

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática



INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Titulado:

MÉTODOS DE RAYLEIGH-RITZ Y GALERKIN PARA RESOLVER EL
PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE CON MALLA UNIFORME Y NO
UNIFORME

Presentado por:

Víctor Melchor Espinoza

Asesora:

MSc. Irla Mantilla Nuñez

LIMA-PERÚ

2011

Indice

DEDICATORIA	IV
AGRADECIMIENTO	VI
RESUMEN	VII
INTRODUCCION	IX
1 Conceptos Generales para la Formulación y Desarrollo del Problema	1
2 Planteamiento del Problema	14
2.1 Definición del Problema de Sturm-Liouville	14
2.1.1 Operador de Sturm-Liouville	15
2.1.2 Condiciones de Contorno para el Problema de Sturm-Liouville	16
2.1.3 Problema de Sturm-Liouville	18
2.1.4 Resultados Generales del Problema de Sturm-Liouville Regular	19
2.2 Problema de Sturm-Liouville Regular de Condiciones Dirichlet	22
3 Formulación Variacional del Problema de Sturm-Liouville	23
3.1 Teorema de Representación de Riesz	24
3.2 Formulación del Problema Variacional de Forma Bilineal Simétrica	25
3.3 Formulación de Problemas Variacionales No Simétricos	26
3.4 Existencia y Unicidad de la Solución	27
4 Resolución Numérica del Problema Variacional de Sturm-Liouville	31
4.1 Métodos Numéricos para Resolver Problemas Variacionales de Sturm-Liouville	31
4.1.1 El Método de Rayleigh-Ritz	32
4.1.2 El Método de los Residuos Ponderados	33
4.2 El Método de Galerkin con Elementos Finitos	39

4.2.1	Estimación del Error	41
4.3	El método de Rayleigh-Ritz con Elementos Finitos	44
4.3.1	Aproximación mediante Polinomios Lineales Segmentarios	46
4.3.2	Aproximación mediante B-splines	51
4.3.3	Aplicación del Método de Galerkin a la Ecuación del Calor en una dimensión	58
5	Implementación y Resultados Numéricos	62
5.1	Algoritmo 1: Base Lineal y Malla Uniforme	62
5.2	Algoritmo 2: Base Spline y Malla Uniforme	69
5.3	Algoritmo 3: Base Lineal y Malla No Uniforme	72
	CONCLUSIONES	76
 APENDICE		
A	Métodos Directos para resolver Sistemas de Ecuaciones	77
	BIBLIOGRAFIA	80

Lista de Figuras

1.1	Partición .	10
4.1	Partición	39
4.2	Base Lineal	47
4.3	Funciones de Base Lineal	48
4.4	Spline Cúbico	53
4.5	Funciones base en los extremos	54
4.6	Funciones base de trazadores cúbicos	55
4.7	Método de Galerkin	60
5.1	Densidad matricial para base lineal.	65
5.2	Solución exacta y aproximada en malla uniforme .	67
5.3	Gráfico del error - Base Lineal	68
5.4	Densidad matricial para los trazadores cúbicos.	71
5.5	Solución exacta y aproximada en malla no uniforme	75

Lista de Tablas

2.1	Tipos de condiciones de frontera.	22
4.1	Estimación del Error Galerkin. .	61
5.1	Estimación del Error en base Segmentaria Lineal.	66
5.2	Estimación del Error usando trazadores cúbicos.	71
5.3	Estimación del Error para malla no uniforme.	74

DEDICATORIA

A mi abuelita María Hurtado Flores, por todo el cariño y ternura que me ha regalado y por exigirme culminar todas mis metas.

A mi madre Rosa Espinoza Hurtado, por su apoyo incondicional que con fortaleza, paciencia y amor ha sido el pilar de mi vida.

A mi padre Efraín Melchor Guerrero, amigo y consejero en todos mis proyectos.

A mi hermana Rosa María. a Charito y Andrea, que me han brindado innumerables momentos de alegría.

AGRADECIMIENTO

A mi asesora, la Prof. MSc Irla Mantilla, por la credibilidad y confianza en la elaboración de este trabajo, por el apoyo académico y profesional que obtuve durante las actividades realizadas y la amistad adquirida a lo largo de este periodo.

Al Prof. Mag. William Echeagaray por su apoyo desinteresado en mi desarrollo personal y profesional

RESUMEN

En este trabajo presentamos un estudio numerico del problema de valor en la frontera con condiciones de tipo Dirichlet asociado a la Ecuación Diferencial Ordinaria(EDO) de tipo Sturm-Liouville.

Los objetivos de esta investigación son el estudio del problema de Sturm-Liouville, las condiciones de existencia y unicidad, la resolución numérica y la implementación de un software para resolver computacionalmente este problema. Para esto hemos considerado el enfoque de los Métodos Variacionales de Rayleigh-Ritz y Galerkin (como base para el estudio de Métodos de Elementos Finitos) apoyándonos en teoremas del enfoque variacional que garanticen la existencia y unicidad de la aproximación. Asimismo incluimos e implementamos algoritmos para resolver el PVF con una malla uniforme y no uniforme.

Finalmente, proporcionamos varios resultados numericos que nos permiten ilustrar la buena performance del método ya que al evaluar el error cometido tomando como funciones base a polinomios segmentarios lineales y los B-splines se observa que los resultados alcanzados se comportan eficientemente.

ABSTRACT

We present a numerical study from boundary value problem with Dirichlet conditions associated with the Ordinary Differential Equation (ODE) of type Sturm - Liouville.

The objectives of this research is the study of Sturm-Liouville problem, the conditions of existence and uniqueness, the numerical solution and the implementation of a computational software to solve this problem. For that we have considered the approach of the variational method Rayleigh-Ritz Galerkin (as the basis for the study of Finite Element Methods) supported theorems of variational approach to ensure the existence and uniqueness of the approach. We also include and implement algorithms to solve the PVF with uniform and nonuniform mesh.

Finally, we provide several numerical results that allow us to illustrate the good performance of the method and that in assessing the error using as basis functions linear segmental polynomial and the B-splines can be seen that the results achieved behave efficiently.

INTRODUCCIÓN

En el campo de las EDO, existen diversos modelos matemáticos importantes que son merecedores de un estudio computacional por estar asociados a diversos problemas de frontera como es el caso de la ecuación de Sturm-Liouville. Esta ecuación recibe este nombre en honor a los matemáticos *Jacques Charles Francois Sturm* (1803-1855) y *Joseph Liouville* (1809-1882), quienes publicaron sus artículos a principios del siglo XIX basados en la teoría de existencia clásica de solución. Esta información sirvió de mucho para incrementar los conocimientos sobre las propiedades cualitativas de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y sentó las bases del trabajo de Poincaré para el estudio de las EDO de segundo orden no lineales a fines del siglo XIX.

Los fundamentos teóricos del cálculo variacional clásico fueron establecidos en el siglo XVIII por L. Euler y J.L. Lagrange. Ellos también descubrieron las conexiones importantes de esta disciplina con la mecánica y la física.

El cálculo variacional aplicado a las ecuaciones diferenciales involucra el estudio de problemas cualitativos y cuantitativos tales como hallar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución débil (en espacios de dimensión infinita) de un PVF así como encontrar métodos numéricos para hallar la solución cuantitativa débil en espacios de dimensión finita del problema variacional.

Entre los métodos variacionales que se pueden utilizar para resolver problemas de valor de frontera asociados a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) podemos destacar los desarrollados por John Rayleigh (1842-1919) y Walter Ritz (1878-1909) quienes usaron funciones de prueba o interpolación para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales. El mismo concepto fue desarrollado en los artículos de Boris Galerkin (en 1915) para aproximar la solución.

La desventaja en los enfoques anteriores en comparación al moderno método de elementos finitos es que las funciones de prueba deben definirse sobre todo el dominio del problema de interés. Si bien el método de Galerkin proporciona una base muy fuerte para el método de elementos finitos, no fue hasta 1943, cuando Richard Courant publica un trabajo en

el que introduce el concepto de funciones de prueba continuas por tramos en un subdominio aplicándolo al método de Ritz (desarrollado en 1909 como una generalización de una técnica de cálculo descrita por Rayleigh en 1877). Esta investigación define el real inicio del método de elementos finitos.

El método de elementos finitos proporciona una técnica general para la construcción de soluciones aproximadas a problemas de valor de frontera. Esta técnica consiste en dividir el dominio de la solución en un número finito de subdominios simples, los elementos finitos, y usar conceptos variacionales para construir una aproximación de la solución sobre ésta colección.

Los objetivos de esta investigación son el estudio del problema de Sturm-Liouville, las condiciones de existencia y unicidad, la resolución numérica mediante métodos variacionales de Rayleigh-Ritz y Galerkin con elementos finitos y con bases lineales y spline en mallas uniformes y no uniformes así como la implementación de un software para resolver computacionalmente este problema.

Este trabajo está organizado en cinco capítulos, los cuales pasamos a describir a continuación.

En el Capítulo I, presentamos los conceptos generales como definiciones y notaciones que serán referenciados a lo largo de los demás capítulos.

En el Capítulo II, se exhibe el Problema de Sturm-Liouville Regular (detallándose los diferentes tipos de condiciones de contorno que existen); para el cual se intenta aproximar la solución de la ecuación diferencial mediante una combinación lineal finita de funciones conocidas, llamadas usualmente *funciones base*.

En el Capítulo III se realiza un bosquejo de análisis funcional de formas bilineales sobre espacios de Hilbert. Mientras los problemas puedan ser descritos como PVF ellos también satisfacen una formulación variacional equivalente. Específicamente una relación integral en la variable función incógnita es optimizada sobre una clase apropiada de funciones para la solución del PVF. También realizamos la formulación de los problemas variacionales de Sturm-Liouville simétricos y no necesariamente simétricos y garantizamos la existencia y unicidad de la solución obtenida mediante el método de Galerkin a través del teorema de Lax-Milgram.

En el Capítulo IV para el problema de valor de frontera especificado

vamos a elaborar los algoritmos de los métodos de Rayleigh-Ritz con las condiciones de frontera de Dirichlet tomando como funciones base a los polinomios segmentarios lineales así como a los trazadores cúbicos.

Finalmente, en el Capítulo V, a modo de ilustración se presentan ejemplos de aplicación con la finalidad de analizar las aproximaciones numéricas evaluando el error cometido apoyándonos en el Lema de Céa; se presenta también las gráficas de la solución exacta de la ecuación diferencial junto a la función aproximadora obtenida. De este modo verificaremos cual es el método que más se aproxima a la solución exacta. Todos los algoritmos y gráficos son programados en Scilab, que es una potente herramienta de cálculo matricial.

Capítulo 1

Conceptos Generales para la Formulación y Desarrollo del Problema

En análisis numérico, necesitamos examinar frecuentemente la proximidad de una solución numérica a la solución exacta. Una norma en un espacio vectorial proporciona una medida acerca de la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta.

Definición 1 ([6],[8],[1]). Sea V un espacio vectorial real. Una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma en V si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$
2. $\|u\| = 0 \iff u = 0$
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ para todo $u \in V$. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$ (desigualdad triangular)

El par $(V, \|\cdot\|)$, donde V es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en V se llama **espacio vectorial normado** o **espacio normado**.

Definición 2 ([1]). Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Una sucesión $\{u_n\} \subseteq V$ es llamada una sucesión de Cauchy si

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| = 0$$

Una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

Definición 3 ([6],[8],[1]). Un espacio normado se dice completo si toda sucesión de Cauchy del espacio converge a un elemento en el espacio. Un espacio normado completo es llamado un **espacio de Banach**.

Definición 4. Un subconjunto S de un espacio normado V se dice cerrado si para toda $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ tal que $u_n \rightarrow u \in V$, se tiene $u \in S$.

Ejemplos

1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ un subconjunto cerrado, con Γ frontera de Ω . Definimos los siguientes espacios (ver [5],[1],[6]):

$$C(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ es continua}\}$$

$$C(\bar{\Omega}) = \{\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ es continua}\}$$

$$C^n(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ y sus } n \text{ derivadas son continuas}\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ y todas sus derivadas son continuas}\}$$

2. Introducimos el siguiente espacio:

$$C_0^1[a, b] := \{\varphi \in C^1[a, b] : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}.$$

Entenderemos por diferenciabilidad en el borde; por ejemplo en $x = a$, como la existencia del límite:

$$\varphi'(a) = \varphi'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}$$

Similarmente, para $x=b$:

$$\varphi'(b) = \varphi'_-(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(b+h) - \varphi(b)}{h}$$

Teniendo en cuenta esta definición, se dirá que $\varphi \in C^1([a, b])$ si φ' es continua sobre $[a, b]$, con $\varphi'(a) = \varphi'_+(a)$ y $\varphi'(b) = \varphi'_-(b)$.

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, definimos el soporte de φ como

$$\text{sop } \varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Se dice que φ es de soporte compacto con respecto a Ω si $\text{sop } \varphi \subset \Omega$ y $\text{sop } \varphi$ es compacto. En particular, si Ω es acotado, entonces, φ es de soporte compacto si $\text{sop } \varphi \subset \Omega$.

Denotamos el espacio de las funciones de prueba o funciones test (ver [1]) por

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \varphi \subset \Omega\}$$

4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado. Para $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ y para $1 \leq p < \infty$, definimos la norma- p de φ por

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Aquí, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ y $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$. Adicionalmente, definimos la norma- ∞ o norma del máximo de φ , como

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)|.$$

Definición 5 ([18],[20],[6]). Sea V un conjunto no vacío. Una función $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se llama una métrica (o función distancia) de V si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $d(u, v) \geq 0$ para todo $u, v \in V$
2. $d(u, v) = 0 \iff u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$ para todo $u, v \in V$ (simetría)
4. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para todo $u, v, w \in V$ (desigualdad triangular)

El par (V, d) , formado por un conjunto no vacío V y por una métrica d definida en V se llama **espacio métrico**.

Definición 6 ([6],[8],[1],[4]). Sea V un espacio vectorial real. Una función $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto interno en V si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(u, u) \geq 0$ para todo $u \in V$
2. $(u, u) = 0 \iff u = 0$
3. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ para todo $u, v, w \in V$

4. $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ para todo $u, v \in V$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $(u, v) = (v, u)$ para todo $u, v \in V$

El par $(V, (\cdot, \cdot))$, donde V es un espacio vectorial y (\cdot, \cdot) es un producto interno en V se llama **espacio producto interno**.

Lema 1 ([6],[8],[4],[1]). Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio producto interno. Entonces se tiene que

1. $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ para todo $u \in V$ es una norma en V .
2. $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(u, v) = \|u - v\|$ para todo $u, v \in V$ es una métrica en V .
3. $|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$ para todo $u, v \in V$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ para todo $u, v \in V$ (Identidad del Paralelogramo)

Comentario

1. Todo producto interno induce una norma.
2. Toda norma induce una métrica.
3. Toda métrica induce una topología.

Luego todo producto interno induce una topología.

Definición 7 ([6],[4],[1],[8]). Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio producto interno. Si V con la norma $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ es completo, entonces $(V, (\cdot, \cdot))$ se llama un **espacio de Hilbert**.

Definición 8 ([4]). Sea V un espacio de Hilbert y sea $S \subset V$ un subconjunto lineal que es cerrado en V . Entonces S se llama un **subespacio de V** .

Sea $(H, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert.

Definición 9 ([2],[8],[16]). Toda aplicación $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ se llama un **funcional**.

El rango de F , denotado por R_F , es el conjunto de valores alcanzado por F , i.e.

$$R_F = \{k \in \mathbb{R} : f(x) = k \text{ para algún } x \in H\}$$

Definición 10 ([2],[1],[16]). Un funcional $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal si

$$F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v) \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{para todo } u, v \in H.$$

Definición 11 ([2],[1]). Un funcional lineal $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada si

$$\exists M > 0 \text{ tal que } |F(u)| \leq M \|u\| \quad \text{para todo } u \in H.$$

Definición 12 ([15]). Si $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ son espacios normados, denotamos por:

$$\mathfrak{L}(V, W) = \{F : V \rightarrow W : F \text{ es funcional lineal acotada}\}.$$

Definición 13 ([15],[1]). Si $W = \mathbb{R}$ el espacio $\mathfrak{L}(V, \mathbb{R})$ se llama espacio dual de V y se le denota por V'

$$V' = \{F : V \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ es funcional lineal acotada}\}.$$

Se tienen las operaciones:

Suma: $(F + G)(u) = F(u) + G(u)$ para todo $u \in H$, para todo $F, G \in H'$.

Producto por un escalar: $(\alpha F)(u) = \alpha F(u)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, para todo $u \in H$, para todo $F \in H'$.

H' es un espacio vectorial normado, con la norma $\|\cdot\|_{H'}$ $H' \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\|F\|_{H'} := \sup_{u \neq 0} \frac{|F(u)|}{\|u\|} \quad \text{para todo } F \in H'$$

En este caso, diremos que $(H', \|\cdot\|_{H'})$ es un espacio vectorial normado.

Observación 1. Se tiene para todo $F \in H'$, y para todo $u \in H$:

$$|F(u)| \leq \|F\| \|u\|$$

Comentario

Puede probarse que

$$\|F\| = \inf\{M > 0 : |F(u)| \leq M \|u\|, \text{ para todo } u \in H\}$$

$$\sup_{\|u\|=1} |F(u)| = \sup_{\|u\|\leq 1} |F(u)|$$

Definición 14 ([2],[4],[16]). Una **forma bilineal** $a(\cdot, \cdot)$ sobre un espacio vectorial V es una aplicación $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w). \quad \text{para todo } u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v). \quad \text{para todo } u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Esta se dirá **simétrica** si $a(u, v) = a(v, u)$ para todo $u, v \in V$.

Definición 15 ([2],[4]). Dado el siguiente espacio:

$$V = \{\varphi \in C^2[a, b] : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}.$$

Definimos la norma energía por

$$\|v\|_E = \sqrt{a(v, v)} \quad \text{para todo } v \in V \quad (1.1)$$

Definición 16 ([4]). La norma energía y el producto interno se relacionan según la desigualdad de Schwarz:

$$|a(v, w)| \leq \|v\|_E \|w\|_E \quad \text{para todo } v, w \in V$$

Ejemplo

Sea (\cdot, \cdot) un producto interno sobre $L^2[a, b]$ y $u_0 \in L^2[a, b]$. La funcional ϕ , definida por:

$$\phi(u) = (u, u_0) \quad \text{para todo } u \in L^2[a, b] \quad (1.2)$$

es lineal y acotada sobre $L^2[a, b]$.

