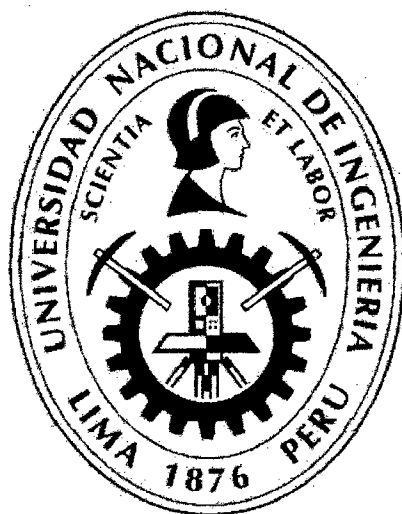


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**TITULADA:**

**MÉTODOS EN LA INSERCIÓN DE NODOS Y ELEVACIÓN DE  
GRADO USANDO LAS MATRICES BSBT**

**PRESENTADA POR:**

**CHRISTIAN ULISES SALAZAR FERNÁNDEZ**

**ASESOR:**

**MAG. JOHNNY VALVERDE MONTORO**

**LIMA-PERÚ**

**2014**

**Digitalizado por:**

**Consortio Digital del  
Conocimiento MebLatam,  
Hemisferio y Dalse**

# Dedicatoria

Este trabajo está especialmente dedicado a mis padres Don Rafael y Doña Lida.

# Agradecimientos

Sea propicia la oportunidad para agradecer a mi asesor el profesor Mag. Johnny Valverde Montoro, profesor ordinario de la Escuela Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNI, por su paciencia, guía y su invaluable apoyo en la conclusión del presente trabajo.

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. B-splines . . . . .	3
1.2. Propiedades . . . . .	8
1.2.1. Derivada de los B-spline . . . . .	8
1.2.2. Independencia Lineal de los B-splines . . . . .	12
1.2.3. B-splines con nodos multiples . . . . .	16
1.3. Curvas B-splines . . . . .	18
1.3.1. Curvas B-splines Abiertas . . . . .	20
1.3.2. Curvas B-splines Cerradas . . . . .	23
1.4. El Algoritmo de Boor . . . . .	26
<b>2. Operaciones Fundamentales en las Curvas B-spline</b>	<b>28</b>
2.1. Inserción de nodos . . . . .	28
2.1.1. Algoritmo de Inserción de Bohem . . . . .	28
2.2. Elevación de grado . . . . .	32
2.2.1. Principio de los Blossoms . . . . .	32
2.2.2. Método de Elevación de Grado de Prautzsch . . . . .	35
<b>3. Matrices de Transformación de las Bases B-spline</b>	<b>49</b>
3.1. Condiciones de Existencia y propiedades de las matrices BSBT . . . . .	50

<b>4. Representación recursiva y algoritmo de matrices BSBT</b>	<b>55</b>
4.1. Relación recursiva de las matrices BSBT . . . . .	55
4.2. Fórmula recursiva . . . . .	63
4.3. Cálculo de las matrices BSBT cuando $\bar{T}$ esta anclado por la izquierda . .	66
4.4. Cálculo de las matrices BSBT cuando $\bar{T}$ no esta anclado por la izquierda	67
<b>5. Un nuevo método para la inserción de nodos y elevación de grado de las curvas B-spline</b>	<b>70</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>79</b>

# Resumen

El propósito del presente trabajo es presentar el concepto de matriz de transformación de bases B-spline (abreviado como matriz **BSBT**) y su aplicación en el manejo de las curvas B-spline.

La matriz **BSBT** permite que una base B-spline pueda ser representada por otra, se presentará las condiciones de existencia y unicidad de esta matriz. Mostrando una relación recursiva de las matrices **BSBT**, para luego desarrollar un algoritmo que calcule dicha matriz, que sea eficiente y simple de implementar.

Finalmente se verá su aplicación en dos problemas que se presentan en las curvas B-splines: la inserción de nodos y la elevación de grado, ya sea por separado o simultáneamente.

# Introducción

Los métodos B-spline son muy usados en el modelamiento de curvas y superficies, se aplican en las áreas del Diseño Geométrico Asistido por Computadora (CAGD) Y Gráficos por Computadora (CG).

En las curvas B-spline y en el modelamiento de superficies se presenta un problema, el cual es la conversión entre diferentes representaciones de curvas B-spline y superficies, los cuales surgen durante la reducción de datos, control de modelamiento, aproximación e intercambio de datos entre diferentes sistemas CAD. Muchas de estas conversiones son causadas por las operaciones fundamentales de las curvas y superficies B-spline (inserción de nodos, elevación de grado, eliminación de nodos y la reducción de grado).

Estas operaciones han sido estudiadas, y hay resultados muy útiles sobre eso (Boehm, 1980; Bohem y Prautzsch, 1985; Piegl y Tiller, 1994; Juhasz y Bancisk, 2003; Huang, 2005). Todos estos problemas pueden replantearse como un problema de representación de una base B-spline en otra base B-spline, es decir un problema de conversiones entre bases B-splines. La manera de abarcar este problema es la matriz de transformación de bases B-spline.

Se mostrará que las matrices BSBT pueden ser usadas para establecer un modelo matemático uniforme para inserción de nodo, elevación de grado, eliminación de nodos y la reducción de grado de curvas y superficies B-spline, y proveer una herramienta general para las conversiones entre diferentes representaciones de curvas y superficies B-spline.

Este trabajo esta organizado como sigue:

En el primer capítulo se desarrolla la teoría básica de las funciones B-splines como su definición recursiva, propiedades generales, diferenciabilidad e independencia lineal y el caso en que se presenten nodos múltiples. Luego se tratará sobre las curvas B-spline, su clasificación en curvas abiertas y cerradas, para finalmente mostrar el algoritmo de Boor.

En el segundo capítulo se trata la inserción de nodos (Método de Inserción de Bohem) y la elevación de grado (Algoritmo de Prautzsch) en las curvas B-spline, que son las operaciones más utilizadas en el diseño geométrico.

En el tercer capítulo se hace un desarrollo cualitativo de las matrices de transformación, empezando con la definición de dicha matriz, luego se dá las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de la matriz **BSBT**, y un teorema que indica la forma de este tipo de matrices.

Durante el cuarto capítulo se dá una relación recursiva para la construcción de las matrices **BSBT**, viendolo en dos casos segun la forma del vector nodo: cuando es del tipo anclado por la derecha y cuando no lo es.

Finalmente en el último capítulo se muestra la aplicación que se dá en la inserción de nodos y en la elevación de grados en curvas B-spline, que a diferencia del método de inserción de Bohem que trabaja insertando nodos uno por uno, con esta metodología se puede hacer insertando de una vez un grupo de nodos, y a diferencia del algoritmo de Prautzsch que permite elevar el grado de una curva B-spline de uno en uno, éste método lo puede hacer en general, asi como tambien simultáneamente inserción de nodos y elevación de grado.

Finalmente se dan las conclusiones y referencias bibliográficas del presente trabajo.



# Capítulo 1

## Preliminares

Se hace un estudio general de las funciones B-spline, mostrando su definición recursiva, propiedades generales y además se dan las condiciones para que formen una base.

### 1.1. B-splines

**Definición 1.** Un vector nodo  $\mathbf{T}$  es un conjunto de números reales ordenados en forma creciente, es decir:

$$\mathbf{T} := \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m\} \text{ tal que } t_i < t_{i+1}, \text{ para } i = 0, \dots, m-1.$$

A cada  $t_i$  se le conoce como nodo donde  $i = 0, 1, \dots, m$ .

**Definición 2.** Sean  $k, n$  enteros positivos, dado un vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}\}$$

las funciones B-splines  $B_{i,k}$  de orden  $k$  (o de grado  $k-1$ ), se definen como:

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t); \quad k > 1, i = 0, 1, \dots, n.$$

**Observación:**

Otra notación empleada es  $N_i^p$ , la cual denota una función B-spline de grado  $p$  respecto al vector nodo:  $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_{m+p+1}\}$ . Y su relación recursiva sería:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}; \quad i = 1, \dots, m$$

$$N_i^p(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_i^{p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(t); \quad p \geq 1, i = 1, \dots, m.$$

**Ejemplo 1.1.** Para el vector nodo  $\mathbf{T} = \{0, 3, 4, 6, 10, 15\}$ , se tendrá:

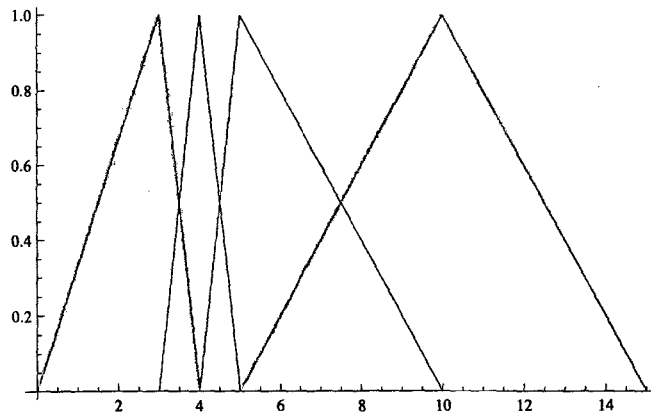


Figura 1.1: Las funciones B-splines de orden  $k = 2$ ,  $\{B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{3,2}\}$ , ( $n = 3$ )

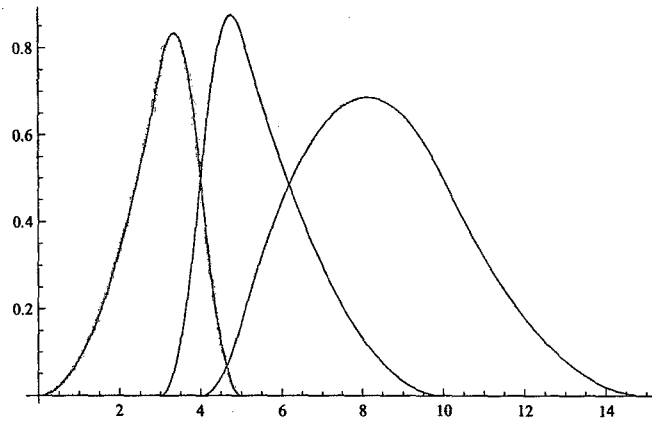


Figura 1.2: Las funciones B-splines de orden  $k = 3$ ,  $\{B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}\}$ , ( $n = 2$ )

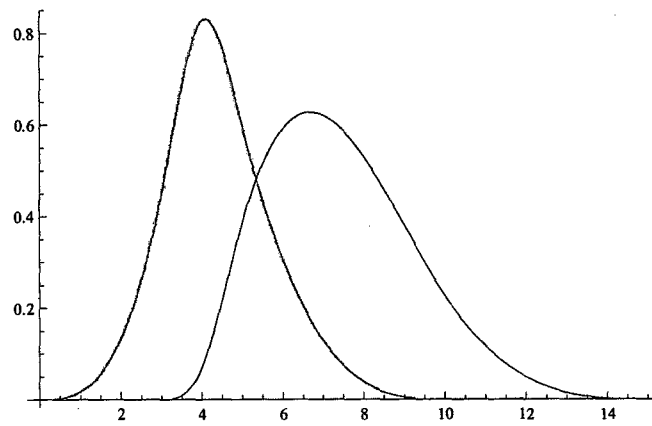


Figura 1.3: Funciones B-splines de orden  $k = 4$ ,  $\{B_{0,4}, B_{1,4}\}$ , ( $n = 1$ )

**Proposición 1.** [4] Las funciones B-spline cumplen las siguientes proposiciones:

- a)  $B_{i,k}(t) = 0$ , para  $t \notin (t_i, t_{i+k})$ .
- b)  $B_{i,k}(t) > 0$ , para  $t \in (t_i, t_{i+k})$ .
- c)  $\sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) = 1$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$ .

*Demostración.*

a) Aplicando inducción sobre  $k$ , para  $k = 1$  el resultado es obvio. Si se cumple para  $k - 1$ , veamos que sea cierto para  $k$ , cuando  $t \notin (t_i, t_{i+k})$  se tiene que  $t \notin (t_i, t_{i+k-1})$  y  $t \notin (t_{i+1}, t_{i+k})$ , usando la hipótesis de inducción tendríamos  $B_{i,k-1}(t) = 0$  y  $B_{i+1,k-1}(t) = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} B_{i,k}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \\ &= \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} (0) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) También usaremos inducción sobre  $k$ , para  $k = 1$ , el resultado es directo. Si se cumple para  $k - 1$ , tendremos  $B_{i,k-1}(t) > 0$  para  $t \in (t_i, t_{i+k-1})$  y del inciso a) se tiene  $B_{i,k-1}(t) = 0$  para  $t \notin (t_i, t_{i+k-1})$  por lo tanto  $B_{i,k-1}(t) \geq 0$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

Veamos que es cierto para  $k$ , sea  $t \in (t_i, t_{i+k}) = (t_i, t_{i+k-1}) \cup (t_{i+1}, t_{i+k})$ .

Si  $t \in (t_i, t_{i+k-1})$  se tendrá  $B_{i,k-1}(t) > 0$  y como  $B_{i+1,k-1}(t) \geq 0$  para  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B_{i,k}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \underbrace{B_{i,k-1}(t)}_{>0} + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \underbrace{B_{i+1,k-1}(t)}_{\geq 0} \\ &> 0, \quad t \in (t_i, t_{i+k-1}) \end{aligned}$$

Cuando  $t \in (t_{i+1}, t_{i+k})$ , se tiene que  $B_{i+1,k-1}(t) > 0$  y como  $B_{i,k-1} \geq 0$  para  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B_{i,k}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \underbrace{B_{i,k-1}(t)}_{\geq 0} + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \underbrace{B_{i+1,k-1}(t)}_{>0} \\ &> 0, \quad t \in (t_{i+1}, t_{i+k}) \end{aligned}$$

=

Así pues  $B_{i,k}(t) > 0$  para  $t \in (t_i, t_{i+k})$ .

c) Para  $k = 1$ , sea  $t \in [t_0, t_{n+1})$  entonces existe un  $i_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $t \in [t_{i_0}, t_{i_0+1})$  así  $B_{i_0,1}(t) = 1$  y  $B_{i,1}(t) = 0$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$  se tiene  $B_{i,1}(t) = 0$  pues  $t \notin [t_i, t_{i+1})$ . Por lo tanto  $\sum_{i=0}^n B_{i,1}(t) = 1$ .

Supongamos que sea cierto para  $k - 1$ , es decir  $\sum_{i=1}^n B_{i,k-1}(t) = 1, t \in [t_{k-2}, t_{n+1})$ .

Luego para  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) &= \sum_{i=0}^n \left( \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \sum_{i=0}^n \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{t_{i+k-1} - t}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) \\
&= \left( \frac{t - t_0}{t_{k-1} - t} B_{0,k-1}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) \right) \\
&\quad + \left( \sum_{i=1}^n \frac{t_{i+k-1} - t}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{n+k} - t}{t_{n+k} - t_{n+1}} B_{n+1,k-1}(t) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n B_{i,k-1}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,k-1}(t) = 1
\end{aligned}$$

pues como  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$  se tiene  $B_{0,k-1}(t) = B_{n+1,k-1}(t) = 0$ .

□

## 1.2. Propiedades

### 1.2.1. Derivada de los B-spline

Se muestra una relación recursiva para la derivada de una función B-spline, la cual a su vez permitirá determinar la clase de diferenciabilidad a la que pertenecen las funciones B-spline, según el orden que tenga.

**Definición 3.** Dada las funciones B-spline  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ , asociados con el vector nodo

$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$  se define la función lineal  $V_{i,k}$  como:

$$V_{i,k}(t) = \alpha_{i,k}(t - t_i)$$

donde  $\alpha_{i,k} = \frac{1}{t_{i+k-1} - t_i}$ .

