UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

INFORME DE SUFICIENCIA
PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Titulado:

Construcción del análisis real desde el punto de vista de la convexidad

presentado por:

José Carlos Sotelo Chico

Asesor:

Prof. William Carlos Echegaray Castillo

LIMA-PERÚ

2011

Dedicatoria

A mis padres.

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud al profesor Wilfredo Sosa Sandoval por sus enseñanzas y ayuda en la elaboración del presente trabajo. Agredecer también al profesor William Echegaray Castillo por brindarme su apoyo a sus sugerencias que han ayudado en todo el proceso de elaboración del trabajo y muy en especial al grupo de alumnos que formamos parte del II programa de Titulación, por su apoyo incondicional en los momentos que me dejaba vencer por el trabajo.

Resumen

En el presente trabajo hacemos la construcción del análisis real tomando como punto de partida los conceptos de convexidad, por ejemplo, definimos un intervalo básico, el cual es convexo, que viene a ser un intervalo abierto en la recta real y a partir de este concepto definimos limites,continuidad, derivadas que van de la mano con el concepto de funciones convexas, debemos indicar que estos conceptos se pueden generalizar para espacios de dimensión finita.

En el primer capítulo veremos los conceptos preliminares relativos a la convexidad y la topología en los números reales, ahí se indican que un conjunto convexo en los reales representa a un intervalo, como por ejemplo el intervalo abierto

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y/|x-y| < \varepsilon\}; x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

En el segundo capítulo estudiaremos la convexidad de las funciones, ahí veremos a funciones convexas, cóncavas, así como reconocer el epígrafo de una función, las cuales serán de gran ayuda al momento de estudiar límite, continuidad de funciones.

En el tercer capítulo veremos una de las partes muy importantes del análisis matemático, donde emplearemos la noción de convexidad para explicar límite y continuidad de funciones.

En el cuarto capítulo estudiaremos la diferenciabilidad y la forma de como podemos explicar esta teoría con los conceptos de las funciones convexas.

En el desarrollo del quinto capítulo veremos un importante teorema del análisis real que es el Teorema de Valor Medio.

En el último capítulo se resalta las conclusiones del presente trabajo.

Indice general

Introducción

Una de las partes importantes del análisis matemático que estudia los conceptos que están relacionado con los números reales ($\mathbb{R}$) es el análisis real;el análisis convexo es una de las herramientas importantes de la optimización, pero en los reales podemos usar la noción de convexidad para explicar los conceptos básicos del análisis real como son el límite la continuidad y la diferenciabilidad.

En este estudio es conveniente y útil utilizar la terminología geométrica, así, hablaremos de conjuntos de puntos de la recta real, luego se estudiará funciones definidas en un conjunto de puntos y es conveniente poseer cierto conocimiento acerca de algunos tipos fundamentales de conjuntos de puntos, tales como conjuntos abiertos, cerrados y compactos antes de estudiar las funciones,la estructura matemática el estudio es la topología.

Usaremos el concepto de convexidad en $\mathbb{R}$, para ir construyendo los conceptos de la topología y luego los conceptos de límites, continuidad y diferenciabilidad vista desde un punto de vista geométrico.

Al estudiar la derivada como concepto fundamental del cálculo diferencial hay dos tipos de problemas: el problema físico, que consiste en buscar la velocidad instantánea de una partícula móvil; y el problema geométrico que consiste en buscar la recta tangente a una curva en un punto dado, ambos conducen de forma natural a la noción de derivada, explicaremos este concepto usando la noción de conjuntos convexos.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Espacios Vectoriales

Al iniciar el presente trabajo se hace necesario recordar lo que es un Espacio Vectorial real, para saber lo que podemos hacer en $\mathbb{R}$ y dotar a $\mathbb{R}$ de una estructura vectorial. para ello definamos a los espacios vectoriales reales.

Definición 1.1. ([1]) Un espacio vectorial real V es un conjunto cuyos elementos son llamados vectores, en el cual estan definidas dos operaciones:

1. La adición:

$$+ : V \times V \to V$$

   tal que $+(u, v) := u + v$

2. La multiplicación por un escalar:

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$

   tal que $\cdot(\alpha, v) := \alpha v$ las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

   a) *Conmutatividad*: $u + v = v + u$.

   b) *Asociatividad*:$(u + v) + w = u + (v + w)$.

c) *Vector Nulo*: $\exists\, 0 \in V$tal que $u + 0 = 0 + u = u \;\; \forall\, u \in V$.

d) *Inverso Aditivo*:$\forall\, u \in V, \exists\, -u \in V$tal que $u + (-u) = 0$.

e) *Distributividad*:$\begin{cases} (\alpha + \lambda)u = \alpha u + \lambda u \\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \end{cases}$

f) *Multiplicación por 1*:$1v = v, \forall\, v \in V$.

Definición 1.2. ([1]) Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es llamado un subespacio vectorial real de $\mathbb{R}$, si se cumple lo siguiente:

1. $\forall\, x \in S$ y $\forall y \in S$, $(x + y) \in S$.

2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ y$\forall\, x \in S, \lambda x \in S$.

Se puede observar que si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$, entonces S es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Lema 1. El conjunto $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

Demostración. Ver [1]. □

Definición 1.3. ([1]) Sea $S \subset \mathbb{R}$ un espacio vectorial real $u_1; u_2; \ldots; u_n \in S$ y $a_1; a_2; \ldots; a_n$ números reales. Entonces el elemento

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$$

es un elemento de S al que llamaremos combinación lineal de $u_1; u_2; \ldots; u_n$.

1.2. Números reales

El Análisis matemático estudia conceptos relacionados de alguna manera con los números reales es por ello que empezaremos estudiando el sistema de los números reales. Es un hecho que, en la mayor parte del Análisis, nos interesaran solamente las propiedades de los números reales, por lo tanto consideraremos a los números reales como objetos, sometidos a ciertos axiomas de los que extraeremos propiedades. Supongamos que existe un conjunto no vacio $\mathbb{R}$ de elementos, a los que llamaremos números reales, que satisfacen los siguientes axiomas.

1.2.1. Los Axiomas de Cuerpo

([5]) En el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) admitimos la existencia de dos operaciones, llamadas *Suma y Multiplicación*, tales que, para cada par de números reales x e y, la suma $x + y$ y el producto xy son números reales determinados unívocamente por x e y que satisfacen los siguientes axiomas donde x, y, z representan a números reales en tanto no precisemos lo contrario.

