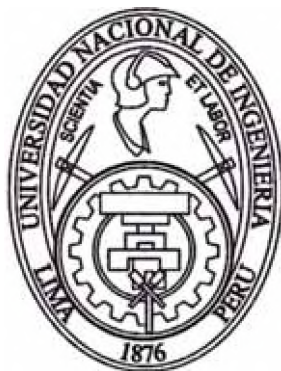


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática



INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Titulado:

Resolución Numérica de las Ecuaciones de Navier Stokes

Presentado por:

Angela Pérez Tinoco

Asesor:

William Eche garay Castillo

LIMA-PERÚ

2011

Dedicatoria

A mis padres, esposo e hijos porque muchas de estas páginas estarían vacías sino hubiera sido por su constante dedicación a ayudarme a concluir esta meta tan importante, gracias.

Agradecimientos

Un sincero agradecimiento a mi profesor William y a mi amigo Victor, por todo el tiempo que me han dado, por sus sugerencias e ideas de las que tanto provecho he sacado, por el respaldo y la amistad. No puedo olvidar a mis compañeros y amigos con los cuales he compartido incontables horas de estudio. Gracias por los buenos y malos momentos, por apoyarme y escucharme.

Resumen

En el presente trabajo mostramos un estudio detallado de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido y en particular, para uno, que es viscoso e incompresible, estas ecuaciones son las que llamaremos ecuaciones de Navier Stokes.

En este camino realizamos una breve reseña histórica de la mecánica de fluidos, estudiamos las propiedades de los fluidos y de los flujos de fluidos describiendo y analizando estos últimos.

Las ecuaciones que estudian el movimiento de los fluidos fueron un aspecto importante de estudio de este trabajo, las ecuaciones de Euler y después las ecuaciones de Navier Stokes buscaron sentar las bases para posteriores estudios sobre fluidos.

Un método numérico apropiado para solucionar ecuaciones de Navier Stokes incompresibles es el Método de Proyección de Paso Fraccional propuesto por Chorin y que consiste en desacoplar el problema en una solución para la velocidad y otra para la presión.

Finalmente se exponen herramientas desarrolladas para la solución de problemas de fluidos viscosos bajo régimen de flujo incompresible en dos dimensiones. Dichas herramientas han sido generadas aplicando el método de diferencias, y programadas en Matlab. Esto permitirá extender en un futuro, de manera directa, el rango de problemas a solucionar.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos	4
2.1. Introducción	4
2.2. Aspectos Históricos	4
2.3. Conceptos fundamentales de los fluidos	9
2.3.1. Fluidos - Definición	9
2.3.2. Los fluidos y la hipótesis del continuo	10
2.3.3. Propiedades de los fluidos	11
2.4. Conceptos fundamentales para el análisis de flujos	13
2.4.1. Propiedades del flujo	13
2.4.2. Descripción del flujo de fluidos	15
2.4.3. Análisis del flujo de fluidos	18
3. Las Ecuaciones del Movimiento	22
3.1. Ecuaciones de Euler	22
3.1.1. Conservación de Masa	24
3.1.2. Balance de Momentum	25
3.1.3. Conservación de Energía	32
3.2. Ecuaciones de Navier Stokes	34
4. Método del Paso Fraccional	38

4.1. Introducción	38
4.1.1. Teorema de Ladyzhenskaya	40
4.2. Método de Proyección de paso fraccional	43
4.2.1. Condiciones de Frontera Homogéneas	44
4.2.2. Condiciones de Frontera No Homogénea	44
4.3. Implementación del Método de Paso Fraccional	49
5. Conclusiones	53
A. Teoremas y definiciones	54
B. Problemas en Ecuaciones Diferenciales Parciales	57
B.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas	58
B.1.1. Forma General de una EDP Elíptica	58
B.2. Discretización de una EDP Elíptica en Diferencias Finitas	60
B.2.1. Aproximación en las Esquinas	69
C. Código Método del Paso Fraccional	71
Bibliografía	72

Índice de figuras

2.1. Aspectos Históricos	6
2.2. Aspectos Históricos	7
2.3. Los fluidos y la hipótesis del continuo	10
2.4. Propiedades del flujo	14
2.5. Propiedades del flujo	15
3.1. Ecuaciones de Euler	23
3.2. Ecuaciones de Euler	25
3.3. Ecuaciones de Euler	27
3.4. Ecuaciones de Euler	29
3.5. Las moléculas más rápidas en B pueden difundirse a través de S	35
4.1. Construcción de un campo solenoidal en el método del paso fraccional con condiciones de frontera homogéneas	44
4.2. Método de proyección del paso fraccional. Descomposición ortogonal del espacio de los campos gradiente analizando la imposición de condiciones de frontera no homogéneas sobre la velocidad normal	46
4.3. Método de proyección del paso fraccional. Operadores de proyección ortogonal en presencia de fronteras.	47
4.4. Construcción de un campo solenoidal satisfaciendo las condiciones de frontera no homogéneas para la componente normal	48

4.5. Ilustración detallada de la construcción del campo solenoidal satisfaciendo condiciones de frontera normales no homogéneas $[\mathcal{Y} = (\mathcal{P} + \mathcal{Q}_h v)]$	49
4.6. Representación sistemática del método del paso fraccional en ausencia de fronteras	50
B.1. Frontera Inferior	63
B.2. Frontera Izquierda	65
B.3. Frontera Superior	66
B.4. Frontera Derecha	68

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo consiste en el estudio y resolución de las ecuaciones de Navier Stokes para fluidos viscosos e incompresibles utilizando métodos numéricos. Para esto presentamos una introducción a los fundamentos de la Mecánica de Fluidos. Además de todos los conceptos y principios en los cuales se basan las ecuaciones, manteniendo siempre el nivel introductorio. Nos concentramos en el estudio de la cinemática y dinámica de un fluido en movimiento, hasta llegar a las ecuaciones para un fluido Newtoniano o ecuaciones de Navier Stokes.

El objetivo es presentar un material introductorio sobre Mecánica de Fluidos para quienes necesiten estudiar temas más avanzados y no hayan realizado un primer curso formal sobre Mecánica de Fluidos.

Otro aspecto interesante que incluye este trabajo es el de la historia de la Mecánica de Fluidos, esto nos ayudó a tener una ubicación en el tiempo de sus conocimientos y también sirvió para dar reconocimiento a los científicos que han realizado contribuciones a la misma. En primer lugar digamos que la historia de la Mecánica de Fluidos es paralela a la historia de la civilización. Y esto ha ocurrido así dada la importancia que tienen algunos fluidos en el desarrollo de la vida, como lo es el agua, por ejemplo.

En ésta reseña histórica uno de los personajes a los que dedicaremos parte de este estudio es Leonardo Euler, quien es considerado el gran arquitecto de gran parte de la

matemática que se usa actualmente y del modelo matemático de la dinámica de fluidos para fluidos ideales. Otro personaje importante fue Claude Navier, quien primero presentó las ecuaciones conocidas como de Navier-Stokes. Es interesante comentar que Navier al presentar esas ecuaciones, consideradas una de las mayores contribuciones a la ciencia, llamó la atención en su presentación expresando que quizá las mismas no fuesen nada nuevo, porque en realidad usaba el concepto propuesto por Newton para tratar los efectos de la viscosidad. Finalmente sin dudas hay que citar a quien llegó tiempo después a las mismas ecuaciones por un camino diferente, George Stokes realizó las hipótesis de las sustancias que hoy en día se modelan con las ecuaciones de Navier-Stokes. Y de ahí que las mismas reciban el nombre de Navier-Stokes.

En esta primera parte también después de definir lo que es un fluido, se define el significado de teoría del continuo. Una de las hipótesis más importantes en Mecánica de Fluidos es la de continuidad de la materia. A simple vista el agua en un vaso se nos presenta como una masa continua, sin discontinuidades. Esta es la visión macroscópica de la materia. No obstante se sabe que la misma está conformada por moléculas, éstas por átomos y éstos últimos por partículas subatómicas, las cuales ocupan una porción reducida del espacio vacío. Es decir que la materia no es continua. Sin embargo muchos cálculos en ingeniería, como los relacionados con las fuerzas de arrastre de un flujo sobre un cuerpo, la transferencia de calor desde un sólido hacia un fluido en movimiento, entre otros ejemplos, no necesitan del detalle molecular ni atómico de la materia, sino de su efecto medio. Es decir se emplea una visión macroscópica de la materia, o modelo de comportamiento macroscópico, el cual no hace referencia a la estructura molecular. A dicho modelo se lo conoce como mecánica del continuo o teoría del continuo.

En el Capítulo 3 estudiaremos las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido a partir de la ley de conservación de masa, balance de momentum, y conservación de energía, además realizaremos un estudio inicial de las ecuaciones de Navier Stokes .

En el Capítulo 4, discutiremos las ecuaciones de Navier Stokes para su posterior resolución numérica utilizando el método de paso fraccional.

El desacoplamiento de la presión y la velocidad en la aproximación numérica de las

ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible se ha tratado tradicionalmente desde varios enfoques. Tal vez el más extendido es el uso de los métodos de Proyección de los que estudiaremos el método de Paso Fraccionado. El interés en este tipo de métodos radica en su eficiencia computacional, puesto que solamente hay que resolver ecuaciones escalares.

En la actualidad en muchos campos es imposible recurrir a soluciones analíticas debido a la tremenda complejidad de los sistemas que estudia la dinámica de fluidos, por lo que se recurre a soluciones numéricas que pueden ser computadas por ordenadores. Surge así una rama de la dinámica de fluidos denominada dinámica de fluidos computacional, o CFD, que se basa en aproximaciones numéricas de las ecuaciones físicas empleadas en la dinámica de fluidos.

Nosotros investigamos sobre la implementación utilizando Matlab, del método de Proyección de Paso Fraccional introducido por Chorin, el cual soluciona ecuaciones de Navier Stokes incompresibles. Para esto utilizamos el método de diferencias finitas para mallas alternadas "staggered", además para el término no lineal utilizaremos un esquema explícito, la viscosidad será tratada implícitamente y realizaremos una corrección de la presión.

Para complementar este trabajo mostraremos algunas definiciones matemáticas y un estudio del método de diferencias finitas que nos ayudaron a comprender mejor el análisis numérico de las ecuaciones de Navier Stokes.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos

2.1. Introducción

En este capítulo mostraremos una breve reseña histórica y algunos fundamentos de la mecánica de fluidos básicos para el desarrollo de este trabajo. Estos fundamentos incluyen un conocimiento de la naturaleza de los fluidos y de las propiedades que se emplean para describirlos; las leyes físicas que gobiernan su comportamiento y los modos en que estas leyes pueden expresarse de una forma matemática.

2.2. Aspectos Históricos

Mecánica de fluidos, es la parte de la física que se ocupa de la acción de los fluidos en reposo o en movimiento, así como de las aplicaciones y mecanismos de ingeniería que utilizan fluidos. La mecánica de fluidos es fundamental en campos tan diversos como la aeronáutica, la ingeniería química, civil e industrial, la meteorología, las construcciones navales y la oceanografía.

La mecánica de fluidos puede subdividirse en dos campos principales: la estática de

fluidos, o hidrostática, que se ocupa de los fluidos en reposo, y la dinámica de fluidos, que trata de los fluidos en movimiento. El término de hidrodinámica se aplica al flujo de líquidos o al flujo de los gases a baja velocidad, en el que puede considerarse que no hay variaciones de densidad, que se denominan incompresibles. La aerodinámica, o dinámica de gases, se ocupa del comportamiento de los gases cuando los cambios de velocidad y presión son lo suficientemente grandes para que sea necesario incluir los efectos de la compresibilidad.

El interés por la dinámica de fluidos se remonta a las aplicaciones más antiguas de los fluidos en ingeniería. El matemático y filósofo griego Arquímedes (287 - 212 a.c) realizó una de las primeras contribuciones con la invención del tornillo helicoidal "tornillo sin fin" que se le atribuye tradicionalmente. Los romanos desarrollaron otras máquinas y mecanismos hidráulicos; no sólo empleaban el tornillo de Arquímedes para trasegar agua en agricultura y minería, sino que construyeron extensos sistemas de conducción de agua, los acueductos. Durante el siglo I a.c., el ingeniero y arquitecto Vitrubio inventó la rueda hidráulica horizontal, que revolucionó la técnica de moler granos. Después de Arquímedes pasaron más de 1600 años antes de que se produjera el siguiente avance científico significativo, debido al gran genio italiano Leonardo da Vinci (1452 - 1529), que aportó la primera ecuación de la conservación de masa, o ecuación de continuidad y desarrolló múltiples sistemas y mecanismos hidráulicos y aerodinámicos. Posteriormente el matemático y físico italiano Evangelista Torricelli, inventó el barómetro en 1643, y formuló el teorema de Torricelli, que relaciona la velocidad de salida de un líquido a través de un orificio de un recipiente, con la altura del líquido situado por encima del agujero.

La génesis de la actual mecánica de fluidos se debe al matemático y físico inglés Isaac Newton, con la publicación en 1687 de los *Philosophiæ naturalis principia mathematica* se inicia el carácter científico de la disciplina, en donde se analiza por primera vez la dinámica de fluidos basándose en leyes de la naturaleza de carácter general. En 1755 el matemático suizo Leonhard Euler, dedujo las ecuaciones básicas para un fluido ideal.

Euler fue el primero en reconocer que las leyes dinámicas para los fluidos sólo se



Figura 2.1: Daniel Bernoulli(1700-1782)y Leonhard Euler (1707 -1783)

pueden expresar de forma relativamente sencilla si se supone que el fluido es ideal. en decir se desprecian los efectos disipativos internos por transporte de cantidad de movimiento entre partículas, en este caso se considera que el fluido es no viscoso. Sin embargo, como esto no es así en el caso de los fluidos reales en movimiento, los resultados con las ecuaciones de Euler, sólo pueden servir de estimación para flujos en los que los efectos de la viscosidad son pequeños.

La siguiente aportación de gran importancia, fue la primera expresión de la ecuación de conservación de energía, dada por Daniel Bernoulli con la publicación en 1738 de su *Hydrodinamica sive de viribus et motibus fluidorum comentarii*; el denominado teorema de Bernoulli, establece que la energía mecánica total de un flujo incompresible y no viscoso es constante a lo largo de una línea de corriente (líneas de flujo que son paralelas a la dirección del flujo en cada punto, y que en el caso de flujo uniforme coinciden con la trayectoria de las partículas individuales de fluido).