Usando estas definiciones, se puede reescribir la fórmula recursiva de los B-splines para  $k > 1$ , de la siguiente manera:

$$B_{i,k}(t) = V_{i,k}(t)B_{i,k-1}(t) + (1 - V_{i+1,k}(t))B_{i+1,k-1} \quad (1.1)$$

#### Proposición 2.

- a)  $\frac{d}{dt}V_{i,k}(t) = \alpha_{i,k}$
- b)  $\alpha_{i,k}V_{i,k+1} = \alpha_{i,k+1}V_{i,k}$
- c)  $\alpha_{i+1,k}(1 - V_{i,k+1}) = \alpha_{i,k+1}(1 - V_{i+1,k})$

*Demostración.*

a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_{i,k}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}\right) \\ &= \frac{1}{t_{i+k-1} - t_i} \\ &= \alpha_{i,k} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,k} V_{i,k+1} &= \left( \frac{1}{t_{i+k-1} - t_i} \right) \left( \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) \\
&= \left( \frac{1}{t_{i+k} - t_i} \right) \left( \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) \\
&= \alpha_{i,k+1} V_{i,k}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1,k} (1 - V_{i,k+1}) &= \left( \frac{1}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) \left( 1 - \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) \\
&= \left( \frac{1}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) \left( \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} \right) \\
&= \left( \frac{1}{t_{i+k} - t_i} \right) \left( \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) \\
&= \alpha_{i,k+1} \left( \frac{t_{i+k} - t_{i+1} - (t - t_{i+1})}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) \\
&= \alpha_{i,k+1} \left( 1 - \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) \\
&= \alpha_{i,k+1} (1 - V_{i+1,k})
\end{aligned}$$

□

**Lema 1.** [4] Para  $k \geq 3$

$$\frac{d}{dt} B_{i,k}(t) = \frac{k-1}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) - \frac{k-1}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad (1.2)$$

*Demostración.* La demostración se hace por inducción. Para  $k = 3$ , se tiene que verificar:

$$\frac{d}{dt} B_{i,3}(t) = \frac{2}{t_{i+2} - t_i} B_{i,2}(t) - \frac{2}{t_{i+3} - t_{i+1}} B_{i+1,2}(t)$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dt} B_{i,3}(t) = 2\alpha_{i,3} B_{i,2}(t) - 2\alpha_{i+1,3} B_{i+1,2}(t) \quad (1.3)$$

la cual se verifica teniendo en cuenta las siguientes formas de expresar  $B_{i,2}$  y  $B_{i,3}$ , que

resultan de aplicar la fórmula recursiva (1.1), para  $k = 2$  y  $k = 3$ .

$$B_{i,2}(t) = \begin{cases} V_{i,2}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 1 - V_{i+1,2}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$B_{i,3}(t) = \begin{cases} V_{i,2}V_{i,3}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ V_{i,3}(1 - V_{i+1,2}) + V_{i+1,2}(1 - V_{i+1,3}), & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ (1 - V_{i+1,3})(1 - V_{i+2,2}), & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

entonces se concluye que  $B_{i,3}$  es derivable, más aún:

$$\frac{d}{dt}B_{i,3}(t) = \begin{cases} 2\alpha_{i,3}V_{i,2}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 2\alpha_{i,3}(1 - V_{i+1,2}) - 2\alpha_{i+1,3}V_{i+1,2}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ -2\alpha_{i+1,3}(1 - V_{i+2,2}), & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Se verifica que:

$$2\alpha_{i,3}B_{i,2}(t) - 2\alpha_{i+1,3}B_{i+1,2}(t) = \begin{cases} 2\alpha_{i,3}V_{i,2}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 2\alpha_{i,3}(1 - V_{i+1,2}) - 2\alpha_{i+1,3}V_{i+1,2}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ -2\alpha_{i+1,3}(1 - V_{i+2,2}), & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Así pues se cumple la ecuación (1.3). Supongamos que la fórmula es válida para una  $k$  fija, y con esta hipótesis se deduce para  $k + 1$ . La hipótesis de inducción es la ecuación (1.2), la cual al reescribirla usando las recientes definiciones dadas quedara como:

$$\frac{d}{dt}B_{i,k}(t) = (k-1)\alpha_{i,k}B_{i,k-1}(t) - (k-1)\alpha_{i+1,k}B_{i+1,k-1}(t)$$

Usando la relación recursiva para los B-spline de orden  $k + 1$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_{i,k+1} &= \frac{d}{dt}[V_{i,k+1}B_{i,k} + (1 - V_{i+1,k+1})B_{i+1,k}] \\ &= V_{i,k+1}\frac{d}{dt}B_{i,k} + \alpha_{i,k+1}B_{i,k} + (1 - V_{i+1,k+1})\frac{d}{dt}B_{i+1,k} - \alpha_{i+1,k+1}B_{i+1,k} \end{aligned}$$



En esta parte se hace uso del inciso (a) de la proposición anterior. Ahora usando la hipótesis de inducción y reemplazando en las derivadas del lado derecho. El resultado sería:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_{i,k+1} &= V_{i,k+1}((k-1)\alpha_{i,k}B_{i,k-1} - (k-1)\alpha_{i+1,k}B_{i+1,k-1}) + \alpha_{i,k+1}B_{i,k} \\ &\quad + (1 - V_{i+1,k+1})((k-1)\alpha_{i+1,k}B_{i+1,k-1} - (k-1)\alpha_{i+2,k}B_{i+2,k-1}) - \alpha_{i+1,k+1}B_{i+1,k} \end{aligned}$$

Reagrupando terminos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_{i,k+1} &= \alpha_{i,k+1}B_{i,k} + (k-1)\alpha_{i,k}V_{i,k+1}B_{i,k-1} - \alpha_{i+1,k+1}B_{i+1,k} \\ &\quad - (k-1)\alpha_{i+2,k}(1 - V_{i+1,k+1})B_{i+2,k-1} - (k-1)\alpha_{i+1,k}V_{i,k+1}B_{i+1,k-1} \\ &\quad + (k-1)\alpha_{i+1,k}(1 - V_{i+1,k+1})B_{i+1,k-1} \end{aligned}$$

En esta ecuación se hacen las siguientes sustituciones, todas justificadas por los incisos (b) y (c) de la última proposición dada

- $(k-1)\alpha_{i,k}V_{i,k+1}B_{i,k-1} = (k-1)\alpha_{i,k+1}V_{i,k}B_{i,k-1}$
- $-(k-1)\alpha_{i+2,k}(1 - V_{i+1,k+1})B_{i+2,k-1} = -(k-1)\alpha_{i+1,k+1}(1 - V_{i+2,k})B_{i+2,k-1}$
- $$\begin{aligned} &-(k-1)\alpha_{i+1,k}V_{i,k+1}B_{i+1,k-1} + (k-1)\alpha_{i+1,k}(1 - V_{i+1,k+1})B_{i+1,k-1} \\ &= -(k-1)\alpha_{i+1,k}V_{i,k+1}B_{i+1,k-1} + (k-1)\alpha_{i+1,k}B_{i+1,k-1} - (k-1)\alpha_{i+1,k}V_{i+1,k+1}B_{i+1,k-1} \\ &= (k-1)\alpha_{i+1,k}(1 - V_{i,k+1})B_{i+1,k-1} - (k-1)\alpha_{i+1,k}V_{i+1,k+1}B_{i+1,k-1} \\ &= (k-1)\alpha_{i,k+1}(1 - V_{i+1,k})B_{i+1,k-1} - (k-1)\alpha_{i+1,k+1}V_{i+1,k}B_{i+1,k-1} \end{aligned}$$

Al emplear estas sustituciones, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_{i,k+1} &= \alpha_{i,k+1}B_{i,k} + (k-1)[\alpha_{i,k+1}V_{i,k}B_{i,k-1} + \alpha_{i,k+1}(1 - V_{i+1,k})B_{i+1,k-1}] \\ &\quad - \alpha_{i+1,k+1}B_{i+1,k} - (k+1)[\alpha_{i+1,k+1}V_{i+1,k}B_{i+1,k-1} + \alpha_{i+1,k+1}(1 - V_{i+2,k})B_{i+2,k-1}] \end{aligned}$$

Usando la fórmula recursiva de los B-splines en los corchetes, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B_{i,k+1} &= \alpha_{i,k+1}B_{i,k} + (k-1)\alpha_{i,k+1}B_{i,k} - \alpha_{i+1,k+1}B_{i+1,k} - (k-1)\alpha_{i+1,k+1}B_{i+1,k} \\ &= k\alpha_{i,k+1}B_{i,k} - k\alpha_{i+1,k+1}B_{i+1,k}\end{aligned}$$

□

**Corolario 3.** [4] Para  $k \geq 2$ , los B-splines  $B_{i,k}$  son de clase  $C^{k-2}(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* De la ecuación (1.1),  $B_{i,2}$  es de la siguiente forma:

$$B_{i,2}(t) = \begin{cases} V_{i,2}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 1 - V_{i+1,2}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} B_{i,2}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} B_{i,2}(t) = 1 = \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^+} B_{i,2}(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_{i+2}^-} B_{i,2}(t) = 0$$

asi se verifica que  $B_{i,2} \in C^0(\mathbb{R})$ .

Supongamos ahora que  $B_{i,k} \in C^{k-2}(\mathbb{R})$ . Por el Lema 1,  $(\frac{d}{dt})B_{i,k+1} \in C^{k-2}(\mathbb{R})$ , debido a que esta derivada es combinación lineal de  $B_{i,k}$  y  $B_{i+1,k}$ . Por lo tanto  $B_{i,k+1} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ . Segun el principio de inducción esto completa la prueba. □

## 1.2.2. Independencia Lineal de los B-splines

En esta sección se determina bajo que condiciones un conjunto de funciones B-spline es linealmente independiente, más aún mostraremos que es una base para el espacio de las funciones spline.

**Lema 2.** [4] El conjunto de B-splines  $\{B_{j,k}, B_{j+1,k}, \dots, B_{j+k-1,k}\}$  es linealmente independiente en  $[t_{k+j-1}, t_{k+j})$ .

*Demostración.* Consideremos primero el caso  $k = 1$ . El lema afirma que  $\{B_{j,k}\}$  es linealmente independiente en el intervalo  $[t_j, t_{j+k})$ , lo cual es obviamente cierto. Con el propósito de llevar a cabo una demostración por inducción hagamos  $k \geq 2$  y suponemos que el lema es correcto para el índice  $k - 1$ . Partiendo de esta suposición se probará el lema para el índice  $k$ .

Sea  $S = \sum_{i=0}^{k-1} c_{j+i} B_{j+i,k}$ , usando el lema 1 se tiene:

$$\begin{aligned}
S' &= \sum_{i=0}^{k-1} c_{j+i} \frac{d}{dt} B_{j+i,k} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} c_{j+i} [(k-1)\alpha_{j+i,k} B_{j+i,k-1} - (k-1)\alpha_{j+i+1,k} B_{j+i+1,k-1}] \\
&= (k-1) \sum_{i=0}^{k-1} c_{j+i} \alpha_{j+i,k} B_{j+i,k-1} - (k-1) \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} c_{j+i} \alpha_{j+i+1,k} B_{j+i+1,k-1}}_{\sum_{i=1}^k c_{j+i-1} \alpha_{j+i,k} B_{j+i,k-1}} \\
&= \underbrace{(k-1)c_{j,k} \alpha_{j,k}}_M B_{j,k-1} + (k-1) \sum_{i=1}^{k-1} c_{j+i} \alpha_{j+i,k} B_{j+i,k-1} \\
&\quad - (k-1) \sum_{i=1}^{k-1} c_{j+i-1} \alpha_{j+i,k} B_{j+i,k-1} - \underbrace{(k-1)c_{j+k-1} \alpha_{j+k,k}}_N B_{j+k,k-1} \\
&= M B_{j,k-1} + (k-1) \sum_{i=1}^{k-1} (c_{j+i} - c_{j+i-1}) \alpha_{j+i,k} B_{j+i,k-1} + N B_{j+k,k-1}
\end{aligned}$$

Ahora se supone que  $S|_{[t_{k+j-1}, t_{k+j})} = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= S'|_{[t_{k+j-1}, t_{k+j})} \\
0 &= (k-1) \sum_{i=1}^{k-1} (c_{j+i} - c_{j+i-1}) \alpha_{j+i,k} B_{j+i,k-1}|_{[t_{k+j-1}, t_{k+j})}
\end{aligned}$$

pues  $B_{j,k-1}$  y  $B_{j+k,k-1}$  son nulos en  $[t_{k+j-1}, t_{k+j})$ .

Usando la hipótesis de inducción en  $\{B_{j+1,k-1}, B_{j+2,k-1}, \dots, B_{j+k-1,k-1}\}$ , se concluye que el conjunto es linealmente independiente en  $[t_{k+j-1}, t_{k+j})$ . Entonces de la ecuación

(1.4), se tendrá  $c_{j+i} = c_{j+i-1}$  para  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , si defino  $\lambda = c_j$  se tendrá:

$$S = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda B_{j+i,k} = \lambda \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} B_{j+i,k}}_1 = \lambda$$

Como  $S$  se anula en  $[t_{k+j-1}, t_{k+j})$ , necesariamente  $\lambda = 0$ , por lo tanto:

$$c_j = c_{j+i} \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, k-1$$

□

**Lema 3.** [4] El conjunto de B-splines  $\{B_{-k+1,k}, B_{-k+2,k}, \dots, B_{n-1,k}\}$  es linealmente independiente en  $[t_0, t_n)$ .

*Demostración.* Sea  $S = \sum_{i=k-1}^{n-1} c_i B_{i,k}$  y supongamos que  $S|_{[t_0, t_n)} = 0$ .

En el intervalo  $[t_0, t_1)$  los b-splines  $B_{1,k}, B_{2,k}, \dots, B_{n-1,k}$  son nulos, entonces:

$$0 = S|_{[t_0, t_1)} = \sum_{i=k-1}^0 c_i B_{i,k}|_{[t_0, t_1)}$$

ahora del lema 2 para  $j = -k+1$  se tiene que  $B_{-k+1,k}, B_{-k+2,k}, \dots, B_{0,k}$  es linealmente independiente en  $[t_0, t_1)$ . Entonces  $c_i = 0$  para  $i = -k+1, -k+2, \dots, 0$ . Ahora suponemos que existe un  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  tal que  $c_i \neq 0$ , entonces para un  $t \in [t_i, t_{i+1})$  se cumple  $B_{i,k}(t) \neq 0$ , pero  $0 = S(t) = \underbrace{c_i}_{\neq 0} \underbrace{B_{i,k}}_{\neq 0} \neq 0$ , lo cual es una contradicción por lo tanto  $c_i = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . □

**Definición 4.** Sean  $k, n$  enteros positivos, dado un vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

una función spline de orden  $k$  (o de grado  $k-1$ ), es una función  $s$  que satisface las siguientes condiciones:

- En cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i)$  es un polinomio de grado menor igual a  $k-1$ .
- $s$  tiene una derivada de orden  $k-2$  continua en  $[t_0, t_n)$ .

**Teorema 4.** [4] Una base para el espacio

$$S_{n,k} = \{s : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R} / s \text{ es una función spline de orden } k\}$$

es

$$\{B_{i,k} |_{[t_0, t_n]} : -k + 1 \leq i \leq n - 1\}$$

Por consiguiente, la dimensión de  $S_{n,k}$  es  $k + n - 1$ .

*Demostración.* Primero veamos que  $\dim S_{n,k} = n + k - 1$ , exhibiendo un conjunto de  $n + k - 1$  funciones que generen  $S_{n,k}$ . En efecto dado  $s \in S_{n,k}$ , es posible expresar  $s$  como:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (t - t_i)_+^{k-1}, \quad t \in [t_0, t_n]$$

donde

$$(t - t_i)_+^{k-1} = \begin{cases} (t - t_i)^{k-1}, & \text{si } t \geq t_i \\ 0, & \text{si } t < t_i \end{cases}$$

Para demostrar la validez de la ecuación (1.2.2) se empieza con el intervalo  $[t_0, t_1]$  en el que todas las potencias truncadas  $(t - t_i)_+^{k-1}$  son nulas.  $s(t)$  es un polinomio de grado  $k-1$  digamos  $p_0$ . Se tiene entonces  $p_0(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i$ . Esta expresión determina todos los coeficientes  $a_i$ . En el intervalo  $[t_1, t_2]$ ,  $s(t)$  es otro polinomio llamémoslo  $p_1$ . Tomando en cuenta las condiciones de continuidad en  $t_1$ , se tiene:

$$(p_1 - p_0)^{(r)} = 0, \quad 0 \leq r \leq k - 2$$

Como  $p_1 - p_0$  es de a lo más grado  $k - 1$ , se tiene  $(p_1 - p_0)(t) = b_1(t - t_1)^{k-1}$  para alguna  $b_1$ . Por lo tanto se puede escribir:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + b_1(t - t_1)_+^{k-1}, \quad t \in [t_0, t_2]$$

Este mismo argumento se repite en  $t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$  para obtener  $b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$  tal que:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + b_1(t - t_1)_+^{k-1} + b_2(t - t_2)_+^{k-1} + \dots + b_{n-1}(t - t_{n-1})_+^{k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t - t_i)_+^{k-1}, \quad t \in [t_0, t_n] \end{aligned}$$

Además se verifica que el conjunto de  $n + k - 1$  funciones

$$\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, (t - t_1)_+^{k-1}, \dots, (t - t_{n-1})_+^{k-1}\}$$

es linealmente independiente en  $[t_0, t_n]$ , por lo tanto  $\dim(S_{n,k}) = n + k - 1$ .

Por otra parte el conjunto de b-splines  $\{B_{-k+1,k}, B_{-k+2,k}, \dots, B_{n-1,k}\} \subset S_{n,k}$  en  $[t_0, t_n]$ , además son linealmente independientes por el lema anterior; por consiguiente:

$\{B_{i,k} |_{[t_0, t_n]}: -k + 1 \leq i \leq n - 1\}$  es una base de  $S_{n,k}$ .

□

### 1.2.3. B-splines con nodos múltiples

En este caso los nodos pueden repetirse una o más veces, a la cantidad de veces que se repite se le llama multiplicidad.

En general se considera un vector nodo así:

$$\mathbf{T} = \{t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+k}\}$$

La consideración para la fórmula recursiva será que:

$$\alpha_{i,k} = \frac{1}{t_{i+k-1} - t_i} \equiv 0 \text{ cuando } t_{i+k-1} = t_i$$

**Observación:**

- $B_{i,k} \equiv 0$  cuando  $t_{i+k} = t_i$ .
- Si  $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$  se dice que  $t_i$  es un nodo simple.
- Si  $t_{i-1} < t_i = \dots = t_{i+r-1} < t_{i+r}$  se dice que  $t_i$  es un nodo de multiplicidad  $r$ .

**Ejemplo 1.2.** Para el vector nodo  $\mathbf{T} = \{0, 0, 4, 6, 10, 15\}$ .

- Los nodos  $t_0 = t_1 = 0$  son de multiplicidad 2.
- Los nodos  $t_2, t_3, t_4$  y  $t_5$  son nodos simples.

Los B-splines de orden  $k = 2$  serán de la siguiente forma:

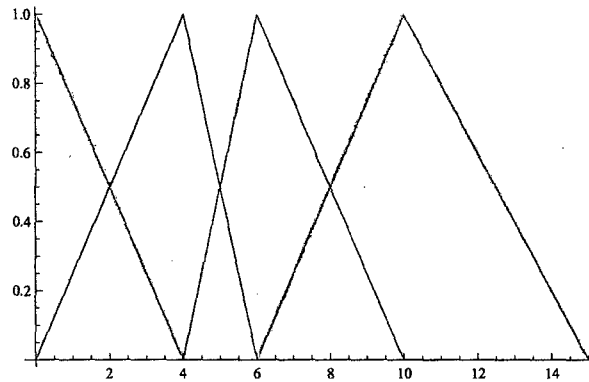


Figura 1.4:  $B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{3,2}$

**Ejemplo 1.3.** Para el vector nodo  $\mathbf{T} = \{0, 3, 3, 3, 4, 6, 10, 15\}$ .

- Los nodos  $t_1 = t_2 = t_3 = 3$  son de multiplicidad 3.
- Los nodos  $t_0, t_4, t_5, t_6$  y  $t_7$  son nodos simples.