- **Axioma 1**. $x + y = y + x, xy = yx$ (leyes conmutativas).
- **Axioma 2**. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ (leyes asociativas).
- **Axioma 3**. $x(y + z) = xy + xz$ (ley distributiva).
- **Axioma 4**. Dados dos números reales cualesquiera x e y, existe un número real z tal que $z = x + y$.El número $x - x$ se le designará por 0 y al número $-x$ lo llamaremos el opuesto de x.
- **Axioma 5**.Existe, por lo menos, un número real $x \neq 0$. Si x e y son dos números reales con $x \neq 0$, entonces existe un número z tal que $y = xz$.Dicho número z se designará por $\frac{y}{x}$; el número $\frac{x}{x}$ se designará por 1. Escribiremos x^{-1} en vez de $\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y a x^{-1} lo llamaremos el reciproco o el inverso de x.

1.2.2. Los Axiomas de Orden

Suponemos también la existencia de una relación $<$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los siguientes axiomas.

- **Axioma 6**.Se verifica una y sólo una de las relaciones $x = y$, $x < y$, $x > y$.
- **Axioma 7**.Si $x < y$, entonces para cada z se tiene $x + z < y + z$.
- **Axioma 8**.Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$.
- **Axioma 9**.Si $x > y$ e $y > z$, entonces $x > z$.

Nota. El simbolismo $x \leq y$ se utiliza para abreviar la información:

$$"x < y \text{ o } x = y".$$

1.2.3. Los Axiomas de Completitud

Nuestro último axioma del sistema de los números reales involucra la noción del supremo.

Definición 1.4. ([5]) Sea $S \subset \mathbb{R}$, diremos que S es un conjunto acotado superiormente, Si existe un número real M tal que

$$x \leq M, \forall x \in S.$$

Análogamente se dirá que S es acotado inferiormente si existe el número real m tal que

$$m \leq x, \forall x \in S.$$

Definición 1.5. ([5]) Sea $S \subset \mathbb{R}$, diremos que S esta acotado si existen los números reales m y M tal que

$$m \leq x \leq M, \forall x \in S.$$

Definición 1.6. ([5]) Sea $S \subset \mathbb{R}$, denominaremos **Supremo de S** a la mínima cota superior y lo denotaremos por **Sup(S)**, análogamente a la mayor de las cotas inferiores de S se le denomina **Infimo de S** y se denota por **Inf(S)**.

Observación. $\forall\varepsilon > 0$, si $M = Sup(S)$ entonces $M - \varepsilon$ ya no es el Supremo, esto es existe $x \in S$ tal que $M - \varepsilon < x \leq M$, de la misma forma se analiza para el Infimo.

Proposición 1.1. ([5]) El Infimo y supremo para un conjunto S son un únicos.

Demostración. Asumamos que M_1 y M_2 son supremos para S

- Como M_1 es una cota superior $\Rightarrow M_2 \leq M_1$.

- Como M_2 es una cota superior $\Rightarrow M_1 \leq M_2$.

De lo anterior se concluye que $M_1 = M_2$.
Ahora asumamos que I_1 e I_2 son dos infimos para S

- Como I_1 es una cota inferior $\Rightarrow I_1 \leq I_2$.

- Como I_2 es una cota inferior $\Rightarrow I_2 \leq I_1$.

De lo anterior se concluye que $I_1 = I_2$. $\square$

- **Axioma 10**.Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real M tal que $M = sup(S)$.

1.3. Conjuntos convexos

Definición 1.7. ([2]) Un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ se dice que es convexo, si para cada para de puntos x e y en C, se tiene

$$tx + (1-t)y \in C; \text{ donde } t \in [0,1]$$

Observación. Como los elementos del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) están contenidos en la recta numérica, entonces geometricamente en la noción de convexidad se puede notar lo siguiente

Nota. El conjunto de los números reales tiene la estructura de un espacio vectorial considerando la suma usual de números reales y la multiplicación por un número real.

Sea $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$ definimos los siguientes conjuntos

$$[a,b) = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t < b\}$$

$$(a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a < t \leq b\}$$

$$(a,b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$$

$$[a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$$

$$(-\infty,a] = \{t \in \mathbb{R} : t \leq a\}$$

$$(-\infty,a) = \{t \in \mathbb{R} : t < a\}$$

$$(b,\infty) = \{t \in \mathbb{R} : b < t\}$$

$$[b,\infty) = \{t \in \mathbb{R} : b \leq t\}$$

Definición 1.8. ([1]) Se dice que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si I es igual a uno de los conjuntos definidos anteriormente.

A menudo es importante que se distinga entre los intervalos que incluyen sus extremos y los intervalos que no los incluyen.

- Si $a < b$; el siguiente intervalo con extremos en a y b es (a, b).
  Note que $a \notin (a, b)$ y $b \notin (a, b)$, note también que los intervalos $(a, b]$ y $[a, b)$ son tales que satisfacen las desigualdades.

Definición 1.9. Para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $\epsilon > 0$ se define un *convexo básico* con centro en x y radio ε de la siguiente manera $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Note que todo intervalo tiene un extremo izquierdo y un extremo derecho que pueden ser valores reales o pueden ser el $-\infty$ o el $+\infty$.

Proposición 1.2. Sea $I \subset \mathbb{R}$. I es un intervalo si y solo sí I es un conjunto convexo.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sean t_1 y t_2 elementos de I probaremos que $\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 \in I$ con $\lambda \in [0, 1]$.
Como I es un intervalo, entonces sea $\{t_1, t_2\} \subset I$, sin pérdida de generalidad consideremos que $t_1 \leq t_2$ entonces se cumple que

$$(1 - \lambda)t_1 \leq (1 - \lambda)t_2$$

$$\Rightarrow t_1 \leq \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 \leq \lambda t_2 + (1 - \lambda)t_2 = t_2$$

De donde se concluye que $\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 \in I$, por lo tanto I es un conjunto convexo.