El problema de los efectos viscosos de disipación de energía, se empezó a abordar experimentalmente con flujos a baja velocidad en tuberías, independientemente en 1839 por el médico francés Jean Poiseuille, que estaba interesado por las características del flujo de la sangre, y en 1840 por el ingeniero alemán Gotthif Hagen. El primer intento



Figura 2.2: Claude Navier y George Stokes los fluidos.

de incluir los efectos de la viscosidad en las ecuaciones de gobierno de la dinámica de fluidos. se debió al ingeniero francés Claude Navier en 1827 c, independientemente, al matemático británico George Stokes, quién en 1845 perfeccionó las ecuaciones básicas para los fluidos viscosos incompresibles. Actualmente se las conoce como ecuaciones de Navier-Stokes. En cuanto al problema del flujo en tuberías de un fluido viscoso, parte de la energía mecánica se disipa como consecuencia del rozamiento viscoso, lo que provoca una caída de presión a lo largo de la tubería; las ecuaciones de Navier-Stokes, sugieren que la caída de presión era proporcional a la velocidad media. Los experimentos llevados a cabo a mediados del siglo XIX demostraron que esto solo era cierto para velocidades bajas; para velocidades altas, la caída de presión era mas bien proporcional al cuadrado de la velocidad. Este problema no se resolvió hasta 1883, cuando el ingeniero británico Osborne Reynolds demostró la existencia de dos tipos de flujo viscoso en tuberías. A velocidades bajas, las partículas del fluido siguen las líneas de corriente (flujo laminar) y los resultados experimentales coinciden con las predicciones analíticas; a velocidades mas elevadas, surgen fluctuaciones en la velocidad del flujo o turbulencias (flujo turbulento), en una forma difícil de predecir completamente. Reynolds también determinó que la transición del flujo laminar al turbulento era función

de un único parámetro, que desde entonces se conoce como número de Reynolds

$$Re = \frac{D \cdot \nu \cdot \rho}{\mu}$$

donde:

- Re= Número de Reynolds.
- D= Diámetro del ducto.
- ν = Velocidad promedio del líquido.
- ρ = Densidad del líquido.
- μ = Viscosidad del líquido.

Generalmente cuando el número de Reynolds se encuentra por debajo de 2100 se sabe que el flujo es laminar, el intervalo entre 2100 y 4000 se considera como flujo de transición y para valores mayores de 4000 se considera como flujo turbulento. Los flujos turbulentos no se pueden evaluar exclusivamente a partir de las predicciones de las ecuaciones de conservación, y su análisis depende de una combinación de datos experimentales y modelos matemáticos. Gran parte de la investigación moderna en mecánica de fluidos está dedicada a una mejor formulación de la turbulencia, y que junto con las nuevas técnicas de simulación en ordenador (CFD: computational fluid dynamics), están resolviendo problemas cada vez más complejos.

La complejidad de los flujos viscosos, y en particular de los flujos turbulentos, restringió en gran medida los avances en la dinámica de fluidos hasta que el ingeniero alemán Ludwig Prandtl observó en 1904 que muchos flujos pueden separarse en dos regiones principales. La región próxima a la superficie está formada por una delgada capa límite donde se concentran los efectos viscosos y en la que puede simplificarse mucho el modelo matemático. Fuera de esta capa límite, se pueden despreciar los efectos de la viscosidad, y pueden emplearse las ecuaciones matemáticas más sencillas para flujos no viscosos. La teoría de la capa límite ha hecho posible gran parte del desarrollo de

las alas de los aviones modernos y del diseño de turbinas de gas y compresores. El modelo de la capa límite no sólo permitió una formulación mucho más simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes en la región próxima a la superficie del cuerpo, sino que llevó a nuevos avances en la teoría del flujo de fluidos no viscosos, que pueden aplicarse fuera de la capa límite. Gran parte del desarrollo moderno de la mecánica de fluidos, posibilitado por el concepto de capa límite, se ha debido a investigadores como el ingeniero aeronáutico estadounidense de origen húngaro Theodore von Kármán, el matemático alemán Richard von Mises y el físico y meteorólogo británico Geoffrey Ingram Taylor.

Durante el siglo XX, los avances en la Mecánica de fluidos son continuos, siendo la dinámica de los gases, la aerodinámica y la aeronáutica los campos que han experimentado y seguirán experimentando una especial proliferación.

2.3. Conceptos fundamentales de los fluidos

2.3.1. Fluidos - Definición

Consideraremos la materia en dos estados de agregación: sólido y fluido; además los fluidos incluyen a los líquidos y a los gases. La propiedad característica de los fluidos es su deformación continua bajo sollicitaciones externas. Las propiedades cualitativas más destacables de los fluidos son: movilidad entre las partículas que los constituyen (se adaptan a las formas de los recipientes que los contienen), miscibilidad por la rápida disgregación de partículas de las diferentes zonas del fluido, compresibilidad o variación de volumen bajo esfuerzos normales.

La deformación continua del fluido, da lugar a su movimiento, que se denomina flujo. Los fluidos poco viscosos fluyen fácilmente y los fluidos muy viscosos tienen dificultad para fluir. A partir de estas consideraciones podemos dar como definición de fluido: sustancia a la que la aplicación de una tensión tangencial le provoca un movimiento, al que se le denomina flujo.

La otra propiedad característica de un fluido es su comportamiento ante esfuerzos

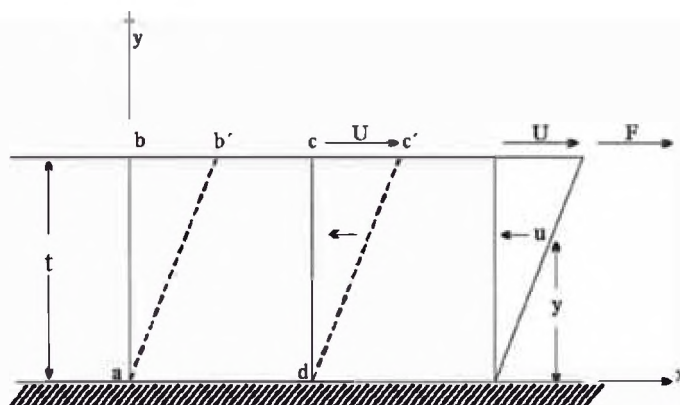


Figura 2.3: Tensión de cortadura de un fluido

normales de compresión, ante los cuales el fluido se deforma, disminuyendo su volumen; en el caso de los gases, las disminuciones de volumen son relativamente grandes, son fácilmente compresibles; y en el caso de los líquidos, las disminuciones de volumen son relativamente pequeñas, son difícilmente compresibles. En general los líquidos se denominan fluidos incompresibles y los gases fluidos compresibles; no obstante, líquido sometidos a grandes cambios de presión¹ pueden comprimirse, y gases sometidos a pequeños cambios de presión no varían prácticamente su volumen.

2.3.2. Los fluidos y la hipótesis del continuo

En principio podría ser posible describir una muestra de fluido en términos de la dinámica de sus moléculas individuales; esto en la práctica es imposible, en virtud de la gran cantidad de moléculas que lo componen. Para la mayoría de los casos de interés práctico, es posible ignorar la naturaleza molecular de la materia y suponerla continua. Esta suposición se denomina *modelo del continuo* y se aplica tanto a sólidos como a

¹Se define presión en un punto como el límite de la fuerza normal aplicada sobre un elemento de área, con el área tendiendo a cero.

fluidos. El modelo del continuo supone que la estructura molecular es tan pequeña en relación con las dimensiones consideradas en problemas de interés práctico, que se puede ignorar.

Cuando se emplea el modelo del continuo, un fluido se describe en función de sus *propiedades*, las cuales representan características promedio de su estructura molecular.

Esta hipótesis, al igual que la de los fluidos ideales, no siempre es aplicable, dependiendo en este caso de una magnitud medible denominada número de Knudsen. Cuando esta hipótesis no es aplicable, es necesario recurrir a la mecánica estadística en lugar de a la mecánica de fluidos.

2.3.3. Propiedades de los fluidos

Los fluidos son agregaciones de moléculas, muy separadas en los gases y próximas en los líquidos, siendo la distancia entre las moléculas mucho mayor que el diámetro molecular, no estando fijas en una red, sino que se mueven libremente.

Un fluido se denomina medio continuo, cuando la variación de sus propiedades es tan suave que se puede utilizar el cálculo diferencial para analizarlo.

En Mecánica de Fluidos solo hay cuatro dimensiones primarias, de las que se derivan todas las demás, a saber, masa, longitud, tiempo y temperatura.

Las propiedades de los fluidos más interesantes son:

- La isotropía, por cuanto mantienen igualdad de propiedades en todas direcciones.
- Densidad

La densidad ρ de un fluido es su masa por unidad de volumen. Si Δm es la masa de una porción de fluido dentro de un cubo de lado Δl , entonces el fluido tiene densidad

$$\rho = \lim_{\Delta l \rightarrow \epsilon} \frac{\Delta m}{(\Delta l)^3}$$

donde ϵ es muy pequeña, pero de acuerdo con la consideración hecha en el continuo, es mucho más grande que la longitud de la trayectoria libre promedio de la

partícula.

- **Volumen específico** El volumen específico ν_s de un fluido es su volumen por unidad de masa, o sea el recíproco de la densidad

$$\nu_s = \frac{1}{\rho}$$

- **Viscosidad**

La viscosidad es una propiedad inherente de los fluidos y que no es exhibida por otros medios continuos. La viscosidad es el parámetro del fluido que controla el transporte de la cantidad de movimiento a nivel molecular; determinando la relación entre las sollicitaciones tangenciales y la velocidad que produce la deformación del fluido.

Consideremos una determinada agrupación de moléculas, en la que sobre un elemento de área, el entorno está ejerciendo una fuerza tangencial. A la fuerza por unidad de área se le va denominar tensión, con lo que en este caso, se tienen tensiones tangenciales, de corte o de cizalla: τ .

Si el esfuerzo constante (τ) en el fluido es proporcional a la velocidad de deformación, se puede escribir

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

El coeficiente μ es la viscosidad. La ecuación anterior se conoce como la ley de Newton de la viscosidad. A los fluidos que siguen esta ley particular y su generalización al flujo multidimensional se les denomina fluidos newtonianos.

Muchos fluidos comunes tales como el aire y otros gases, el agua y la mayoría de las soluciones simples son newtonianos, así como la mayoría de los derivados del petróleo. La sangre es un fluido no newtoniano. La viscosidad de los fluidos newtonianos varía considerablemente entre ellos. Para un fluido en particular, la viscosidad varía de forma apreciable con la temperatura, pero sólo ligeramente con la presión.

La viscosidad proporciona una manera de cuantificar los adjetivos espeso y fluido

como se aplica a los líquidos "espesos" tienen una alta viscosidad y no fluyen con facilidad; lo contrario es cierto para líquidos "fluidos".

El cociente de la viscosidad entre la densidad aparece con frecuencia en las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido. Este cociente recibe el nombre de viscosidad cinética y generalmente se le denota con el símbolo ν

$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$$

2.4. Conceptos fundamentales para el análisis de flujos

En ésta sección se desarrollan los conceptos fundamentales del análisis de flujos, incluyendo las maneras para describir el flujo de fluidos, las leyes naturales que las gobiernan y los diferentes enfoques para formular modelos matemáticos del flujo de los fluidos.

2.4.1. Propiedades del flujo

En esta sección se definen algunas propiedades dinámicas y termodinámicas que interesan en el estudio del movimiento del fluido. Estas propiedades pueden representar un campo en el fluido, es decir, pueden tener una distribución espacial en el fluido, o bien de partícula a partícula cuando el fluido se considere de esta manera.

- Temperatura T

Es un escalar que representa la actividad interna (escala microscópica) de una sustancia. Este concepto está ligado al transporte de energía en forma de calor. Dos regiones en contacto térmico que se encuentran a la misma temperatura no tienen transporte de calor entre ellas. Esta es la condición de equilibrio térmico que establece la ley cero de la termodinámica.

- Velocidad U

Es un vector que representa la dirección, sentido y magnitud de la rapidez de movimiento del fluido. El caso especial donde la velocidad es cero en todo el espacio es estudiado por la estática de los fluidos.

- Esfuerzo τ

Si se toma una porción de fluido aislada se pueden considerar dos tipos de fuerzas actuando sobre esa porción: fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Las fuerzas de cuerpo son aquellas que actúan sobre el mismo sin contacto físico directo; por ejemplo: la fuerza de gravedad, la fuerza electromagnética, etc. Las fuerzas de superficie son debidas al material externo en contacto físico con la frontera de la porción considerada. Considere una fuerza dF que actúa sobre un área infinitesimal dA de esa superficie, cuya dirección (de la superficie) se indica con el vector normal unitario n . La dirección de dF , en general, no es la dirección de

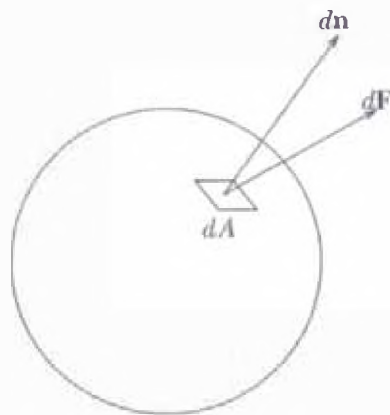


Figura 2.4: Elemento de un fluido

n . Esta fuerza puede descomponerse en dos componentes:

$$dF = dF_n n + dF_t t$$

donde t es un vector unitario tangente al área infinitesimal. Esfuerzo se define como la fuerza que actúa en el área unitaria. En este caso se pueden definir dos

tipos de esfuerzos:

$$\tau_n = \frac{dF_n}{dA}$$

$$\tau_t = \frac{dF_t}{dA}$$

τ_n es la normal y τ_t es el esfuerzo tangencial o de corte. Considérese un volumen

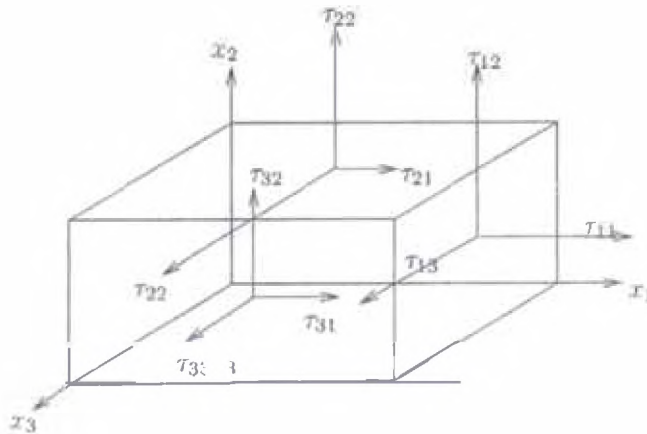


Figura 2.5: Esfuerzos sobre paralelepípedo

infinitesimal en la forma de un paralelepípedo de lados dx_1 , dx_2 , dx_3 como se muestra en la figura 2.5. Las fuerzas de superficie que actúan sobre cada una de las seis caras se pueden descomponer en las tres direcciones x_1 , x_2 , x_3 . Estas fuerzas se pueden dividir entre el área correspondiente, obteniendo de esta manera los esfuerzos que actúan en cada área. Estos esfuerzos se muestran en la figura 2.5, para tres caras. En las tres caras restantes la representación es similar. La convención de nomenclatura que se usa en la figura es la siguiente: el primer subíndice indica la cara sobre la cual actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice su dirección.

