in \mathcal{M}(n-p, n-p), \text{ y } B_1 \in \mathcal{M}(p, m),\end{aligned}$$

de modo que, escribiendo  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$  con  $z_1 \in \mathcal{M}(p, 1)$ ,  $z_2 \in \mathcal{M}(n-p, 1)$ , la dinámica de estado equivalente será

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Además, definiendo  $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (nótese que  $\bar{A} = T^{-1}AT$ ,  $\bar{B} = T^{-1}B$ ),  $\hat{Q} = [ \bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B} ]$ , y tomando en cuenta que  $\text{rango}[Q] = p$ , se puede escribir

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= [ T^{-1}B \quad T^{-1}AB \quad T^{-1}A^2B \quad \dots \quad T^{-1}A^{n-1}B ] \\ &= T^{-1}[ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ] \\ &= T^{-1}Q\end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{rango}[\hat{Q}] = \text{rango}[Q] = p$  (empleamos aquí una propiedad del rango de una matriz).

Definamos ahora  $\bar{Q} = [ B_1 \quad \bar{A}_{11}B_1 \quad \dots \quad \bar{A}_{11}^{p-1}B_1 ]$ . Se puede mostrar fácilmente que  $\text{rango}[\bar{Q}] = p$ :

$$\begin{aligned}
 p &= \text{rango}[\hat{Q}] \\
 &= \text{rango}[ \bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B} ] \\
 &= \text{rango} \left[ \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\
 &= \text{rango} \left[ \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\
 &= \text{rango} \left[ \begin{bmatrix} B_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}B_1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} \right] \\
 &= \text{rango} \left[ \begin{bmatrix} B_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}B_1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{p-1}B_1 \end{bmatrix} \right] \quad (\text{Lemas 4.1 y 4.2}) \\
 &= \text{rango}[\bar{Q}]
 \end{aligned}$$

□

La Ecuación (4.5) representa la forma controlable de Kalman de la dinámica de estado original. La razón para el término “forma controlable” se sustenta en el hecho que la parte  $z_1$  del nuevo vector de estado contiene la “parte controlable” del sistema en las coordenadas  $z$ , como se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 4.8.** Si  $x \in \text{span-col}[Q]$ , entonces

$$[ U_1 \quad U_2 ]^{-1}x = \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde  $z_1 \in \mathbb{R}^p$  y  $0$  es el vector de  $\mathbb{R}^{n-p}$ , esto es,  $[ z_1^t \quad 0^t ]^t$  representa al espacio columna de  $Q$ .

*Demostración.* Simplemente usamos el hecho que  $U_1$  está formada por columnas que constituyen una base de  $\text{span-col}[Q]$ , entonces por estar  $x$  en  $\text{span-col}[Q]$ ,  $\exists! z_1 \in \mathbb{R}^p$  tal que

$$x = U_1 z_1 = [ U_1 \ U_2 ] \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ó

$$[ U_1 \ U_2 ]^{-1} x = \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

*El material de la Sección A-4.2 sugiere que la descomposición de valor singular (Teorema A-4.4) de la matriz de controlabilidad toma la forma*

$$[ U_1 \ U_2 ] \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^t \\ V_2^t \end{bmatrix}$$

*La matriz  $U_1$  tiene columnas ortonormales que generan a  $\text{span-col}[Q]$ , y  $U_2$  tiene columnas que completan una base ortonormal para  $\mathbb{R}^n$ . De este modo,  $[ U_1 \ U_2 ]$  de las Proposiciones 4.2 a 4.8 puede ser tomada como la matriz  $[ U_1 \ U_2 ]$  en la descomposición de valor singular de  $Q$ . Además, si  $[ U_1 \ U_2 ]$  es tomada de esta manera, entonces  $[ U_1 \ U_2 ]^{-1} = [ U_1 \ U_2 ]^t$ , lo que simplifica el cálculo de la Ecuación (4.5).*

**Lema 4.3.** *La matriz Gramiana de controlabilidad*

$$K = \int_0^{t_1} \exp[-\bar{A}_{11}\tau] B_1 B_1^t \exp[-\bar{A}_{11}^t \tau] d\tau$$

*es no singular siempre que  $\text{rango}[\bar{Q}] = \text{rango} [ B_1 \ \bar{A}_{11} B_1 \ \dots \ \bar{A}_{11}^{p-1} B_1 ] = p$ .*

*Demostración.* Probamos el lema por contradicción. Supóngase que  $K$  es singular, esto es, que existe un vector  $0 \neq \nu \in \mathbb{R}^p$  tal que  $\nu^t K = 0_p^t$ . Mostraremos que esta suposición contradice la hipótesis de que  $\text{rango}[\bar{Q}] = p$ . De aquí,  $K$  debe ser no

singular. Para mostrar esto, probamos que si  $\nu^t K = 0_p^t$ , entonces  $\nu^t \bar{Q} = 0_{pm}^t$ .

Paso 1. Si  $\nu^t K = 0^t$ , entonces  $\nu^t K \nu = 0$ , esto es,

$$0 = \nu^t K \nu = \int_0^{t_1} \nu^t \exp[-\bar{A}_{11}\tau] B_1 B_1^t \exp[-\bar{A}_{11}^t \tau] \nu d\tau$$

Ahora, sea  $c(\tau) = B_1^t \exp[-\bar{A}_{11}^t \tau] \nu \triangleq [c_1(\tau), \dots, c_m(\tau)]^t$ . Obsérvese que en términos de  $c(\tau)$ ,

$$\nu^t K \nu = \int_0^{t_1} c^t(\tau) c(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} [c_1^2(\tau) + \dots + c_m^2(\tau)] d\tau = 0$$

Ya que el integrando es siempre no negativo,  $\nu^t K \nu$  es igual a cero si y sólo si cada  $c_i(\tau)$  es idénticamente igual a cero sobre  $[0, t_1]$ ; esto es, para toda  $i$ ,  $c_i(\tau) \equiv 0$  para  $\tau \in [0, t_1]$ .

Paso 2. Como  $c_i(\tau) \equiv 0$ , todas sus derivadas son idénticamente iguales a cero también. Esto es,

$$\frac{d^j c^t}{d\tau^j}(\tau) \equiv 0$$

para toda  $j$ . En particular,  $c^t(\tau) \equiv 0$  implica que  $\nu^t \exp[-\bar{A}_{11}\tau] B_1 \equiv 0, \forall \tau$ . Ahora, en  $\tau = 0$ ,

$$\nu^t B_1 = 0^t$$

La evaluación de la primera derivada de  $c^t(\tau) = 0$  en  $\tau = 0$  da

$$\left. \frac{dc^t}{d\tau}(\tau) \right|_{\tau=0} = \nu \exp[-\bar{A}_{11}\tau] (-\bar{A}_{11}) B_1 \Big|_{\tau=0} = -\nu^t \bar{A}_{11} B_1 = 0^t$$

Para  $j \geq 1$ ;

$$\left. \frac{d^j c^t}{d\tau^j}(\tau) \right|_{\tau=0} = (-1)^j \nu^t \bar{A}_{11}^j B_1 = 0^t$$

Paso 3. De la evaluación de las derivadas de  $c^t(\tau)$  en  $\tau = 0$ , sigue que

$$\nu^t \bar{Q} = \nu^t [ B_1 \quad \bar{A}_{11} B_1 \quad \dots \quad \bar{A}_{11}^{p-1} B_1 ] = 0_{pm}^t$$

Esto contradice la hipótesis básica de que  $\text{rango}[\bar{Q}] = p$ , y de aquí,  $K$  debe ser no singular.  $\square$

**Teorema 4.2.** *Para la dinámica de estado  $\dot{x} = Ax + Bu$ , el estado  $\hat{x}$  es controlable si y sólo si  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ , donde  $Q = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  es la llamada matriz de controlabilidad del sistema.*

*Demostración.*

Parte 1. Supóngase que  $\hat{x}$  es controlable; mostremos que  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ .

*Paso 1.* Ya que  $\hat{x}$  es controlable, existe una función  $u(\cdot)$  definida sobre  $[0, t_1]$  tal que

$$\hat{x} = \int_0^{t_1} \exp[A(t_1 - \tau)]Bu(\tau) d\tau$$

*Paso 2.* Expandiendo la exponencial en serie de Taylor se obtiene

$$\hat{x} = \int_0^{t_1} [\mathbb{I} + A(t_1 - \tau) + A^2 \frac{(t_1 - \tau)^2}{2!} + \dots]Bu(\tau) d\tau$$

*Paso 3.* La distribución de la integral sobre la suma finita y la factorización de las matrices constantes por la izquierda resulta en

$$\begin{aligned} \hat{x} &= B \int_0^{t_1} u(\tau) d\tau + AB \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)u(\tau) d\tau + A^2B \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^2}{2!}u(\tau) d\tau + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} A^j B \nu_j(t_1) \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde

$$\nu_j(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^j}{j!}u(\tau) d\tau$$

*Paso 4.* Del Lema 4.2, para cualquier  $p > n - 1$ ,  $A^p B$  tiene columnas que dependen de las columnas de  $Q$ . De aquí, la suma infinita en la Ecuación 4.7 es equivalente a

la suma finita

$$\hat{x} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \hat{v}_j = Q[\hat{v}_0^t, \hat{v}_1^t, \dots, \hat{v}_{n-1}^t]^t$$

para un apropiado  $\hat{v}_j$ . Este  $\hat{x}$  es una combinación lineal de las columnas de  $Q$  y está en el espacio columna de  $Q$ .

Parte 2. Supóngase ahora que  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ . Mostraremos entonces que  $\hat{x} = x(t_1)$  es controlable. Lo crucial de esta prueba es la construcción de una entrada que conduce 0 a  $\hat{x}$ .

*Paso 1.* Si  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ , entonces el modelo de estado  $\dot{x} = Ax + Bu$  tiene la representación equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

en un nuevo sistema coordenado bajo la transformación de estado  $[U_1 \ U_2]z = x$  como en la Proposición 4.7. Aquí se asume que

$$\bar{Q} = [B_1 \ \bar{A}_{11}B_1 \ \dots \ \bar{A}_{11}^{p-1}B_1]$$

tiene rango  $p$ , donde  $\bar{A}_{11} \in \mathcal{M}(p, p)$ , esto es,  $\text{rango}[Q] = \text{rango}[\bar{Q}]$ . Además por la Proposición 4.8,  $[\hat{z}_1^t, 0^t]^t$  representa un vector  $\hat{x}$  en el espacio columna de  $Q$  en las nuevas coordenadas:

$$[U_1 \ U_2]^{-1}\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del Lema 4.3, la matriz  $p \times p$

$$K = \int_0^{t_1} \exp[-\bar{A}_{11}\tau] B_1 B_1^t \exp[-\bar{A}_{11}^t\tau] d\tau \quad (4.8)$$

es no singular.

*Paso 2.* Definamos la entrada de control

$$u(q) = B_1^t \exp[-\bar{A}_{11}^t q] K^{-1} \exp[-\bar{A}_{11} t_1] \hat{z}_1 \quad (4.9)$$

para  $0 \leq q \leq t_1$ . Esta entrada depende explícitamente de tanto  $K$  de la Ecuación (4.8) como del estado final deseado  $[\hat{z}_1^t, 0^t]^t$ . Lo que resta de la prueba demuestra que  $u(q)$  conduce 0 a  $[\hat{z}_1^t, 0^t]^t$ . Hasta el final de esta prueba, representamos con  $\Phi_z(t_1 - q)$  a la matriz de transición de estado del sistema en las coordenadas  $z$ . Entonces obsérvese que

$$\Phi_z(t_1 - q) = \exp \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}(t_1 - q) & \bar{A}_{12}(t_1 - q) \\ 0 & \bar{A}_{22}(t_1 - q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_1 - q) & \Phi_{12}(t_1 - q) \\ 0 & \Phi_{22}(t_1 - q) \end{bmatrix}$$

donde  $\Phi_{ii}(t_1 - q) = \exp[\bar{A}_{ii}(t_1 - q)]$  y también que

$$\Phi_z(t_1 - q) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp[\bar{A}_{11} t_1] \exp[-\bar{A}_{11} q] B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\int_0^{t_1} \Phi_z(t_1 - q) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(q) dq = \begin{bmatrix} \exp[\bar{A}_{11} t_1] \int_0^{t_1} \exp[-\bar{A}_{11} q] B_1 u(q) \\ 0 \end{bmatrix} dq$$

El problema entonces se reduce a mostrar que

$$\hat{z}_1 = \exp[\bar{A}_{11} t_1] \int_0^{t_1} \exp[-\bar{A}_{11} q] B_1 u(q) dq \quad (4.10)$$

*Paso 3.* El lado derecho de la Ecuación (4.10) se vuelve

$$\begin{aligned} & \exp[\bar{A}_{11} t_1] \int_0^{t_1} \exp(-\bar{A}_{11} q) B_1 [B_1^t \exp(-\bar{A}_{11}^t q) K^{-1} \exp(-\bar{A}_{11} t_1) \hat{z}_1] dq \\ & = \exp[\bar{A}_{11} t_1] K K^{-1} \exp[-\bar{A}_{11} t_1] \hat{z}_1 = \hat{z}_1 \end{aligned}$$

de modo que la prueba está completa.  $\square$

**Corolario 4.2.** *El modelo de estado*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

es (completamente) controlable si y sólo si  $\text{rango}[Q] = n$ .

*El siguiente teorema sigue directamente del Teorema 4.2.*

**Teorema 4.3.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Si  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ , entonces  $\hat{x}$  puede ser conducido a 0 por alguna entrada.
2. Si  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ , entonces 0 puede ser conducido a  $\hat{x}$  por alguna entrada.
3. Si  $\hat{x}$  y  $\tilde{x}$  están ambos en  $\text{span-col}[Q]$ , entonces  $\hat{x}$  puede ser conducido a  $\tilde{x}$  por alguna entrada.

**Corolario 4.3.** *Si el modelo de estado*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

es tal que  $\text{rango}[Q] = p$ , una entrada que conduce  $x_o = x(t_o) \in \text{span-col}[Q]$  a  $x_1 = x(t_1) \in \text{span-col}[Q]$  es

$$u(q) = -B_1^t \exp[\bar{A}_{11}^t(t_1 - q)] \hat{K}^{-1} [\exp[\bar{A}_{11}(t_1 - t_o)] \hat{z}_o - \hat{z}_1]$$

donde

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_o \\ 0 \end{bmatrix} = [U_1 \ U_2]^{-1} x_o \quad , \quad \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [U_1 \ U_2]^{-1} x_1$$



y  $\hat{K}$  se define como  $\hat{K} = \int_{t_0}^{t_1} \exp[\bar{A}_{11}(t_1 - q)] B_1 B_1^t \exp[\bar{A}_{11}^t(t_1 - q)] dq$ .

**Ejemplo 4.1.** Considérese el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

La matriz de controlabilidad es  $Q = [ B \ AB ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

Como se vé,  $\text{rango}[Q] = 1 < 2$ , luego, el sistema no es totalmente controlable.

Por el Teorema 4.2, ya que todo  $\hat{x} = \beta [ 0 \ 1 ]^t$  está en  $\text{span-col}[Q]$ , se dice que  $\hat{x}$  es controlable (puede ser conducido a 0).

También, como  $\hat{x} = [ \alpha \ \beta ]^t$ ,  $\alpha \neq 0$  no está en  $\text{span-col}[Q]$ , se dice que  $\hat{x}$  no es controlable (no puede ser conducido a 0 en tiempo finito.)  $\triangleleft$

## 4.4. Equivalencias a la Controlabilidad de Sistema

*En lo que sigue, es útil recordar que una matriz real  $M \in \mathcal{M}(n, n)$  es positiva definida si todas las soluciones de su polinomio característico son reales estrictamente mayores que cero.*

**Teorema 4.4.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El par  $(A, B)$  es controlable.*
- (ii)  *$\text{rango}[(\lambda_i \mathbb{I} - A) \mid B] = n$ ,  $\forall$  valor propio  $\lambda_i$  de  $A$ .*
- (iii)  *$\text{rango}[Q] = n$ , donde  $Q$  es la matriz de controlabilidad.*

(iv)  $\text{rango} [\exp(-At)B] = n$ , esto es, hay  $n$  filas (funciones fila) linealmente independientes de  $\exp(-At)B$  sobre  $[0, \infty)$ .

(v) La matriz

$$\hat{K} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q) B B^t \Phi^t(t_1 - q) dq \quad (4.11)$$

es positiva definida. Además, la entrada

$$u(t) = -B^t \Phi^t(t_1 - t) \hat{K}^{-1} [\Phi(t_1 - t_0) x_0 - x_1] \quad (4.12)$$

transfiere  $x_0 = x(t_0)$  a  $x_1 = x(t_1)$ .

La existencia de una entrada  $u(t)$  en el Teorema 4.4 sigue directamente de la forma especial dada en la Ecuación (4.9) y se puede mostrar fácilmente que conduce  $x_0 = x(t_0)$  a  $x_1 = x(t_1)$ .

*Demostración.* La prueba del teorema se realiza como sigue. Primero, se prueba la equivalencia de las condiciones (i), (ii), y (iii). Después, se muestra que la condición (iii) implica la condición (iv), que la condición (iv) implica (v), y que (v) implica (i). La prueba se basa fundamentalmente en el Teorema 4.2 y los lemas que le preceden.

Paso 1. La equivalencia de (i) y (iii) sigue directamente del corolario al Teorema 4.2.

Paso 2. La prueba de que la condición (iii) implica la condición (ii) se establece por contradicción. Supóngase que existe una  $\lambda_i$  tal que  $\text{rango}[(\lambda_i \mathbb{I} - A)|B] < n$ . Entonces existe una  $0 \neq \nu \in \mathbb{R}^r$ , tal que

$$\nu^t [(\lambda_i \mathbb{I} - A)|B] = 0^t$$

o, equivalentemente, tal que

$$\nu^t (\lambda_i \mathbb{I} - A) = 0^t \quad (4.13)$$

y

$$\nu^t B = 0^t \quad (4.14)$$

donde no hemos distinguido entre las varias dimensiones de 0. De la Ecuación 4.13 y el hecho que  $\bar{\nu} = w_i$ , un vector propio izquierdo de  $A$ . De aquí,

$$\nu^t A^k = w_i^* A^k = \lambda_i^k w_i^k$$

De esta ecuación, junto con la Ecuación (4.14), sigue que

$$\nu^t Q = \nu^t [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ] = 0^t$$

contradiendo la independencia lineal de las filas de  $Q$ . Por lo tanto, la condición (iii) implica la condición (ii).

Paso 3. La equivalencia de las condiciones (ii) y (iii) se completa mostrando que la condición (ii) implica la condición (iii). Nuevamente, la verificación se basa en la técnica de prueba por contradicción: asúmase que  $\text{rango}[Q] < n$ , y muéstrase que  $\text{rango}[\lambda_i \mathbb{I} - A] < n$  para algún valor propio  $\lambda_i$  de  $A$ . Por los Lemas 4.1 y 4.2 sigue que  $\nu^t A^k B = 0^t$  para toda  $k \geq 0$ . Ahora es necesario establecer la existencia de un  $w_i \neq 0$  tal que  $w_i^t [(\lambda_i \mathbb{I} - A) | B] = 0^t$  para algún valor propio  $\lambda_i$ . Claramente,  $w_i$  debe ser un vector propio izquierdo de  $A$  que satisface  $w_i^t A = \lambda_i w_i^t$  o, equivalentemente,  $A^t w_i = \lambda_i w_i$ , esto es,  $w_i$  debe ser un vector propio derecho de  $A^t$ .

A fin de mostrar que existe tal  $w_i$ , considérese el conjunto

$$W = \{w / w^t A^k B = 0^t, k \geq 0\}$$

Este conjunto es no vacío, desde que  $\nu \in W$ . Ahora, el conjunto  $W$  es invariante con respecto a la multiplicación por  $A^t$ : sea  $w \in W$ ; entonces  $A^t w \in W$  desde que,  $(A^t w)^t A^k B = w^t A^{k+1} B = 0^t$ . Como  $W$  es  $A^t$ -invariante, debe contener un vector propio, por decir  $w_i$ , de  $A^t$ , asociado con  $\lambda_i$ . Pero como los valores propios de  $A$  y

$A^t$  coinciden, sigue que  $(\bar{w}_i)^t[(\lambda_i \mathbb{I} - A)B] = 0^t$ . Esta es la afirmación que contradice nuestra suposición.

Paso 4. Debemos probar que  $\text{rango}[Q] = n$  implica  $\text{rango}[\exp(-At)B] = n$ . Nuevamente, usando la técnica de contradicción, supóngase que  $\text{rango}[\exp(-At)B] \neq n$ , esto es, que existe  $\nu \neq 0$  tal que  $\nu^t \exp[-At]B \equiv 0^t$ , la función cero. Tomando derivadas y evaluando en  $t = 0$  se obtiene  $\nu^t A^k B = 0^t$  para toda  $k \geq 0$ . De este modo,  $\nu^t Q = 0^t$ , contradiciendo la suposición de que  $\text{rango}[Q] = n$ . De aquí,  $\text{rango}[Q] = n$  implica que  $\text{rango}[\exp(-At)B] = n$ .

Paso 5. Buscamos probar que si  $\text{rango}[\exp(-At)B] = n$  sobre  $[0, \infty)$ , entonces  $\hat{K}$  es positiva definida. Nuevamente, la prueba usa el método de contradicción. Supóngase que  $\hat{K}$  no es positiva definida. Entonces, debido a que la Ecuación (4.11) niega la posibilidad de una  $\hat{K}$  positiva definida,  $\hat{K}$  debe ser singular. Pero entonces, una  $\hat{K}$  singular implica la existencia de una  $\nu \neq 0$  tal que  $\nu^t \hat{K} = 0^t$ , lo que a su vez implica que  $\nu^t \hat{K} \nu = 0$ . En particular,

$$\nu^t \hat{K} \nu = \int_{t_0}^{t_1} \nu^t \Phi(t_1 - q) B B^t \Phi^t(t_1 - q) \nu dq = 0$$

Análogamente a la prueba del Lema 4.3, el integrando debe ser idénticamente cero para todo  $t_1 \geq q \geq t_0$ , de modo que

$$\nu^t \Phi(t_1 - q) B = \nu^t \exp[A(t_1 - q)] B = 0^t$$

De este modo, las filas de  $\exp[At]B$  son linealmente dependientes, de lo que sigue que las filas de  $\exp[-At]B$  también son linealmente dependientes.

Paso 6. Aquí probamos que una  $\hat{K}$  positiva definida implica la controlabilidad del par  $(A, B)$ . Como la entrada de la Ecuación (4.12) está bien definida, siempre que  $\hat{K}$  es positiva definida, se prueba que satisface la ecuación

$$x(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1 - q) B u(q) dq$$

de modo que  $u(t)$  conduce  $x(t_0)$  a  $x(t_1)$ , según la definición de un par controlable  $(A, B)$ . Esto completa la prueba.  $\square$

**Ejemplo 4.2.** Supóngase que la dinámica de estado de un modelo de estado particular es dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Paso 1. Determinación de la matriz de controlabilidad y su rango.

La matriz es  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , la cual tiene rango 2.

Paso 2. Verificación de que  $\text{rango}[(\lambda_i \mathbb{I} - A) | B] = 2$ , para cada valor propio,  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -1$ , de  $A$ :

Tenemos

$$\begin{aligned} \text{rango}[(\lambda_1 \mathbb{I} - A) | B] &= \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2, \text{ y} \\ \text{rango}[(\lambda_2 \mathbb{I} - A) | B] &= \text{rango} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2, \end{aligned}$$

como implica el teorema.

Paso 3. Comprobación de que  $[\exp(-At)B]$  tiene dos filas linealmente independientes.

Como

$$\exp[-At] = T e^{Dt} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

sigue que

$$\exp[-At]B = \begin{bmatrix} 2 - e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

Para que las filas sean linealmente independientes sobre algún intervalo  $[t_0, t_1]$ , debemos tener, para  $t_0 \leq t \leq t_1$  y  $t_0 < t_1$ ,

$$\alpha_1(2 - e^t) + \alpha_2 e^t = 0(t),$$

lo cual requiere que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . De este modo, las dos filas son linealmente independientes sobre  $[t_0, t_1]$  y en particular sobre  $[0, \infty)$ .

Paso 4. Comprobación de que  $\hat{K}$  es positiva definida.

Por simplicidad, sea  $t_0 = 0$  y  $t_1 = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \int_0^1 \Phi(t_1 - q) B B^t \Phi^t(t_1 - q) dq = T \int_0^1 e^{D(1-q)} (T^{-1} B) (T^{-1} B)^t e^{D^t(1-q)} dq T^t \\ &= T \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(1-q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(1-q)} \end{bmatrix} dq T^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2(1 - e^{-1}) \\ -2(1 - e^{-1}) & 0.5(1 - e^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.9039 & 0.8319 \\ 0.8319 & 0.4323 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta matriz tiene valores propios 2.228 y 0.0575 y es, de esta manera, positiva definida. ◁

## 4.5. Controlabilidad y Modos Dirigidos

*Supóngase que la matriz  $A$  de un sistema tiene valores propios distintos  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  y vectores propios derechos  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Entonces si  $T = [e_1, \dots, e_n]$ , siempre es posible escoger los vectores propios izquierdos asociados*

$\{w_1, \dots, w_n\}$  de modo que (véase la Sección A-3.3 del Apéndice)

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix}$$

La intención es demostrar que un modo  $(\lambda_i, e_i)$  es controlable si y sólo si  $w_i^* B \neq 0^t$ . El siguiente lema es la clave de este resultado.

En lo que sigue diremos que un vector  $v$  en un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{F}$  no tiene una proyección sobre el vector  $e_j$  de la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$  si  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ , con  $a_i \in \mathbb{F}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  y  $a_j = 0$ . De modo similar, diremos que un subespacio  $W$  de  $V$  no tiene una proyección sobre  $e_j$  de dicha base de  $V$  si todo vector de  $W$  no tiene una proyección sobre  $e_j$ .

**Lema 4.4.** Sea  $A$  como se ha mencionado. Entonces el espacio columna de  $B$  tiene una proyección sobre  $e_i$  con respecto a la base de vectores propios derechos para  $\mathbb{R}^n$ , si y sólo si  $e_i$  yace en el espacio columna de  $Q$ .

*Demostración.*

Paso 1. Ya que  $A$  tiene valores propios distintos, el conjunto de vectores propios derechos es una base de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, existen vectores fila  $\nu_1^t, \dots, \nu_n^t$  tales que  $B = e_1 \nu_1^t + \dots + e_n \nu_n^t$ . Ahora bien, el espacio columna de  $B$  tiene una proyección sobre  $e_i$  con respecto a la base de vectores propios derechos si y sólo si  $\nu_i^t \neq 0^t$ . A partir de las propiedades de los vectores propios derechos e izquierdos,

$$B = \underbrace{[e_1 | \dots | e_n]}_T \begin{bmatrix} \nu_1^t \\ \vdots \\ \nu_n^t \end{bmatrix} \rightsquigarrow T^{-1} B = \begin{bmatrix} \nu_1^t \\ \vdots \\ \nu_n^t \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} w_1^* B \\ \vdots \\ w_n^* B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^t \\ \vdots \\ \nu_n^t \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \nu_i^t = w_i^* B, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

De este modo, el espacio columna de  $B$  tiene una proyección sobre  $e_i$  con respecto a la base de vectores propios derechos de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $w_i^* B \neq 0^t$ .

Paso 2. Puesto que  $B = e_1 \nu_1^t + \dots + e_n \nu_n^t$  para apropiados vectores fila  $\nu_1^t$  a  $\nu_n^t$ , se tiene que, por las propiedades de los vectores propios ( $A^j v = \lambda^j v$  para todo valor propio  $v$  de la matriz  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda$ ),

$$\begin{aligned} A^j B &= A^j (e_1 \nu_1^t + \dots + e_n \nu_n^t) \\ &= e_1 (\lambda_1^j \nu_1^t) + \dots + e_n (\lambda_n^j \nu_n^t) \end{aligned}$$

Entonces,

$$Q = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B ]$$

$$= [ e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n ] \begin{bmatrix} \nu_1^t & & & & \\ & \nu_2^t & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \nu_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \lambda_1 \mathbb{I} & \dots & \lambda_1^{n-1} \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \lambda_2 \mathbb{I} & \dots & \lambda_2^{n-1} \mathbb{I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{I} & \lambda_n \mathbb{I} & \dots & \lambda_n^{n-1} \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

Como  $\nu_i^t \neq 0^t$  si y sólo si  $w_i^* B \neq 0^t$ , toda columna de  $Q$  puede ser expresada como una combinación lineal de solamente aquellos  $e_i$  sobre los cuales el espacio columna de  $B$  tiene una proyección no nula. De aquí,  $x \in \text{span-col}[Q]$  implica que  $x$  yace en el espacio generado por aquellos  $e_i$  para los cuales  $w_i^* B \neq 0^t$ .

Paso 3. Resta mostrar que el número de  $\nu_i^t$ 's no nulos precisamente es igual a  $p$ , la dimensión de  $\text{span-col}[Q]$  en cual caso  $\text{span-col}[Q]$  es igual al espacio generado por los vectores propios para los cuales  $\nu_i^t \neq 0^t$ . Esto sigue directamente de la ecuación precedente: desde que  $[e_1, \dots, e_n]$  es no singular, y desde que la matriz de



Vandermonde

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \lambda_1 \mathbb{I} & \dots & \lambda_1^{n-1} \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \lambda_2 \mathbb{I} & \dots & \lambda_2^{n-1} \mathbb{I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{I} & \lambda_n \mathbb{I} & \dots & \lambda_n^{n-1} \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

es siempre no singular para distintos  $\lambda_i$ ,

$$\text{rango}[Q] = \text{rango} \begin{bmatrix} \nu_1^t & & & & \\ & \nu_2^t & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \nu_n^t \end{bmatrix}$$

el cual es igual a  $p$ . De aquí, hay solamente  $p$  vectores  $\nu_i^t$  determinados por  $w_i^* B = \nu_i^t$ , y una base del espacio columna de  $Q$  es el conjunto de vectores propios derechos asociados.  $\square$

Tomando en cuenta que  $\Phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} R_i$ , con  $R_i = e_i w_i^*$ , podemos decir que el modo  $(\lambda_i, e_i)$  es controlable si y sólo si  $w_i^* B \neq 0^t$  o lo que es lo mismo, si y sólo si  $e_i w_i^* B = R_i B \neq 0$ .

Los siguientes puntos resumen la discusión de modos dirigidos y controlabilidad:

1. Un modo dirigido  $\exp[\lambda_i t] e_i$  es controlable si y sólo si  $R_i B \neq [0]$ .
2. Un modo dirigido  $\exp[\lambda_i t] e_i$  es no controlable si y sólo si  $R_i B = [0]$ .
3.  $R_i B = [0]$  si y sólo si  $w_i^* B = 0^t$ , y  $R_i B \neq [0]$  si y sólo si  $w_i^* B \neq 0^t$ .

**Ejemplo 4.3.** Sea

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

Entonces los valores propios de la matriz  $A$  son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ , y  $\lambda_3 = -3$ .

Ahora obsérvese que la matriz de vectores propios derechos es

$$T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y que

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ w_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

También, es directo descomponer la matriz de transición de estado en una suma de modos matriciales dirigidos:

$$\Phi(t) = \exp[At] = e^{\lambda_1 t} R_1 + e^{\lambda_2 t} R_2 + e^{\lambda_3 t} R_3$$

donde

$$\begin{aligned}
 R_1 &= [e_1 \quad -e_1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 R_2 &= [0 \quad e_2 \quad -e_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y} \\
 R_3 &= [-e_3 \quad e_3 \quad e_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ahora consideremos los productos matriciales  $R_i B$ :

$$R_1 B = e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_2 B = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, R_3 B = e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que  $e_2$  no tiene proyección sobre el espacio columna de  $B$  y de aquí, porque  $Q$ , desde que  $R_2 B = 0$ . Nuestra conclusión es que todos los estados que son múltiplos escalares de  $e_2$  o que tienen componentes en la dirección de  $e_2$  son *no controlables*, mientras que todos los estados que son combinaciones lineales de  $e_1$  y  $e_3$  son controlables, desde que ellos están en el espacio columna de  $Q$ .

Esta misma conclusión puede ser esbozada desde otra línea de razonamiento. Considérese el rango de la integral

$$\int_0^{t_1} \exp[A(t_1 - \tau)] B u(\tau) d\tau$$

para entradas  $u(t)$  arbitrarias. Para cada  $t_1$ , esta integral produce un vector fijo. El rango de la integral es el conjunto de todos los posibles vectores que resultan de una entrada admisible.