$(\Leftarrow)$Consideremos $a = Inf\{t \in I\}$ y $b = Sup\{t \in I\}$, además sea $c \in (a, b)$ entonces $a < c < b \Rightarrow \exists\ t_1$y $t_2$tal que $a < t_1 < c < t_2 < b$ entonces $\{t_1, t_2\} \subset I$, por la convexidad de I, entonces I es un intervalo. □

Definición 1.10. Para el intervalo $[a, b]$; se dice que μ es una combinación lineal convexa de $[a, b]$; si

$$\mu = \lambda x + \beta y; \lambda \in [0, 1];\ \lambda + \beta = 1$$

Proposición 1.3. ([6]) Dado un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ es convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones convexas de C.

Demostración. Por hipotesis C es un conjunto convexo entonces $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ con $x_1 \in C$ y $x_2 \in C$ y $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$
entonces se cumple que un elemento de C es combnación convexa de uno o dos elementos de C ahora por inducción supongamos que es válida para m elementos debemos probar que también es valida para $m + 1$ elementos.
Consideremos $\{x_1, x_2, \ldots x_{m+1}\} \subset C$ y $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m+1}\} \subset [0, 1]$ tal que $x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + \cdots + \lambda_{m+1}.x_{m+1}$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{m+1} = 1$ ahora supongamos que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m \neq 0$ hacemos $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ y $x = \frac{\lambda_1}{\lambda}.x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda}.x_2 + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda}.x_m$ se tiene que $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda} + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda} = 1$, y $\lambda_{m+1} = 1 - \lambda$ entonces $y = \lambda.x + (1 - \lambda).x_{m+1}$ por hipotesis de inducción $x \in C$ y por la definición de convexidad $y \in C$. □

Proposición 1.4. ([3]) Sean $C_i \subset \mathbb{R}, i \in \Lambda$ conjuntos convexos, donde Λ es cualquier conjunto finito, entonces la intersección $C = \bigcap_{i \in I} C_i$, también es un conjunto convexo.

Demostración. Sean $x \in C$ e $y \in C$, por la definición de intersección, $x \in C_i$ e $y \in C_i$, para todo $i \in \Lambda$, como por hipotesis $C_i, i \in \Lambda$, son convexos, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_i$ para cualquier $\lambda \in [0, 1], \forall i \in \Lambda$. Por la definición de la intersección de conjuntos se sigue que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$, de lo que se concluye que C es un conjunto convexo. □

Ejemplo. Sea $A = [2, 5)$ y $B = [1, 8)$ ambos son convexos por la proposición 1.4 $A \cap B = [1, 5)$ también es convexo.

Definición 1.11. ([4]) Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}$, la cápsula convexa de S la cual se denotará por $Co(S)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S.

Se puede notar que

- $Co(S)$ es un conjunto convexo.
- $S \subseteq Co(S)$
- Si S es convexo, entonces $S = Co(S)$

Definición 1.12. Dado $S \subset \mathbb{R}$ se define la frontera de S la cuál se denota por $Fr(S)$ de la siguiente manera

$$Fr(S) = \{x \in S : x \notin int(S)\}$$

1.4. Conceptos topológicos

Estudiaremos el concepto de Topología, denotemos a Γ una familia de conjuntos de $\mathbb{R}$.

Definición 1.13. ([7]) Se dice que Γ es una Topologia para $\mathbb{R}$ si se cumple las siguientes condiciones:

- $\phi, \mathbb{R} \in \Gamma$.
- Si $\{U_i\}_{i\in \mathbb{I}} \subset \Gamma$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \Gamma$.
- Si $\{U_i\}_{i=1}^{p} \subset \Gamma$ entonces $\bigcap_{i=1}^{p} U_i \in \Gamma$.

Definición 1.14. Se define el conjunto Gamma (Γ) de la siguiente manera

$$\Gamma = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A, \exists\, \varepsilon > 0; (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A\} \cup \{\emptyset\}$$

Nota. Los elementos de un topología son llamados conjuntos abiertos.

Teorema 1. ([7]) Γ es una topologia para $\mathbb{R}$

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $\emptyset \in \Gamma$ definición de Γ.
Se tiene la primera condición de la definición (1,13)
Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \Gamma$, sea $x \in \bigcup U_i \Rightarrow \exists i \in I$ tal que $x \in U_i$ entonces $\exists \varepsilon > 0; (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U_i$
entonces $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup U_i$
por lo tanto $\bigcup U_i \in \Gamma$.
Sea $\{U_i\}_{i=1}^{p} \subset \Gamma$, sea $x \in \bigcap_{i=1}^{p} U_i$ entonces $x \in U_i\ \forall i$
entonces $\exists\, \varepsilon_i > 0 : (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i$

tomemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i\}$ entonces $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U_i$;$\forall\, i \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{p} U_i$ entonces $\bigcap_{i=1}^{p} U_i \in \Gamma$, por lo tanto Γ es una topología.

$\square$

Definición 1.15. Una vecindad de x es cualquier conjunto A tal que existe $\varepsilon > 0$ con $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$

Definición 1.16. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $a \in S$ entonces a se denomina punto interior de S. si existe un convexo básico con centro en a y radio r contenida en S.

$$\text{Es decir } (a-r, a+r) \subset S; \quad r > 0$$

Definición 1.17. ([7]) El conjunto de todos los puntos interiores de S se llama interior de S y se denota por $\operatorname{int}(S)$, es decir

$$\operatorname{int}(S) = \{a \in S / a \text{ es punto interior}\}$$

Nota. Cada conjunto que contiene un convexo básico con centro en a se denomina entorno de a.

Lema 2. ([1]) Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es abierto si todos sus puntos son interiores; es decir

$$\forall x \in S; \exists\, \varepsilon(x)/(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subset S$$

También: S es un conjunto abierto si y sólo si $S = \operatorname{int}(S)$

Demostración. Ver [1]. $\square$

Ejemplos.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= (3, 19) \\ S_2 &= (-2, 11) \\ S_1 \cap S_2 &= (3, 11) \\ S_1 \cup S_2 &= (-2, 19) \end{aligned}\right\} \text{son conjuntos abiertos}$$

Un intervalo cerrado $[2, 7]$ no es un conjunto abierto porque 2 ni 7 son puntos interiores.

Nota. En lo que sigue del presente trabajo usaremos $\mathbb{R}\backslash C$ para indicar el complemento del conjunto C es decir $C^c = \mathbb{R}\backslash C$

Note que $[2,7] = (\mathbb{R}\backslash(-\infty, 2)) \cup (\mathbb{R}\backslash(7, +\infty))$.