Los B-spline de orden  $k = 4$  serán de la siguiente forma:

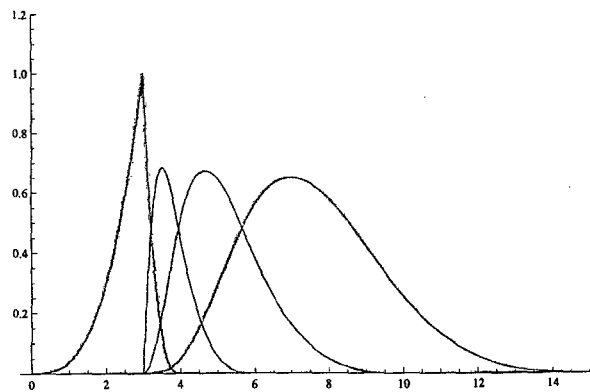


Figura 1.5:  $B_{0,4}, B_{1,4}, B_{2,4}, B_{3,4}$

### 1.3. Curvas B-splines

**Definición 5.** Dados los puntos  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=0}^n$  en  $\mathbb{R}^2$  y el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+k}\}.$$

Entonces

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_{i,k}(t); \quad n \geq k - 1, t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

es llamado una curva B-spline de orden  $k$  asociada al vector nodo  $\mathbf{T}$ . Los puntos  $\mathbf{p}_i$  son llamados puntos de control o puntos de Boor y forman el polígono de Boor.

**Ejemplo 1.4.** Sea  $\mathbf{p}(t)$  la curva B-spline de orden 3, asociada al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

con puntos de Boor:  $\mathbf{p}_0(t) = (1, 3)$ ,  $\mathbf{p}_1(t) = (2, 6)$  y  $\mathbf{p}_2 = (5, 2)$ .

Entonces se tendrá:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{p}_i B_{i,3}, \quad t \in [6, 8)$$

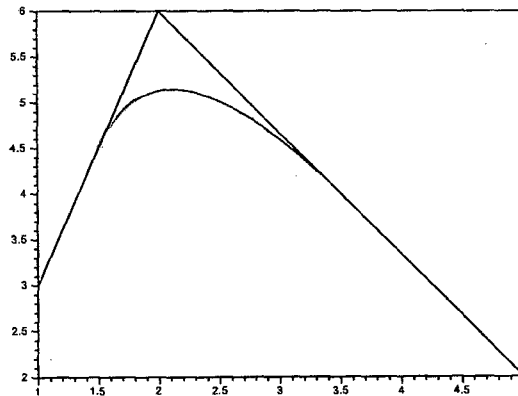


Figura 1.6: Curva B-spline  $\mathbf{p}(t)$  y su polígono de control.



### Ejemplo 1.5.

Sea  $\mathbf{q}(t)$  la curva B-spline de orden 4, asociada al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{0, 0, 1, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 9\}$$

con puntos de Boor:

$$\mathbf{q}_0(t) = (18, 15), \mathbf{q}_1(t) = (6, 18), \mathbf{q}_2 = (12, 10), \mathbf{q}_3 = (29, 8), \mathbf{q}_4 = (4, 1) \text{ y } \mathbf{q}_5 = (2, 8).$$

Entonces se tendrá:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{q}_i B_{i,4}, \quad t \in [3, 7]$$

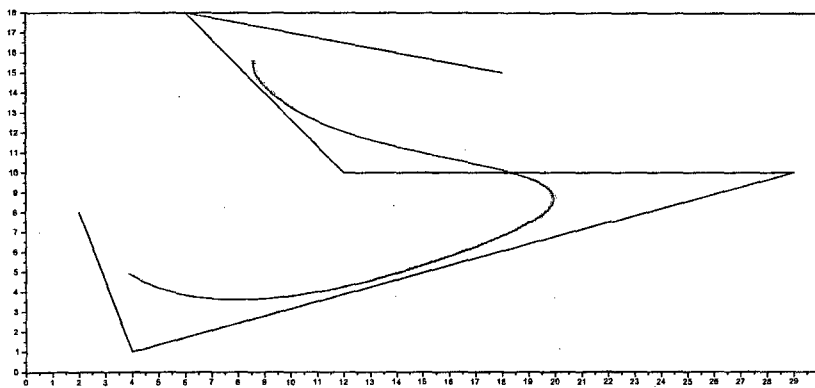


Figura 1.7: Curva B-spline  $\mathbf{q}(t)$  y su polígono de control.

### 1.3.1. Curvas B-splines Abiertas

Para una elección arbitraria de los puntos de Boor  $d_i$  y el vector nodo, la curva B-spline no tiene ninguna relación geométrica con su polígono de Boor.

#### Ejemplo 1.6.

Sea la curva B-spline  $p(t) = \sum_{i=0}^5 p_i B_{i,5}$  con respecto al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 3, 5, 7, 9, 13, 13, 16, 20, 25, 25\}$$

cuyos puntos de Boor son:

$i$	$p_i$
0	(4, 1)
1	(1, 2)
2	(4, 9)
3	(10, 10)
4	(14, 7)
5	(13, 0)

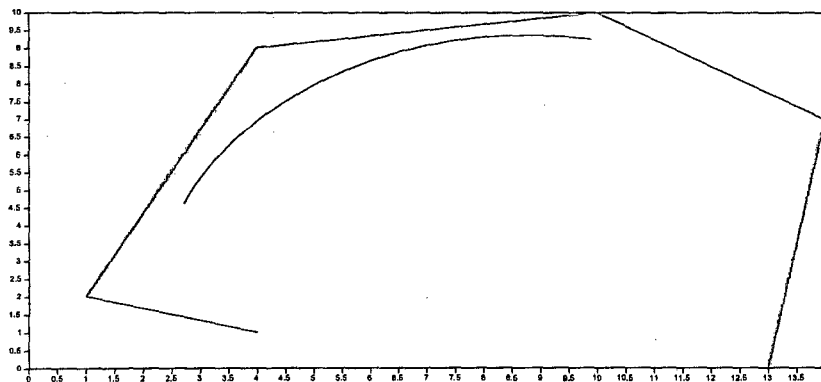


Figura 1.8: Curva B-spline  $p(t)$  y su polígono de control ( $k = 5, n = 5$ ).

Se puede obtener convenientemente propiedades geométricas si se elige los primeros y últimos  $k$  nodos de la siguiente manera:

$$t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1}$$

$$t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k}$$

Esto asegura que los puntos  $d_0$  y  $d_n$  estén sobre la curva. Por lo tanto para obtener una curva B-spline abierta de orden  $k$ , se elige el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \underbrace{\{t_0 = t_1 = t_2 = \dots = t_{k-1}\}}_k, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n, \underbrace{t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k}}_k.$$

**Ejemplo 1.7.**

Sea la curva  $\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^7 \mathbf{q}_i B_{i,4}$  con respecto al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{3, 3, 3, 3, 4, 7, 10, 11, 15, 15, 15, 15\}$$

cuyos puntos de Boor son:

$i$	$\mathbf{q}_i$
0	(0, 1)
1	(2, 5)
2	(5, 3)
3	(8, 8)
4	(12, 10)
5	(14, 4)
6	(17, 6)
7	(20, 1)

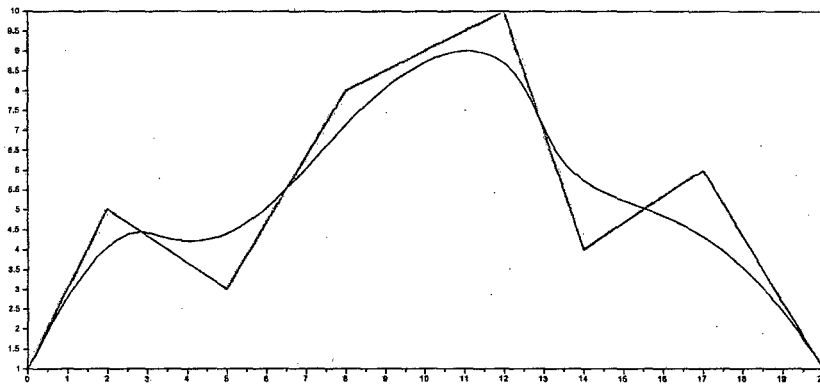


Figura 1.9: Curva B-spline  $p(t)$  y su polígono de control ( $k = 4, n = 7$ ).

**Ejemplo 1.8.**

Sea la curva  $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^9 \mathbf{r}_i B_{i,3}$  con respecto al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{4, 4, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 14, 14\}$$

cuyos puntos de Boor son:

$i$	$\mathbf{r}_i$
0	(0, 14)
1	(2, 4)
2	(4, 7)
3	(7, 0)
4	(9, 3)
5	(16, 5)
6	(20, 9)
7	(17, 13)
8	(13, 7)
9	(22, 4)

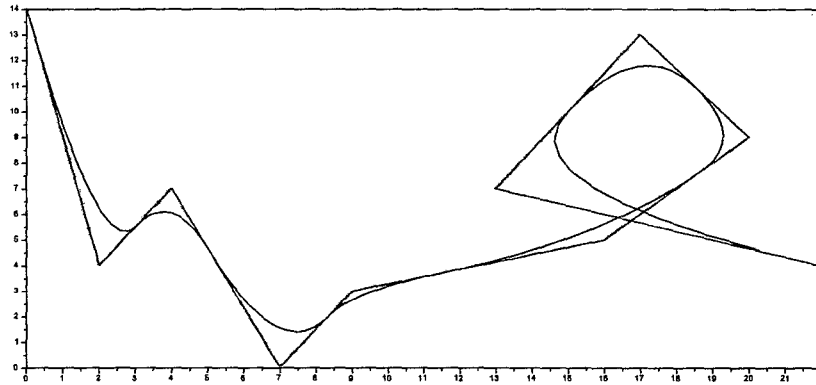


Figura 1.10: Curva B-spline  $r(t)$  y su polígono de control ( $k = 3, n = 9$ ).

### 1.3.2. Curvas B-splines Cerradas

Para construir Curvas B-splines cerradas, se extiende periódicamente los puntos de Boor  $p_0, \dots, p_n$  de la siguiente manera:

$$p_0 = p_{n+1},$$

y expandiendo el vector nodo periódicamente por:

$$t_{n+1} = t_0, \quad t_{n+2} = t_{n+1} + (t_1 - t_0) = t_1, \quad t_{n+3} = t_{n+2} + (t_2 - t_1), \dots$$

Este nos dará el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = t_0, t_{n+2} = t_1, \dots, t_{n+k} = t_{k-1}\}$$

La fórmula paramétrica de una curva B-spline cerrada es :

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,k}(t), \quad t \in [t_0, t_{n+1})$$

**Ejemplo 1.9.**

Sea la curva B-spline  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i B_{i,3}$  con respecto al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

cuyos puntos de Boor son:

$i$	$\mathbf{p}_i$
0	(3, 3)
1	(13, 3)
2	(17, 10)
3	(7, 10)

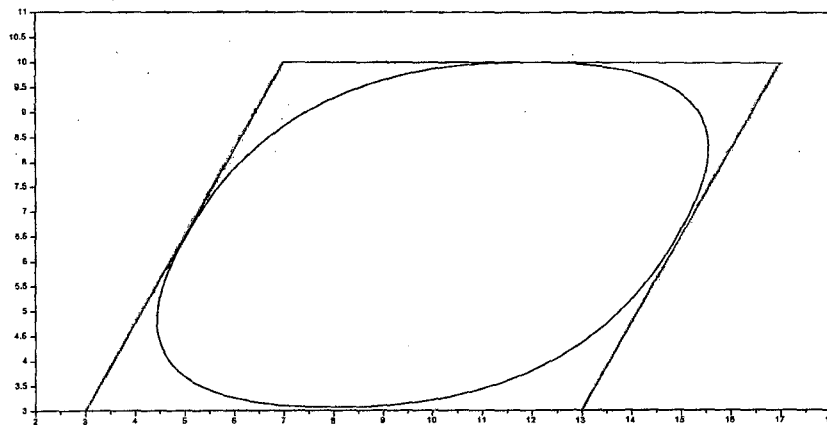


Figura 1.11: Curva B-spline cerrada  $\mathbf{p}(t)$  y su polígono de control ( $k = 3, n = 3$ ).

**Ejemplo 1.10.**

Sea la curva B-spline  $\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^6 \mathbf{q}_i B_{i,4}$  con respecto al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$$

cuyos puntos de Boor son:

$i$	$\mathbf{q}_i$
0	(1, 5)
1	(2, 2)
2	(11, 2)
3	(14, 0)
4	(17, 7)
5	(15, 10)
6	(7, 10)

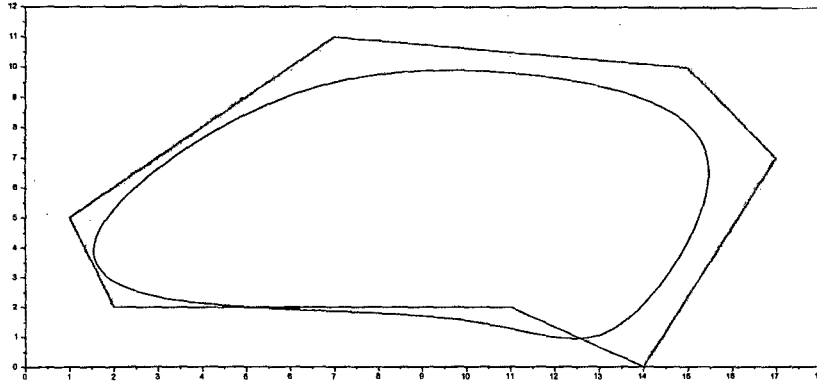


Figura 1.12: Curva B-spline  $\mathbf{q}(t)$  y su polígono de control ( $k = 4, n = 6$ ).

## 1.4. El Algoritmo de Boor

El algoritmo de Boor permite el cálculo de puntos sobre una curva B-spline, sin conocer explícitamente las funciones B-spline.

Usando la definición recursiva de  $B_{i,k}$  y usando los puntos auxiliares:

$$\mathbf{p}_{-1} = \mathbf{p}_{n+1} = (0, 0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_{i,k}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \left[ \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \left( \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) B_{i,k-1}(t) + \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \left( \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) B_{i+1,k-1}(t)}_{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{p}_{i-1} \left( \frac{t_{i+k-1} - t}{t_{i+k-1} - t_i} \right) B_{i,k-1}(t)} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \left( \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) B_{i,k-1}(t) + \mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{p}_{-1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{p}_{i-1} \left( \frac{t_{i+k-1} - t}{t_{i+k-1} - t_i} \right) B_{i,k-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{p}_i \left( \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) B_{i,k-1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{p}_{i-1} \left( \frac{t_{i+k-1} - t}{t_{i+k-1} - t_i} \right) B_{i,k-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\mathbf{p}_i(t - t_i) + \mathbf{p}_{i-1}(t_{i+k-1} - t)}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) \end{aligned}$$

Haciendo  $\mathbf{p}_i^1 = \frac{\mathbf{p}_i(t - t_i) + \mathbf{p}_{i-1}(t_{i+k-1} - t)}{t_{i+k-1} - t_i}$ , se tendrá:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{p}_i^1 B_{i,k-1}(t)$$

Repetiendo este proceso varias veces (hasta  $k - 1$ )

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n+j} \mathbf{p}_i^j B_{i,k-j}(t), \quad j = 0, 1, \dots, k - 1$$

donde

$$\mathbf{p}_i^j = (1 - \alpha_i^j) \mathbf{p}_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j \mathbf{p}_i^{j-1}, \quad j > 0$$



para

$$\alpha_i^j = \frac{t - t_i}{t_{i+k-j} - t_i} \text{ y } \mathbf{p}_j^0 = \mathbf{p}_j$$

Sea  $r$  el menor índice tal que  $t \in [t_r, t_{r+1}]$  y repitiendo el proceso hasta  $j = k - 1$ , se obtiene el valor de la curva en  $t$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_r^{k-1}$$

Estos pasos pueden ser sistemáticamente organizados en una tabla. Debemos considerar que para un valor dado  $t \in [t_r, t_{r+1}]$  todos los B-splines  $B_{i,k}(t)$  se anulan excepto para los índices  $r - (k - 1) \leq i \leq r$ . Por lo tanto el algoritmo puede ser descrito por la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{p}_{r-k+1} & = & \mathbf{p}_{r-k+1}^0 & & & & \\ \mathbf{p}_{r-k+2} & = & \mathbf{p}_{r-k+2}^0 & \mathbf{p}_{r-k+2}^1 & & & \\ \vdots & & & & \mathbf{p}_{r-k+3}^2 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ \mathbf{p}_{r-1} & = & \mathbf{p}_{r-1}^0 & \mathbf{p}_{r-1}^1 & \mathbf{p}_{r-1}^2 & \cdots & \mathbf{p}_{r-1}^{k-2} \\ \mathbf{p}_r & = & \mathbf{p}_r^0 & \mathbf{p}_r^1 & \mathbf{p}_r^2 & \cdots & \mathbf{p}_r^{k-2} \quad \mathbf{p}_r^{k-1} = \mathbf{p}(t) \end{array}$$

Notar que en la dirección horizontal siempre multiplicamos por  $\alpha_i^j$  y en la dirección diagonal por  $1 - \alpha_i^j$ .

**Ejemplo 1.11.** Sea la curva B-spline  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i B_{i,4}(t)$  respecto al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{1, 3, 3, 4, 5, 6, 9, 15, 16, 17, 20\}$$

Si se quiere calcular  $\mathbf{p}(6.25)$ , entonces del algoritmo de Boor:

$$\bar{t} = 6.25 \in [t_5, t_6] = [6, 9]$$

entonces  $r = 5$ , luego como  $k = 4$  y  $n = 5$ , se tendrá:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{p}_2 & = & \mathbf{p}_2^0 & & & & \\ \mathbf{p}_3 & = & \mathbf{p}_3^0 & \mathbf{p}_3^1 & & & \\ \mathbf{p}_4 & = & \mathbf{p}_4^0 & \mathbf{p}_4^1 & \mathbf{p}_4^2 & & \\ \mathbf{p}_5 & = & \mathbf{p}_5^0 & \mathbf{p}_5^1 & \mathbf{p}_5^2 & \mathbf{p}_5^3 & = \mathbf{p}(\bar{t}) \end{array}$$

## Capítulo 2

# Operaciones Fundamentales en las Curvas B-spline

Una curva B-spline puede cambiar de forma si: se varía el grado (orden) de la curva B-spline, se cambia algún punto de control, aumenta el conjunto de puntos de control, se disminuye el conjunto de puntos de control, se modifica el vector nodo.