Basados en los productos matriciales  $R_i B$  y la matriz de transición de estado en modos dirigidos, la integral toma la forma

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_1} \exp[A(t_1 - \tau)] B u(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^{t_1} \left( \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i(t_1 - \tau)} R_i \right) B u(\tau) d\tau \\
 &= \sum_{i=1}^3 \int_0^{t_1} e^{\lambda_i(t_1 - \tau)} R_i B u(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^{t_1} e^{\lambda_1(t_1 - \tau)} e_1 u(\tau) d\tau + \int_0^{t_1} e^{\lambda_2(t_1 - \tau)} 0 u(\tau) d\tau + \int_0^{t_1} e^{\lambda_3(t_1 - \tau)} e_3 u(\tau) d\tau \\
 &= \xi_1(t_1, u(\cdot)) e_1 + \xi_2(t_1, u(\cdot)) e_3
 \end{aligned}$$

donde los escalares (posiblemente complejos)  $\xi_i(\cdot, \cdot)$  son dados por

$$\xi_i(t_1, u(\cdot)) = \int_0^{t_1} \exp[\lambda_i(t_1 - \tau)] u(\tau) d\tau$$

Por lo tanto, el rango de la integral es simplemente  $\text{span}\{e_1, e_3\}$ .

Como una ilustración final, nótese que  $\text{span-col}[Q]$  es igual a  $\text{span-col}\{e_1, e_3\}$ , desde que

$$Q = [B|AB|A^2B] = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 11 \\ 2 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

la cual tiene claramente rango 2 desde que las segunda y tercera filas son idénticas.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1 + e_3$$

y

■

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = -e_1 - 3e_3$$

De este modo, cada columna de  $Q$  puede ser expresada como una combinación lineal de  $e_1$  y  $e_3$ . La prueba de lo recíproco es fácil y no se muestra aquí.  $\triangleleft$

## 4.6. Controlabilidad de Sistemas en Tiempo Discreto

*Considérese la dinámica de estado en tiempo discreto*

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$$

donde  $A$  es  $n \times n$  y  $B$  es  $n \times m$ . Entonces la siguiente definición aplica.

**Definición 4.3.** Un estado  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  es controlable, o más comunmente, alcanzable, si y sólo si existe un índice finito  $N$  y una sucesión de entrada  $\{u[0], u[1], \dots, u[N-1]\}$  tal que si  $x[0] = 0$ , entonces  $x[N] = \hat{x}$ .

*Esta definición invierte la definición de controlabilidad en tiempo continuo, donde se necesita encontrar una entrada que conduzca  $\hat{x}$  a 0. Esto es contrario a la literatura donde la controlabilidad en tiempo discreto significa la capacidad para conducir  $\hat{x}$  a 0 y la alcanzabilidad se define como en la Definición 4.3. La justificación para la Definición 4.3 es que ella nos proporciona las equivalencias y caracterizaciones intuitivas y físicamente esperadas similares a las halladas en el caso en tiempo continuo. El siguiente ejemplo muestra una justificación más consistente para la Definición 4.3.*

Entonces, usando la Definición 4.3, un estado controlable es “alcanzable” desde 0. Por otra parte, 0 es alcanzable desde muchos estados no controlables en un finito número de pasos. Por ejemplo, el sistema en tiempo discreto

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

puede enviar cualquier vector de la forma  $x[0] = [0 \ 0 \ \alpha]^t$  a 0 en un paso estableciendo  $u[0] = 0$ . Esto es así por que el espacio nulo de  $A$  es generado por vectores de la forma  $[0 \ 0 \ \alpha]$ . Aquí, sin embargo, la matriz de controlabilidad

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene rango 1, de modo que los únicos estados alcanzables desde 0 son vectores de la forma  $[0 \ \alpha \ 0]^t$ . Nótese que si  $x[k] = 0$ , entonces  $x[k+1] = [0 \ \alpha \ 0]^t$  es alcanzable en exactamente un paso estableciendo  $u[k] = \alpha$ .

De este ejemplo sencillo surge una pregunta: ¿qué estados son alcanzables desde 0 en exactamente un paso? Como  $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$ , si  $x[k] = 0$ , entonces solamente aquellos estados contenidos en la imagen de  $B$  son alcanzables en un paso. Qué acerca de dos pasos? Nuevamente, si  $x[k] = 0$ , entonces  $x[k+2] = ABu[k] + Bu[k+1]$ . De este modo,  $x[k+2]$  es una combinación lineal de las columnas de  $AB$  y  $B$ , de modo que aquellos estados alcanzables en exactamente dos pasos son aquellos contenidos en la imagen de  $[B \ AB]$ . Esto, por supuesto puede ser extrapolado a  $k$  pasos con la caracterización obvia.

Nótese de estas observaciones que una sucesión de entrada  $\{u[0], \dots, u[n-1]\}$  que conduce  $x[0]$  a  $x[n]$  debe satisfacer

$$[x[n] - A^n x[0]] = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[0] \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Del desarrollo en tiempo continuo (Lemas 4.1 y 4.2), se observa que  $Q = [ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ]$  tiene rango maximal, y de este modo, el índice  $N \leq n$  en la Ecuación (4.3). La Ecuación (4.16), sin embargo, describe completamente los aspectos de controlabilidad del par  $(A, B)$ . Ahora, si  $x[0]$  se toma como 0, entonces  $x[n]$  puede ser alcanzado desde 0 solamente cuando  $x[n] \in \text{span-col}[Q]$ , esto es, solamente cuando las ecuaciones son consistentes. Como con el caso en tiempo continuo, el subespacio controlable se define como  $\text{span-col}[Q]$ . Es directo mostrar que  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  es controlable si y sólo si  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ .

Las ideas involucradas aquí sugieren el siguiente teorema.

**Teorema 4.5.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) Existe un índice finito  $N \leq n$  tal que 0 puede ser conducido a  $\hat{x} = x[N]$  por alguna sucesión de entrada  $\{u[k], u[k+1], \dots, u[k+N-1]\}$ .
- ii)  $\hat{x} \in \text{span-col}[Q]$ , donde  $Q = [ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ]$ .
- iii) Si  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \text{span-col}[Q]$ , entonces existe un índice finito  $N$  tal que  $\hat{x}_1[k]$  puede ser conducido a  $\hat{x}_2[k+N]$  por alguna sucesión de entrada  $\{u[k], u[k+1], \dots, u[k+N-1]\}$ .

Finalmente, notamos que la controlabilidad y los modos dirigidos para sistemas en tiempo continuo tienen un análogo directo en sistemas en tiempo

discreto. En particular,

$$\Phi[k] = A^k = R_1 \lambda_1^k + \dots + R_n \lambda_n^k$$

siempre que  $A$  tenga valores propios diferentes. Un modo dirigido  $R_i \lambda_i^k$  es controlable si y sólo si  $R_i B \neq 0$ . También, un modo dirigido es no controlable si y sólo si  $R_i B = [0]$ .

## 4.7. Reubicación de Polos por Realimentación de Estado

### 4.7.1. Fundamentación

Frecuentemente los sistemas  $\dot{x} = Ax + Bu$  tienen polos en el semiplano complejo izquierdo, cercanos al eje imaginario. En consecuencia, las respuestas tienen un comportamiento oscilatorio de características indeseables, requiriéndose de una adecuada amortiguación que se logra trasladando los polos de modo que tengan partes reales negativas de magnitudes suficientes. Típicamente esto se realiza con la realimentación de estado:

$$u = u_c + u_e,$$

donde  $u_c$  denota una entrada de control de realimentación de estado y  $u_e$  designa la entrada externa usual del sistema. También,  $u_c = Fx$ , donde  $F$  es una matriz de orden  $m \times n$  de realimentación de estado diseñada para que se alcancen las ubicaciones deseadas de los valores propios del sistema controlado. De este modo, el sistema controlado adopta la nueva ecuación de estado

$$\dot{x} = (A + BF)x + Bu_e$$



Sobreentendiéndose que  $u$  es la entrada externa del sistema, la ecuación anterior queda (ver el correspondiente diagrama de bloques en la Figura 4.1):

$$\dot{x} = (A + BF)x + Bu$$

$$y = (C + DF)x + Du$$

Nuestra meta es construir  $F$  de modo que los valores propios de  $A + BF$  coincidan

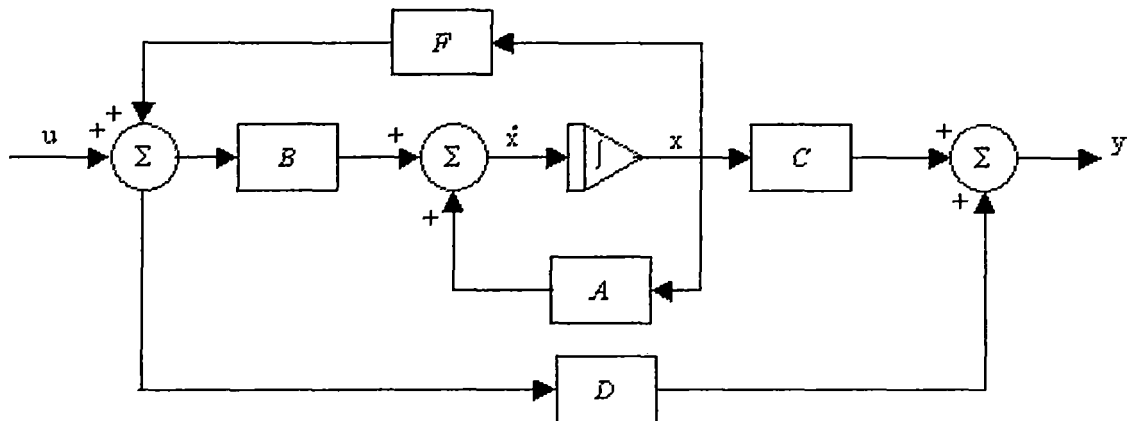


Figura 4.1: Sistema realimentado

con los elementos de un conjunto simétrico pre-especificado de números complejos  $\sigma(A)$ . (En un conjunto simétrico de números complejos, éstos aparecen en pares conjugados.)

Antes de resolver este problema, que denominaremos problema de asignación espectral, resolveremos un caso especial: un problema de entrada simple en el cual  $A$  y  $B$  tienen una forma especial llamada forma canónica controlable.

Resuelto el problema mencionado, desarrollamos una secuencia de transformaciones con las que convertimos un modelo de múltiples entradas en un modelo canónico controlable de entrada simple. Usando la técnica de asignación mencionada para el caso especial, construimos una matriz de realimentación que asignará el espectro apropiado al modelo canónico de entrada simple. La matriz

realimentación para el problema de múltiple entrada se obtiene tomando la transformación inversa.

#### 4.7.2. El Caso de Entrada Simple

Para empezar, resulta útil observar lo siguiente:

1. Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\pi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = a_n + a_{n-1}\lambda + \dots + a_1\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

(expáñdase  $|\lambda I - A|$  a lo largo de la última fila).

2. Si  $\dot{x} = Ax + Bu$  es un sistema de entrada simple, el problema de realimentación o de asignabilidad espectral consiste en encontrar la matriz de realimentación de estado  $F = [f_n \ f_{n-1} \ \dots \ f_1]$  de modo que  $u_{\text{nueva}} = u + Fx$ , con lo que la ecuación del sistema quede como  $\dot{x} = (A+BF)x + Bu$ ,  $y = (C+DF)x + Du$  y  $\sigma(A+BF) = \Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , donde  $\Lambda$  es el espectro deseado para  $A + BF$ .

En este caso, sea

$$\begin{aligned} \pi_{A+BF}(\lambda) &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) \\ &= \hat{a}_n + \hat{a}_{n-1}\lambda + \hat{a}_{n-2}\lambda^2 + \dots + \hat{a}_2\lambda^{n-2} + \hat{a}_1\lambda^{n-1} + \lambda^n \end{aligned} \quad (4.17)$$

el polinomio característico deseado de  $A + BF$ .

#### 4.7.2.1. Sistema en la Forma Canónica Controlable con entrada Simple

Sea el sistema de ecuación dinámica en la forma canónica controlable

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(nótese que este sistema es controlable).

En este caso, con

$$F = [f_n \ f_{n-1} \ \dots \ f_1],$$

$(A + BF)$  tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ (-a_n + f_n) & (-a_{n-1} + f_{n-1}) & (-a_{n-2} + f_{n-1}) & \dots & \dots & (-a_1 + f_1) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

por lo que (véase la nota 1 de la página 123 )

$$\pi_{A+BF}(\lambda) = (a_n - f_n) + (a_{n-1} - f_{n-1})\lambda + \dots + (a_1 - f_1)\lambda^{n-1} + \lambda^n \quad (4.19)$$

Entonces, de (4.17) y (4.19),

$$f_i = a_i - \hat{a}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.20)$$

**Ejemplo 4.4.** Supóngase que las matrices  $A$  y  $B$  de un modelo de estado son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Los valores propios de  $A$  son  $0, 1$ , y  $-1$  ( $0$  y  $1$  son valores indeseables porque se encuentran en semiplano complejo derecho).

- Se observa que  $Q = [ B \quad AB \quad A^2B ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Evidentemente  $\text{rango}[Q] = 3 \dots$  el modelo  $\dot{x} = Ax + Bu$  es controlable.

- Determinemos ahora una matriz de realimentación  $F$  tal que el espectro de  $A + BF$  es dada por  $\Lambda = \{-1, -2 \pm i\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ .

Como se ve, el modelo  $\dot{x} = Ax + Bu$  está en la forma controlable y, tomando en cuenta los comentarios anteriores, aquí,

$$a_3 = 0, \quad a_2 = -1, \quad a_1 = 0$$

También,  $F = [f_3 \ f_2 \ f_1]$  debe ser tal que

$$\begin{aligned}
 \pi_{A+BF}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\
 &= (\lambda + 1)[\lambda - (-2 + i)][\lambda - (-2 - i)] \\
 &= 5 + 9\lambda + 5\lambda^2 + \lambda^3 \\
 &= \hat{a}_3 + \hat{a}_2\lambda + \hat{a}_1\lambda^2 + \lambda^3
 \end{aligned}$$

de modo que  $\hat{a}_3 = 5$ ,  $\hat{a}_2 = 9$ , y  $\hat{a}_1 = 5$ .

De la discusión anterior (Ec. 4.20), se tiene:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= a_3 - \hat{a}_3 = (0) - (5) = -5 \\
 f_2 &= a_2 - \hat{a}_2 = (-1) - (9) = -10 \\
 f_1 &= a_1 - \hat{a}_1 = (0) - (5) = -5
 \end{aligned}$$

$$\therefore F = [ f_3 \ f_2 \ f_1 ] = [ -5 \ -10 \ -5 ]$$

◁

#### 4.7.2.2. El Caso General de Entrada Simple

*Sea aquí el caso del modelo  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $u$  simple, un modelo controlable, esto es,  $\text{rango}[Q] = n$ , donde  $Q = [ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ]$  es la matriz de controlabilidad.*

*La asignación espectral se realiza como sigue:*

Denotando por  $\nu$  la última fila de  $Q^{-1}$ , construimos la transformación de estado  $V$  en  $z = Vx$  como

$$V = \begin{bmatrix} \nu \\ \nu A \\ \nu A^2 \\ \vdots \\ \nu A^{n-1} \end{bmatrix},$$

Es claro que  $V$  es invertible porque  $\nu, \nu A, \dots, \nu A^{n-1}$  son linealmente independientes: si  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \nu A^i = 0$ , entonces, tomando en cuenta que  $\nu A^j B = 0$  para  $j = 0, 1, \dots, n-2$ , y  $\nu A^{n-1} B = 1$ , la multiplicación de ambos lados de la ecuación por  $B$  implica  $\alpha_{n-1} = 0$ , la multiplicación por la derecha de ambos lados de la ecuación por  $AB$  implica  $\alpha_{n-2} = 0$ , la multiplicación por la derecha de ambos lados de la ecuación por  $A^2 B$  implica  $\alpha_{n-3} = 0$ , etc.

Tomando en cuenta además que  $\nu A^i B = 0$ , para  $i = 0, 1, \dots, n-2$  y  $\nu A^{n-1} B = 1$ , la transformación resulta en la ecuación de estado  $\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u$ , donde

$$\hat{A} = VAV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = VB = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\pi_{\hat{A}}(\lambda) = \pi_A(\lambda) = a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^{n-2} + a_1\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

A continuación calculamos  $\hat{F} = [\hat{f}_n, \hat{f}_{n-1}, \dots, \hat{f}_1]$  tal que  $\sigma(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}) = \Lambda$ , esto es, asignamos el conjunto de valores propios deseado  $\Lambda$  al sistema en la forma canónica controlable.

Del caso anterior (sistema en la forma canónica controlable) sigue que  $\hat{f}_i = a_i - \hat{a}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entonces

$$\hat{F} = [a_n - \hat{a}_n, a_{n-1} - \hat{a}_{n-1}, \dots, a_1 - \hat{a}_1]$$

Como  $\sigma(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}) = \sigma(VAV^{-1} + VB\hat{F}V^{-1}) = \sigma(A + B\hat{F}V)$ , se tiene  $F = \hat{F}V$ . Obsérvese, además, que

$$\begin{aligned} F &= [a_n - \hat{a}_n, a_{n-1} - \hat{a}_{n-1}, \dots, a_1 - \hat{a}_1] \begin{bmatrix} \nu \\ \nu A \\ \vdots \\ \nu A^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \nu(a_n \mathbb{I} + a_{n-1}A + a_{n-2}A^2 + \dots + a_1A^{n-1}) \\ &\quad - \nu(\hat{a}_n \mathbb{I} + \hat{a}_{n-1}A + \hat{a}_{n-2}A^2 + \dots + \hat{a}_1A^{n-1}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Tomando en cuenta que, por el Teorema de Cayley-Hamilton, se cumple

$$-A^n = a_n \mathbb{I} + a_{n-1}A + a_{n-2}A^2 + \dots + a_1A^{n-1},$$

la Ecuación (4.21) se puede reescribir como

$$F = -\nu(\hat{a}_n \mathbb{I} + \hat{a}_{n-1}A + \hat{a}_{n-2}A^2 + \dots + \hat{a}_1A^{n-1} + A^n)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\mathbf{F} = -\nu \pi_{\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}}(\mathbf{A}),$$

que es la llamada fórmula de Ackerman.

Podemos decir, entonces, que la matriz  $F$  de realimentación de estado del modelo de estado controlable de entrada simple  $\dot{x} = Ax + Bu$  tal que

$\sigma(A+BF) = \Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  se encuentra multiplicando el negativo,  $-\nu$ , de la última fila de la inversa de  $Q$  por el resultado de la evaluación en  $A$  del polinomio característico deseado  $\pi_{A+BF} = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$ .

**Ejemplo 4.5.** Sea el modelo  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$  (no está en la forma canónica controlable!).

- $\pi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ ,  $\sigma(A) = \{\pm 1\}$  (1 es indeseable!)
- La matriz de controlabilidad es

$$Q = [ B \quad AB ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\text{rango}[Q] = 2 \Rightarrow$  el modelo  $\dot{x} = Ax + Bu$  es controlable.

Luego, se puede asignar un espectro cualquiera al modelo  $\dot{x} = Ax + Bu$  a través de una apropiada matriz  $F$  de realimentación de estado.

- Supóngase que se desea hallar la matriz  $F$  de realimentación de estado tal que  $\sigma(A+BF) = \{0, -2\}$ .

Tomando en cuenta los comentarios anteriores, realizamos los siguientes cálculos:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \nu = ( 1 \quad 0 ) \text{ (la última fila de } Q^{-1} \text{)}$$

$$\rightarrow \text{la matriz de transformación } V \text{ es } V = \begin{bmatrix} \nu \\ \nu A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



La forma canónica de  $A$  es  $\hat{A} = VAV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

La forma canónica de  $B$  es

$$\hat{B} = VB = B$$

El polinomio característico del sistema deseado es

$$\pi_{A+BF}(\lambda) = \lambda(\lambda + 2) = \lambda^2 + 2\lambda = \pi_{\hat{A}+\hat{B}\hat{F}}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \hat{F} = \begin{bmatrix} -1 & -0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } F = \hat{F}V = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Puede verificarse también que  $F = -\nu\pi_{A+BF}(A) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}$

y que  $\sigma(A + BF) = \{0, -2\}$

◁

### 4.7.3. El Caso Multientrada

#### 4.7.3.1. Algoritmo de Asignación Espectral-Caso Multientrada

1. Verificar la controlabilidad del par  $(A, B)$ . Si no es controlable, parar.
2. Escoger aleatoriamente una matriz apropiadamente dimensionada  $F_0$  y defínase  $A_0 = A + BF_0$ . Con probabilidad 1,  $A_0$  tendrá valores propios diferentes. Verificarlo. Si no es así, repetir el paso 2.
3. Tómese una combinación lineal aleatoria de las columnas de  $B$  (como se discutió ya) para generar  $B_0 = B\mu$ . Con probabilidad 1, el par  $(A_0, B_0)$

es controlable. Verificarlo. Si no es así, escoger otro  $B_o$ . (Nota: El par  $(A_o, B_o)$  representa un sistema "equivalente" de entrada simple).

4. Asignar el espectro deseado  $\Lambda$  vía los métodos ya discutidos construyendo una matriz de realimentación  $F'$  tal que  $\sigma(A_o + B_o F') = \Lambda$ .
5. La matriz deseada de realimentación de estado para el sistema es  $F = F_o + \mu F'$ . Verifíquese finalmente que  $A + BF$  tiene el espectro requerido.

**Teorema 4.6.** El par  $(A, B)$  es controlable  $\Leftrightarrow \forall$  conjunto simétrico  $\Lambda$  de  $n$  números complejos, existe una aplicación de realimentación de estado  $F$  tal que  $\sigma(A + BF) = \Lambda$ .

*Demostración.* Para probar condición de necesidad de este teorema asumamos que para cualquier conjunto simétrico  $\Lambda$  de  $n$  números complejos, existe una matriz de realimentación de estado  $F$  tal que  $\sigma(A + BF) = \Lambda$ . Mostraremos que esto implica que el par  $(A, B)$  es controlable. Recuérdense que  $(A, B)$  es controlable si y sólo si  $\text{rango}(Q) = n$  y que un vector  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  es controlable si y sólo si  $x$  está en la imagen o rango de  $Q$ , denotada  $\text{Im}(Q)$ , donde  $\text{Im}(Q)$  es simplemente el espacio generado por las columnas de  $Q$ . Pero lo último es cierto si y sólo si el subespacio controlable del espacio de estado es el espacio  $\mathbb{R}^n$  completo.

Ahora, sean  $\lambda_i \notin \sigma(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  reales y distintos. Por hipótesis, existe una  $F$  tal que  $\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Sean los vectores de  $\{e_1, \dots, e_n\}$  los vectores propios asociados. Entonces

$$(A + BF)e_i = \lambda_i e_i$$

Luego de una manipulación algebraica, se tiene

$$e_i = (\lambda_i \mathbb{I} - A)^{-1} B F e_i \quad (4.22)$$

Como se asumió que  $\lambda_i \notin \sigma(A)$ , existe la inversa  $(\lambda_i \mathbb{I} - A)^{-1}$ .

Ahora es posible mostrar que

$$(\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} = \sum_{j=1}^n \rho_j(\lambda) A^{j-1} \quad (4.23)$$

para una elección apropiada de funciones racionales  $\rho_j(\lambda)$  que son analíticas en  $\mathbb{C}$  excepto en puntos en  $\sigma(A)$ . Un análisis directo del algoritmo de Leverrier (Teorema A-3.5 del apéndice) indica cómo construir los  $\rho_j(\lambda)$ 's. Sustituyendo la Ecuación (4.23) en la Ecuación (4.22) se obtiene

$$e_i = \sum_{j=1}^n \rho_j(\lambda_i) A^{j-1} B F e_i$$

de modo que  $e_i \in \text{Im}(Q)$ . Esto es así porque

$$\rho_j(\lambda_i) A^{j-1} B F e_i = A^{j-1} B [\rho_j(\lambda_i) F e_i] \in \text{Im}(A^{j-1} B) \subset (Q)$$

Como el conjunto de vectores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  genera a  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{Im}(Q) = \mathbb{R}^n$ , significando que el subespacio controlable del par  $(A, B)$  es el espacio completo. De aquí, el par  $(A, B)$  es controlable.  $\square$

#### 4.7.4. *Asignabilidad Espectral y Controlabilidad Incompleta*

*Veamos que a la parte controlable de un par  $(A, B)$  que no es completamente controlable, puede serle asignado un espectro arbitrario mediante una realimentación de estado apropiada. La clave para la solución de este problema es una transformación no singular la cual convierte la descripción de estado dada en la forma controlable de Kalman la cual específicamente identifica y extrae los modos completamente controlables del sistema.*

Resulta útil recordar aquí que, de acuerdo a las Proposiciones 4.2 a 4.8, existe una transformación de estado  $[ U_1 \ U_2 ]z = x$  tal que

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

tiene la forma canónica de Kalman equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.24)$$

donde (i)  $\text{rango}[Q] = \text{rango}[ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ] = p$ , (ii)  $U_1 \in \mathcal{M}(n, p)$  y tiene columnas las cuales generan a  $\text{span-col}[Q]$ , (iii)  $U_2 \in \mathcal{M}(n, n-p)$  y tiene columnas las cuales junto a las de  $U_1$  forman una base de  $\mathbb{R}^n$ , (iv)  $\bar{A}_{11} \in \mathcal{M}(p, p)$ , (v)  $\tilde{Q} = [ B_1 \ \tilde{A}_{11}B_1 \ \dots \ \tilde{A}_{11}^{p-1}B_1 ]$  tiene rango  $p$ , y (vi) la parte  $z_1$  de  $z = \text{col}[z_1, z_2]$  incluye la parte controlable del espacio de estado.

A fin de asignar los polos a la parte controlable del sistema incompletamente controlable, postulamos una ley de control  $\tilde{F} = [ \tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 ]$  por la cual

$$u = [ \tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 ] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + u_e$$

Entonces la Ecuación (4.24) se vuelve

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1\tilde{F}_1 & \bar{A}_{12} + B_1\tilde{F}_2 \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Claramente, los valores propios del sistema son dados por los valores propios de  $\bar{A}_{11} + B_1\tilde{F}_1$  y los valores propios de  $\bar{A}_{22}$ . Para asignar arbitrariamente el espectro de la parte controlable del sistema original, usamos los métodos desarrollados antes. La matriz de realimentación  $\tilde{F}_2$  puede ser escogida de modo que minimice el acoplamiento desde la parte incontrolable a los modos controlables si se desea. Es-

pecíficamente, podemos usar las técnicas de descomposición de valor singular para hallar una solución en mínimos cuadrados de la ecuación  $B_1 \tilde{F}_2 = -\bar{A}_{12}$ .

Una vez que  $\tilde{F} = [ \tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 ]$  ha sido escogida, la matriz de realimentación  $F$  en las coordenadas  $x$  es dada por  $F = [ \tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 ] [ U_1 \quad U_2 ]^{-1}$ . Si  $[ U_1 \quad U_2 ]$  es calculada usando la descomposición de valor singular de  $Q$ , entonces  $F = [ \tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 ] [ U_1 \quad U_2 ]^t$

Nótese que esta clase de asignabilidad espectral es extremadamente importante, especialmente en el contexto de estabilización de sistemas. En particular, si los modos inestables de un sistema son controlables, entonces el sistema puede ser internamente estabilizado por realimentación de estados. Tales sistemas son llamados estabilizables.

El siguiente teorema nos permite afirmar que la realimentación de estado no altera la controlabilidad de un sistema.

**Teorema 4.7.** *Supóngase que  $Q_A$  es la matriz de controlabilidad del par  $(A, B)$  y que  $Q_{A+BF}$  es la matriz de controlabilidad del par  $(A + BF, B)$ , donde  $F$  es una matriz arbitraria de realimentación. Entonces  $\text{Im } Q_A = \text{Im } (Q_{A+BF})$ .*

*Demostración.*

Parte 1. Prueba de que  $\text{Im } (Q_{A+BF}) \subset \text{Im } Q_A$ . Primero, obsérvese que  $(A + BF)B = AB + BFB$ ; de aquí,  $\text{Im}[(A + BF)B] \subset \text{Im}[ B \quad AB ]$ . Similarmente,  $(A+BF)^2 B = A^2 B + AB(FB) + B(FAB) + B(FBFB)$ ; de aquí,  $\text{Im}[(A+BF)^2 B] \subset \text{Im}[ B \quad AB \quad A^2 B ]$ . Entonces, por inducción, sigue que  $\text{Im}[(A + BF)^k B] \subset \text{Im}[ B \quad AB \quad \dots \quad A^k B ]$ , para toda  $k$ . Consecuentemente,  $\text{Im}(Q_{A+BF}) \subset \text{Im}(Q_A)$ .

Parte 2. Prueba de que  $\text{Im}(Q_A) \subset \text{Im}(Q_{A+BF})$ . Sea  $A_o = A + BF$ . De la Parte 1,  $\text{Im}(Q_{A_o - BF}) \subset \text{Im}(Q_{A_o})$ . Como  $A_o - BF = A$ , podemos escribir  $\text{Im}(Q_A) \subset \text{Im}(Q_{A+BF})$ .  $\square$

**Teorema 4.8.** *Sea el par  $(A, B)$  controlable, y sea  $b_o$  un vector arbitrario en el espacio columna de  $B$ . Entonces existe una realimentación de estado  $F_o$  tal que el par  $(A + BF_o, b_o)$  es controlable.*

*Demostración.* Para probar el teorema, definimos una sucesión de vectores  $\nu^i$  que generam a  $\mathbb{R}^n$ , el espacio controlable, en tal forma que la elección de  $F_o$  es obvia. La sucesión empieza haciendo  $\nu^1 = b_o = Bu_o$  para un vector apropiado  $u_o \in \mathcal{M}(m, 1)$ . Definase

$$\nu^{i+1} = A\nu^i + b_o$$

Sea  $p_o$  el entero más grande para el cual el conjunto  $\{\nu^i\}$  es linealmente independien-  
te. Si  $p_o = n$ , detenerse; de otro modo escójase un vector  $b_1$  en el espacio columna de  $B$  independent de  $\{\nu^i\}$ . Tal vector debe existir porque el par  $(A, B)$  se asumió controlable; esto es, si tal  $b_1$  no existiera, entonces el par  $(A, B)$  no sería controlable. En cualquier caso,  $b_1 = Bu_1$  para un apropiado vector  $u_1 \in \mathcal{M}(m, 1)$ . Sea  $\nu^{p_o+1} = b_1$ , y para  $i \geq p_o$ , defínase

$$\nu^{i+1} = A\nu^i + b_1$$

Sea  $p_1$  el entero más grande para el cual el nuevo conjunto  $\{\nu^i\}$  es linealmente independiente. Si  $p_1 = n$ , detenerse; de otro modo continuar este proceso hasta que el conjunto genere  $\mathbb{R}^n$ . De este modo, hay  $n$  vectores que satisfacen

$$\nu^{i+1} = A\nu^i + b^i$$

donde  $b^i$  es igual al apropiado vector  $b_o = Bu_o, b_1 = Bu_1, \dots$ , dependiendo de la naturaleza exacta de la construcción precedente.

La idea ahora es escoger  $F_o$  de modo que  $(A + BF_o)\nu^i = \nu^{i+1}$ , en cuyo caso la matriz de controlabilidad del par  $(A + BF_o, b_o)$  tiene columnas iguales a los  $\nu^i$  que generam a  $\mathbb{R}^n$ , haciendo controlable al par. Para ese fin, escójase  $F_o$  de modo que

$$F_o \begin{bmatrix} \nu^1 & \nu^2 & \dots & \nu^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_o & u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

Como el conjunto  $\{\nu^i\}$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F_o = [ u_o \quad u_1 \quad \dots \quad u_n ] [ \nu^1 \quad \nu^2 \quad \dots \quad \nu^n ]^{-1}$$

□

**Ejemplo 4.6.** Sea el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{4.25}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad de este sistema es

$$\begin{aligned} Q &= [ B \quad AB \quad A^2B ] \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

la cual tiene rango 2.

Obsérvese que una base del espacio columna de  $Q$  es  $\{[1 \ 0 \ 2]^t, [1 \ 1 \ 0]^t\}$  y que ampliando este conjunto con el vector  $[2 \ -2 \ -1]^t$  se obtiene una base de  $\mathbb{R}^n$ .

Definimos entonces  $U = [U_1 \ U_2]$ , con

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Empleando la transformación  $x = Uz$  obtenemos el modelo dinámico en la forma de Kalman

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4.26)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -14 \\ 0 & -1 & 2 \\ \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y el subsistema controlable  $(\bar{A}_{11}, B_1)$  es

$$\dot{z}_1 = \bar{A}_{11}z_1 + B_1u \quad (4.27)$$

Obviamente, la matriz reducida de controlabilidad

$$\tilde{Q} = [ B_1 \mid \bar{A}_{11}B_1 ] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

tiene rango 2 (el modelo de estado reducido componente  $(\bar{A}_{11}, B_1)$  es completamente controlable).

Nótese que de los valores propios, 1, -1, y 0 de  $A$ , el valor propio 0 (único valor propio de  $A_{22}$ ) no puede modificarse por realimentación de estado.