Definición 1.18. ([5]) Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto exterior a S si existe $r > 0$ tal que

$$(a - r, a + r) \cap S = \emptyset$$

Definición 1.19. ([5]) Un punto a que no es ni interior a S ni exterior a S se le denomina punto frontera de S, lo cuál se denotará por

$$\partial S = \{a/a \text{ es punto frontera de } S\}$$

Ejemplo. Sea el conjunto $S = \{0, 1\}$

Se observa que $\partial S = S$.

Ejemplo. Sea el conjunto $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$ se observa que $S \subset \partial S$ pues $\partial S = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$

Proposición 1.5. Si $a \in \mathbb{R}$ es un punto frontera de S entonces para cualquier $r > 0$. se cumple lo siguiente:

- $(a - r, a + r) \cap S \neq \emptyset$
- $(a - r, a + r) \cap (\mathbb{R}\backslash S) \neq \emptyset$

Demostración. Ver [5]. □

Definición 1.20. ([5]) Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es cerrado si $\mathbb{R}\backslash S$ es abierto.

Proposición 1.6. ([5]) El conjunto convexo básico $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ queremos probar que x es un punto interior de $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, denotemos por $\rho = (x - x_0, x + x_0)$ y llamemos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon - \rho}{2}$ y consideraremos $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon 1) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ en efecto sea $p \in (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon 1)$ entonces
$(p - x, p + x) \leq (p - x_0, p + x_0) + (x_0 - x, x_0 + x) = \varepsilon_1 + \rho < \frac{\varepsilon - \rho}{2} + \rho = \frac{\varepsilon + \rho}{2} < \varepsilon$ □

Lema 3. ([5]) Se dice que C es cerrado si para toda sucesión $\forall\ \{x_k\} \subset C$ tal que $\text{lím}_{k\to\infty} x_k = x$, entonces, $x \in C$.

Demostración. Realizaremos la demostración por contradicción

supongamos que $x \notin C \Rightarrow x \in \mathbb{R}\backslash C$ es decir

$\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}\backslash C$

ello quiere decir que $x_n \to x \Rightarrow \exists\ N$ tal que

$\{x_k\} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}\backslash C (\Rightarrow\Leftarrow)$. □

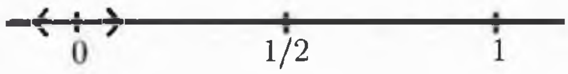
Proposición 1.7. Si S es un conjunto cerrado entonces $\partial S \subset S$.

Demostración. Ver [5]. □

Definición 1.21. ([5]) Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, se dice que a es un punto de acumulación de S si para todo $r > 0$; $(a-r, a+r)$ contiene una infinidad de puntos de S.

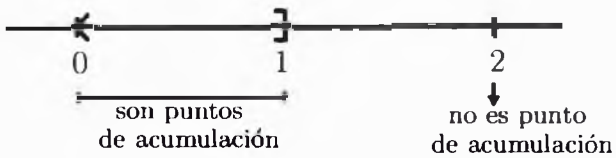
Ejemplo.

- $S = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\}$



Se observa que $0 \notin S$ y 0 es un punto de acumulación de S.

- $S = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 1\} \cup \{2\}$



El conjunto que tiene a todos los puntos de acumulación de S es $\{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 1\}$.

Definición 1.22. ([5]) Sea $s \subset \mathbb{R}$, denotaremos por $S = S \cup \partial S$ y se le denomina la cerradura de S o clausura de S.

Definición 1.23. ([5]) Se dice que $A \subset \mathbb{R}$ es limitado si existe un convexo básico que contiene a A, es decir $\exists\ x \in \mathbb{R}$, $\exists L > 0$ tal que $A \subset (x-L, x+L)$

1.4.1. Sucesiones

Definición 1.24. ([5]) Una sucesión es una función $X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
y se donota por $x(n) = x_n \in \mathbb{R}$
Diremos que una sucesión es acotada; si el conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ es un conjunto acotado es decir existe un convexo básico que contiene a S.

Definición 1.25. ([5]) Se dice que $\{x_n\}$ converge a x si $\forall\ \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_m\}_{m \geq n} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Notación. Si la sucesión $\{x_n\}$ converge a x escribiremos la siguiente notación $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Lema 4. El límite de una sucesión es único.

Demostración. Ver [5]. □

Definición 1.26. ([5]) Si $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene límite a x si $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que: $\forall\ y \in (x - \delta, x + \delta) \cap S \Rightarrow f(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

Proposición 1.8. ([5]) Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo. Entonces C e $intC$ son conjuntos convexos.

Demostración. Sean $x \in C, y \in C, \lambda \in [0, 1]$, definamos las sucesiones $\{x_k\} \subset C$ e $\{y_k\} \subset C$ tales que $\{x_k\} \to x$ e $\{y_k\} \to y$, $(k \to \infty)$.
Por la convexidad de C, se tiene que $\lambda x_k + (1 - \lambda)y_k \in C, \forall k$, por lo tanto

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lim_{k \to \infty} (\lambda x_k + (1 - \lambda)y_k) \in C$$

De lo que se concluye que C es un conjunto convexo.
Sean $x \in int(C)$ e $y \in int(C)$. Fijamos $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset C \text{ e } (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset C$$

sea $\lambda \in [0, 1]$, para demostrar que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in int(C)$, debemos probar que

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y - \varepsilon, \lambda x + (1 - \lambda)y + \varepsilon) \subset C$$

Sea $z \in (\lambda x + (1-\lambda)y - \varepsilon, \lambda x + (1-\lambda)y + \varepsilon)$, existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y + q, \quad |q| \leq \varepsilon$$

Observamos que

$$z = \lambda(x+q) + (1-\lambda)(y+q)$$

Obaviamente, $x+q \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset C$ e $y+q \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset C$, por la convexidad del conjunto C se concluye que $z \in C$.
Acabamos de demostrar que

$$(\lambda x + (1-\lambda)y - \varepsilon, \lambda x + (1-\lambda)y + \varepsilon) \subset C$$

ello significa que $\lambda x + (1-\lambda)y \in int(C)$.