2.4.2. Descripción del flujo de fluidos

Antes de poder analizar el flujo de un fluido, se debe ser capaz de describirlo. Igualmente, se debe tener presente los diferentes tipos o regímenes del movimiento de

los fluidos.

El concepto de campo: descripción lagrangiana como función de la euleriana

En cualquier masa finita de fluido, existe una infinidad de partículas. Cada una se puede caracterizar por su densidad, presión y otras propiedades. Si la masa del fluido está en movimiento, también cada partícula tiene alguna velocidad. La velocidad de una partícula de fluido se define como la velocidad del centro de masa de la partícula. Para la velocidad del fluido, se empleará el símbolo \vec{V} , ya que la velocidad es un vector. Así

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

Como un fluido es deformable, la velocidad de cada una de sus partículas puede ser diferente. Además, la velocidad de cada partícula del fluido puede cambiar con el tiempo. Una descripción completa del movimiento de un fluido requiere que se especifique la velocidad, la presión, etc. de todas las partículas en todo momento. Como un fluido es continuo tales características se pueden especificar sólo por medio de funciones matemáticas que expresen la velocidad y las propiedades del fluido para todas las partículas en todo momento. Dicha representación se denomina *representación de campo* y las variables dependientes (como la velocidad y la presión) se conocen como *variables de campo*. La región de interés del fluido (el agua en la tubería o el aire alrededor del automóvil) se denomina *campo de flujo*.

Para describir un campo de flujo, se pueden adoptar cualquiera de los dos enfoques siguientes. El primer enfoque, conocido como *descripción lagrangiana*, identifica cada partícula determinada de fluido y describe lo que le sucede a lo largo del tiempo. Matemáticamente, la velocidad del fluido se escribe como

$$\vec{V} = \vec{V}(\text{identidad de la partícula}, t)$$

Las variables independientes son la identidad de la partícula y el tiempo. El enfoque lagrangiano se usa ampliamente en la mecánica de sólidos.

El segundo enfoque, denominado descripción euleriana, fija su atención sobre un punto en particular (o región) en el espacio y describe lo que sucede en ese punto (o dentro y en las fronteras de la región) a lo largo del tiempo. Las propiedades de una partícula del fluido dependen de la localización de la partícula en el espacio y el tiempo. Matemáticamente, el campo de velocidad se expresa como:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Las variables independientes son la posición en el espacio, representada por las coordenadas cartesianas (x, y, z) y el tiempo.

Resolver un problema de flujo de fluidos requiere entonces la determinación de la velocidad, la presión, etc en función de coordenadas de espacio y tiempo. La descripción euleriana resulta particularmente adecuada a los problemas de mecánica de fluidos, ya que no establece lo que le sucede a cualquier partícula de fluido en especial.

Visualización del campo de velocidades

En el análisis de problemas de mecánica de fluidos frecuentemente resulta ventajoso disponer de una representación visual de un campo de flujo. Tal representación se puede obtener mediante las líneas de trayectoria, de corriente, de traza y de tiempo.

Una línea trayectoria es la curva marcada por el recorrido de una partícula de fluido determinada a medida que se mueve a través del campo de flujo. Para determinar una trayectoria, se puede identificar a una partícula de fluido en un instante dado, por ejemplo, mediante el uso de un colorante (tinta), y tomar fotografías de su movimiento con un tiempo de exposición adecuado. La línea trazada por la partícula constituye entonces una trayectoria.

Por otra parte, podemos preferir fijar nuestra atención en un punto fijo del espacio, e identificar, empleando también un colorante, todas las partículas que pasan a través de este punto. Después de un corto periodo tendremos entonces cierta cantidad de partículas de fluido identificables en el flujo, todas las cuales han pasado en algún momento a través del punto fijo previamente seleccionado. La línea que une todas

estas partículas define una línea del trazador.

Por su parte, las líneas de corriente son líneas dibujadas en el campo de flujo de tal manera que en un instante dado se encuentran siempre tangentes a la dirección del flujo en cada punto del campo de flujo. La forma de las líneas de corriente puede cambiar de un instante a otro si la velocidad del flujo es una función del tiempo, es decir, si se trata de un flujo no estacionario. Dado que las líneas de corriente son tangentes al vector velocidad de cada punto del flujo, el fluido nunca puede cruzar una línea de corriente. Para cualquier campo de flujo las líneas de corriente se pueden expresar como una familia de curvas:

$$\Psi(x, y, z) = C(t)$$

Aunque las líneas de corriente, las trayectorias y las trazas son conceptuales diferentes, en muchos casos estos se reducen a líneas idénticas. Sin embargo, una línea de tiempo tiene características distintivas. Una línea de tiempo es una línea de partículas de fluido marcadas en un cierto instante.

2.4.3. Análisis del flujo de fluidos

Se ha concluido el análisis de las formas en las cuales se puede describir y clasificar el movimiento de los fluidos, se comenzará ahora a considerar las maneras de analizar el flujo de los fluidos.

Las leyes fundamentales

El movimiento de todo fluido debe ser consistente con las siguientes leyes fundamentales de la naturaleza:

- *La ley de conservación de la masa.* La masa no se puede crear ni destruir sólo se puede transportar o almacenar.
- *Las tres leyes de Newton del movimiento*

1. Una masa permanece en estado de equilibrio, esto es, en reposo o en movimiento a una velocidad constante, a menos que sobre ella actúe una fuerza. (Primera ley)
 2. La velocidad de cambio de la cantidad de movimiento de una masa es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre ella. (Segunda ley)
 3. Cualquier acción de una fuerza tiene una fuerza de reacción igual (en magnitud) y opuesta (en dirección). (Tercera ley)
- *La primera ley de la termodinámica (ley de la conservación de la energía).* La energía, al igual que la masa, no se puede crear ni destruir. La energía se puede transportar, cambiar de forma o almacenar.
 - *La segunda ley de la termodinámica.* La segunda ley trata de la disponibilidad de la energía para un trabajo útil. La ciencia de la termodinámica define una propiedad de la materia denominada entropía, que cuantifica la segunda ley.

Además de estas leyes universales, en algunas circunstancias particulares se aplican algunas leyes menos fundamentales. Un ejemplo lo constituye la ley de Newton de la viscosidad.

Volumen de control y sistema

Para aplicar las leyes físicas al flujo de un fluido es necesario definir los conceptos de volumen de control y de sistema. Se entiende por volumen de control una región fija en el espacio donde puede existir flujo de fluido a través de sus fronteras. Por esta razón, en diferentes instantes, se puede tener diferentes partículas en el interior del volumen de control. Sistema se refiere a un conjunto de partículas en el cual permanecen siempre las mismas. Es decir, se está observando siempre una cantidad fija de materia.

La derivada euleriana

Imagínese una partícula de fluido específica localizada en un punto específico de un campo de flujo. El flujo se describe en coordenadas cartesianas. Si se emplea una descripción euleriana, las propiedades y velocidad de la partícula dependen de su localización y del tiempo. Entonces, para una propiedad cualquiera b (b puede ser densidad, presión, velocidad, etc), se puede escribir

$$b_P = b(x_P, y_P, z_P, t),$$

donde el índice P indica que se emplea la localización de la partícula.

Las leyes fundamentales requieren generalmente las velocidades de cambio de ciertas propiedades de la materia (esto es, cantidad de movimiento, masa, energía, entropía).

La velocidad de cambio de b_P se determina empleando la regla para calcular derivadas totales:

$$\frac{db_P}{dt} = \frac{\partial b}{\partial x_P} \frac{dx_P}{dt} + \frac{\partial b}{\partial y_P} \frac{dy_P}{dt} + \frac{\partial b}{\partial z_P} \frac{dz_P}{dt} + \frac{\partial b}{\partial t}$$

Sin embargo, x_P, y_P y z_P son las coordenadas de posición de la partícula de fluido, por lo que sus derivadas temporales son las componentes de la velocidad de la partícula:

$$\frac{dx_P}{dt} = u_P, \quad \frac{dy_P}{dt} = v_P, \quad \frac{dz_P}{dt} = w_P,$$

Al sustituir, se obtiene que la velocidad de cambio de b es

$$\frac{db}{dt} = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial t}$$

donde se ha omitido el subíndice P .

Este tipo de derivada indistintamente se denomina *euleriana* (porque es necesaria en una descripción euleriana) derivada material (porque la velocidad de cambio de una propiedad de una partícula del material), derivada sustancial (que resulta de sustituir la palabra material por sustancia) o derivada total.

Como la propiedad b fue arbitraria, se puede omitir y escribir la derivada como un

operador matemático. Para tener presente una naturaleza especial, con frecuencia el operador se escribe como una D y se reordena de la manera siguiente:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Empleando vectores, su notación corta es

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla,$$

donde \vec{V} es el vector de velocidad del fluido y ∇ es el operador gradiente.

Capítulo 3

Las Ecuaciones del Movimiento

En este capítulo desarrollamos las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos. Estas ecuaciones son deducidas a partir de las leyes de conservación de masa, momentum, y energía. Empezamos con las suposiciones más simples, provenientes de las ecuaciones de Euler para un fluido perfecto. Estas suposiciones son relajadas luego para permitir los efectos de viscosidad que conlleva el transporte molecular del momentum.

3.1. Ecuaciones de Euler

Sea \mathcal{D} una región en el espacio bi o tridimensional cubriendo un fluido. Nuestro objetivo es describir el movimiento de tal fluido. Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ un punto en \mathcal{D} y consideremos la partícula del fluido moviéndose a través de \mathbf{x} en el tiempo t . Usando las coordenadas Euclidianas en el espacio, tenemos $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Imaginemos una partícula (por ejemplo una partícula de polvo suspendida) en el fluido; esta partícula traza una trayectoria bien definida. Denotemos por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la velocidad de la partícula del fluido que está moviéndose a través de \mathbf{x} en el tiempo t . De aquí, para cada tiempo fijo, \mathbf{u} es un campo vectorial sobre \mathcal{D} , como en la Figura 3.1. Llamamos \mathbf{u} el **campo velocidad (espacial) del fluido**.

Para cada tiempo t , asumimos que el fluido tiene una densidad de masa bien definida

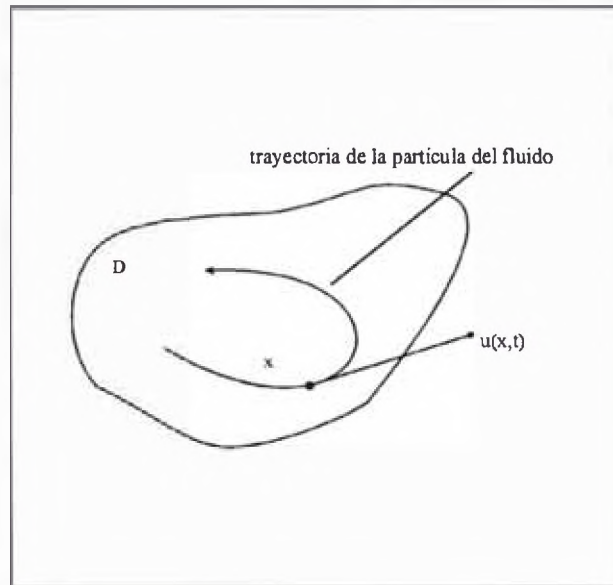


Figura 3.1: Partículas de fluido fluyendo en una región \mathcal{D}

$\rho(\mathbf{x}, t)$. De aquí, si W es cualquier subregión de \mathcal{D} , la masa del fluido en W en el tiempo t es dada por

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV,$$

donde dV es el elemento de volumen en el plano o el espacio.

En lo que sigue, asumiremos que las funciones \mathbf{u} y ρ (y algunas otras que serán dadas más tarde) son lo suficientemente suaves para que las operaciones que necesitemos hacerles sean posibles.

La suposición de que ρ existe es una **suposición del continuum**. Es obvio que ella no se mantiene si la estructura molecular de la materia es tomada en cuenta. Sin embargo, para la mayoría de los fenómenos macroscópicos sucediendo en la naturaleza, esta suposición es válida.

Nuestra deducción de las ecuaciones está basada en tres principios básicos:

1. La masa no se crea ni se destruye;
2. la razón de cambio de momentum de una porción del fluido es igual a la fuerza aplicada a él (**segunda ley de Newton**);

3. la energía no se crea ni se destruye.

Ahora, estudiemos estos principios.

3.1.1. Conservación de Masa

Sea W una subregión de \mathcal{D} (W no cambia con el tiempo). La razón de cambio de la masa en W es

$$\frac{d}{dt}m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV.$$

Denotando por:

∂W la frontera de W , y supongamos que es suave;

\mathbf{n} el vector normal unitario (saliente) definido en los puntos de ∂W ; y

dA el elemento de área sobre ∂W ,

tenemos que la razón de volumen del flujo que atraviesa la frontera ∂W por unidad de área es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ y la razón de masa del flujo por unidad de área es $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ (vea la figura 3.2). El principio de conservación de masa puede ser establecido de la siguiente forma: La razón de incremento de masa en W es igual a la razón de ingreso de masa a través de ∂W ; esto es,

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.1)$$

Esta es la **forma integral de la ley de conservación de masa**. Por el teorema de la divergencia (Teorema A.1), la Ecuación (3.1) es equivalente a

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Como esto se mantiene para todo W , esto es equivalente a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.2)$$

La Ecuación (3.2) es conocida como la **forma diferencial de la ley de conservación de masa**, o más conocida como la **ecuación de continuidad**. Si ρ y \mathbf{u} no son lo suficientemente suaves para justificar los pasos que nos condujeron a la forma diferencial, entonces la forma integral dada en (3.1) es la que usaremos.