Nos proponemos ahora asignar el espectro  $\Lambda = \{-1 + i, -1 - i\}$  a la parte controlable del sistema (4.25) mediante una ley de realimentación  $u = Fx$  con  $F$  de la forma

$$F = [ \bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 ] [ U_1 \quad U_2 ]^{-1} \quad (4.28)$$



de modo que  $[\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2]$  sea la matriz de realimentación para el sistema (4.26), el cual, ya realimentado, adopte la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1\bar{F}_1 & \bar{A}_{12} + B_1\bar{F}_2 \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

con  $\bar{F}_2$  tal que

$$\bar{A}_{12} + B_1\bar{F}_2 = 0$$

a fin de minimizar el acoplamiento de la parte incontrolable sobre la parte controlable del sistema, y con  $\bar{F}_1$  que satisfaga  $\sigma(\bar{A}_{11} + B_1\bar{F}_1) = \{-1 + i, -1 - i\}$ .

A continuación realizamos en tres pasos los cálculos correspondientes de la matriz de realimentación buscada  $F$ .

### 1. Cálculo de $\bar{F}_2$

Resolvemos el problema

$$B_1\bar{F}_2 = -\bar{A}_{12} \quad (4.29)$$

encontrando una solución al problema

$$\min_{B_1\bar{F}_2 = -\bar{A}_{12}} \|\bar{F}_2\|_2$$

la cual sabemos es (véase la sección A-4.2.1)

$$\bar{F}_2 = B_1^{-R}(-\bar{A}_{12}), \quad (4.30)$$

con

$$B_1^{-R} = B_1^+ = B_1^t [B_1 B_1^t]^{-1} \quad (4.31)$$

Reemplazando valores en (4.30) y (4.31) obtenemos

$$\bar{F}_2 = [10 \quad -6 \quad 4]^t$$

(Se verifica inmediatamente que con este resultado se cumple (4.29))

## 2. Cálculo de $\bar{F}_1$

Puesto que el sistema (4.27) es multientrada, calculamos  $\bar{F}_1$  siguiendo el algoritmo de asignación multientrada.

Con la finalidad de no recargar la notación, escribimos el sistema (4.27) como

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.32)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(no confundir el sistema (4.32) con el sistema (4.25)).

Siguiendo el algoritmo, tenemos:

a) Verificamos que la matriz

$$Q = [ B \quad AB ] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

tiene rango 2, de modo que este subsistema es controlable.

b) Sea

$$F_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Como exige este paso, comprobamos que

$$A_o \triangleq A + BF_o = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

tiene valores propios diferentes (0 y 4)

$$\pi_{A_o}(\lambda) = |\lambda I - A_o| = \lambda(\lambda - 4)$$

- c) Proponemos usar el vector  $\mu = [1 \ 0 \ -1]^t$  escogido aleatoriamente y calculamos el vector  $B_o$ :

$$B_o = B\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Verificamos lo correcto de nuestra elección de  $\mu$  comprobando que el par  $(A_o, B_o)$  es un sistema controlable de entrada simple. Nos convencemos de lo último al observar que el rango de  $Q_o = [B_o \ A_o B_o]$  es 2 :

$$\text{rango}(Q_o) = \text{rango}([B_o \ A_o B_o]) = \text{rango}\left(\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

- d) Asignamos el espectro  $\Lambda = \{-1 + i, -1 - i\}$  al sistema  $(A_o, B_o)$  mediante la realimentación de estado  $u = F'x$  con  $F'$  calculada de la siguiente manera:

▪ De

$$Q_o^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ -1/6 & 0 \end{bmatrix},$$

definimos  $\nu = [ -1/6 \ 0 ]$  y

$$V = \begin{bmatrix} \nu \\ \nu A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = VA_0V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = VB_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Mediante la transformación  $z = Vx$  ( $z$  no es la misma de (4.26)!!), transformamos el sistema (4.29) a uno en la forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- Calculamos una matriz de realimentación de estado  $\hat{F} = [ \hat{f}_2 \ \hat{f}_1 ]$  de modo que  $\sigma(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}) = \Lambda$ :

Ya que

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-a_2 + \hat{f}_2) & (-a_1 + \hat{f}_1) \end{bmatrix}$$

observamos que se debiera cumplir

$$\begin{aligned} \pi_{\hat{A} + \hat{B}\hat{F}}(\lambda) &= [\lambda - (-1 + i)][\lambda - (-1 - i)] \\ &= -\hat{f}_2 + (-4 - \hat{f}_1)\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

De modo que identificando los coeficientes de  $\lambda$  y  $\lambda^2$  obtenemos  $\hat{f}_2 = -2$  y  $\hat{f}_1 = -6$ .

Entonces, una matriz de realimentación de estado  $\hat{F} = [ \hat{f}_2 \ \hat{f}_1 ]$  tal que  $\sigma(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}) = \Lambda$  es

$$\hat{F} = [ -2 \ -6 ]$$

- La matriz  $F'$  de la realimentación de estado  $u = F'x$  que asigna el espectro  $\Lambda = \{-1 + i, -1 - i\}$  al sistema  $(A_o, B_o)$  es

$$F' = \hat{F}V = [ 1/3 \ 6 ]$$

- e) La matriz de realimentación  $\bar{F}_1$  que mediante la realimentación  $u = \bar{F}_1x$  asigna el espectro  $\Lambda$  al sistema (4.32) es

$$\bar{F}_1 = F_o + \mu F' = \begin{bmatrix} 1/3 & 7 \\ 1 & 0 \\ -4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

3. De 1. y 2., tenemos que la matriz  $F$  que mediante realimentación de estado  $u = Fx$  asigna el espectro  $\lambda$  a la parte controlable del sistema (4.25) es (ver la Ecuación 4.28)

$$F = [ \bar{F}_1 \ \bar{F}_2 ] [ U_1 \ U_2 ]^{-1} = \begin{bmatrix} 5.3704 & 1.6296 & -2.5185 \\ -1.2222 & 1.2222 & 1.1111 \\ 0.2963 & -1.2963 & -0.8148 \end{bmatrix}$$

Verificamos fácilmente lo correcto de nuestros cálculos al comprobar que se cumple

$$\sigma(A + BF) = \Lambda \cup \{0\} = \{-1 + i, -1 - i, 0\}$$

como se deseaba. ◁

## 5 OBSERVABILIDAD DE SISTEMAS LIT Y DISEÑO DE OBSERVADORES

### 5.1. Introducción

*Aquí consideramos el problema de la determinación del vector de estado de un sistema a partir de mediciones de la entrada y la salida de él. El resolver este problema es de gran importancia porque muchas veces no se pueden medir todas las variables de estado y, como ya se estudió, su conocimiento es vital en la reubicación de polos por realimentación de estados.*

### 5.2. Definiciones Básicas y Equivalencias

**Definición 5.1.** *El estado  $x(t_0)$  en  $\mathbb{R}^n$  es observable si y sólo si existe  $t_1 > t_0$  tal que mediciones de  $y(t)$  y  $u(t)$  sobre  $[t_0, t_1]$  y el conocimiento de  $A, B, C, D$  son suficientes para determinar  $x(t_0)$ .*

**Definición 5.2.** *El par  $(A, C)$  que representa al sistema  $\{A, B, C, D\}$  es observable (frecuentemente llamado completamente observable) si y sólo si todo estado en  $\mathbb{R}^n$  es observable.*

*Estas definiciones nos conducen al planteamiento del siguiente problema:*

Dado el modelo de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

con  $A \in \mathcal{M}(n, n)$ ,  $B \in \mathcal{M}(n, m)$ ,  $C \in \mathcal{M}(r, n)$ , y  $D \in \mathcal{M}(r, m)$ , y dadas mediciones exactas de  $u(t)$  e  $y(t)$  sobre el intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$ , calcular el vector de estado  $x(t)$  para cualquier  $t \in [t_0, t_1]$ .

*Dado que los datos disponibles son  $y(t)$  y sus derivadas y  $u(t)$  y sus derivadas, el curso lógico de acción es secuencialmente derivar  $y(t) = Cx(t)$ :*

$$\begin{aligned}
 y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\
 \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t) \\
 \ddot{y}(t) &= CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t) \\
 &\vdots \\
 y^{(n-1)}(t) &= CA^{n-1}x(t) + CA^{n-2}Bu(t) + \dots + CBu^{(n-2)}(t) + Du^{(n-1)}(t)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

*El conjunto de ecuaciones termina en  $y^{(n-1)}(t)$  debido a que hay sólo  $n$  condiciones iniciales. Analíticamente esto sigue del Teorema de Cayley-Hamilton, el cual establece que  $\pi_A(A) = [0]$ ; en particular,  $\pi_A(A) = [0]$  implica que*

$$A^n = -a_n \mathbb{I} - a_{n-1}A - \dots - a_1 A^{n-1}$$

*En otras palabras, la  $n$ -ésima potencia de  $A$  es una combinación lineal de las potencias inferiores de  $A$ . De aquí, para cualquier  $p$ ,  $A^p$  puede ser expresada como una combinación lineal de las potencias 0-ésima a la  $(n-1)$ -ésima de  $A$ .*

En forma matricial, la Ecuación (5.1) se vuelve

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ CA^{n-2}B & \dots & \dots & \dots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Expresamos de modo compacto esta ecuación así:

$$Y(t) = Rx(t) + TU(t) \quad (5.3)$$

donde cada una de las variables  $Y(t)$ ,  $R$ ,  $x(t)$ ,  $T$ , y  $U(t)$  se identifica con sus obvias contrapartes en la Ecuación (5.2). Esta ecuación se puede reescribir como

$$[Y(t) - TU(t)] = Rx(t) \quad (5.4)$$

donde la matriz de observabilidad  $R$  tiene la forma

$$R = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Recuérdese asimismo de los Lemas 4.1 y 4.2 que la adición de más términos de la forma  $CA^k$ ,  $k \geq n$ , no incrementa el rango de  $R$ .



**Teorema 5.1.** *Si la Ecuación (5.4) es consistente, entonces existe una única solución  $x(t)$  si y sólo si  $\text{rango}[R] = n$ . Además, cuando existe, la solución única es dada por*

$$x(t) = R^{-L}[Y(t) - TU(t)] \quad (5.6)$$

donde  $R^{-L}$  es cualquier inversa izquierda de  $R$  (véase la Definición A-4.1).

**Corolario 5.1.** *El modelo de estado invariante en el tiempo  $\{A, B, C, D\}$  es observable si y sólo si  $\text{rango}[R] = n$ .*

*Demostración.* Dado que las mediciones necesarias en la Ecuación (5.4) surgen de la solución del modelo de estado lineal invariante en el tiempo, la Ecuación (5.4) debe ser consistente, asumiendo mediciones perfectas. El resultado sigue inmediatamente.  $\square$

**Observación 5.1.** *La solución de  $Rx(t_0) = [Y(t_0) - TU(t_0)]$  tiene la forma*

$$x(t_0) = x_0 + N(R)$$

donde  $N(R) = \text{Ker}(R)$  es el núcleo de  $R$  y  $x_0$  es una solución particular de la ecuación, que puede ser calculada de modo que tenga norma mínima empleando la pseudoinversa Moore-Penrose (véase la Definición A-4.3), de acuerdo a

$$x_0 = R^+[Y(t_0) - TU(t_0)]$$

Del desarrollo precedente, siempre que el núcleo de  $R$  sea no trivial, se caracterizará inciertamente la reconstrucción de  $x_0$  a partir de mediciones entrada-salida. Los elementos de  $N(R)$  tienen una interpretación física interesante: todo  $x_0$  en  $N(R)$  produce una respuesta de entrada cero idénticamente igual a cero. Para verificar esto, recuérdese el Teorema de Cayley-Hamilton: Sea  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una

matriz con polinomio característico  $\pi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ ; entonces

$$A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_n\mathbb{I} = [0]$$

Este teorema implica que  $A^n$  es una combinación lineal de las potencias inferiores de  $A$ , esto es,

$$A^n = -a_1A^{n-1} - \dots - a_n\mathbb{I}$$

Entonces

$$A^p = \beta_1A^{n-1} + \dots + \beta_n\mathbb{I}$$

para apropiados escalares  $\beta_i$  y toda  $p$ . Con estos hechos en mente, considérese la respuesta de estado de entrada cero cuando la condición inicial  $x_o$  está en  $N(R)$ .

Para  $t_o = 0$ , la respuesta de entrada cero está dada por

$$y(t) = C \exp[At]x_o$$

La expansión de  $\exp[At]$  en el lado derecho en serie de Taylor resulta en

$$\begin{aligned} y(t) &= C \exp[At]x_o = C[\mathbb{I} + At + A^2t^2/2! + \dots]x_o \\ &= Cx_o + (CAx_o)t + (CA^2x_o)t^2/2! + \dots \end{aligned}$$

Dado que  $x_o$  está en  $N(R)$ ,  $Rx_o = 0$ . De aquí, por el Teorema de Cayley-Hamilton o por los Lemas 4.1 y 4.2,  $CA^p x_o = 0, \forall p \geq n$ . Por lo tanto,

$$y(t) = C \exp[At]x_o = [0]$$

De aquí podemos concluir que si  $N(R) \neq \{0\}$  y  $x_o \in N(R)$ , no se puede reconstruir este estado a partir de mediciones entrada-salida porque hay una infinita cantidad de vectores en el espacio vectorial  $N(R)$  que, tomados como vectores de estado inicial, dan lugar a respuestas de entrada cero nulas.

*Esta interpretación sugiere la siguiente definición.*

**Definición 5.3.**  $N(R)$  es el subespacio inobservable del espacio de estado.

*De la discusión previa, también resulta la siguiente proposición.*

**Proposición 5.1.**  $\forall x_0 \in N(R), Ax_0 \in N(R)$ .

*Dicho de otra manera, esta proposición afirma que todo estado en  $N(R)$  no puede “escapar” de  $N(R)$  por alguna clase de acción del sistema (multiplicación por  $A$ ).*

**Observación 5.2.** *La Proposición 5.1 también se puede expresar a través de la afirmación de que  $N(R)$  es  $A$ -invariante, lo que se representa de modo compacto como  $AN(R) \subset N(R)$ .*

**Teorema 5.2.**  $N(R)$  es el mayor subespacio  $A$ -invariante contenido en  $\text{Ker}(C)$ .

*Demostración.*  $\forall x \in N(R), Cx = CAx = \dots = CA^{n-1}x = 0$ . Del teorema de Cayley-Hamilton sigue que también  $CA^n x = 0$ , y de aquí que  $Ax \in N(R)$ , lo cual implica que  $N(R)$  es  $A$ -invariante. Además,  $Rx = 0$  implica que  $Cx = 0$ , y de aquí  $N(R) \subset \text{Ker}(C)$ . Por lo tanto,  $N(R)$  es un subespacio  $A$ -invariante contenido en  $\text{Ker}(C)$ . Para mostrar que  $N(R)$  es el mayor de tales subespacios, asúmase que  $V$  es un subespacio  $A$ -invariante contenido en  $\text{Ker}(C)$ . Tomemos  $x \in V$ . Entonces, como  $V$  es  $A$ -invariante, también  $Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x \in V$ , y como  $V \subset \text{Ker}(C)$ , concluimos que  $Cx = Ax, CA^2x, \dots, CA^{n-1}x = 0$ . Esto implica que  $x \in N(R)$  y, de esto, que  $V \subset N(R)$ . □

*Una pregunta de interés a estas alturas es, Si los estados en el subespacio inobservable no se pueden reconstruir, ¿qué estados son reconstruibles? La respuesta es: Todo estado en  $\text{Im}(R^t)$ , se puede reconstruir. Esto puede ser probado empleando el concepto de dualidad que se expondrá más adelante en este capítulo.*

Por dualidad, un estado  $x$  es observable con respecto al par  $(A, C)$  si y sólo si es controlable con respecto al par  $(-A^t, C^t)$  o  $(A^t, C)$ . De aquí se puede ver a  $\text{Im}(R^t)$  como el subespacio observable del espacio de estado. Nótese que todo vector de  $\text{Im}(R^t)$  es ortogonal a todo vector de  $N(R)$ , esto es, que  $\text{Im}(R^t)$  es el complemento ortogonal de  $N(R)$ , o lo que es lo mismo, que  $N(R)^\perp = \text{Im}(R^t)$ .

**Proposición 5.2.** *El espacio de estado  $X = \mathbb{R}^n$  tiene la descomposición suma directa*

$$X = \text{Im}(R^t) \oplus N(R) = N(R)^\perp \oplus N(R)$$

la cual descompone el espacio de estado en sus partes observable e inobservable.

La prueba de la Proposición 5.2 es obvia a partir de la definición de complemento ortogonal.

De la teoría de complementos ortogonales siguen los siguientes dos corolarios a la Proposición 5.2.

**Corolario 5.2.**  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = x_{ob} + x_{inob}$ , donde  $x_{ob} \in \text{Im}(R^t)$  y  $x_{inob} \in N(R)$  son únicos.

**Corolario 5.3.**  $x \in \mathbb{R}^n$  es observable si y sólo si  $x_{inob} = 0$ .

Ahora planteamos una transformación de estado que pone en evidencia las partes observable y no observable de los estados. Este desarrollo es paralelo al que derivó en la forma canónica controlable de Kalman controlable del Capítulo 4 (Proposiciones 4.2 a 4.8).

El cambio de coordenadas que planteamos aquí es tal que en las nuevas coordenadas, por decir, las coordenadas  $z$ , la parte superior de  $z$ , denotada por  $z_1$ , contiene la parte inobservable del espacio de estados y la parte inferior de  $z$ , denotada por  $z_2$ , contiene la parte observable o reconstruible del espacio de estado.

Para empezar, supongamos que la matriz de observabilidad  $R$  de la Ecuación (5.5) tiene la descomposición de valor singular (ver el Apéndice A-4.2)

$$R = [ U_1^R \quad U_2^R ] \begin{bmatrix} S^R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (V_1^R)^t \\ (V_2^R)^t \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

donde el superíndice  $R$  denota dependencia de la matriz de observabilidad. A partir de esta descomposición, una base ortonormal para el subespacio inobservable  $N(R)$  es dada por las columnas de  $V_2^R$ , esto es,  $N(R) = \text{Im}(V_2^R)$ . De modo similar,  $N(R)^\perp = \text{Im}(V_1^R)$ . De la Proposición 5.1,  $N(R) = \text{Im}(V_2^R)$  es  $A$ -invariante, de modo que se puede escribir

$$A [ V_2^R \quad V_1^R ] = [ V_2^R \quad V_1^R ] \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

por los mismos argumentos usados para probar la Proposición 4.4. Además, si  $x \in N(R)$ , entonces  $Cx = 0$ , o, equivalentemente,  $CV_2^R = [0]$ . Entonces,

$$C = [ 0 \quad \bar{C}_2 ] [ V_2^R \quad V_1^R ]^t$$

Finalmente, como  $R$  es independiente de  $B$ ,

$$B = [ V_2^R \quad V_1^R ] \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

Estas relaciones sugieren la transformación de coordenadas  $[ V_2^R \quad V_1^R ] z = x$ , la cual conduce al modelo de estado equivalente llamado la forma observable de Kalman, esto es,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \quad (5.8)$$

$$y = [ 0 \quad \bar{C}_2 ] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Por construcción, el par  $(\bar{C}_2, \bar{A}_{22})$  es observable. Para ver esto, supóngase lo contrario, esto es, que  $(\bar{C}_2, \bar{A}_{22})$  no es observable. Entonces, hay un estado de la forma  $[0 \ z_2^t]^t$  en el espacio nulo de la nueva matriz de observabilidad. Pero entonces el estado  $x' = [V_2^R \ V_1^R][0 \ z_2^t]^t \in \text{Im}(V_2^R)$ , contradiciendo la estructura particionada del modelo de estado equivalente. De aquí,  $z_2$  contiene la parte observable del espacio de estado. Además, de la estructura de  $\bar{C} = [0 \ \bar{C}_2]$  y la observabilidad del par  $(\bar{C}_2, \bar{A}_{22})$ , la reconstrucción a partir de mediciones entrada-salida puede darse con seguridad en vectores de la forma  $[0 \ \bar{z}_2]^t$ . Claramente, entonces, la parte observable del espacio de estado es ortogonal a la parte inobservable.

### 5.3. Equivalencias Para la Observabilidad de un Sistema

La dualidad de las nociones de controlabilidad y observabilidad se aclara más con el Teorema 5.3. Este teorema, hermano del teorema 20.4 establece las declaraciones paralelas que concierne a la observabilidad de sistemas

**Teorema 5.3.** Para el modelo de estado lineal invariante en el tiempo  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$  son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) El par  $(C, A)$  es observable.

(ii)

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ \lambda_i \mathbb{I} - A \end{bmatrix} = n, \quad \forall \text{ valor propio } \lambda_i \text{ de } A$$

(iii)  $\text{rango}[R] = n$ , donde  $R$  es la matriz de observabilidad (Ecuación 5.5).

(iv)  $\text{rango}[C \exp At] = n$ , esto es, hay  $n$  columnas linealmente independientes cada una de las cuales es una función vectorial del tiempo definida sobre  $[0, \infty]$ .

(v) La matriz Gramiana de observabilidad dada por

$$W_O(t_o, t_1) = \int_{t_o}^{t_1} e^{A^t q} C^t C e^{Aq} dq \quad (5.10)$$

es no singular,  $\forall t_1 > t_o$ . Además, si  $W_O(t_o, t_1)$  es no singular, entonces

$$x(t_o) = e^{A t_o} W_O^{-1}(t_o, t_1) e^{A t_o} \int_{t_o}^{t_1} e^{A^t(q-t_o)} C^t y^M(q) dq \quad (5.11)$$

donde  $y^M(t)$  juega el rol de una medida de la salida y está definida como

$$y^M(t) = y(t) - C \int_{t_o}^t e^{A(t-q)} B u(q) dq - D u(t) \quad (5.12)$$

Obsérvese que si algún dispositivo mide  $y(t)$  y  $u(t)$ , entonces  $y^M(t)$  puede ser generada numéricamente o por algún tipo de circuito integrador-sumador análogo. Después del cálculo de  $x(t_o)$ , la evaluación de la fórmula

$$x(t) = e^{A(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{A(t-q)} B u(q) dq$$

generará la trayectoria de estado  $x(t)$  sobre  $[t_o, t_1]$ . Este método en el que  $x(t_o)$  se calcula ahora ofrece una alternativa al impráctico método desarrollado en la Sección 5.2, representado por la Ecuación (5.4).

**Teorema 5.4.** (Teorema de Dualidad) El modelo de estado  $(A, B, C)$  es completamente controlable si y sólo si el modelo de estado  $(-A^t, C^t, B^t)$  es completamente observable. Además,  $(A, B, C)$  es completamente observable si y sólo si  $(-A^t, C^t, B^t)$  es completamente controlable.

*Demostración.* Si  $(A, B, C)$  es completamente controlable, entonces

$$\text{rango} [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ] = n$$

Tomando la transpuesta y multiplicando filas apropiadas por  $-1$  se obtiene

$$\text{rango} \begin{bmatrix} B^t \\ -B^t A^t \\ \vdots \\ B^t (-A^t)^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

de modo que  $(-A^t, C^t, B^t)$  es completamente observable. Lo recíproco sigue por un argumento simétrico..

Después,  $(A, B, C)$  es completamente observable si y sólo si

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

si y sólo si

$$\text{rango}[C^t | -A^t C^t | \dots | (-A^t)^{n-1} C^t] = n$$

si y sólo si  $(-A^t, C^t, B^t)$  es completamente observable.  $\square$

**Corolario 5.4.** *El modelo  $(A, B, C)$  es completamente (observable) si y sólo si  $(A^t, C^t, B^t)$  es completamente observable (controlable).*

*Demostración. [Prueba del Teorema 5.3].* Combinando los resultados del corolario al Teorema 5.4 con el Teorema 4.4, vemos que las equivalencias de (i)-(v) siguen inmediatamente.  $\square$



## 5.4. Observabilidad y Modos Dirigidos

**Teorema 5.5.** El modo  $\exp(\lambda_i t)R_i$  (o equivalentemente,  $\exp(\lambda_i t)e_i$ ) es inobservable si y sólo si  $CR_i = [0]$ .

*Demostración.*

Parte 1. Supóngase que  $CR_i = [0]$  para algún  $i$ . Entonces para cualquier  $x(0)$ , la contribución del modo  $\exp(\lambda_i t)R_i x(0)$  a la respuesta a entrada cero del sistema es idénticamente cero. En otras palabras, el modo es inobservable.

Parte 2. Para lo recíproco, supóngase que el modo  $\exp(\lambda_i t)e_i$  es un modo inobservable, esto es, que  $e_i$  se encuentra en  $N[R]$ . Entonces la contribución de este modo a la respuesta a entrada cero es idénticamente cero. Ahora, como  $e_i$  está en  $N[R]$ , sigue directamente que  $Ce_i = 0$ , y desde que  $R_i = e_i w_i^*$ ,  $CR_i = [0]$ , como se tenía que mostrar.  $\square$

*Como se vé, la observabilidad de un modo dirigido  $(\lambda_i, e_i)$  depende de la relación entre  $C$  y los vectores propios derechos de  $A$ , mientras que la controlabilidad del modo depende de la relación que ya conocemos entre los vectores propios izquierdos y  $B$ .*

**Corolario 5.5.** El conjunto de vectores propios inobservables genera el subespacio inobservable.

*Este corolario implica que el subespacio inobservable del par  $(C, A)$  es el más grande subespacio  $A$ -invariante del espacio nulo de  $C$ .*

## 5.5. Diseño Básico de Observadores Dinámicos

### 5.5.1. Observadores Identidad

Si un modelo de estado  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$  es observable, se ha mostrado que conociendo  $y(t)$ ,  $u(t)$  se puede reconstruir  $x(t)$  mediante la siguiente fórmula (véase el Teorema 5.3):

$$x(t_0) = e^{At_0} W_0^{-1}(t_0, t_1) e^{A^t t_0} \int_{t_0}^{t_1} e^{A^t (q - t_0)} C^t y^M(q) dq,$$

con  $y^M(t) = y(t) - C \int_{t_0}^t e^{A(t-q)} Bu(q) dq - Du(t),$

La reconstrucción del estado a partir de mediciones entrada-salida empleando las fórmulas anteriores es tediosa.

En contraste, un estimador de estado u observador de estado dinámico construido alrededor de una réplica del sistema dado provee un estimado continuo en línea del estado del sistema.

Por ejemplo, supongamos que un sistema particular tiene un modelo de estado escalar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + \beta u \\ y &= \xi x, \quad \lambda, \beta, \xi \text{ escalares no nulos.}\end{aligned}$$

La siguiente réplica  $\dot{\hat{x}} = \lambda \hat{x} + \beta u$  de la planta sirve como un observador dinámico:

Debe ocurrir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0$$

Para qué condiciones ocurrirá esto? Para responder a esto, nótese que el error  $x(t) - \hat{x}(t)$  es:

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \lambda[x(t) - \hat{x}(t)],$$

ecuación diferencial de solución

$$[x(t) - \hat{x}(t)] = e^{\lambda t}[x(0) - \hat{x}(0)]$$

Si se conoce  $x(0)$  y se escoge  $\hat{x}(0) = x(0)$ , entonces, teóricamente (no es la situación real, frecuentemente hablando),  $\hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0$ . Generalmente  $x(0)$  no es conocido. De este modo, si  $\lambda < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$ .

Se vé que debido a que  $\lambda$  es el polo de la planta, el observador planteado tiene una dinámica dependiente de la planta, lo cual no es deseable.

Una mejora al observador anterior toma en cuenta mediciones de la salida y debe cumplirse que si  $\hat{x}(t)$  está cercana a  $x(t)$ , entonces  $\xi \hat{x}(t)$  debe estar cercano a  $y(t)$ .

Cualquier diferencia debe servir a  $\hat{x}(t)$  en su tarea de seguir a  $x(t)$ . Específicamente,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \lambda \hat{x} + k(y - \xi \hat{x}) + \beta u$$

es una estructura mejorada del observador dinámico escalar, donde  $k$  es un escalar que se debe especificar.

En este caso, la ecuación dinámica del error,  $x(t) - \hat{x}(t)$ , tiene la forma

$$(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) = \lambda(x - \hat{x}) - k(y - \xi \hat{x}) = (\lambda - k\xi)(x - \hat{x})$$

Esta ecuación tiene solución

$$[x(t) - \hat{x}(t)] = e^{(\lambda - k\xi)t}[x(0) - \hat{x}(0)].$$

Es claro que una elección apropiada de  $k$  establece la convergencia, con la tasa de convergencia independiente de la dinámica de la planta.

Generalizando al caso del modelo de estado multientrada, multi-salida (MIMO)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

la ecuación dinámica del observador identidad o asintótico tiene la forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K[y - C\hat{x}] + Bu \quad (5.13)$$

Sustituyendo  $y = Cx$  en la Ecuación (5.13) y restando las dos ecuaciones anteriores se obtiene la ecuación dinámica del error:

$$(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) = (A - KC)(x - \hat{x})$$

que tiene solución

$$[x(t) - \hat{x}(t)] = e^{(A-KC)t}[x(0) - \hat{x}(0)]$$

Los dos requerimientos impuestos a la dinámica del observador son:

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$ : todos los valores propios de  $A - KC$  deben estar en el semiplano abierto izquierdo complejo.
2. La tasa a la cual  $\hat{x}(t)$  se aproxima a  $x(t)$  es establecida a través de una elección apropiada de  $K$ .

**Teorema 5.6.** Si el par  $(A, C)$  es completamente observable, entonces el espectro de  $(A - KC)$  puede ser asignado arbitrariamente por una elección apropiada de  $K$ .

*Demostración.* Si  $(A, C)$  es completamente observable, entonces el par  $(A^t, C^t)$  es completamente controlable, por dualidad. De aquí, por la propiedad de asignabilidad espectral desarrollada en el Capítulo 4, el espectro (valores propios) de  $(A^t + C^t \hat{K})$  puede ser asignado por una elección apropiada de  $\hat{K}$ . Escogiendo  $K = -\hat{K}^t$ , el espectro de  $(A - KC)$  puede ser arbitrariamente asignado porque  $(A^t + C^t \hat{K})$  y  $(A - KC)$  tienen el mismo polinomio característico.  $\square$

**Ejemplo 5.1.** Sea el modelo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 1] x \end{aligned}$$

El observador es:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [y - [0 \ 1] \hat{x}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

La dinámica del error del observador es:

$$\begin{aligned} (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) &= \left[ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [0 \ 1] \right] (x - \hat{x}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 - k_1 \\ 1 & -2 - k_2 \end{bmatrix} (x - \hat{x}) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Supóngase que la diferencia del error debe tener el espectro  $\{-5, -6\}$ . Entonces el polinomio característico deseado es

$$\pi_{A-KC}(\lambda) = \lambda^2 + 11\lambda + 30$$

Como el polinomio característico de la dinámica de error es

$$\pi_{A-KC}(\lambda) = \lambda^2 + (2 + k_2)\lambda + (2 + k_1),$$

la matriz  $K$  de realimentación debe satisfacer  $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 9 \end{bmatrix}$

De esto y de la Ecuación (5.14), el vector de error tiene la forma

$$[x(t) - \hat{x}(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} [x(0) - \hat{x}(0)]$$

Si  $[x(0) - \hat{x}(0)] = [50 \ 75]^t$ , una gran desviación, entonces, después de 5 segundos,

$$[x(5) - \hat{x}(5)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -175e^{-25} \\ 225e^{-30} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2 \times 10^{-9} \\ -10^{-8} \end{bmatrix},$$

un error bastante pequeño. ◁

### 5.5.2. Observadores Para Sistemas No Observables

¿Qué se puede hacer cuando  $(A, C)$  no es observable y solamente parte del espacio de estado es reconstruible? ¿Qué modificaciones en la estructura del observador que se ha desarrollado permiten la reconstrucción parcial de estado, esto es, la reconstrucción del complemento ortogonal del subespacio inobservable? *La forma observable de Kalman da paso a la solución. Recuérdese la forma observable de Kalman de las Ecuaciones (5.8) y (5.9), esto es,*

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ \bar{C}_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

obtenida a partir del modelo de estado usual bajo la transformación de estado  $[ T_1 \ T_2 ]z = x$ , donde  $T_1$  es cualquier matriz cuyas columnas generan el subespacio inobservable y  $T_2$  es cualquier matriz cuyas columnas combinadas con las de  $T_1$  forman una base para  $\mathbb{R}^n$ . Una buena elección es  $[ T_1 \ T_2 ] = [ V_2^R \ V_1^R ]$ , donde las  $V_i^R$ 's son dadas por la descomposición de valor singular de  $R$  (Ecuación 5.7). El observador dinámico debe usar mediciones de  $y(t)$  y  $u(t)$  para reconstruir  $z_2(t)$  en el nuevo sistema coordenado. La parte reconstruible del complemento ortogonal del subespacio inobservable está dada por

$$\hat{x} = [ T_1 \ T_2 ] \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Como  $\hat{x}$  no tiene proyección sobre el subespacio inobservable de  $(A, C)$ ,  $\hat{x}$  es una aproximación en mínimos cuadrados a la parte observable del estado  $x$ . La Figura 5.1 ilustra la estructura de diagrama de bloques del observador. Si  $(A, C)$  es observable, la estructura del observador se reduce a la de la Ecuación (5.13).