□

Teorema 2. ([5]) La cerradura de un conjunto S, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de sucesiones convergentes.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente de S, como $\{x_n\}$ es convergente sea $p = \lim_n x_n$.
Veamos que $p \in S$, si $p \in S$ o $p \in \partial S$ no habría nada que probar.
Asumamos que p es un punto exterior a S, esto significa que: $\exists r > 0$; $(p-r, p+r) \cap S = \emptyset$, esto significa que en $(p-r, p+r)$ no hay ningun punto de S, pero eso contradice el hecho que p sea un punto de acumulación de $\{x_n\}$ por lo tanto $p \in S$.
Ahora sea $p \in S$ debemos ver que p es un punto de acumulación.Si $p \in S$ entonces sera suficiente definir

$$x_n = p \ \forall n$$

Supongamos que $p \in \partial S$ y denotemos por $B_n = (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n})$ entonces

$$B_s \cap B_n \neq \emptyset$$

Luego existe al menos un punto $a_n \in B_s \cap B_n$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ claramente tiene como punto límite a p. □

Definición 1.27. ([5]) Se dirá que $\{C_i\}$ es un cubrimiento abierto de $A \subset \mathbb{R}$, si C_i son abiertos y $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

Definición 1.28. ([5]) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto si para todo cubrimiento abierto existe un solo conjunto A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

1.4.2. Teorema de Heine - Borel

Teorema 3. ([5]) Sea C un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ una sucesión de conjuntos abiertos que cubren a C (esto es $C \subset \bigcup_n U_n$), entonces hay un subcubrimiento finito de U_j que ya cubre a C.

Demostración. Por hipotesis $C \subset \bigcup_n U_n$, con estos conjuntos formamos los abiertos

$$V_1 = U_1;\ V_2 = U_1 \cup U_2;\ V_2 = V_1 \cup U_2\ ; V_3 = V_2 \cup U_3;\ \ldots; V_{n+1} = V_n \cup U_{n+1}$$

Observamos que los V_j son abiertos y que además se cumple que:$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \ldots$. Es claro que V_n es un cubrimiento abierto de C.
Ahora usando los conjuntos V_j formamos los conjuntos cerrados y acotados:

$$C_1 = C \setminus V_1;\ C_2 = C \setminus V_2;\ \ldots\ C_n = C \setminus V_n$$

Todos estos conjuntos son cerrados y satisfacen

$$\cdots \subset C_n \subset \ldots; \subset C_2 \subset C_1 \subset C$$

Supongamos que hay un punto $p \in C_n;\ \forall\, n \Rightarrow p \in C \setminus V_n$ entonces

$$p \in C \setminus V_n \Rightarrow p \in C;\quad y; p \notin V_n; \forall\, n$$

lo cuál es adbsurdo pues $\bigcup V_n = \bigcup U_n$ y cubren a C.
Por lo tanto hay algún $C_n = \emptyset$ esto es

$$C_{n_0} = C \setminus V_{n_0} = \emptyset \Rightarrow C \subset V_{n_0} = U_1 \cup U_2 \cup \ldots U_{n_0}$$

luego se concluye que $U_1, U_2, \ldots, U_n$, es un cubrimiento finito de C. □

Capítulo 2

Funciones convexas

Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Una función de S a T es una asociación que a todo elemento de S le asigna un elemento de T. En lugar de decir que f es una función de S en T, con frecuencia lo representaremos como:

$$\begin{aligned} f: \ & S \longrightarrow T \\ & x \longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Nosotros trabajaremos con funciones reales de variable real que pueden asumir el valor de $+\infty$.

Ejemplo. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ +\infty & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denotemos por

$$Epi(f) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < +\infty\}$$

Definición 2.1. ([3]) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función; se dice que f es una función convexa; si dados $x \in dom(f); y \in dom(f)$ se cumple que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y); \forall \lambda \in [0, 1]$$

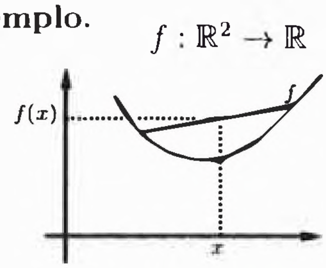
además se dice que f es cóncava, si $(-f)$ es convexa.

Si se cumple que para todo $x \neq y$

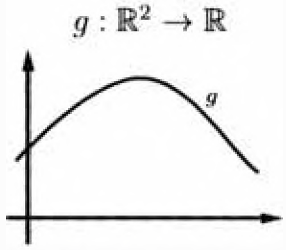
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y); \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

se dice que f es estrictamente convexa

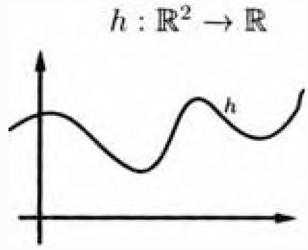
Ejemplo.



Función convexa



Función cóncava



Función que no
es convexa ni cóncava

Ejemplo. ([2]) Las siguientes funciones son convexas

- $f = \{(x, f(x))/f(x) = (x-3)^2\}$
- $g = \{(x, g(x))/g(x) = |x+2|\}$
- $h = \{(x, h(x))/h(x) = x^2; \text{si } \ x \in (0, 1] \text{ y}, h(x) = 1, \text{si } \ x = 0\}$

Definición 2.2. ([2]) Dada una función $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su gráfica es un subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ y es definido por

$$G = \{(x; f(x))/x \in S\}$$

Lema 5. ([2]) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa, entonces $dom(f)$ es convexo.

Demostración. Si $f(t) = +\infty \ \forall \ \varepsilon \to dom(f) = \emptyset$ por lo tanto $dom(f)$ es convexo.
En caso contrario sean $t_1, t_2 \in dom(f)$ entonces por la convexidad de f se cumple que

$$f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2) < +\infty$$

entonces $\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \in dom(f)$.
De lo que se concluye que el $dom(f)$ es convexa.