En efecto, es lineal debido a que:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha u + \beta v) &= (\alpha u + \beta v, u_0) = \alpha(u, u_0) + \beta(v, u_0) \\ &= \alpha\phi(u) + \beta\phi(v) \end{aligned}$$

Esta es acotada pues, según la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\phi(u)| = |(u, u_0)| \leq \|u\| \|u_0\| = \alpha \|u\| \quad \text{con } \alpha = \|u_0\| > 0$$

Un hecho interesante es que toda funcional lineal acotada puede ser expresada en la forma (1.2)(ver [2]).

Definición 17 ([6]). Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. Un subconjunto $\mathcal{R} \subset X \times Y$ se llama una **relación** entre elementos de X e Y .

Se dice que dos elementos $x \in X$, $y \in Y$ están relacionados según \mathcal{R} si $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Definición 18 ([6]). Una relación $\mathcal{R} \subset X \times X$ se llama relación de equivalencia en X si:

1. $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in X$ (Reflexiva)
2. Si $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ (Simétrica)
3. Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$ (Transitiva)

Definición 19 ([6]). Sea $\mathcal{R} \subset X \times X$ una relación de equivalencia en X . Para cada $x \in X$, el conjunto

$$[x] = \{y \in X / (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

se llama la clase de equivalencia de x según \mathcal{R} .

Definición 20 ([2],[17],[6]). Dado un conjunto Ω , si una propiedad P se cumple en Ω , excepto posiblemente en un conjunto de medida nula, entonces se dice que la propiedad P se cumple casi en todas partes en Ω y se escribe “ P se cumple c.t.p. en Ω ” o “ P se cumple a.e. en Ω ”.

Espacios L^p

Sea p un número real tal que $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, denotamos al conjunto de funciones medibles por

$$\mathcal{M}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f|^p < \infty\}$$

Para todo $f, g \in \mathcal{M}^p(\Omega)$ definimos la relación de equivalencia \mathfrak{R} tal que:

$$f \mathfrak{R} g \iff f(x) = g(x) \quad \text{c.t.p. en } \Omega \quad (1.3)$$

La relación \mathfrak{R} es de equivalencia; luego haciendo una partición sobre el conjunto $\mathcal{M}^p(\Omega)$, obtenemos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f|^p < \infty\} \quad (1.4)$$

Al conjunto $L^p(\Omega)$ se le conoce como el espacio de funciones medibles y p -integrables sobre Ω .

Si $f \in L^p(\Omega)$, definimos la norma dada por:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sup \{|f(x)| : x \in \Omega\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Por lo tanto, los espacios L^p son conjuntos de clases de equivalencia respecto a la relación (1.3). (ver [4],[12])

Teorema 1 ([1],[6]). Sea Ω un conjunto abierto acotado en \mathbb{R}^n , entonces para $1 \leq p < \infty$, el conjunto de clases de equivalencia $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Definición 21 ([2],[12]). A partir de la relación (1.4), en particular, si $p = 2$, obtenemos el conjunto

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$ es llamado el espacio de funciones medibles de cuadrado integrable sobre Ω .

Sobre este espacio se define el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

que induce la norma definida por:

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(f, f)} = \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \quad \text{para todo } f \in L^2(\Omega)$$

Definición 22 ([16]). Dos funciones f y g se dicen ortogonales en $L^2(\Omega)$ si $(f, g) = 0$. Un conjunto de funciones mutuamente ortogonales es llamado un conjunto ortogonal.

Una sucesión de funciones $\{\phi_i\}$ en $L^2(\Omega)$ es llamado ortonormal si

$$(\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Aquí, δ_{ij} denota el delta de Kronecker. Se verifica que todo sistema ortonormal es linealmente independiente.

Definición 23 ([4]). Dado un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, el conjunto de funciones localmente integrables es denotado por

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^1(K) \quad \text{para todo compacto } K \subset \text{int}(\Omega)\}.$$

Definición 24 ([4]). Diremos que una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada generalizada (débil), $D^{\alpha}f$, si es que allí existe una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\phi^{(\alpha)}(x)dx \quad \text{para todo } \phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Si tal g existe, definimos $D_{\omega}^{\alpha} f = g$.

Aquí α es un multi-índice, cuya longitud está dada por $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Ejemplo

Sea $n = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, y $f(x) = |x|$.

Afirmamos que $f \in L^2(\Omega)$ y además D_{ω}^1 existe y está dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x > 0 \\ -1 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En efecto, sea $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ y dividamos el intervalo en dos partes en las que f es suave y luego integremos por partes

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)\phi'(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)\phi'(x)dx + \int_0^1 f(x)\phi'(x)dx \\ &= - \int_{-1}^0 x\phi'(x)dx + \int_0^1 x\phi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 \phi(x)dx - x\phi \Big|_{-1}^0 - \int_0^1 \phi(x)dx + x\phi \Big|_0^1 \\ &= - \int_{-1}^0 (-1)\phi(x)dx - \int_0^1 1 \cdot \phi(x)dx \\ &= - \int_{-1}^1 g(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

Definición 25. Se introduce el espacio de Sobolev de orden 1

$$H^1(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : f' \in L^2(\Omega)\}.$$

Provisto del siguiente producto escalar

$$(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g, f) \rightarrow (g, f)_{H^1(\Omega)} := (g, f)_{L^2(\Omega)} + (g', f')_{L^2(\Omega)}$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Se define además

$$H_0^1(\Omega) := \{f \in H^1(\Omega) : f \equiv 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Definición 26 ([2]). Una función f definida en el intervalo (a, b) se dice que tiene soporte compacto en (a, b) si existen α, β tal que $a < \alpha < \beta < b$ y $f(x) = 0$ para $a < x < \alpha$ y $\beta < x < b$.

Definición 27. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado finito con $a < b$: el conjunto de números $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ es denominado una malla o partición de $[a, b]$ si

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

y se le denota por

$$\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Esta partición determina una división de $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$.



Figura 1.1: Malla o Partición.

A la longitud de cada subintervalo se le denota por

$$\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Cuando estas longitudes tienen la misma medida

$$\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}) = (b - a)/n, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n$$

se dice que la malla es uniforme (o que la partición es regular) y en tal caso

$$x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Definición 28 ([1]). La palabra interpolación significa hacer pasar una curva por un conjunto dado de puntos.

El problema de interpolación puede ser establecido como sigue:

Sea $C^1[a, b]$ el espacio de funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{P}_n el

espacio de los polinomios de grado menor o igual a n . Dado un conjunto de puntos en la gráfica de una función, digamos

$$P_i = (x_i, f_i) \quad \text{donde } f_i = f(x_i) \quad \text{para } i = 0, \dots, n$$

buscamos un polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ con el menor grado posible para el que

$$p_n(x_i) = f_i \quad \text{para } i = 0, \dots, n$$

Se dice que p_n hace una interpolación de los datos. El polinomio p_n tiene a P_0, \dots, P_n como sus puntos interpolados y a x_0, \dots, x_n como sus nodos interpolados.

Teorema 2 ([1],[5],[10]). Sea f una función continua definida sobre un intervalo cerrado finito $[a, b]$. Sea Δ_n una partición del intervalo $[a, b]$. Elegimos $V = C[a, b]$, el espacio de funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{P}_n el espacio de los polinomios de grado menor o igual a n . Entonces existe un único polinomio p_n de grado a lo más n con la propiedad de que

$$f(x_k) = p_n(x_k) \quad \text{para } k = 0, \dots, n; \quad p_n \in \mathcal{P}_n.$$

Este polinomio está dado por

$$p_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \dots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x), \quad (1.5)$$

el cual es conocido como polinomio de Lagrange, donde

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \quad (1.6)$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \quad \text{para todo } k = 0, 1, \dots, n.$$

Esta última igualdad es llamada la fórmula de Lagrange para la interpolación polinomial.

Las funciones $L_{n,k}(x)$ satisfacen las condiciones de interpolación especial

$$L_{n,k}(x_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$$

Las funciones $\{L_{n,k}\}_{k=0}^n$ forman una base para \mathcal{P}_n y frecuentemente son llamadas *funciones base Lagrange*. El siguiente teorema calcula un término residual o cota para el error involucrado en la aproximación de una función interpolante.

Teorema 3 ([10]-Teorema 2,[5]). Sea Δ_n una partición del intervalo $[a, b]$ y supongamos que $f \in C^{n+1}[a, b]$. Entonces, para cada x en $[a, b]$ existe un número $\xi(x)$ en (a, b) tal que

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

donde $p_n(x)$ es el polinomio interpolante definido en la ecuación (1.5).

Definición 29 ([10],[5]). Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **definida positiva** si $x^T A x > 0$ para todo vector columna n -dimensional $x \neq 0$.

Aquí, $x^T A x$ se llama **forma cuadrática**. Si A es definida positiva y simétrica, sus valores propios son reales y positivos.

Definición 30 ([5]). Una primera submatriz principal de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la que tiene la forma

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

para algún $1 \leq k \leq n$.

Teorema 4 ([5]- Teorema 6.23). Una matriz simétrica A es definida positiva si y sólo si sus primeras submatrices principales tienen determinante positivo.

Definición 31 ([10],[5]). Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama **diagonalmente dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n$$

Definición 32 ([5],[10]). Si $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = L$, se dice que la convergencia es $\mathcal{O}(G(x))$ si existe un número $K > 0$, independiente de x , tal que

$$\frac{|F(x) - L|}{|G(x)|} \leq K \quad \text{para } x > 0 \text{ suficientemente pequeña.}$$

Por lo general se escribe $F(x) = L + \mathcal{O}(G(x))$ o $F(x) \rightarrow L$ con una rapidez de convergencia $\mathcal{O}(G(x))$.

Definición 33 ([5]). Un algoritmo se dice **estable** si es que al realizar cambios pequeños en los datos iniciales produce correspondientemente cambios pequeños en los resultados finales. Es **inestable** cuando este criterio no se cumple.

Consideremos ahora el tema del crecimiento del error de redondeo y su conexión con la estabilidad de los algoritmos

Definición 34 ([5]). *Supongamos que se introduce un error ε en alguna etapa de los cálculos y que el crecimiento del error después de n operaciones subsecuentes se denota por E_n .*

Si $|E_n| \approx Cn\varepsilon$ donde C es una constante independiente de n , se dice que el crecimiento del error es lineal.

Si $|E_n| \approx k^n\varepsilon$ para alguna $k > 1$, el crecimiento del error es exponencial.

Teorema 5 ([5]- Teorema 6.24). *La matriz simétrica A es definida positiva si y sólo si la eliminación gaussiana sin intercambios de renglones puede efectuarse en el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con todos los elementos pivote positivos. Además, en este caso los cálculos son estables respecto al crecimiento de los errores de redondeo.*

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

De manera general, la descripción matemática de algunos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza se presenta en forma de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si bien es cierto que es muy complejo analizar un fenómeno físico de forma exacta, podemos realizar hipótesis simplificadoras de éste fenómeno para hacer posible la construcción de modelos matemáticos que se aproximen a la realidad del problema. Es por tal razón que es muy importante tener un fuerte conocimiento de métodos que proporcionen soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales planteadas.

Ya que no siempre es posible encontrar una solución analítica, es necesario implementar diversos métodos que permitan obtener, en la mayoría de casos numéricamente, sus soluciones.

2.1 Definición del Problema de Sturm-Liouville

La teoría de Sturm-Liouville tiene gran importancia en la física matemática. Dicha teoría permitió la generalización de la idea de series trigonométricas y se extendió el uso de las funciones de Green a un amplio rango de las ecuaciones diferenciales.

Esta teoría surgió de una serie de artículos publicados separadamente por los matemáticos *Jacques Charles Francois Sturm* (1803-1855) y *Joseph Liouville* (1809-1882) durante el periodo de 1829 y 1837. Ahora los trabajos de Sturm y Liouville están íntimamente interconectados. Sin embargo, durante su larga amistad discutieron sus investigaciones antes de publicarlas. Sturm y Liouville trabajaron con ecuaciones diferenciales de

segundo orden. Ambos estaban interesados en la teoría de Fourier y Poisson de la conducción de calor en materiales homogéneos (y la teoría de series trigonométricas desarrolladas para este propósito) e intentaron generalizarla para materiales heterogéneos. Sin embargo, en el caso general ellos no podían obtener expresiones explícitas útiles para las soluciones (funciones propias) por lo que tuvieron que conformarse con deducir sus propiedades directamente de la ecuación diferencial. Las propiedades que investigaron fueron cualitativas tales como el número y comportamiento de los ceros (Teoremas de Comparación y Oscilación de Sturm). Sobre la base de los resultados de Sturm, Liouville, logró probar la serie de Fourier generalizada de una función arbitraria.

La generalidad del problema obligó a Sturm y Liouville a dar un gran paso en la dirección de una teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Tal desarrollo de una fórmula basada en matemática cuantitativa hacia una matemática más cualitativa y basada en conceptos ha sido destacada como una característica importante del desarrollo de las matemáticas del siglo XIX.

2.1.1 Operador de Sturm-Liouville

Se dice que un operador diferencial lineal de segundo orden \mathcal{L} definido en un intervalo $[a, b]$ está en forma autoadjunta si

$$\mathcal{L} \equiv D \left[p(x) D \right] - s(x) \quad (2.1)$$

donde $D = \frac{d}{dx}$, p es cualquier función en $C^1[a, b]$ tal que $p(x) > 0$ (o bien $p(x) < 0$) para todo $x \in [a, b]$ y s es una función arbitraria en $C[a, b]$. \mathcal{L} será referido como el operador de Sturm-Liouville.

La ecuación de Sturm-Liouville (ver ecuación 2.4) puede escribirse como

$$\mathcal{L}[y(x)] = -\lambda r(x)y(x), \quad (2.2)$$

donde $y(\cdot)$ es la función buscada.

Linealidad del Operador de Sturm-Liouville

El operador de Sturm-Liouville es lineal, i.e., si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación (2.2), entonces una combinación lineal de las mismas también

lo será:

$$\mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 \mathcal{L}[y_1] + c_2 \mathcal{L}[y_2] . \quad (2.3)$$

Definición 35 ([3],[21],[14]). Se define la ecuación de Sturm - Liouville sobre un intervalo dado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ como la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal y homogénea

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} y(x) \right] - s(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \quad , x \in [a, b] \quad (2.4)$$

donde,

- $p(\cdot)$, $p'(\cdot)$, $s(\cdot)$, $r(\cdot)$ son funciones reales y continuas sobre $[a, b]$.
- $p(\cdot)$ y $r(\cdot)$ no cambian de signo en el intervalo $a < x < b$. Tomaremos por convenio $r(x) > 0$, excepto, quizás en puntos aislados en los que $r(x) = 0$. A la función $r(\cdot)$ se le conoce como función de peso.
- λ es un parámetro arbitrario.

Definición 36 ([3]). Sea $\{f_i\}$ un conjunto de funciones que satisfacen una cierta condición de contorno. Decimos que esta condición de contorno es homogénea si cualquier combinación lineal de las funciones f_i satisface también esta condición de contorno.

2.1.2 Condiciones de Contorno para el Problema de Sturm-Liouville

Sean ciertas condiciones de contorno homogéneas en $x = a$ y $x = b$. Si para dos funciones cualesquiera, $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$, que satisfacen estas condiciones de contorno se verifica que ¹

$$\left\{ p(x) \left[\bar{f}(x) \frac{dg}{dx} - g(x) \frac{d\bar{f}}{dx} \right] \right\}_a^b = p(b)[\bar{f}(b)g'(b) - g(b)\bar{f}'(b)] - p(a)[\bar{f}(a)g'(a) - g(a)\bar{f}'(a)] = 0 \quad (2.5)$$

entonces a esas condiciones de contorno se les llama *condiciones de contorno de Sturm-Liouville* (ver [3],[21]). Estas condiciones de contorno se clasifican en tres tipos, dando lugar a tres clases de problemas de Sturm-Liouville:

¹Aquí, \bar{f} es el complejo conjugado de f .

1. Condiciones de contorno periódicas

Las condiciones de contorno para este caso son

$$\begin{cases} y(a) = y(b), \\ y'(a) = y'(b). \end{cases} \quad (2.6)$$

y además ha de verificarse que

$$p(a) = p(b) \quad (2.7)$$

En efecto, sean f y g dos funciones que satisfacen las condiciones de contorno (2.6). Se cumple que

$$\begin{cases} f(a) = f(b), \\ f'(a) = f'(b) \end{cases} \quad \begin{cases} g(a) = g(b), \\ g'(a) = g'(b) \end{cases} \quad (2.8)$$

y si reemplazamos (2.7) y (2.8) en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & p(b)[f(b)g'(b) - g(b)f'(b)] - p(a)[f(a)g'(a) - g(a)f'(a)] \\ &= p(a)[f(a)g'(a) - g(a)f'(a)] - p(a)[f(a)g'(a) - g(a)f'(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

comprobamos que la relación (2.5) se verifica trivialmente. \square

2. Condiciones de contorno regulares

Estas condiciones de contorno son de la forma

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, & \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, & \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

Hay dos subtipos especiales de condiciones de contorno regulares:

- *Condiciones de contorno de Dirichlet.* En este caso $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, con lo que (2.9) toma la forma

$$y(a) = y(b) = 0.$$

- *Condiciones de contorno de Neumann.* Aquí $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, y por tanto (2.9) se reduce a

$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

En efecto, sean f y g dos funciones que satisfacen las condiciones de contorno (2.9). Se cumple que

$$\begin{cases} \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0, \\ \alpha_1 g(a) + \alpha_2 g'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \\ \beta_1 g(b) + \beta_2 g'(b) = 0 \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} f(a) & f'(a) \\ g(a) & g'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} f(b) & f'(b) \\ g(b) & g'(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 0$$

y debido a que $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$, entonces

$$f(a)g'(a) - f'(a)g(a) = 0 \quad \text{y} \quad f(b)g'(b) - f'(b)g(b) = 0 \quad (2.10)$$

y si reemplazamos (2.10) en la siguiente expresión:

$$p(b)[f(b)g'(b) - g(b)f'(b)] - p(a)[f(a)g'(a) - g(a)f'(a)]$$

$$= 0$$

podemos comprobar que se verifica la relación (2.5). □

3. Condiciones de contorno singulares

Son las condiciones de contorno de Sturm-Liouville, es decir, aquellas que hacen que se verifique (2.5), y que no son ni regulares ni periódicas. Estas condiciones suelen involucrar intervalos infinitos o semiinfinitos, o funciones $p(\cdot)$ que se anulan en los contornos, o coeficientes de la ecuación de Sturm-Liouville que se hacen infinitos en un contorno ²(en $x = a$, por ejemplo) o en los dos contornos, o bien condiciones que exigen que en los contornos la solución buscada sea continua, o acotada, o que diverge (vaya a infinito) de un modo más lento que determinada función³.