### 5.5.3. Observadores de Orden Reducido

Nótese los siguientes hechos del diseño de observadores: (i) los observadores requieren las mediciones de  $r$  salidas y de  $m$  entradas, y (ii) el orden del observador es igual a la dimensión de la parte observable del espacio de estado. Si las mediciones de  $r$  entradas son independientes (de modo equivalente, si  $\text{rango}[C] = r$ ) entonces existe una relación uno-uno entre las mediciones  $y(t)$  y un subespacio de dimensión  $r$  del espacio de estado. Por supuesto, este subespacio  $r$ -dimensional debe ser observable. Pero entonces uno podría preguntarse, si  $(A, C)$  es observable, ¿porqué se necesita un observador  $n$ -dimensional? Intuitivamente, un observador de dimensión  $(n - r)$  parecería ser suficiente. En efecto lo es, y la construcción que sigue fabrica la estructura de este así llamado observador de orden reducido.

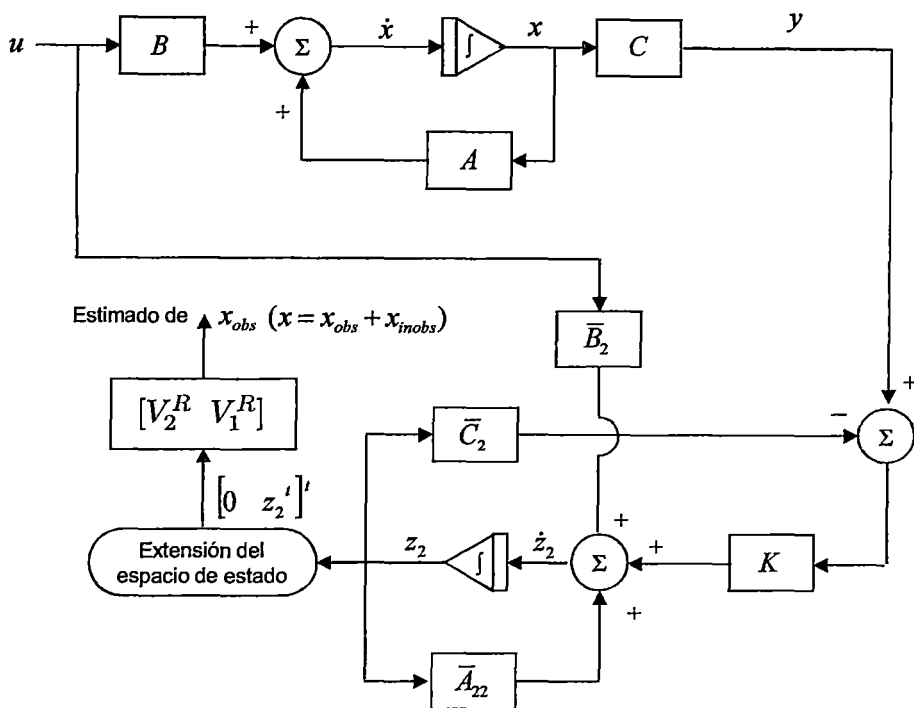


Figura 5.1: Diagrama de bloques del observador de la planta cuando el par  $(A, C)$  no es completamente observable.

Supóngase que  $(A, C)$  es un par observable. Cualquiera fuese su estructura, los observadores de orden reducido deben utilizar mediciones de  $y(t)$  en alguna forma directa. La definición de un nuevo vector de estado en el cual  $y(t)$  forma parte de él resulta ser la clave para el uso directo de las mediciones de  $y(t)$ . En particular, definimos un nuevo conjunto de variables de estado como

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix} x(t) \quad (5.15)$$

donde  $C$  es de orden  $r \times n$ , para  $r < n$ , y  $\text{rango}[C] = r$ , y  $V$  es cualquier matriz de rango máximo tal que  $CV^t = [0]$ . Claramente las columnas de  $V^t$  generan  $N[C]$ . Una elección óptima para  $V^t$  debería ser  $V^t = V_2^C$ , donde  $V_2^C$  surge de una



descomposición de valor singular de  $C$  de acuerdo a

$$C = [ U_1^C \quad U_2^C ] = \begin{bmatrix} S^C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (V_1^C)^t \\ (V_2^C)^t \end{bmatrix}$$

Por supuesto, los valores de las variables  $w(t)$  en la Ecuación (5.15) son desconocidos.

La Ecuación (5.15) especifica una transformación de estado no singular.

El modelo de estado equivalente tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix} B u(t) \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.17)$$

El objetivo en este punto es restar  $Ky$  de  $w$ , donde  $K$  es una matriz de ganancia de observador sin especificar aún. Definiendo una nueva variable de estado  $\nu = w - Ky$ , se puede determinar un modelo de estado dinámico en  $\nu$  conducido por las variables medibles  $y$  y  $u$ . Construyendo un observador dinámico (identidad) para este nuevo modelo de estado se puede entonces generar el estimado  $\hat{\nu}$  de  $\nu$ . De aquí, el estimado  $\hat{w}$  de  $w$  se vuelve  $\hat{w} = \hat{\nu} + Ky$ . En consecuencia, el estimado  $\hat{x}$  del estado de la planta  $x$  satisfará

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\nu} + Ky \\ y \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Resta solamente completar los detalles. Como se mencionó, substraemos  $Ky$  de  $w$  en la Ecuación (5.17) para producir

$$(\dot{w} - K\dot{y}) = (\bar{A}_{11} - K\bar{A}_{21})w + (\bar{A}_{12} - K\bar{A}_{22})y + (\bar{B}_1 - K\bar{B}_2)u \quad (5.19)$$

Definiendo  $\nu = w - Ky$  se obtiene el siguiente modelo de estado dinámico en  $\nu$ :

$$\dot{\nu} = (\bar{A}_{11} - K\bar{A}_{21})\nu + [\bar{A}_{12} - K\bar{A}_{22} + \bar{A}_{11}K - K\bar{A}_{21}K]y + (\bar{B}_1 - K\bar{B}_2)u \quad (5.20)$$

La Ecuación (5.20) tiene la forma de un observador (identidad). Para ver esto, supóngase que  $\hat{\nu}$  designa un estimado de  $\nu$  y reemplácese  $\nu$  en la ecuación. Entonces la ecuación dinámica del error es

$$(\dot{\nu} - \dot{\hat{\nu}}) = (\bar{A}_{11} - K\bar{A}_{21})(\nu - \hat{\nu}) \quad (5.21)$$

De aquí, la Ecuación (5.20) tiene una estructura de observador identidad, y si  $(\bar{A}_{11} (= A), \bar{A}_{21} (= C))$  es un par observable, para  $K$  elegida apropiadamente, la solución de la Ecuación (5.21) convergerá a cero a la tasa de convergencia que se desee. Nótese que la observabilidad del par  $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21})$  sigue de la observabilidad del par  $(A, C)$ .

#### 5.5.4. El Teorema de Separación

El teorema de separación de valores propios establece la viabilidad de la implementación de la realimentación de estado basada en un estimado del estado, obtenido de un observador dinámico. Con frecuencia sólo las variables de salida o algún subconjunto de ellas están disponibles para medición. La tecnología limitada de los sensores puede impedir la medición directa de la mayor parte de las variables de estado. No obstante, muchos esquemas de diseño de realimentación requieren información de estados completa. Por ejemplo, el esquema de asignación de valores propios detallado en el Capítulo 4, u otros esquemas, utilizan una ley de realimentación de estado total. Para afrontar este problema, los ingenieros de control insertan estructuras de observador dinámico en el lazo de realimentación, y usan el estimado de estado en la ley de control de realimentación. La inserción de un observador

dinámico en el camino de realimentación crea dinámicas de sistema adicionales, esto es, valores propios o frecuencias naturales adicionales. Cabe entonces plantearse la siguiente cuestión, ¿La dinámica adicional interfiere en alguna forma indeseable con el comportamiento deseado del sistema? Afortunadamente no. El teorema de separación de valores propios establece que el polinomio característico del sistema realimentado con un observador dinámico (véase la Figura 5.2) es igual al producto de los polinomios característicos del observador y del control de realimentación de estado sin el observador. En consecuencia, el comportamiento dinámico del observador no interfiere con la estructura de valores propios deseada de la planta controlada

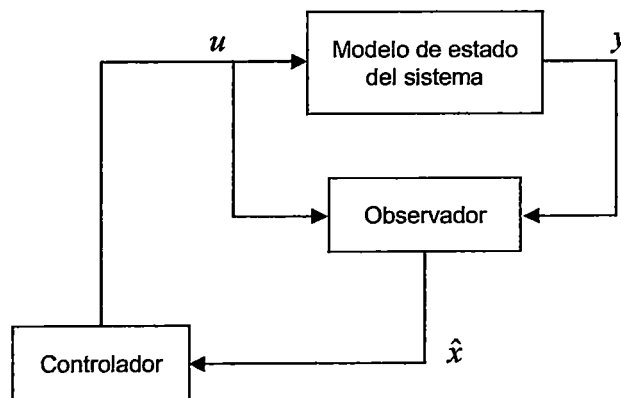


Figura 5.2: Estructura del sistema, observador y controlador sugiriendo la necesidad del teorema de separación de valores propios.

**Teorema 5.7.** (El Teorema de Separación de Valores Propios). Supóngase que una planta tiene el modelo de estado usual

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

y el observador identidad dado por

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K[y - C\hat{x}] + Bu \quad (5.22)$$

Supóngase que la ley de control para la planta es

$$u = F\hat{x}$$

Entonces el polinomio característico del sistema interconectado es el producto de los polinomios característicos de la dinámica del observador  $A - KC$  y de la dinámica de realimentación  $A + BF$ .

*Demostración.* De la hipótesis del teorema,

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BF\hat{x} = (A + BF)x - BF(x - \hat{x}) \quad (5.23)$$

La dinámica de  $\hat{x}$  sigue de la Ecuación (5.22) y puede ser escrita como

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + KCx + BF\hat{x}$$

Entonces la ecuación de error es

$$(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) = (A - KC)(x - \hat{x}) \quad (5.24)$$

En forma matricial, las Ecuaciones (5.23) y (5.24) se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

cuyo polinomio característico es

$$\pi(\lambda) = \pi_{A+BF}(\lambda)\pi_{A-KC}(\lambda)$$

como se quiso probar. □

Supóngase que se tiene el modelo EF (Figura 5.3):

$$\text{EF: } \dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

al que se le desea reubicar los polos vía realimentación de estado mediante el uso

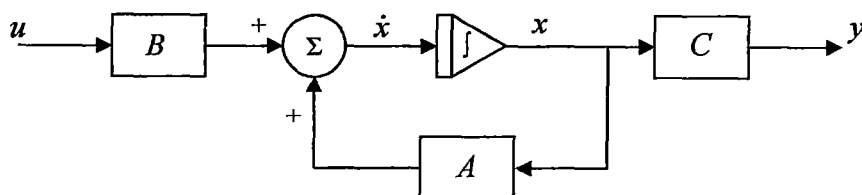


Figura 5.3: Representación esquemática del sistema EF

de una matriz de realimentación de estado  $F$  (véase la Figura 5.4):

$$\dot{x} = (A + BF)x + Bu$$

$$y = Cx$$

con  $\sigma(A + BF)$  pre-especificado.

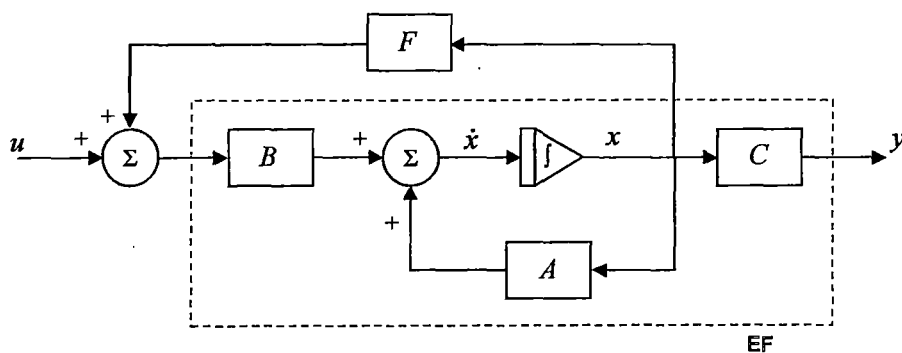


Figura 5.4: Sistema EF realimentado

Nos preguntamos lo siguiente: ¿Si empleamos en la planta

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \text{EF}$$

un observador identidad dado por

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K[y - C\hat{x}] + Bu \} \text{ observador}$$

y se hace uso de la matriz de realimentación de estado  $F$  como se indica en la Figura 5.5, el comportamiento del observador interfiere con la estructura de valores propios deseada de la planta? Dicho de otra manera, ¿se pierden elementos de  $\sigma(A + BF)$ ? Veamos.

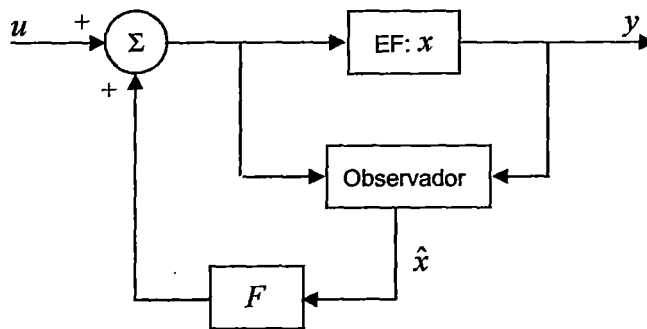


Figura 5.5: Sistema con observador y realimentación de estados

De la Figura 5.5 y de las ecuaciones de la planta y del observador se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + F\hat{x}) \\ &= (A + BF)x - BF(x - \hat{x}) + Bu \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + K[Cx - C\hat{x}] + B(u + F\hat{x}) \\ &= (A - KC)\hat{x} + KCx + BF\hat{x} + Bu \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\Rightarrow (5.26) - (5.27) : (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) = (A - KC)(x - \hat{x}) \quad (5.28)$$

Las Ecuaciones (5.26) y (5.28) dan lugar a la ecuación dinámica de estado del sistema con observador y realimentador de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

El polinomio característico de la matriz de este sistema es  $\pi(\lambda) = \pi_{A+BF}(\lambda)\pi_{A-KC}(\lambda)$ , de modo que el comportamiento del observador no interfiere con la estructura deseada de la planta.

### 5.5.5. La Forma Canónica de Kalman

Como se mencionó anteriormente, las ideas de las Proposiciones 4.2 a 4.8 que desarrollaron la forma controlable de Kalman, se interconectan con la forma observable de Kalman dada por las Ecuaciones (5.8) y (5.9) para formar la forma canónica de Kalman. La progresión lógica hacia esta forma canónica empieza con el modelo de estado lineal, invariante en el tiempo usual

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

que tiene matriz de controlabilidad  $Q = [ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ]$  con  $\text{rango}[Q] = p$ . Ahora supóngase que  $Q$  tiene la descomposición de valor singular (véase la Sección A-4.2)

$$Q = [ U_1^Q \ U_2^Q ] \begin{bmatrix} S^Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (V_1^Q)^t \\ (V_2^Q)^t \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

donde (i) el superíndice  $Q$  se refiere a la descomposición de valor singular de la matriz  $Q$ , (ii)  $U_1^Q$  tiene columnas ortonormales que generan a  $\text{Im}(Q)$ , y (iii)

$U_2^Q$  tiene columnas ortonormales que generan  $N(Q^t) = [\text{Im}(Q)]^\perp$ , donde el superíndice  $\perp$  denota el complemento ortogonal de  $\text{Im}(Q)$  en  $\mathbb{R}^n$ . (Por ejemplo, si  $\text{Im}(Q) = \text{span}\{\nu_1, \nu_2\}$ , donde  $\nu_1 = [1 \ 0 \ 1]^t$  y  $\nu_2 = [0 \ 1 \ 0]^t$ , entonces  $\text{Im}(Q)^\perp = \text{span}\{\nu_3\}$ , donde  $\nu_3 = [1 \ 0 \ -1]^t$ ). Entonces

$$[1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0]$$

confirmando la ortogonalidad de  $\nu_3$  con  $\nu_1$  y  $\nu_2$ .

Este análisis sugiere una descomposición del espacio de estado en una parte controlable y una parte perpendicular a la parte controlable, esto es,

$$\mathbb{R}^n = X = X_C \oplus X_{\bar{C}} \quad (5.30)$$

donde  $X_C$  denota el subespacio controlable y  $X_{\bar{C}}$  denota el complemento ortogonal del subespacio controlable (a  $X_C$  también se le denomina subespacio incontrolable). De la precedente descomposición de valor singular de  $Q$ , una base ortonormal para  $X_C$  es dada por las columnas de  $U_1^Q$ , y una para  $X_{\bar{C}}$  es dada por las columnas de  $U_2^Q$ . La representación de esta descomposición (ver la Ecuación 4.5) es dada por el modelo de estado equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5.31)$$

$$y = \bar{C}z \quad (5.32)$$



donde

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = [ U_1^Q \quad U_2^Q ]^t A [ U_1^Q \quad U_2^Q ] \quad (5.33)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [ U_1^Q \quad U_2^Q ]^t B \quad (5.34)$$

y

$$\bar{C} = C [ U_1^Q \quad U_2^Q ]. \quad (5.35)$$

Como se mencionó, este sistema equivalente extrae la parte controlable del espacio de estado y la incluye en el vector de estado  $[ z_1 \quad 0 ]^t$ . Consistente con la descomposición descrita, cada vector  $z$  tiene la forma

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

donde  $[ 0 \quad z_2 ]^t$  es el complemento ortogonal de  $[ z_1 \quad 0 ]^t$ . De este modo,  $[ 0 \quad z_2 ]^t$  es incontrolable.

Las metas de este capítulo son (i) descomponer aún más el espacio de estado en particiones observable e inobservable y (ii) representar el particionamiento completo mediante una representación de estado equivalente la cual extraiga la parte controlable e inobservable, la proyección de la parte observable sobre el espacio controlable, la proyección del subespacio incontrolable sobre la parte inobservable, y finalmente la última partición, el complemento de estos espacios en  $\mathbb{R}^n$ , la así llamada parte observable e incontrolable. En otras palabras, el objetivo es generar bases para la descomposición del espacio de estado dada por

$$\mathbb{R}^n = X = X_{C\bar{O}} \oplus X_{CO} \oplus X_{\bar{C}\bar{O}} \oplus X_{\bar{C}O} \quad (5.36)$$

donde

- (i)  $X_{C\bar{O}}$  es la intersección del subespacio controlable con el subespacio inobservable, esto es, aquellos estados que son controlables pero inobservables.
- (ii)  $X_{CO}$  es el complemento ortogonal de  $X_{C\bar{O}}$  contenido en  $X_C$ , esto es, el espacio de estados reconstruibles proyectados sobre el subespacio controlable.
- (iii)  $X_{\bar{C}\bar{O}}$  es el complemento ortogonal de  $X_{C\bar{O}}$  contenido en  $N(R)$ ; esto es, la proyección del subespacio incontrolable (el complemento ortogonal de  $X_C$ ) sobre el subespacio inobservable.
- (iv)  $X_{\bar{C}O}$  es aquel espacio el cual es el complemento ortogonal de  $X_{C\bar{O}} \oplus X_{CO} \oplus X_{\bar{C}\bar{O}}$ , esto es, aquellos estados los cuales son observables (reconstruibles) pero no tienen proyección sobre el subespacio controlable y son de este modo incontrolables.

Si  $x \in X_{\bar{C}O} \oplus X_{CO}$ , entonces  $x$  es incontrolable; si  $x \in X_{C\bar{O}} \oplus X_{\bar{C}\bar{O}}$ , entonces  $x$  es inobservable. Nótese que la descomposición debe empezar con  $X_{C\bar{O}} = X_C \cap X_{\bar{O}}$  debido a que solamente  $X_{C\bar{O}}$  es  $A$ -invariante y es de este modo el único espacio definible en una forma libre de coordenadas. Finalmente, el uso de la palabra ortogonal en la explicación precedente es más restrictiva de lo necesario, pero mantiene consistencia con el método de descomposición de valor singular de construir la descomposición.

Las técnicas de descomposición de valor singular proveen un medio directo para obtener bases para estos espacios, lo cual a su vez nos permite desarrollar una transformación de estado. Esta transformación de estado entonces nos permite convertir las matrices de estado originales a un conjunto cuya estructura particionada claramente escoge cada uno de los espacios. Desde que hay cuatro espacios, la transformación debe tener la estructura  $T = [T_1, T_2, T_3, T_4]$  donde las columnas de

$T_1$  son una base para  $X_{C\bar{O}}$ , aquellas de  $T_2$  una base para  $X_{CO}$ , aquellas de  $T_3$  una base para  $X_{\bar{C}\bar{O}}$ , etc.

Claramente, la descomposición de valor singular de  $Q$  dada por la Ecuación (5.29), jugará un rol clave en la construcción. También, la descomposición de valor singular de la matriz de observabilidad  $R$  jugará un rol dual. Esta descomposición de valor singular es dada por

$$R = [ U_1^R \quad U_2^R ] \begin{bmatrix} S^R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (V_1^R)^t \\ (V_2^R)^t \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Un esquema de la descomposición aparece en la Figura 5.6

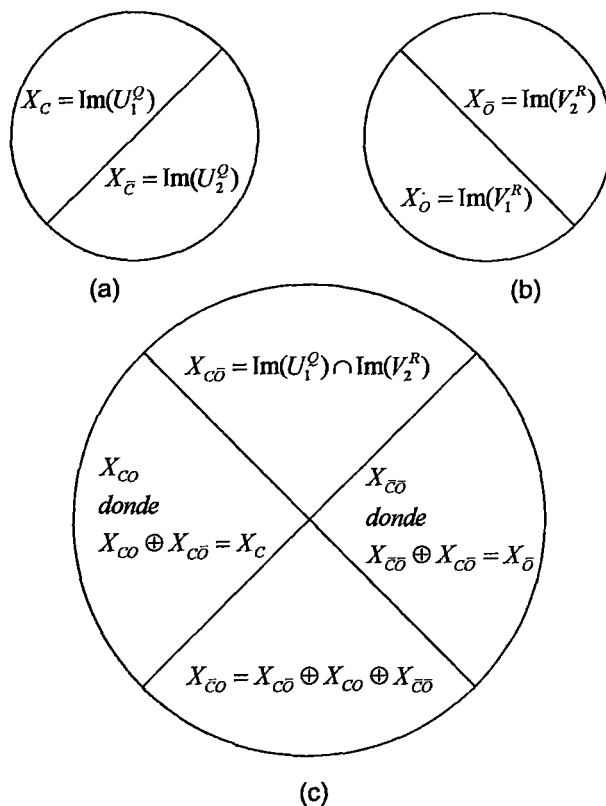


Figura 5.6: Descomposición del espacio de estado en (a) partición controlable/incontrolable, (b) partición observable/inobservable, y (c) particiones controlable/inobservable, controlable/observable, etc.

Las columnas de  $T_1$  deben generar la intersección de  $\text{Im}(Q) \cap N(R) = \text{Im}(U_1^Q) \cap \text{Im}(V_2^R)$ . Esta propiedad de intersección es equivalente a que las columnas de  $T_1$  son ortogonales a tanto  $\text{Im}(Q)^\perp = \text{Im}(U_2^Q)$  y  $N(R)^\perp = \text{Im}(V_1^R)$ . De este modo,  $T_1$  es una matriz de rango maximal satisfaciendo

$$\begin{bmatrix} (U_2^Q)^t \\ (V_1^R)^t \end{bmatrix} T_1 \triangleq M_1 T_1 = [0] \quad (5.38)$$

El cálculo de  $T_1$  ocurre efectuando una descomposición de valor singular sobre  $M_1$  y estableciendo  $T_1 = V_2^{M_1}$ .

La matriz  $T_2$  debe tener columnas que sirven como una base para  $X_{C\bar{O}}$ , el complemento ortogonal de  $X_{C\bar{O}} = \text{Im}(T_1)$  contenido dentro de  $X_C = \text{Im}(U_1^Q)$ , esto es,  $X_C = X_{C\bar{O}} \oplus X_{CO}$ . Por lo tanto, las columnas de  $T_2$  son ortogonales a aquellas de  $T_1$  y a aquellas de  $U_2^Q$ . De aquí,  $T_2$  es una matriz de máximo rango satisfaciendo

$$\begin{bmatrix} (U_2^Q)^t \\ T_1^t \end{bmatrix} T_2 \triangleq M_2 T_2 = [0] \quad (5.39)$$

El cálculo de  $T_2$  es similar a aquel de  $T_1$ , procediendo por ejecutar una descomposición de valor singular sobre  $M_2$  y estableciendo  $T_2 = V_2^{M_2}$ .

$\text{Im}(T_3) = X_{\bar{C}\bar{O}}$  representa el complemento ortogonal de  $X_{C\bar{O}}$  contenido dentro de  $X_{\bar{O}} = \text{Im}(V_2^R)$ . En otras palabras,  $X_{\bar{C}\bar{O}} \oplus X_{C\bar{O}} = X_{\bar{O}}$ , el subespacio inobservable. Claramente, entonces,  $T_3$  es una matriz de rango maximal que satisface

$$\begin{bmatrix} (V_1^R)^t \\ T_1^t \end{bmatrix} T_3 \triangleq M_3 T_3 = [0] \quad (5.40)$$

De modo que establecemos  $T_3 = V_2^{M_3}$ , donde  $V_2^{M_3}$  tiene columnas que generan el espacio nulo de  $M_3$ .

Finalmente,  $T_4$  tiene columnas que generan el complemento ortogonal de los tres espacios previos. De este modo,  $T_4$  es una matriz de máximo rango satisfaciendo

$$\begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{bmatrix} T_4 \triangleq M_4 T_4 = [0] \quad (5.41)$$

Nuevamente, ejecutamos una descomposición de valor singular de  $M_4$  y establecemos  $T_4 = V_2^{M_4}$ .

De modo que la ejecución de la transformación de estado  $Tz = x$  sobre el modelo de estado usual produce el modelo equivalente

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}z \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\tilde{C} = CT = [0 \quad \tilde{C}_2 \quad 0 \quad \tilde{C}_4]$$

Claramente, cada vector  $z$  en las nuevas coordenadas tiene la forma  $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^t$ . También, todo vector de la forma  $z = [z_1, z_2, 0, 0]^t$  es controlable, y todo vector de la forma  $z = [0, z_2, 0, z_4]^t$  es observable, etc.

## 5.6. Observabilidad y Sistemas en Tiempo Discreto

*Las ideas de observabilidad en tiempo continuo se extienden al caso en tiempo discreto, obviamente adaptadas, de modo que se consideren un número finito de mediciones en un correspondiente intervalo finito de tiempo.*

**Definición 5.4.** *El modelo de estado en tiempo discreto es completamente observable si y sólo si existe un índice finito  $N$  tal que el conocimiento de  $\{y[0], y[1], \dots, y[N-1]\}$  y  $\{u[0], u[1], \dots, u[N-1]\}$ , así también como del par  $(A, C)$ , son suficientes para determinar  $x[0]$  para  $x[0]$  arbitrario en  $\mathbb{R}^n$ .*

*Estas definiciones conducen al planteamiento del siguiente problema:*

Sea el modelo de estado

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k]\end{aligned}\tag{5.43}$$

con  $A \in \mathcal{M}(n, n)$ ,  $B \in \mathcal{M}(n, m)$ ,  $C \in \mathcal{M}(r, n)$ , y  $D \in \mathcal{M}(r, m)$ , y dadas mediciones exactas de  $u[k], u[k+1], \dots$  e  $y[k], y[k+1], \dots$ , calcular el vector de estado  $x[k]$ .

*A partir de las Ecuaciones (5.43) se puede escribir*

$$\begin{aligned}y[k] &= Cx[k] + Du[k] \\ y[k+1] &= CAx[k] + CBu[k] + Du[k+1] \\ y[k+2] &= CA^2x[k] + CABu[k] + CBu[k+1] + Du[k+2] \\ &\vdots\end{aligned}\tag{5.44}$$

En correspondencia directa con el caso en tiempo continuo, se obtiene el sistema de ecuaciones que resuelve el problema:

$$\begin{bmatrix} y[k] \\ y[k+1] \\ \vdots \\ y[k+n-1] \end{bmatrix} = Rx[k] + T \begin{bmatrix} u[k] \\ u[k+1] \\ \vdots \\ u[k+n-1] \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

o lo que es lo mismo,  $Y[k] = Rx[k] + TU[k]$ , donde

$$R = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

y

$$T = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-1}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

**Teorema 5.8.** *El sistema en tiempo discreto*

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

es completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad de orden  $rn \times n$

$$R = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene rango  $n$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supóngase que las observaciones de entrada son todas cero. Sea  $\text{rango}(R) = n$ , y supóngase que se conocen las mediciones  $\{y[0], \dots, y[N-1]\}$ , así como también el par  $(A, C)$ . Entonces a partir de la discusión anterior,

$$Y[n] = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x[0]$$

Como  $\text{rango}(R) = n$ , existe  $R^{-L}$  y  $x[0] = R^{-L}Y[n]$  es determinada de modo único.

Para lo recíproco, supóngase que un estado inicial arbitrario  $x[0]$  puede ser determinado de modo único a partir de un número finito de observaciones  $\{y[0], \dots, y[N-1]\}$  para algún entero finito  $N$ . Definamos la matriz

$$R_N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

Por determinación única, se entiende que la solución de

$$Y[N] = R_N x[0]$$

es única. Esto requiere que  $\text{rango}(R_N)$  sea maximal, esto es,  $\text{rango}(R_N) = n$ . Pero de los Lemas 4.1 y 4.2 del Capítulo 4, si  $\text{rango}(R_N) = n$ , entonces  $\text{rango}(R) = \text{rango}(R_N) = n$ , como se tenía que mostrar.  $\square$



Como en el caso en tiempo continuo, se dice que un estado  $x_o$  es completamente inobservable si su respuesta de sistema de entrada cero es idénticamente cero.

**Proposición 5.3.**  $x_o$  es completamente inobservable si y sólo si  $x_o \in N(R)$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supóngase que  $x_o$  es completamente inobservable. Entonces

$$y[0] = y[1] = y[2] = \dots = y[n-1] = 0$$

De aquí,  $0 = Rx_o$  implica  $x_o \in N(R)$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $x_o \in N(R)$ . Entonces  $Rx_o = 0$ , lo que implica que

$$y[0] = y[1] = y[2] = \dots = \dots = y[n-1] = 0$$

Definamos ahora

$$R_N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

Entonces, por el Teorema de Cayley-Hamilton o los Lemas 4.1 y 4.2,  $\text{span-fila}(CA^{N-1}) \subset \text{span-fila}(R)$ . Por lo tanto,  $N(R_N) = N(R)$ , y

$$y[k] = CA^k x[0] = 0, \quad \forall k$$

de modo que  $x[0]$  es completamente inobservable. □

*La Proposición 5.3 continúa el paralelismo con el caso en tiempo al implicar que  $N(R)$  en realidad representa el subespacio inobservable del sistema. Entonces sigue inmediatamente de la Proposición 5.1 que  $N(R)$  es invariante bajo*

la multiplicación por  $A$ . En particular, si  $x_o \in N(R)$ , entonces

$$RA^k x_o = \begin{bmatrix} CA^k x_o \\ CA^{k+1} x_o \\ \vdots \\ CA^{k+n-1} x_o \end{bmatrix}$$

De modo que por el Teorema de Cayley-Hamilton o por los Lemas 4.1 y 4.2,

$$R(A^k x_o) = CA^k x_o = CA^{k+1} x_o = \dots = CA^{k+n-1} x_o = \theta$$

así que se ha mostrado el siguiente teorema.

**Teorema 5.9.** *Supóngase que  $A$  tiene distintos valores propios  $\lambda_i$ . El modo dirigido en tiempo discreto  $(\lambda_i, e_i)$  es inobservable si y sólo si  $Ce_i = \theta$ .*

Aquí también el espacio de estado del modelo en tiempo discreto se descompone partes observable e inobservable. Esta partición es representable como una forma observable de Kalman, la cual se calcula de modo similar a como se hizo en el caso en tiempo continuo y que condujo a las Ecuaciones (5.8), (5.9). La contraparte de esas ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} z_1[k+1] \\ z_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1[k] \\ z_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = [0 \quad \bar{C}_2] \begin{bmatrix} z_1[k] \\ z_2[k] \end{bmatrix}$$

que se calcula a través de la transformación de estado  $[V_2^R \quad V_1^R]z[k] = x[k]$ , con  $V_1^R$  y  $V_2^R$  como se dieron en la Ecuación (5.7).