□

Teorema 4. ([2]) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, f es una función convexa si y sólo si, su epígrafo es un conjunto convexo

Demostración.

i) Si $f(t) = +\infty\ \forall t \in dom(f) \to dom(f) = \emptyset \Rightarrow epi(f) = \emptyset$

Como $epi(f) = \{(x;\gamma)/x \in S; \gamma \in \mathbb{R} : f(x) \leq \gamma\}$

Sean (x_1, γ_1) y (x_2, γ_2) elementos del $epi(f)$ debemos probar que

$$\lambda(x_1, \gamma_1) + (1-\lambda)(x_2, \gamma_2) \in \text{epi}(f); \forall\lambda \in [0, 1] \tag{2.1}$$

$\Rightarrow (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2; \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2) \in \mathbb{R}^2$

pero como S es convexo entonces

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S \text{ y}$$
$$\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2 \in \mathbb{R}$$

Ahora nos falta demostrar que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2; \forall\lambda \in [0, 1]$$

pero como f es convexa por hipótesis, se debe cumplir

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2); \forall\lambda \in [0, 1]$$

Como (x_1, γ_1) y (x_2, γ_2) están en el epi(f)

- $f(x_1) \leq \gamma_1 \Rightarrow \lambda f(x_1) \leq \lambda\gamma_1 \qquad ;\forall\lambda \in [0, 1]$
- $f(x_2) \leq \gamma_2 \Rightarrow (1-\lambda)f(x_2) \leq (1-\lambda)\gamma_2$

Por lo tanto: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2$.

ii) Si epi(f) es convexo $\Rightarrow f$ es convexa. Como epi(f) es convexo entonces si $(x_1, \gamma_1) \in$ epi(f): $f(x_1) \leq \gamma_1$ y si $(x_2, \gamma_2) \in$ epi(f): $f(x_2) \leq \gamma_2$

Además se cumple que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2, \lambda \in [0, 1]$$

debemos probar que si

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in f \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$\square$

Definición 2.3. ([2]) Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es llamada propia si

$$dom(f) = \{t \in \mathbb{R} : f(t) < +\infty\} \neq \emptyset$$

Teorema 5. ([2]) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es propia y convexa, entonces $dom(f)$ es un conjunto unitario o tiene interior no vacío.

Demostración. Como f es una función propia entonces $dom(f) \neq \emptyset$, por el teorema 4 se tiene que $dom(f)$ es unitario o su $int(dom(f)) \neq \emptyset$. $\square$

Capítulo 3

Límite y Continuidad

El principal objeto del estudio de análisis son las relaciones de dependencia de una variable respecto de otra, es decir, de las funciones. Tiene especial interés el estudio de las funciones continuas, es decir, aquellas funciones que a pequeñas variaciones de la variable independiente le corresponden variaciones arbitrariamente pequeñas de la función. Importantes leyes físicas, como aquellas que expresan el movimiento, la dilatación de un cuerpo, la relación entre cantidad de calor y temperaturas son ejemplos de este tipo de funciones.

En esta sección se dará el concepto de límite de una función y se procede al estudio de la continuidad y de sus propiedades pero vistas desde la convexidad.

3.1. Límite de una Función

Sea f una función definida en un conjunto S de números reales, es decir a cada valor de $x \in S$; le corresponde un número real $y = f(x)$. La idea intuitiva de que el límite de f cuando x tiende a 'a' sea L es que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a 'L' siempre que los valores de x sean cercanos al valor de a; siendo éste un punto de acumulación.

Definición 3.1 (Límite). ([1]) Sea $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; se dirá que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta \in (0, \varepsilon] : \forall\, y \in (x - \delta, x + \delta) \cap S \; f(y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Lema 6. $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si y solo sí $\forall \{x_k\} \subset S$ con $\lim_{k \to \infty} x_k = a$, se tiene que $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = L$

Demostración. Ver [1]. $\square$

Note que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa, entonces $\forall \{x_k\} \to x \in int(dom(f))$ entonces $f(x_k) \to f(x)$, es decir que si $\{x_k\}$ converge a un punto del $int(dom(f))$ entonces $\{f(x_k)\}$ tambien converge a $f(x)$.

3.2. Funciones Continuas

Definición 3.2. ([1]) Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $f : S \to \mathbb{R}$; diremos que f es continua en $x \in S$, si $\forall x_n \in S \to x$ entonces $\lim f(x_n) = f(x)$. Se dirá que una función es continua, si lo es en cada punto de su dominio.

Definición 3.3. ([1]) Una función f es llamada semicontinua inferiormente (sci) en x_0 si $\forall \lambda < f(x_0)$ existe un convexo básico $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tal que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Rightarrow f(x) > \lambda$.

Definición 3.4. ([1]) Una función f es llamada semicontinua superiormente (scs) en x_0 si $-f$ es sci en x_0, es decir $\lambda > f(x_0)$ existe un convexo básico $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tal que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Rightarrow f(x) < \lambda$.

Teorema 6. ([1]) Sea $f : X \to \mathbb{R}$, continua en x_0 y $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \to x_0$ entonces $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$

Demostración. Como f es continua en x_0, entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

como $\{x_n\}$ converge a x_0, entonces para $\delta > 0$ dado $\exists N$ tal que

$$h \geq N \Rightarrow x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\Rightarrow f(x_n) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \ \ \forall n \geq N$$

esto es

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

es decir $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$. □

Nota. Se dira que f es continua en x_0 si para todo conjunto básico $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de x_0, $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esta contenida en algún conjunto básico de $f(x_0)$.

Definición 3.5. ([3]) Se definen los siguientes conjuntos
$L_f(\lambda) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$ y $U_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \lambda\}$

Teorema 7. ([3]) Una función f es continua si y solo sí $L_f(\lambda)$ y $U_f(\lambda)$ son cerrados $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración. Tomemos $\{x_k\} \subset L_f(\lambda)$ tal que $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \leq \lambda$ luego aplicamos el límite y usando la continuidad de la función f se tiene que

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(\lim_{k \to \infty} x_k) \leq \lambda \Rightarrow x \in L_f(\lambda)$$

por lo tanto $L_f(\lambda)$ es un conjunto cerrado. De la misma forma trabajamos para $U_f(\lambda)$ entonces se tiene $\{x_k\} \subset U_f(\lambda)$ tal que $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \geq \lambda$; luego aplicamos el límite y usando la continuidad de la función f se tiene que

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(\lim_{k \to \infty} x_k) \leq \lambda \Rightarrow x \in U_f(\lambda)$$

por lo tanto $U_f(\lambda)$ es un conjunto cerrado. □

Teorema 8. ([3]) Toda función convexa es continua en el interior de su dominio.

Demostración. Es inmediata de 3.2. □

Capítulo 4

Derivadas

Este capítulo tratará, ante todo, de las derivadas de funciones de una variable real y, especialmente, de funciones reales definidas en intervalos de $\mathbb{R}$.

Mucho de lo que se expone será familiar al lector, pues se trata de cálculo elemental.