2.1.3 Problema de Sturm-Liouville

El **problema de Sturm-Liouville** está constituido por una ecuación de Sturm Liouville sujeta a las condiciones de contorno de Sturm-Liouville.

²Un ejemplo es la ecuación de Bessel en $x = 0$.

³Un ejemplo de esta última posibilidad se da en la ecuación de Hermite.

Los valores de λ para los cuales el problema admite solución no trivial se dirán *autovalores del problema* (o *valores propios*). Las soluciones no triviales correspondientes a un autovalor λ se dirán *autofunciones del problema* (o *funciones propias*) asociadas a λ .

Las soluciones de la ecuación (2.4) forman un espacio vectorial lineal real que está provisto de un producto interno definido por

$$(y_1, y_2) := \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx \quad (2.11)$$

La norma de una solución $y(\cdot)$ está definida como

$$\|y(\cdot)\| = \sqrt{(y, y)} \quad (2.12)$$

Como deseamos que la norma de las soluciones sea finita

$$\int_a^b \|y(x)\|^2 dx < \infty \quad (2.13)$$

las soluciones deben estar en el espacio de funciones $L^2[a, b]$.

2.1.4 Resultados Generales del Problema de Sturm-Liouville Regular

Dado el problema regular de Sturm - Liouville, definimos el dominio del operador \mathcal{L} por

$$D(\mathcal{L}) = \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : y'' \in L^2[a, b] \text{ y } \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0; \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\}$$

Teorema 6 (Identidad de Lagrange[3]). Sean $u, v \in D(\mathcal{L})$, entonces se cumple:

$$u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}u = \frac{d}{dx}[p(uv' - vu')]$$

Prueba

Desarrollando el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}u &= u \left\{ \frac{d}{dx} \left[p \frac{dv}{dx} \right] + q(x)v \right\} - v \left\{ \frac{d}{dx} \left[p \frac{du}{dx} \right] + q(x)u \right\} \\ &= u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + quv - v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) - quv \\ &= u \frac{d}{dx} (pv') - v \frac{d}{dx} (pu') \\ &= u \frac{dp}{dx} v' + pu \frac{dv'}{dx} - \left[v \frac{dp}{dx} u' + pv \frac{du'}{dx} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dp}{dx}uv' + p\frac{du}{dx}v' + pu\frac{dv'}{dx} - \left[\frac{dp}{dx}vu' + p\frac{dv}{dx}u' + pv\frac{du'}{dx} \right] \\
&= \frac{dp}{dx}uv' + p\frac{d}{dx}(uv') - \left[\frac{dp}{dx}(vu') + p\frac{d}{dx}(vu') \right] \\
&= \frac{d}{dx}[p(uv')] - \frac{d}{dx}[p(vu')] \\
&= \frac{d}{dx}[p(uv' - vu')]
\end{aligned}$$

Teorema 7 ([3]). *El operador \mathcal{L} de Sturm-Liouville es autoadjunto, es decir, para dos funciones cualesquiera $u, v \in D(\mathcal{L})$, se cumple:*

$$(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v)$$

Prueba

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, v) - (u, \mathcal{L}v) &= \int_a^b \mathcal{L}u \cdot v dx - \int_a^b u \cdot \mathcal{L}v dx \\
&= \int_a^b (\mathcal{L}u \cdot v - u \cdot \mathcal{L}v) dx \\
&= p(vu' - uv') \Big|_a^b \quad \text{por la Identidad de Lagrange} \\
&= p(b)[v(b)u'(b) - u(b)v'(b)] - p(a)[v(a)u'(a) - u(a)v'(a)]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $u, v \in D(\mathcal{L})$, para $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0, \\ \beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= 0 \\
\begin{bmatrix} u(b) & u'(b) \\ v(b) & v'(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} &= 0
\end{aligned}$$

y ya que $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$, entonces

$$u(a)v'(a) - u'(a)v(a) = 0 \quad \text{y} \quad u(b)v'(b) - u'(b)v(b) = 0$$

al reemplazar estos resultados en la ecuación (2.14) produce

$$(\mathcal{L}u, v) - (u, \mathcal{L}v) = 0$$

Luego, \mathcal{L} es autoadjunto. □

Teorema 8. Sea \mathcal{L} el operador de Sturm-Liouville. Si \mathcal{L} es autoadjunto entonces sus autovalores son reales.

Prueba

Supongamos que λ es un autovalor complejo asociado a la autofunción ϕ , entonces se cumple $\mathcal{L}\phi = -\lambda r\phi$. Además,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\phi, \phi) &= (-\lambda r\phi, \phi) = -\lambda(r\phi, \phi) \\ (\phi, \mathcal{L}\phi) &= (\phi, -\lambda r\phi) = -\bar{\lambda}(\phi, r\phi)\end{aligned}$$

Luego, si restamos

$$0 = (\mathcal{L}\phi, \phi) - (\phi, \mathcal{L}\phi) = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx.$$

debido a que $r(x) > 0$ y $|\phi(x)|^2 > 0$, para casi toda x , se concluye que $\lambda = \bar{\lambda}$.

Teorema 9. Sea \mathcal{L} el operador de Sturm-Liouville. Si \mathcal{L} es autoadjunto entonces se cumple que autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales con respecto a la función de peso r .

Prueba

Sean las autofunciones ϕ y φ , asociadas a los autovalores λ y μ respectivamente. Esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\phi &= -\lambda r\phi \\ \mathcal{L}\varphi &= -\mu r\varphi\end{aligned}$$

Como \mathcal{L} es autoadjunto, se cumple

$$\begin{aligned}0 &= (\mathcal{L}\phi, \varphi) - (\phi, \mathcal{L}\varphi) \\ &= -\lambda(r\phi, \varphi) + \mu(\phi, r\varphi) \\ &= (\mu - \lambda) \int_a^b r(x)\phi(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Como $\mu \neq \lambda$ entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b r(x)\phi(x)\varphi(x)dx &= 0 \\ (\phi, r\varphi) &= 0\end{aligned}$$

es decir, autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales en relación a la función de peso r . \square

Si suponemos adicionalmente que las autofunciones son normalizadas (norma igual a 1), entonces tenemos la llamada *condición de ortonormalidad* (en relación a la función de peso r):

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)r(x)dx = \delta_{ij} \tag{2.15}$$

2.2 Problema de Sturm-Liouville Regular de Condiciones Dirichlet

Consideremos la siguiente ecuación para una función $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x) \quad (2.16)$$

con condiciones de frontera $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ bajo las suposiciones

$$\begin{aligned} p &\in C^1[a, b] & p(x) &\geq p_0 > 0 \\ q, f &\in C[a, b] & q(x) &\geq 0 \quad \text{para todo } a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (2.17)$$

Estas suposiciones son suficientes para garantizar que el problema de valor de frontera tiene solución. A este problema se le conoce como *Problema de Sturm-Liouville Regular con condiciones de tipo Dirichlet*. En este trabajo nos centraremos en resolver este problema.

Tipos de Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera se clasifican en tres tipos (ver [13],[4]). La condición de frontera $y(x) = 0$ es llamada *esencial* o “Dirichlet”. La condición de frontera $y'(x) = 0$ es llamada *natural* o “Neumann”. La condición de frontera se llamará *mixta* si es una combinación de las dos anteriores. Resumimos los diferentes tipos de condiciones de frontera encontradas hasta aquí, junto con sus diversos nombres en la Tabla 2.1.

Nombre Variacional	Explicación	Condición de Frontera
Esencial o Dirichlet	Se da el valor funcional de la solución	$y(x) = 0$
Natural o Neumann	Se da la derivada de la solución	$y'(x) = 0$
Mixta	El valor funcional de la solución está relacionado con la derivada	$y(x) = 0;$ $y'(x) = 0$

Tabla 2.1: Convenciones de nombres para los tipos de condiciones de frontera.

Capítulo 3

Formulación Variacional del Problema de Sturm-Liouville

Dado un conjunto abierto $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ con $a, b \in \mathbb{R}$ sobre el que se define el siguiente problema diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x) \quad (3.1)$$

para una función $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de frontera

$$u(a) = \alpha \quad y \quad u(b) = \beta$$

al que se le denomina **problema de contorno clásico**(ver [11]).

Sean $p \in C^1[a, b]$, $q, f \in C[a, b]$; $V \subset L^2(\Omega)$, un espacio de Hilbert de dimensión infinita con V' el espacio dual de V . Sea $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y $\ell \in V'$ una forma lineal.

Consideremos $f \in L^2(\Omega)$ y $\alpha = \beta = 0$ (condiciones de frontera homogéneas).

Al multiplicar (3.1) por una función v del espacio de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto $C_0^\infty(\Omega)$ resulta

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) v + q(x)u(x)v = f(x)v \quad \text{para } u \in V$$

De donde

$$\int_a^b -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

Integrando por partes resulta

$$-v(x)p(x)u'(x)\Big|_a^b + \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]dx = \int_a^b f(x)v(x)dx,$$

debido a que $v \in C_0^\infty(\Omega)$, se reduce a

$$\int_{\Omega} [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Assumiendo que

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]dx \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Entonces el problema clásico se reduce al siguiente “problema variacional”

Hallar $u \in V$, que satisfaga la ecuación variacional

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V \quad (3.2)$$

esta es llamada la *formulación variacional ó débil* de (3.1). El término “variacional” se refiere a que la función v se permite variar arbitrariamente sobre V (ver [4],[11]).

3.1 Teorema de Representación de Riesz

Sea H un espacio de Hilbert con producto interno (\cdot, \cdot) y $u \in H$. Recordemos que una funcional lineal continua L_u puede ser definida sobre H por

$$L_u(v) = (u, v). \quad (3.3)$$

El siguiente teorema prueba que la recíproca también es cierta.

Teorema 10 (Teorema de Representación de Riesz). *Cualquier funcional lineal continua L sobre H puede ser representada únicamente como*

$$L(v) = (u, v), \quad (3.4)$$

para algún $u \in H$. Además, tenemos que

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H. \quad (3.5)$$

Prueba

([4], Teorema 2.4.2). □

3.2 Formulación del Problema Variacional de Forma Bilineal Simétrica

Definición 37 ([4],[2],[1]). Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sobre un espacio lineal normado H se dice acotada (o continua) si existe $C < \infty$ tal que

$$|a(v, w)| \leq C \|v\|_H \|w\|_H \quad \text{para todo } v, w \in H$$

Esta se dice que es coerciva sobre un subespacio $V \subset H$ si existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \text{para todo } v \in V.$$

Proposición 1. Sea H un espacio de Hilbert y sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma simétrica bilineal que es continua sobre H y coerciva sobre un subespacio V (cerrado) de H . Entonces $(V, a(\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.

Prueba

Una consecuencia inmediata de la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ es que si $v \in V$ y $a(v, v) = 0$, entonces $v \equiv 0$. Por lo tanto, $a(\cdot, \cdot)$ es un producto interno sobre V .

Sea $\|v\|_E = \sqrt{a(v, v)}$ la norma energía y supongamos que $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(V, \|\cdot\|_E)$. Por coercividad, $\{v_n\}$ es también de Cauchy en $(H, \|\cdot\|_H)$. Debido a que H es completo, existe $v \in H$ tal que $v_n \rightarrow v$ en la norma $\|\cdot\|_H$. Desde que V es cerrado en H , $v \in V$. Ahora, debido a que $a(\cdot, \cdot)$ es acotada, se cumple

$$\begin{aligned} \|v - v_n\|_E &= \sqrt{a(v - v_n, v - v_n)} \leq \sqrt{C \|v - v_n\|_H^2} \\ \|v - v_n\|_E &\leq \sqrt{C} \|v - v_n\|_H \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{v_n\} \rightarrow v$ en la norma $\|\cdot\|_E$, luego $(V, \|\cdot\|_E)$ es completo. \square

Se dice que un problema variacional es simétrico si este está representado por los elementos:

- (1) $(H, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.
 - (2) V es un subespacio (cerrado) de H .
 - (3) $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica acotada que es coerciva sobre V .
- (3.6)

Así el **problema variacional simétrico** es

$$\text{Dado } \ell \in V', \text{ halle } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = \ell(v) \text{ para todo } v \in V. \quad (3.7)$$

Introducimos el funcional (ver [2])

$$I(u) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} p(x) u'(x)^2 + \frac{1}{2} q(x) u(x)^2 - f(x) u(x) \right] dx, \quad u \in V \quad (3.8)$$

$$V = \{v \in C^2[a, b]; v(a) = v(b) = 0\}$$

Al funcional I se le conoce como *funcional de energía* (ver [1]) y lo podemos expresar como

$$I(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u) \quad \text{para todo } u \in V.$$

donde

$$a(u, u) = \int_a^b \left[p(x) u'(x)^2 + q(x) u(x)^2 \right] dx, \quad u \in V$$

$$\ell(u) = \int_a^b f(x) u(x) dx. \quad u \in V$$

Teorema 11. *Supongamos que en el problema (3.2) se satisfacen las condiciones (1) – (3) de (3.6). Entonces existe un único $u \in V$ que resuelve (3.7)*

Prueba

La Proposición 1 implica que $a(\cdot, \cdot)$ es un producto interno sobre V y que $(V, a(\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert. Aplicar el Teorema de Representación de Riesz. \square

3.3 Formulación de Problemas Variacionales No Simétricos

Se dice que un problema variacional es no simétrico si éste está representado por los siguientes elementos:

- (1) $(H, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.
- (2) V es un subespacio (cerrado) de H .
- (3) $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal sobre V , no necesariamente simétrica. (3.9)

(4) $a(\cdot, \cdot)$ es continua (acotada) sobre V .

(5) $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva sobre V .

Así el **problema variacional no simétrico** es el siguiente

$$\text{Dado } \ell \in V', \text{ halle } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V. \quad (3.10)$$

3.4 Existencia y Unicidad de la Solución

Nos gustaría probar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional (no simétrico):

$$\text{Hallar } u \in V \quad \text{tal que} \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V \quad (3.11)$$

donde V es un espacio de Hilbert, $\ell \in V'$ y $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, continua, coerciva que no necesariamente es simétrica. El teorema de Lax-Milgram garantiza la existencia y unicidad de la solución (3.11). Primero necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 2 (Principio de la Aplicación Contracción). *Dado un espacio de Banach V y una aplicación $T : V \rightarrow V$, que satisfice*

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq M\|v_1 - v_2\| \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in V,$$

donde M es fijo y $0 \leq M < 1$, existe un único $u \in V$ tal que

$$u = Tu,$$

i.e., la aplicación contracción T tiene un único punto fijo u .

Observación. Ahora sólo necesitamos en el Lema que V sea un espacio métrico completo.

Prueba

i) Unicidad.

Supongamos que $Tv_1 = v_1$ y $Tv_2 = v_2$.

Desde que T es una aplicación contracción. $\|Tv_1 - Tv_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|$ para algún $0 \leq M < 1$. Pero $\|Tv_1 - Tv_2\| = \|v_1 - v_2\|$. Por lo tanto,

$$\|v_1 - v_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|$$

Esto implica que $\|v_1 - v_2\| = 0$. Por lo tanto $v_1 = v_2$, i.e., el punto fijo es único.

ii) Existencia.

Elijamos $v_0 \in V$ y definamos

$$v_1 = Tv_0, \quad v_2 = Tv_1, \dots, v_{k+1} = Tv_k, \dots$$

Notemos que $\|v_{k+1} - v_k\| = \|Tv_k - Tv_{k-1}\| \leq M\|v_k - v_{k-1}\|$. Así, por inducción

$$\|v_k - v_{k-1}\| \leq M^{k-1}\|v_1 - v_0\|,$$

Por lo tanto, para cualquier $N > n$,

$$\begin{aligned} \|v_N - v_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^N v_k - v_{k-1} \right\| \\ &\leq \|v_1 - v_0\| \sum_{k=n+1}^N M^{k-1} \\ &\leq \frac{M^n}{1-M} \|v_1 - v_0\| \\ &= \frac{M^n}{1-M} \|Tv_0 - v_0\| \end{aligned}$$

Esto muestra que $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Desde que V es completo, $\{v_n\}$ converge en V .

Así, existe $v \in V$ tal que $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, tenemos

$$\begin{aligned} v &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tv_n = T(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n) \quad (\text{porque } T \text{ es continua}) \\ &= Tv; \end{aligned}$$

en otras palabras, allí existe un punto fijo. □

Teorema 12 (Lax-Milgram). *Dado un espacio de Hilbert $(V, (\cdot, \cdot))$, una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ coerciva y continua y una funcional lineal continua $\ell \in V'$, entonces existe un único $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V \tag{3.12}$$

Prueba

Para cualquier $u \in V$, definamos el funcional Au por

$$Au(v) = a(u, v) \quad \text{para todo } v \in V.$$

Au es lineal, ya que

$$\begin{aligned} Au(\alpha v_1 + \beta v_2) &= a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) \\ &= \alpha Au(v_1) + \beta Au(v_2) \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Au también es continua ya que, para todo $v \in V$,

$$|Au(v)| = |a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|,$$

donde C es la constante de la definición de continuidad para $a(\cdot, \cdot)$.

Por lo tanto,

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|} \leq C\|u\| < \infty$$

Así, $Au \in V'$. Similarmente la aplicación $u \rightarrow Au$ es una aplicación lineal $V \rightarrow V'$. Aquí probamos también que la aplicación lineal $A : V \rightarrow V'$ es continua con $\|A\|_{L(V, V')} \leq C$.

Ahora, por el Teorema de Representación de Riesz, para cualquier $\phi \in V'$ existe un único $\tau\phi \in V$ tal que $\phi(v) = (\tau\phi, v)$ para cualquier $v \in V$.

Por definición, $\tau : V' \rightarrow V$ es lineal e inyectiva. Más aún τ es isométrico, esto es $\|\tau Av\| = \|Av\|$ para cualquier $v \in V$.