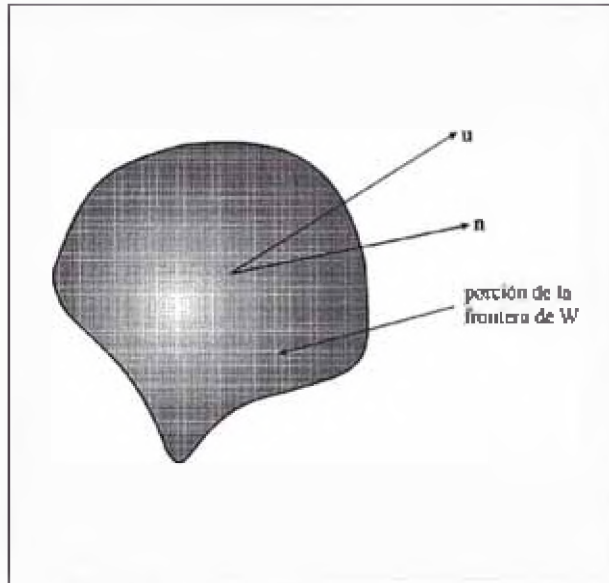


Figura 3.2: La masa a través de la frontera ∂W por unidad de tiempo es igual a la integral de superficie de $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sobre ∂W

3.1.2. Balance de Momentum

Sea $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ el camino seguido por una partícula del fluido, de tal forma que el campo velocidad¹ está dado por

$$\mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

esto es,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t).$$

La aceleración de una partícula del fluido es dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t) \\ \Rightarrow \mathbf{a}(t) &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Usando la notación

$$\mathbf{u}_x = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad \mathbf{u}_t = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},$$

¹Este y los demás cálculos, aquí, serán hechos en las coordenadas euclidianas por comodidad

y

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)),$$

obtenemos

$$\mathbf{a}(t) = u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_t,$$

lo cual también podemos escribir como

$$\mathbf{a}(t) = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Llamaremos a

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

la **derivada material**. Esta derivada toma en cuenta el hecho de que el fluido se está moviendo y que las posiciones de las partículas del fluido cambian con el tiempo. Por ejemplo, si $f(x, y, z, t)$ es cualquier función de posición y tiempo (escalar o vectorial), entonces por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), t) = \partial_t f + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{Df}{Dt}(x(t), y(t), z(t), t).$$

Definición 3.1 *Un fluido ideal es aquel que tiene la siguiente propiedad: Para cualquier movimiento del fluido existe una función $p(\mathbf{x}, t)$ llamada la presión tal que si S es una superficie dentro del fluido con una normal unitaria \mathbf{n} , la fuerza de tensión ejercida a través de la superficie S por unidad de área en $\mathbf{x} \in S$ en un tiempo t es $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$, esto es fuerza a través de S por unidad de área = $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$. \diamond*

Note que la fuerza está en dirección de \mathbf{n} y que las fuerzas actúan ortogonalmente a la superficie S ; esto es, no existen fuerzas tangenciales como muestra la figura 3.3. Intuitivamente, la ausencia de fuerzas tangenciales implican que no hay forma de que el fluido comience a rotar, y si estuviera rotando inicialmente entonces tendría que detener la rotación. Si W es una región del fluido en un instante de tiempo t , la fuerza total² ejercida sobre el fluido dentro de W por medio de fuerzas de tensión sobre su

² egativa porque \mathbf{n} apunta hacia afuera.

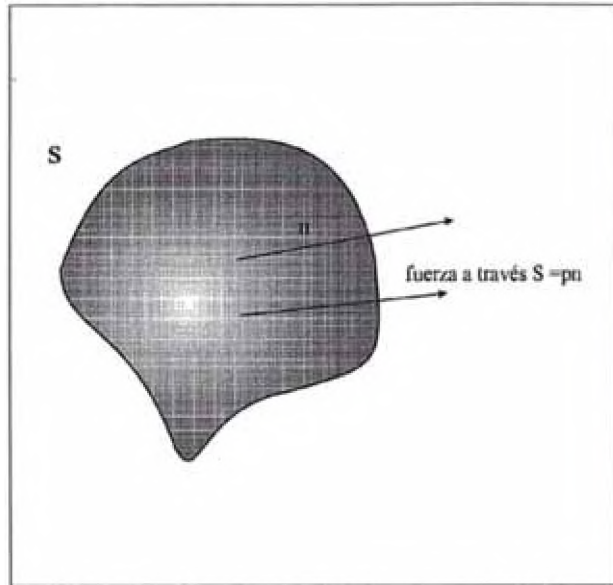


Figura 3.3: Fuerzas de presión a través de una superficie S .

frontera es

$$S_{\partial W} = \{\text{fuerza sobre } W\} = - \int_{\partial W} p \mathbf{n} dA.$$

Sea \mathbf{e} cualquier vector fijo en el espacio. Entonces, del teorema de la divergencia,

$$\mathbf{e} \cdot S_{\partial W} = - \int_{\partial W} p \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_W \text{div}(p\mathbf{e}) dV = - \int_W (\text{grad } p) \cdot \mathbf{e} dV.$$

En consecuencia,

$$S_{\partial W} = - \int_W (\text{grad } p) \cdot \mathbf{e} dV.$$

Si $\beta(\mathbf{x}, t)$ es la fuerza del cuerpo por unidad de masa, entonces la fuerza total del cuerpo es

$$\mathbf{B} = \int_W \rho \beta dV.$$

De aquí, sobre cualquier parte del fluido, fuerza por unidad de volumen = $-\text{grad } p + \rho\beta$. Por la segunda ley de Newton (fuerza = masa \times aceleración) obtenemos la forma diferencial de la ley de **balance de momentum**:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{grad } p + \rho\beta. \quad (3.3)$$

Ahora deduciremos una forma integral del balance de momentum de dos formas:

1. A partir de la forma diferencial; y
2. A partir de los principios básicos.

Primera forma: De (3.3), tenemos

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho\beta$$

y así, usando la ecuación de continuidad (3.2), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho\beta.$$

Si \mathbf{e} es cualquier vector fijo, se verifica fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) &= -\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} - (\nabla p) \cdot \mathbf{e} + \rho\beta \cdot \mathbf{e} \\ &= -\operatorname{div}(p\mathbf{e} + \rho\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) + \rho\beta \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

En consecuencia, si W es un volumen fijo en el espacio, la razón de cambio de momentum en la dirección \mathbf{e} en W es, por el teorema de la divergencia,

$$\mathbf{e} \cdot \frac{d}{dt} \int_W \rho\mathbf{u}dV = - \int_{\partial W} (p\mathbf{e} + \rho\mathbf{u}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}dA + \int_W \rho\beta \cdot \mathbf{e}dV.$$

Por lo tanto una primera forma integral del balance de momentum sería:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho\mathbf{u}dV = - \int_{\partial W} (p\mathbf{n} + \rho\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}))dA + \int_W \rho\beta dV. \quad (3.4)$$

La cantidad $p\mathbf{n} + \rho\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ es el **flujo del momentum por unidad de área** cruzando ∂W , donde \mathbf{n} es la normal exterior a ∂W .

Segunda forma: Denotemos por \mathcal{D} la región en la que el fluido se está moviendo. Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ y $\varphi(\mathbf{x}, t)$ la trayectoria seguida por la partícula que está en el punto \mathbf{x} en el instante $t = 0$. Asumiremos que φ es suficientemente suave y tiene inversa. Denotemos por φ_t a la aplicación $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, t)$; esto es, para t fijo, esta aplicación lleva cada partícula del fluido de su posición inicial ($t = 0$) a su posición en el tiempo t . La aplicación φ , así definida, es conocida como la **aplicación flujo de fluido**. Si W es una región en

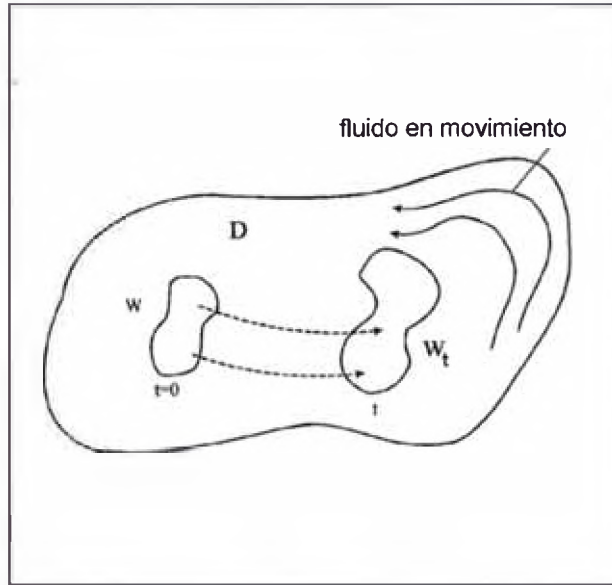


Figura 3.4: W_t es la imagen de W como partículas de fluido en W que fluyen para un tiempo t .

\mathcal{D} , entonces $\varphi_t(W) = W_t$ es el volumen W moviéndose con el fluido, como muestra la Figura 3.4 La forma integral “primitiva” del balance de momentum establece que

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{S}_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho \boldsymbol{\beta} dV, \quad (3.5)$$

esto es, la razón de cambio del momentum de una parte del fluido es igual a la fuerza total (tensiones superficiales y fuerzas corporales) actuando sobre él.

Afirmación 3.1 *Estas dos formas del balance de momentum (3.3) y (3.5) son equivalentes.*

Antes de probar esta afirmación, probaremos el siguiente lema

Lema 3.1

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) [\text{div } \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t))],$$

donde J es el Jacobiano de la aplicación φ_t .

Prueba: Escribamos las componentes de φ como $\xi(\mathbf{x}, t), \eta(\mathbf{x}, t), \zeta(\mathbf{x}, t)$. Primero, notemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t), \quad (3.6)$$

por definición de campo velocidad del fluido. El determinante J puede ser derivado recordando que el determinante de una matriz es multilineal por columnas (o filas). De aquí, fijando \mathbf{x} , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

De (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

También, como las componentes u, v, w de \mathbf{u} son funciones de x, y, z por medio de $\varphi(\mathbf{x}, t)$; tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en el cálculo de $\frac{\partial}{\partial t} J$ tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} J + \frac{\partial v}{\partial x} J + \frac{\partial w}{\partial x} J = (\operatorname{div} \mathbf{u}) J. \quad \diamond$$

Prueba de la Afirmación 3.1: Por el teorema del cambio de variable, tenemos que

$$\int_{W_t} \rho \mathbf{u} = \int_W (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t)) J(\mathbf{x}, t) dV.$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \left(\frac{D}{Dt} \rho \mathbf{u} \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t).$$

Entonces, del Lema 3.1, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV &= \int_{W_t} \left\{ \left(\frac{D}{Dt} \rho \mathbf{u} \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t) + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \right\} J(\mathbf{x}, t) dV \\ &= \int_{W_t} \left\{ \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{u}) + (\rho \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} \right\} dV,\end{aligned}$$

Por conservación de masa,

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

y de aquí

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = \int_{W_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV. \quad \diamond$$

Con este argumento, se ha demostrado el siguiente teorema

Teorema 3.1 (Teorema del Transporte) *Para toda función f de \mathbf{x} y t , tenemos que*

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho f dV = \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt} dV. \quad \diamond$$

En forma similar, podemos deducir otra forma del teorema del transporte *sin un factor de densidad de masa*, y esta es

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f dV = \int_{W_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} (f \mathbf{u}) \right) dV.$$

Usando las notaciones anteriores, tenemos la siguiente definición

Definición 3.2 *Un flujo se dice **incompresible** si para toda subregión W_t , se cumple*

$$\text{volumen}(W_t) = \int_{W_t} dV = \text{constante en } t. \quad \diamond$$

Proposición 3.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. El fluido es incompresible,
2. $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$,
3. $J \equiv 1. \quad \diamond$

De la ecuación de la continuidad, y del hecho de que $\rho > 0$, vemos que un fluido es incompresible si y sólo si $D\rho/Dt = 0$, es decir, la densidad de masa siguiendo el fluido es constante. Si el fluido es homogéneo, es decir, $\rho = \text{constante}$ en el espacio, se sigue que el fluido es incompresible si y sólo si ρ es constante en el tiempo también.

Proposición 3.2 Sea $\rho(\mathbf{x}, t)$ la densidad del fluido, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ la aplicación flujo, y $J(\mathbf{x}, t)$ el Jacobiano de $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Entonces

$$\rho(\varphi(\mathbf{x}, t), t)J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0). \quad (3.7)$$

Prueba: Tomando $f \equiv 1$ en el teorema del transporte, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho dV = 0 \\ \implies & \int_{W_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{W_0} \rho(\mathbf{x}, 0) \\ \implies & \int_{W_0} \rho(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV = \int_{W_0} \rho(\mathbf{x}, 0) \end{aligned}$$

Como W_0 es arbitrario, tenemos que

$$\rho(\varphi(\mathbf{x}, t), t)J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0). \quad \diamond$$

La Ecuación (3.7) es otra forma de la conservación de masa. Como un corolario de esta proposición tenemos que un fluido que es homogéneo en $t = 0$ no necesariamente permanece homogéneo. De hecho, el fluido permanecerá homogéneo si y sólo si es incompresible.