De modo similar, se verifica que para un sistema en tiempo discreto el par  $(C, A)$  es observable si y sólo si

$$\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ \lambda_i \mathbb{I} - A \end{pmatrix} = n \quad (5.47)$$

para todo valor propio  $\lambda_i$  de  $A$ , o, a su vez, si y sólo si

$$\text{rango}(CA^k) = n \quad (5.48)$$

donde cada columna de  $CA^k$  se ve como una sucesión vectorial dependiente de  $k$ . De este modo, las Ecuaciones (5.47) y (5.48) son condiciones equivalentes para la observabilidad completa del par  $(C, A)$  al lado de la condición  $\text{rango}(R) = n$ .

Continuando con la semejanza entre modelos de estado en tiempo continuo y en tiempo discreto, un observador identidad del modelo de estado en tiempo discreto tiene la estructura

$$\hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + K(y[k] - C\hat{x}[k]) + Bu[k] \quad (5.49)$$

con dinámica de error

$$[x[k+1] - \hat{x}[k+1]] = (A - KC)[x[k] - \hat{x}[k]] \quad (5.50)$$

De este modo, la ganancia del observador  $K$  debe escogerse de modo que cada valor propio  $\lambda_i$  de  $(A - KC)$  satisfaga  $|\lambda_i| < 1$ . Esto asegura que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x[k] - \hat{x}[k]) = 0$ . Finalmente, el concepto de observadores de orden mínimo, el teorema de separación de valores propios, y la forma canónica de Kalman tienen desarrollos idénticos a los de sus contrapartes en tiempo continuo.

## 6 ESTABILIDAD DE SISTEMAS LIT

### 6.1. Introducción

Decimos que un sistema es estable cuando toda entrada acotada da lugar a una salida acotada y que es inestable cuando alguna entrada acotada da lugar a una respuesta no acotada.

Para concretar estos conceptos, considérese la Figura 6.1, la cual ilustra un sistema cuya salida siempre es idénticamente cero para entradas arbitrarias. Dentro del sistema, sin embargo, las cosas son muy diferentes: aún para entradas de tan buen comportamiento como una función escalón, el tamaño de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  crece sin límite conforme transcurre el tiempo. De aquí, tal sistema es internamente inestable y externamente estable. Este comportamiento ocurre debido a que el sistema es completamente inobservable, esto es, nada sale al mundo exterior desde el interior del sistema.

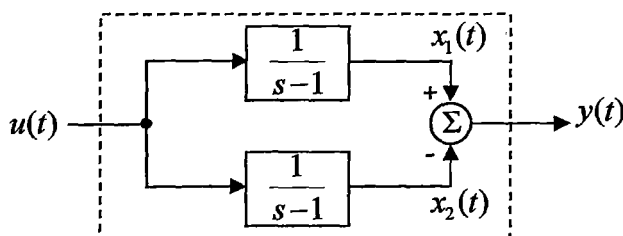


Figura 6.1: Un sistema internamente inestable, externamente estable.

En la Figura 6.2 se observa que sale información del interior de él al exterior a través de la salida. En particular, los efectos de los estados internos  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  aparecen en la respuesta  $y(t)$ . Si la entrada es nuevamente una simple función escalón ( $u(t) = 1^+(t)$ ), el estado  $x_2(t)$  es una función rampa ( $x_2(t) = t \cdot 1^+(t)$ ) cuyo tamaño crece hacia el infinito conforme transcurre el tiempo hacia el infinito.

Esta situación ilustra el caso de un sistema internamente y externamente inestable. El sistema de la Figura 6.3 es el mismo que el de la Figura 6.2, excepto que la

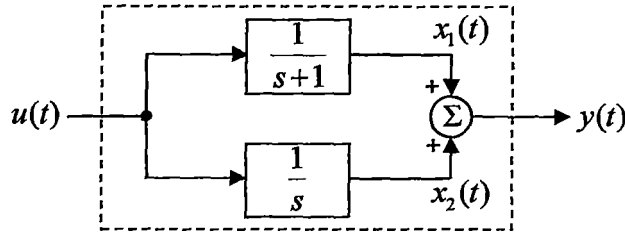


Figura 6.2: Un sistema internamente y externamente inestable.

entrada al sistema está desacoplada del bloque  $1/s$ . Debido a que la entrada no puede afectar a este bloque, el modo que representa es incontrolable. Para una condición inicial arbitraria, la respuesta  $x_2(t)$  siempre será constante y no crecerá al infinito. También, la respuesta  $x_1(t)$  siempre será de buen comportamiento (acotada) siempre y cuando la entrada sea también de buen comportamiento. De aquí, este sistema es internamente y externamente estable.

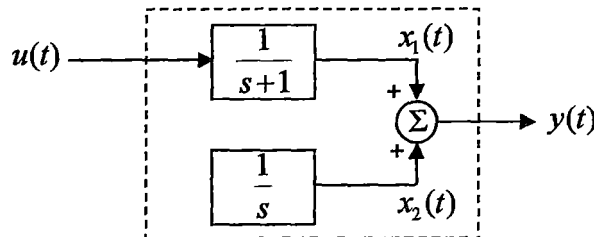


Figura 6.3: Un sistema internamente y externamente estable.

Finalmente, la Figura 6.4 representa un dispositivo que puede predecir valores de entrada no nulos antes del momento en que se observe que la entrada se vuelve no nula. Por definición, todos los sistemas no causales (véase la Definición 2.19) son inestables.

Estos ejemplos traen a la mente un número de conjeturas: (i) estabilidad interna implica estabilidad externa; (ii) los modos internamente inestables no



Figura 6.4: Un predictor ideal es no causal, y por esto es un sistema inestable.

observables no hacen inestable la respuesta del sistema; y (iii) si un sistema tiene un polo de primer orden sobre el eje imaginario, este polo debe ser incontrolable para que el sistema sea internamente estable. La verificación de estas conjeturas así como otras ocupan el desarrollo subsiguiente.

## 6.2. Definiciones Previas

En lo que sigue de este capítulo, son útiles las normas que definimos a continuación.

**Definición 6.1.** Algunas normas en espacios vectoriales son las siguientes:

a) La norma euclidiana usual de un vector  $x = [x_1, \dots, x_n]^t \in \mathbb{R}^n$  es definida como  $\|x\|_2 \triangleq (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ .

b) Norma de una matriz. En  $\mathcal{M}(m, n)$  se define una norma como

$$\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n)$$

c) Norma espectral de una matriz. En  $\mathcal{M}(n, m)$  se define la norma espectral como

$$\|A\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2, \quad \forall A \in \mathcal{M}(n, m)$$

donde  $\|x\|_2$  es la norma Euclidiana usual en  $\mathbb{R}^n$ .

d) Norma  $\infty$  de funciones reales de variable real. En el espacio de funciones  $W = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es función}\}$ , se define la norma-sup o norma  $L_\infty$

como

$$\|u(\cdot)\|_{\infty} = \sup_t |u(t)|, \quad \forall u \in W$$

De acuerdo con esta definición, si  $u(t) = (1 - e^{-t})1^+(t)$ , entonces  $\|u(\cdot)\|_{\infty} = 1$ . Sin embargo, si  $u(t) = (1 - e^t)$ , entonces, desde que  $|u(t)| \rightarrow \infty$  conforme  $t \rightarrow +\infty$ , la norma-sup técnicamente no existe. Por convención, en este caso denotamos la norma-sup por  $\|u(\cdot)\|_{\infty} = \infty$ .

e) Norma  $\infty$  de una función vectorial de variable real. En el espacio de funciones  $W = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m / u \text{ es función}\}$ , se define la norma-sup o norma  $L_{\infty}$  como

$$\|u(\cdot)\|_{\infty} = \max_i \|u_i(\cdot)\|_{\infty}, \quad \forall u \in W \quad (6.1)$$

donde  $u(\cdot) = [u_1(\cdot) | \dots | u_m(\cdot)]$ .

f) Norma  $\infty$  de una función matricial de variable real. En el espacio de funciones  $W = \{H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} / H \text{ es función}\}$ , se define la norma-sup como

$$\|H(\cdot)\|_{\infty} = \max_i \left\| \sum_{j=1}^m |h_{ij}(\cdot)| \right\|_{\infty}, \quad \forall H \in W$$

donde  $H(\cdot) = [h_{ij}(\cdot)]$  es una matriz en  $\mathcal{M}(m, n)$  cuyos elementos  $h_{ij}$  son funciones que aplican números reales en números reales.

g) Norma de una función real de dominio restringido. En el espacio de funciones  $W = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es función}\}$ , se define la norma sup restringida a  $D$ , donde  $D$  es algún subconjunto de  $\mathbb{R}$ , como

$$\|u(\cdot)\|_{\infty, D} = \sup_{t \in D} |u(t)|$$

y similarmente para funciones vectoriales y matriciales. Esto solamente indica que uno puede restringir el dominio de una función y considerar su norma sup sobre el dominio  $D$ .

h) Norma  $L_1$  de una función real de variable real. En el espacio de funciones  $W = \{H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ es función}\}$ , se define la norma  $L_1$  como

$$\|H(\cdot)\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(q)|dq, \quad \forall H \in W$$

i) Norma  $L_1$  de una función matricial de variable real. En el espacio de funciones  $W = \{H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times m} / H \text{ es función}\}$ , se define la norma  $L_1$  como

$$\|H(\cdot)\|_1 = \max_i \left\| \sum_{j=1}^m |h_{ij}(\cdot)| \right\|_1, \quad \forall H \in W \quad (6.2)$$

donde  $H(\cdot) = [h_{ij}(\cdot)]$  es una matriz en  $\mathcal{M}(r, m)$  cuyos elementos son funciones que aplican números reales en números reales.

### 6.3. Estabilidad a Través de la Matriz de Respuesta Impulsiva

Recuérdese que el modelo de estado invariante en el tiempo  $\{A, B, C, D\}$  tiene una representación externa, o convolucional entrada-salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-q)u(q)dq \quad (6.3)$$

donde la matriz de respuesta impulsiva tiene la forma

$$H(t) = Ce^{At}B1^+(t) + D\delta(t) \quad (6.4)$$



Aunque esta relación es la única que está más relacionada a nuestro desarrollo, los resultados que siguen son aplicables a la respuesta impulsiva de cualquier sistema lineal causal invariante en el tiempo agrupado. Ya que la matriz de respuesta impulsiva muestra las propiedades entrada-salida del sistema para pares entrada-salida admisibles definidos sobre  $(-\infty, \infty)$ , no se supone ninguna condición inicial, es decir, en  $t = -\infty$ . Con relación al modelo de estado, esto determina un criterio de estabilidad de estado cero.

El objetivo global de esta sección es caracterizar la estabilidad entrada-salida del sistema en términos de  $H(\cdot)$ . Adaptando estas ideas a la respuesta de estado, es posible caracterizar la estabilidad interna de un sistema que tiene un modelo de estado.

**Definición 6.2.** Un sistema es llamado BIBO estable si, para toda entrada acotada admisible  $u(t)$  (esto es, para  $\|u(\cdot)\|_\infty < \infty$ ), la respuesta  $y(\cdot)$  es acotada (esto es,  $\|y(\cdot)\|_\infty < \infty$ ).

El siguiente teorema caracteriza la estabilidad BIBO en términos de la norma  $L_1$  de la respuesta impulsiva.

**Teorema 6.1.** Un sistema causal modelado por la ecuación de convolución (6.3) es BIBO estable si y sólo si existe una constante finita  $K$  tal que

$$\|H(\cdot)\|_1 \leq K \tag{6.5}$$

*Demostración.* La prueba considerará sólo el caso simple entrada-simple salida.

*Parte 1.* Supóngase que el sistema es causal y que la Ecuación (6.5) es verdadera. La meta es mostrar que el sistema es BIBO estable, de acuerdo a la Definición 6.2. Sea

$$K = \|H(\cdot)\|_1 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |H(q)|dq = \int_0^{\infty} |H(q)|dq = \infty$$

Entonces la norma sup de la respuesta  $y(\cdot)$  del sistema es, por la Ecuación (6.3):

$$\begin{aligned}\|y(\cdot)\|_\infty &= \sup_t \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(t-q)u(q) dq \right| \leq \sup_t \int_0^{\infty} |H(q)||u(t-q)| dq \\ &\leq \int_0^{\infty} |H(q)| \left[ \sup_t |u(t-q)| \right] dq \leq \|u(\cdot)\|_\infty \int_0^{\infty} |h(q)| dq \\ &= K \|u(\cdot)\|_\infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $\|u(t)\|_\infty$  es finita (de buen comportamiento), entonces  $\|y(\cdot)\|_\infty$  es finita y el sistema es BIBO estable.

*Parte 2.* Nuestro método de prueba es por contradicción: consideremos que el sistema es causal y estable y supongamos que la norma  $L_1$  de  $H(\cdot)$  no es acotada, esto es, que  $\forall K \in \mathbb{R}, \exists t_K = t_K(K) \in \mathbb{R}$  tal que

$$\int_{-\infty}^{t_K} |H(q)| dq > K \quad (6.6)$$

Definiendo apropiadamente una sucesión convergente de entradas, por decir,  $\{u_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty$  y considerando la Ecuación (6.6), es posible construir una sucesión de salidas convergente,  $\{y_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty$  cuyas normas  $L_\infty$  crecen sin límite, esto es, una entrada acotada conduce a una respuesta no acotada.

*Paso 1.* A partir de la Ecuación (6.6) y la causalidad del sistema, existe un  $t_1$  tal que

$$\int_0^{t_1} |H(q)| dq > 1$$

Definamos la entrada acotada

$$u_1(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}[H(t_1 - t)], & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & \text{en otro lugar} \end{cases}$$

donde

$$\operatorname{sgn}(\beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{|\beta|}, & \beta \neq 0 \\ 0, & \beta = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

De este modo, la respuesta a  $u_1(\cdot)$  en el instante  $t_1$  es

$$y_1(t_1) = \int_0^{t_1} H(t_1 - q)u_1(q)dq = \int_0^{t_1} H(q)u_1(t_1 - q)dq = \int_0^{t_1} |H(q)|dq > 1$$

Sin embargo, de la suposición de la estabilidad BIBO,  $\exists K_1 \in \mathbb{R} \forall t \geq t_1$ ,

$$\left| \int_0^t H(t - q)u_1(q)dq \right| < K_1$$

*Paso 2.* De la Ecuación (6.6), dada la  $K_1$  del paso 1, existe un  $t_2 > t_1$  tal que

$$\int_0^{t_2 - t_1} |H(q)|dq > 2 + K_1$$

Con esto en mente, definamos la entrada  $u_2(\cdot)$  como

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \text{sgn}[H(t_2 - t)], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La respuesta a  $u_2(\cdot)$ , debe satisfacer

$$\begin{aligned} y_2(t_2) &= \int_0^{t_2} H(t_2 - q)u_2(q)dq = \int_0^{t_2} H(q)u_2(t_2 - q)dq \\ &= \int_0^{t_2 - t_1} |h(q)|dq + \int_{t_2 - t_1}^{t_2} |H(q)u_1(t_2 - q)|dq \\ &= \int_0^{t_2 - t_1} |H(q)|dq + \int_0^{t_2} H(q)u_1(t_2 - q)dq \\ &\geq 2 + K_1 - K_1 = 2 \end{aligned}$$

donde  $u_1(t_2 - q) = 0$  para  $t_1 < t_2 - q$ . Nuevamente, de la suposición de estabilidad BIBO,  $\forall t > t_2, \exists K_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\left| \int_0^t H(q)u_2(t - q)dq \right| < K_2$$

*Paso 3.* Repitiendo el argumento anterior, un número contablemente infinito de veces, sigue que existe una sucesión de instantes  $t_3, t_4, \dots, t_n, \dots$ , con  $t_j > t_{j-1}$ , y una sucesión de constantes finitas  $K_3, K_4, \dots, K_n, \dots$  tal que

$$(i) \int_0^{t_n - t_{n-1}} |H(q)| dq > n + K_{n-1} \text{ por la no acotabilidad de la norma } L_1 \text{ de } H(\cdot).$$

(ii)  $\forall t > t_{n-1}, \exists K_{n-1}$  tal que

$$\left| \int_0^t H(q) u_{n-1}(t-q) dq \right| < K_{n-1}$$

a partir de la suposición de estabilidad BIBO. Con la  $n$ -ésima entrada entonces definida como

$$u_n = \begin{cases} u_{n-1}(t) & , 0 \leq t \leq t_{n-1} \\ \text{sgn}[H(t_n - t)] & , t_{n-1} < t \leq t_n \\ 0 & , \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (6.8)$$

Sigue que

$$\begin{aligned} y_n(t_n) &= \int_0^{t_n} H(q) u_n(t_n - q) dq \\ &= \int_0^{t_n - t_{n-1}} |H(q)| dq + \int_{t_n - t_{n-1}}^{t_n} H(q) u_{n-1}(t_n - q) dq \\ &= \int_0^{t_n - t_{n-1}} |H(q)| dq + \int_0^{t_n} H(q) u_{n-1}(t_n - q) dq \\ &> n + K_{n-1} - K_{n-1} = n \end{aligned}$$

*Paso 4.* Definamos la entrada acotada

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

Claramente,  $u(t)$  existe, desde que  $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  es constante en el último de los casos. Evaluamos  $u(t)$  observando que  $u_{n+1}(t), u_{n+2}(t), \dots$  son todas idénticas a  $u_n(t)$  sobre

el intervalo  $(-\infty, t_n]$ , esto es,

$$u(t) = u_n(t), \quad \forall t < t_n$$

Ahora, obsérvese que la respuesta  $y(\cdot)$  a  $u(\cdot)$  debe satisfacer

$$y(t_n) = \int_0^{t_n} H(q)u(t_n - q)dq = \int_0^{t_n} H(q)u_n(t_n - q)dq > n$$

De aquí,  $u(\cdot)$  es una entrada acotada que satisface  $u(t) = 0$  para  $t \leq 0$  que produce una salida no acotada, esto es,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) = \infty$ . Pero esto contradice la hipótesis de estabilidad BIBO, y  $\int_0^{\infty} |H(t)|dt$  es finita, como debía mostrarse.  $\square$

**Corolario 6.1.** *Un sistema causal con respuesta impulsiva  $H(t)$  es BIBO estable si y sólo si existe una constante simple finita  $K$  tal que*

$$\|y(\cdot)\|_{\infty} \leq K\|u(\cdot)\|_{\infty} \tag{6.9}$$

*para todos los pares entrada-salida relacionados por la integral de convolución de la Ecuación (6.3).*

*Demostración.* Si el sistema es BIBO estable, entonces la norma  $L_1$  de la respuesta impulsiva es finita. Entonces, con  $K = \|H(\cdot)\|_1$  la Ecuación (6.7) sigue. (Esta Ecuación 6.9, por supuesto, es verdadera en general, pero no con  $K$  finita.) Recíprocamente, si la Ecuación (6.9) es cierta, entonces la estabilidad BIBO está garantizada.  $\square$

*Nótese que  $K$  puede ser tomada como la norma  $L_1$  de la matriz de respuesta impulsiva.*

## 6.4. Estabilidad a Través de la Matriz Función de Transferencia

*En este capítulo se supone que la matriz función de transferencia  $H(s)$  representa a un sistema lineal, agrupado, invariante en el tiempo, y causal, que tiene asociado un modelo de estado de entrada cero, aunque esto no es una suposición crítica. Lo que es crítico es que cada elemento de  $H(s)$  sea una función racional propia en  $s$ . Como  $H(s)$  es la transformada lateral de Laplace de la matriz de respuesta impulsiva  $H(t)$ , la estabilidad BIBO del sistema debería tener alguna caracterización especial en términos de los atributos de  $H(s)$ . Los atributos cruciales de  $H(s)$  para la caracterización son las ubicaciones de los polos de  $H(s)$ . Específicamente,  $H(s)$  representa el comportamiento entrada-salida de un sistema BIBO estable si y sólo si todos los polos de  $H(s)$  yacen en el semiplano complejo abierto izquierdo.*

*Para probar esta afirmación, asumamos que cada elemento de  $H(s)$  es una función racional propia. Entonces*

$$H(s) = H(\infty) + \frac{P(s)}{\psi(s)}$$

*donde  $P(s)$  es una matriz polinomial y  $\psi(s)$  es un polinomio cuyos ceros son los polos de  $H(s)$ . Se puede pensar de  $\psi(s)$  como el mínimo común múltiplo de los denominadores de los elementos de  $H(s)$ , aunque esto no es cierto en general. Ahora, sea  $u(s)$  la transformada de Laplace de cualquier entrada acotada  $u(t)$ . Nótese que  $\mathcal{L}^{-1}\{H(\infty)u(s)\} = H(\infty)u(t)$ , la cual es acotada porque  $u(t)$  es acotada. De aquí, sin pérdida de generalidad, nuestras consideraciones de estabilidad pueden enfocarse sobre en el término  $P(s)/\psi(s)$ , el cual es una matriz racional estrictamente propia.*

*Al tratar de interpretar la acotabilidad de la norma  $L_1$  de  $H(t)$  con relación a  $P(s)/\psi(s)$ , supóngase que*

$$\psi(s) = (s - \lambda_1)^{\hat{m}_1} (s - \lambda_2)^{\hat{m}_2} \dots (s - \lambda_{\hat{\sigma}})^{\hat{m}_{\hat{\sigma}}}$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\hat{\sigma}}$  son los polos distintos de  $H(s)$  y los  $\hat{m}_i$  son las multiplicidades apropiadas. El adaptar la expansión en fracciones parciales mencionadas en el Teorema A-3.10 a nuestras necesidades implica

$$\frac{P(s)}{\psi(s)} = \sum_{i=1}^{\hat{\sigma}} \sum_{j=1}^{\hat{m}_i} \frac{P_i^j}{(s - \lambda_i)^j} \quad (6.10)$$

donde

$$P_i^j = \frac{1}{(\hat{m}_i - j)} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{\hat{m}_i - j}}{ds^{\hat{m}_i - j}} \left[ (s - \lambda_i)^{\hat{m}_i} \frac{P(s)}{\psi(s)} \right]$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir  $P_i^j \neq [0], \forall i, j$ ; si cualquiera de estas matrices es cero, el término correspondiente no tiene efecto sobre la estabilidad del sistema. Como la condición sobre la norma  $L_1$  de  $H(t)$  trata con funciones del tiempo, se hace necesario tomar la transformada inversa de la Ecuación (6.10) para representar  $H(t)$  como una combinación lineal de funciones del tiempo independientes (exponenciales) parametrizadas por los polos de  $H(s)$ , esto es,

$$H(t) = \sum_{i=1}^{\hat{\sigma}} \sum_{j=1}^{\hat{m}_i} P_i^j \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i t) 1^+(t)$$

De esta descomposición, la norma  $L_1$  de  $H(t)$  es claramente acotada siempre que  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ; en cuyo caso

$$\begin{aligned} \|H(\cdot)\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^{\hat{\sigma}} \sum_{j=1}^{\hat{m}_i} P_i^j \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i \cdot) 1^+(\cdot) \right\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\hat{\sigma}} \sum_{j=1}^{\hat{m}_i} \left\| P_i^j \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i \cdot) 1^+(\cdot) \right\|_1 \end{aligned}$$

Como

$$\left\| \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i \cdot) 1^+(\cdot) \right\|_1 \leq K_i^j < \infty, \quad \forall i, j,$$

se tiene que

$$\|H(\cdot)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{\hat{\sigma}} \sum_{j=1}^{\hat{m}_i} K_i^j < \infty$$

De aquí, una condición suficiente para la estabilidad BIBO es que todos los polos de  $H(s)$  (con residuos no nulos) se encuentren en el semiplano abierto izquierdo complejo.

Para ver la necesidad de esta condición, supóngase que  $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ . Si esta propiedad es suficiente para la inestabilidad, entonces  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  es necesaria para estabilidad BIBO. Para verificar esto, procedemos como sigue. Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $\text{Re}(\lambda_1) \geq \text{Re}(\lambda_i)$ , para toda  $i$ ; siempre es posible reordenar los polos de  $H(s)$  para lograr esto. Definimos el escalar  $\beta$  como el mínimo de los valores absolutos no nulos de los elementos de  $P_1^1$ , esto es,

$$\beta = \min_{k,m} [|P_1^1(k,m)| \neq 0]$$

Además, sea  $E^q$  un operador proyección definido por

$$E^q H(t) = \begin{cases} H(t), & \text{para } t \leq q \\ 0, & \text{para } t > q \end{cases} \quad (6.11)$$

Ahora considérese la norma  $L_1$  de  $E^q H(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \|E^q H(t)\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^{\hat{\sigma}} \sum_{j=1}^{m_i} P_i^j E^q \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i t) 1^+(t) \right\|_1 \\ &\geq \beta \|E^q \exp(\lambda_1 t) 1^+(t)\|_1 \end{aligned}$$

La desigualdad se obtiene debido a que la norma  $L_1$  de una matriz es el máximo de las normas  $L_1$  de las sumas de los valores absolutos de los elementos de cada fila. La norma  $L_1$  de la matriz es mayor o igual que la norma  $L_1$  de uno de sus elementos. Sin embargo,  $\lim_{q \rightarrow \infty} \|E^q \exp(\lambda_1 t)\|_1 = \infty$ , indicando la no acotabilidad de  $\|H(\cdot)\|_1$ . De aquí, para una matriz función de transferencia  $H(s)$ , si  $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$  para alguna  $i$  donde  $\lambda_i$  es un polo de  $H(s)$ , entonces el sistema no es BIBO estable. En consecuencia,  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  es una condición necesaria para la estabilidad BIBO del modelo de matriz función de transferencia.



*Estas afirmaciones anteriores se formalizan en el siguiente teorema.*

**Teorema 6.2.** *Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad BIBO del de modelo matriz función de transferencia  $H(s)$  con polos  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es que  $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i$ .*

*Como ya se ha visto, el modelo matriz función de transferencia es un modelo entrada-salida que carece del conocimiento de las condiciones iniciales presentes en el sistema. Por otra parte, el modelo de estado establece una descripción tanto interna como externa del sistema y cuenta con información explícita concierne a las condiciones iniciales. En la siguiente sección se adaptan las condiciones anteriores para la estructura del modelo de estado usual.*

## 6.5. Estabilidad BIBS y BIBO a Través del Modelo de Estado

*Las condiciones para la estabilidad BIBO en el contexto del modelo de estado son halladas en un sistema interno equivalente de estabilidad BIBO: BIBS, o estabilidad de entrada acotada, estado acotado.*

**Definición 6.3.** *Un modelo de estado  $\{A, B, C, D\}$  que tiene condiciones iniciales arbitrarias es llamado estable de entrada acotada y estado acotado (BIBS) si, para cualquier entrada acotada  $u(t)$ , la respuesta de estado*

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-q)]Bu(q) dq \quad (6.12)$$

*es acotada.*

*Para la representación interna del sistema, esta definición casi duplica la definición de estabilidad BIBO (Definición 6.2). La peculiaridad interesante radica en la estipulación de una condición inicial arbitraria, es decir,  $x(0)$ . Esto significa*

que nuestras consideraciones de estabilidad deben dar razón de las excitaciones de todos los modos del sistema, esto es, la respuesta de estado de entrada cero así como la respuesta de estado de estado cero. La arbitrariedad de la condición inicial y el requerimiento de respuestas acotadas sobre la entera clase de entradas acotadas excluye las respuestas de entrada cero y de estado cero cancelando una a otra en cualquier forma genérica. De aquí, el modelo de estado es BIBS estable si y sólo si tanto la respuesta de entrada cero y la respuesta de estado de estado cero tienen normas  $L_\infty$  finitas. El último objetivo es caracterizar la finitud de estas normas en términos de los valores propios de  $A$  y de la controlabilidad (o la carencia de ella) de ciertos modos dirigidos.

Iniciamos la discusión considerando la parte de respuesta de estado cero de la Ecuación (6.12):

$$\text{¿Cuándo } x(t) = \int_0^t e^{A(t-q)} Bu(q) dq \text{ tiene norma } L_\infty \text{ finita?}$$

Observando que  $\exp[At]B1^+(t)$  es la respuesta de estado impulsiva, una condición necesaria y suficiente se vuelve  $\|\exp[A \cdot]B1^+(\cdot)\|_1 < \infty$  por el Teorema 6.1. Establezcamos esto como la siguiente proposición.

**Proposición 6.1.** Una condición necesaria y suficiente para que la respuesta de estado de estado cero tenga una norma  $L_\infty$  finita es que  $\|\exp[A \cdot]B1^+(\cdot)\|_1 < \infty$ .

Tomando la transformada de Laplace de  $\exp[At]B1^+(t)$  y utilizando la expansión en fracciones parciales que resulto en la Sección 3.2.6 se obtiene

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1}B = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_i^j B}{(s - \lambda_i)^j} \quad (6.13)$$

donde  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma\}$  son los valores propios distintos de  $A$ , los  $m_i$  son sus respectivas multiplicidades en el polinomio mínimo  $\psi_A(s)$  de  $A$ , y los  $R_i^j$  son las matrices

residuo definidas en la forma usual, es decir,

$$R_i^j = \frac{1}{(m_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} [(s - \lambda_i)^{m_i} (s\mathbb{I} - A)^{-1}]$$

De la Ecuación (6.13), obtenemos la siguiente proposición como un corolario directo al Teorema 6.2.

**Proposición 6.2.** *Las condiciones necesarias y suficientes para que la respuesta de estado de estado cero sea acotada son (i)  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  para toda  $i$  para la cual  $R_i^j B \neq [0]$  y (ii)  $R_i^j B = [0]$  para toda  $j$  si  $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ .*

La condición (ii) significa que cualquier modo en el semiplano cerrado derecho complejo debe ser no controlable.

Después consideramos la respuesta de estado de entrada cero  $\exp[At]x(0)$  para  $x(0)$  arbitraria. ¿Cuándo es  $\|\exp[A \cdot]x(0)\|_\infty < \infty$ ? Tomando la transformada de Laplace de  $\exp[At]x(0)$  expandiendo en fracciones parciales, se obtiene

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1}x(0) = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_i^j x(0)}{(s - \lambda_i)^j} \quad (6.14)$$

Como la estabilidad es una condición de clase, esto es, la propiedad es mantenida sobre la entera clase de entradas acotadas y la clase entera de condiciones iniciales, asumimos en el análisis por venir que  $R_i^j x(0) \neq 0$ . Para determinar condiciones necesarias y suficientes para  $\|\exp[A \cdot]x(0)\|_\infty < \infty$ , tomamos la transformada inversa de la Ecuación (6.14) y analizaremos la función del tiempo asociada. Para la suficiencia consideramos

$$\begin{aligned} \|\exp[At]x(0)\|_\infty &= \left\| \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{m_i} R_i^j x(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i t) 1^+(t) \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{m_i} \|R_i^j x(0)\| \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i t) 1^+(t) \quad (6.15) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{m_i} \|R_i^j x(0)\| \left\| \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp(\lambda_i t) 1^+(t) \right\|_\infty \end{aligned}$$

donde  $\|R_i^j x(0)\|$  es la norma vectorial Euclidiana usual en  $\mathbb{R}^n$ . Es claro que  $\|\exp(\lambda_i t)1^+(t)\|_\infty < \infty$  siempre que  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ : si  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , entonces las funciones son exponenciales decrecientes o sinusoides amortiguadas exponencialmente; si  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ , entonces las funciones son constantes o sinusoides no amortiguadas las cuales son acotadas. De este modo, condiciones suficientes para la acotabilidad son que (i)  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , y (ii) si  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ , entonces  $m_i$  (la multiplicidad de  $\lambda_i$  en el polinomio mínimo) debe ser la unidad, esto es,  $m_i = 1$ ; de otro modo será una función de respuesta como la rampa, proporcional a  $t^j 1^+(t)$ ,  $j \geq 1$ , o una respuesta sinusoidal linealmente creciente proporcional a  $t^j \sin(\omega t + \phi) 1^+(t)$ .

La necesidad de estas condiciones sigue de la consideración de condiciones suficientes para la inestabilidad. Hay dos casos: (i)  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  y (ii)  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ . Si  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  para algún  $i$ , entonces

$$\begin{aligned} \|E^q \exp[At]x(0)\|_\infty &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} R_i^j x(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} E^q \exp(\lambda_i t) 1^+(t) \right\|_\infty \\ &\geq \beta \|E^q \exp(\lambda_i t) 1^+(t)\|_\infty \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde los operadores de proyección  $E^q$  están definidos como en la Ecuación (6.11) y donde  $\beta$  es el mínimo de los valores absolutos de los elementos no nulos de  $R_i^1 x(0)$ . El que  $\lim_{q \rightarrow \infty} \|E^q \exp(\lambda_i t) 1^+(t)\|_\infty = \infty$ , establece la inestabilidad.

Ahora supongamos que  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  y que la matriz  $R_i^2$  existe y  $R_i^2 x(0) \neq 0$ . En este caso la Ecuación (6.16) se reduce a

$$\|E^q \exp[At]x(0)\|_\infty \geq \beta \|E^q t \exp(\lambda_i t) 1^+(t)\|_\infty$$

donde  $\beta$  es el mínimo de los valores absolutos de los elementos no nulos de  $R_i^2 x(0)$  y  $t \exp(\lambda_i t) 1^+(t)$  es proporcional ya sea a  $t 1^+(t)$  o a  $t \exp[\text{Re}(\lambda_i)] 1^+(t)$ . Nuevamente,  $\lim_{q \rightarrow \infty} \|E^q \exp(\lambda_i t) 1^+(t)\|_\infty = \infty$ , estableciéndose la inestabilidad.