4.1. Definición de Derivada

Si f está definida sobre un intervalo abierto (a, b), entonces para cada dos puntos distintos x y c de (a, b) podemos considerar el cociente de diferencias[1]

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Mantenemos c fijo y estudiamos el comportamiento de este cociente cuando $x \to c$ donde $x \neq c$ para el cociente tenga sentido.

Definición 4.1. ([1]) Sea f una función real definida en un intervalo abierto (a, b), y supongamos que $c \in (a, b)$. Diremos que f es diferenciable en c siempre que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

[1]Este cociente se conoce con el nombre de cociente incremental.

exista. El límite, designado por $f'(c)$, se llama derivada de f en c.

Este método de calcular límites define una nueva función f', cuyo dominio está formado por aquellos puntos de (a, b) en los que f es diferenciable. La función f' se llama la primer derivada de f. Análogamente, la n-ésima derivada de f, designada por $f^{(n)}$, es la primera derivada de $f^{(n-1)}$, para $n = 2, 3, \ldots$ (Según nuestra definición, sólo es posible considerar $f^{(n)}$ si $f^{(n-1)}$ está definida en un cierto intervalo abierto). Otras notaciones con las que el lector puede estar familiarizado son

$$f'(c) = Df(c) = \frac{df}{dx}(c) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=c} \qquad [\text{donde } y = f(x)],$$

notaciones similares. La función f se escribe, a veces, $f^{(0)}$. El proceso que produce f' a partir de f se llama *diferenciación.*

Teorema 9. Si f está definida en un intervalo (a, b) y es diferenciable en un punto c de (a, b), entonces existe una función f^* (que depende de f y de c) continua en c y que satisface la ecuación

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x), \tag{4.1}$$

para todo x en (a, b), con $f^*(c) = f'(c)$. Recíprocamente, si existe una función f^*, continua en c, que satisfaga (4.1), entonces f es diferenciable en c y

$$f'(c) = f^*(c)$$

Demostración. Ver [5]. □

Nota. La ecuación (4.1) tiene una interpretación geométrica que ayuda a adquirir una intuición de su significado. como que f^* es continua en c, f^* es igual a $f^*(c) = f'(c)$.Si x es proximo a c. Reemplazando $f^*(x)$ por $f'(c)$ en (4.1) obtenemos la ecuación

$$f(x) \cong f(c) + f'(c)(x - c)$$

que será aproximadamente correcta cuando $x - c$ sea pequeño. En otras palabras, si f es diferenciable en c, entonces f es aproximadamente una función lineal en las proximidades de c. (Ver Fig.4.1). El Cálculo diferencial explota, continuamente, esta propiedad geométrica de las funciones.

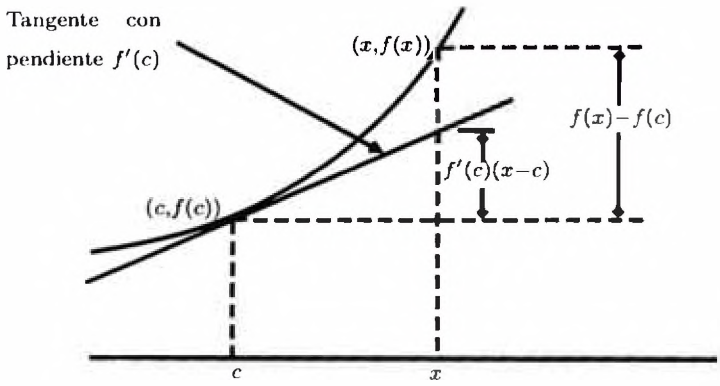


Figura 4.1:

4.2. La derivada y la convexidad

En la gráfica anterior se representa a una función convexa y una recta $\mathbb{L}$ tangente a la gráfica de la función f notemos que los puntos de $\mathbb{L}$ están por debajo de la gráfica de f salvo en el punto de tangencia c, donde coinciden, esto matematicamente lo podemos expresar como

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

Teorema 10. ([1]) Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo no vacío y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre S, entonces f, es convexa sobre S si y solo si

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2), \forall x_1, x_2 \in S$$

Se dice que f es estrictamente convexa si

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2), \forall x_1, x_2 \in S$$

Demostración. Por hipótesis f es una función convexa sobre un conjunto S convexo. Dados $x_1, x_2 \in S$ *y* $\lambda \in (0, 1)$ se tiene por la convexidad de f

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \forall \lambda \in [0, 1] \text{ó tambien}$$

$$f(x_2+\lambda(x_1-x_2)) \leq f(x_2)+\lambda(f(x_1)-f(x_2)), \forall\lambda \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \lambda(f(x_1)-f(x_2)) \geq f(x_2+\lambda(x_1-x_2))-f(x_2)$$

haciendo $h=(x_1-x_2)$

$$\lambda(f(x_1)-f(x_2)) \geq \frac{[f(x_2+\lambda h)-f(x_2)](x_1-x_2)}{h} \forall\ \lambda \in (0,1)$$

$$f(x_1)-f(x_2) \geq \frac{[f(x_2+t)-f(x_2)]}{t}(x_1-x_2)\ \forall\, t \in (0,1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2)+\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{\lambda h}$$

donde $t=\lambda h$. tomando límite cuando $t \to 0$: entonces

$$f(x_1) \geq f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$$

□

El signo de la primera derivada se interpreta en términos de una propiedad geométrica de la función, según si es creciente o decreciente. Interpretremos ahora el signo de la segunda derivada.

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. La ecuación de la recta que pasa por $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ es

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

La condición de que todo punto sobre la curva $y=f(x)$ esté debajo de este segmento de recta entre $x=a$ y $x=b$ es que

$$f(x) \leq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

para $a \leq x \leq b$. Cualquier punto x entre a y b se puede escribir de la forma

$$x=a+t(b-a) \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

De hecho, se ve la correspondencia $t \mapsto a+t(b-a)$ es una función definida en $[0,1]$ que da una biyección entre el intervalo $[0,1]$ y el intervalo $[a,b]$. Si sustituimos el valor para x en términos de t se obtiene la condición equivalente