Se desea aumentar el número de puntos de control de manera que no modifique la curva dada. Con ello se tendrá una mayor control local sobre las curvas.

### 2.1. Inserción de nodos

El siguiente método nos permite calcular los nuevos puntos de control de una curva B-spline, al insertar un nodo. Para eso sólo realiza combinaciones afines en su cálculo, lo que nos da un buen método.

#### 2.1.1. Algoritmo de Inserción de Bohem

Dada la curva B-spline

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_{i,k}(t); \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

**Teorema 6.** [5] Sea  $I_j := [t_j, t_{j+1})$  un intervalo no vacío donde  $j \in \{p+1, \dots, m\}$ . Para  $i = 1, \dots, m$  el blossom  $n_{i,j}^r$  de  $N_{i,j}^r$  satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} n_{i,j}^0() &= \delta_{i,j}, \\ n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_r) &= \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \\ &\text{para } r = 1, \dots, p \end{aligned}$$

*Demostración.*

**a) Afirmación:**  $n_{i,j}^r$  es una aplicación  $r$ -afín.

Se probará por inducción matemática. Para  $r = 1$  es directo.

Hipótesis inductiva:

$$n_{i,j}^{r-1} \text{ es } (r-1) \text{ afín.}$$

Se desea probar que  $n_{i,j}^r$  es  $r$ -afín, es decir afín en cada variable  $u_1, u_2, \dots, u_r$ .

Sea  $\sum \lambda_k a_k$  una combinación afín, es decir  $\sum \lambda_k = 1$ .

i)

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(u_1, \dots, \sum \lambda_k a_k, \dots, u_{r-1}, u_r) &= \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, \sum \lambda_k a_k, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, \sum \lambda_k a_k, \dots, u_{r-1}) \\ &= \sum \lambda_k n_{i,j}^r(u_1, \dots, a_k, \dots, u_{r-1}, u_r). \end{aligned}$$

De esto se tiene que  $n_{i,j}^r$  es afín en cada variable  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$ .

ii)

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, \sum \lambda_k a_k) &= \frac{\sum \lambda_k a_k - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad + \frac{t_{i+r+1} - \sum \lambda_k a_k}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \end{aligned}$$

de orden  $k$ , y se quiere insertar un nuevo nodo  $\bar{t}$  que este entre  $t_r$  y  $t_{r+1}$ . Esto nos daría un nuevo vector nodo  $\bar{\mathbf{T}}$  con nodos:

$$\bar{t}_i = t_i, \quad 0 \leq i \leq r$$

$$\bar{t}_{r+1} = \bar{t}, \quad \bar{t} \in [t_r, t_{r+1}]$$

$$\bar{t}_{i+1} = t_i, \quad r+1 \leq i \leq n$$

Se quiere escribir la curva B-spline dada en términos de la nueva base

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{\mathbf{p}}_i \bar{B}_{i,\bar{k}}(t) = \mathbf{p}(t)$$

Debido a las propiedades de los B-splines es claro que las funciones

$$B_{0,k}, \dots, B_{r-k,k} \text{ y } B_{r+1,k}, \dots, B_{n,k}$$

no son afectados por la insercción del nuevo nodo  $\bar{t}$  asi que:

$$\bar{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i \quad \text{para } 0 \leq i \leq r - k + 1$$

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i \quad \text{para } r \leq i \leq n$$

Para  $r - k + 2 \leq i \leq r$  se calcula los nuevos puntos de Boor de la siguiente manera:

Si  $\bar{t} = \bar{t}_{r+1} = \alpha_i t_{i+k-1} + (1 - \alpha_i) t_i$ , entonces debido a la invarianza afín (ver [6] pag. 75),

se sigue que los puntos de Boor estan dados por:

$$\bar{\mathbf{p}}_i = (1 - \alpha_i) \mathbf{p}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{p}_i; \quad \text{donde } \alpha_i = \frac{\bar{t}_{r+1} - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}$$

### Ejemplo 2.1.

Sea la curva B-spline de orden  $k = 3$ :

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i B_{i,3}$$

asociada al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 6, 10, 14, 18, 20, 26\}$$

cuyos puntos de control son:

$i$	$\mathbf{p}_i$
0	(3, 3)
1	(6, 12)
2	(12, 18)
3	(18, 9)

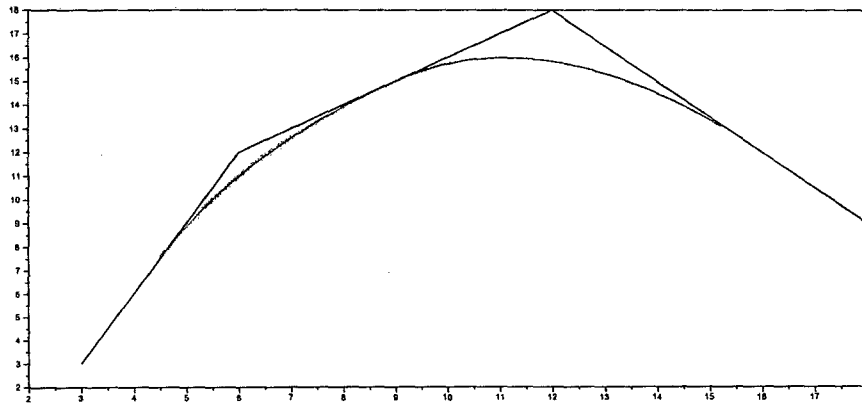


Figura 2.1: Curva B-spline  $\mathbf{p}(t)$  y su polígono de control.

Se quiere insertar el nodo  $\bar{t} = 15$ , como  $15 \in [14, 18]$  y  $14 = t_3$  se tiene  $r = 3$ .  
 Usando el Método de Inserción de Bohem, se obtiene los nuevos puntos de Boor:

$i$	$\bar{p}_i$
0	(3, 3)
1	(6, 12)
2	(9.75, 15.75)
3	(13, 16.5)
4	(18, 9)

de tal manera que:

$$\bar{p}(t) = \sum_{i=0}^4 \bar{p}_i \bar{B}_{i,\bar{k}}(t) = p(t)$$

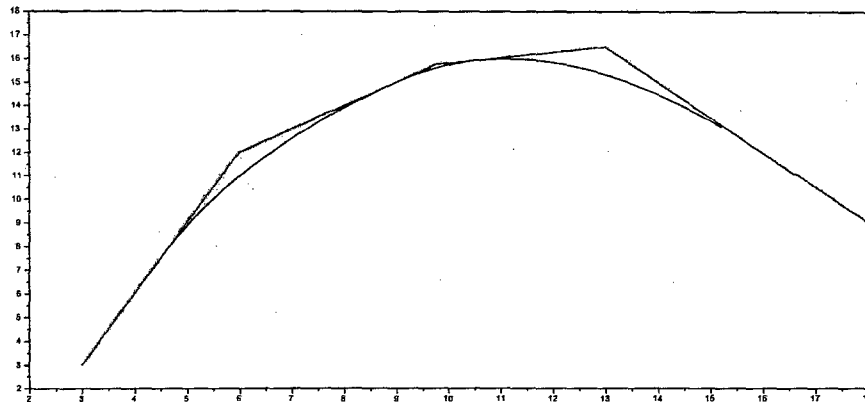


Figura 2.2: Curva B-spline  $p(t)$  y su nuevo polígono de control.

## 2.2. Elevación de grado

Para obtener una mayor flexibilidad sobre las curvas B-spline tenemos la técnica de inserción de nodos. La elevación de grado es otra técnica que nos dá los mismos resultados, la cual consiste en elevar el grado (orden) de una curva B-spline obteniendo una nueva representación, de manera que la curva inicial no varíe.

### 2.2.1. Principio de los Blossoms

**Definición 6.** Una aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  se dice *afín*, si se cumple:

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i t_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(t_i) \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

**Definición 7.** Una aplicación  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  se dice *m-afín* o simplemente *multiafín* si es afín en cada uno de sus argumentos cuando los otros argumentos se mantienen fijos, es decir:

Sean  $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_m \in \mathbb{R}$ ;

$$f(u_1, \dots, u_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_i t_i, u_{j+1}, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^n a_i f(u_1, \dots, u_{j-1}, t_i, u_{j+1}, \dots, u_m)$$

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

**Definición 8.** Una función multivariante es *simétrica* si la función se mantiene constante para cualquier permutación de argumentos, es decir:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d : (u_1, \dots, u_m) \rightarrow f(u_1, \dots, u_m) \text{ es simétrica si}$$

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m)$$

$$\forall i, j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq m.$$

**Definición 9.** Sean  $n, d \in \mathbb{N}$ .  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  es un función polinomial de grado  $n$  si existe una componente de  $F(u)$  que pueda ser escrito como un polinomio de grado  $n$  y las demás componentes puedan ser escritas como polinomios de grado menor o igual que  $n$ .

Si  $d = 1$  la función se llama *curva polinomial*.

Si  $d = 2$  la función se llama *superficie polinomial*.

### Ejemplo 2.2.

- $F(t) = (t^2 + 7, 2t^5 - t^2 + t)$  es una curva polinomial de grado 5.
- $F(t, s) = (3s, s + t^2, s^3 - t^3)$  es una superficie polinomial de grado 3.

El siguiente teorema permite establecer una equivalencia entre las funciones polinómicas de grado  $n$  y las funciones  $n$ -afines simétricas.

**Teorema 5.** [5] Si  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  es una curva polinomial de grado  $n$  definida por  $F(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i t^i$ , entonces existe una función simétrica  $n$ -afín  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $F(t) = f(t, \dots, t)$  y viceversa.

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Sea  $F(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i t^i$  una función polinomial de grado  $n$ . Se afirma que:

$$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i \frac{p_i(t_1, \dots, t_n)}{\binom{n}{i}}$$

donde  $p_i(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}$ ,  $j_r \in \{0, 1\}$ ,  $r \in \{1, \dots, n\}$  es la aplicación multiafín simétrica buscada.

Veamos:

i)  $f$  es simétrica es inmediato de la definición.

ii)  $f$  es multiafín:

Sin pérdida de generalidad se probará que es afín con respecto al primer argumento.

Sea  $\{\lambda_k, v_k\} \subset \mathbb{R}$  tal que  $\sum_k \lambda_k = 1$ ,

$$f\left(\sum_k \lambda_k v_k, \dots, t_n\right) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i \frac{p_i(\sum_k \lambda_k v_k, t_2, \dots, t_n)}{\binom{n}{i}} \quad (2.1)$$



pero

$$\begin{aligned}
 p_i\left(\sum_k \lambda_k v_k, \dots, t_n\right) &= \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} \\
 &\text{donde } j_r \in \{0, 1\}, \quad r \in \{1, \dots, n\} \\
 &= \sum_{1+j_2+\dots+j_n=1} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^1 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} + \sum_{j_2+\dots+j_n=1} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^0 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} \\
 &= \sum_{1+j_2+\dots+j_n=i} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} + \sum_k \lambda_k \sum_{j_2+\dots+j_n=i} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^0 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} \\
 &= \sum_k \lambda_k \left(\sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} v_k^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}\right) \\
 &= \sum_k \lambda_k p_i(v_k, \dots, t_n).
 \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.1):

$$f\left(\sum_k \lambda_k v_k, \dots, t_n\right) = \sum_k \lambda_k f(v_k, \dots, t_n)$$

iii) Diagonalidad:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{f(t, \dots, t)}_{n \text{ veces}} &= \sum_{i=0}^n c_i \frac{p_i(t, \dots, t)}{\binom{n}{i}} \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{\binom{n}{i}} \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}
 \end{aligned}$$

pero  $\sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} 1 = \binom{n}{i}$ . Esto implica  $\underbrace{f(t, \dots, t)}_{n \text{ veces}} = F(t)$ .

De (i), (ii) y (iii) se concluye la prueba.

( $\Leftarrow$  Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función n-afín.

Se deduce que toda función n-afín es de la forma:

$$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n d_i \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} \quad \text{donde } j_r \in \{0, 1\}$$

Luego  $f(t, \dots, t) = \sum_{i=0}^n d_i t^i \binom{n}{i}$  el cual es un polinomio de grado  $n$ .

□

Una forma de obtener más puntos de control en una curva B-spline sin que la curva cambie su forma es elevando el grado, el cual se verá más adelante.

## 2.2.2. Método de Elevación de Grado de Prautzsch

En esta sección se emplea la otra notación para las curvas B-spline.  $N_i^p$  denota una función B-spline de grado  $p$  respecto al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_{m+p+1}\}$$

tal que  $t_i < t_{i+p+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Y relación recursiva de los B-spline es:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}; \quad i = 1, \dots, m$$

$$N_i^p(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_i^{p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(t); \quad p \geq 1, i = 1, \dots, m$$

Y la curva B-spline de grado  $p$  sería:

$$F(t) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(t), \quad t \in [t_{p+1}, t_{m+1})$$

$N_{i,j}^p(t)$  denotará la restricción del B-spline  $N_i^p$  en el intervalo no vacío  $I_j := [t_j, t_{j+1})$  con  $j \in \{p+1, \dots, m\}$ .

### Observación:

Para  $1 \leq l \leq m$  tenemos  $t_l < t_{l+p+1}$ . Por eso existe  $j \in \mathbb{N} : l \leq j \leq l+p$  tal que  $t_j < t_{j+1}$ .

Pues en caso contrario se tendrá:

$$t_l = t_{l+1} = \dots = t_{l+p} = t_{l+p+1}$$

lo que contradice la condición del vector nodo.

Como  $\sum \lambda_k = 1$ , se tiene que  $t_i = \sum \lambda_k t_i$  y  $t_{i+r+1} = \sum \lambda_k t_{i+r+1}$ .

Reemplazando y factorizando  $\sum \lambda_k$  tenemos:

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, \sum \lambda_k a_k) &= \sum \lambda_k \left( \frac{a_k - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_{i+r+1} - a_k}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \right) \\ &= \sum \lambda_k n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, a_k) \end{aligned}$$

De (i) y (ii) se concluye la prueba de la afirmación.

**b) Afirmación:  $n_{i,j}^r$  es simétrica.**

Se probará por inducción matemática. Para  $r = 0$  es directo.

Hipótesis inductiva:

$$n_{i,j}^{r-1} \text{ es simétrica en } u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$$

Se debe probar que  $n_{i,j}^r$  es simétrica en  $u_1, u_2, \dots, u_r$ .

i) Sean  $k, m \in \mathbb{N}$  tal que:  $1 \leq k, m \leq r - 1$

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_k, \dots, u_m, \dots, u_{r-1}, u_r) &= \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_k, \dots, u_m, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_k, \dots, u_m, \dots, u_{r-1}) \\ &= \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_m, \dots, u_k, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_m, \dots, u_k, \dots, u_{r-1}) \\ &= n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_m, \dots, u_k, \dots, u_{r-1}, u_r) \end{aligned}$$

Entonces  $n_{i,j}^r$  es simétrica en  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$ .

ii) Ahora se probará que  $n_{i,j}^r$  es simétrica en  $u_{r-1}, u_r$ , es decir:

$$n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_r, u_{r-1}) = n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, u_r)$$

Veamos:

$$n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r, u_{r-1}) = \frac{u-r-1-t_i}{t_{i+r}-t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r) + \frac{t_{i+r+1}-u_{r-1}}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r)$$

Como:

$$n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r) = \frac{u_r-t_i}{t_{i+r-1}-t_i} n_{i,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) + \frac{t_{i+r}-u_r}{t_{i+r}-t_{i+1}}$$

y

$$n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r) = \frac{u_r-t_{i+1}}{t_{i+r}-t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) + \frac{t_{i+r+1}-u_r}{t_{i+r+1}-t_{i+2}} n_{i+2,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2})$$

Reemplazando

$$n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r, u_{r-1}) = \frac{u_r-t_i}{t_{i+r}-t_i} \left( \frac{u_{r-1}-t_i}{t_{i+r-1}-t_i} n_{i,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right) + M \frac{n_{i,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2})}{t_{i+r}-t_{i+1}} + \frac{t_{i+r+1}-u_r}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} \left( \frac{t_{i+r+1}-u_{r-1}}{t_{i+r+1}-t_{i+2}} \right) n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2})$$

donde

$$M = \frac{(u_{r-1}-t_i)(t_{i+r}-u_r)}{t_{i+r}-t_i} + \frac{(t_{i+r+1}-u_{r-1})(u_r-t_{i+1})}{t_{i+r+1}-t_{i+1}}$$

Pero:

$$\begin{aligned} & \frac{(u_{r-1}-t_i)(t_{i+r}-u_r)}{t_{i+r}-t_i} + \frac{(t_{i+r+1}-u_{r-1})(u_r-t_{i+1})}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} \\ &= \frac{(u_r-t_i)(t_{i+r}-u_{r-1})}{t_{i+r}-t_i} + \frac{(t_{i+r+1}-u_r)(u_{r-1}-t_{i+1})}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} \end{aligned}$$

reemplazando y reagrupando

$$\begin{aligned}
n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r, u_{r-1}) &= \\
&\frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} \left( \frac{u_{r-1} - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} n_{i,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) + \frac{t_{i+r} - u_{r-1}}{t_{i+r} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right) \\
&+ \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \left( \frac{u_{r-1} - t_{i+1}}{t_{i+r} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) + \frac{t_{i+r+1} - u_{r-1}}{t_{i+r+1} - t_{i+2}} n_{i+2,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right) \\
&= \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_{r-1}) + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_{r-1}) \\
&= n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, u_r)
\end{aligned}$$

Luego de *i*) y *ii*) se tiene que  $n_{i,j}^r$  es simétrica en  $u_1, u_2, \dots, u_r$ .

**c) Afirmación:  $n_{i,j}^r$  es diagonal**

Es decir:

$$n_{i,j}^r(\underbrace{u, u, \dots, u}_{r \text{ veces}}) = N_{i,j}^r(u).$$

Se probará por inducción matemática. Para  $r = 1$  es directo.