3.1.3. Conservación de Energía

Hasta el momento tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\text{grad } p + \rho\beta \quad (\text{balance de Momentum}) \\ 0 &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{u} \quad (\text{conservación de masa}) \end{aligned}$$

Estas son cuatro ecuaciones si trabajamos en un espacio tri-dimensional (o $n + 1$ ecuaciones si trabajamos en un espacio n -dimensional), porque la ecuación para $\frac{D}{Dt}\mathbf{u}$ es

un vector compuesto por tres funciones escalares. Sin embargo tenemos cinco funciones: \mathbf{u} , ρ y p . En consecuencia, para describir el movimiento del fluido necesitamos de otra ecuación y ésta será obtenida usando la ley de conservación de la energía. Para el movimiento del fluido en un dominio \mathcal{D} , con un campo velocidad \mathbf{u} , la energía cinética contenida en una región $W \subset \mathcal{D}$ es

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} \int_W \rho \|\mathbf{u}\|^2 dV,$$

donde $\|\mathbf{u}\|^2 = (u^2 + v^2 + w^2)$. Asumiendo que la energía total del fluido puede ser escrita como

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{interna}},$$

donde E_{interna} es la **energía interna**, que no puede ser “vista” a escala macroscópica, y proviene de fuentes tales como potenciales intermoleculares y vibraciones moleculares internas. La razón de cambio de la energía cinética en una porción de fluido en movimiento W_t es calculada usando el teorema de transporte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{cinética}} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \|\mathbf{u}\|^2 dV \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \frac{D\|\mathbf{u}\|^2}{Dt} dV = \int_{W_t} \rho (\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right)) dV. \end{aligned}$$

El caso que nos interesa estudiar es el de fluidos incompresibles, y en este caso asumimos que toda la energía es cinética y que la razón de cambio de la energía cinética en una porción de fluido es igual a la razón en la que la presión y la fuerzas del cuerpo hacen trabajo, es decir

$$\frac{d}{dt} E_{\text{cinética}} = - \int_{\partial W_t} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\beta} dV.$$

Por el Teorema de la Divergencia y por fórmulas previas, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial W_t} \rho \left\{ \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \right\} dV &= - \int_{W_t} (\text{div}(p\mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\beta}) dV \\ &= \int_{W_t} \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\beta} dV \end{aligned}$$

porque $\text{div} \mathbf{u} = 0$. La ecuación anterior es una consecuencia de balance de momentum. Esto muestra que si asumimos $E = E_{\text{cinética}}$, entonces el fluido debe ser incompresible

(a menos que $p = 0$). Por lo tanto, en el caso de fluidos incompresibles, las Ecuaciones de Euler son:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\text{grad } p + \rho\beta \\ \frac{D\rho}{Dt} &= 0 \\ \text{div}\mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

con la condición de frontera

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

sobre $\partial\mathcal{D}$.

3.2. Ecuaciones de Navier Stokes

En la sección anterior definimos un fluido ideal como aquel en que las fuerzas que cruzan la superficie son normales a ella. Consideraremos ahora fluidos más generales. Aquí, el campo velocidad \mathbf{u} es paralelo a una superficie \mathcal{S} , pero cambia instantánea o rápidamente de magnitud en cuanto la atraviesa. Si las fuerzas son todas normales a \mathcal{S} no habrá transferencia de momentum entre los volúmenes de fluido denotados por B y B' en la figura 3.9. Sin embargo, si nosotros tenemos en cuenta la teoría cinética de la materia, vemos que esto es absurdo. Las moléculas más rápidas por encima de \mathcal{S} se difundirán a través de \mathcal{S} e impartirán momentum al fluido debajo de \mathcal{S} , y, asimismo, las moléculas más lentas por debajo de \mathcal{S} difundidas a través de \mathcal{S} retardarán la marcha del fluido sobre \mathcal{S} . Para cambios de velocidad razonablemente rápidos en distancias cortas, este efecto es importante.

En consecuencia, cambiamos nuestra definición anterior, ya que en lugar de asumir que

$$\text{fuerza sobre } \mathcal{S} \text{ por unidad de área} = p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n},$$

donde \mathbf{n} es la normal a \mathcal{S} , asumiremos que

$$\text{fuerza sobre } \mathcal{S} \text{ por unidad de área} = p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.8)$$

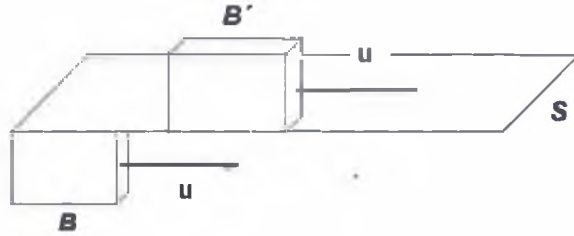


Figura 3.5: Las moléculas más rápidas en B pueden difundirse a través de S e impartir momentum a B

donde σ es una matriz llamada fuerza tensorial, sobre la que tendremos que hacer algunas suposiciones. Lo nuevo aquí es que $\sigma \cdot \mathbf{n}$ no necesita ser paralelo a \mathbf{n} . La separación de las fuerzas en (3.8) es algo ambigua, ya que $\sigma \cdot \mathbf{n}$ puede contener una componente paralela a \mathbf{n} . Ahora, por la Segunda Ley de Newton: “la razón de cambio de toda porción de fluido en movimiento W_t es igual a la fuerza que actúa sobre ella” (balance de momentum), tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = - \int_{\partial W_t} (p \cdot \mathbf{n} - \sigma \cdot \mathbf{n}) dA.$$

De aquí vemos que σ modifica el transporte de momentum a través de la frontera de W_t . Escogeremos σ de tal forma que ella aproxime en forma razonable el transporte del momentum por movimiento molecular.

Tendremos ahora las siguientes suposiciones para σ :

1. σ depende linealmente de los gradientes de velocidad $\nabla \mathbf{u}$, es decir σ está relacionado con $\nabla \mathbf{u}$ por alguna transformación lineal.
2. σ es invariante bajo rotaciones de cuerpos rígidos, es decir si U es una matriz ortogonal,

$$\sigma(U \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot U^{-1}) = U \cdot \sigma(\nabla \mathbf{u}) \cdot U^{-1}.$$

Esto es razonable porque, cuando un fluido sufre una rotación de cuerpo rígido, no debería haber difusión del momentum.

3. σ es simétrica. Esta propiedad puede ser deducida como una consecuencia del balance de momentum angular.

Como σ es simétrica, se sigue de las propiedades (1) y (2) que σ puede depender sólo de la parte simétrica de $\nabla\mathbf{u}$, es decir de la transformación \mathbf{D} . Debido a que σ es una función lineal de \mathbf{D} , σ y \mathbf{D} conmutan y por esto pueden ser simultáneamente diagonalizadas. Así los autovalores de \mathbf{D} son funciones lineales de los de \mathbf{D} . Por la propiedad (2), ellos también deben ser simétricos porque nosotros podemos elegir U para permutar dos autovalores de \mathbf{D} (rotando, un ángulo π , un autovector), y esto debe permutar los correspondientes autovalores de σ .

Las únicas funciones lineales que son simétricas en este sentido son de la forma

$$\sigma_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde σ_i son los autovalores de σ y los d_i son los de \mathbf{D} . Esto define las constantes λ y μ . Teniendo en cuenta que $d_1 + d_2 + d_3 = \text{div } \mathbf{u}$, podemos usar la propiedad (2) para transformar σ_i de regreso a la base usual y deducimos que

$$\sigma = \lambda(\text{div } \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D},$$

donde \mathbf{I} es la identidad. Ahora, reescribiendo esto con la traza en un término, tenemos

$$\sigma = 2\mu[\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{u})\mathbf{I}] + \zeta(\text{div } \mathbf{u})\mathbf{I}$$

donde μ es el **primer coeficiente de viscosidad**, y $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es el **segundo coeficiente de viscosidad**.

Si empleamos el teorema del transporte y el teorema de divergencia, junto con (3.5), el balance de momentum conduce a las **Ecuaciones de Navier Stokes**

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u}, \quad (3.9)$$

donde

$$\Delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{u}$$

es el Laplaciano de \mathbf{u} . La ecuación de continuidad y una ecuación de energía, y (3.9) describen completamente el flujo de un fluido viscoso.

En el caso de flujos homogéneos incompresibles $\rho = \rho_0 = \text{constante}$, el conjunto completo de las ecuaciones viene a ser las **Ecuaciones de Navier Stokes para un flujo incompresible**,

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\text{grad } p' + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $\nu = \mu/\rho_0$ es el coeficiente de **viscosidad cinética**, y $p' = p/\rho_0$.

Estas ecuaciones son complementadas por condiciones de frontera. Para las ecuaciones de Euler en un fluido ideal usamos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, es decir, el fluido no atraviesa la frontera pero puede moverse tangencialmente en la frontera. Para las Ecuaciones de Navier Stokes, el término extra $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ eleva el número de derivadas de \mathbf{u} de uno a dos. Por razones matemáticas y experimentales esto es acompañado de un incremento en el número de condiciones de frontera. Por ejemplo, en una pared sólida en reposo, adicionamos la condición de que la velocidad tangencial sea cero (la condición de “no-slip”), de tal manera que las condiciones de frontera son simplemente

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en paredes sólidas en reposo.}$$

Capítulo 4

Método del Paso Fraccional

4.1. Introducción

El movimiento de un fluido viscoso incompresible es gobernado por las Ecuaciones de Navier Stokes,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad, $P(\mathbf{x}, t)$ es la presión dividida por la densidad y ν es el coeficiente de viscosidad cinética. La inclusión de un término fuerza en el cuerpo, $f(\mathbf{x}, t)$, sobre el lado derecho de (4.1) no cambiará nada el siguiente análisis.

El establecimiento del problema se completa con la especificación de condiciones iniciales y de frontera convenientes. Una típica condición de frontera consiste en describir el valor de la velocidad \mathbf{b} sobre la frontera,

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}_{\mathcal{S}}, t) \quad (4.3)$$

donde \mathcal{S} es la frontera del dominio V ocupada por el fluido y $\mathbf{x}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$.

Cuando la frontera es una pared sólida en contacto con el fluido, el valor de la velocidad

de frontera, \mathbf{b} , es igual a la velocidad de la pared. La condición sobre las componentes tangenciales de velocidad es conocida como la condición no-slip.

Note que ninguna condición de frontera es dada para la presión sobre las fronteras no-slip y sería incorrecto imponer alguna unida a la dada por (4.3). Por otro lado en algunas aplicaciones, condiciones de velocidad diferentes a la de (4.3) pueden ser encontradas, como por ejemplo en fronteras con flujo entrante o saliente, y también sobre un plano de simetría o antisimetría. En estas situaciones, la presión puede ser complementada por condiciones de frontera del tipo Dirichlet o Neumann. Puesto que la condición de no-slip es el tipo más difícil de condición de frontera para problemas viscosos e incompresibles, estudiaremos este caso.

Supongamos que el dominio del fluido V es abierto, acotado y simplemente conexo, lo cual implica que es de extensión finita y no contiene agujeros. Además, por simplicidad, se asume que la frontera \mathcal{S} es una superficie cerrada y convenientemente suave.

La condición inicial consiste en la especificación del campo velocidad \mathbf{u}_0 en el tiempo inicial, $t = 0$, digamos

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (4.4)$$

La velocidad de frontera \mathbf{b} debe cumplir, para todo $t \geq 0$, la condición global

$$\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} d\mathcal{S} = 0, \quad (4.5)$$

que se obtiene integrando la ecuación de continuidad sobre V y usando el teorema de divergencia. Aquí \mathbf{n} denota la normal unitaria exterior a la frontera \mathcal{S} . El símbolo \oint indica la integral de frontera sobre una superficie cerrada, pero el mismo símbolo también es usado para denotar la integral de línea a lo largo de una curva cerrada. Integrales de volumen e integrales sobre superficies no cerradas siempre serán indicadas por un símbolo simple de integración \int .

Se supone que el campo de velocidad inicial \mathbf{u}_0 es solenoidal, es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \quad (4.6)$$

Finalmente, se asume que los datos \mathbf{b} y \mathbf{u}_0 cumplen la siguiente condición de compatibilidad:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{t=0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0|_S, \quad (4.7)$$

donde, por supuesto, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}_S, t)$ es una función continua del tiempo cuando $t \rightarrow 0^+$.

4.1.1. Teorema de Ladyzhenskaya

Sean las Ecuaciones de Navier Stokes que describen el movimiento de un fluido viscoso e incompresible:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \nabla P = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

donde $P = \frac{p}{\rho}$ es la presión (por unidad de densidad). El método del Paso Fraccional puede ser obtenido mediante el Teorema de Descomposición Ortogonal estudiado por Ladyzhenskaya [4]. Esta descomposición será discutida de una forma simple, tal que los resultados a los que lleguemos serán fáciles de entender.

Teorema 4.1 (Ladyzhenskaya) *Todo campo vectorial \mathbf{u} definido en V admite una única descomposición ortogonal*

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} + \nabla \varphi \quad (4.9)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es un campo solenoidal con componente normal cero sobre la frontera S de V y φ es una función escalar.

Prueba:

Primero establecemos la ortogonalidad de la descomposición, es decir

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \varphi dV = 0.$$

En efecto, debido a que $\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \varphi) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \varphi + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \varphi$, la condición $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ y por el Teorema de la Divergencia tenemos,

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \varphi dV = \int \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \varphi) dV = \oint \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \varphi dS = 0$$

teniendo en cuenta que $\mathbf{n} \cdot \omega|_S = 0$.

Usaremos la ortogonalidad para probar la unicidad: Supongamos que

$$\mathbf{u} = \omega_1 + \nabla\varphi_1 = \omega_2 + \nabla\varphi_2.$$

Entonces

$$0 = \omega_1 - \omega_2 + \nabla(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Tomando el producto escalar con $\omega_1 - \omega_2$ e integrando sobre V , obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int [|\omega_1 - \omega_2|^2 + (\omega_1 - \omega_2) \cdot \nabla(\varphi_1 - \varphi_2)] dV \\ \implies 0 &= \int |\omega_1 - \omega_2|^2 dV \end{aligned}$$

esto debido a la ortogonalidad de la descomposición. Por lo tanto $\omega_1 = \omega_2$ y $\nabla\varphi_1 = \nabla\varphi_2$, entonces $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{constante}$.

Sea \mathbf{u} solución de (4.8). Consideremos el siguiente problema de Neumann

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi|_S &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S \end{aligned} \tag{4.10}$$

Entonces existe una función escalar φ solución de (4.10), y debido al teorema de la divergencia, tenemos que

$$0 = \int \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS.$$

De (4.8) y (4.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \quad \text{y} \quad \nabla \cdot (\nabla\varphi) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0 & \quad \mathbf{n} \cdot (\nabla\varphi)|_S = 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\omega = \mathbf{u} - \nabla\varphi$ es un campo solenoidal. \diamond

Asumimos que la componente normal de la condición de frontera para la velocidad \mathbf{u} , en la solución de las ecuaciones (4.8) es homogénea:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0.$$

En este caso es natural introducir el operador de proyección ortogonal de campos vectoriales sobre el espacio

$$\mathcal{J}_0^0(V) = \{\omega \in L^2(V) / \quad \nabla \cdot \omega = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \omega|_s = 0\}$$

El espacio $\mathcal{J}_0^0(V)$ es un sub-espacio cerrado de $L^2(V)$ y se denotará como \mathcal{J}_0 . El operador de proyección ortogonal sobre \mathcal{J}_0 es denotado por \mathcal{P} , o más explícitamente

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}_0}.$$

Tomando la derivada de tiempo de $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ obtenemos $\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) = 0$ así que la descomposición ortogonal (4.9) permite escribir la ecuación de momentum en (4.8), bajo condiciones de frontera homogéneas para la componente normal, en la siguiente forma proyectada

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{P}[-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}] \quad (4.11)$$

La ecuación (4.11) significa que el uso de la proyección ortogonal \mathcal{P} elimina la variable presión del problema. Se debe notar que los campos vectoriales ω del espacio de proyección \mathcal{J}_0 están sujetos a la condición de frontera, la cual sólo prescribe la componente normal de ω . La condición de frontera para la componente normal de la velocidad es una condición esencial en la formulación variacional débil de las ecuaciones usadas para satisfacer la incompresibilidad por medio del operador de proyección ortogonal.