Debemos encontrar un único u tal que $Au(v) = \ell(v)$ para todo $v \in V$.

En otras palabras, queremos encontrar un único u tal que:

$$Au = \ell \quad (\text{en } V'), \quad \text{ó} \quad \tau Au = \tau\ell \quad (\text{en } V).$$

ya que τ es inyectiva. Resolvamos esta última ecuación usando el Lema 2. Queremos encontrar $\rho \neq 0$ tal que la aplicación $T : V \rightarrow V$ es una aplicación contracción, donde T está definida por

$$Tv := v - \rho(\tau Av - \tau\ell) \quad \text{para todo } v \in V.$$

Si T es una aplicación contracción, entonces por el Lema 2, existe un único $u \in V$ tal que

$$Tu = u - \rho(\tau Au - \tau\ell) = u$$

esto es, $\rho(\tau Au - \tau \ell) = 0$ ó $\tau Au = \tau \ell$.

Resta probar que tal $\rho \neq 0$ existe. Para cualquier $v_1, v_2 \in V$, sea $v = v_1 - v_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau Av_1 - \tau Av_2)\|^2 \\
&= \|v - \rho(\tau Av)\|^2 \quad (\tau, A \text{ son lineales}) \\
&= \|v\|^2 - 2\rho(\tau Av, v) + \rho^2\|\tau Av\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\rho Av(v) + \rho^2 Av(\tau Av) \quad (\text{definición de } \tau) \\
&= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau Av) \quad (\text{definición de } A) \\
&\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2 C\|v\|\|\tau Av\| \quad (\text{coercividad y continuidad de } A) \\
&\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)\|v\|^2 \quad (A \text{ acotada, } \tau \text{ isométrico}) \\
&= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)\|v_1 - v_2\|^2 \\
&= M^2\|v_1 - v_2\|^2
\end{aligned}$$

Aquí, α es la constante en la definición de coercividad de $a(\cdot, \cdot)$. En la última desigualdad hemos usado $\|\tau Av\| = \|Av\| \leq C\|v\|$.

Así, necesitamos que $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$ para algún ρ , i.e.,

$$\rho(\rho C^2 - 2\alpha) < 0.$$

Si elegimos $\rho \in (0, 2\alpha/C^2)$ entonces $M < 1$ y esto completa la prueba. \square

Observación 2. Note que $\|u\|_V \leq (1/\alpha)\|\ell\|_{V'}$ donde α es la constante de coercividad.

Corolario 1. Bajo las condiciones (3.9), el problema variacional (3.10) tiene una única solución.

Prueba

Las condiciones (1) y (2) de (3.9) implican que $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert. Aplicar el Teorema de Lax-Milgram. \square

Capítulo 4

Resolución Numérica del Problema Variacional de Sturm-Liouville

4.1 Métodos Numéricos para Resolver Problemas Variacionales de Sturm-Liouville

Dentro de los diversos métodos matemáticos de resolución de problemas de valor de frontera podemos establecer la siguiente clasificación:

- Método de Rayleigh-Ritz.
- Método de los Residuos Ponderados, el cual se subdivide a su vez en:
 - El método de Galerkin.
 - El método de mínimos cuadrados.
 - El método de colocación.

Estos métodos son muy conocidos en la literatura y se les llama **métodos variacionales**(ver [19],[7]). Los métodos variacionales están basados en el hecho que las soluciones de algunos tipos importantes de problemas de valor de frontera poseen ciertas propiedades de minimalidad. Estos se caracterizan por buscar una solución aproximada en la forma de una combinación lineal ($\sum c_i \phi_i$) de funciones de aproximación apropiadas, ϕ_i , y parámetros por determinar c_i . Sin embargo, la selección de las funciones de aproximación usadas en cada método resaltarán las diferencias significantes entre cada uno

de ellos.

Entre los métodos que han alcanzado mayor popularidad está el método de elementos finitos (MEF) que se destaca por sus buenos resultados y aplicaciones prácticas. Este método consiste en hacer una partición en elementos finitos del dominio de definición de la función para luego, usando algún método variacional, podamos obtener la solución en cada uno de los elementos.

4.1.1 El Método de Rayleigh-Ritz

Este método fue desarrollado por Lord Rayleigh en 1870 para resolver el problema de vibración de tuberías cerradas en un extremo y abiertas en otro. Sin embargo, esta propuesta no recibió mucho reconocimiento por parte de la comunidad científica.

Aproximadamente 40 años después, gracias a la publicación de dos artículos por W. Ritz (1908) este enfoque pasó a ser llamado el método de Ritz. Para reconocer las contribuciones de ambos personajes ésta aproximación teórica fue posteriormente renombrada como el **método de Rayleigh-Ritz**.

Sea F una función real definida sobre $a \leq x \leq b$; $-\infty < r, s < \infty$. Supongamos que F tiene derivadas parciales continuas de orden ≤ 2 y que F está dada por:

$$F(x, y, y') = p(x)[y'(x)]^2 + q(x)[y(x)]^2 - 2f(x)y(x)$$

$$\text{donde } p \in C^1[a, b], q, f \in C[a, b]$$

Sea

$$V = \{v \in C^2[a, b] : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$$

El método de Rayleigh-Ritz se utiliza en ecuaciones diferenciales originadas de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0 \quad a \leq x \leq b \quad (4.1)$$

El problema de hallar una función y que satisface (4.1) y las condiciones de frontera $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ es un problema de valor en la frontera clásico.

El método establece que este problema de valor en la frontera es equivalente a hallar un punto estacionario del funcional I , donde

$$I(u) = \int_a^b F[x, u(x), u'(x)] dx \quad u \in V \quad (4.2)$$

La solución se determina minimizando la funcional I . El método de Rayleigh-Ritz consiste en sustituir la solución exacta y por una aproximación

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

donde ϕ_1, \dots, ϕ_n forman una base de las funciones de prueba. Para que I tenga un punto estacionario es necesario que se cumpla:

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

De la ecuación (4.3) se obtiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Resolviendo este sistema se calculan los parámetros c_j .

4.1.2 El Método de los Residuos Ponderados

El funcional también satisface las condiciones de contorno naturales, $dy/dx = 0$ en un extremo, en el que las condiciones de contorno esenciales. $y = y_0$ no son aplicadas.

El método de los residuos ponderados se inicia con una ecuación diferencial genérica de la forma:

$$Lu = f \quad (4.4)$$

en el cual L es un operador diferencial cualquiera. Este método evita la búsqueda de una expresión variacional equivalente. Se admite una solución aproximada u^* y se sustituye ésta solución en la ecuación diferencial. Como esta es una solución aproximada, la operación define un error residual R en la ecuación diferencial:

$$Lu^* - f = R \quad (4.5)$$

No se puede forzar que el residuo R desaparezca directamente de la ecuación, pero se puede exigir que, para una integral ponderada sobre el dominio Ω de la solución, el residuo desaparezca. Esto quiere decir que la solución en Ω de la integral del producto de término residual y de una función de peso w debe ser igual a cero.

$$I = \int_{\Omega} R w \, d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

Al sustituir las funciones de interpolación por la solución aproximada u^* y por la función de peso w , produce un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas para n coeficientes indeterminados de la función de interpolación.

Una de las formas empleadas para volver al residuo $R = Lu - f^*$ pequeño es el de anular la integral (4.6), esto es, de anular por la media o residuo. Considere que la función de peso w es una función que prueba el residuo, de modo que ésta es también conocida como función de prueba. La clase de funciones de prueba es tal que la integral (4.6) pueda ser escrita en la forma

$$\int_{\Omega} (Lu^*)w \, d\Omega = \int_{\Omega} fw \, d\Omega \quad (4.7)$$

Generalmente, la formulación matemática original basada en la ecuación diferencial (4.4) se denomina *forma clásica o fuerte* y la formulación basada en el método de los residuos ponderados por *forma débil*. Se puede demostrar que para funciones de prueba R pertenecientes al subespacio de las funciones aproximadas u^* , las formulaciones clásica y débil son equivalentes y por lo tanto, conducen a las mismas soluciones.

Método de Galerkin y el Problema de Aproximación

El método de Galerkin consiste en buscar una solución aproximada a (3.12) en un subespacio de dimensión finita V_h del espacio H_0^1 de funciones admisibles en vez de todo el espacio H_0^1 . Así, en lugar de abordar el problema de dimensión infinita, buscamos una solución aproximada u_N en V_h de la forma:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i(x)$$

que satisfaga (3.12). Las funciones $\{\phi_1, \phi_1, \dots, \phi_N\}$ forman una base que define el subespacio V_h de dimensión N , de H_0^1 . Desde que los ϕ_i son conocidos, u_N quedará completamente determinada una vez que los N coeficientes ξ_i sean determinados. Los ξ_i son referidos como los **grados de libertad** de la aproximación.

Problema de Aproximación Simétrico

Supongamos que se satisfacen las condiciones (3.6). El *Problema de Aproximación (Ritz-Galerkin)* es el siguiente.

Dado un subespacio de dimensión finita $V_h \subset V$ y $\ell \in V'$, encuentre $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V_h. \quad (4.8)$$

Teorema 13. *Dadas las condiciones (3.6), entonces existe un único u_h que resuelve el problema (4.8)*

Prueba

$(V_h, a(\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert, y $\ell|_{V_h} \in V_h'$. Aplicar el Teorema de Representación de Riesz. \square

El error estimado para $u - u_h$ es una consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2 (Ortogonalidad Fundamental Galerkin). *Sean u y u_h soluciones a (3.7) y (4.8) respectivamente. Entonces*

$$a(u - u_h, w) = 0 \quad \text{para todo } w \in V_h.$$

Prueba

Debido a que $u \in V$ es solución de (3.7) y $u_h \in V_h$ es solución de (4.8) se verifica respectivamente

$$\begin{aligned} a(u, w) &= \ell(w) && \text{para todo } w \in V \\ a(u_h, w) &= \ell(w) && \text{para todo } w \in V_h. \end{aligned}$$

Basta restar las dos ecuaciones y hacer uso de que $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal, para completar la prueba. \square

Corolario 2 ([4]). *Sean $\|\cdot\|_E$ la norma energía (ver página 6), $u \in V$ solución de (3.7) y $u_h \in V_h$ solución de (4.8). Se cumple que*

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

Prueba

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \quad \text{para todo } v \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v) \quad \text{por Proposición 2 con } w = v - u_h \\ &< \|u - u_h\|_E \|u - v\|_E \quad \text{Desigualdad de Schwarz} \end{aligned}$$

Si $\|u - u_h\|_E \neq 0$ entonces

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v\|_E \quad \text{para todo } v \in V_h$$

Tomando ínfimo sobre $v \in V_h$

$$\|u - u_h\|_E \leq \inf\{\|u - v\|_E : v \in V_h\}$$

Por otro lado, ya que $u_h \in V_h$

$$\inf\{\|u - v\|_E : v \in V_h\} \leq \|u - u_h\|_E$$

Entonces

$$\|u - u_h\|_E = \inf\{\|u - v\|_E : v \in V_h\}$$

Además existe un elemento (u_h) para el que se alcanza el ínfimo, por lo que podemos reemplazar el ínfimo con el mínimo. Por lo tanto

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E$$

Observación 3 (El Método Ritz). *En el caso simétrico, u_h minimiza la funcional cuadrática*

$$Q(v) = a(v, v) - 2\ell(v),$$

sobre todo $v \in V_h$.

Se observa que $I(v) = \frac{1}{2}Q(v)$. Notemos además que el Corolario 2 y la Observación 3 son válidos *sólo* en el caso simétrico.

Problema de Aproximación No Necesariamente Simétrico

Supongamos que se satisfacen las condiciones (3.9). El *problema de aproximación (Galerkin)* es el siguiente:

Dado un subespacio de dimensión finita $V_h \subset V$ y $\ell \in V'$, halle $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V_h. \quad (4.9)$$

Corolario 3. *Bajo las condiciones (3.9), el problema de aproximación (4.9) tiene una solución única.*

Prueba

Ya que V_h es un subespacio(cerrado) de V , se cumple (3.9) al reemplazar V_h por V y aplicar el corolario anterior. \square

Se pueden obtener diversas formas de aproximacion de la función u . Sin embargo, las condiciones establecidas para que las formulaciones clásica y débil sean equivalentes restringen la forma y el número de aproximaciones que puedan ser utilizadas para las funciones u . El problema consiste en obtener una aproximación de una función real en el intervalo $[a, b]$ de la forma:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x). \quad (4.10)$$

Las funciones ϕ_i son conocidas y se suponen linealmente independientes. los coeficientes c_i son parámetros a determinar.

Definimos $D[y(x), x] = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) - f(x) \quad a < x < b$

La ecuación diferencial (2.16) puede ser escrita en otra forma general como

$$D[y(x), x] = 0 \quad a < x < b$$

sujeta a las condiciones de contorno homogéneas

$$y(a) = y(b) = 0$$

El método de los residuos ponderados producirá una solución de la forma

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

en la cual $u_n(x)$ es la solución aproximada y expresada como el producto de coeficientes constantes c_i a ser determinados y $\phi_i(x)$ son las funciones de prueba. Los requisitos de las funciones de prueba son que sean continuas en el dominio del problema y que satisfagan las condiciones de contorno exactamente. La selección de las funciones de prueba está definida por el tipo de problema físico descrito por el PVF.(ver [9],páginas 131-135)

El residuo R es calculado por la ecuación:

$$R(x) = D[u_n(x), x] \neq 0$$

El método de los residuos ponderados requiere que los coeficientes c_i sean evaluados de forma que

$$\int_a^b w_i R(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

en la cual las w_i representan las n funciones de peso que minimizan la integral.

Observación

La selección de la función de peso w_i define el tipo de método de residuo ponderado a ser utilizado, de acuerdo a los siguientes criterios:

- Criterio de Galerkin: Tomar $w_i(x) = \phi_i(x)$
- Criterio de mínimos cuadrados: Tomar $w_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial c_i}$
- Criterio de colocación: Tomar $w_i(x) = \delta(x - x_i)$ (función delta de Dirac)

El uso de la integración por partes con el método de Galerkin normalmente reduce los requisitos de continuidad de las funciones de aproximación. Si el funcional variacional existe, el método de Galerkin ofrecerá la misma solución algebraica.

Definición 38 (Elemento Finito). Sean:

1. $K \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto cerrado acotado con interior no vacío y frontera suave por partes (el **dominio de los elementos**).
2. \mathcal{P} un espacio de dimensión finita de funciones sobre K (el espacio de **funciones de forma**) y
3. $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ una base para \mathcal{P} (el conjunto de **variables nodales**).

Entonces $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es llamado un **elemento finito** (ver [4]).

Nota

Dada una malla que determina una división de $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

En la Definición 38 se cumple que, en particular, para $m = 1$, $K = [x_{i-1}, x_i]$, para algún $i = 1, 2, \dots, n$.



Figura 4.1: Malla o Partición.

4.2 El Método de Galerkin con Elementos Finitos

El método de Galerkin proporciona un marco general para aproximación de problemas variacionales, que incluye una forma directamente aplicable al estudio del método de elementos finitos (ver [1],[11]).

Sea V un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, y $\ell \in V'$. Consideremos el problema:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V. \quad (4.11)$$

Supongamos además que $a(\cdot, \cdot)$ es acotada y coerciva sobre V .

En general, es imposible encontrar una función de forma explícita que represente a la solución exacta del problema (4.11) puesto que el espacio V es de dimensión infinita. Por lo tanto, se plantea una forma natural de hallar una solución aproximada, es decir resolver un problema equivalente a (4.11) pero en un espacio de dimensión finita (ver [11]).

Consideremos un subespacio de dimensión finita $V_N \subseteq V$ ($\dim V_N = N$). El método de Galerkin consiste en encontrar un elemento $u_N \in V_N$ que aproxima en un cierto sentido la solución del problema (4.11). Esta aproximación va en el siguiente sentido:

El elemento u_N es la solución del problema (4.11) sobre V_N :

$$\text{Hallar } u_N \in V_N \text{ tal que } a(u_N, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V_N \quad (4.12)$$

Por definición, si $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ es una base de V_N , entonces

$$u_N = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i \quad (4.13)$$

donde $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

Bajo las suposiciones de que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es acotada y coerciva sobre V y $\ell \in V'$ podemos aplicar nuevamente el Teorema de Lax-Milgram (ver página 28) y concluir que el problema (4.12) tiene una solución única u_N (ver [1]).

Al reemplazar (4.13) en (4.12) se obtiene

$$a\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i, v\right) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in V_N$$

Así el problema (4.12) se reduce a hallar el conjunto $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\sum_{i=1}^N \xi_i a(\phi_i, \phi_j) = \ell(\phi_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

Como resultado de utilizar el método de Galerkin, la ecuación variacional (4.11) es equivalente al sistema lineal de ecuaciones algebraicas (4.14), que podemos escribirlo en forma compacta como

$$A\xi = b \quad (4.15)$$

donde, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \in \mathbb{R}^N$ es el vector de incógnitas; $A = (a(\phi_i, \phi_j)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es llamada la *matriz de Rigidez*¹ y $b = \ell(\phi_j) \in \mathbb{R}^N$ es llamado el *vector de cargas*.²

En su forma matricial, la representación (4.15) viene dada por

$$A = \begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & \dots & a(\phi_1, \phi_N) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\phi_N, \phi_1) & \dots & a(\phi_N, \phi_N) \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}$$

¹A es llamada *matriz de Rigidez* debido a que sus coeficientes representan la rigidez de la estructura asociada a un desplazamiento generalizado unitario. Ver [2]

²b es llamado *vector de cargas*, ya que en el cálculo de estructuras, sus componentes representan las fuerzas externas que actúan sobre la estructura.

$$b = \begin{bmatrix} \ell(\phi_1) \\ \vdots \\ \ell(\phi_N) \end{bmatrix}$$

Luego, al resolver este sistema lineal se encuentra la solución aproximada al problema (3.1).

La solución aproximada u_N es, en general, diferente de la solución exacta u . Para mejorar la precisión, es natural buscar la solución aproximada u_N en un subespacio V_N cada vez mayor, lo que equivale a hacer un refinamiento sobre Ω . Así, para una sucesión de subespacios $V_{N_1} \subseteq V_{N_2} \subseteq \dots \subseteq V$, obtenemos una sucesión correspondiente de soluciones aproximadas $u_{N_i} \in V_{N_i}, i = 1, 2, \dots$ (ver [1],[11]).