Hipótesis Inductiva:

$$n_{i,j}^{r-1}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{r-1 \text{ veces}}) = N_{i,j}^{r-1}(u).$$

Ahora se probará que es cierto para  $r$ .

$$\begin{aligned}
n_{i,j}^r(\underbrace{u, u, \dots, u}_{r \text{ veces}}) &= \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{r-1}) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t - i + 1} n_{i+1,j}^{r-1}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{r-1}) \\
&= \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_{i,j}^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t - i + 1} N_{i+1,j}^{r-1}(u) \\
&= N_{i,j}^r(u)
\end{aligned}$$

Luego de *a*), *b*) y *c*) y del Teorema 5 se tiene que  $n_{i,j}^r$  es el blossom de  $N_{i,j}^r$  y por lo tanto el teorema queda demostrado.  $\square$

**Corolario 7.** [5] En el intervalo no vacío  $I_j := [t_j, t_{j+1})$  el blossom  $n_{i,j}^r$  de  $N_{i,j}^r$  satisface la ecuación:

$$n_{i,j}^r(t_{l+1}, t_{l+2}, \dots, t_{l+r}) = \delta_{i,l}; \quad l = j - l, \dots, j.$$

*Demostración.*

Por inducción sobre  $r$ .

$r = 1$  : Se debe probar que  $n_{i,j}^1(t_{l+1}) = \delta_{i,l}$  para  $l = j - 1, j$ .

$$\begin{aligned} n_{i,j}^1(t_{l+1}) &= \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} n_{i,j}^0() + \frac{t_{i+2} - t - l + 1}{t_{i+2} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^0() \\ &= \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} \delta_{i,j} + \frac{t_{i+2} - t - l + 1}{t_{i+2} - t_{i+1}} \delta_{i+1,j} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si  $l = j - 1$ , veamos los casos:

$i = j - 1$  : En (2.2) se tiene:

$$n_{i,j}^1(t_{l+1}) = \frac{t_{i+2} - t - l + 1}{t_{i+2} - t_{i+1}} = \frac{t_{i+2} - t - l + 1}{t_{i+2} - t - l + 1} = 1$$

$i \neq j - 1$  : En (2.2) se tiene:

$$n_{i,j}^1(t_{l+1}) = \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} \delta_{i,j}$$

Subcasos:

$i = j$ :

$$\begin{aligned} n_{i,j}^1(t_{l+1}) &= \frac{t_j - t_i}{t_{i+1} - t_i} \delta_{i,i} \\ &= \frac{t_i - t_i}{t_{i+1} - t_i} (1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$i \neq j$ :

$$n_{i,j}^1(t_{l+1}) = \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} (0) = 0$$

Así pues  $n_{i,j}^1(t_{l+1}) = \delta_{i,j-1} = \delta_{i,l}$ .

Análogo para  $l = j$ .

Con la hipótesis inductiva:

$$n_{i,j}^{r-1}(t_{l+1}, \dots, t_{l+r-1}) = \delta_{i,l}; \quad l = j - (r - 1), \dots, j.$$

Se debe probar que:

$$n_{i,j}^r(t_{l+1}, \dots, t_{l+r}) = \delta_{i,l}; \quad l = j - r, \dots, j.$$

**CASO 1:** Si  $j - r < l \leq j$

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(t_{l-1}, \dots, t_{l+r-1}, t_{l+r}) &= \frac{t - l + r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(t_{l+1}, \dots, t_{l+r-1}) \\ &\quad + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(t_{l+1}, \dots, t_{l+r-1}). \end{aligned}$$

Además  $j - (r - 1) \leq l \leq j$ , y usando la hipótesis inductiva se tiene:

$$n_{i,j}^r(t_{l-1}, \dots, t_{l+r}) = \frac{t - l + r - t_i}{t_{i+r} - t_i} \delta_{i,l} + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \delta_{i+1,l}$$

**CASO 1.1**  $i = l$

$$n_{i,j}^r(t_{l-1}, \dots, t_{l+r}) = (1)(1) + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} (0) = 1$$

**CASO 1.2**  $i \neq l$

**CASO 1.2.1**  $i = l - 1$

$$n_{i,j}^r(t_{l-1}, \dots, t_{l+r}) = \frac{t - l + r - t_i}{t_{i+r} - t_i} (0) + (0)(1) = 0$$

**CASO 1.2.2**  $i \neq l - 1$

$$n_{i,j}^r(t_{l-1}, \dots, t_{l+r}) = \frac{t - l + r - t_i}{t_{i+r} - t_i} (0) + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} (0) = 0$$

De los casos 1.1 y 1.2 se concluye que:

$$n_{i,j}^r(t_{l-1}, \dots, t_{l+r}) = \delta_{i,l} \quad \text{si } j - r < l \leq j$$

**CASO 2:** Si  $j - r = l$  donde  $r \neq 0$

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(u_1, u_2, \dots, u_r) &= n_{i,j}^r(u_r, u_2, \dots, u_{r-1}, u_1) \\ &= \frac{u_1 - t_1}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_r, u_2, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad + \frac{t_{i+r+1} - u_1}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_r, u_2, \dots, u_{r-1}) \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
n_{i,j}^r(t_{l+r}, t_{l+2}, \dots, t_{l+r-1}, t_{l+1}) &= \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(t_{l+r}, t_{l+2}, \dots, t_{l+r-1}) \\
&\quad + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+1}}{t_{i+r+1} - t_i} n_{i+1,j}^{r-1}(t_{l+r}, t_{l+2}, \dots, t_{l+r-1}) \\
&= \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(t_{l+2}, t_{l+3}, \dots, t_{l+r-1}, t_{l+r}) \\
&\quad + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+1}}{t_{i+r+1} - t_i} n_{i+1,j}^{r-1}(t_{l+2}, t_{l+3}, \dots, t_{l+r-1}, t_{l+r})
\end{aligned}$$

Además como  $j - r = k$  entonces  $j - (r - 1) \leq k + 1 \leq j$ .

$$n_{i,j}^r(t_{l+1}, \dots, t_{l+r}) = \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} \delta_{i,l+1} + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+1}}{t_{i+r+1} - t_i} \delta_{i+1,l+1}$$

**CASO 2.1**  $i = l$

$$n_{i,j}^r(t_{l+1}, \dots, t_{l+r}) = \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} (0) + (1)(1) = 1$$

**CASO 2.2**  $i \neq l$

**CASO 2.2.1**  $i = l + 1$

$$n_{i,j}^r(t_{l+1}, \dots, t_{l+r}) = \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} (1) + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+1}}{t_{i+r+1} - t_i} (0) = 0$$

**CASO 2.2.2**  $i \neq k + 1$

$$n_{i,j}^r(t_{l+1}, \dots, t_{l+r}) = \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} (0) + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+1}}{t_{i+r+1} - t_i} (0) = 0$$

Entonces  $n_{i,j}^r(t_{l+1}, \dots, t_{l+r}) = \delta_{i,l}$  si  $l = j - r$ .

del caso 1 y caso 2 se concluye la prueba. □

**Teorema 8.** [5] Sea  $F_j$  la restricción de  $F$  en el intervalo no vacío  $I_j := [t_j, t_{j+1})$  y  $f_j$  el blossom de  $F_j$ . Entonces los puntos de Boor  $\mathbf{d}_l$  están dados por:

$$\mathbf{d}_l = f_j(t_{l+1}, \dots, t_{l+p}); \quad l = j - p, \dots, j.$$



*Demostración.* Sea  $F(u) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(u)$  una curva B-spline. La restricción  $F_j$  de  $F$  en el intervalo no vacío  $I_j$  está dado por:  $F(u) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(u)$ .

Luego su blossom respectivo es:

$$f_j(u_1, u_2, \dots, u_p) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i n_{i,j}^p(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f_j(t_{l+1}, t_{l+2}, \dots, t_{l+p}) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i n_{i,j}^p(t_{l+1}, t_{l+2}, \dots, t_{l+p}) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i \delta_{i,l} \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i \end{aligned}$$

□

Reescribiendo el Teorema 8 con la notación  $B_{i,k}$  para los B-splines de orden  $k$ , se tiene:

**Teorema 9.** Sea  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_{i,k}(t)$  una curva B-spline de orden  $k$  sobre el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}\}$$

tal que  $t_i < t_{i+k}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $F_j$  la restricción de  $F$  en el intervalo no vacío  $I_j := [t_j, t_{j+1})$  y  $f_j$  el blossom de  $\mathbf{p}_j$ . Entonces los puntos de Boor  $\mathbf{d}_l$  están dados por:

$$\mathbf{p}_l = f_j(t_{l+1}, \dots, t_{l+k-1}); \quad l = j - k + 1, \dots, j$$

### Ejemplo 2.3.

Sea la curva B-spline de orden 4,  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^7 \mathbf{p}_i B_{i,k}(t)$  sobre el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6\}$$

Se determina los puntos de Boor en términos de los blossoms.

Para  $t_3 = 0 < 1 = t_4$  se tiene:

$$\mathbf{p}_l = f_3(t_{l+1}, t_{l+2}, t_{l+3}); \quad l = 3 - 4 + 1, \dots, 3$$

$$\mathbf{p}_0 = f_3(t_1, t_2, t_3) = f_3(0, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}_1 = f_3(t_2, t_3, t_4) = f_3(0, 0, 1),$$

$$\mathbf{p}_2 = f_3(t_3, t_4, t_5) = f_3(0, 1, 2),$$

$$\mathbf{p}_3 = f_3(t_4, t_5, t_6) = f_3(1, 2, 4),$$

Para  $t_7 = 5 < t_8 = 6$  se tiene:

$$\mathbf{p}_l = f_7(t_{l+1}, t_{l+2}, t_{l+3}); \quad l = 7 - 4 + 1, \dots, 7$$

$$\mathbf{p}_4 = f_7(t_5, t_6, t_7) = f_7(2, 4, 5),$$

$$\mathbf{p}_5 = f_7(t_6, t_7, t_8) = f_7(4, 5, 6),$$

$$\mathbf{p}_6 = f_7(t_7, t_8, t_9) = f_7(5, 6, 6),$$

$$\mathbf{p}_7 = f_7(t_8, t_9, t_{10}) = f_7(6, 6, 6).$$

Dada la curva B-spline:

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,k}(t); \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

asociada al vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{\underbrace{t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1}}_k, t_k, \dots, t_n, \underbrace{t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k}}_k\}$$

para elevar el grado (orden) de la curva B-spline a  $\bar{k} = k + 1$  se trabaja usando como nuevo vector nodo a:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{\underbrace{\bar{t}_0 = \dots = \bar{t}_k}_{k+1}, \bar{t}_{k+1} = \bar{t}_{k+2}, \dots, \bar{t}_{2n-k+1} = \bar{t}_{2n-k+2}, \underbrace{\bar{t}_{2n-k+3} = \dots = \bar{t}_{2n+3}}_{k+1}\}$$

donde  $\bar{t}_0 = t_0, \bar{t}_{k+1} = t_k, \dots, \bar{t}_{2n-k+1} = t_n$  y  $\bar{t}_{2n-k+3} = t_{n+1}$ , y la nueva curva B-spline sería:

$$\bar{p}(t) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \bar{p}_i B_{i,\bar{k}}(t), \quad \bar{n} = n - 2 + k,$$

con incremento de grado  $\bar{k} = k + 1$ .

Usando la teoría para blossoms degenerados (ver [5] pag.197), se puede calcular los nuevos puntos de Boor de la siguiente manera:

$$\bar{p}_l = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{t}_{l+1}, \dots, \hat{\bar{t}}_{l+i}, \dots, \bar{t}_{l+k}); \quad l = 0, \dots, \bar{n}$$

donde  $f$  es el blossom de  $p(t)$  y  $\hat{\bar{t}}_{l+i}$  indica que no debe ser tomado en cuenta como argumento para  $f$ .

**Ejemplo 2.4.** Sea la curva B-spline  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i B_{i,4}(t)$  sobre el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

cuyos puntos de control son:

$i$	$\mathbf{p}_i$
0	(2, -1)
1	(3, -1)
2	(11, 3)
3	(5, 3)
4	(1, -1)
5	(1, 3)

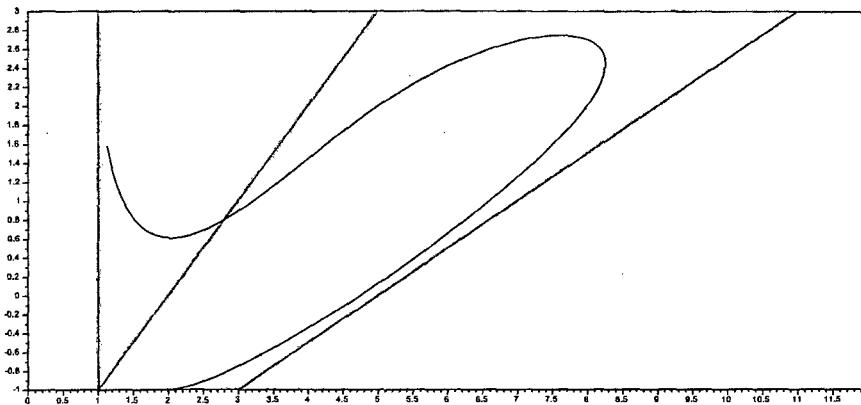


Figura 2.3: Curva B-spline  $\mathbf{p}(t)$  y su polígono de control.

Elevando el grado se tiene:

$$\bar{T} = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3\},$$

y los nuevos puntos de control son:

$$\bar{p}_0 = [4f(0, 0, 0)]/4 = f(0, 0, 0) = p_0 = (2, -1),$$

$$\bar{p}_1 = [3f(0, 0, 1) + f(0, 0, 0)]/4 = (3p_1 + p_0)/4 = (2.75, -1),$$

$$\begin{aligned}\bar{p}_2 &= [2f(0, 1, 1) + 2f(0, 0, 1)]/4 = [f(0, 0, 1) + f(0, 1, 2) + 2f(0, 0, 1)]/4 \\ &= (3p_1 + p_2)/4 = (5, 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{p}_3 &= [f(0, 1, 1) + f(1, 1, 2) + 2f(0, 1, 2)]/4 \\ &= [0.5f(0, 0, 1) + 0.5f(0, 1, 2) + (2f(0, 1, 2) + f(1, 2, 3))/3 + 2f(0, 1, 2)]/4 \\ &= [3f(0, 0, 1) + 19f(0, 1, 2) + 2f(1, 2, 3)]/24 \\ &= [2p_3 + 19p_2 + 3p_1]/24 = (9.5, 2.5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{p}_4 &= [2f(1, 1, 2) + 2f(1, 2, 2)]/2 \\ &= [2(2f(0, 1, 2)f(1, 2, 3))/3 + 2(f(0, 1, 2) + 2f(1, 2, 3))/3]/2 \\ &= [p_3 + p_2]/2 = (8, 3),\end{aligned}$$

$$\bar{p}_5 = [3p_4 + 19p_3 + 2p_2]/24 = (5.2, 5),$$

$$\bar{p}_6 = [3p_4 + p_3]/4 = (2, 0),$$

$$\bar{p}_7 = [p_5 + 3p_4] = (1, 0)$$

$$\bar{p}_8 = p_5 = (1, 3).$$

Tendremos  $p(t) = \sum_{i=0}^8 \bar{p}_i \bar{B}_{i,5}$

$i$	$\bar{p}_i$
0	(2, -1)
1	(2.75, -1)
2	(5, 0)
3	(9.5, 2.5)
4	(8, 3)
5	(5.2, 5)
6	(2, 0)
7	(1, 0)
8	(1, 3)

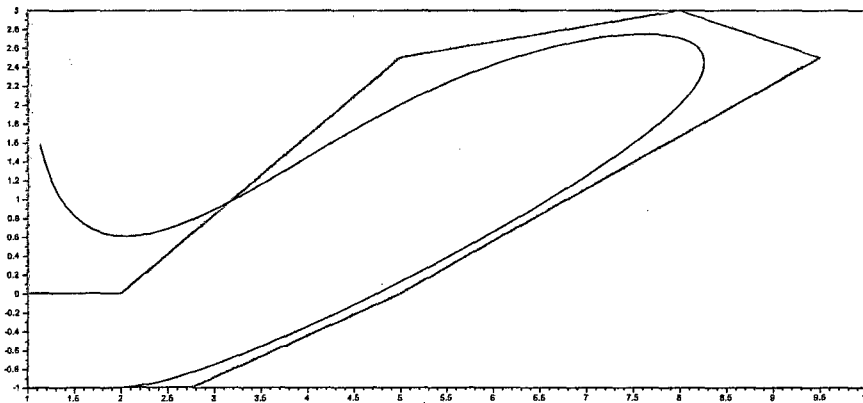


Figura 2.4: Curva B-spline  $p(t)$  y su nuevo polígono de control.

## Capítulo 3

# Matrices de Transformación de las Bases B-spline

Sean  $k$  y  $\bar{k}$  dos enteros positivos. Denotemos como  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ , a las funciones bases B-plines de orden  $k$ , asociadas con el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+k}\}$$

De modo similar, las funciones de bases B-spline de orden  $\bar{k}$ , asociadas con el vector nodo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{\bar{t}_0, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{\bar{n}+\bar{k}}\}$$

serán denotadas como  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ .

Los vectores nodos  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$  satisfacen las siguientes condiciones respectivamente:

$$n \geq k - 1, \quad t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k}, \quad t_{k-1} < t_k, \quad t_n < t_{n+1} \quad (3.1)$$

$$\bar{n} \geq \bar{k} - 1, \quad \bar{t}_0 \leq \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2 \leq \dots \leq \bar{t}_{\bar{n}+\bar{k}}, \quad \bar{t}_{\bar{k}-1} < \bar{t}_{\bar{k}}, \quad \bar{t}_{\bar{n}} < \bar{t}_{\bar{n}+1} \quad (3.2)$$

**Definición 10.** Sean las bases B-spline  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$  y  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ , la matriz de transformación (cambio de base) es definida como sigue: si existe una matriz  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  de orden  $(n+1) \times (\bar{n}+1)$ ,

tal que:

$$\begin{bmatrix} B_{0,k}(t) \\ B_{1,k}(t) \\ \vdots \\ B_{n,k}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} \bar{B}_{0,\bar{k}}(t) \\ \bar{B}_{1,\bar{k}}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},\bar{k}}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{con } t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] \quad (3.3)$$

La matriz  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  es llamada la matriz de transformación (o también llamada matriz de cambio de base) de la base de B-splines  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  a la base de B-splines  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ . En este trabajo, la matriz de transformación de bases B-spline será abreviada como matriz BSBT.