Estas condiciones dan lugar a lo siguiente.

**Proposición 6.3.** *Las condiciones necesarias y suficientes para la acotabilidad de la respuesta de estado de entrada cero son que (i)  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  para todos los valores propios  $\lambda_i$  de  $A$  y (ii) si  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ , entonces el orden del factor asociado en el polinomio mínimo de  $A$  debe ser 1.*

*La combinación de las Proposiciones 6.2 y 6.3 produce el siguiente teorema.*

**Teorema 6.3.** *Las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad BIBS del modelo de estado invariante en el tiempo usual  $\{A, B, C, D\}$  son que (i)  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  para todos los valores propios  $\lambda_i$  de  $A$ , (ii) si  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ , entonces el orden del factor asociado en el polinomio mínimo de  $A$  debe ser 1, y (iii) si  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ , entonces el modo debe ser incontrolable.*

*Con esta caracterización de estabilidad BIBS en términos de los valores propios de  $A$  y la controlabilidad de los modos dirigidos, el Teorema 6.3 permite una caracterización de la estabilidad BIBO sobre todas las posibles condiciones iniciales en adición a la clase de entradas acotadas.*

**Corolario 6.2.** *Si el modelo de estado invariante en el tiempo usual es BIBS estable, entonces es BIBO estable.*

**Corolario 6.3.** *Si el modelo de estado invariante en el tiempo usual no es BIBS estable, entonces es BIBO estable si y sólo si todos los modos inestables se encuentran en el subespacio inobservable, esto es, si  $\lambda_i$  representa un modo inestable, entonces el modelo es BIBO estable si y sólo si  $CR_i^j = [0]$  para toda  $j$ .*

## 6.6. Estabilidad Asintótica de la Trayectoria de Estado

*Otra importante noción de estabilidad concerniente a los sistemas lineales es la de estabilidad asintótica de la respuesta de estado a entrada cero. La*

estabilidad asintótica requiere no solamente que la trayectoria de estado  $x(t)$  permanezca acotada, sino que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

**Definición 6.4.** La ecuación dinámica de estado invariante en el tiempo lineal a entrada cero  $\dot{x} = Ax$ , es asintóticamente estable si  $\|x(\cdot)\|_\infty < \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  para condiciones iniciales arbitrarias.

*Es directo mostrar que una condición suficiente para que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$  es que  $\text{Re}[\lambda_i] \geq 0$  para algún valor propio  $\lambda_i$  de  $A$ . Esto establece el siguiente teorema.*

**Teorema 6.4.** La ecuación dinámica de estado  $\dot{x} = Ax$  es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de  $A$  tienen una parte real estrictamente menor que cero.

## 6.7. Estabilidad en los Sistemas en Tiempo Discreto

Los teoremas para los sistemas en tiempo discreto se obtienen definiendo la relación entre plano  $s$  del mundo en tiempo continuo y el plano  $z$  del mundo en tiempo discreto. El eje imaginario del plano  $s$  aplica en el círculo unitario del plano  $z$  bajo la transformación  $z = e^s$ . El semiplano abierto izquierdo aplica en el interior del círculo unitario, y el semiplano abierto derecho en el exterior del disco unitario. Los teoremas acerca de la estabilidad de los sistemas en tiempo continuo se construyeron sobre la ubicación de los valores propios en el plano complejo  $s$ . Las extensiones directas al mundo en tiempo discreto resultan simplemente trasladando las ubicaciones de estos polos.

**Teorema 6.5.**  $x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k]$  es BIBS estable si y sólo si (i) todos los valores propios de  $A$  se encuentran en el disco unitario cerrado, (ii) los valores propios sobre el disco unitario tienen multiplicidad 1 en el polinomio mínimo de  $A$ , y (iii) los modos en el círculo unitario son incontrolables.

Dado que  $A^k$  tiene la descomposición en modos matriciales dirigidos usual, la condición (iii) requiere que  $R_i B = [0]$  para tales modos.

**Teorema 6.6.**  $x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k]$  es BIBO estable si es BIBS estable.

**Teorema 6.7.** Si  $x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k]$  no es BIBS estable, entonces es BIBO estable si y sólo si todos los modos inestables se encuentran en el subespacio inobservable del par  $(C, A)$ .

**Teorema 6.8.** El modelo  $x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k]$  es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de  $A$  tienen magnitudes estrictamente menores que la unidad.

## 6.8. Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

Esta sección amplía el estudio de la estabilidad asintótica de la ecuación dinámica de estado de entrada cero  $\dot{x} = Ax$  desde el punto de vista de Lyapunov. Recuérdese que  $\dot{x} = Ax$  es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de  $A$  se encuentran en el semiplano abierto izquierdo complejo. En adelante el término matriz de estabilidad se referirá a una matriz  $A$  con todos sus valores propios en el semiplano abierto izquierdo complejo.

Sigue de la discusión en las secciones previas que un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo modelado por la ecuación

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.17)$$

es asintóticamente estable si y sólo si la solución a la Ecuación (6.17) decae a cero conforme  $t \rightarrow \infty$  para cualquier estado inicial  $x_0$ . Podemos ver al vector  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  como el vector posición de un punto que se mueve en el espacio de estado  $\mathbb{R}^n$ . En un sistema asintóticamente estable modelado por la Ecuación (6.17), este punto converge al origen de  $\mathbb{R}^n$ . Podemos argüir que si una trayectoria  $x(t)$  converge al origen

del espacio de estado, debe poderse hallar una familia de superficies anidadas descritas por  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ ,  $c \geq 0$ , tal que valores monótonamente decrecientes de  $c$  correspondan a superficies que se contraigan progresivamente hacia el origen con la superficie límite  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , el origen  $x = 0$ . Además, a lo largo de toda trayectoria de (6.17), el parámetro  $c$  debería decrecer sostenidamente. A continuación damos algunas definiciones e introducimos alguna notación adicional, las cuales emplearemos en la discusión subsiguiente.

Sea  $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  una región compacta que contiene el origen  $x = 0$  en su interior.

**Definición 6.5.** Se dice la función  $V = V(x)$  es positiva semidefinida en  $S$ , con respecto a  $x = 0$ , si

1.  $V$  es continuamente diferenciable, esto es,  $V \in \mathcal{C}^1$ ,
2.  $V(0) = 0$ ,
3.  $V(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in S$ .

**Definición 6.6.** Se dice que la función  $V = V(x)$  es positiva definida en  $S$ , con respecto a  $x = 0$  si

1.  $V \in \mathcal{C}^1$ ,
2.  $V(0) = 0$ ,
3.  $V(x) > 0$ ,  $\forall x \in S \setminus \{0\}$ .

Las funciones negativa semidefinida y negativa definida se definen de modo similar invirtiendo los signos de desigualdad en los numerales 3 de las definiciones anteriores.

Hay muchas funciones que satisfacen las definiciones anteriores. En el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos una clase de ellas es particularmente



útil. Esta es la forma cuadrática positiva definida, un nombre asociado a una familia anidada de elipses y sus extensiones a espacios de dimensión superior (elipsoides para  $n = 3$ , e hiperelipsoides para  $n \geq 4$ ). Aquí consideramos la siguiente forma cuadrática:

$$V(x) = x^t P x,$$

donde  $P$  es una matriz simétrica real de orden  $n \times n$ . La derivada respecto al tiempo de  $V(x(t))$  evaluada sobre una solución de  $\dot{x} = Ax$  es

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= \dot{V}(x(t)) \\ &= \dot{x}^t(t) P x(t) + x^t(t) P \dot{x}(t). \end{aligned}$$

La sustitución  $\dot{x} = Ax$  y  $\dot{x}^t = x^t A^t$  en esta ecuación resulta en

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^t A^t P x + x^t P A x \\ &= x^t (A^t P + P A) x. \end{aligned}$$

Sea

$$Q = -(A^t P + P A)$$

Entonces,

$$\dot{V} = -x^t Q x. \tag{6.18}$$

Ahora podemos establecer y probar el siguiente teorema concerniente a la estabilidad del sistema  $\dot{x} = Ax$ , o, equivalentemente, la matriz  $A \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 6.9** (A.M. Lyapunov, 1892). *El sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(t_0) = x_0$  es asintóticamente estable si y sólo si para toda matriz  $Q$  real simétrica positiva definida la solución  $P$  de la ecuación matricial continua de Lyapunov,*

$$A^t P + P A = -Q \tag{6.19}$$

es también real simétrica positiva definida.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Probamos la necesidad para la estabilidad asintótica por contradicción. Tenemos  $-x^t Qx < 0, \forall x \neq 0$ . Asumimos que  $A$  es una matriz asintóticamente estable y que para algún  $x_0$  no nulo tenemos  $x_0^t P x_0 \leq 0$ . De la discusión anterior al teorema, y en particular de (6.18), sigue que

$$\frac{d}{dt} (x^t(t) P x(t)) = -x^t(t) Q x(t) < 0.$$

Lo anterior significa que  $V(x(t)) = x^t(t) P x(t)$  decrece en las trayectorias del sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por otra parte, debido a que  $A$  es asintóticamente estable, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

De aquí,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^t(t) P x(t) = \lim_{x(t) \rightarrow 0} x^t(t) P x(t) = 0.$$

De este modo, llegamos a una contradicción (debía cumplirse  $x(t)^t P x(t) < 0, \forall t > t_0$ ). Esto completa la prueba de esta primera parte del teorema que establece que la estabilidad asintótica de  $A$  implica que para cualquier matriz real simétrica positiva definida  $Q$  la solución  $P$  de la ecuación  $A^t P + P A = -Q$  es real simétrica positiva definida

( $\Leftarrow$ ) Probamos la suficiencia, también por contradicción. Asumimos que

$$x^t P x > 0 \text{ y } -x^t Q x < 0, \forall x \neq 0,$$

y que la matriz  $A$  no es asintóticamente estable. Esto significa que la solución de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ,  $x_0 \neq 0$ , la cual tiene la forma  $x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$ , tiene una cota inferior más allá del origen  $x = 0$ . De este modo, hay una constante  $b > 0$  tal que

$$x^t(t) Q x(t) > b > 0, \forall t > t_0.$$

Integrando  $\frac{d}{dt}(x^t(t)Px(t)) = -x^t(t)Qx(t)$  se obtiene

$$x^t(t)Px(t) = x^t(t_0)Px(t_0) + \int_{t_0}^t (-x^t(s)Qx(s))ds.$$

Tomando en cuenta que  $-x^t(t)Qx(t) < -b < 0$  para toda  $t > t_0$ , obtenemos para  $t > t_0$ ,

$$\begin{aligned} x^t(t)Px(t) &= x^t(t_0)Px(t_0) + \int_{t_0}^t (-x^t(s)Qx(s))ds \\ &< x^t(t_0)Px(t_0) - b(t - t_0). \end{aligned}$$

Lo anterior implica que para una  $t$  suficientemente grande debería tenerse  $x^t(t)Px(t) < 0$ , lo cual contradice la suposición que  $x^t(t)Px(t) > 0$ . Esto significa que  $A$  debe ser asintóticamente estable, y la prueba está completa.  $\square$

*Desde otra perspectiva, si  $P$  es positiva definida y  $\dot{V}(t) < 0$ , entonces  $V[x(t)] = x^t(t)Px(t)$  debe decrecer a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ . De este modo,  $x(t) = e^{At}x(0) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .*

**Ejemplo 6.1.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

y  $Q = \mathbb{I}_2$ . Resolvemos la ecuación de Lyapunov  $A^tP + PA = -Q$  para  $P$ . Asumimos que  $P$  tiene la forma

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = P^t.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
 A^t P + P A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2p_2 & -p_3 + p_1 - 2p_2 \\ -p_3 + p_1 - 2p_2 & 2p_2 - 4p_3 \end{bmatrix} \\
 &= -Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Resolviendo las correspondientes ecuaciones lineales se tiene

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La matriz solución  $P$  es positiva definida. De aquí, la matriz  $A$  debe tener sus valores propios en el semiplano abierto izquierdo. Se puede verificar que los valores propios de  $A$  están ambos localizados en  $-1$ .  $\triangleleft$

**Definición 6.7.** Una función positiva definida  $V(x)$  cuya derivada respecto del tiempo evaluada sobre las soluciones del sistema  $\dot{x} = Ax$  es negativa definida (o negativa semidefinida) es llamada una función de Lyapunov para este sistema.

*El teorema de Lyapunov nos da una condición suficiente y necesaria para la estabilidad asintótica de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo. Para verificar si una matriz dada  $A$  es o no asintóticamente estable, es suficiente tomar una matriz  $Q$  arbitraria real simétrica positiva definida, resolver la ecuación  $A^t P + P A = -Q$  para  $P$  real simétrica y comprobar si la  $P$  obtenida es positiva definida o no. Si  $P > 0$ , entonces  $A$  es asintóticamente estable. Si  $P$  no es positiva definida, entonces  $A$  no puede ser asintóticamente estable. Debido a que  $Q$  puede ser una matriz real simétrica positiva definida arbitraria,  $Q = \mathbb{I}_n$ , la matriz identidad  $n \times n$ , es una buena elección. Es importante notar lo que no se debería hacer, como el*

siguiente ejemplo muestra, en primer lugar escoger una matriz  $P$  y entonces calcular  $Q$  a partir de la ecuación  $A^t P + PA = -Q$ .

**Ejemplo 6.2.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

la cual es asintóticamente estable. Sea

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 > 0,$$

Entonces,

$$Q = -(A^t P + PA) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

la cual es indefinida. De este modo, a menos que  $Q$  se vuelva definida, nada se puede inferir acerca de la estabilidad asintótica a partir del teorema de Lyapunov si empezamos con  $P$  y luego calculamos  $Q$ .  $\triangleleft$

Ahora bien, a fin de determinar la definición positiva de  $P$ , es necesario resolver la ecuación matricial de Lyapunov para  $P$ . Esto puede ser logrado en una manera directa usando las matemáticas de los productos de Kronecker. Para este fin, definimos el producto de Kronecker de dos matrices  $A = [a_{ij}]$  de orden  $m \times n$  y  $B = [b_{ij}]$  de orden  $p \times q$  como la matriz  $mp \times nq$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Es directo mostrar que el producto de Kronecker satisface las propiedades

(i)  $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$  y (ii)  $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$ . También, dada una matriz  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  cuyas columnas son  $a_1$  a  $a_n$ , definimos  $\text{vec}(A) =$

$\text{col}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ , esto es, el operador  $\text{vec}$  construye un vector columna a partir de la matriz  $A$  apilando las columnas en orden,  $a_1$  en la parte superior, y  $a_n$  en la parte inferior. Una propiedad muy útil del operador  $\text{vec}$  es que

$$\text{vec}(ABC) = C^t \otimes \text{Avec}(B) \quad (6.21)$$

Esta es la propiedad de la solución de la ecuación matricial de Lyapunov. En particular, obsérvese que  $A^t P + PA = A^t P \mathbb{I} + \mathbb{I} P A = -Q$ . Tomando el  $\text{vec}$  de ambos lados se obtiene la expresión

$$[\mathbb{I} \otimes A^t + A^t \otimes \mathbb{I}] \text{vec}(P) = -\text{vec}(Q) \quad (6.22)$$

que puede ser resuelta para  $\text{vec}(P)$  y de este modo para  $P$  por eliminación Gaussiana, siempre que  $[\mathbb{I} \otimes A^t + A^t \otimes \mathbb{I}]$  sea no singular. Se puede probar que esta matriz es no singular si y sólo si  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  para todos los valores propios  $\lambda_i$  de  $A$ . Claramente, si  $A$  es una matriz de estabilidad, esta condición es satisfecha. De aquí, existe una única solución siempre que  $A$  sea una matriz de estabilidad. Este resultado puede ser obtenido razonando de otro modo, como en el siguiente teorema.

**Teorema 6.10.** Si  $A$  es una matriz de estabilidad, entonces una solución de la ecuación matricial de Lyapunov es

$$P = \int_0^\infty \exp(A^t q) Q \exp(Aq) dq \quad (6.23)$$

*Demostración.* La integral debe existir porque  $A$  es una matriz de estabilidad. Entonces la sustitución directa produce

$$\begin{aligned} A^t P + PA &= \int_0^\infty A^t e^{A^t q} Q e^{Aq} dq + \int_0^\infty e^{A^t q} Q e^{Aq} A dq \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{A^t q} Q e^{Aq}] dq = e^{A^t q} Q e^{Aq} \Big|_0^\infty = -Q \end{aligned}$$

lo que significa que  $P$  es en realidad una solución a la ecuación matricial de Lyapunov. □

**Corolario 6.4.** *Si  $A$  es una matriz de estabilidad, entonces la ecuación matricial de Lyapunov tiene una solución única para toda  $Q$ .*

*Demostración.* Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos soluciones que satisfacen la ecuación matricial de Lyapunov  $A^t P + PA = -Q$ . Entonces, sustrayendo las dos ecuaciones se obtiene

$$A^t(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A = [0]$$

Multiplicando por la izquierda por  $e^{A^t t}$  y por la derecha por  $e^{At}$  se obtiene

$$\begin{aligned} e^{A^t t}[A^t(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A]e^{At} \\ = \frac{d}{dt}e^{A^t t}[P_1 - P_2]e^{At} = [0] \end{aligned}$$

De este modo,  $e^{A^t t}[P_1 - P_2]e^{At}$  es una matriz constante para toda  $t$ . Evaluar esta expresión en  $t = 0$  y  $t = T$  implica que

$$e^{A^t T}[P_1 - P_2]e^{AT} = P_1 - P_2$$

Ahora, como  $A$  es una matriz de estabilidad, el límite del lado izquierdo conforme  $T \rightarrow \infty$  es  $[0]$ . Por lo tanto,  $P_1 - P_2 = [0]$  o  $P_1 = P_2$ . □

## 7 CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS DE UN SISTEMA NO LINEAL

Presentamos como un ejemplo de aplicación la estabilización del punto de operación inestable del sistema no lineal carrito-péndulo invertido (por brevedad, sistema CPI) mediante estimación y realimentación lineal de sus estados. Las matrices de realimentación y del observador fueron obtenidas para la versión linealizada del sistema CPI que fué linealizado en el Ejemplo 2.7 de la página 45.

### 7.1. El Sistema CPI

En la Figura 7.1 se muestra el sistema CPI. con el que fueron realizadas nuestras experiencias. Con el propósito de simplificar las ecuaciones del modelo matemático del sistema se consideró despreciable el peso de la varilla.

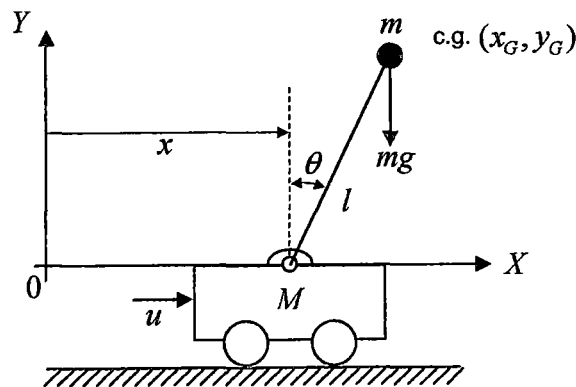


Figura 7.1: El sistema CPI

Obtuvimos ecuaciones del movimiento del sistema CPI empleando las ecuaciones de la Dinámica de Lagrange como sigue.



Las expresiones para las energías potencial  $P(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$  y cinética  $K(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$  del sistema CPI son, respectivamente,

$$K(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\{(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-l\dot{\theta} \sin \theta)^2\},$$

y

$$P(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = mgl \cos \theta.$$

Al definir el Lagrangiano  $L$  del sistema como  $L = K - P$  y emplear las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= u, \\ y \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \end{aligned}$$

se obtuvieron las ecuaciones

$$(M + m)\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} = u \quad (7.1)$$

$$y \quad m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (7.2)$$

Reordenando, se pudo escribir lo siguiente:

$$\ddot{x} = \frac{u + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \cos \theta}{M + m - m \cos^2 \theta}$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g \sin \theta - u \cos \theta - ml \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2}{Ml + ml - ml \cos^2 \theta}$$

Definiendo las variables de estado  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = x$ , y  $x_4 = \dot{x}$ , y las variables de salida  $y_1 = x_1 = \theta$ , y  $y_2 = x_3 = x$ , se obtuvo la expresión matemática que

caracteriza al sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

con

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(M + m)g \sin x_1 - u \cos x_1 - ml \sin x_1 \cdot \cos x_1 \cdot x_2^2}{Ml + ml - ml \cos^2 x_1} \\ x_4 \\ \frac{u + ml \sin x_1 \cdot x_2^2 - mg \sin x_1 \cdot \cos x_1}{M + m - m \cos^2 x_1} \end{bmatrix}$$

Con  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,  $M = 2 \text{ kg}$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , se obtuvo:

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{20.601 \sin x_1 - u \cos x_1 - 0.05 \sin x_1 \cdot \cos x_1 \cdot x_2^2}{1.05 - 0.05 \cos^2 x_1} \\ x_4 \\ \frac{u + 0,05 \sin x_1 \cdot x_2^2 - 0.981 \sin x_1 \cdot \cos x_1}{2,1 - 0.1 \cos^2 x_1} \end{bmatrix}$$

### 7.1.1. El Modelo Linealizado

El modelo linealizado alrededor del punto de operación  $P_o = (x_o(t), u_o(t)) = (0(t), 0(t))$  [Estado inicial:  $x_o(0) = 0$ ], obtenido mediante la expansión en serie de Taylor de un paso, para  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $M = 2 \text{ kg}$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ , y  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases},$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{P_0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}^t$$

y  $(x(t), u(t))$  es un punto de operación suficientemente cercano a  $P_0$ .

## 7.2. El Controlador Lineal

Se realimentó al sistema linealizado con la señal  $Fx$ . La Figura 7.2 muestra el diagrama de bloques del sistema linealizado realimentado (sistema LR).

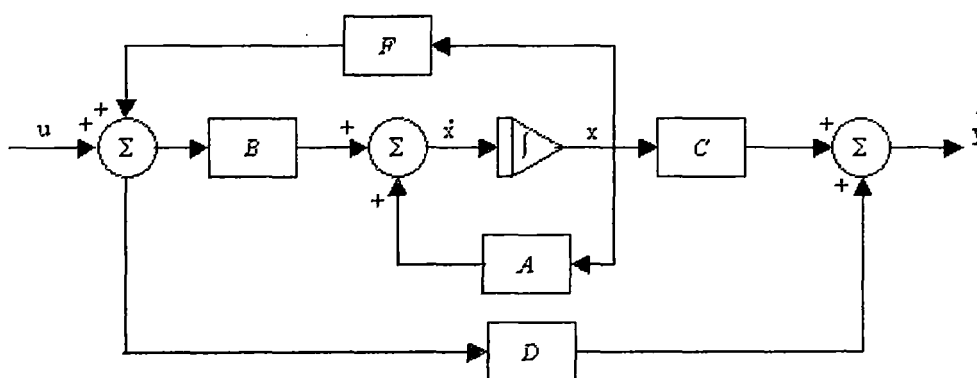


Figura 7.2: Diagrama de bloques del sistema LR.

El cálculo de la matriz  $F$  se realizó como se muestra a continuación:

1. Se determinó el siguiente conjunto de soluciones de  $|\lambda I - A| = 0$ :

$$\sigma(A) = \{0, 0, \underbrace{4.5388}_{\text{indeseable}}, -4.5388\}$$

2. Se encontró que la matriz de controlabilidad  $Q$  definida como  $Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3 \end{bmatrix}$  era de rango 4 (igual al orden de  $A$ ), lo que identificaba al sistema linealizado como controlable. Esto garantiza el que se pueda asignar con éxito el conjunto de soluciones  $\Lambda$  cualquiera deseado a la ecuación  $|\lambda I - (A + BF)| = 0$  mediante la realimentación de estados vía la señal  $Fx$ , donde  $A + BF$  es la matriz del sistema realimentado  $\dot{x} = (A + BF)x + Bu$  (ver la referencia [5]). Nos propusimos aquí asignar el conjunto  $\Lambda = \{-2 + 3.464i, -2 - 3.464i, -10, -10\}$ .

3. Mediante la transformación de estado  $z = Vx$ , con  $V$  definida como

$$V = \begin{bmatrix} \nu \\ \nu A \\ \nu A^2 \\ \nu A^3 \end{bmatrix},$$

donde  $\nu$ , es la última fila de  $Q^{-1}$ , se convirtió el sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  en un sistema canónico controlable equivalente  $\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u$ , con

$$\hat{A} = VAV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20.6010 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = VB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$$

4. Se calculó la matriz de realimentación de estado  $\hat{F}$  para el sistema canónico controlable equivalente:

Aquí  $\hat{F}$  debía ser de la forma

$$\hat{F} = [ \hat{f}_4 \quad \hat{f}_3 \quad \hat{f}_2 \quad \hat{f}_1 ],$$

con lo que

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{f}_4 & \hat{f}_3 & 20.610 + \hat{f}_2 & \hat{f}_1 \end{bmatrix}$$

y

$$\pi_{\hat{A} + \hat{B}\hat{F}}(\lambda) = -\hat{f}_4 - \hat{f}_3\lambda - (20.610 + \hat{f}_2)\lambda^2 - \hat{f}_1\lambda^3 + \lambda^4 \quad (7.3)$$

Dado que  $A + BF$  y  $\hat{A} + \hat{B}\hat{F}$  son similares (ver [5]) también se podía escribir

$$\begin{aligned} \pi_{\hat{A} + \hat{B}\hat{F}}(\lambda) &= [\lambda - (-2 + 3.464i)][\lambda - (-2 - 3.464i)][\lambda - (-10)]^2 \\ &= 1599.93 + 719.986\lambda + 195.9993\lambda^2 + 24\lambda^3 + \lambda^4 \end{aligned} \quad (7.4)$$

De (7.3) y (7.4) se obtuvo la matriz  $\hat{F}$ :

$$\hat{F} = [ -1599.93 \quad -719.986 \quad -216.6003 \quad -24 ]$$

5. La matriz de realimentación  $F$  para el sistema linealizado  $\dot{x} = Ax + Bu$  resultó siendo

$$F = \hat{F}V = [ 298.15 \quad 60.697 \quad 163.099 \quad 73.394 ]$$

Se puede verificar que se cumple la relación

$$\sigma(A + BF) = \Lambda$$

Esto significa que la matriz  $F$  de realimentación que se calculó consigue que el conjunto de soluciones del polinomio característico de  $A + BF$  sea igual al conjunto pre-especificado  $\Lambda$ .

### 7.3. El Observador de Estados

El observador u estimador de estados que se empleó tiene la dinámica  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K[y - C\hat{x}] + Bu$ , con  $x$ , vector de estado del sistema y  $\hat{x}$ , vector de estado del observador o estimado del vector de estado  $x$ . En la Figura 7.3 se muestra el diagrama de bloques del modelo linealizado con realimentación de estado y observador de estado (sistema LRO).

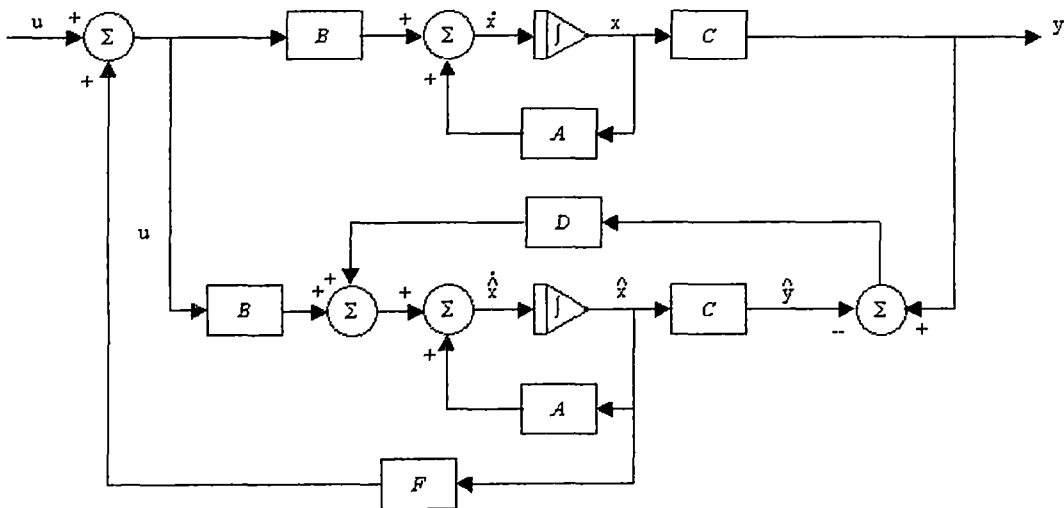


Figura 7.3: Diagrama de bloques del sistema LRO

El cálculo de la matriz  $K$  se realizó como sigue (véase [5]):

1. Se determinó que la matriz de observabilidad  $R$  definida como

$$R = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

tenía rango 4 (igual al orden de  $A$ ), lo que identificaba al sistema linealizado como observable. Esto significaba que se podía lograr el cumpli-

miento de la igualdad  $\sigma(A - KC) = \bar{\Lambda}$ , con  $\bar{\Lambda}$  un conjunto cualquiera pre-especificado, mediante una garantizada existente matriz  $K$ . Nos propusimos aquí que el conjunto de soluciones deseadas del polinomio característico de  $A - KC$  fuera igual a  $\bar{\Lambda} = \{-6, -5, -7, -12\}$ .

2. Tomando en cuenta los órdenes de las matrices  $A$  y  $C$  del sistema linealizado, la matriz  $K$  del observador de estado resultó ser de la forma

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \\ k_{41} & k_{42} \end{bmatrix},$$

con  $k_{ij}, i = 1, \dots, 4, j = 1, 2$  a determinar.

Dado que

$$A - KC = \begin{bmatrix} -k_{11} & 1 & -k_{12} & 0 \\ 20.601 - k_{21} & 0 & -k_{22} & 0 \\ -k_{31} & 0 & -k_{32} & 1 \\ -0.4905 - k_{41} & 0 & -k_{42} & 0 \end{bmatrix},$$

que la pre-especificación del conjunto  $\Lambda$  permite escribir el polinomio característico deseado de  $A - KC$  como

$$\begin{aligned} \pi_{A-KC}(\lambda) &= (\lambda + 6)(\lambda + 5)(\lambda + 7)(\lambda + 12) \\ &= 2520 + 1494\lambda + 323\lambda^2 + 30\lambda^3 + \lambda^4, \end{aligned}$$

y que también se puede escribir

$$\begin{aligned}
 \pi_{A-KC}(\lambda) &= \det[\lambda I - (A - KC)] \\
 &= (k_{21}k_{42} - 20.601k_{42} - k_{41}k_{22} - 0.4905k_{22}) \\
 &\quad + \lambda(k_{21}k_{32} - 20.601k_{32} - k_{22}k_{31} + k_{11}k_{42} \\
 &\quad - k_{41}k_{12} - 0.4905k_{12}) \\
 &\quad + \lambda^2(k_{21} - 20.601 + k_{42} + k_{42} + k_{11}k_{32} - k_{31}k_{12}),
 \end{aligned}$$

se dió lugar a cuatro ecuaciones con ocho incógnitas (los  $k_{ij}$ ), entonces, tomando  $k_{42} = k_{32} = k_{31} = k_{41} = 0$ , se obtuvo:

$$K = \begin{bmatrix} 30 & -3045.9 \\ 343.6010 & -5137.6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos verificar que cumple

$$\sigma(A - KC) = \bar{\Lambda} = \{-12, -7, -6, -5\}$$

## 7.4. Simulación Numérica

Aquí presentamos los resultados de la simulación del sistema carrito-péndulo invertido (sistema CPI) y de su versión linealizada con realimentación y estimación de estados empleando las matrices  $F$  y  $K$ , respectivamente, calculadas en la sección anterior. Esto servirá para verificar que su empleo, efectivamente, sirve para reubicar los polos del sistema y para estimar sus estados.