4.2.1 Estimación del Error

Teorema 14 (Desigualdad de Céa). *Supongamos que V es un espacio de Hilbert, $\emptyset \neq V_h \subseteq V$ es un subespacio (cerrado), $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal acotada, coerciva sobre V y $\ell \in V'$. Sea $u \in V$ la solución del problema (3.10) y $u_h \in V_h$ la aproximación de Galerkin definida en (4.9). Entonces se cumple que*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \quad (4.16)$$

donde C es la constante de continuidad y α es la constante de coercitividad de $a(\cdot, \cdot)$ sobre V .

Prueba

Restando (4.9) de (3.10) con $v \in V_h$, encontramos una relación de error

$$a(u, v) - a(u_h, v) = a(u - u_h, v) = 0 \quad \text{para todo } v \in V_h \quad (4.17)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \quad \text{para todo } v \in V_h \end{aligned}$$

Aquí hemos usado (4.17) (lo cual no supone que $a(\cdot, \cdot)$ sea simétrica) y el hecho que $v - u_h \in V_h$ para todo $v \in V_h$.

Usando las hipótesis de que $a(\cdot, \cdot)$ es acotada y coerciva sobre V y la relación de error, tenemos para cualquier $v \in V_h$

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) && \text{por coercitividad} \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq C \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V && \text{por continuidad} \\ \|u - u_h\|_V &\leq \frac{C}{\alpha} \|u - v\|_V \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \\ &= \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V && \text{pues } V_h \text{ es cerrado} \quad \square \end{aligned}$$

La desigualdad de Céa establece que para estimar el error de la solución Galerkin, es suficiente estimar el error de aproximación $\min_{v \in V_h} \|u - v\|_V$ (ver [1],[4]).

Comentario

1. El teorema de Céa muestra que u_h es casi-óptimo en el sentido que el error $\|u - u_h\|_V$ es proporcional a lo mejor que se pueda utilizar el subespacio V_h .
2. En el caso simétrico teníamos que, según Corolario 2.

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E$$

Se cumple que

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) && \text{coercitividad de } a(\cdot, \cdot) \\ &= \|u - u_h\|_E^2 && \text{definición de norma energía} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|u - u_h\|_E \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E && \text{Por Corolario 2} \quad (4.18) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|u - v\|_E &= \sqrt{a(u - v, u - v)} && \text{definición de norma energía} \\ &\leq \sqrt{C\|u - v\|_V\|u - v\|_V} && \text{continuidad de } a(\cdot, \cdot) \\ &\leq \sqrt{C}\|u - v\|_V \end{aligned} \quad (4.19)$$

Reemplazando (4.19) en (4.18)

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \sqrt{\frac{C}{\alpha}} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \\ &\leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V, \end{aligned}$$

que es el resultado del Teorema de Céa.

Como una simple consecuencia, tenemos el siguiente resultado de convergencia:

Corolario 4. Sean V un espacio de Hilbert, $\emptyset \neq V_h \subseteq V$ un subespacio(cerrado), $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal acotada, coerciva sobre V y $\ell \in V'$. Sea $u \in V$ la solución del problema (3.10) y $u_h \in V_h$ la aproximación de Galerkin definida en (4.9). Supongamos que $V_{N_1} \subset V_{N_2} \subset \dots$ es una sucesión de subespacios de V con la propiedad

$$\overline{\bigcup_{i \geq 1} V_{N_i}} = V \quad (4.20)$$

Entonces el método de Galerkin converge:

$$\|u - u_N\|_V \rightarrow 0 \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty \quad (4.21)$$

Prueba

Por la hipótesis de densidad (4.20) podemos obtener una sucesión $v_i \in V_{N_i}$, $i \geq 1$ tal que:

$$\|u - v_i\|_V \rightarrow 0 \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty$$

Aplicando la desigualdad de Céa (4.16), tenemos

$$\|u - u_N\|_V \leq c\|u - v_i\|_V$$

Luego $\|u - u_N\|_V \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. □

Estudiemos ahora el caso especial cuando la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es además simétrica

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \text{para todo } u, v \in V$$

4.3 El método de Rayleigh-Ritz con Elementos Finitos

Un problema lineal de valor de frontera de dos puntos que es importante en el análisis de las fuerzas aplicadas a vigas está dado por la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (4.22)$$

con condiciones de frontera

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (4.23)$$

Esta ecuación diferencial describe la deflexión $y(x)$ de una viga de longitud uno con sección transversal variable representada por $q(x)$. La causa de la deflexión son las cargas extras $p(x)$ y $f(x)$.

En la discusión que sigue, supondremos que $p \in C^1[0, 1]$ y $q, f \in C[0, 1]$. Además, se requerirá que exista una constante $\delta > 0$ tal que

$$p(x) \geq \delta > 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

y que

$$q(x) \geq 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

Estas suposiciones son suficientes para garantizar que el problema de valor de frontera (4.22) y (4.23) tiene una solución única (ver [5]).

Como el caso de muchos problemas de valor de frontera que describen fenómenos físicos, la solución a la ecuación de la viga satisface una **propiedad variacional**. El principio variacional para la ecuación de la viga es fundamental en el desarrollo del método de Rayleigh-Ritz y caracteriza a la solución de la ecuación de la viga como la función que minimiza cierta integral sobre todas las funciones en $C^2[0, 1]$, el conjunto de aquellas funciones u en $C^2[0, 1]$ con la propiedad de que $u(0) = u(1) = 0$. El siguiente teorema da la caracterización.

Teorema 15 (Existencia y Unicidad de Solución). Sean $p \in C^1[0, 1]$ y $q, f \in C[0, 1]$, y

$$p(x) \geq \delta > 0, \quad q(x) \geq 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (4.24)$$

La función $y \in C_0^2[0, 1]$ es la única solución de la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (4.25)$$

si y sólo si y es la única función en $C_0^2[0, 1]$ que minimiza la integral

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\} dx \quad (4.26)$$

En el procedimiento de Rayleigh-Ritz, la integral I se minimiza, no sobre todas las funciones en $C_0^2[0, 1]$, sino sobre un conjunto más pequeño de funciones que consisten de combinaciones lineales de cierta base de funciones $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$. Las funciones de la base $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ deben ser linealmente independientes y satisfacer

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0 \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n$$

Una aproximación $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ a la solución $y(x)$ de la ecuación (4.25) se obtiene entonces encontrando constantes c_1, c_2, \dots, c_n que minimicen $I[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i]$.

De la ecuación (4.26),

$$\begin{aligned} I[u] &= I \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right] \\ &= \int_0^1 \left\{ p(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i'(x) \right]^2 + q(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right]^2 - 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right\} dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

y para que ocurra un mínimo es necesario, al considerar I como función de c_1, c_2, \dots, c_n , tener

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad \text{para cada } j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.28)$$

Diferenciando (4.27) se obtiene

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{ 2p(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i'(x) \phi_j'(x) + 2q(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \phi_j(x) - 2f(x) \phi_j(x) \right\} dx$$

y sustituyendo en la ecuación (4.28) se obtiene

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \{p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\} dx \right] c_i - \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx$$

para cada $j = 1, 2, \dots, n$. (4.29)

Las ecuaciones descritas en (4.29) pueden considerarse como un sistema lineal de $n \times n$. $Ac = b$ en las variables c_1, c_2, \dots, c_n , donde la matriz $A = [a_{ij}]$ está dada por

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx$$

Evidentemente, A es simétrica y b se define por

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

4.3.1 Aproximación mediante Polinomios Lineales Segmentarios

El primer tipo de funciones base que discutiremos involucra polinomios lineales segmentarios. El primer paso consiste en formar una partición (ver Figura 1.1) de $[0, 1]$ escogiendo puntos x_0, x_1, \dots, x_{n+1} con

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$$

tomando $h_i = x_{i+1} - x_i$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$, definimos las funciones base $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ mediante

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{(x - x_{i-1})}{h_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} & \text{si } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x_{i+1} < x \leq 1. \end{cases} \quad (4.30)$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Como las funciones ϕ_i son lineales por tramos, las derivadas ϕ'_i , aunque no son continuas, son constantes en el subintervalo abierto (x_j, x_{j+1}) para

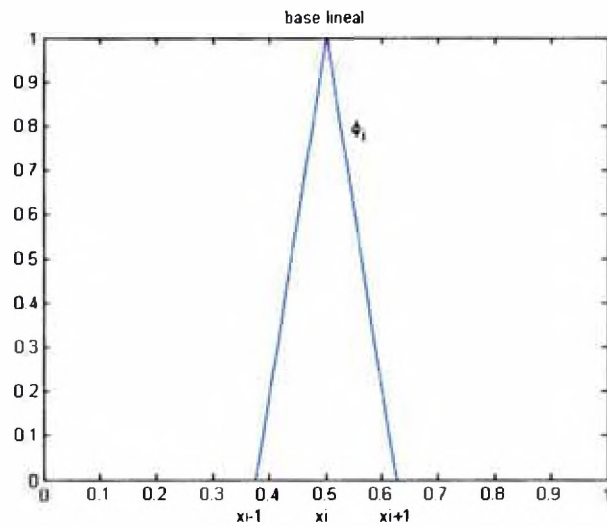


Figura 4.2: Base lineal segmentaria.

cada $j = 0, 1, \dots, n$. Por lo tanto, tenemos que

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < x_{i-1} \\ \frac{1}{h_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} < x < x_i \\ -\frac{1}{h_i} & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x_{i+1} < x < 1 \end{cases}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

En la Figura (4.3) se exhibe el conjunto de funciones de la base lineal $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$, para $n = 9$ (ver [11]).

Debido a que ϕ_i y ϕ'_i son diferentes de cero solamente en (x_{i-1}, x_{i+1}) ,

$$\phi_i(x)\phi_j(x) \equiv 0 \quad \text{y} \quad \phi'_i(x)\phi'_j(x) \equiv 0$$

excepto cuando j es $i - 1$, i , o $i + 1$. Como consecuencia, el sistema lineal (4.29) se reduce a un sistema lineal tridiagonal $\in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las componentes

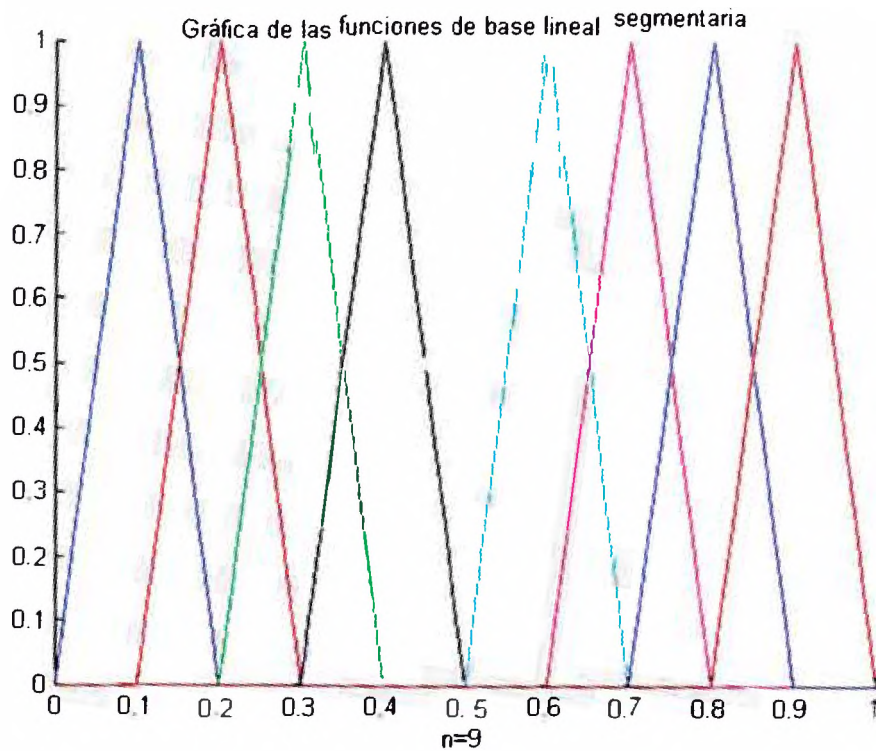


Figura 4.3: Funciones de la base lineal.

distintas de cero de A están dadas por

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \int_0^1 \left\{ p(x) [\phi'_i(x)]^2 + q(x) [\phi_i(x)]^2 \right\} dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 p(x) dx \\
 &\quad + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 (x - x_{i-1})^2 q(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx
 \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
 a_{i,i+1} &= \int_0^1 \left\{ p(x) \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) \right\} dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} - \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 (x_{i+1} - x)(x - x_i) q(x) dx
 \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$; y

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \{p(x)\phi'_i(x)\phi'_{i-1}(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\} dx \\ = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 p(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 (x_i - x)(x - x_{i-1})q(x)dx$$

para cada $i = 2, \dots, n$. Las componentes en \mathbf{b} están dadas por

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \\ = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1})f(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x)f(x)dx$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Hay seis tipos de integrales a evaluar:

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)dx, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n-1,$$

$$Q_{2,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x)dx, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n,$$

$$Q_{3,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x)dx, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n,$$

$$Q_{4,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n+1,$$

$$Q_{5,i} = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x)dx, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n,$$

$$Q_{6,i} = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x)dx, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n.$$

La matriz A y el vector \mathbf{b} del sistema lineal $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ contienen los elementos

$$a_{i,i} = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i}, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n,$$

$$a_{i,i+1} = -Q_{4,i+1} + Q_{1,i}, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n-1$$

$$a_{i,i-1} = -Q_{4,i} + Q_{1,i-1}, \quad \text{para cada } i = 2, \dots, n$$

y

$$b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i}, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n$$

Los elementos de \mathbf{c} son los coeficientes desconocidos c_1, c_2, \dots, c_n de los cuales se construye la aproximación de Rayleigh-Ritz u , dada por

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

Una dificultad de éste método es la necesidad de evaluar las $6n$ integrales. Pueden evaluarse directamente o mediante una fórmula de cuadratura, como el método de Simpson. Un método alternativo para la evaluación de la integral consiste en aproximar las funciones p, q y f con su polinomio interpolante lineal seccionado, e integrar luego la aproximación. Supongamos, por ejemplo, la integral $Q_{1,i}$. La interpolación lineal segmentaria de q es

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{n+1} q(x_i) \phi_i(x),$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ se definen en (4.30) y

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1} & \text{si } 0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{1 - x_n} & \text{si } x_n \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Dado que el intervalo de integración es $[x_i, x_{i+1}]$, $P_q(x)$ se reduce a

$$P_q(x) = q(x_i) \phi_i(x) + q(x_{i+1}) \phi_{i+1}(x).$$

Este es un polinomio interpolante de primer grado. De acuerdo con el Teorema 3,

$$|q(x) - P_q(x)| = \mathcal{O}(h_i^2), \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

si $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$. Para toda $i = 1, \dots, n-1$, la aproximación a $Q_{1,i}$ se obtiene al integrar la aproximación al integrando

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i) q(x) dx$$

$$\begin{aligned} &\approx \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i) \left[\frac{q(x_i)(x_{i+1} - x)}{h_i} + \frac{q(x_{i+1})(x - x_i)}{h_i} \right] dx \\ &= \frac{h_i}{12} [q(x_i) + q(x_{i+1})] \end{aligned}$$

más aún, si $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\left| Q_{1,i} - \frac{h_i}{12} [q(x_i) + q(x_{i+1})] \right| = \mathcal{O}(h_i^3)$$

Las aproximaciones a las otras integrales se derivan de manera parecida y están dadas por

$$Q_{2,i} \approx \frac{h_{i-1}}{12} [3q(x_i) + q(x_{i-1})],$$

$$Q_{3,i} \approx \frac{h_i}{12} [3q(x_i) + q(x_{i+1})],$$

$$Q_{4,i} \approx \frac{h_{i-1}}{2} [p(x_i) + p(x_{i-1})],$$

$$Q_{5,i} \approx \frac{h_{i-1}}{6} [2f(x_i) + f(x_{i-1})],$$

y

$$Q_{6,i} \approx \frac{h_i}{6} [2f(x_i) + f(x_{i+1})].$$

La utilización de las funciones lineales seccionadas básicas produce una solución aproximada a las ecuaciones 4.22 y 4.23, que es continua pero no diferenciable en $[0, 1]$. Se requiere un conjunto más complicado de funciones básicas para construir una aproximación que pertenezca a $C_0^2[0, 1]$. Dichas funciones se parecen a los trazadores cúbicos interpolantes.

4.3.2 Aproximación mediante B-splines

Recordemos que el trazador cúbico *interpolante* S en los cinco nodos x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 para una función f está definido por:

- a. S es un polinomio cúbico, denotado por S_j , en $[x_j, x_{j+1}]$ para toda $j = 0, 1, 2, 3$. (*Esto nos da 16 constantes para S , de los cuales 4 corresponden a los coeficientes de cada polinomio cúbico.*)
- b. $S(x_j) = f(x_j)$, para $j = 0, 1, 2, 3, 4$ (5 condiciones especificadas).
- c. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para $j = 0, 1, 2$ (3 condiciones especificadas).
- d. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, para $j = 0, 1, 2$ (3 condiciones especificadas).

e. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, para $j = 0, 1, 2$ (3 condiciones especificadas).

f. Se satisface una de las siguientes condiciones de frontera:

(i) Libre: $S''(x_0) = S''(x_4) = 0$ (2 condiciones especificadas).

(ii) Sujeto: $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_4) = f'(x_4)$ (2 condiciones especificadas).

La unicidad de la solución requiere que el número de constantes en (a), 16, sea igual al de condiciones en (b) a (f), por lo cual solamente una de las condiciones de frontera en (f) puede especificarse para los trazadores cúbicos interpolantes.