Por lo tanto, para hacer al operador de proyección ortogonal \mathcal{P} factible para solucionar las ecuaciones viscosas incompresibles, uno tiene que separar el término viscosidad del tratamiento de la incompresibilidad, es decir la parte proyectiva del método que determina la componente solenoidal del campo velocidad. Esto conduce a que las ecuaciones deban ser discretizadas en el tiempo por un Método de paso fraccional, el cual separa los efectos de la difusión viscosa del tratamiento de la condición de incompresibilidad. Se debe notar que este requerimiento es debido a la no conmutatividad del operador de proyección \mathcal{P} con el operador de Laplace ∇ , que aparece en los términos viscosos cuando existen fronteras sólidas.

4.2. Método de Proyección de paso fraccional

La forma típica de las ecuaciones discretizadas en el tiempo del método de proyección consiste en dos pasos distintos:

- Primero, un campo velocidad intermedio $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$, que no satisface la condición de incompresibilidad, es calculado como solución de una versión de la ecuación del momentum con el término presión omitido. Considerando por ejemplo y por simplicidad un esquema enteramente explícito, uno tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n \\ \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_s = \mathbf{b}^{n+1} \end{cases} \quad (4.12)$$

- Segundo, el campo intermedio $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ es descompuesto como la suma de un campo velocidad solenoidal \mathbf{u}^{n+1} y el gradiente de una función escalar proporcional a la desconocida presión, particularmente ∇P^{n+1} , conforme a las ecuaciones siguientes y condición de frontera:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\nabla P^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1}|_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}^{n+1} \end{cases} \quad (4.13)$$

La especificación de la condición de frontera sólo para la componente normal de la velocidad es un aspecto esencial del segundo problema paso medio (4.13) y es una consecuencia de la definición del espacio \mathcal{J}_0 implicado por el teorema de descomposición ortogonal (4.8).

Es interesante notar que cuando el método del paso fraccional (4.12)–(4.13) es usado para calcular flujos estacionarios, la solución numérica de la condición de fuerza depende de los valores de los pasos de tiempo Δt .

4.2.1. Condiciones de Frontera Homogéneas

Notemos que la ecuación (4.13) puede también ser escrita de la forma:

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla P^{n+1} \quad (4.14)$$

En la situación particular de valores de frontera homogénea para la componente normal, especialmente, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$, no expresa nada, pero la descomposición ortogonal (4.9) para el campo velocidad intermedio $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$, y utilizando $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1}|_s = 0$ (de (4.13)). Concluimos que uno puede expresar la velocidad final y el campo presión como

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathcal{P} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \quad y \quad \Delta t \nabla P^{n+1} = (\mathcal{I} - \mathcal{P}) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

una construcción es descrita en la (4.1).

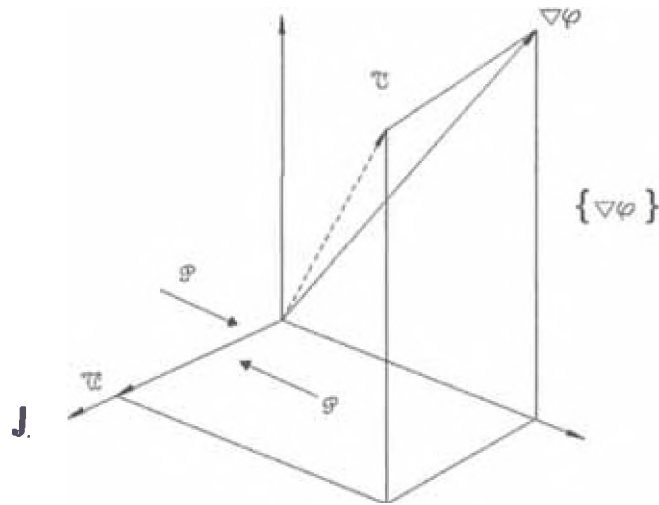


Figura 4.1: Construcción de un campo solenoidal en el método del paso fraccional con condiciones de frontera homogéneas

4.2.2. Condiciones de Frontera No Homogénea

La situación es diferente cuando la condición de frontera para la velocidad es tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}^{n+1}|_s \neq 0$, pero una interpretación geométrica de la construcción será dada.

Para este objetivo, una descomposición ortogonal del espacio del campo gradiente es requerido.

Teorema 4.2 [Fronteras no Homogéneas] Para todo campo vectorial que es el gradiente de una función escalar φ definido en V admite la única descomposición ortogonal

$$\nabla\varphi = \nabla\varphi_0 + \nabla h \quad (4.16)$$

donde la función φ_0 desaparece sobre la frontera S de V y h la función armónica en V .

Prueba:

Primero establecemos la ortogonalidad de la descomposición

$$\int \nabla\varphi_0 \cdot \nabla h dV = 0.$$

En efecto, por la identidad $\nabla \cdot (\varphi_0 \nabla h) = \nabla\varphi_0 \cdot \nabla h + \varphi_0 \nabla^2 h$ y el Teorema de Divergencia obtenemos,

$$\begin{aligned} \int \nabla\varphi_0 \cdot \nabla h dV &= \int \nabla \cdot (\varphi_0 \nabla h) dV - \int \varphi_0 \nabla^2 h dV \\ &= \oint \varphi_0 \mathbf{n} \cdot \nabla h dS = 0 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que h es armónica y $\varphi_0|_S = 0$.

La ortogonalidad es usada para probar la unicidad. Supongamos que $\nabla\varphi = \nabla\varphi_{01} + \nabla h_1 = \nabla\varphi_{02} + \nabla h_2$. Entonces

$$0 = \nabla(\varphi_{01} - \varphi_{02}) + \nabla(h_1 - h_2).$$

Tomando el producto escalar con $\nabla(h_1 - h_2)$ e integrando sobre V , obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int [\nabla(h_1 - h_2) \cdot \nabla(\varphi_{01} - \varphi_{02}) + |\nabla(h_1 - h_2)|^2] dV \\ &= \int |\nabla(h_1 - h_2)|^2 dV \end{aligned}$$

esto es debido a la ortogonalidad de $\{\nabla h_j\}$ y $\{\nabla\varphi_{0j}\}$, conseguimos que $\nabla(h_1 - h_2) = 0$; esto es, $h_1 = h_2 + \text{constante}$. Por lo tanto $\nabla(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ lo que significa, $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{constante}$.

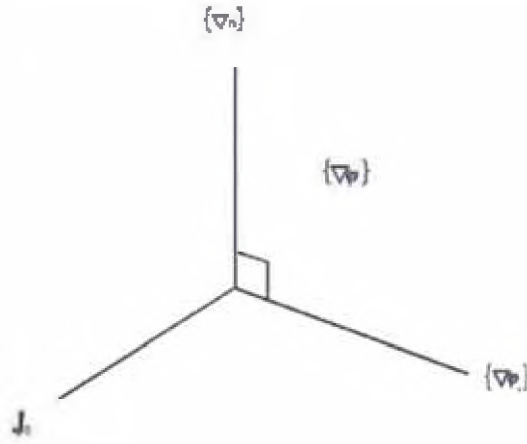


Figura 4.2: Método de proyección del paso fraccional. Descomposición ortogonal del espacio de los campos gradiente analizando la imposición de condiciones de frontera no homogéneas sobre la velocidad normal

Ahora probaremos la existencia: Sea el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \\ h|_S = \varphi|_S \end{cases}$$

entonces este h existe y es único. Sea $\varphi_0 = \varphi - h$, entonces $\varphi_0|_S = (\varphi - h)|_S = 0$. Por lo tanto, φ_0 y h cumplen con las condiciones del teorema. \diamond

Por los teoremas (4.1)–(4.2), todo campo vectorial \mathbf{u} puede ser descompuesto de la siguiente forma,

$$\mathbf{u} = \omega + \nabla\varphi = \omega + \nabla h + \nabla\varphi_0, \quad (4.17)$$

donde las funciones φ_0 y h son determinadas únicamente a partir de \mathbf{u} , resolviendo los siguientes problemas elípticos

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi_0 &= \nabla \cdot \mathbf{u}, & \varphi_0|_S &= 0 \\ \nabla^2 h &= 0, & \mathbf{n} \cdot \nabla h|_S &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \nabla\varphi_0)|_S. \end{aligned}$$

La condición de solubilidad del Problema de Neumann es satisfecha puesto que, por el Teorema de Divergencia, se cumple

$$\oint \eta \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi_0) dS = \int \nabla \cdot (\mathbf{u} - \nabla\varphi_0) dV = \int (\nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla^2\varphi_0) dV = 0.$$

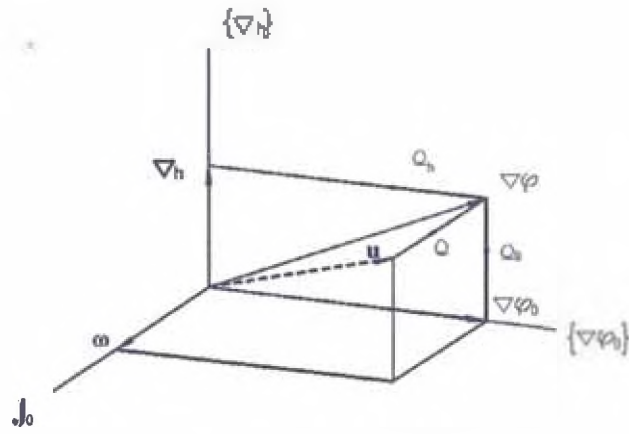


Figura 4.3: Método de proyección del paso fraccional. Operadores de proyección ortogonal en presencia de fronteras.

Introduciendo el operador proyección complementario $Q = I - P$, uno tiene,

$$Q = Q_0 + Q_h,$$

donde Q_0 y Q_h denotan los operadores de proyección ortogonal sobre los subespacios $\{\nabla\varphi_0 \mid \varphi_0|_S = 0\}$ y $\{\nabla h \mid \nabla^2 h = 0\}$ y, respectivamente (ver la figura (4.3)).

Sea \mathbf{u} un campo vectorial y denotemos por v su respectiva componente solenoidal, la cual asume un valor de frontera para la componente normal, digamos $\mathbf{n} \cdot v|_S = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$, con $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$ dado. Tal parte solenoidal v de \mathbf{u} puede ser obtenida a partir de la siguiente descomposición:

$$\mathbf{u} = \omega + \nabla h_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}} + \nabla(h - h_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}}) + \nabla\varphi_0,$$

donde $h_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}}$ denota la función armónica satisfaciendo la condición de Neumann $\mathbf{n} \cdot \nabla h_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}}|_S = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$ (condición de frontera que es admisible ya que \mathbf{b} satisface $\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} dS = 0$). Se sigue que $v = \omega + \nabla h_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}}$ y, por lo tanto, definiendo $\Phi = h - h_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}} + \varphi_0$, la descomposición anterior asume la forma

$$\mathbf{u} = v + \nabla\Phi.$$

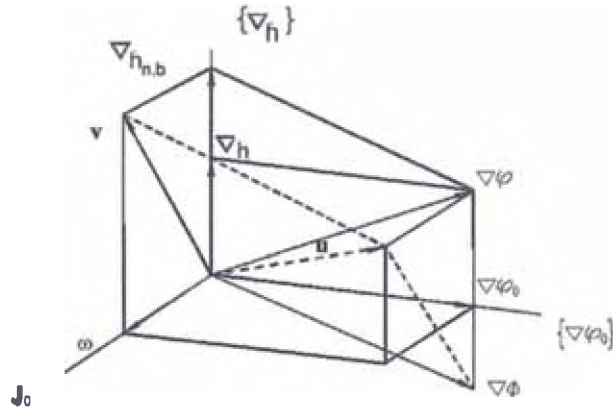


Figura 4.4: Construcción de un campo solenoidal satisfaciendo las condiciones de frontera no homogéneas para la componente normal

La representación geométrica de tal construcción, que es requerida para una condición de velocidad de frontera no homogénea, es mostrada en la figura (4.4). Lamentablemente la figura (4.4) no nos da una idea clara de lo anterior, ya que el espacio $\{\nabla h\}$ no es unidimensional y, en general, los vectores representando los campos ∇h y $\nabla h_{n,b}$ apuntan a diferentes direcciones. Así, la ilustración de la figura (4.5), donde el espacio $\nabla \varphi_0$ ha sido eliminado mientras que el espacio $\{\nabla h\}$ ha sido expandido en un plano vertical y, $\mathbf{y} = (\mathcal{P} + \mathcal{Q}_h)\mathbf{u}$, nos da una descripción más apropiada de la construcción requerida para condiciones de frontera no homogéneas. En cualquier caso, el campo de velocidad \mathbf{v} es obtenido de la expresión

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathcal{P}\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla h_{n,b}$$

Esta construcción revela que en el Método de Proyección del Paso Fraccional fuera del sub-espacio $\{\nabla \varphi_0\}$ está asociado con el cumplimiento de la condición de incompresibilidad en puntos internos del dominio del fluido, mientras que la proyección fuera del sub-espacio $\{\nabla h\}$ tiene una relación con la imposición de la condición de frontera sobre la velocidad. En la situación particular de ausencia de fronteras o condiciones de

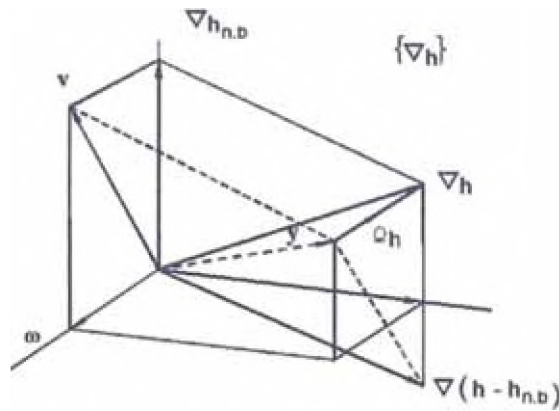


Figura 4.5: Ilustración detallada de la construcción del campo solenoidal satisfaciendo condiciones de frontera normales no homogéneas [$\mathcal{Y} = (\mathcal{P} + \mathcal{Q}_h v)$]

frontera espacialmente periódicas, el segundo sub-espacio desaparece y la construcción del Método Fraccional simplifica substancialmente, como es mostrado en la figura (4.6).