### 7.4.1. Simulación del Sistema CPI Linealizado con Realimentación de Estados

En la Figura 7.4 se muestra el diagrama de bloques SIMULINK de la simulación del sistema CPI linealizado con realimentación de estados empleando la matriz  $F = [ 298.15 \quad 60.697 \quad 163.099 \quad 73.394 ]$

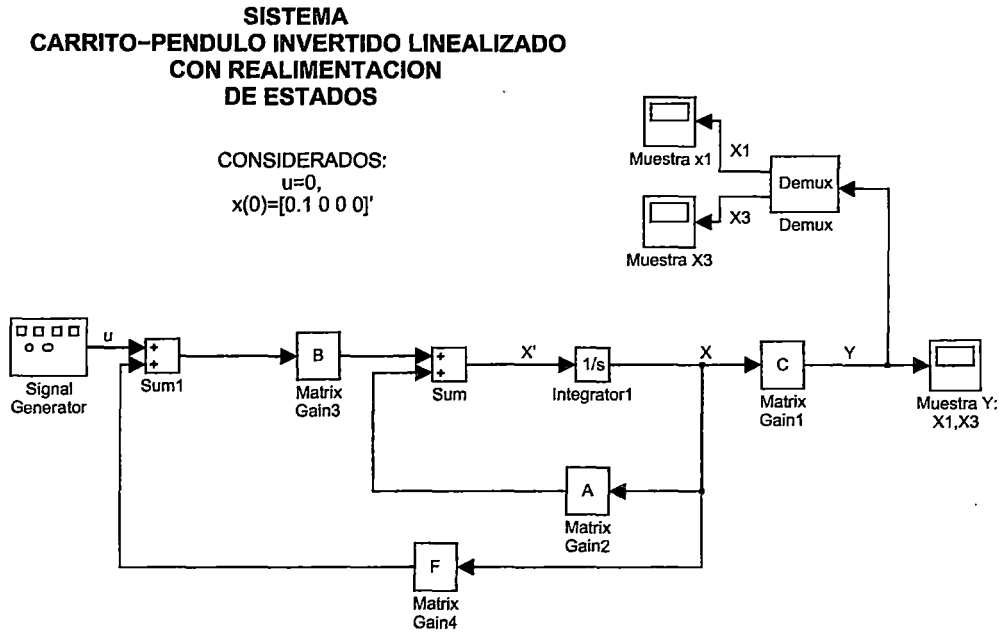


Figura 7.4: Esquema de la simulación del sistema CPI linealizado con realimentación de estados

Consideramos en esta simulación que el estado inicial es  $X(0) = [ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 ]$ , esto es que al inicio,  $\theta = 0,1$  rad, o lo que es lo mismo, aproximadamente  $5.7^\circ$ , y que la entrada al sistema es  $u(t) = 0(t)$ .

En la Figura 7.5 se muestran las variables de estado  $X_1$  y  $X_3$ , del sistema linealizado con realimentación de estados. (Recuérdese que  $X_1 = \theta$  y  $X_3 = x$ ). Las gráficas para las demás variables de estado tienen un comportamiento similar, esto es, convergen a cero.

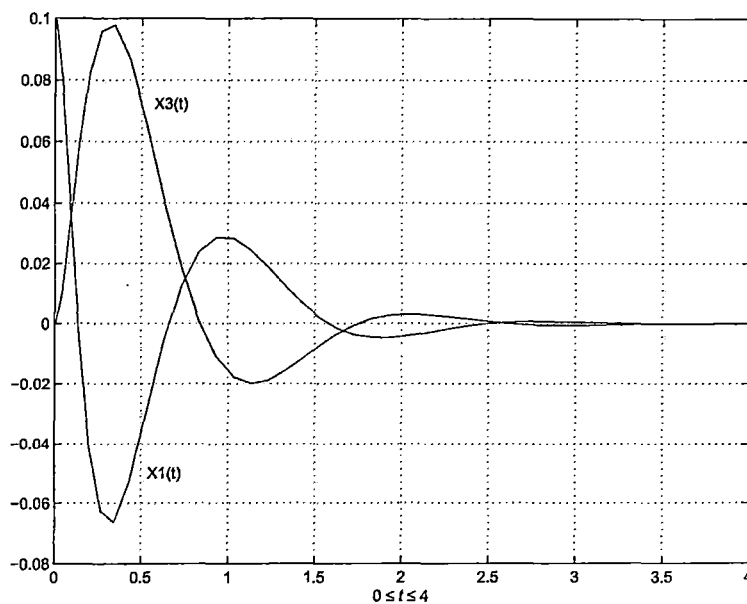


Figura 7.5: Estados  $X_1$  y  $X_3$  del sistema CPI linealizado con realimentación de estados.

#### 7.4.2. Sistema CPI Linealizado con Realimentación y Estimación de Estados

En la Figura 7.6 se muestra el diagrama de bloques SIMULINK de la simulación del sistema CPI linealizado con realimentación de estados y estimación de estados empleando las matrices  $F = [ 298.15 \quad 60.697 \quad 163.099 \quad 73.394 ]$  y

$$K = \begin{bmatrix} 30 & -3045.9 \\ 343.6010 & -5137.6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Consideramos en esta simulación que el estado inicial del sistema linealizado es  $X(0) = [ 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]$ , esto es que al inicio,  $\theta = 0,1$  rad, o lo que es lo

**SISTEMA CARRITO-PENDULO  
INVERTIDO LINEALIZADO  
CON REALIMENTACION  
DE ESTADO Y OBSERVADOR DE ESTADO**

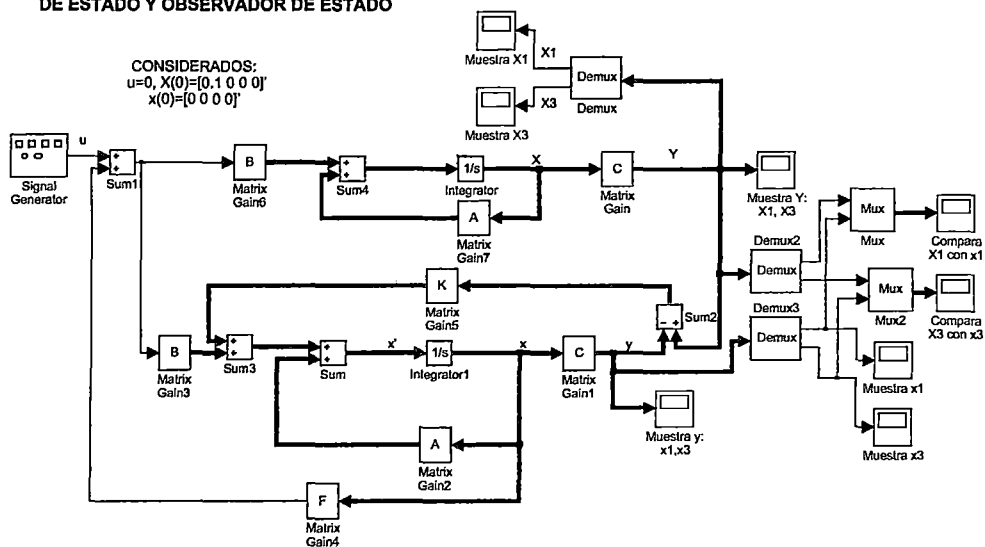


Figura 7.6: Esquema de la simulación del sistema CPI linealizado con realimentación de estados y observador de estados

mismo, aproximadamente  $5.7^\circ$ , que el valor inicial estimado del estado del sistema es  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , y que la entrada al sistema es  $u(t) = 0(t)$ .

En la Figura 7.7 se muestra el comportamiento de las variables de estado  $X_1$  y  $X_3$ , del sistema linealizado con realimentación de estados. (Recuérdese que  $X_1 = \theta$  y  $X_3 = x$ ). Las gráficas para las demás variables de estado tiene un comportamiento similar: convergen a cero.

La Figura 7.8 muestra a la vez el comportamiento de la variable de estado  $X_1$  del sistema CPI linealizado y el de la variable estimada  $x_1$  a la salida del observador. Se puede notar que  $X_1$  y  $x_1$  llegan a ser prácticamente iguales en un periodo de tiempo muy pequeño.

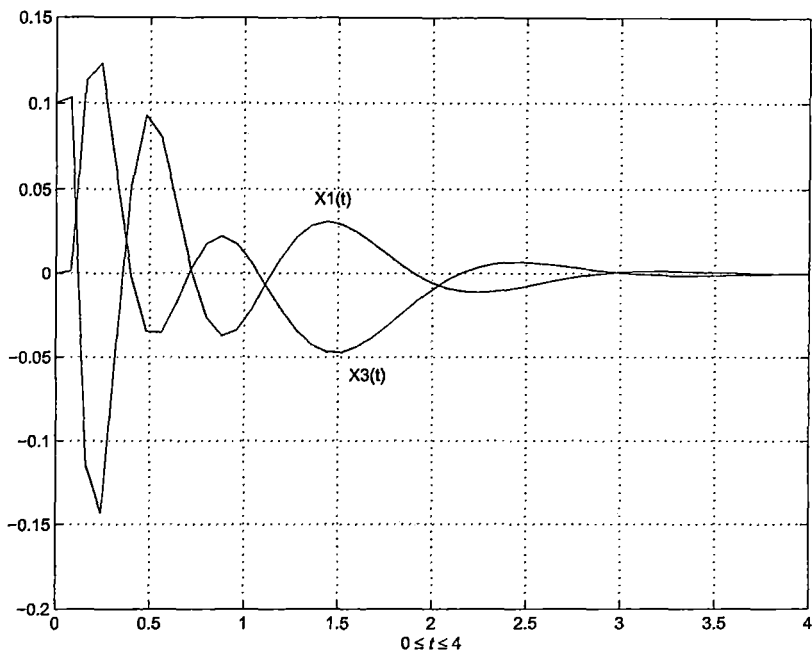


Figura 7.7: Estados  $X_1$  y  $X_3$  del sistema CPI linealizado con realimentación de estados.

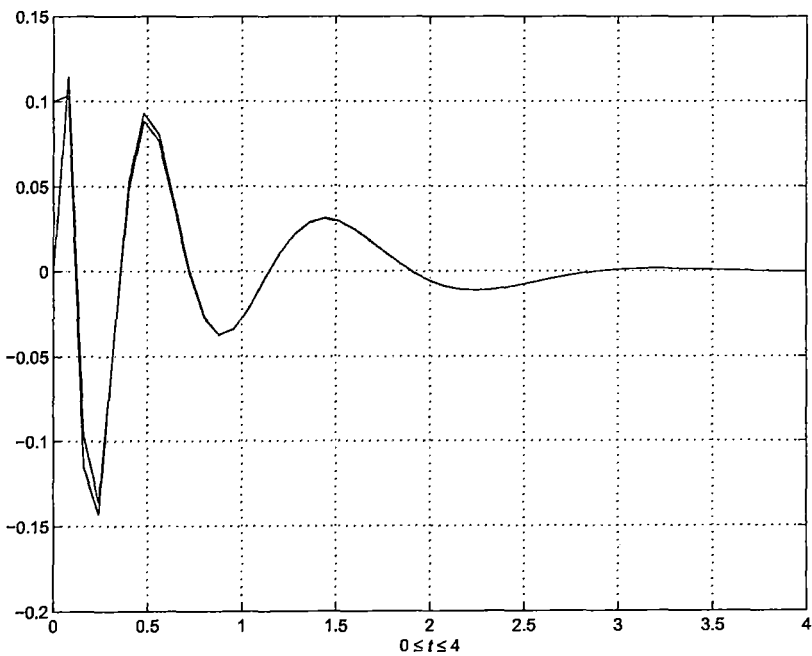


Figura 7.8: Comparación de los estados  $X_1$  del sistema CPI linealizado y  $x_1$  del estimador de estados.

### 7.4.3. Sistema CPI con Realimentación y Estimación de Estados

En la Figura 7.9 se muestra el diagrama de bloques de la simulación del sistema CPI no lineal con realimentación de estados y estimación de estados (sistema CPIRO) empleando las matrices

$$F = [ 298.15 \quad 60.697 \quad 163.099 \quad 73.394 ]$$

y

$$K = \begin{bmatrix} 30 & -3045.9 \\ 343.6010 & -5137.6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

En esta simulación se considera el estado inicial

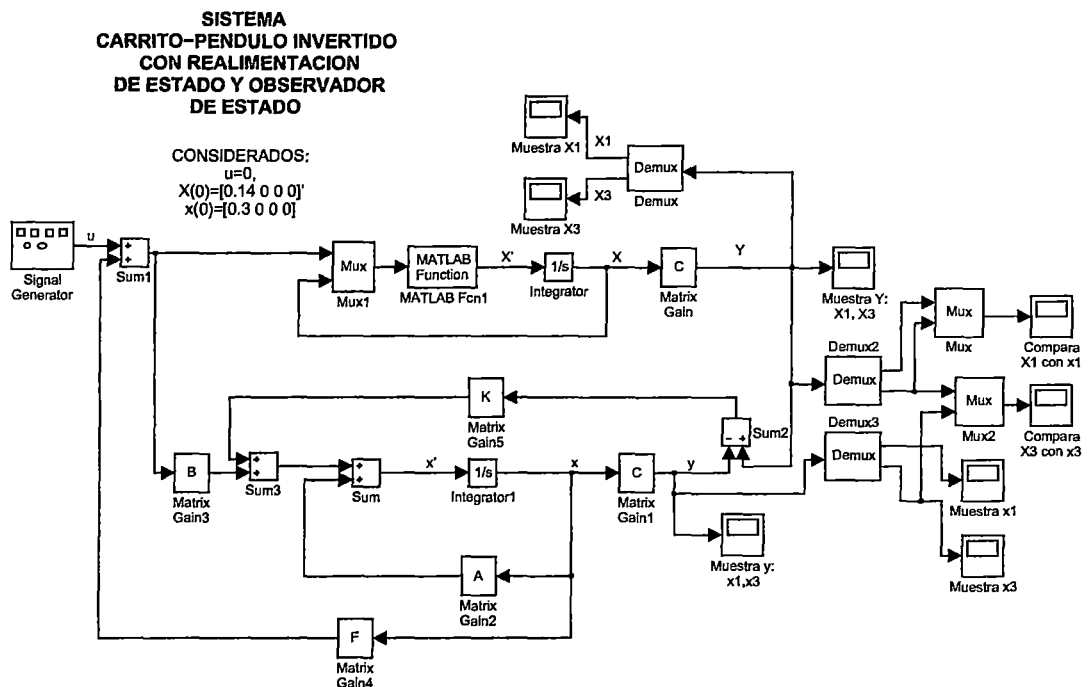


Figura 7.9: Esquema de la simulación del sistema CPI con realimentación de estados y observador de estados

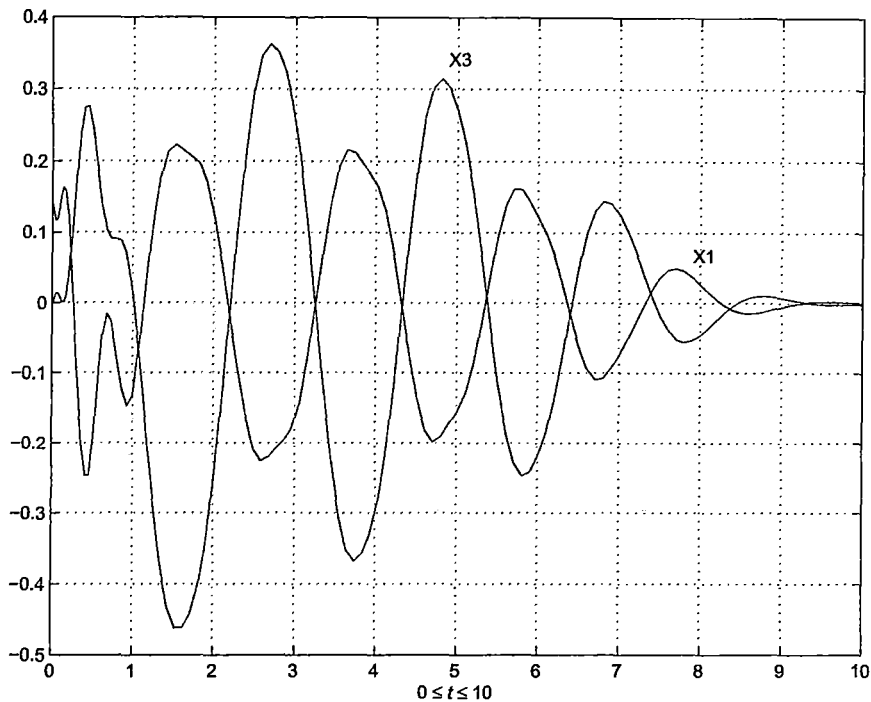


Figura 7.10: Estados  $X_1$  y  $X_3$  del sistema CPI con realimentación de estados y estimación de estados.

$X(0) = [ 0.14 \ 0 \ 0 \ 0 ]^t$  (una inclinación inicial de la varilla de aproximadamente  $8^\circ$  respecto a la vertical) para el sistema CPI y el valor inicial de la variable de estado estimada dado por  $x(0) = [ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0 ]$  (un error inicial de estimación de aproximadamente  $17.2^\circ$ ), y entrada cero.

La Figura 7.10 muestra el comportamiento de las variables de estado  $X_1$  y  $X_3$  (variables  $\theta$  y  $x$ ) del sistema CPI con realimentación de estado y observador de estados. Se observa que aunque hay un error inicial apreciable en la estimación que se hace del estado del sistema CPI, y que la varilla se encuentra también inclinada inicialmente en unos 8 grados sexagesimales, el realimentador de estados junto al estimador de estados que calculamos por separado en la sección anterior, aún en conjunto estabilizan el sistema.

## 7.5. Conclusiones

1. *Las respuestas obtenidas al emplear la realimentación de estados y estimación de estados muestran que, efectivamente, se pueden mejorar los comportamientos de las variables de estado de un sistema realimentándole estados a través del uso de la matriz de realimentación  $F$  diseñada adecuadamente, de modo que las respuestas del sistema converjan a cero.*
2. *La rapidez en la convergencia a cero de las variables de estado de un sistema como el que hemos estudiado puede mejorar con elecciones apropiadas de las matrices de realimentación y estimación de estado.*
3. *Es válido el emplear en sistemas de control matrices de realimentación y de observación de estados calculadas para las versiones linealizadas de los mismos; tan sólo hay que tomar en cuenta que las desviaciones de similitud entre ellos no sean muy grandes porque en ese caso no serán útiles las matrices referidas.*

# Apéndice



## Apéndice A-1 SIMBOLOGÍA

Símbolo	Descripción
$\exists!$	Existe un(a) único(a).
/	Tal que, de modo que.
$\therefore$	Por lo tanto.
$\mathbb{C}$	Campo de los números complejos.
$\mathbb{R}$	Campo de los números reales.
$\mathbb{R}^+$	El conjunto de los números reales no negativos.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathcal{M}(m, n)$	Conjunto de las matrices de orden $m \times n$ .
$I$	Matriz identidad.
$A^t$	Transpuesta de la matriz $A$ .
$A^L, A^R$	Inversas izquierda y derecha de la matriz $A$ .
$\det(A)$	Determinante de la matriz $A$ .
$ A $	Determinante de la matriz $A$ .
$N[A]$	Núcleo de la matriz $A$ : $N[A] = \{x / Ax = 0\}$ .
$N[u(t)]$	Respuesta del sistema $N$ relajado en $-\infty$ cuando la entrada es $u(t)$ .
$N[u(t), x(t_0)]$	Respuesta del sistema $N$ cuando la entrada es $u(t)$ y el vector de estado inicial en el instante $t_0$ es $x(t_0)$ .
$\mathcal{L}$	Operador transformada de Laplace
$f(s)$	Transformada de Laplace de $f(t)$ : $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$ .
$\mathcal{Z}$	Operador transformada $Z$ .
$g[z]$	Transformada $Z$ de la sucesión $g[n]$ .
$A \triangleq B$	La expresión $A$ es definida como la expresión $B$ .
$\forall z \neq 0$	Para todo $z$ no nulo.
SISO	Sistema de simple entrada y simple salida.
LIT	Lineal invariante en el tiempo.
LVT	Lineal variante en el tiempo.
MIMO	Sistema de múltiple entrada y múltiple salida.
SLIT	Sistema lineal invariante en el tiempo.

Símbolo	Descripción
SLVT	Sistema lineal variante en el tiempo.
$\text{Re}(v)$	Parte real de $v$ .
$\text{Im}(v)$	Parte imaginaria de $v$ (depende del contexto).
$\text{Im}(T)$	Imagen de la aplicación $T$ (depende del contexto).
$\pi_A(\lambda)$	Polinomio característico de la matriz $A$ .
$\ x\ $	norma de $x$ .
$D_t f(t)$	La derivada ordinaria de $f(t)$ respecto a $t$ .
$\sup_{t \in A}  f(t) $	Supremo (menor cota superior) del valor absoluto de $f(t)$ sobre el conjunto $A$ .
$\inf_{t \in A}  f(t) $	Ínfimo (mayor cota inferior) del valor absoluto de $f(t)$ sobre el conjunto $A$ .
$f \in C^k(\Omega)$	$f$ tiene todas sus derivadas parciales de primer orden continuas sobre $\Omega$ .
METD	Modelo de estado en tiempo discreto.
$\text{tr} A$	Traza de la matriz $A$ .
$\text{adj} A$	Adjunta de la matriz $A$ .
$\text{Ker} T$	Núcleo de la aplicación $T$ .
$\text{proy}_W v$	Proyección ortogonal del vector $v$ sobre el espacio vectorial $W$ .
$\text{span}(V)$	Espacio generado por el conjunto de vectores $V$ .
$\text{span-col}(A)$	Espacio columna de la matriz $A$ .
$\text{span-fla}(A)$	Espacio fila de la matriz $A$ .
$\text{rango}(A)$	Rango de la matriz o aplicación $A$ .
$\text{dim}(V)$	Dimensión del espacio vectorial $V$ .
$\Psi_A(\lambda)$	Polinomio mínimo de la matriz $A$ .
$\text{diagonal}(A)$	Conjunto de los elementos de la diagonal principal de la matriz $A$ .
$\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$	Matriz diagonal con elementos en su diagonal principal $a_{11}, \dots, a_{nn}$ .
$\text{tr}(A)$	Traza de la matriz $A$ ( $= \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ).
$[c_1   c_2   \dots   c_n]$	Matriz de columnas $c_1, c_2, \dots, c_n$ .
$\mathbb{R}^{r \times n}$	El espacio de las matrices reales de orden $r \times n$ .
$y(\cdot)$	Función de un parámetro.
$\{x[n]\}_0^\infty$	La sucesión $\{x[n] / n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

## Apéndice A-2 VALORES Y VECTORES PROPIOS DE MATRICES

### A-2.1. La Descomposición $S + N$

**Teorema A-2.1** (Descomposición  $S + N$ ). *Sea  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una matriz real de polinomio característico*

$$\pi_A(\lambda) = |\lambda\mathbb{I} - A| = \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \prod_{l=1}^s \{[\lambda - (a_l + ib_l)][\lambda - (a_l - ib_l)]\}^{m_l}$$

$$\left( \sum_{k=1}^r n_k + 2 \sum_{l=1}^s m_l = n \right)$$

Si  $\beta_k = \{h_{k1}, h_{k2}, \dots, h_{kn_k}\}$  es una base de  $\text{Ker}(\lambda_k\mathbb{I} - A)^{n_k}$  y  $\gamma_l = \{f_{l1}, f_{l2}, \dots, f_{lm_l}\}$  es una base de  $\text{Ker}[(a_l + ib_l)\mathbb{I} - A]^{m_l}$ , entonces

$$\beta = \bigcup_{k=1}^r \beta_k \bigcup_{l=1}^s \{\text{Im } f_{l1}, \text{Re } f_{l1}, \text{Im } f_{l2}, \text{Re } f_{l2}, \dots, \text{Im } f_{lm_l}, \text{Re } f_{lm_l}\},$$

es una base de  $\mathbb{R}^n$  y se puede escribir  $A = S + N$ , con  $S, N \in \mathcal{M}(n, n)$  matrices reales únicas tales que  $SN = NS$ , de las cuales  $S$  es llamada la parte semisimple de  $A$ , y  $N$  es una matriz nilpotente llamada la parte nilpotente de  $A$ , cumpliéndose además que  $S = PDP^{-1}$ , donde



## Apéndice A-3 EXPONENCIALES Y POTENCIAS DE MATRICES

### A-3.1. Exponenciales de Matrices

**Definición A-3.1.** Dada una sucesión  $\{C_k\}$  de matrices  $m \times n$  cuyos elementos son números reales o complejos, decimos que la serie de matrices  $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$  converge si y sólo si son convergentes todas las series  $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  y su suma está definida como la matriz  $m \times n$  cuyo elemento  $ij$ -ésimo es la suma de  $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ .

**Definición A-3.2** (Norma de una matriz). Aquí definimos la norma  $\|A\|$  de una matriz  $A \in \mathcal{M}(m, n)$  como

$$\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(Véanse en el Ejemplo 6.1 otras normas de matrices).

**Teorema A-3.1** (Propiedades fundamentales de las normas).  $\forall A, B \in \mathcal{M}(n, n)$  se cumplen:

$$\text{i) } \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \text{ii) } \|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad \text{iii) } \|cA\| = |c|\|A\|, \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}$$

(Nótese que  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ )

**Teorema A-3.2** (Criterio de convergencia para series de matrices). Si  $\{C_k\}$  es una sucesión de matrices  $m \times n$  tales que  $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$  converge, entonces la serie de matrices  $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$  también converge.

**Definición A-3.3** (Exponencial de una matriz).  $\forall A \in \mathcal{M}(n, n)$  real o compleja, definimos

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad \text{con } A^0 = \mathbb{I}.$$

Nótese que  $\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}$ , por lo que podemos afirmar que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  es convergente,  $\forall A \in \mathcal{M}(n, n)$ .

**Teorema A-3.3.** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices  $n \times n$  permutables ( $AB = BA$ ). Se cumple:  $e^{A+B} = e^A e^B$

**Oservación A-3.1.** Resultados útiles:

$$\blacksquare \text{ Si } A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ Si } A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \Rightarrow e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ Si } A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{bmatrix}, \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & e^{A_n} \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ Si } A = PDP^{-1}, \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}, \forall k \Rightarrow e^A = Pe^D P^{-1}$$

■ Si  $A$  es como en el Teorema A-2.1, llamando  $P$  a la matriz cuyas columnas son los vectores de la base  $\beta$  ( $P$  es la matriz de transición de la base estándar a la base  $\beta$ ), entonces

$$e^A = e^{S+N} = e^S e^N = e^{PDP^{-1}} e^N = Pe^D P^{-1} e^N,$$



## A-3.2. Algoritmo de Leverrier-Souriau-Faddeeva-Frame Para Calcular $(s\mathbb{I} - A)^{-1}$

**Lema A-3.1.** Si los valores propios, no necesariamente diferentes, de una matriz  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  son  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , y  $r$  es un entero positivo, entonces los valores propios de  $A^r$  son  $\lambda_1^r, \dots, \lambda_n^r$ .

*Demostración.* Debemos mostrar que  $\pi_{A^r}(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{I} - A^r) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^r)$ ; para hacer esto definimos  $q(s)$  como  $q(s) = \lambda - s^r$ , que en versión factorizada tiene la forma  $q(s) = b \prod_{j=1}^r (s - a_j)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \pi_{A^r}(\lambda) &= \det q(A) = \det(\lambda\mathbb{I} - A^r) \\ &= b^n \prod_{j=1}^r \det(A - a_j\mathbb{I}) = b^n \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^n (\lambda_k - a_j) \\ &= \prod_{k=1}^n b \prod_{j=1}^r (\lambda_k - a_j) = \prod_{k=1}^n q(\lambda_k) \\ &= \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k^r) \end{aligned}$$

□

**Teorema A-3.4.** Si  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una matriz de  $n$  valores propios diferentes, se cumple

$$\text{tr } \mathcal{L}(e^{At}) = \frac{\pi'_A(s)}{\pi_A(s)} \quad (\text{A-3.1})$$

donde  $\pi'_A(s)$  es la derivada del polinomio característico  $\pi_A(s)$  de la matriz  $A$ .

*Demostración.* Sea  $\pi_A(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$ , donde los  $\lambda_i$ 's son los  $n$  valores propios diferentes de  $A$ . Por el Lema A-3.1,  $A^r$  tiene los valores propios  $\lambda_i^r$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de modo que  $\text{tr } [A^r] = \sum_{i=1}^n \lambda_i^r$  y  $\text{tr } [e^{tA}] = \sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i}$ . Finalmente, tomando la transformada



de Laplace de esta ecuación se obtiene la relación requerida:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} \mathcal{L}(e^{tA}) &= \mathcal{L}(\operatorname{tr} e^{tA}) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - \lambda_i} = \frac{\pi'_A(s)}{\pi_A(s)}\end{aligned}$$

□

**Teorema A-3.5** (Algoritmo de Leverrier-Souriau-Faddeeva-Frame para calcular  $(s\mathbb{I} - A)^{-1}$ ). Si  $A$  es una matriz de orden  $n$ , se tiene

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{R(s)}{\pi_A(s)} = \frac{N_1 s^{n-1} + N_2 s^{n-2} + \dots + N_{n-1} s + N_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (\text{A-3.2})$$

donde  $\pi_A(s) = \det[s\mathbb{I} - A] = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$  es el polinomio característico de  $A$ ,  $R(s) = \operatorname{adj}(s\mathbb{I} - A) = N_1 s^{n-1} + N_2 s^{n-2} + \dots + N_{n-1} s + N_n$  es la matriz adjunta de  $s\mathbb{I} - A$ , y

$$\begin{aligned}N_1 &= \mathbb{I} & a_1 &= -\operatorname{tr}[A] \\ N_2 &= N_1 A + a_1 \mathbb{I} & a_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}[N_2 A] \\ N_3 &= N_2 A + a_2 \mathbb{I} & a_3 &= -\frac{1}{3} \operatorname{tr}[N_3 A] \\ &\vdots & &\vdots \\ N_n &= N_{n-1} A + a_{n-1} \mathbb{I} & a_n &= -\frac{1}{n} \operatorname{tr}[N_n A] \\ [0] &= N_n A + a_n \mathbb{I}\end{aligned} \quad (\text{A-3.3})$$

*Demostración.* Dividimos la prueba en tres partes: (i) mostrar que  $(s\mathbb{I} - A)^{-1}$  tiene la forma de la Ecuación (A-3.2), (ii) mostrar que las matrices  $N_i$  satisfacen las Ecuaciones (A-3.3), y finalmente, (iii) mostrar que los coeficientes  $a_i$  del polinomio característico satisfacen las Ecuaciones (A-3.3).

Parte (i). Por la regla de Cramer,  $(s\mathbb{I} - A)^{-1} = [\nu_1(s)|\dots|\nu_n(s)]$ , donde  $\nu_i(s) = r_i(s)/\pi_A(s)$ , con  $r_i(s) = [r_i^1, \dots, r_i^n]^t$  y  $r_i^j = \det[M_i^j(s)]$ , siendo  $M_i^j(s)$  la matriz que se obtiene de  $s\mathbb{I} - A$  reemplazando su  $j$ -ésima columna por  $\nu_i(s)$ . Es claro que  $r_i^j(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $\leq n - 1$ . Entonces,

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{R(s)}{\pi_A(s)} = [\nu_1(s)|\dots|\nu_n(s)] = \frac{1}{\pi_A(s)}[r_1(s)|\dots|r_n(s)]$$

donde  $R(s) = \text{adj}(s\mathbb{I} - A)$  tiene la forma

$$R(s) = \text{adj}(s\mathbb{I} - A) = N_1s^{n-1} + N_2s^{n-2} + \dots + N_{n-1}s + N_n \quad (\text{A-3.4})$$

para algunas matrices constantes  $N_i$  de orden  $n$ .

Parte (ii). A partir de la ecuación  $(s\mathbb{I} - A)^{-1} = R(s)/\pi_A(s)$  se puede escribir

$$\pi_A(s)\mathbb{I} = R(s)(s\mathbb{I} - A) \quad (\text{A-3.5})$$

Reemplazando en esta ecuación  $\pi_A(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$  y  $R(s)$  de la Ecuación A-3.4, se obtiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{I}s^n + a_1\mathbb{I}s^{n-1} + a_2\mathbb{I}s^{n-2} + \dots + a_n\mathbb{I} \\ &= [N_1s^{n-1} + N_2s^{n-2} + \dots + N_{n-1}s + N_n](s\mathbb{I} - A) \\ &= N_1s^n + (N_2 - N_1A)s^{n-1} + (N_3 - N_2A)s^{n-2} + \dots - N_nA \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los términos a ambos lados de la igualdad con igual potencia de  $s$ , se observa que las matrices  $N_i$  satisfacen las ecuaciones de la columna izquierda de (A-3.3).