Las funciones de trazadores cúbicos que utilizaremos en nuestras funciones básicas reciben el nombre de **trazadores B** o *trazadores en forma de campana*. Estos difieren de los trazadores interpolantes en que se satisfacen ambos conjuntos de las condiciones de frontera en (f). Para ello hay que flexibilizar dos de las condiciones de (b) a (e). Puesto que el trazador debe tener dos derivadas continuas en $[x_0, x_4]$, en la descripción de los trazadores interpolantes eliminamos dos de las condiciones de interpolación. En particular, modificamos la condición (b) y la transformamos en

$$\text{b. } S(x_j) = f(x_j) \quad \text{para } j = 0, 2, 4.$$

El trazador *B* básico, S , que se define a continuación y que aparece en la Fig. 4.4, usa los nodos uniformemente espaciados $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$. Satisface las condiciones de interpolación

$$\text{b. } S(x_0) = 0, \quad S(x_2) = 1, \quad S(x_4) = 0;$$

y también ambos conjuntos de condiciones

$$(i) S''(x_0) = S''(x_4) = 0 \quad \text{y} \quad (ii) S'(x_0) = S'(x_4) = 0$$

En consecuencia, $S \in C_0^2(-\infty, \infty)$, y

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{4}(2+x)^3, & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{4}[(2+x)^3 - 4(1+x)^3], & \text{si } -1 < x \leq 0. \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & \text{si } 0 < x \leq 1. \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & \text{si } 1 < x \leq 2. \\ 0, & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

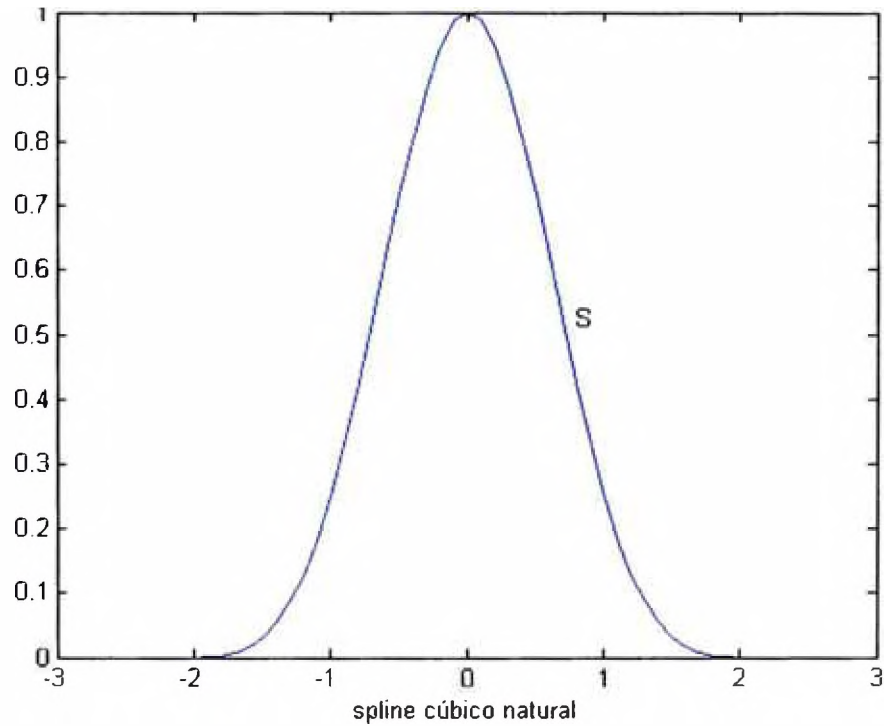


Figura 4.4: spline cúbico natural.

Para construir las funciones básicas ϕ_i en $C_0^2[0, 1]$ primero dividimos $[0, 1]$ seleccionando un entero positivo n y definiendo $h = 1/(n+1)$. Así obtenemos los nodos uniformemente espaciados $x_i = ih$, para toda $i = 0, 1, \dots, n+1$. Después definimos las funciones básicas $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ como

$$\phi_i(x) = \begin{cases} S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), & \text{si } i = 0, \\ S\left(\frac{x-h}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right), & \text{si } i = 1, \\ S\left(\frac{x-ih}{h}\right), & \text{si } 2 \leq i \leq n-1, \\ S\left(\frac{x-nh}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & \text{si } i = n, \\ S\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & \text{si } i = n+1. \end{cases}$$

$\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ es un conjunto de trazadores cúbicos linealmente independiente que satisfacen $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ para toda $i = 0, 1, \dots, n, n+1$. Las gráficas de ϕ_i , para $2 \leq i \leq n-1$ son similares a la Figura (4.4) y las gráficas de ϕ_0, ϕ_1, ϕ_n y ϕ_{n+1} se pueden ver en la Figura (4.5)

Con el spline cúbico natural definido anteriormente, para $n = 9$ se

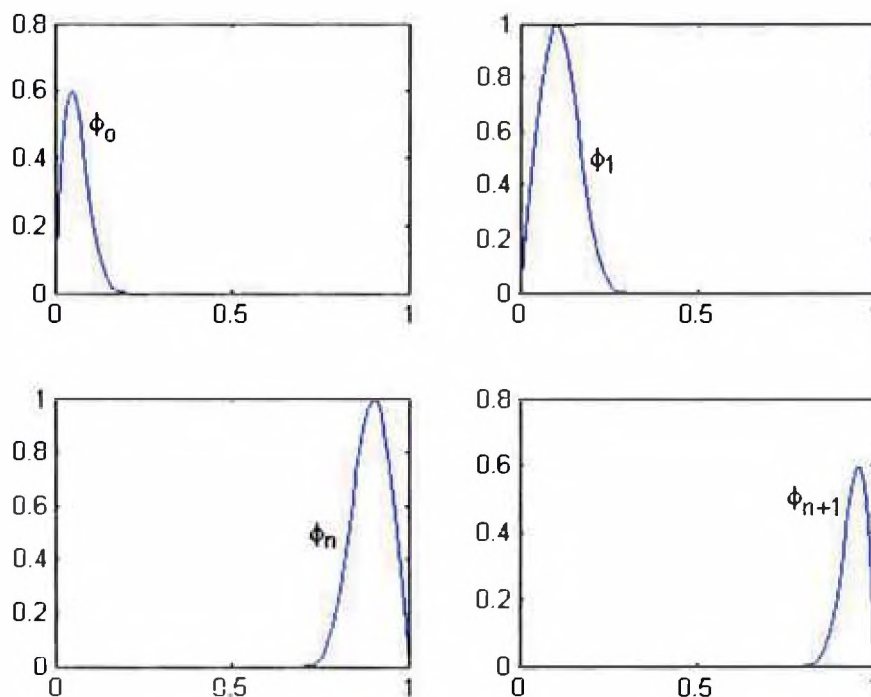


Figura 4.5: gráficas para $\phi_0, \phi_1, \phi_n, \phi_{n+1}$

obtiene un conjunto de funciones $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ que se pueden apreciar en la Figura (4.6).

Puesto que $\phi_i(x)$ y $\phi_i'(x)$ son distintas de cero sólo para $x \in [x_{i-2}, x_{i+2}]$, la matriz de la aproximación de Rayleigh-Ritz es una matriz banda con un ancho máximo de banda de siete (ver [11]):

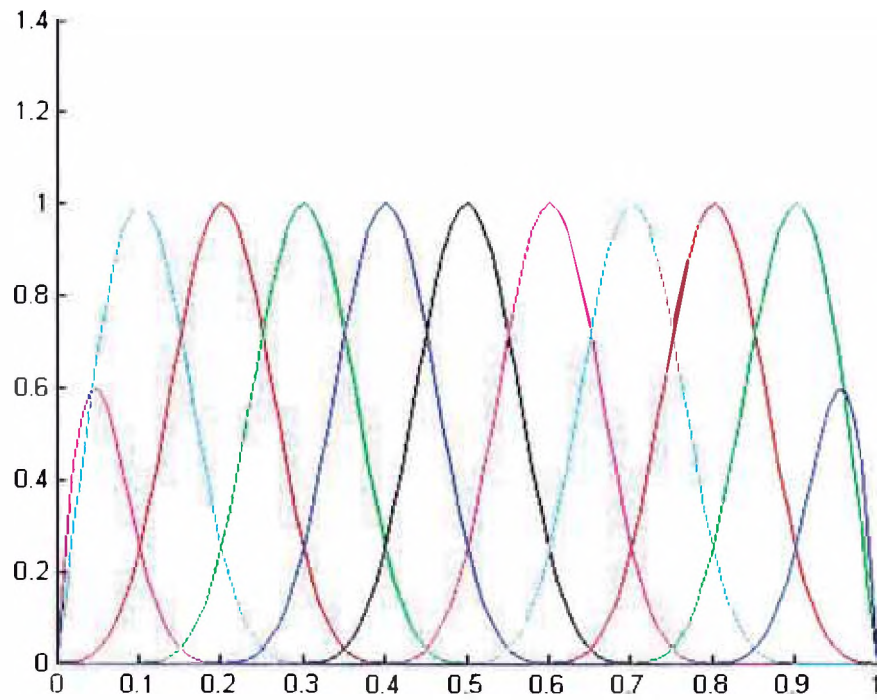


Figura 4.6: Funciones base spline para $n=9$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ddots & & & \vdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \ddots & & \vdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n+1} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n,n+1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n+1,n-2} & a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

donde

$$a_{ij} = \int_0^1 \{ p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x) \} dx.$$

para toda $i, j = 0, 1, \dots, n+1$. El vector \mathbf{b} tiene los términos

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

La matriz A es definida positiva y por tanto, podemos resolver el sistema lineal $Ac = \mathbf{b}$ mediante el Algoritmo 4 de Cholesky o mediante el método de la eliminación gaussiana.

Los B-trazadores también pueden definirse para nodos espaciados de manera desigual, pero los detalles son más complicados. Otra base que se usa comúnmente la constituyen los polinomios cúbicos seccionados de Hermite.

Otra técnica muy común con que se resuelven los problemas con valor en frontera es el **método de colocación**(ver [5],[7]). Este procedimiento comienza por seleccionar un conjunto de funciones básicas $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$, un conjunto de números $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en $[0, 1]$, y se requiere que una aproximación

$$\sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x)$$

satisfaga la ecuación diferencial en los números x_j , para $1 \leq j \leq n$. Y si además se requiere que $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ para $1 \leq i \leq N$, las condiciones de frontera quedan satisfechas automáticamente. Una elección que se presenta de manera frecuente consiste en utilizar ϕ_i como las funciones base para las funciones de trazadores relacionadas con la partición de $[0, 1]$ y tomar los nodos $\{x_j\}$ como los puntos gaussianos o las raíces de algunos polinomios ortogonales, transformados en los subintervalos apropiados. Se puede concluir que los métodos de colocación que usan trazadores de grado superior son competitivos con los de diferencias finitas que emplean la extrapolación.

Extensión de las Condiciones de Frontera

Proposición 3. Sea $x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y consideremos el problema de valor de frontera con condiciones de contorno no homogéneas

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = g(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (4.31)$$

Entonces (4.31) puede transformarse en el siguiente problema

$$-\frac{d}{dx}(p(x)Z') + q(x)Z = f(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad Z(0) = 0, \quad Z(1) = 0 \quad (4.32)$$

Prueba

En efecto, si realizamos el cambio de variable

$$Z(x) = y(x) - \beta x - (1-x)\alpha$$

al evaluar para

$$x = 0 \implies Z(0) = y(0) - \alpha = 0$$

$$x = 1 \implies Z(1) = y(1) - \beta = 0$$

Por otro lado, al derivar y se tiene

$$y'(x) = Z'(x) + \beta - \alpha$$

Si reemplazamos estas expresiones en (4.31)

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x)(Z' + \beta - \alpha) \right] + q(x)[Z + \beta x + (1-x)\alpha] = g(x)$$

$$-\frac{d}{dx} (p(x)Z') + q(x)Z = [(x-1)\alpha - \beta x]q(x) + g(x) + (\beta - \alpha)p'(x)$$

aquí basta tomar $f(x) = [(x-1)\alpha - \beta x]q(x) + g(x) + (\beta - \alpha)p'(x)$ para concluir (4.32)(ver [5]). \square

Proposición 4. Sea $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ y consideremos el problema de valor de frontera con condiciones de contorno no homogéneas

$$-\frac{d}{dx} (p(x)y') + q(x)y = g(x) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (4.33)$$

Entonces (4.33) puede transformarse en el siguiente problema

$$-\frac{d}{dx} (p(x)Z') + q(x)Z = f(x) \quad a \leq x \leq b, \quad Z(a) = 0, \quad Z(b) = 0 \quad (4.34)$$

Prueba

En efecto, si realizamos el cambio de variable $Z(x) = y(x) - u(x)$ con

$$u(x) = \alpha \frac{b-x}{b-a} + \beta \frac{a-x}{a-b}, \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

al evaluar para

$$x = a \implies Z(a) = y(a) - u(a) = 0$$

$$x = b \implies Z(b) = y(b) - u(b) = 0$$

Por otro lado, al derivar y se tiene

$$y'(x) = Z'(x) + u'(x) = Z'(x) + \frac{\beta}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}$$

Si reemplazamos estas expresiones en (4.33)

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \left(Z' + \frac{\beta - \alpha}{b-a} \right) \right\} + q(x) \left\{ Z + \alpha \frac{b-x}{b-a} + \beta \frac{a-x}{a-b} \right\} &= g(x) \\ -\frac{d}{dx} (p(x)Z') + q(x)Z &= \left\{ \beta \frac{a-x}{b-a} - \alpha \frac{b-x}{b-a} \right\} q(x) + g(x) + \frac{\beta - \alpha}{b-a} p'(x) \end{aligned}$$

aquí basta tomar $f(x) = \left\{ \beta \frac{a-x}{b-a} - \alpha \frac{b-x}{b-a} \right\} q(x) + g(x) + \frac{\beta - \alpha}{b-a} p'(x)$ para concluir (4.34)(ver [5]). \square

4.3.3 Aplicación del Método de Galerkin a la Ecuación del Calor en una dimensión

Consideremos el siguiente problema de transferencia de calor unidimensional estacionario con una fuente distribuida gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi + 1 &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(1) &= 1 \end{aligned}$$

Solución analítica

La solución homogénea es:

$$\phi_h(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$$

La solución particular es:

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= \alpha \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= 0 \\ 0 + \alpha + 1 &= 0 \rightarrow \alpha = -1 \end{aligned}$$

La solución general es entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= \phi_h(x) + \phi_p(x) \\ y(x) &= A \cos(x) + B \sin(x) - 1 \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones de frontera para encontrar las constantes A y B

$$y(0) = 0 \Rightarrow A \cos(0) + B \operatorname{sen}(0) - 1 = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow A \cos(1) + B \operatorname{sen}(1) - 1 = 1 \Rightarrow B = 1.734697595$$

La solución entonces es:

$$y(x) = \cos(x) + 1.734697595 \operatorname{sen}(x) - 1$$

Solución aproximada por Galerkin

La aproximación $\hat{\phi}$, estará formada por la función ψ a la que le exigiremos que cumpla las condiciones de contorno y una familia de funciones de prueba $N_m = 0$ en el borde. Se propone:

$$\hat{\phi} = \psi + a_1 N_1 + a_2 N_2$$

$$\psi = x$$

$$N_1 = x(1-x)$$

$$N_2 = x^2(1-x)$$

Entonces:

$$\psi = x \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \mathcal{L}(\psi) = 0 + x$$

$$N_1 = x(1-x) \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 1 - 2x \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} = -2 \quad \mathcal{L}(N_1) = -2 + x(1-x)$$

$$N_2 = x^2(1-x) \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = 2x - 3x^2 \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} = 2 - 6x \quad \mathcal{L}(N_2) = 2 - 6x + x^2(1-x)$$

En Galerkin se cumple que $W_i = N_i$

$$K_{11} = \int_0^1 N_1 \mathcal{L}(N_1) dx = -\frac{3}{10}$$

$$K_{12} = \int_0^1 N_1 \mathcal{L}(N_2) dx = -\frac{3}{20}$$

$$f_1 = \int_0^1 N_1 \mathcal{L}(\psi) dx + \int_0^1 N_1 p dx = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \int_0^1 N_2 \mathcal{L}(N_1) dx = -\frac{3}{20}$$

$$K_{22} = \int_0^1 N_2 \mathcal{L}(N_2) dx = -\frac{13}{105}$$

$$f_2 = \int_0^1 N_2 \mathcal{L}(\psi) dx + \int_0^1 N_2 p dx = \frac{2}{15}$$

Al reemplazar se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{3}{20} & -\frac{3}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

cuya solución es

$$a_1 = \frac{92}{123} \quad a_2 = \frac{7}{41}$$

La solución aproximada es entonces

$$\hat{\phi} = x + \frac{92}{123}x(1-x) + \frac{7}{41}x^2(1-x)$$

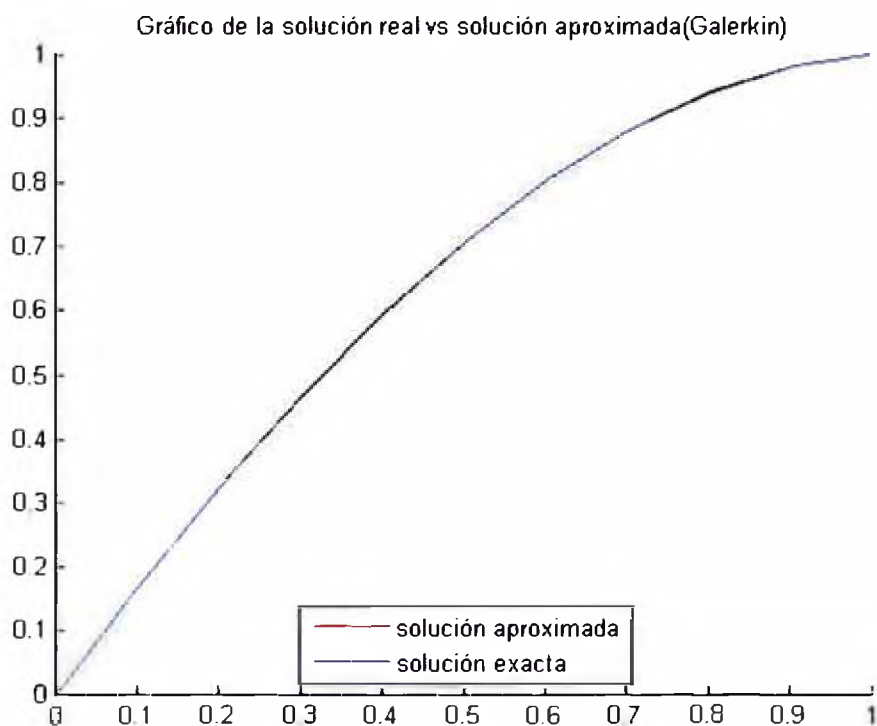


Figura 4.7: Solución analítica y aproximada.