Como los subíndices muestran,  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  esta totalmente determinada por  $k, \bar{k}, \mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$ , cuando exista.

Usaremos la siguiente notación para los elementos de la matriz BSBT.

$$\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} a_{0,0}(k, \bar{k}) & a_{0,1}(k, \bar{k}) & \cdots & a_{0,\bar{n}}(k, \bar{k}) \\ a_{1,0}(k, \bar{k}) & a_{1,1}(k, \bar{k}) & \cdots & a_{1,\bar{n}}(k, \bar{k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,0}(k, \bar{k}) & a_{n,1}(k, \bar{k}) & \cdots & a_{n,\bar{n}}(k, \bar{k}) \end{bmatrix}.$$

Aunque los elementos de  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  están relacionados a los vectores nodo  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$ , los  $a_{i,j}(k, \bar{k})$  son empleados para representar a los elementos de  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ .

### 3.1. Condiciones de Existencia y propiedades de las matrices BSBT

**Teorema 10.** [7] Sean  $k$  y  $\bar{k}$  dos enteros positivos, tal que  $\bar{k} \geq k$ , los vectores nodos  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$  que satisfacen las condiciones (3.1) y (3.2), respectivamente; y las bases B-spline  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$  y  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  de orden  $k$  y  $\bar{k}$  respectivamente. Finalmente, supongamos que, en  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$ , los nodos  $t_i$  y  $\bar{t}_i$  tengan como multiplicidades a  $r_i$  y  $\bar{r}_i$ , respectivamente. Si las condiciones:



(a)  $\bar{t}_{\bar{k}-1} = t_{k-1}, \bar{t}_{\bar{n}+1} = t_{n+1},$

(b) para  $i = k, k + 1, \dots, n, t_i \in \bar{\mathbf{T}}$  y  $\bar{r}_i \geq r_i + \bar{k} - k$

se cumplen, entonces la matriz BSBT  $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$  de  $\{\bar{B}_{i, \bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  a  $\{B_{i, k}(t)\}_{i=0}^n$  existe. Más aún, cuando  $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$  existe,  $a_{i, j}(k, \bar{k})$  es único si  $\bar{t}_{j+\bar{k}} > \bar{t}_j$ ; y  $a_{i, j}(k, \bar{k})$  puede ser cualquier número real si  $\bar{t}_{j+\bar{k}} = \bar{t}_j$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots, \bar{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n.$

*Demostración.* Sea  $S^{k-1}([t_{k-1}, t_{n+1}])$  el espacio de funciones splines de grado  $k - 1$  con nodos

$$\{t_{k-1} < t_k, t_{k+1}, \dots, t_n < t_{n+1}\}$$

las condiciones (a) y (b) nos aseguran que  $t_i \in \bar{\mathbf{T}}, i = k - 1, k, \dots, n + 1$  es decir todos esos nodos están en  $\bar{\mathbf{T}}$ , por lo que  $\{\bar{B}_{j, \bar{k}}(t)\}_{j=0}^{\bar{n}}, t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$  pertenece al espacio  $S^{k-1}([t_{k-1}, t_{n+1}])$ . Luego para  $B_{i, k}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$  se tendrá  $B_{i, k}(t) \in S^{k-1}([t_{k-1}, t_{n+1}])$ , entonces

$$B_{i, k}(t) = \sum_{j=0}^{\bar{n}} a_{i, j}(k, \bar{k}) \bar{B}_{j, \bar{k}}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Si  $\bar{t}_{j+\bar{k}} > \bar{t}_j$ , los  $\bar{B}_{j, \bar{k}}(t), 0 \leq j \leq \bar{n}$  no serían idénticamente nulos en  $[t_{k-1}, t_{n+1}]$ , entonces son linealmente independientes, así los  $a_{i, j}(k, \bar{k})$  son únicos en la representación de  $B_{i, k}(t)$  en la ecuación (3.4).

Si  $\bar{t}_{j+\bar{k}} = \bar{t}_j$ , entonces  $\bar{B}_{j, \bar{k}}(t) \equiv 0$ , por lo que  $a_{i, j}(k, \bar{k})$  puede ser cualquier número real en la ecuación (3.4). □

De ahora en adelante se asume que  $\bar{k} \geq k$ , y que los vectores nodos  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$  satisfacen no sólo las condiciones (3.1) y (3.2) sino también las condiciones (a) y (b) del Teorema 10. Y se considera  $a_{i, j}(k, \bar{k}) = 0$  si  $\bar{t}_{j+\bar{k}} = \bar{t}_j$ .

Bajo estas consideraciones, la matriz BSBT  $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$  existe y es única por el Teorema 10.

**Lema 4.** [8] Sea  $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$  la matriz BSBT de  $\{\bar{B}_{i, \bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  en  $\{B_{i, k}(t)\}_{i=0}^n$ . Para cualquier  $i$  y  $j$ , tales que  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \bar{n}$ , si  $a_{i, j} \neq 0$  entonces  $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+k}]$ .

*Demostración.* Ver [8] □

**Teorema 11.** [7] Sea  $A_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  la matriz BSBT de  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  en  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ . Se tiene que  $A_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  posee las siguientes propiedades:

(a) Para cualquier  $i$  tal que  $k-1 \leq i \leq n$ , se tiene:

- Si  $t_i = t_{i+k}$ , entonces  $a_{i,j} = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, \bar{n}$ .
- Si  $t_i < t_{i+k}$  y  $i \geq k$  entonces  $a_{i,j} = 0$  cuando  $\bar{t}_j < t_i$
- Si  $t_i < t_{i+k}$  y  $i \leq n-k$  entonces  $a_{i,j} = 0$  cuando  $\bar{t}_{j+\bar{k}} > t_{i+k}$

(b) Para cualquier  $j$  tal que  $\bar{k}-1 \leq j \leq \bar{n}$ , se tiene:

- Si  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+\bar{k}}$  entonces  $a_{i,j}(k, \bar{k}) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .
- Si  $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$  entonces  $a_{i,j}(k, \bar{k}) = 0$  cuando  $t_i > \bar{t}_{\max\{j,\bar{k}-1\}}$  o  $t_{i+k} < \bar{t}_{\min\{j+\bar{k},\bar{n}+1\}}$

(c) Para cualquier  $j$  tal que  $k-1 \leq j \leq \bar{n}$ , si  $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$  entonces  $\sum_{i=0}^n a_{i,j}(k, \bar{k}) = 0$  y hay a lo más  $k$  elementos no nulos en la  $j$ -ésima columna de  $A_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ .

*Demostración.* Usaremos el hecho que si  $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \neq \emptyset$  entonces  $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \neq \emptyset$ , es más

$$[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] = [M, N]$$

donde  $M = \max\{\bar{t}_j, t_{k-1}\} = \bar{t}_{\max\{j,\bar{k}-1\}}$  y  $N = \min\{\bar{t}_{j+\bar{k}}, t_{n+1}\} = \bar{t}_{\min\{j+\bar{k},\bar{n}+1\}}$ . Notar que  $M < N$ .

(a)

- Si tenemos  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+\bar{k}}$ , entonces se tiene  $a_{i,j} = 0$ . Cuando  $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$ , lo veremos por contradicción, es decir suponemos que  $a_{i,j}(k, \bar{k}) \neq 0$  para algún  $0 \leq j \leq \bar{n}$ , entonces del lema 4 tendremos  $a_{i,j} \neq 0$  entonces:

$$[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+k}]$$

pero como  $t_i = t_{i+k}$  entonces  $[t_i, t_{i+k}] = \emptyset$  así que necesariamente  $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] = \emptyset$ , lo cual es una contradicción.

- Supongamos que  $a_{i,j} \neq 0$ , entonces del lema 4

$$[M, N) = [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+k})$$

entonces  $M = \max\{\bar{t}_j, t_{k-1}\} \geq t_i$  así que  $\bar{t}_j \geq t_i$  o  $t_{k-1} \geq t_i$ ; lo cual siempre se contradice pues  $\bar{t}_j < t_i$  y como  $i \geq k$  se tiene que  $t_i \geq t_k > t_{k-1}$ .

- Supongamos que  $a_{i,j} \neq 0$ , entonces del lema 4

$$[M, N) = [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+k})$$

entonces  $N = \min\{\bar{t}_{j+\bar{k}}, t_{n+1}\} < t_{i+k}$  así que  $\bar{t}_{j+\bar{k}} < t_{i+k}$  o  $t_{n+1} < t_{i+k}$ ; lo cual es siempre una contradicción pues  $\bar{t}_{j+\bar{k}} > t_{i+k}$  y como  $i + k \leq n$  se tiene que  $t_{i+k} \leq t_n < t_{n+1}$ .

(b)

- Si  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+\bar{k}}$ , entonces  $a_{i,j} = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Supongamos que  $a_{i,j} \neq 0$ , entonces del lema 4

$$[M, N) = [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+k})$$

así que  $M = \bar{t}_{\max\{j, k-1\}} \geq t_i$  y  $N = \bar{t}_{\min\{j+\bar{k}, n+1\}} < t_{i+k}$ , lo que contradice las hipótesis.

(c) Como las bases B-spline son una partición de la unidad

$$\sum_{j=0}^{\bar{n}} \bar{B}_{i,\bar{k}}(t) \equiv 1 \equiv \sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) \quad (3.5)$$

de la definición de matriz BSBT  $A_{k,\bar{k},T,\bar{T}}$ , tenemos

$$B_{i,k}(t) = \sum_{j=0}^{\bar{n}} a_{i,j}(k, \bar{k}) \bar{B}_{j,\bar{k}}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

reemplazando en (3.5)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\bar{n}} \bar{B}_{i,\bar{k}}(t) &= \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^{\bar{n}} a_{i,j}(k, \bar{k}) \bar{B}_{j,\bar{k}}(t) \right] \\ \sum_{j=0}^{\bar{n}} (1) \bar{B}_{i,\bar{k}}(t) &= \sum_{j=0}^{\bar{n}} \left[ \sum_{i=0}^n a_{i,j}(k, \bar{k}) \right] \bar{B}_{j,\bar{k}}(t) \\ \sum_{j=0}^{\bar{n}} \left[ 1 - \sum_{i=0}^n a_{i,j}(k, \bar{k}) \right] \bar{B}_{j,\bar{k}}(t) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Si  $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$ , entonces todos los  $\bar{B}_{j,\bar{k}}(t)$  que no son idénticamente nulos en  $[t_{k-1}, t_{n+1})$ , son linealmente independientes, por lo tanto  $1 = \sum_{i=0}^n a_{i,j}(k, \bar{k})$ .

□

## Capítulo 4

# Representación recursiva y algoritmo de matrices BSBT

### 4.1. Relación recursiva de las matrices BSBT

Supongamos que los órdenes  $k$  y  $\bar{k}$ , y los vectores nodo  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$  de las bases B-spline son dados. Sea  $m = \bar{k} - k$ , para el entero  $s$  tal que  $1 \leq s \leq k$ , construimos los vectores nodo  $\mathbf{T}^{(s)} = \{t_{k-s}, t_{k-s+1}, \dots, t_{n+s}\}$  y  $\bar{\mathbf{T}}^{(s)} = \{\bar{t}_{k-s}, \bar{t}_{k-s+1}, \dots, \bar{t}_{\bar{n}+m+s}\}$  removiendo los primeros y últimos  $k - s$  nodos en los vectores nodo  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$ , respectivamente. Sean  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=k-s}^n$  y  $\{\bar{B}_{i,s+m}(t)\}_{i=k-s}^{\bar{n}}$  las bases B-spline, de orden  $s$  y  $m + s$  respectivamente, asociadas a los vectores de nodo  $\mathbf{T}^{(s)}$  y  $\bar{\mathbf{T}}^{(s)}$ , respectivamente. De acuerdo al Teorema 10, existe la matriz BSBT, de  $\{\bar{B}_{i,s+m}(t)\}_{i=k-s}^{\bar{n}}$  a  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=k-s}^n$ , la cual es denotada como  $\mathbf{A}_{s,m+s,\mathbf{T}^{(s)},\bar{\mathbf{T}}^{(s)}}$ . Sea

$$\mathbf{A}^{(s)} = \mathbf{A}_{s,m+s,\mathbf{T}^{(s)},\bar{\mathbf{T}}^{(s)}} = \begin{bmatrix} a_{k-s,k-s}^{(s)} & a_{k-s,k-s+1}^{(s)} & \cdots & a_{k-s,\bar{n}}^{(s)} \\ a_{k-s+1,k-s}^{(s)} & a_{k-s+1,k-s+1}^{(s)} & \cdots & a_{k-s+1,\bar{n}}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,k-s}^{(s)} & a_{n,k-s+1}^{(s)} & \cdots & a_{n,\bar{n}}^{(s)} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} B_{k-s,s}(t) \\ B_{k-s+1,s}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s,m+s}(t) \\ \bar{B}_{k-s+1,m+s}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{con } t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (4.2)$$

notar que  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}} = \mathbf{A}^{(k)}$ , ahora daremos una fórmula recursiva para calcular  $\mathbf{A}^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, k$ .

**Lema 5.** [7] La matriz BSBT  $\mathbf{A}^{(1)}$  puede ser construida como sigue:

Para cualquier  $i$  tal que  $k-1 \leq i \leq n$  se tiene:

- Si  $t_i = t_{i+1}$ , entonces  $a_{i,j}^{(1)} = 0$ ,  $j = k-1, k, \dots, \bar{n}$ .
- Si  $t_i < t_{i+1}$ , entonces

$$a_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+1} \text{ y } [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde  $m = \bar{k} - k$

*Demostración.* En este caso  $\mathbf{A}^{(1)}$  sería la matriz BSBT de  $\{\bar{B}_{i,m+1}(t)\}_{i=k-1}^{\bar{n}}$  a  $\{B_{i,1}(t)\}_{i=k-1}^n$ , es decir cuando  $s = 1$  en la ecuación 4.2

$$\begin{bmatrix} B_{k-1,1}(t) \\ B_{k,1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,1}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(1)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-1,m+1}(t) \\ \bar{B}_{k,m+1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+1}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{con } t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (4.3)$$

- Si  $t_i = t_{i+1}$ , usando el inciso (a) del Teorema 11 para  $\mathbf{A}^{(1)}$ , se obtiene  $a_{i,j}^{(1)} = 0$  para  $j = k-1, k, \dots, \bar{n}$ .
- Si  $t_i < t_{i+1}$ , será suficiente probar que los coeficientes  $a_{i,j}^{(1)}$  cumplen la definición de matriz BSBT, es decir:

$$B_{i,1}(t) = \sum_{j=k-1}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(1)} \bar{B}_{j,m+1}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

Para ver que se cumple esta ecuación en  $[t_{k-1}, t_{n+1})$ , veamos en dos casos:

Si  $t \in [t_{k-1}, t_i) \cup [t_{i+1}, t_{n+1})$ , entonces:

$$\sum_{j=k-1}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(1)} \bar{B}_{j,m+1}(t) = \sum_{\substack{\bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+1} \text{ y} \\ [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+1})}} a_{i,j}^{(1)} \bar{B}_{j,m+1}(t) = 0$$

pues para esos índices  $j$  que cumplen esa condición, como  $t \notin [t_i, t_{i+1})$  se tiene que  $t \notin [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1})$ , así  $\bar{B}_{j,m+1}(t) = 0$  para todos los  $j$  que cumplen esa condición. Por lo tanto la sumatoria es cero.