Parte (iii). Probamos finalmente que las fórmulas de la parte derecha de (A-3.3) generan los coeficientes de  $\pi_A(s)$ :

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación  $\frac{d e^{tA}}{dt} = A e^{tA}$  se obtiene  $s\mathcal{L}(e^{tA}) - \mathbb{I} = A\mathcal{L}(e^{tA})$ . Tomando la traza a ambos lados de esta ecuación y considerando el Teorema A-3.4 se obtiene

$$\begin{aligned} s \frac{\pi'_A(s)}{\pi_A(s)} - n &= \operatorname{tr} [A(s\mathbb{I} - A)^{-1}] \\ &= \operatorname{tr} \left[ \frac{AR(s)}{\pi_A(s)} \right] = \frac{\operatorname{tr} [AR(s)]}{\pi_A(s)} \end{aligned}$$

Podemos escribir esta ecuación como

$$s\pi'_A(s) - n\pi_A(s) = \operatorname{tr} [AR(s)]$$

Reemplazando en esta ecuación  $\pi_A$  y  $R(s)$  según (A-3.4), y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} -a_1 s^{n-1} - 2a_2 s^{n-2} - \dots - (n-1)s - na_n \\ = \operatorname{tr} [AN_1]s^{n-1} + \operatorname{tr} [AN_2]s^{n-2} + \dots + \operatorname{tr} [AN_{n-1}]s + \operatorname{tr} [AN_n] \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de  $s$  con la mismas potencias a ambos lados de esta ecuación y notando que  $\operatorname{tr} [AN_k] = \operatorname{tr} [N_k A]$  se llega a la expresión

$$a_k = -\frac{\operatorname{tr} [N_k A]}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

□

### A-3.3. Vectores Propios Izquierdos

**Definición A-3.4.** Se dice que una matriz  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  sobre  $\mathbb{C}$  es no defectuosa si es diagonalizable en  $\mathbb{C}^n$ , o lo que es lo mismo, si  $\mathbb{C}^n$  tiene una base de vectores propios de  $A$  (también se dice que  $A$  tiene un conjunto completo de vectores propios).

**Definición A-3.5.** Sea  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una matriz real. Se dice que  $w \in \mathbb{C}^n$  es un vector propio izquierdo de  $A$  correspondiente a su valor propio  $\lambda$  si se cumple

$$w^*A = \lambda w^*, \quad \text{donde } w^* = \bar{w}^t \quad (\text{A-3.6})$$

**Observación A-3.2.** Sabemos que si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ , existe  $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$  tal que  $(\lambda\mathbb{I} - A)v = 0$ . Esto es equivalente a que se satisfaga  $|\lambda\mathbb{I} - A| = 0$ , o lo que es lo mismo, que se satisfaga  $|\lambda\mathbb{I} - A^t| = 0$ . La última expresión garantiza la existencia de un vector  $0 \neq w \in \mathbb{C}^n$  tal que  $(\lambda\mathbb{I} - A^t)\bar{w} = 0$ , o lo que es lo mismo, tal que  $w^*A = \lambda w^*$ .

**Teorema A-3.6.** El conjunto de todos los vectores propios izquierdos de  $A$  correspondientes al valor propio  $\lambda$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^n$ .

*Demostración.* Sea  $W$  el conjunto de los vectores propios izquierdos de  $A$  correspondientes al valor propio  $\lambda$ .

Observamos que,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall u, v \in W$ ,

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v)^*A &= (\alpha u)^*A + (\beta v)^*A \\ &= \lambda(\alpha u)^* + \lambda(\beta v)^* \\ &= \lambda(\alpha u + \beta v)^*, \end{aligned}$$

de modo que  $\alpha u + \beta v \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Concluimos de esto que  $W$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^n$ . □

**Teorema A-3.7.** Sea  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una matriz real diagonalizable en  $\mathbb{C}^n$ , esto es, una matriz que se puede escribir como  $A = PDP^{-1}$ , donde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , con  $\lambda_i$ , un valor propio de  $A$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , y  $P = [e_1 | \dots | e_n]$ , con  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , una base de  $\mathbb{C}^n$  constituida por vectores propios de  $A$  ( $Ae_i = \lambda_i e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Entonces

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix},$$

donde  $w_i$  es un vector propio izquierdo no nulo de  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda_i$ .

*Demostración.* Nuestra prueba se basa en el hecho que  $A = PDP^{-1}$  se puede reescribir como  $P^{-1}A = DP^{-1}$ . Llamando  $w_i^*$  a la  $i$ -ésima fila de  $P^{-1}$ , se observa que la última ecuación garantiza que  $w_i^*A = \lambda_i w_i^* \forall i = 1, \dots, n$ , con lo que termina la prueba.  $\square$

## A-3.4. Descomposición de $e^{At}$ y $A^k$

### A-3.4.1. Descomposición de $e^{At}$

#### A-3.4.1.1. Matrices con Valores Propios Diferentes

**Teorema A-3.8.** Sea  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una matriz invertible tal que  $\pi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$ , con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,  $\forall i \neq j$ , de modo que se puede escribir  $A = PDP^{-1}$ , con  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , y  $P = [e_1 | \dots | e_n]$ , donde  $Ae_i = \lambda_i e_i$  ( $e_i$  es un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda_i$  de  $A$ ).

Entonces (véase el Teorema A-3.7)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix} \quad (\text{A-3.7})$$

donde  $w_i$  es un vector propio izquierdo de  $A$  correspondiente a  $\lambda_i$ , y

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} R_i, \quad \text{donde } R_i = e_i w_i^* \quad (\text{A-3.8})$$

Esta expresión caracteriza la descomposición de  $e^{At}$  como la suma de sus modos matriciales dirigidos. Aquí  $e^{\lambda_i t} R_i$  es el modo matricial dirigido de  $e^{At}$  correspondiente a  $\lambda_i$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{PDtP^{-1}} = Pe^{Dt}P^{-1} \\ &= [e_1 | \dots | e_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= [e^{\lambda_1 t} e_1 | \dots | e^{\lambda_n t} e_n] \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} e_i w_i^* = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} R_i \end{aligned}$$

□

**Nota A-3.1.** En este caso,

■

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - A)^{-1} = \mathcal{L}[e^{At}] &= \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \\ &= \frac{\text{adj}(s\mathbb{I} - A)}{\pi_A(s)} \end{aligned}$$

- Evidentemente, también se pueden calcular los  $R_i$ 's de la Ecuación (A-3.8) empleando la siguiente fórmula:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left[ \frac{(s - \lambda_i)R(s)}{\pi_A(s)} \right] \quad (\text{A-3.9})$$

Por esta razón,  $R_i$  es llamada una matriz residuo.

**Teorema A-3.9.** Las matrices  $R_i$  de la Ecuación (A-3.8) satisfacen las relaciones

$$i) \sum_{i=1}^n R_i = \mathbb{I}$$

$$ii) AR_i = \lambda_i R_i$$

$$iii) R_i A = \lambda_i R_i$$

$$iv) R_j R_i = \delta_{ij} R_j, \text{ donde } \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

*Demostración.* Haciendo  $t = 0$  en la Ecuación (A-3.8) se obtiene la relación del caso i).

El que se satisfagan  $R_i = e_i w_i^*$  y  $Ae_i = \lambda_i e_i$  implica

$$AR_i = A(e_i w_i^*) = \lambda_i (e_i w_i^*) = \lambda_i R_i$$

Esto prueba la relación del caso ii).

Se prueba la relación del caso iii) considerando que se satisface  $w_i^* A = \lambda_i w_i^*$ :

$$R_i A = (e_i w_i^*) A = (e_i w_i^*) \lambda_i = \lambda_i R_i$$

Observando que se cumple  $w_j^* e_i = \delta_{ji}$ , se prueba iv) así:

$$R_j R_i = (e_j w_j^*)(e_i w_i^*) = \delta_{ji} e_j w_i^* = \delta_{ji} R_j$$

□

#### A-3.4.1.2. Matrices con Valores Propios Repetidos

**Teorema A-3.10.** *Sea  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una matriz real tal que*

$$\begin{aligned} \pi_A(\lambda) &= |\lambda \mathbb{I} - A| = \prod_{i=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_i)^{n_{\sigma}} \\ \text{y } \Psi_A(\lambda) &= \prod_{i=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_i)^{m_{\sigma}} \end{aligned}$$

son sus polinomios característico y mínimo, respectivamente. Entonces

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{R(s)}{\pi_A(s)} = \frac{\hat{R}(s)}{\Psi_A(s)} = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_i^j}{(s - \lambda_i)^j}, \quad (\text{A-3.10})$$

y

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{m_i} R_i^j \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda_i t} 1^+(t) \quad (\text{A-3.11})$$

donde  $R(s) = \text{adj}(s\mathbb{I} - A)$ , y  $\forall j = 1, \dots, m_i$ ,

$$R_i^j = \frac{1}{(m_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left[ \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} [(s - \lambda_i)^{m_i} (s\mathbb{I} - A)^{-1}] \right] \quad (\text{A-3.12})$$

son las matrices residuo análogas a las de la Ecuación (A-3.9)



*Demostración.* La prueba de (A-3.12) es sencilla y se le deja al lector. Solo comentamos aquí algunos hechos relacionados a la prueba de

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{R(s)}{\pi_A(s)} = \frac{\hat{R}(s)}{\Psi_A(s)},$$

donde  $\hat{R}(s)/\Psi_A(s)$  es una fracción racional irreducible. Tomamos en cuenta para esto que  $A$  es similar a su forma de Jordan,  $J$ , de modo que se puede escribir  $A = PJP^{-1}$ , donde  $P$  es una matriz invertible apropiada que debe existir.

Entonces

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbb{I} - A)}{\pi_A(s)} = P \frac{\text{adj}(s\mathbb{I} - J)}{\pi_A(s)} P^{-1}$$

Como la matriz  $s\mathbb{I} - J$  es una matriz diagonal de bloques de la forma

$$\begin{bmatrix} s - \lambda_i & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & s - \lambda_i \end{bmatrix},$$

se puede verificar (hágalo Ud.) que cada elemento de  $\text{adj}(s\mathbb{I} - J)$  es un polinomio igual al producto de factores de la forma  $(s - \lambda_j)$  con potencias  $\geq 0$ . Además, la menor potencia con que aparece  $(s - \lambda_j)$  en todos los términos de  $\text{adj}(s\mathbb{I} - J)$  es igual  $n_j - m_j$ , donde  $n_j$  es la multiplicidad algebraica de  $\lambda_j$  en  $\pi_A(s)$  y  $m_j$  es el mayor orden de los subbloques de Jordan de  $\lambda_j$ .

Nótese que sólo son diferentes de cero los cofactores de los términos en y bajo la diagonal principal de los subbloques de Jordan de orden  $\geq 2$ . La menor potencia con que aparece  $(s - \lambda_j)$  en todos los cofactores de los elementos de  $s\mathbb{I} - J$  se da en el cofactor del cero de la esquina inferior izquierda del subbloque de Jordan de mayor orden correspondiente a  $\lambda_j$ .

De este modo, dividiendo obtenemos

$$\frac{\text{adj}(s\mathbb{I} - A)}{\pi_A(s)} = \frac{Q(s)}{\Psi_A(s)}, \quad (\text{A-3.13})$$

donde  $Q(s)/\Psi_A(s)$  es una función matricial en  $s$  cuyos elementos son todas fracciones propias irreducibles.

Definiendo  $\hat{R} = P \text{adj}(s\mathbb{I} - A)P^{-1}$ , la Ecuación (A-3.13) toma la forma

$$\frac{\text{adj}(s\mathbb{I} - A)}{\pi_A(s)} = \frac{\hat{R}(s)}{\Psi_A(s)},$$

con lo que termina esta parte de la prueba.  $\square$

**Teorema A-3.11.** *Para  $i = 1, 2, \dots, \sigma$ , las matrices residuo satisfacen las siguientes relaciones:*

$$\sum_{i=1}^{\sigma} R_i^1 = \mathbb{I} \quad (\text{A-3.14})$$

$$R_i^{j+1} = R_i^j (A - \lambda_i \mathbb{I}), \quad j = 1, 2, \dots, m_i - 1 \quad (\text{A-3.15})$$

$$R_i^{m_i} (A - \lambda_i \mathbb{I}) = [0] \quad (\text{A-3.16})$$

*Demostración.* Obsérvese que, de la Ecuación (A-3.10),  $\forall s \neq \lambda_i, i = 1, \dots, \sigma$ ,

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{\sigma} \left[ \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_i^j}{(s - \lambda_i)^j} (s\mathbb{I} - A) \right] \quad (\text{A-3.17})$$

El término entre corchetes de (A-3.17) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_i^j}{(s - \lambda_i)^j} \right) [(s - \lambda_i)\mathbb{I} + (\lambda_i \mathbb{I} - A)] \\ &= R_i^1 + \sum_{j=1}^{m_i-1} \frac{[R_i^j (\lambda_i \mathbb{I} - A) + R_i^{j+1}]}{(s - \lambda_i)^j} + \frac{R_i^{m_i} (\lambda_i \mathbb{I} - A)}{(s - \lambda_i)^{m_i}} \end{aligned} \quad (\text{A-3.18})$$

Definiendo las matrices  $P_i^j$ ,  $j = 1, \dots, m_i + 1$  como

$$P_i^1 = R_i^1, \quad P_i^j = R_i^{j-1}(\lambda_i \mathbb{I} - A) + R_i^j, \quad j = 2, \dots, m_i$$

y

$$P_i^{m_i+1} = R_i^{m_i}(\lambda_i \mathbb{I} - A),$$

la Ecuación(A-3.17) toma la forma

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=0}^{m_i} \frac{P_i^{j+1}}{(s - \lambda_i)^j} \quad (\text{A-3.19})$$

donde  $s \neq \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, \sigma$ . Igualando los lados izquierdo y derecho de esta ecuación se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\sigma} P_i^1 = \sum_{i=1}^{\sigma} R_i^1 = \mathbb{I},$$

$$P_i^{j+1} = R_i^j(\lambda_i \mathbb{I} - A) + R_i^{j+1} = 0, \quad j = 1, \dots, m_i - 1$$

$$\text{y } P_i^{m_i+1} = R_i^{m_i}(\lambda_i \mathbb{I} - A) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \sigma,$$

que corresponden a las Ecuaciones (A-3.14), (A-3.15), y (A-3.16), respectivamente.  $\square$

### A-3.4.2. Descomposición de $A^k$

**Teorema A-3.12.** *Sea  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  una matriz invertible tal que  $\pi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$ , con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,  $\forall i \neq j$ , de modo que se puede escribir  $A = PDP^{-1}$ , con  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , y  $P = [e_1 | \dots | e_n]$ , donde  $Ae_i = \lambda_i e_i$  ( $e_i$  es un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda_i$  de  $A$ ).*

Siendo (Teorema A-3.7)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix} \quad (\text{A-3.20})$$

donde  $w_i$  es un vector propio izquierdo de  $A$  correspondiente a  $\lambda_i$ , se tiene

$$A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k R_i, \quad \text{donde } R_i = e_i w_i^* \quad (\text{A-3.21})$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} A^k &= A^k \mathbb{I} = A^k P P^{-1} \\ &= A^k [e_1 | \dots | e_n] \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix} = [\lambda_1^k e_1 | \dots | \lambda_n^k e_n] \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^k e_i w_i^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k R_i \end{aligned}$$

□

**Teorema A-3.13.**

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (\text{A-3.22})$$

*Demostración.* La Ecuación (A-3.22) se obtiene de (A-3.21) haciendo  $k = 0$ . □

## Apéndice A-4 LA DESCOMPOSICIÓN DE VALOR SINGULAR

*La descomposición de valor singular (SVD) de una matriz es una factorización especial de ella que hace evidente la secuencia equivalente de transformaciones de rotación y de elongación (“estiramiento”) equivalente a la que sufriría un vector al ser pre-multiplicado por ella. Además, la descomposición de valor singular de matrices es útil en la solución de ciertos problemas de minimización. Estudiamos esta descomposición porque resulta útil en la determinación de bases ortonormales de ciertos espacios vectoriales de interés en control automático como lo son los espacios controlable, incontrolable, observable e inobservable que se estudiarán en los dos capítulos siguientes, y al tratar problemas de control relacionados con sistemas de ecuaciones lineales inconsistentes a causa de errores o ruido en la medición de los parámetros de los sistemas. La presente discusión sigue de cerca a la desarrollada en la referencia [8].*

### A-4.1. Inversas Laterales de Matrices

**Definición A-4.1.** *Sea  $A$  una matriz dada*

- a) *Cualquier matriz  $A^{-L}$  para la cual  $A^{-L}A = \mathbb{I}$  se llama matriz inversa izquierda de  $A$ .*
- b) *Cualquier matriz  $A^{-R}$  para la cual  $AA^{-R} = \mathbb{I}$  se llama matriz inversa derecha de  $A$ .*

**Teorema A-4.1.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada. Entonces  $A$  es no singular si y sólo si las inversas derecha e izquierda de  $A$  son únicas e iguales a  $A^{-1}$ .*

*El siguiente teorema es útil en la discusión que continúa.*

**Teorema A-4.2.** Si  $A \in \mathcal{M}(m, n)$ , con  $m > n$  es tal que  $\text{rango } A = n$  ( $A$  es de rango columna total), entonces  $A^t A$  es invertible, o lo que es lo mismo, satisface  $|A^t A| \neq 0$ .

**Teorema A-4.3.**

- a) Una inversa izquierda de una matriz  $A \in \mathcal{M}(q, n)$  con  $\text{rango}(A) = n \leq q$  es la llamada pseudoinversa izquierda Moore-Penrose,  $A^{-L} = (A^t A)^{-1} A^t$ . Si  $Ax = b$  es un sistema inconsistente,  $x^* = A^{-L} b = (A^t A)^{-1} A^t b$  es la solución (de mínimos cuadrados) del problema  $\min_x \|Ax - b\|_2$ .
- b) Una inversa derecha de una matriz  $A \in \mathcal{M}(n, q)$  con  $\text{rango}(A) = n \leq q$ , es la llamada pseudoinversa derecha Moore-Penrose,  $A^{-R} = A^t (AA^t)^{-1}$ . Si  $Ax = b$  es un sistema consistente,  $x^* = A^{-R} b = A^t (AA^t)^{-1} b$  es la solución (de menor norma euclidiana) del problema  $\min_{Ax=b} \|x\|_2$ .

*Demostración.*

Aquí probamos sólo la parte a) del teorema.

Como  $A^{-L} A = (A^t A)^{-1} A^t A = \mathbb{I}$ , queda verificado el que  $A^{-L} = (A^t A)^{-1} A^t$  es una inversa izquierda de  $A$ .

Definamos ahora  $D = \|Ax - b\|_2^2$  y desarrollémosla como sigue:

$$\begin{aligned} D = \|Ax - b\|_2^2 &= (Ax - b)^t (Ax - b) \\ &= (x^t A^t - b^t)(Ax - b) \\ &= x^t A^t Ax - x^t A^t b - b^t Ax - b^t b \end{aligned}$$

Derivando e igualando a cero se obtiene:

$$\begin{aligned} 2A^tAx - A^tb - A^tb &= 0 \\ 2(A^tAx - A^tb) &= 0 \\ \Rightarrow x^* &= (A^tA)^{-1}A^tb \end{aligned}$$

Entonces  $x^* = (A^tA)^{-1}A^tb$  es la solución de mínimos cuadrados del problema  $\min_x \|Ax - b\|_2$ . Con esto termina la prueba de la parte a) del teorema.  $\square$

## A-4.2. La Descomposición de Valor Singular

*La comprensión del teorema de valor singular se facilitará si antes consideramos la siguiente observación:*

**Oservación A-4.1.** Sea  $Q \in \mathcal{M}(n, q)$  una matriz real. Entonces:

- $QQ^t \in \mathcal{M}(n, n)$  es simétrica:  $(QQ^t)^t = (Q^t)^tQ^t = QQ^t$ .
- Como  $QQ^t$  es simétrica, esta matriz es diagonalizable ortogonalmente y existe una base ortonormal,  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , de  $\mathbb{R}^n$  constituida exclusivamente de vectores propios de  $QQ^t$ . Esto implica el cumplimiento de  $QQ^tv_i = \lambda_i v_i$  y  $\|v_i\|_2 = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , donde  $v_i$  un vector propio de  $QQ^t$  correspondiente a su valor propio  $\lambda_i$ . Estos hechos nos permiten escribir:

$$0 \leq \|Q^tv_i\|_2^2 = (Q^tv_i)^t(Q^tv_i) = v_i^tQQ^tv_i = \lambda_i v_i^tv_i = \lambda_i \|v_i\|_2^2 = \lambda_i,$$

de modo que  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$

- Si  $\text{rango } Q = p$ , entonces i)  $\text{rango}(QQ^t) = p$ , e ii)  $QQ^t$  tiene sólo  $p$  valores propios no nulos.

**Definición A-4.2.** Dada una matriz real  $Q \in \mathcal{M}(n, q)$ ,  $n \leq q$ , denotamos mediante  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  al conjunto de valores singulares de  $Q$ , esto es, las raíces cuadradas positivas de los valores propios de  $QQ^t$ .

La suposición de que  $n \leq q$  es solamente por conveniencia.

**Teorema A-4.4** (Descomposición de Valor Singular). Sea la matriz real  $Q \in \mathcal{M}(n, q)$ ,  $n \leq q$  con  $\text{rango}(Q) = p \leq n$ . Entonces existen las matrices ortogonales  $U \in \mathcal{M}(n, n)$  y  $V \in \mathcal{M}(q, q)$  tales que

$$Q = U\Sigma V^t = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^t \\ V_2^t \end{bmatrix} \quad (\text{A-4.1})$$

donde  $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathcal{M}(p, p)$ , con  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p > \sigma_{p+1} = \dots = \sigma_n = 0$ ,  $U_1 \in \mathcal{M}(n, p)$ ,  $U_2 \in \mathcal{M}(n, n-p)$ ,  $V_1^t \in \mathcal{M}(p, q)$ ,  $V_2^t \in \mathcal{M}(q-p, q)$ , etc.

**Oservación A-4.2.** La descomposición de  $Q$  mencionada en el Teorema A-4.4 nos permite escribir:

$$QQ^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_p^2 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} U^t \quad (\text{A-4.2})$$

$$\text{y } Q^t Q = V \Sigma^t U^t U \Sigma V^t = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_p^2 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}_{q \times q} V^t \quad (\text{A-4.3})$$



De estas expresiones y la teoría de diagonalización de matrices podemos concluir lo siguiente:

- Las columnas de  $U$  forman un conjunto ortonormal de vectores propios derechos de  $QQ^t$  que corresponden sus valores propios, los cuadrados de los valores singulares,  $(\sigma_1)^2, \dots, (\sigma_n)^2$ , en este orden.
- Las columnas de  $V$  forman un conjunto ortonormal de vectores propios derechos de  $Q^tQ$  que corresponden a sus valores propios, los cuadrados de los valores singulares,  $(\sigma_1)^2, \dots, (\sigma_n)^2, (\sigma_{n+1})^2 = 0, \dots, (\sigma_q)^2 = 0$ , en este orden.

Por esta razón, las columnas de  $U$  son conocidas como los vectores singulares izquierdos de  $Q$ , y las columnas de  $V$  son conocidas como los vectores singulares derechos de  $Q$ .

**Observación A-4.3.** Sea la matriz real no singular  $Q \in \mathcal{M}(2, 2)$  con descomposición de valor singular

$$Q = USV^t \tag{A-4.4}$$

donde  $U = [u_1|u_2]$ ,  $V = [v_1|v_2]$ , y  $S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$

Consideremos ahora el conjunto  $\mathcal{C}$  de los  $x \in \mathbb{R}^2$  tales que

$$x^t x = 1 \tag{A-4.5}$$

Si definimos  $y = Qx$ , la Ecuación (A-4.5) se escribirá como

$$y^t(QQ^t)^{-1}y = 1 \tag{A-4.6}$$

Observando que, de la Ecuación (A-4.2),

$$\begin{aligned} QQ^t &= USV^tVS^tU^t \\ &= US^2U^t, \quad \text{con } S^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-4.7})$$

y

$$(QQ^t)^{-1} = U(S^{-1})^2U^t, \quad \text{con } (S^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-4.8})$$

sigue que  $U$  diagonaliza ortogonalmente la matriz simétrica  $(QQ^t)^{-1}$ , de modo que, definiendo  $y = Uz$ , la Ecuación (A-4.6) se puede reescribir como

$$z^tU^t(QQ^t)^{-1}Uz = 1 \quad (\text{A-4.9})$$

Esta ecuación se puede simplificar aún más empleando la Ecuación (A-4.8), resultando

$$z^t(S^{-1})^{-2}z = 1$$

ó

$$\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2} = 1$$

Lo expuesto hasta aquí permite decir que la descomposición de valor singular de una matriz real no singular  $Q \in \mathcal{M}(n, n)$  aclara la transformación mediante  $Q$  de la hiperesfera  $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 = 1\}$  en el hiperelipsoide  $\mathcal{E} = \{y = Qx / x \in \mathcal{C}\}$  de ejes principales paralelos a los vectores columna de  $U$  y de longitudes de semiejes principales iguales a los de los valores singulares de  $QQ^t$ . En la Figura A-4.1 se muestra el caso en que  $Q$  es una matriz de orden 2.

Nótese además, de la discusión anterior, que

$$\|Q\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \sigma_1$$

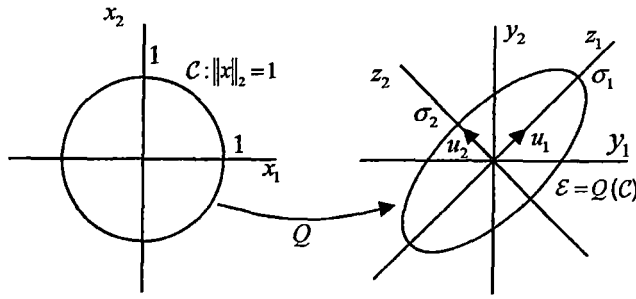


Figura A-4.1: Ilustración acerca de cómo la descomposición de valor singular especifica la estructura de la aplicación lineal  $Q$ .

Otras observaciones que se pueden hacer respecto del Teorema A-4.4 y la Ecuación (A-4.1) son las siguientes:

- Se cumple que  $\text{Im}[Q] = \text{Im}[U_1]$  y una base ortonormal del espacio imagen de  $Q$  es el conjunto de vectores columna de  $U_1$ .
- $N[Q] = \text{Im}[V_2]$  y que una base ortonormal del núcleo de  $Q$  está dada por el conjunto de vectores columna de  $V_2$ .
- $\text{Im}[Q]^\perp = \text{Im}[U_2]$  y una base ortonormal de  $\text{Im}[Q]^\perp$  está dada por el conjunto de vectores columna de  $U_2$ .
- $N[Q]^\perp = \text{Im}[V_1]$  y una base de  $N[Q]^\perp$  está dada por el conjunto de vectores columna de  $V_1$ .

**Corolario A-4.1.** Supóngase que la descomposición de valor singular de  $Q$  es dada por la Ecuación (A-4.1) y que, como lo afirma el Teorema A-4.4,  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p > \sigma_{p+1} = \dots = \sigma_n = 0$ . Entonces el  $\text{rango}(Q) = p$ , las columnas de  $V_2 = [\nu_{p+1}, \dots, \nu_n]$  proveen una base ortonormal para  $N[Q]$ , las columnas de  $U_1 = [u_1, \dots, u_p]$  proveen una base ortonormal para  $\text{Im}[Q]$ , y  $\|Q\|$ , la norma espectral de  $Q$  (véase la Página 183) es igual a  $\sigma_1$ .

### A-4.2.1. Las Pseudo Inversas Moore-Penrose Derecha e Izquierda.

En muchos problemas de ingeniería se deben resolver sistemas de ecuaciones de la forma  $Qx = b$ . Con frecuencia este sistema es inconsistente (no tiene solución) debido a que tanto la matriz  $Q$  como el vector  $b$  son obtenidos a través de mediciones con errores o ruido. En estos casos es común la consideración del problema equivalente

$$\min_x \|Qx - b\|_2 \quad (\text{A-4.10})$$

Si se define una pseudo inversa

$$Q^+ = V \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^t \quad (\text{A-4.11})$$

donde la descomposición de valor singular de  $Q$  es

$$U \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^t$$

se tiene que la multiplicación por la izquierda de ambos lados de  $Qx = b$  por  $Q^+$  resulta en

$$\begin{aligned} Q^+Qx &= Q^+b \\ \Leftrightarrow V \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^t U \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^t x &= Q^+b \\ \Leftrightarrow x^* &= Q^+b \end{aligned}$$

Se puede probar que (véase la referencia [8])

$$x^* = Q^+b \quad (\text{A-4.12})$$

minimiza la Ecuación (A-4.10) y que  $Q^+$  es la matriz que satisface

$$\min_{M \in \mathbb{R}^{n \times q}} \|QM - \mathbb{I}_p\|_F$$

donde  $p = \min(n, q)$  y  $\|M\|_F$  denota la llamada norma de Frobenius de  $M$ . La norma de Frobenius de  $M$  es definida como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes, esto es, la raíz cuadrada de  $\text{tr}[MM^t]$ . En otras palabras,  $Q^+$  es aquella única matriz tal que  $QQ^+$  está más cerca a  $\mathbb{I}_p$  si  $q \geq n$  en el sentido Euclidiano. Si  $n \geq q$ , entonces  $Qx = b$  es sobredeterminado y  $Q^+Q$  es la matriz más cercana a  $\mathbb{I}_q$  en el sentido de mínimos cuadrados (véase la referencia [8]).

**Definición A-4.3.** La pseudo inversa Moore-Penrose de  $Q$ , denotada por  $Q^+$  es aquella única matriz que satisface las siguientes condiciones:

1.  $QQ^+Q = Q$
2.  $Q^+QQ^+ = Q^+$
3.  $(QQ^+)^t = QQ^+$  (condición de simetría)
4.  $(Q^+Q)^t = Q^+Q$  (condición de simetría)

Es sencillo mostrar que la  $Q^+$  definida por la Ecuación (A-4.11) satisface estas condiciones. Esto nos lleva a la discusión de las inversas derecha e izquierda de una matriz rectangular de rango total.

**Observación A-4.4.** Recuérdese que una inversa derecha de una matriz  $Q \in \mathcal{M}(n, q)$  con  $\text{rango}(Q) = n \leq q$  es cualquier matriz  $Q^{-R}$  que satisface  $QQ^{-R} = \mathbb{I}$ .

**Proposición A-4.1.** Si  $Q$  tiene una inversa derecha  $Q^{-R}$ , entonces la pseudo inversa derecha Moore-Penrose es dada por

$$Q^{-R} = Q^t[QQ^t]^{-1} = Q^+$$

**Oservación A-4.5.** *Recuérdese que una matriz  $R \in \mathcal{M}(q, n)$  con  $q \geq n$  y  $\text{rango}(R) = n$ , tiene una inversa izquierda denotada por  $R^{-L}$  que satisface  $R^{-L}R = \mathbb{I}$ .*

**Proposición A-4.2.** *Si  $R$  tiene una inversa izquierda  $R^{-L}$ , la pseudo inversa izquierda Moore-Penrose está dada por*

$$R^+ = (R^t R)^{-1} R^t = R^{-L}$$

## Bibliografía

- [1] J. DWIGHT APLEVICH. The Essentials of Linear State-Space Systems. *John Wiley & Sons, New York, 2000.*
- [2] W. E. BOYCE AND R. C. DIPRIMA. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, *sixth edition. John Wiley & Sons, New York, 1997.*
- [3] CHI-TSONG CHEN. Linear System and Design, *third edition. Oxford University Press, New York, 1999.*
- [4] J. J. D'AZZO AND C. H. HOUPIS. Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern, *fourth edition. McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.*
- [5] RAYMOND A. DECARLO. Linear Systems. *Prentice-Hall, 1989.*
- [6] R. C. DORF AND R. H. BISHOP. Modern Control systems, *eighth edition. Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1998.*
- [7] A. F. FILIPPOV. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. *Mathematics and Its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1988.*
- [8] G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN. Matrix Computations. *Second ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989.*
- [9] KENNETH HOFFMAN, RAY KUNZE. Álgebra Lineal. *Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1973.*
- [10] A. ISIDORI. Nonlinear Control Systems, *third edition. Springer-Verlag, London, 1995.*

- [11] THOMAS KAILATH. Linear Systems. *Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ, 1980.*
- [12] H. K. KHALIL. Nonlinear Systems. *Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, 1996.*
- [13] B.P. LATHI. Signals, Systems, and Controls. *Intext Educational Publishers, Inc., 1974.*
- [14] THE MATHWORKS, INC.. User's Guide. Symbolic Math Toolbox. *The MathWorks, Inc., 1998.*
- [15] THE MATHWORKS, INC.. User's Guide. SIMULINK. *The MathWorks, Inc., 1998.*
- [16] BENJAMIN C. KUO. Sistemas de Control Automático, *2da. Edición. Compañía Editorial Continental, S.A., 1991.*
- [17] KATSUHIKO OGATA. Ingeniería de Control Moderna. *tercera edición. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1998.*
- [18] K. OGATA. Modern Control Engineering. *third edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 1997.*
- [19] JAN WILLEN POLDERMAN, JAN C. WILLEMS. Introduction to Mathematical Systems Theory. *Springer-Verlag New York, Inc., 1998.*
- [20] W. RUDIN. Principles of Mathematical Analysis, *third edition. McGraw-Hill, Inc., New York, 1976.*
- [21] J.-J. E. SLOITINE AND W. LI. Applied Nonlinear Control. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1991.*
- [22] E. D. SONTAG. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, *second edition. Springer-Verlag, New York, 1998.*



- [23] M. VIDYASAGAR. *Nonlinear Systems Analysis, second edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1993.*
- [24] DARE A. WELLS. *Dinámica de Lagrange. McGraw-Hill Internacional, Inc., U.S.A., 1967.*