En la Tabla 4.1 se incluye el error de la aproximación en x_i para toda $i = 1, 2, \dots, 10$.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$ \phi(x_i) - y(x_i) $
1	0.10	0.1688536585	0.1681849530	$0.6687055007 \times 10^{-3}$
2	0.20	0.3251382114	0.3246977882	$0.4404232104 \times 10^{-3}$
3	0.30	0.4678292683	0.4679746809	$0.1454126023 \times 10^{-3}$
4	0.40	0.5959024390	0.5965840559	$0.6816168302 \times 10^{-3}$
5	0.50	0.7083333333	0.7092408907	$0.9075573553 \times 10^{-3}$
6	0.60	0.8040975609	0.8048195555	$0.7219945673 \times 10^{-3}$
7	0.70	0.8821707317	0.8823650600	$0.1943282849 \times 10^{-3}$
8	0.80	0.9415284553	0.9411025950	$0.4258602954 \times 10^{-3}$
9	0.90	0.9811463415	0.9804452745	$0.7010669632 \times 10^{-3}$
10	1.00	1.0000000000	0.9999999994	$0.0000005233 \times 10^{-3}$

Tabla 4.1: Estimación del Error en x_i .

Capítulo 5

Implementación y Resultados Numéricos

5.1 Algoritmo 1: Base Lineal y Malla Uniforme

Dado el problema con valor en frontera

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

se busca aproximar la solución a través de

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \{ p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x) \} dx \right] c_i - \int_0^1 f(x)\phi_j(x) dx$$

utilizando la función lineal segmentaria

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

en una malla uniforme

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\} = \{x_i : i = 0, 1, \dots, n+1\}$$

Algoritmo 1. Método lineal segmentario de Rayleigh-Ritz

ENTRADA entero $n \geq 1$; malla uniforme $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$.

SALIDA coeficientes c_1, \dots, c_n .

Paso 1 Tome $h = (x_{n+1} - x_0)/(n + 1)$,

Paso 2 Para $i = 1, \dots, n$, defina la base lineal seccionada ϕ_i por

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{(x - x_{i-1})}{h} & \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{h} & \text{si } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x_{i+1} < x \leq 1 \end{cases}$$

Paso 3 Para $i = 1, \dots, n - 1$, calcule $Q_{1,i}, Q_{2,i}, Q_{3,i}, Q_{4,i}, Q_{5,i}, Q_{6,i}$;
Calcule $Q_{2,n}, Q_{3,n}, Q_{4,n}, Q_{5,n}, Q_{6,n}$

Paso 4 Para cada $i = 1, \dots, n - 1$, tome $\alpha_i = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i}$;
 $\beta_i = Q_{1,i} - Q_{4,i+1}$;
 $b_i = Q_{5,i} - Q_{6,i}$.

Paso 5 Tome $\alpha_n = Q_{4,n} + Q_{4,n+1} + Q_{2,n} + Q_{3,n}$;
 $b_n = Q_{5,n} - Q_{6,n}$.

Paso 6 Tome $a_1 = \alpha_1$;
 $\zeta_1 = \beta_1/\alpha_1$;
 $z_1 = b_1/a_1$.

Paso 7 Para $i = 2, \dots, n - 1$, tome $a_i = \alpha_i - \beta_{i-1}/\zeta_{i-1}$;
 $\zeta_i = \beta_i/\alpha_i$;
 $z_i = (b_i - \beta_{i-1}z_{i-1})/a_i$.

Paso 8 Tome $a_n = \alpha_n - \beta_{n-1}\zeta_{n-1}$;
 $z_n = (b_n - \beta_{n-1}z_{n-1})/a_n$.

Paso 9 Tome $C_n = z_n$;
SALIDA (c_n).

Paso 10 Para $i = n - 1, \dots, 1$, tome $c_i = z_i - \zeta_i c_{i+1}$;
SALIDA (c_i).

Paso 11 PARAR. (Procedimiento terminado.)

En el Algoritmo 1 se establece el sistema lineal tridiagonal, y se incorpora el Algoritmo 5 de factorización de Crout para resolver el sistema.

Las integrales $Q_{1,i}, \dots, Q_{6,i}$ pueden calcularse mediante el método de Simpson(ver [5]).

EJEMPLO 1

Considere el problema de valor de frontera

$$-\frac{d}{dx}(e^{-x}y') + e^{-x}y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

Aproximaremos la solución a través de la integral

$$I[\phi] = \int_0^1 \{p(x)[\phi'(x)]^2 + q(x)[\phi(x)]^2 - 2f(x)\phi(x)\} dx$$

Sea $h = 0.05$, tal que $x_i = 0.05i$ para cada $i = 0, 1, \dots, 19$

Tenemos que $p(x) = e^{-x}$, $q(x) = e^{-x}$, $f(x) = x - e^{1-x}(x+1) - 1$

Las integrales son

$$Q_{1,i} = 400 \int_{0.05i}^{0.05i+0.05} (0.05i + 0.05 - x)(x - 0.05i) e^{-x} dx$$

$$Q_{2,i} = 400 \int_{0.05i-0.05}^{0.05i} (x - 0.05i + 0.05)^2 e^{-x} dx$$

$$Q_{3,i} = 400 \int_{0.05i}^{0.05i+0.05} (0.05i + 0.05 - x)^2 e^{-x} dx$$

$$Q_{4,i} = 400 \int_{0.05i-0.05}^{0.05i} e^{-x} dx$$

$$Q_{5,i} = 20 \int_{0.05i-0.05}^{0.05i} (x - 0.05i + 0.05)\{x - e^{1-x}(x+1) - 1\} dx$$

$$Q_{6,i} = 20 \int_{0.05i}^{0.05i+0.05} (0.05i + 0.05 - x)\{x - e^{1-x}(x+1) - 1\} dx$$

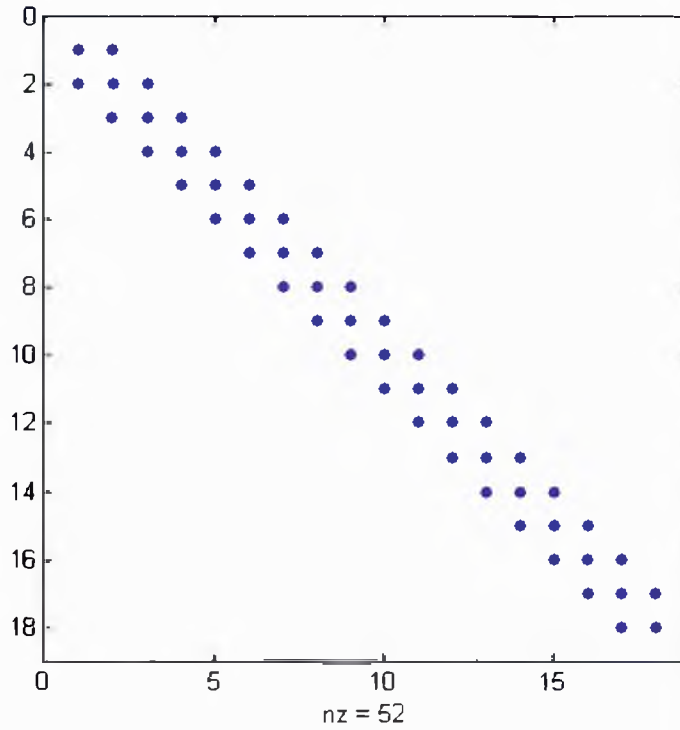


Figura 5.1: Densidad de la matriz A para la base lineal.

El siguiente gráfico muestra la densidad de los coeficientes de la matriz A .
En el sistema lineal $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -0.183224, & b_2 &= -0.180255, & b_3 &= -0.177009, \\
 b_4 &= -0.173514, & b_5 &= -0.169795, & b_6 &= -0.165879, \\
 b_7 &= -0.161785, & b_8 &= -0.157537, & b_9 &= -0.153151, \\
 b_{10} &= -0.148646, & b_{11} &= -0.144037, & b_{12} &= -0.13934, \\
 b_{13} &= -0.134568, & b_{14} &= -0.129734, & b_{15} &= -0.124849, \\
 b_{16} &= -0.119924, & b_{17} &= -0.114968, & b_{18} &= -0.10999, \\
 b_{19} &= -0.104998.
 \end{aligned}$$

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$ \phi(x_i) - y(x_i) $
1	0.05	-0.0833579869	-0.0833505366	$0.7450307184 \times 10^{-5}$
2	0.10	-0.1613258030	-0.1613110910	$1.4711912133 \times 10^{-5}$
3	0.15	-0.2334888719	-0.2334671379	$2.1734002968 \times 10^{-5}$
4	0.20	-0.2994042720	-0.2993758141	$2.8457970832 \times 10^{-5}$
5	0.25	-0.3585989195	-0.3585641029	$3.4816547529 \times 10^{-5}$
6	0.30	-0.4105676391	-0.4105269063	$4.0732856737 \times 10^{-5}$
7	0.35	-0.4547711173	-0.4547249980	$4.6119370730 \times 10^{-5}$
8	0.40	-0.4906337291	-0.4905828523	$5.0876763761 \times 10^{-5}$
9	0.45	-0.5175412320	-0.5174863393	$5.4892652500 \times 10^{-5}$
10	0.50	-0.5348383191	-0.5347802789	$5.8040213044 \times 10^{-5}$
11	0.55	-0.5418260225	-0.5417658458	$6.0176663061 \times 10^{-5}$
12	0.60	-0.5377589584	-0.5376978168	$6.1141596644 \times 10^{-5}$
13	0.65	-0.5218424048	-0.5217816496	$6.0755158283 \times 10^{-5}$
14	0.70	-0.4932292007	-0.4931703847	$5.8816041202 \times 10^{-5}$
15	0.75	-0.4510164582	-0.4509613589	$5.5099293965 \times 10^{-5}$
16	0.80	-0.3942420739	-0.3941927199	$4.9353917824 \times 10^{-5}$
17	0.85	-0.3218810303	-0.3218397301	$4.1300235732 \times 10^{-5}$
18	0.90	-0.2328414726	-0.2328108456	$3.0627012242 \times 10^{-5}$
19	0.95	-0.1259605490	-0.1259435607	$1.6988301684 \times 10^{-5}$

Tabla 5.1: Estimación del Error en x_i .

La solución al sistema tridiagonal es

$$\begin{aligned}
c_1 &= -0.0833579869, & c_2 &= -0.1613258030, & c_3 &= -0.2334888719, \\
c_4 &= -0.2994042720, & c_5 &= -0.3585989195, & c_6 &= -0.4105676391, \\
c_7 &= -0.4547711173, & c_8 &= -0.4906337291, & c_9 &= -0.5175412320, \\
c_{10} &= -0.5348383191, & c_{11} &= -0.5418260225, & c_{12} &= -0.5377589584, \\
c_{13} &= -0.5218424048, & c_{14} &= -0.4932292007, & c_{15} &= -0.4510164582, \\
c_{16} &= -0.3942420739, & c_{17} &= -0.3218810303, & c_{18} &= -0.2328414726, \\
c_{19} &= -0.1259605490.
\end{aligned}$$

Por tanto, la aproximación lineal seccionada es $\phi(x) = \sum_{i=1}^{19} c_i \phi_i(x) \approx y(x)$.

En la Tabla 5.1 se incluye el error de la aproximación en x_i para toda $i = 1, 2, \dots, 19$.

La solución real al problema con valor en frontera es

$$y(x) = x(e^x - e).$$

La Figura (5.2) nos permite poder comparar los gráficos producidos por la solución exacta y la aproximada para $n = 19$.

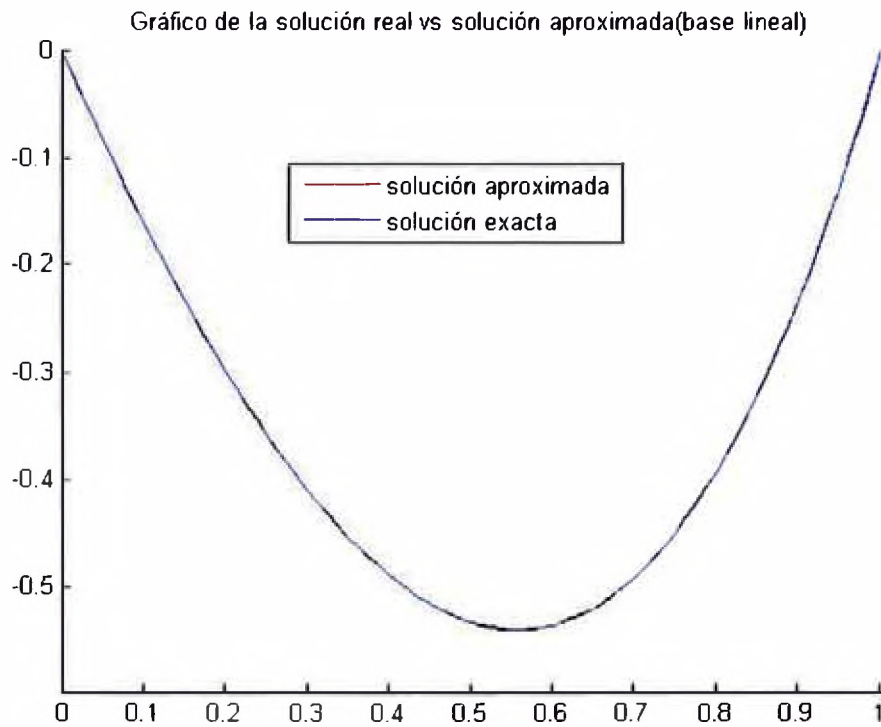


Figura 5.2: Solución real vs aproximada para la base lineal.

La matriz tridiagonal A dada por las funciones básicas lineales seccionada es definida positiva: así que, según el Teorema 5, el sistema lineal es estable respecto al error de redondeo. Para este caso, el grado de aproximación es del orden

$$|\phi(x) - y(x)| = \mathcal{O}(h^2), \quad \text{para toda } x \text{ en } [0, 1] \quad \square$$

La Figura (5.3) compara el error para distintos valores de n : $n = 5, n = 7, n = 9, n = 20$.

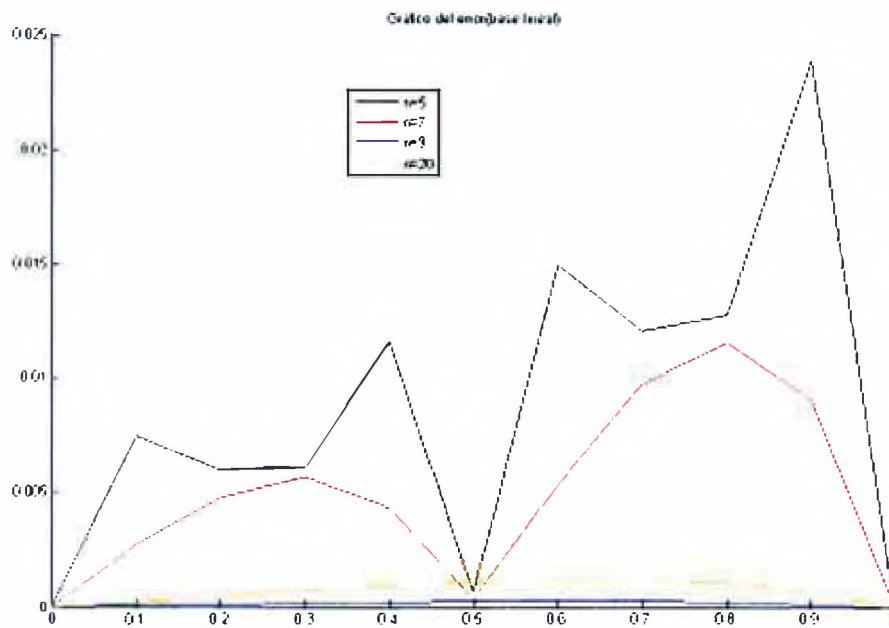


Figura 5.3: Comparativo del error para $n=5$, $n=7$, $n=9$ y $n=20$.

En el Algoritmo 2 se describe detalladamente la construcción de la aproximación al trazador cúbico $\phi(x)$ por medio del método de Rayleigh-Ritz para el problema con valor de frontera (4.22) y (4.23) que se explicó inicialmente (ver [5]).

5.2 Algoritmo 2: Base Spline y Malla Uniforme

Para aproximar la solución al problema con valor de frontera

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

mediante el método de Rayleigh-Ritz, con la suma de trazadores cúbicos

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i(x);$$

en una malla uniforme

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\} = \{x_i : i = 0, 1, \dots, n+1\}$$

Algoritmo 2.

ENTRADA entero $n \geq 1$.

SALIDA coeficientes c_0, \dots, c_{n+1} .

Paso 1 Tome $h = 1/(n+1)$.

Paso 2 Para $i = 0, \dots, n+1$, tome $x_i = ih$.
Tome $x_{-2} = x_{-1} = 0$; $x_{n+2} = x_{n+3} = 1$

Paso 3 Defina la función S para

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{4}(2+x)^3, & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{4}[(2+x)^3, -4(1+x)^3], & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3, -4(1-x)^3], & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & \text{si } 1 < x \leq 2. \\ 0, & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Paso 4 Defina la base del trazador cúbico $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ por

$$\phi_0(x) = S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right),$$

$$\phi_1(x) = S\left(\frac{x-x_1}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right),$$

$$\begin{aligned}\phi_i(x) &= S\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad \text{para } i = 2, \dots, n-1, \\ \phi_n(x) &= S\left(\frac{x-x_n}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), \\ \phi_{n+1}(x) &= S\left(\frac{x-x_{n+1}}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right).\end{aligned}$$

Paso 5 Para $i = 0, \dots, n+1$, haga los pasos 6 - 9.
(Nota: Se pueden evaluar las integrales en los pasos 6 y 9 utilizando un procedimiento de integración numérica.)

Paso 6 Para $j = i, \dots, \min\{i+3, n+1\}$

$$\begin{aligned}\text{tome } L &= \max\{x_{j-2}, 0\}; \\ U &= \min\{x_{i+2}, 1\}; \\ a_{i,j} &= \int_L^U [p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)]dx; \\ \text{si } i \neq j, &\text{ entonces tome } a_{ji} = a_{ij} \quad (\text{Puesto que } A \text{ es simétrica.})\end{aligned}$$

Paso 7 Si $i \geq 4$, entonces para $j = 0, \dots, i-4$ tome $a_{ij} = 0$.

Paso 8 Si $i \leq n-3$, entonces para $j = i+4, \dots, n+1$ tome $a_{ij} = 0$.