Y como  $B_{i,1}(t) = 0$ , pues  $t \notin [t_i, t_{i+1})$ , tendremos la igualdad

$$B_{i,1}(t) = \sum_{j=k-1}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(1)} \bar{B}_{j,m+1}(t) = 0, \quad t \in [t_{k-1}, t_i) \cup [t_{i+1}, t_{n+1})$$

Si  $t \in [t_i, t_{i+1})$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k-1}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(1)} \bar{B}_{j,m+1}(t) &= \sum_{\substack{\bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+1} \text{ y} \\ [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+1})}} (1) \bar{B}_{j,m+1}(t) \\ &= \sum_{\substack{\bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+1} \text{ y} \\ [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+1})}} \bar{B}_{j,m+1}(t) + \sum_{\text{otro caso}} \bar{B}_{j,m+1}(t) \\ &= \sum_{j=k-1}^{\bar{n}} \bar{B}_{j,m+1}(t) = 1 \end{aligned}$$

pues para los índices  $j$  que están en el otro caso, se tendrá  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+1}$  (es claro que  $\bar{B}_{j,m+1}(t) = 0$ ) o  $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \not\subseteq [t_i, t_{i+1})$  donde  $t \notin [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1})$  así  $\bar{B}_{j,m+1}(t) = 0$ , por lo tanto:

$$\sum_{\text{otro caso}} \bar{B}_{j,m+1}(t) = 0$$

Y como  $B_{i,1}(t) = 1$  pues  $t \in [t_i, t_{i+1})$ , tendremos:

$$B_{i,1}(t) = \sum_{j=k-1}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(1)} \bar{B}_{j,m+1}(t) = 1, \quad t \in [t_i, t_{i+1})$$

□

**Ejemplo 4.1.**

Sean las bases B-spline  $\{B_{i,3}(t)\}_{i=0}^2$  y  $\{\bar{B}_{i,5}(t)\}_{i=0}^6$  respecto a los vectores nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 3, 5, 8, 9, 10\}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \{1, 2, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 10, 12, 13\}$$

Entonces se tiene  $n = 2, k = 3$  y  $\bar{n} = 6, \bar{k} = 5$ . Luego de la relación recursiva del Lema 5, se obtiene la matriz  $\mathbf{A}^{(1)}$ .

$$\mathbf{A}^{(1)} =$$

$$\begin{matrix} 1. & 1. & 1. & 1. & 1. \end{matrix}$$

**Ejemplo 4.2.**

Sean las bases B-spline  $\{B_{i,4}(t)\}_{i=0}^6$  y  $\{\bar{B}_{i,4}(t)\}_{i=0}^{13}$  respecto a los vectores nodo:

$$\mathbf{T} = \{0, 0, 0, 0, 2, 6, 7, 10, 10, 10, 10\}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1.5, 2, 2, 3, 4, 6, 7, 7, 8, 10, 10, 10, 10\}$$

Entonces se tiene  $n = 6, k = 4$  y  $\bar{n} = 13, \bar{k} = 4$ . Luego de la relación recursiva del Lema 5, se obtiene la matriz  $\mathbf{A}^{(1)}$ .

$$\mathbf{A}^{(1)} =$$

$$\begin{matrix} 1. & 1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 1. & 1. & 1. & 0. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 1. \end{matrix}$$





Derivando con respecto a  $t$ :

$$\begin{bmatrix} B'_{k-s,s}(t) \\ B'_{k-s+1,s}(t) \\ \vdots \\ B'_{n,s}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}'_{k-s,m+s}(t) \\ \bar{B}'_{k-s+1,m+s}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}'_{n,m+s}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (4.4)$$

y de la fórmula para la derivada de los B-splines:

$$B'_{i,s}(t) = \frac{s-1}{t_{i+s-1} - t_i} B_{i,s-1}(t) - \frac{s-1}{t_{i+s} - t_{i+1}} B_{i+1,s-1}(t)$$

para  $i = k-s, k-s+1, \dots, n$

Veamos para  $i = k-s$ ,

$$B'_{k-s}(t) = \frac{s-1}{t_{k-1} - t_{k-s}} B_{k-s,s-1}(t) - \frac{s-1}{t_k - t_{k-s+1}} B_{k-s+1,s-1}(t)$$

como  $\text{sop } B_{k-s,s-1}(t) = [t_{k-s}, t_{k-1})$  y  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$ , se tiene  $B_{k-s,s-1}(t) = 0$ . Así

$$\begin{aligned} B'_{k-s,s}(t) &= -\frac{s-1}{t_k - t_{k-s+1}} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ &= (s-1)(-c_{k-s+1}^{(s)}) B_{k-s+1,s-1}(t) \end{aligned}$$

Para  $i = k-s+1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} B'_{i,s}(t) &= (s-1) \left[ \frac{1}{t_{i+s-1} - t_i} B_{i,s-1}(t) - \frac{1}{t_{i+s} - t_{i+1}} B_{i+1,s-1}(t) \right] \\ &= (s-1) [c_i^{(s)} B_{i,s-1}(t) - c_{i+1}^{(s)} B_{i+1,s-1}(t)] \end{aligned}$$

Finalmente para  $i = n$ ,

$$B'_{n,s}(t) = \frac{s-1}{t_{n+s-1} - t_n} B_{n,s-1}(t) - \frac{s-1}{t_{n+s} - t_{n+1}} B_{n+1,s-1}(t)$$

como  $\text{sop } B_{n+1,s-1}(t) = [t_{n+1}, t_{n+s})$  y  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$ , se tiene  $B_{n+1,s-1}(t) = 0$ . Así

$$\begin{aligned} B'_{n,s}(t) &= \frac{s-1}{t_{n+s-1} - t_n} B_{n,s-1}(t) \\ &= (s-1)c_n^{(s)} B_{n,s-1}(t) \end{aligned}$$

Juntando estos resultados obtenemos:



Reemplazando (4.5) y (4.6) en 4.4, obtenemos:

$$(s-1)\mathbf{C}^{(s)} \begin{bmatrix} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ B_{k-s+2,s-1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} = (m+s-1)\bar{\mathbf{C}}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix}; \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (4.7)$$

Y de la definición de la matriz BSBT  $\mathbf{A}^{(s-1)}$ , se tiene:

$$\begin{bmatrix} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ B_{k-s+2,s-1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(s-1)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix}; \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

que al reemplazarlo en (4.7)

$$(s-1)\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{A}^{(s-1)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix} = (m+s-1)\mathbf{A}^{(s)}\bar{\mathbf{C}}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix}; \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

Haciendo  $\mathbf{P} = ((s-1)\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{A}^{(s-1)} - (m+s-1)\mathbf{A}^{(s)}\bar{\mathbf{C}}^{(s)})$ , se tiene:

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

Si  $\mathbf{P} = [p_{i,j}]$  para  $i = k-s, k-s+1, \dots, n$  y  $j = k-s+1, k-s+2, \dots, \bar{n}$ , entonces:

$$\sum_{j=k-s+1}^{\bar{n}} p_{i,j} \bar{B}_{j,m+s-1}(t) = 0; \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

como  $\{\bar{B}_{j,m+s-1}(t)\}_{j=k-s+1}^{\bar{n}}$  es linealmente independiente en  $[t_{k-1}, t_{n+1})$ , se tiene  $p_{i,j} = 0$  para  $i = k-s, k-s+1, \dots, n$ . Por lo tanto  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , lo que nos lleva a:

$$\mathbf{A}^{(s)}\bar{\mathbf{C}}^{(s)} = \frac{s-1}{m+s-1}\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{A}^{(s-1)}.$$

□

## 4.2. Fórmula recursiva

Sea  $\mathbf{A}_j^{(s)}$  la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{A}^{(s)}$ , donde  $k - s \leq j \leq n$  y  $2 \leq s \leq k$ .

Del Teorema 12, tenemos:

$$\mathbf{A}^{(s)} \bar{\mathbf{C}}^{(s)} = \frac{s-1}{m+s-1} \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{A}^{(s-1)}$$

entonces sus  $j$ -ésimas columnas son iguales,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(s)} \bar{\mathbf{C}}_j^{(s)} &= \frac{s-1}{m+s-1} \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s-1)} \\ \mathbf{A}^{(s)} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\bar{c}_j^{(s)} \\ \bar{c}_j^{(s)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{s-1}{m+s-1} \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s-1)} \\ -\bar{c}_j^{(s)} \mathbf{A}_{j-1}^{(s)} + \bar{c}_j^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s)} &= \frac{s-1}{m+s-1} \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s-1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\bar{c}_j^{(s)} (\mathbf{A}_j^{(s)} - \mathbf{A}_{j-1}^{(s)}) = \frac{s-1}{m+s-1} \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s-1)}, \quad j = k-s+1, k-s+2, \dots, \bar{n} \quad (4.8)$$

- Si  $\bar{c}_j^{(s)} > 0$ , entonces la ecuación (4.8) es equivalente a:

$$\mathbf{A}_j^{(s)} = \mathbf{A}_{j-1}^{(s)} + \frac{s-1}{(m+s-1)\bar{c}_j^{(s)}} \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s-1)}$$

Por lo tanto podemos calcular  $\mathbf{A}_j^{(s)}$  a partir de  $\mathbf{A}_{j-1}^{(s)}$  y  $\mathbf{A}_j^{(s-1)}$  recursivamente.

- Si  $\bar{c}_j^{(s)} = 0$ , no podemos calcular  $\mathbf{A}_j^{(s)}$  mediante la ecuación (4.8).

Consideremos los siguientes dos casos, el primero es que  $\bar{c}_j^{(s)} = 0$  y  $\bar{c}_{j+1}^{(s)} = 0$ , es decir  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s-1}$  y  $\bar{t}_{j+1} = \bar{t}_{j+m+s}$ , entonces  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s}$ , y por el inciso (b) del Teorema 11 se tendría  $a_{i,j} = 0$ ,  $i = k-s, k-s+1, \dots, n$  por lo tanto  $\mathbf{A}_j^{(s)} = 0$ .

El segundo caso es cuando  $\bar{c}_j^{(s)} = 0$  y  $\bar{c}_{j+1}^{(s)} > 0$ , es decir  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s-1}$  y  $\bar{t}_{j+1} < \bar{t}_{j+m+s}$ , entonces  $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+s}$ , luego  $\bar{B}_{j,m+s}(\bar{t}_j) = 1$  y  $\bar{B}_{l,m+s}(\bar{t}_j) = 0$  para  $l \neq j, l = k-s, k-s+1, \dots, \bar{n}$ ; pues  $\bar{t}_j \notin \text{sop}(\bar{B}_{l,m+s}(t)) = [\bar{t}_l, \bar{t}_{l+m+s})$ .

Como  $B_{i,s}(t) = \sum_{j=k-s}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(s)} \bar{B}_{j,m+s}(t)$  se tendrá:

$$\begin{aligned} B_{i,s}(\bar{t}_j) &= \sum_{j=k-s}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(s)} \bar{B}_{j,m+s}(\bar{t}_j) \\ &= a_{i,j}^{(s)}(1) \\ &= a_{i,j}^{(s)}; \quad i = k-s, k-s+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Para los B-spline  $\bar{B}_{j,s-1}$ ,  $j = k-s+1, k-s+2, \dots, \bar{n}$ ; el  $\bar{t}_j$  anterior ocuparía ya no el índice de posición  $j$  sino la  $j+1$ , entonces  $\bar{B}_{j+1,m+s-1}(\bar{t}_j) = 1$  y  $\bar{B}_{l,m+s-1}(\bar{t}_j) = 0$  para  $l \neq j+1, l = k-s+1, k-s+2, \dots, \bar{n}$ . Luego

$$\begin{aligned} B_{i,s-1}(\bar{t}_j) &= \sum_{j=k-s+1}^{\bar{n}} a_{i,j}^{(s-1)} \bar{B}_{j,m+s-1}(\bar{t}_j) \\ &= a_{i,j+1}^{(s-1)} \bar{B}_{j+1,m+s-1}(\bar{t}_j) \\ &= a_{i,j+1}^{(s-1)}; \quad i = k-s+1, k-s+2, \dots, \bar{n}. \end{aligned}$$

De la fórmula recursiva para la base B-spline tenemos:

$$B_{i,s}(\bar{t}_j) = \frac{\bar{t}_j - t_i}{t_{i+s-1} - t_i} B_{i,s-1}(\bar{t}_j) + \frac{t_{i+s} - \bar{t}_j}{t_{i+s} - t_{i+1}} B_{i+1,s-1}(\bar{t}_j)$$

para  $i = k-s, k-s+1, \dots, n$ ; donde se considera a los coeficientes con denominador cero, el valor de cero. Reemplazando los resultados,  $B_{i,s}(\bar{t}_j) = a_{i,j}^{(s)}$  y  $B_{i,s-1}(\bar{t}_j) = a_{i,j+1}^{(s-1)}$

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(s)} &= \frac{\bar{t}_j - t_i}{t_{i+s-1} - t_i} a_{i,j+1}^{(s-1)} + \frac{t_{i+s} - \bar{t}_j}{t_{i+s} - t_{i+1}} a_{i+1,j+1}^{(s-1)} \\ & \quad i = k-s, k-s+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Si definimos

$$\alpha_{i,j}^{(s)} := \begin{cases} \frac{\bar{t}_j - t_i}{t_{i+s-1} - t_i}, & t_i < t_{i+s-1} \\ 0, & t_i = t_{i+s-1} \end{cases}$$



### 4.3. Cálculo de las matrices BSBT cuando $\bar{\mathbf{T}}$ esta anclado por la izquierda

En esta sección nos encargaremos de ver la manera de calcular la matriz  $\mathbf{A}^{(s)}$ , cuando el vector nodo  $\bar{\mathbf{T}}$  tiene la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{\underbrace{\bar{t}_0 = \bar{t}_1 = \dots = \bar{t}_{\bar{k}-1}}_{\bar{k}}, \bar{t}_{\bar{k}}, \bar{t}_{\bar{k}+1}, \dots, \bar{t}_{\bar{n}}\}$$

A los vectores nodo de ese tipo se le denomina anclado por la izquierda. Es importante hacer el estudio particular de las curvas con nodos ancladas por la derecha, pues en el diseño geométrico al trabajar con varias curvas B-splines, se busca unirlos, y para los de dicho tipo la union es más factible.

Vemos que  $\bar{\mathbf{T}}$  presenta un nodo de multiplicidad  $\bar{k}$  (pues  $\bar{t}_{\bar{k}-1} < \bar{t}_{\bar{k}}$ ), en este caso diremos que  $\bar{\mathbf{T}}$  esta anclado por la izquierda.

Si queremos calcular la primera columna de  $\mathbf{A}^{(s)}$ , que vendría a ser  $\mathbf{A}_{k-s}^{(s)}$ , usaremos la fórmula recursiva (4.10) y estaríamos en el caso  $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s-1} < \bar{t}_{j+m+s}$  para  $j = k - s$ , pues  $\bar{t}_{k-s} = \bar{t}_{\bar{k}-1}$ . En este caso solo tendríamos:

$$\mathbf{A}_{k-s}^{(s)} = \mathbf{B}^{(s,k-s)} \mathbf{A}_{k-s+1}^{(s-1)}$$

Por lo tanto podemos obtener un algoritmo mas simple para calcular recursivamente:

$$\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$$

**Ejemplo 4.3.** Sean las bases B-spline  $\{B_{i,4}(t)\}_{i=0}^6$  y  $\{\bar{B}_{i,4}(t)\}_{i=0}^{13}$  respecto a los vectores nodo:

$$\mathbf{T} = \{0, 0, 0, 0, 2, 6, 7, 10, 10, 10, 10\}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1.5, 2, 2, 3, 4, 6, 7, 7, 8, 10, 10, 10, 10\}$$

Entonces se tiene  $n = 6, k = 4$  y  $\bar{n} = 13, \bar{k} = 4$ . Luego de la relación recursiva, se obtiene la matriz  $\mathbf{A}^{(k)}$ .





donde  $\tilde{U}_{\bar{n}-i-1}$  es la matriz unitaria de orden  $\bar{n} - i - 1$ . Para el calculo de la matriz BSBT  $A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}}$ , seguiremos los siguientes pasos:

**Paso 1** Calcular  $A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}}$

De la definición de  $\tilde{T}$  se ve que es anclado por la izquierda; así que esa matriz BSBT se calcula como lo indica la sección anterior.

**Paso 2** Calcular  $A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}}$

La existencia de  $A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}}$  esta garantizada por el Teorema 10. pues  $\tilde{t}_{\bar{k}-1} = \bar{t}_{\bar{k}-1}$ ,  $\tilde{t}_{\bar{n}-1} = \bar{t}_{\bar{n}-1}$  y  $\tilde{t}_i = \bar{t}_i$ ,  $\tilde{r}_i = \bar{r}_i$  para  $i = \bar{k}, \bar{k} - 1, \dots, \bar{n}$ . Sea  $h$  la multiplicidad de  $\bar{t}_{\bar{k}-1}$  en el vector nodo  $\tilde{T}$ , entonces una representación de  $A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}}$  en forma matricial sería:

$$A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}} = U^{(\bar{k}-h-2)} U^{(k-h-3)} \dots U^{(0)}$$

**Paso 3** Calcular  $A_{k, \bar{k}, T, \tilde{T}}$

Como ya tenemos  $A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}}$  que es la matriz BSBT de la base  $\{\bar{B}_{i, \bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  a la base  $\{\tilde{B}_{i, \bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  y  $A_{\bar{k}, \bar{k}, T, \tilde{T}}$  que es la matriz BSBT de la base  $\{\tilde{B}_{i, \bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  a  $\{B_{i, k}(t)\}_{i=0}^n$ . entonces:

$$A_{k, \bar{k}, T, \tilde{T}} = A_{k, \bar{k}, T, \tilde{T}} A_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{T}, \tilde{T}}$$

**Ejemplo 4.4.** Sean las bases B-spline  $\{B_{i,3}(t)\}_{i=0}^2$  y  $\{\bar{B}_{i,5}(t)\}_{i=0}^6$  respecto a los vectores nodo:

$$T = \{2, 3, 5, 8, 9, 10\}$$

$$\tilde{T} = \{1, 2, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 10, 12, 13\}$$

Entonces se tiene  $n = 2, k = 3$  y  $\bar{n} = 6, \bar{k} = 5$ . Luego de los pasos mostrados, se obtiene la matriz  $A_{k, \bar{k}, T, \tilde{T}}$ .

Af =

1.0333333	0.4777778	0.2444444	0.0777778	0.0111111	- 0.0222222	0.0888889
- 0.075	0.55	0.7	0.7	0.475	0.175	- 0.7
0.0416667	- 0.0277778	0.0555556	0.2222222	0.5138889	0.8472222	1.6111111

**Ejemplo 4.5.** Sean las bases B-spline  $\{B_{i,4}(t)\}_{i=0}^3$  y  $\{\bar{B}_{i,5}(t)\}_{i=0}^5$  respecto a los vectores nodo:

$$\mathbf{T} = \{1, 1, 3, 5, 7, 7, 8, 8\}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \{0, 3, 3, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 9, 10\}$$

Entonces tendremos  $n = 3, k = 4$  y  $\bar{n} = 5, \bar{k} = 5$ . Luego de los pasos mostrados, obtenemos la matriz  $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$ .

$\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}} =$

0.5	0.1875	0.0208333	0.	0.	0.
0.5	0.71875	0.3854167	0.125	1.388D-17	2.949D-17
0.	0.09375	0.59375	0.7916667	0.5833333	0.
0.	0.	0.	0.0833333	0.4166667	1.1666667

## Capítulo 5

# Un nuevo método para la inserción de nodos y elevación de grado de las curvas B-spline

La inserción de nodos y elevación de grados son dos operaciones básicas en la manipulación de curvas B-splines. En esta sección se emplean las matrices BSBT para explorar esas operaciones a partir de un punto de vista uniforme.