4.3. Implementación del Método de Paso Fraccional

En ésta sección estudiaremos la implementación de un código que soluciona ecuaciones de Navier Stokes mediante el método de proyección original de Chorin [10], el que propuso una aproximación de primer orden en el espacio y el tiempo. La siguiente generación de métodos de proyección ha usado varias formas de obtener una velocidad la cual es de segundo orden en el espacio y tiempo, pero una aproximación para la presión que solo es de primer orden. En el mismo periodo de tiempo, Kim y Moin propusieron un método en el cual la presión es excluida del cálculo, pero con una modificación en las condiciones de frontera, ellos consiguieron una aproximación de segundo orden para el campo velocidad.

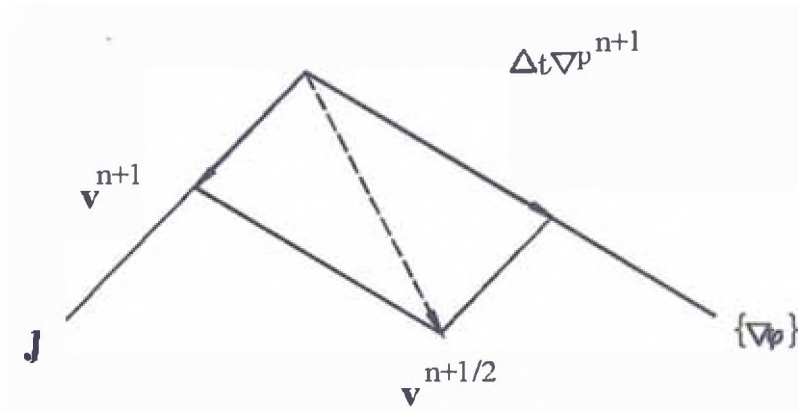


Figura 4.6: Representación sistemática del método del paso fraccional en ausencia de fronteras

En la implementación se consideró las ecuaciones incompresibles de Navier Stokes

$$u_t + p_x = -(u^2)_x - (uv)_y + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) \quad (4.18)$$

$$v_t + p_y = -(uv)_x - (v^2)_y + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) \quad (4.19)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (4.20)$$

sobre un dominio rectangular $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y]$. Los cuatro dominios de frontera son denotados por N(Norte), S(Sur), W(Oeste) y E(Este). El dominio es fijo en el tiempo y consideraremos condiciones de frontera no slip en cada lado del dominio, es decir,

$$u(x, l_y) = u_{N(x)} \quad v(x, l_y) = 0 \quad (4.21)$$

$$u(x, 0) = u_{S(x)} \quad v(x, 0) = 0 \quad (4.22)$$

$$u(0, y) = 0 \quad v(0, y) = v_{W(y)} \quad (4.23)$$

$$u(l_x, y) = 0 \quad v(l_x, y) = v_{E(y)} \quad (4.24)$$

Las ecuaciones de momentum (4.18) y (4.19) describen la evolución del tiempo del campo velocidad (u, v) bajo fuerzas inerciales y viscosas. La presión p es un multiplicador Lagrangiano que satisface la condición de incompresibilidad. Colocaremos las ecuaciones de momentum de la siguiente manera

$$(u^2)_x + (uv)_y = uu_x + vv_y \quad (4.25)$$

$$(uv)_x + (v^2)_y = uv_x + vv_y \quad (4.26)$$

las cuales proviene de la regla de la cadena y (4.20). El lado derecha anterior es a menudo escrito en forma vectorial como $(u \cdot \nabla) \cdot u$. Elegimos discretizar el lado derecho debido a que es más cercano a una forma conservativa.

La condición de incompresibilidad no es una ecuación de evolución del tiempo sino una condición algebraica. Incorporamos esta condición usando un método de proyección.

Mientras u, v, p y q son soluciones de las ecuaciones de Navier Stokes, denotamos la aproximación numérica por letras mayúsculas. Así el campo velocidad es U^n y V^n en el n^{th} paso de tiempo (tiempo t) y la condición (4.20) es satisfecha. Nuestro objetivo será encontrar la solución en el $(n + 1)^{st}$ paso de tiempo utilizando las siguientes aproximaciones:

1. Término no lineal

El término no lineal es tratado explícitamente.

$$\frac{U^* - U^n}{\Delta t} = -((U^n)^2)_x - (U^n V^n)_y \quad (4.27)$$

$$\frac{V^* - V^n}{\Delta t} = -(U^n V^n)_x - ((V^n)^2)_y \quad (4.28)$$

2. Viscosidad implícita

Los términos viscosidad son tratados implícitamente.

$$\frac{U^{**} - U^n}{\Delta t} = -((U^n)^2)_x - (U^n V^n)_y \quad (4.29)$$

$$\frac{V^* - V^n}{\Delta t} = -(U^n V^n)_x - ((V^n)^2)_y \quad (4.30)$$

3. La corrección de la presión

Nosotros corregimos el campo velocidad intermedia U^{**} , V^{**} por el gradiente de una presión P^{n+1} haciendo cumplir la incomprensibilidad.

$$\frac{U^{n+1} - U^{**}}{\Delta t} = -(P^{n+1})_x \quad (4.31)$$

$$\frac{V^{n+1} - V^{**}}{\Delta t} = -(P^{n+1})_y \quad (4.32)$$

La presión es denotada por P^{n+1} y es dada implícitamente, obteniéndose un sistema lineal.

La información completa sobre ésta implementación será encontrada en [10].

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo cumplió con sus objetivos que son el de mostrar de una manera sencilla los conceptos fundamentales que rigen a los fluidos y el de resolver las ecuaciones de Navier Stokes, mediante el método de proyección del Paso fraccional. Este método divide a estas ecuaciones en dos ecuaciones equivalentes una para la velocidad y otra para la presión.

Uno de los aspectos importantes de este trabajo fue el uso de un operador de proyección ortogonal, el cual es factible para solucionar las ecuaciones viscosas incomprensibles, si uno separa el término viscosidad del tratamiento de la incomprensibilidad.

Como una actividad futura relacionada con este trabajo se pretende realizar estudios de otros Métodos de Proyección y hacer comparaciones con el método estudiado.

Apéndice A

Teoremas y definiciones

En este capítulo daremos conceptos y teoremas fundamentales para el estudio del movimiento de un fluido. [7]

Definición A.1 (Campo Gradiente) Sea f un campo escalar en \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 . El campo vectorial que asigna a cada punto (x,y) de \mathbf{R}^2 o (x,y,z) de \mathbf{R}^3 , el vector gradiente de f , ∇f , se denomina campo gradiente de la función f .

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\hat{i} + f_y(x, y, z)\hat{j} + f_z(x, y, z)\hat{k}. \quad \diamond$$

Sean F un campo vectorial y M, N y P funciones de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R} .

Definición A.2 (La Divergencia) Sea $F(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$ un campo vectorial en \mathbf{R}^3 y $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ derivadas parciales continuas, la divergencia de F será el campo escalar

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definiendo el símbolo vectorial ∇ como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}.$$

tenemos que

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}M + \frac{\partial}{\partial y}N + \frac{\partial}{\partial z}P.$$

Entonces la divergencia de F , denotada por $\operatorname{div} F$ cumplirá:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F. \quad \diamond$$

Definición A.3 (El Rotacional) La notación $\nabla \times F$ representa también el rotacional de F . Así

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Definición A.4 (El Laplaciano) Sea f un campo escalar y ∇f su respectivo campo gradiente. Calculando la divergencia de este campo gradiente, obtenemos un campo escalar al cual se le denomina el Laplaciano de f .

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \\ \nabla \cdot \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}) \\ &= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ \nabla^2 f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}. \end{aligned}$$

Denotaremos el laplaciano de f por Δf o $\nabla^2 f$. \diamond

Teorema A.1 (Teorema de la Divergencia) Sean \mathcal{Q} una región en tres dimensiones acotada por una superficie cerrada \mathcal{S} , y \mathbf{n} un vector unitario normal exterior a \mathcal{S} en (x, y, z) . Si F es una función vectorial que tiene derivadas parciales continuas en \mathcal{Q} , entonces

$$\int \int_{\mathcal{S}} F \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \int \int \int_{\mathcal{Q}} \nabla \cdot F dV. \quad \diamond$$

como que \mathcal{S} casi de y es es

$$\int \int u \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}.$$

de flujo $\int \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ es la masa del fluido que S por unidad de tiempo. flujo Si la flujo integral iguales, es alrededor tensiónde cortadura por muy pequeña que sea ésta. Una fuerza cortante (F) componente tangente a la superficie de la fuerza y ésta F dividida por el la superficie es la tensión de cortadura. se llama medio ambiente. constante

Apéndice B

Problemas en Ecuaciones Diferenciales Parciales

En esta sección presentamos dos de los problemas más conocidos en ecuaciones diferenciales parciales, y son el Problema de Dirichlet y el de Neumann. Ellos nos ayudarán a resolver las Ecuaciones de Navier Stokes mediante métodos numéricos.

Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio limitado con frontera “bien definida” (por ejemplo de clase C^2) y

$$f : \partial\Omega \rightarrow C$$

es continua. EL problema (B.1), tiene una única solución.

Problema de Neumann

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal en el borde Ω de

$$f : \partial\Omega \rightarrow C$$

es continua. Note que (B.2) no tiene solución única: u es solución entonces $u + c$, donde c es una constante arbitraria es también solución.

Es interesante observar que, si una frontera de Ω es “bien definida” para que haya solución es preciso que la integral de f a lo largo de $\partial\Omega$ sea cero. \diamond

B.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas (EDP Elípticas) aparecen en problemas estacionarios de dos y tres dimensiones. Entre los problemas elípticos están la conducción del calor en los sólidos, la difusión de partículas y la vibración de una membrana, entre otros.

El dominio de integración de una ecuación elíptica bidimensional es siempre un área S acotada por una curva cerrada C . Las condiciones de frontera especifican el valor de la función o el valor de la derivada normal en cada punto de C o una mixtura de ambos.

B.1.1. Forma General de una EDP Elíptica

La Forma General de una EDP Elíptica es:

$$-\operatorname{div}(c\nabla u) + au = f$$

Esto es:

$$-\operatorname{div} \left[c(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + a(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + a(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

$$-\frac{\partial c(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)u(x, y) = f(x, y) \quad (\text{B.3})$$

Un caso particular es cuando $a = 0$ y $c = 1$:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (\text{B.4})$$

Conocida como la ecuación de Poisson.

Este tipo de ecuación la encontramos por ejemplo en la Teoría de Torsión de St. Venant, en el movimiento lento de fluidos incompresibles y viscosos, y en la ley del inverso cuadrado de la teoría de electricidad, magnetismo y gravitación en puntos donde la densidad de carga, intensidad de polo o densidad de masa respectivamente, sean diferente de cero.

Si además $f = 0$ tenemos:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Conocida como la ecuación de Laplace. Esta ecuación surge en las teorías asociadas con la conducción de calor o electricidad en sólidos, en conductores homogéneos. con el flujo irrotacional de fluidos incompresibles, y con problemas de potencial en electricidad, magnetismo y gravitación en puntos desprovistos de estas cantidades (densidad de carga, intensidad de polo y densidad de masa, respectivamente).

Trabajemos con una condición de frontera general:

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \beta \quad \alpha, \beta: \text{ctes}$$

Si $\gamma \neq 0$ entonces tenemos que nuestra condición de frontera se puede escribir como:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \beta \quad \alpha, \beta: \text{ctes} \quad (*)$$

y si $\gamma = 0$ entonces nuestra condición de frontera queda de la siguiente forma:

$$\alpha u = \beta \quad \alpha, \beta: \text{ctes}$$

que es conocida como una condición de frontera *Tipo Dirichlet*.

Vamos a trabajar con la condición de frontera (*), es decir:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1 u = \beta_1 \quad \text{front. izquierda}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_2 u = \beta_2 \quad \text{front. superior}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 u = \beta_3 \quad \text{front. derecha}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_4 u = \beta_4 \quad \text{front. izquierda}$$

Un caso particular son las condiciones de frontera siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{front. Izquierda (Tipo Neumann)} \\ u = 0 \quad \text{front. Derecha (Tipo Dirichlet)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{front. Inferior} \\ u = 0 \quad \text{front. Superior} \end{array} \right\} \text{CF*}$$

B.2. Discretización de una EDP Elíptica en Diferencias Finitas

Un enfoque para encontrar la solución numérica de una EDP recurre a las aproximaciones por diferencias finitas de las derivadas. En su primera etapa se procede a discretizar el dominio y luego se aproximan las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial por algunas de las siguientes fórmulas básicas:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[f(x-h) - f(x)]$$

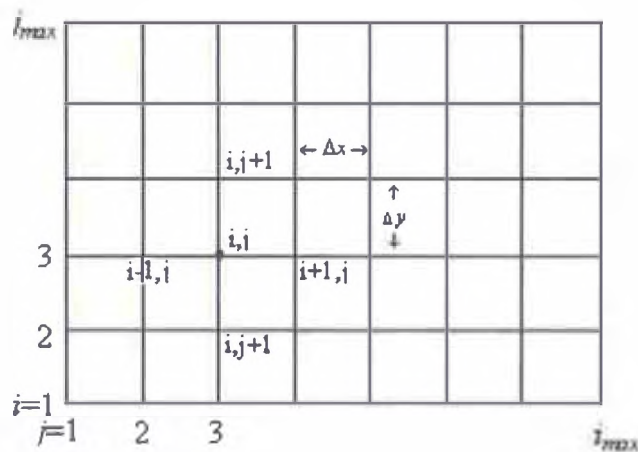
$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)]$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]$$

Acto seguido sustituimos nuestra EDP original por una versión discretizada en la que se utilizan las ecuaciones anteriores.

Ahora tenemos como objetivo encontrar la ecuación en diferencias finitas para la ecuación (B.3).