Paso 9 Tome $L = \max\{x_{i-2}, 0\};$
 $U = \min\{x_{i+2}, 1\};$

$$b_i = \int_L^U f(x)\phi_i(x)dx.$$

Paso 10 Resuelva el sistema lineal $A\mathbf{c}=\mathbf{b}$ donde $A = (a_{ij}), \mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{n+1})^t$ y $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{n+1})^t$.

Paso 11 Para $i = 0, \dots, n+1$
SALIDA (c_i) .

Paso 12 PARAR. (Procedimiento terminado.)

EJEMPLO 2

Considere el problema de valor de frontera

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \text{sen}(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Tomamos $h = 0.1$ y generamos aproximaciones usando como funciones

i	c_i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$ y(x_i) - \phi(x_i) $
0	$0.50964361 \times 10^{-5}$	0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
1	0.20942608	0.1	0.30901644	0.30901699	0.00000055
2	0.39835678	0.2	0.58778549	0.58778525	0.00000024
3	0.54828946	0.3	0.80901687	0.80901699	0.00000012
4	0.64455358	0.4	0.95105667	0.95105652	0.00000015
5	0.67772340	0.5	1.00000002	1.00000000	0.00000020
6	0.64455370	0.6	0.95105713	0.95105652	0.00000061
7	0.54828951	0.7	0.80901773	0.80901699	0.00000074
8	0.39835730	0.8	0.58778690	0.58778525	0.00000165
9	0.20942593	0.9	0.30901810	0.30901699	0.00000111
10	$0.74931285 \times 10^{-5}$	1.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000

Tabla 5.2: Estimación del Error en x_i .

básicas los trazadores cúbicos. La Tabla 5.2. contiene los resultados obtenidos al aplicar los B-trazadores como se estableció en el Algoritmo 2, con esta selección de nodos.

La figura (5.4) exhibe la densidad de la matriz A para los trazadores cúbicos.

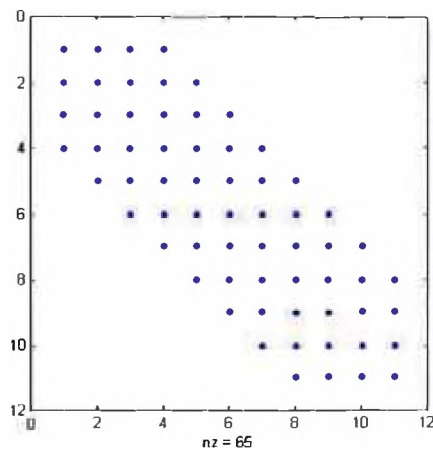


Figura 5.4: Densidad de la matriz A para los trazadores cúbicos.

Es recomendable que las integraciones de los pasos 6 y 9 se realicen en dos pasos. Primero, debemos construir polinomios de trazadores cúbicos interpolantes para p , q y f . Después, debemos aproximar los integrandos

con productos de trazadores cúbicos o con derivadas de ellos. Ahora los integrandos son polinomios seccionados y podemos integrarlos exactamente en cada subintervalo para sumarlos después. Esto produce aproximaciones exactas de las integrales.

Para este caso, el grado de aproximación es del orden

$$\left\{ \int_0^1 |y(x) - \phi(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = \mathcal{O}(h^4), \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

5.3 Algoritmo 3: Base Lineal y Malla No Uniforme

Para aproximar la solución al problema con valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

con la función lineal segmentaria

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

Algoritmo 3.

ENTRADA entero $n \geq 1$;

nodos no espaciados uniformemente $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$.

SALIDA coeficientes c_1, \dots, c_n .

Paso 1 Para $i = 0, \dots, n$, tome $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Paso 2 Para $i = 1, \dots, n$, defina la base lineal seccionada ϕ_i por

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{(x - x_{i-1})}{h_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} & \text{si } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x_{i+1} < x \leq 1 \end{cases}$$

Paso 3 Para $i = 1, \dots, n-1$, calcule $Q_{1,i}, Q_{2,i}, Q_{3,i}, Q_{4,i}, Q_{5,i}, Q_{6,i}$;
Calcule $Q_{2,n}, Q_{3,n}, Q_{4,n}, Q_{5,n}, Q_{6,n}$

Paso 4 Para cada $i = 1, \dots, n-1$, tome $\alpha_i = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i}$;
 $\beta_i = Q_{1,i} - Q_{4,i+1}$;
 $b_i = Q_{5,i} - Q_{6,i}$.

Paso 5 Tome $\alpha_n = Q_{4,n} + Q_{4,n+1} + Q_{2,n} + Q_{3,n}$;
 $b_n = Q_{5,n} - Q_{6,n}$.

Paso 6 Tome $a_1 = \alpha_1$;
 $\zeta_1 = \beta_1/\alpha_1$;
 $z_1 = b_1/a_1$.

Paso 7 Para $i = 2, \dots, n-1$, tome $a_i = \alpha_i - \beta_{i-1}/\zeta_{i-1}$;
 $\zeta_i = \beta_i/\alpha_i$;
 $z_i = (b_i - \beta_{i-1}z_{i-1})/a_i$.

Paso 8 Tome $a_n = \alpha_n - \beta_{n-1}\zeta_{n-1}$;
 $z_n = (b_n - \beta_{n-1}z_{n-1})/a_n$.

Paso 9 Tome $C_n = z_n$;
 SALIDA (c_n).

Paso 10 Para $i = n-1, \dots, 1$, tome $c_i = z_i - \zeta_i c_{i+1}$;
 SALIDA (c_i).

Paso 11 PARAR. (Procedimiento terminado.)

EJEMPLO 3

Aproxime la solución del problema de valor de frontera

$$y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0;$$

usando los nodos no espaciados uniformemente

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.15, \quad x_2 = 0.27, \quad x_3 = 0.50, \quad x_4 = 0.67, \quad x_5 = 0.86 \quad \text{y} \quad x_6 = 1.$$

A partir de la ecuación se deduce que

$$p(x) = -1 \quad q(x) = \frac{\pi^2}{4} \quad f(x) = \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$ \phi(x_i) - y(x_i) $
1	0.15	-0.0471495795	-0.0481240878	$9.74508233868 \times 10^{-4}$
2	0.27	-0.0736982138	-0.0749293108	$12.31096978772 \times 10^{-4}$
3	0.50	-0.0930713826	-0.0944090829	$13.37700340117 \times 10^{-4}$
4	0.67	-0.0805829908	-0.0816534874	$10.70496579172 \times 10^{-4}$
5	0.86	-0.0420749379	-0.0425967314	$5.21793486127 \times 10^{-4}$

Tabla 5.3: Estimación del Error en x_i .

En el sistema lineal $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ se obtiene

$$b_1 = 0.0826940396, \quad b_2 = 0.1046626528, \quad b_3 = 0.1144688559,$$

$$b_4 = 0.0955590762, \quad b_5 = 0.0801452753.$$

La solución al sistema tridiagonal es

$$c_1 = -0.0471495795, \quad c_2 = -0.0736982138, \quad c_3 = -0.0930713826,$$

$$c_4 = -0.0805829908, \quad c_5 = -0.0420749379.$$

La aproximación lineal seccionada es

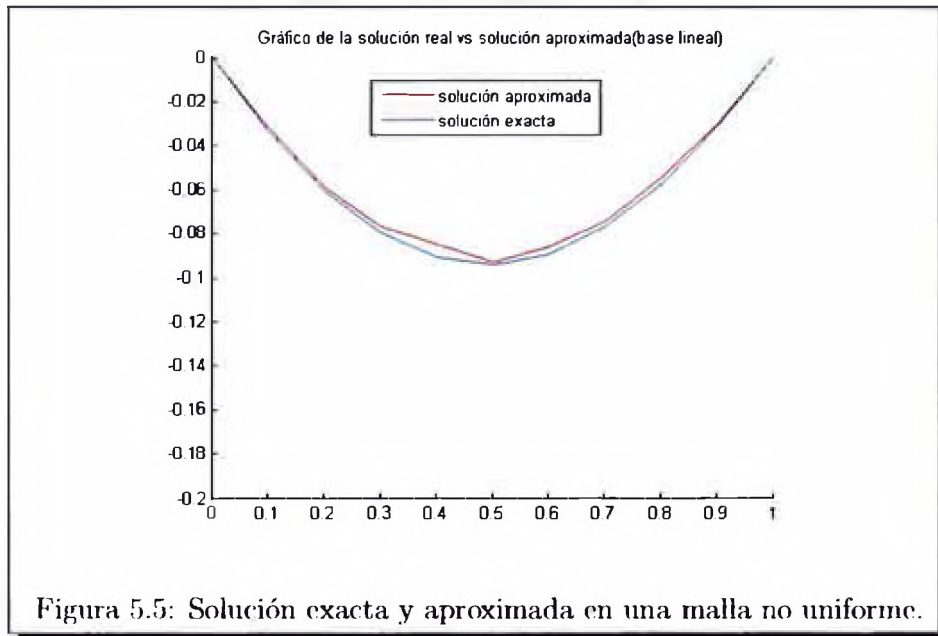
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^5 c_i \phi_i(x)$$

La solución real al problema con valor en frontera es

$$y(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{4} + \frac{\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)}{12} \right) \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{3} +$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{4} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{4}\right)}{12} \right) - \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{6}$$

En la Tabla 5.3 se exhibe el error de la aproximación en x_i para toda $i = 1, 2, \dots, 5$.



La Figura (5.5) compara el gráfico de la solución exacta y la solución aproximada en una retícula no uniforme.

CONCLUSIONES

1. Para garantizar la existencia y unicidad de solución en el espacio de Sobolev se ha utilizado el Teorema de Lax - Milgram.
2. Podemos comprobar la eficiencia del método en los casos donde es posible determinar la solución exacta del PVF, al compararla con los resultados obtenidos numéricamente . como se puede observar en las figuras (5.2) y (5.3). Luego, su uso es factible, solo si la solución no necesita ser calculada con mucha precisión.
3. En la discretización del problema variacional hemos utilizado
Caso no necesariamente simétrico: El método de Galerkin.
Caso simétrico: El método de Rayleigh-Ritz con funciones de base lineal segmentaria y b-spline.
4. En la división del dominio de la solución se han considerado tanto mallas uniformes como no uniformes. El espaciado de la malla no influye en la precisión de la solución pero si la cantidad de nodos que se considere en la discretización. Mientras más fina sea la malla (ya sea uniforme o no uniforme) obtendremos una mejor aproximación a la solución exacta.
5. El método de Rayleigh-Ritz con base spline cúbica es ligeramente más difícil de implementar que el de base segmentaria lineal, sin embargo produce resultados más precisos. Además para ambos casos debemos evaluar diversas integrales, lo cual requiere el uso de integración numérica.
6. En general, la precisión depende del grado del polinomio de aproximación así como de la cantidad de nodos que consideremos.
7. Como trabajo posterior, se puede estudiar el método de elementos finitos para el problema de valor de frontera bidimensional con base spline.

Apéndice A

Métodos Directos para resolver Sistemas de Ecuaciones

Factorización de Cholesky

El matemático Andre Louis Cholesky demostró el siguiente resultado:

Teorema 16 ([5]-Teorema 6.23). *Si A es una matriz real, simétrica y definida positiva, entonces tiene una factorización única $A = LL^T$ en donde L es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.*

Algoritmo 4. Algoritmo de Cholesky

Para factorizar la matriz definida positiva A de $n \times n$ en LL^T , donde L es una matriz triangular inferior (ver [5],[10]).

ENTRADA la dimensión n ; los elementos a_{ij} , para $1 \leq i, j \leq n$ de A .
SALIDA los elementos l_{ij} , para $1 \leq j \leq i$ y para $1 \leq i \leq n$ de L . (Los elementos de $U = L^T$ son $u_{ij} = l_{ji}$, para $i \leq j \leq n$ y para $1 \leq i \leq n$.)

Paso 1 Tome $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.

Paso 2 Para $j = 2, \dots, n$, tome $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$.

Paso 3 Para $i = 2, \dots, n-1$ haga los pasos 4 y 5.

Paso 4 Tome $l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}$

Paso 5 Para $j = i+1, \dots, n$

$$\text{Tome } l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}l_{ik} \right) / l_{ii}.$$

$$\text{Paso 6} \quad \text{Tome } l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2 \right)^{1/2}$$

Paso 7 SALIDA (l_{ij} para $j = 1, \dots, i$ e $i = 1, \dots, n$):
PARAR.

Para resolver el sistema lineal $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ se utilizan los siguientes pasos adicionales. Primero se suprime la proposición PARAR en el Paso 7. Después se agrega

$$\text{Paso 8} \quad \text{Tome } y_1 = b_1 / l_{11}.$$

$$\text{Paso 9} \quad \text{Para } i = 2, \dots, n \text{ tome } \left(y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j \right) / l_{ii}.$$

$$\text{Paso 10} \quad \text{Tome } x_n = y_n / l_{nn}.$$

$$\text{Paso 11} \quad \text{Para } i = n - 1, \dots, 1 \text{ tome } x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji}x_j \right) / l_{ii}.$$

Paso 12 SALIDA (x_i para $i = 1, \dots, n$):
PARAR.

Definición 39 ([5]-Definición 6.28). Una matriz de $n \times n$ recibe el nombre de **matriz de banda** si existen los enteros p y q con $1 < p, q < n$, que tienen la propiedad de que $a_{ij} = 0$ siempre que $i + p \leq j$ o $j + q \leq i$. El **ancho de banda** de este tipo de matrices se define como $w = p + q - 1$

Los algoritmos de factorización se pueden simplificar considerablemente en el caso de matrices de banda debido al gran número de ceros que aparecen. A continuación presentamos un algoritmo completo para resolver un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$ cuya matriz de coeficientes es tridiagonal.

Algoritmo 5. Algoritmo de reducción de Crout para sistemas lineales tridiagonales

Para resolver el sistema lineal de $n \times n$

$$\begin{array}{lcl} E_1 : & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = a_{1,n+1} \\ E_2 : & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = a_{2,n+1} \end{array}$$

$$E_{n-1} : \quad a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = a_{n-1,n+1}$$

$$E_n : \quad a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = a_{n,n+1}$$

el cual se supone tiene solución única(Ver [5]):

ENTRADA la dimensión n ; los elementos de A .
 SALIDA la solución x_1, \dots, x_n .

(Los Pasos 1-3 resuelven $Lz = b$.)

Paso 1 Tome $l_{11} = a_{11}$:

$$u_{12} = a_{12}/l_{11};$$

$$z_1 = a_{1,n+1}/l_{11};$$

Paso 2 Para $i = 2, \dots, n-1$ tome

$$l_{i,i-1} = a_{i,i-1}; \text{ (i-ésimo renglón de L)}$$

$$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i};$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}; \text{ ((i+1)-ésima columna de U).}$$

$$z_i = (a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})/l_{ii}$$

Paso 3 Tome $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$; (n-ésimo renglón de L).

$$l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}.$$

$$z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1})/l_{nn}.$$

(Los Pasos 4 y 5 resuelven $Ux = z$.)

Paso 4 Tome $x_n = z_n$.

Paso 5 Para $i = n-1, \dots, 1$ tome $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$.

Paso 6 SALIDA (x_1, \dots, x_n) ;

PARAR.

El algoritmo puede aplicarse cuando $l_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Para garantizar esto se deben cumplir cualquiera de las siguientes condiciones:

1. La matriz de coeficientes del sistema es definida positiva.
2. La matriz de coeficientes del sistema es estrictamente dominante diagonalmente.

Una condición adicional que garantiza que este algoritmo se puede aplicar está dada por el siguiente teorema:

Teorema 17 ([5]-Teorema 6.29). *Suponga que $A = (a_{ij})$ es tri-diagonal, con $a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0$ para cada $i = 2, 3, \dots, n-1$. Si $|a_{11}| > |a_{12}|, |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$ para cada $i = 2, 3, \dots, n-1$ y $|a_{n,n}| > |a_{n,n-1}|$, entonces A es no singular y los valores de l_{ii} descritos en la factorización de Crout son diferentes de cero para cada $i = 1, 2, \dots, n$.*

Bibliografía

- [1] Atkinson, Kendall. & Han, Weimin. *Theoretical Numerical Analysis*, Springer-Verlag. New York, Inc. 2001.
- [2] Axelsson, O. & Barker, V. A. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*, Academic Press Inc. Orlando, FLO, 1984.
- [3] Bravo, Santos. *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*, Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, España, 2006.
- [4] Brenner, Susanne C. & Scott, L. Ridgway. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Third Edition Springer Science+Business Media, LLC, NY 10013, USA, 2008.
- [5] Burden, Richard L. & Faires, J. Douglas. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F., 1985.
- [6] Chumpitaz, Mauro. *Análisis Funcional I*. WH Editores, Lima, Perú, 1997.
- [7] Golub, Gene H. & Ortega James M. *Scientific Computing and Differential Equations. An Introduction to Numerical Methods*. Academic Press Limited, San Diego CA, 1992.
- [8] Helmberg, Gilbert. *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*. North-Holland Publishing Co. Netherlands. 1967.
- [9] Hutton, David V. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. The McGraw-Hill Companies. 2004.
- [10] Kincaid. David & Cheney. Ward. *Análisis Numérico. Las Matemáticas del Cálculo Científico*. Addison-Wesley Iberoamericana.

- [11] Mantilla, Irla & La Rosa, Laura. *Utilización de la Interpolación en el Método de Elementos Finitos*. REVCUNI, Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI, ISSN:1813-3894, Pag.38-46 , Vol. 9 (1- 2005).
- [12] Mantilla, Irla. *Formulación Variacional de Problemas de Contorno en Espacios de Sobolev*, , XXV Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, Octubre, 2007.
- [13] Nakamura, Shoichiro. *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB*. 1a Edición, Prentice Hall, Inc. A Simon & Schuster Company, México, 1997.
- [14] Novo, Sylvia & Obaya, Rafael & Rojo, Jesús. *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*. McGraw-Hill,1995.
- [15] Quarteroni, Alfio & Valli, Alberto. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008. Germany.
- [16] Reddy, J.N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [17] Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático*, Mc Graw Hill. Tercera Edición.1980, México.
- [18] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill,1966, United States.
- [19] Stoer, J & Bulirsh, R. *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [20] Yosida, K. *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Sixth Edition,1995, Germany.
- [21] Zill, Dennis G. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. International Thomson Editores,Sexta Edición.1997. México.