Sea

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_{i,k}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (5.1)$$

una curva B-spline de orden  $k$ , donde  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  son sus puntos de control y  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$  es la base normalizada de B-spline de orden  $k$  asociada con el vector de nodos  $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+k}\}$  el cual satisface la condición (3.1). Algo en común que tienen los métodos de inserción de nodos y elevación de grados de una curva B-spline  $\mathbf{p}(t)$  es que el objetivo es representar la curva original  $\mathbf{p}(t)$  mediante una nueva base de polinomios B-spline, esto es, encontrar nuevos puntos de control  $\bar{\mathbf{p}}_0, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \dots, \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}$  tales que:

$$\mathbf{p}(t) = \bar{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{p}}_i \bar{B}_{i,\bar{k}}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}), \quad (5.2)$$

donde  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  es una base B-spline normalizada de orden  $\bar{k}$  asociada con el nuevo vector nodo  $\bar{\mathbf{T}} = \{\bar{t}_0, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{\bar{n}+\bar{k}}\}$ .

Así, dos problemas aparentemente distintos, son esencialmente el mismo. La única diferencia entre ellos es que tomamos una nueva base B-spline diferente  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ , que es totalmente determinada por el nuevo orden  $\bar{k}$  y el nuevo vector nodo  $\bar{\mathbf{T}}$ . Para el problema de inserción de nodos tenemos  $\bar{k} = k$  y

$$\mathbf{T} \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subset \bar{\mathbf{T}}. \quad (5.3)$$

Denotemos como  $r_i$  y  $\bar{r}_i$  a las multiplicidades de  $t_i$  y  $\bar{t}_i$  en los vectores nodo  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$ , respectivamente. Luego, para el problema de elevación de grado se tiene que  $\bar{k} > k$  y  $\bar{\mathbf{T}}$  satisface la condición (5.3) y

$$\bar{r}_i = r_i + \bar{k} - k, \quad i = k, k+1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Luego, en base al Teorema 10, existe la matriz BSBT  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  a a partir de una nueva base B-spline  $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$  en la base original B-spline  $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ . De esto, a partir de la ecuación (5.2), se tiene:

$$[\bar{\mathbf{p}}_0, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \dots, \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}] = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}. \quad (5.5)$$

Esto muestra que los problemas de inserción de nodos y elevación de grado de las curvas B-splines puede ser convertidos uniformemente al problema del cálculo de matrices BSBT.

Empleando una matriz BSBT podemos también realizar la inserción de nodos y la elevación de grados de las curvas B-spline simultáneamente. Para insertar algún nodo y elevar el orden de  $k$  a  $\bar{k}$  ( $\bar{k} > k$  en la curva B-spline  $\mathbf{p}(t)$ ), el nuevo vector de nodo  $\bar{\mathbf{T}}$  debería ser construido de modo que las condiciones (5.3) y (5.4) son satisfechas. En esta situación la matriz BSBT  $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$  aún existe, en virtud del Teorema 10.

Ahora, se proporcionarán dos nuevos métodos para la inserción de nodos y elevación de grados de curvas B-spline en un modo unificado basado en la fórmula recursiva

para matrices BSBT dada en el capítulo anterior. Los métodos pueden ser usados para insertar nodos, elevar grados o hacer ambas operaciones simultáneamente en curvas B-spline.

Sean  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$  el vector de puntos de control de la curva original  $\mathbf{p}(t)$  definida mediante la ecuación (5.1) y  $\bar{\mathbf{P}} = [\bar{\mathbf{p}}_0, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \dots, \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}]$  el vector de punto de control de la nueva curva  $\mathbf{p}_t$  resultante de la inserción de nodos, elevación de grados o de ambas operaciones simultáneamente de  $\mathbf{p}(t)$ . Uno de nuestros métodos es en modo directo: primero calculamos la matriz BSBT  $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$  mediante el método dado en el capítulo anterior, luego calculamos  $\bar{\mathbf{P}}$  mediante la ecuación (5.5). Sin embargo, el tiempo de complejidad del método es  $O(k^2 \bar{n})$ .

El otro método dado a continuación es más eficiente. Sean  $\mathbf{C}^{(s)}$  y  $\mathbf{A}^{(s)}$  definidas como en los capítulos anteriores. Escribamos:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}, \\ \mathbf{P}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s+1)} \mathbf{C}^{(s+1)}, \quad s = k-1, k-2, \dots, 1, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\bar{\mathbf{P}}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s)} \mathbf{A}^{(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (5.7)$$

Consideremos  $\mathbf{C}^{(s)}$  como en el capítulo anterior. Luego, denotando  $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}^{(k)} = \mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$  tenemos  $\bar{\mathbf{P}}^{(k)} = \bar{\mathbf{P}}$ , en virtud de las ecuaciones (5.5)-(5.7). De acuerdo a las ecuaciones (5.6),(5.7) y el Teorema 12 tenemos:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{P}}^{(1)} = \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)}, \\ \bar{\mathbf{P}}^{(s)} = \frac{m+s}{s} \bar{\mathbf{P}}^{(s+1)} \bar{\mathbf{C}}^{(s+1)}, \quad s = 1, 2, \dots, k-1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Denotemos como  $\mathbf{P}^{(s)} = [\mathbf{p}_{k-s}^{(s)} \mathbf{p}_{k-s+1}^{(s)} \dots \mathbf{p}_n^{(s)}]$  y  $\bar{\mathbf{P}}^{(s)} = [\bar{\mathbf{p}}_{k-s}^{(s)} \bar{\mathbf{p}}_{k-s+1}^{(s)} \dots \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}^{(s)}]$ , para  $s = 1, 2, \dots, k$ . Consideremos  $\bar{c}_j^{(s)}$  y  $\mathbf{A}_j^{(s)}$  como en los capítulos anteriores. Luego, debido al

lema 5, y las ecuaciones (4.10), (5.7) y (5.8), se obtiene:

$$\bar{\mathbf{p}}_j^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+1}, \\ \mathbf{P}_i^{(1)}, & [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+1}), \bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+1}, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$j = k-1, k-2, \dots, \bar{n}, \quad (5.10)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_j^{(s)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s}, \\ \mathbf{P}^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s)}, & \bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s-1} < \bar{t}_{j+m+s}, \\ \frac{s-1}{(m+s-1)c_j^{(s)}} \bar{\mathbf{p}}_j^{(s-1)} + \bar{\mathbf{p}}_{j-1}^{(s)}, & \bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+s-1}, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$j = k-s, k-s+1, \dots, \bar{n}, s = 2, 3, \dots, k. \quad (5.12)$$

De acuerdo a las ecuaciones (5.6), (5.10) y (5.11), se presentan dos algoritmos que corresponden a los dos casos considerados para calcular el nuevo vector de puntos de control  $\bar{\mathbf{P}}$ .

### Caso 1.

El nuevo vector nodo  $\tilde{\mathbf{T}}$  satisface la condición de anclaje  $\bar{t}_0 = \bar{t}_1 = \dots = \bar{t}_{k-1}$ .

#### Algoritmo LC.

1. Calcular  $\mathbf{P}^{(k)}, \mathbf{P}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{P}^{(1)}$  recursivamente mediante la ecuación (5.6).
2. Calcular  $\bar{\mathbf{P}}^{(1)}, \bar{\mathbf{P}}^{(2)}, \dots, \bar{\mathbf{P}}^{(k)}, \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^{(k)}$  recursivamente mediante las ecuaciones (5.10) y 5.11.

### Caso 2.

El nuevo vector nodo  $\tilde{\mathbf{T}}$  no esta anclado. Definamos el vector nodo no anclado

$$\tilde{\mathbf{T}} = \overbrace{\{\bar{t}_{k-1}, \dots, \bar{t}_{k-1}, \bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}, \dots, \bar{t}_{\bar{n}+k}\}}^{\bar{k}}$$

Se puede calcular  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}}}$  mediante el algoritmo LC. Consideremos  $\mathbf{U}^{(s)}$  como en la ecuación (4.4). Si denotamos como  $h$  a la multiplicidad de  $\bar{t}_{k-1}$  en el

vector nodo  $\tilde{\mathbf{T}}$ . En virtud de las ecuaciones (4.4) y (5.5) tendremos:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\tilde{\mathbf{T}}} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}_{\bar{k},\bar{k},\tilde{\mathbf{T}},\tilde{\mathbf{T}}} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{U}^{(\bar{k}-h-2)}\mathbf{U}^{(\bar{k}-h-3)} \dots \mathbf{U}^{(0)}.$$

Obviamente podemos calcular  $\bar{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$  mediante la siguiente fórmula recursiva

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{P}}^{(\bar{k}-h-1)} = \tilde{\mathbf{P}}, \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(s)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(s+1)}\mathbf{U}^{(s)}, \quad s = \bar{k} - h - 2, \bar{k} - h - 3, \dots, 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

**Algoritmo LUC.**

1. Calcular  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\tilde{\mathbf{T}}}$  mediante el algoritmo LC.
2. Calcular  $\tilde{\mathbf{P}}^{(\bar{k}-h-1)}, \tilde{\mathbf{P}}^{(\bar{k}-h-2)}, \dots, \tilde{\mathbf{P}}^{(0)}, \bar{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$  recursivamente mediante la ecuación (5.13).

Se puede estimar que los tiempos de complejidad del Algoritmo LC y del Algoritmo LUC son ambos  $O(k\bar{n})$ .

Se dan ahora ejemplos para los diversos casos:

**Ejemplo 5.1** (Inserción de nodos).

Sea  $\mathbf{p}_1(t)$  la curva B-spline de orden 4 con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{1, 1, 1, 1, 1.5, 2, 3, 5, 5, 5, 5\}$$

Ahora considero como puntos de Boor a:

$i$	$\mathbf{p}_i$
0	(1, 3)
1	(3, 5)
2	(5, 4)
3	(6, 3.5)
4	(7, 3)
5	(8, 4)
6	(7, 4.5)



Al insertar los siguientes 7 nodos:

$$\{1.1, 1.3, 1.5, 1.8, 1.9, 3, 4\}$$

Entonces se tendrá un nuevo vector nodo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{1, 1, 1, 1, 1.1, 1.3, 1.5, 1.5, 1.8, 1.9, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5\}$$

donde  $\bar{k} = 4$  (el grado no cambia), pero ahora  $\bar{n} = 13$ .

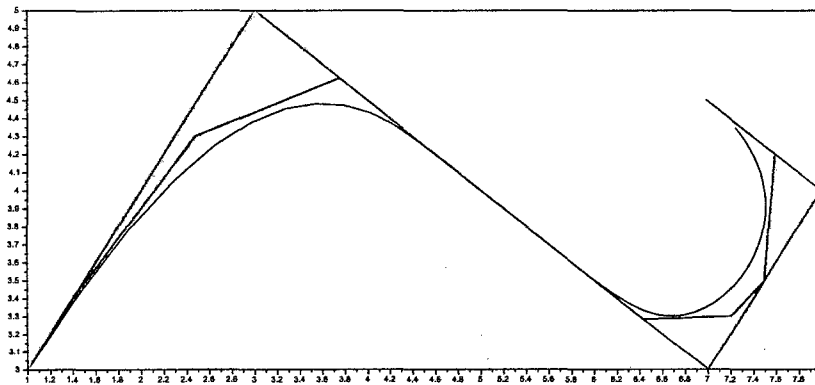


Figura 5.1: Curva B-spline  $p_1(t)$  y los polígonos de control antes (azul) y después (verde) de insertar los nodos.

**Ejemplo 5.2 (Elevación de grado).**

Sea  $p_2(t)$  la curva B-spline de orden  $k = 3$  con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 2, 2, 3, 5.9, 6, 6, 10, 10, 10\}$$

Los puntos de Boor serán:

$i$	$\mathbf{p}_i$
0	(4, 2)
1	(2, 5)
2	(5, 10)
3	(11, 11)
4	(14, 7)
5	(10, 3)
6	(7, 4)

Se quiere elevar de grado a  $\bar{k} = 5$ , entonces el nuevo vector nodo será:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{2, 2, 2, 2, 2, 3, 5.9, 6, 6, 10, 10, 10, 10, 10\}$$

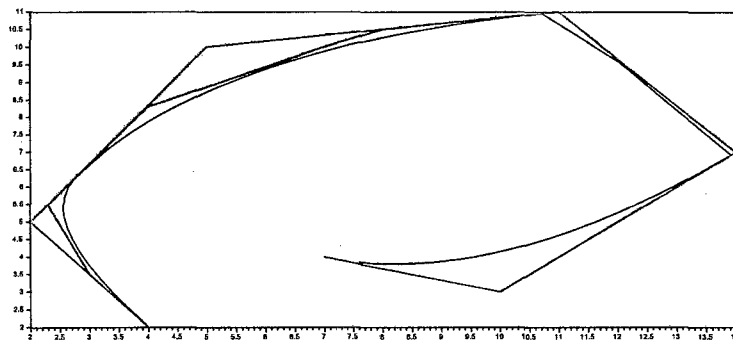


Figura 5.2: Curva B-spline  $p_2(t)$  y los polígonos de control antes (azul) y después (verde) de elevar el grado.

**Ejemplo 5.3** (Inserción de nodos y elevación de grado). Sea  $p_3(t)$  la curva B-spline de orden  $k = 4$  con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{4, 4, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 8\}$$

Con puntos de Boor:

$i$	$\mathbf{p}_i$
0	(3, 6)
1	(2, 7)
2	(5, 11)
3	(10, 4)
4	(6, 16)
5	(12, 12)

Al insertar los nodos:  $\{5.5, 6.5\}$  y elevar el grado a  $\bar{k} = 5$ , se tendrá como nuevo vector nodo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{4, 4, 4, 4, 4, 5, 5.5, 6.5, 7, 8, 8, 8, 8, 8\}$$

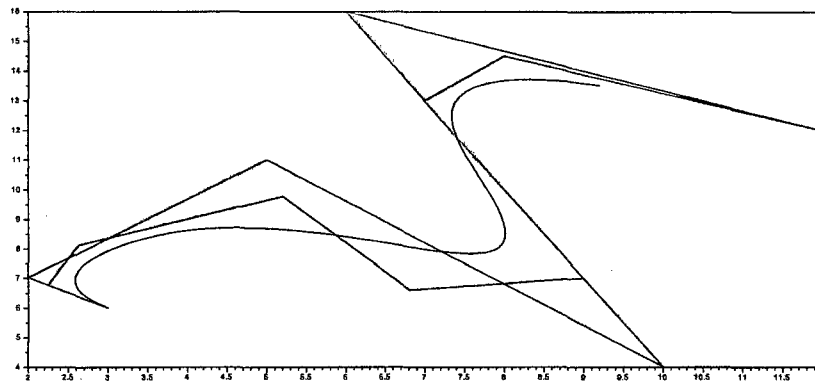


Figura 5.3: Curva B-spline  $p_3(t)$  y los polígonos de control antes (azul) y después (verde) de insertar los nodos y elevar el grado simultáneamente.

**Ejemplo 5.4** (Inserción de nodos y elevación de grado).

Sea  $p_4(t)$  la curva B-spline de orden  $k = 4$  con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{1, 3, 4, 5, 8, 8, 9, 9.3, 9.5, 9.5\}$$

Con puntos de Boor:

$i$	$\mathbf{p}_i$
0	(8, 8)
1	(6, 15)
2	(12, 7)
3	(13, 17)
4	(15, 10)
5	(7, 17)

Al insertar los nodos:  $\{5.1, 8.9\}$  y elevar el grado a  $\bar{k} = 5$ , se obtendrá como nuevo vector nodo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{1, 3, 4, 5, 5.1, 8, 8, 8.9, 9, 9.3, 9.5, 9.5\}$$

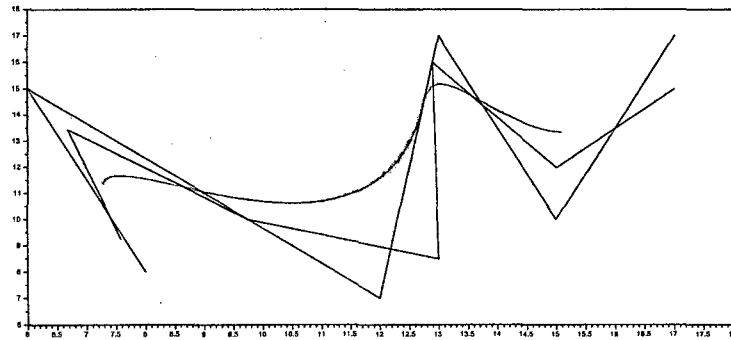


Figura 5.4: Curva B-spline  $p_4(t)$  y los polígonos de control antes (rojo) y después (negro) de insertar los nodos y elevar el grado simultáneamente.

## Capítulo 6

### Conclusiones

En este trabajo se presenta una relación recursiva para calcular las matrices BSBT. Sobre la base de esto, se propone una fórmula recursiva para el cálculo de matrices BSBT, y es desarrollado un algoritmo eficiente para el cálculo de las mismas.

Los resultados muestran que las matrices BSBT proveen una herramienta general para la conversión entre las diferentes representaciones de las curvas B-spline, que son causadas por las operaciones básicas B-spline tales como la inserción de nodos y la elevación de grado.

Empleando matrices BSBT, se propone un método uniforme para estas operaciones. Este método además de ser eficiente es fácil de implementar y puede ser usado para insertar un nodo o múltiples nodos, elevar un grado o múltiples grados, o insertar nodos y elevar grados simultáneamente.

# Bibliografía

- [1] Farin Gerald, *Curves and Surfaces for CAGD*. Fifth Edition. Morgan Kaufmann Publishers. California (2002).
- [2] Paluszny M., Prautzsch H., Boehm W., *Bézier and B-Spline Techniques*. Springer Verlag Berlin Heidelberg. New York (2002).
- [3] Hoschek J., Lasser D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters. Massachusetts (1993).
- [4] Kincaid D., Cheney W., *Análisis Numérico*. Addison-Wesley Iberoamericana. Delaware (1994).
- [5] Prautzsch H., Degree elevation of B-splines curves. *Computer Aided Design* 1, pp. 193-198 (1984).
- [6] Boehm W., On the Boor-like algorithms and blossming. *Computer Aided Design* 5, pp. 71-79 (1988).
- [7] Pan R., Weng B., Recursive representation and application of transformation matrices of B-splines bases. *Computer Aided Geometric Design* 26, pp. 82-93 (2009).
- [8] Pan R., The transformation matrices of B-spline bases and their applications. *ACAT Mathematicae Applicatae Sinica* 26, pp. 91-101 (2003).