Para mayor sencillez supondremos que nuestro dominio es una retícula rectangular, con intervalos espaciados de manera uniforme en el dominio



Sabemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x}(c_{i+1,j} - c_{i,j}) \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y}(c_{i,j+1} - c_{i,j}) \quad (\text{B.11})$$

Reemplazando las ecuaciones (B.6)...(B.11) en la ecuación (B.3) tenemos:

$$-\frac{1}{\Delta x}(c_{i+1,j} - c_{i,j})\frac{1}{\Delta x}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - c_{ij}\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

$$-\frac{1}{\Delta y}(c_{i,j+1} - c_{i,j})\frac{1}{\Delta y}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - c_{ij}\frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) + a_{ij}u_{ij} = f_{ij}$$

esto es:

$$-\frac{1}{\Delta x^2}(c_{i+1,j} - c_{i,j})(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \frac{c_{ij}}{\Delta x^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

$$-\frac{1}{\Delta y^2}(c_{i,j+1} - c_{i,j})(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \frac{c_{ij}}{\Delta y^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) + a_{ij}u_{ij} = f_{ij} \quad (\text{B.12})$$

Esta ecuación (B.12) se aplica a todos los puntos interiores de la retícula, excepto a los puntos de la frontera.

De (B.12): Si $a = 0$ y $c = 1$:

$$-\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = f_{i,j} \quad (\text{B.13})$$

Entonces la ecuación anterior es la forma discretizada para la Ecuación de Poisson.

Si además $f = 0$:

$$-\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = 0 \quad (\text{B.14})$$

Entonces obtenemos la forma discretizada para la ecuación de Laplace.

Para los puntos de la Retícula que están en la frontera requerimos un tratamiento especial, debido a que:

- a) El número de puntos vecinos es menor que cuatro.
- b) Deben tomarse en cuenta las condiciones de frontera.

▪ **Frontera Inferior**

Consideremos la frontera inferior:

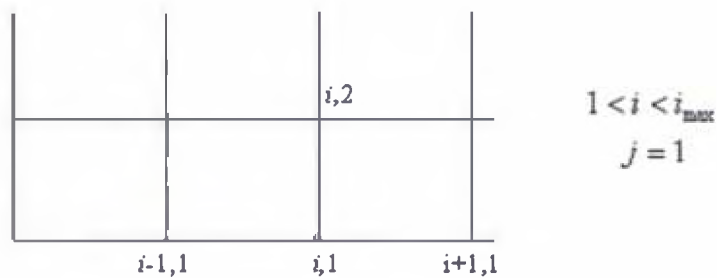


Figura B.1: Frontera Inferior

Tenemos que la condición de frontera inferior es:

$$-\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u = \beta$$

De aquí que la aproximación para $\frac{\partial u}{\partial y}$ varíe; es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\beta + \alpha u_{i,j} \tag{B.15}$$

También es necesario encontrar otra aproximación para la ecuación (B.9). Lo hacemos de la sgte forma:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1+1/2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1}}{\frac{\Delta y}{2}} \tag{B.16}$$

Para aproximar el primer término utilizamos diferencias centrales:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1+1/2} = \frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\Delta y} \quad (\text{B.17})$$

Reemplazando la ecuación (B.17) en (B.16) y usando la condición de frontera tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{\frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\Delta y} - (-\beta + \alpha u_{i,1})}{\frac{\Delta y}{2}}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{2}{\Delta y^2} [u_{i,2} - u_{i,1} + \Delta y(\beta - \alpha u_{i,1})] \quad (\text{B.18})$$

Reemplazando en (B.3) tenemos: (sustituimos (B.15) por (B.7) y (B.18) por (B.9))

$$-\frac{1}{\Delta x^2}(c_{i+1,1} - c_{i,1})(u_{i+1,1} - u_{i,1}) - \frac{c_{i,1}}{\Delta x^2}(u_{i-1,1} - 2u_{i,1} + u_{i+1,1})$$

$$-\frac{1}{\Delta y}(c_{i,2} - c_{i,1})(\alpha u_{i,1} - \beta) - 2\frac{c_{i,1}}{\Delta y^2}[u_{i,2} - u_{i,1} + \Delta y(\beta - \alpha u_{i,1})] + a_{i,1}u_{i,1} = f_{i,1} \quad (\text{B.19})$$

La ecuación (B.19) es la ecuación en diferencias finitas para un punto de la frontera inferior.

■ Frontera Izquierda

Ahora consideremos la Frontera Izquierda:

La condición de frontera izquierda es:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u = \beta$$

La aproximación en diferencias para $\frac{\partial u}{\partial x}$ es:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1,j} = -\beta + \alpha u_{1,j} \quad (\text{B.20})$$

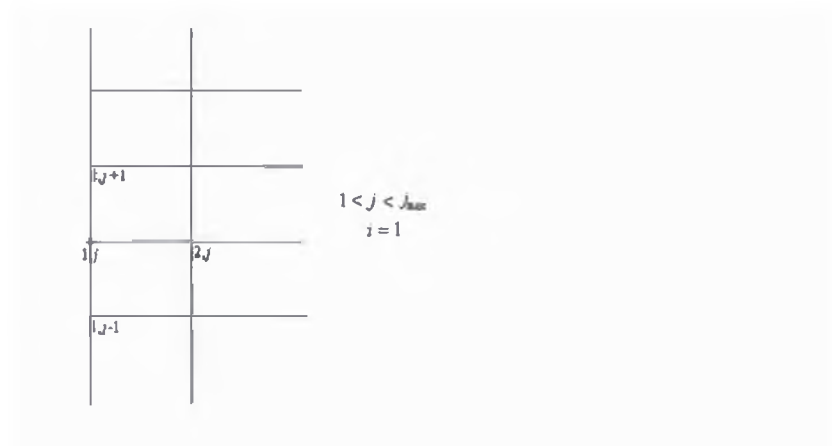


Figura B.2: Frontera Izquierda

Necesitamos otra aproximación para la ecuación (B.8):

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{1,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1+1/2,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1,j}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (\text{B.21})$$

Donde:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1+1/2,j} = \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{\Delta x} \quad (\text{B.22})$$

Reemplazando la ecuación (B.22) en (B.21) y usando la condición de frontera tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{1,j} = \frac{\frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{\Delta x} - (-\beta + \alpha u_{1,j})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{1,j} = \frac{2}{\Delta x^2} [u_{2,j} - u_{1,j} + \Delta x(\beta - \alpha u_{1,j})] \quad (\text{B.23})$$

Reemplazando en (B.3) tenemos: (sustituimos (B.20) por (B.6) y (B.23) por (B.8))

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\Delta x}(c_{2,j} - c_{1,j})(\alpha u_{1,j} - \beta) - 2\frac{c_{1,j}}{\Delta x^2}[u_{2,j} - u_{1,j} + \Delta x(\beta - \alpha u_{1,j})] \\
& -\frac{1}{\Delta y^2}(c_{1,j+1} - c_{1,j})(u_{1,j+1} - u_{1,j}) - \frac{c_{1,j}}{\Delta y^2}[u_{1,j-1} - 2u_{1,j} + u_{1,j+1}] + a_{1,j}u_{1,j} = f_{1,j}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

La ecuación (B.24) es la ecuación en diferencias finitas para cualquier punto de la frontera izquierda.

■ Frontera Superior

Ahora trabajemos con la frontera superior

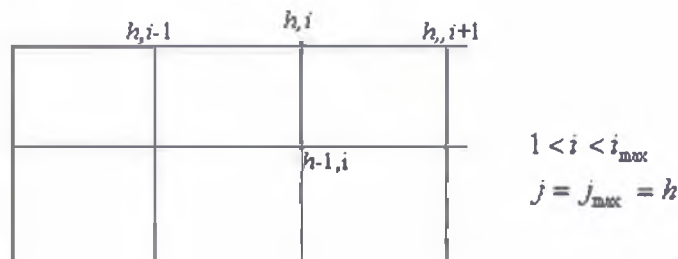


Figura B.3: Frontera Superior

Si observamos las ecuaciones (B.6)... (B.11) nos daremos cuenta que tenemos que encontrar otra aproximación para:

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad y \quad \frac{\partial c}{\partial y}$$

Pero por la condición de frontera tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \beta - \alpha u$$

Entonces:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,h} = \beta - \alpha u_{i,h} \tag{B.25}$$

Para $\frac{\partial c}{\partial y}$ Tenemos:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{i,h} = \frac{c_{i,h} - c_{i,h-1}}{\Delta y} \quad (\text{B.26})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,h} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,h} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,h-1/2}}{\frac{\Delta y}{2}} \quad (\text{B.27})$$

Donde:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,h-1/2} = \frac{u_{i,h} - u_{i,h-1}}{\Delta y} \quad (\text{B.28})$$

De las ecuaciones (B.28) y (B.27) tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,h} = \frac{2}{\Delta y^2} [-(u_{i,h} - u_{i,h-1}) + \Delta y(\beta - \alpha u_{i,h})] \quad (\text{B.29})$$

Reemplazando en (B.3) tenemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta x^2}(c_{i+1,h} - c_{i,h})(u_{i+1,h} - u_{i,h}) - \frac{c_{i,h}}{\Delta x^2}(u_{i-1,h} - 2u_{i,h} + u_{i+1,h}) \\ & - \frac{1}{\Delta y^2}(c_{i,h} - c_{i,h-1})(\beta - \alpha u_{i,h}) - 2\frac{c_{i,h}}{\Delta y^2}[\Delta y(\beta - \alpha u_{i,h}) - (u_{i,h} - u_{i,h-1})] + a_{i,h}u_{i,h} - f_{i,h} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

■ Frontera Derecha

Ahora trabajemos con la frontera derecha

Tenemos que aproximar

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial c}{\partial x}$$

Por la condición de frontera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta - \alpha u$$

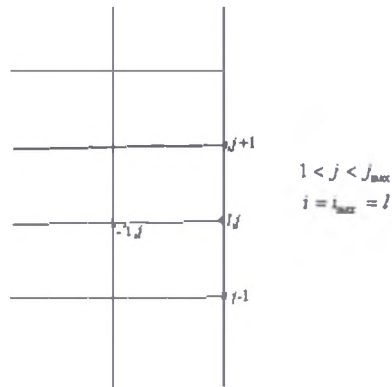


Figura B.4: Frontera Derecha

Entonces:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{l,j} = \beta - \alpha u_{l,j} \quad (\text{B.31})$$

Para $\frac{\partial c}{\partial x}$ Tenemos:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{l,j} = \frac{c_{l,j} - c_{l-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{B.32})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{l,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{l,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{l-1/2,j}}{\Delta x} \quad (\text{B.33})$$

Donde:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{l-1/2,j} = \frac{u_{l,j} - u_{l-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{B.34})$$

Por tanto de (B.34) y (B.33) tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{l,j} = \frac{2}{\Delta x^2} [-(u_{l,j} - u_{l-1,j}) + \Delta x(\beta - \alpha u_{l,j})] \quad (\text{B.35})$$

Reemplazando en (B.3):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\Delta x}(c_{l,j} - c_{l-1,j})(\beta - \alpha u_{l,j}) - 2\frac{c_{l,j}}{\Delta x^2}[-(u_{l,j} - u_{l-1,j}) + \Delta x(\beta - \alpha u_{l,j})] \\
& -\frac{1}{\Delta y^2}(c_{l,j+1} - c_{l,j})(u_{l,j+1} - u_{l,j}) - \frac{c_{l,j}}{\Delta y^2}[u_{l,j-1} - 2u_{l,j} + u_{l,j+1}] + a_{l,j} \quad , j = f_{l,j}
\end{aligned} \tag{B.36}$$

B.2.1. Aproximación en las Esquinas

Para aproximar las esquinas debemos hacer aproximaciones similares a las anteriores.

Desarrollemos para la esquina (1, 1):

Debemos tener en cuenta que:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1 u = \beta_1 \quad \text{Front. Izquierda}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_2 u = \beta_2 \quad \text{Front. Inferior}$$

Entonces:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1,1} = \alpha_1 u_{1,1} - \beta_1$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{1,1} = \alpha_2 u_{1,1} - \beta_2$$

Además utilizamos las aproximaciones (B.18) para $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y la aprox. (B.23) para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

De todo esto tenemos:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\Delta x}(c_{2,1} - c_{1,1})(\alpha_1 u_{1,1} - \beta_1) - 2\frac{c_{1,1}}{\Delta x^2}[u_{2,1} - u_{1,1} + \Delta x(\beta_1 - \alpha_1 u_{1,1})] \\
& -\frac{1}{\Delta y}(c_{1,2} - c_{1,1})(\alpha_2 u_{1,1} - \beta_2) - 2\frac{c_{1,1}}{\Delta y^2}[u_{1,2} - u_{1,1} + \Delta y(\beta_2 - \alpha_2 u_{1,1})] + a_{1,1}u_{1,1} = f_{1,1}
\end{aligned} \tag{B.37}$$

La ecuación (B.37) es la ecuación en diferencias finitas para el punto $(1, 1)$.

De forma similar se desarrolla para encontrar los puntos de las esquinas restantes.

Apéndice C

Código Método del Paso Fraccional

Este código puede ser encontrado en [10] y soluciona las ecuaciones de Navier Stokes en un dominio rectangular con velocidad nula a lo largo de la frontera. El método de solución utilizado es el de diferencias finitas por mallas alternadas "Staggered" con difusión implícita y con un método de proyección de Chorin para la presión.

La visualización es hecha mediante gráficos "colormap-isoline" para la presión y líneas de corriente para el campo velocidad.

Bibliografía

- [1] Chorin, Alexandre J. and Marsden, Jerrold E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 1993.
- [2] Lages Lima, Elon. *Curso de Análise Vol II*.
- [3] Naylor, Arch W. *Linear operator theory in engineering and science*.
- [4] Quartapelle, L. *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations*. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 113. Birkhäuser Verlag, 1993.
- [5] Serrin, James. *Mathematical principles of classical fluids mechanics*.
- [6] Swokowski, Carl W. *Cálculo con Geometría Analítica*.
- [7] Gerhart, Philip M., Gross Richard J. and Hochstein John I. *Fundamentos de la Mecánica de Fluidos*. Addison-Wesley Iberoamérica.

Páginas Web

- [8] edutecne:http://www.edutecne.utn.edu.ar/mecanica_fluidos/mecanica_fluidos_2.pdf
- [9] Codigo:<http://www-math.mit.edu/~seibold>
- [10] Mecánica de fluidos:<http://www.nd.edu/~msen/Mecfl.pdf>