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b).$$

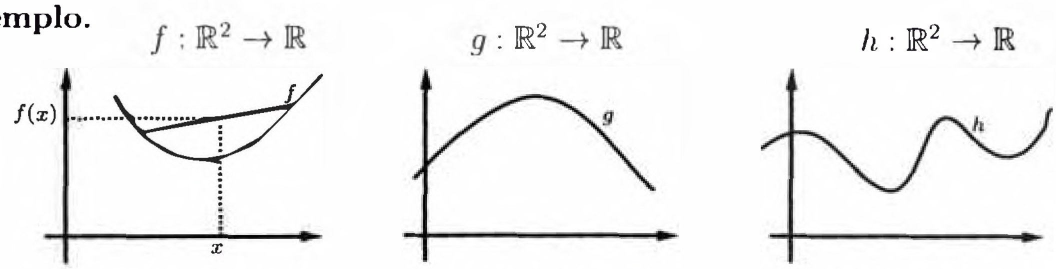
Supongamos que f esta definida en algún intervalo I, y que, para todo par de puntos $a < b$ en I se cumple la última desigualdad, decimos que f es **convexa hacia arriba** en el intervalo.En la última desigualdad si sustituimos $\leq$ con $<$ para $0 < t < 1$, decimos que f es **estrictamente convexa hacía arriba**. Los conceptos de convexidad hacia abajo y estrictamente convexa hacia abajo son definidos con los signos de $\geq$ y $>$.

En la noción de derivada como cocientes de diferencias

$$m = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{(-f)(x) - (-f)(y)}{y - x}$$

Si la función f es convexa trabajamos con la primera igualdad pero si se trata de una función f concava entonces $-f$ es convexa y trabajamos con $m = \frac{(-f)(x)-(-f)(y)}{y-x}$ siendo m la pendiente de la recta tangente a la curva

Ejemplo.



Función convexa — Función cóncava — Función que no es convexa ni cóncava

Si por ejemplo se tiene la función f concava donde en uno de sus puntos x no sera diferenciable,hallamos los límites laterales nos acercamos a dicho punto por la derecha e izquierda para ello tomaremos una sucesión de puntos y_n que acercan por la izquierda y la sucesión de puntos z_n que acercan por la derecha entonces tenemos

$$m = \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \quad e \quad m_1 = \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x}$$

se observa que estas dos pendientes son distintas por lo tanto la función no es derivable en el punto x.

Nota. Sea f una función convexa entonces se cumple

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) = t(f(x) - f(y)) + f(y)$$

$$\frac{f(y+t(x-y))-f(y)}{t(x-y)}(x-y) \leq f(x)-f(y)$$

Aplicando el límite cuando $t \to 0$ se tiene que

$$f'(y)(x-y) \leq f(x)-f(y)$$

Capítulo 5

Teorema del Valor Medio

Los teoremas que siguen hacen referencia a funciones derivables no sólo en un punto, sino en todo un intervalo.

5.1. Teorema de Rolle

Es geometricamente evidente que una curva suficientemente regular que corta al eje x en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$, debe poseer un punto de viraje en algún punto comprendido entre a y b. El enunciado preciso de este resultado se conoce con el nombre de teorema de Rolle.

Teorema 11. Teorema de Rolle([1]). Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), tal que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Supongamos que f' no es cero en ningún punto de (a, b) y llegaremos a una contradicción. Como que f es continua en un conjunto compacto, alcanza su máximo M y su mínimo m en algún punto de $[a, b]$. Ninguno de dichos valores extremos puede ser alcanzado en un punto interior pues en ese caso f' se anularía; por lo tanto la función los alcanza en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, entonces $m = M$ y por lo tanto f es constante en $[a, b]$. Esto contradice el supuesto de que f' no es cero en ningún punto de (a, b). Luego $f'(c) = 0$ para algún c de (a, b). $\square$

5.2. Teorema del Valor Medio

([1]) Acontinuación se enunciara uno de los teoremas importantes del ánalisis real

Teorema 12. Teorema del Valor Medio. Sea f una función derivable en (a,b) y supongamos que f es continua en los extremos a y b. Entonces existe un punto c de (a,b) tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Demostración. Definimos

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

entonces $g(b)=g(a)=f(a)$ aplicando el teorema de Rolle a la función g, existe un $c\in(a,b)$ tal que $g'(c)=0$ se obtiene que

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

de donde se obtiene que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

□

Geométricamente este teorema establece que una curva suficientemente regular que una dos puntos A y B posee una tangente con la misma pendiente que la cuerda AB.

Teorema 13. ([1]) Sea $f: I\to\mathbb{R}$ diferenciable donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. Una condición necesaria y suficiente paar que f sea convexa sobre I es que f' sea creciente sobre I.

Demostración. Supongamos que f' es creciente y sea $a,b\in I, \bar{t}\in(0,1), a<b$ y $c=\bar{t}a+(1-t)b$. Existe por el teorema de valor medio x_1 y x_2 tales que $a<x_1<c<x_2<b$ con

$$f'(x_1)\leq\frac{f(c)-f(a)}{c-a}, f'(x_2)\leq\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

pero $f'(x_1)\leq f'(x_2)$, de donde se deduce que $f(c)\leq\bar{t}f(a)+(1-t)f(b)$. □

Teorema 14. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. f es convexa sobre I si y solo si $f'' \geq 0, \forall x \in I$.

Demostración. Ver ([5]) página 60 a 62. □

Teorema 15. Sea f continua en $[a, b]$ y supongamos que la segunda derivada f'' existe en el intervalo $a < x < b$ y que $f''(x) > 0$ en este intervalo. Entonces f es estrictamente convexa hacia arriba en el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Si $a \leq c < d \leq b$, entonces las hipótesis del teorema se satisfacen para f considerada como una función $[c, d]$.
Sea $a < x < b$ y sea

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

Entonces, usando el teorema del valor medio en f, obtenemos

$$g'(x) = f'(c) - f'(x)$$

para algún c con $a < c < b$. Usando el teorema de valor medio en f', hallamos

$$g'(x) =' f''(d)(c - x)$$

para algún d entre c y x. Si $a < x < c$, entonces g es estrictamente creciente en $[a, c]$. De manera análoga, si $c < x < b$, concluimos que g es estrictamente decreciente en $[c, b]$.Como $g(a) = 0$ y $g(b) = 0$, se sigue que $g(x) > 0$ cuando $a < x < b$, lo cual termina la demostración del teorema. □

Conclusiones

Una de las primeras conclusiones que se ha podido establecer es que la convexidad, por medio de los conjuntos convexos básicos, permiten introducir

- La topología Euclideana para $\mathbb{R}$.
- El concepto de convergencia.
- La continuidad, pues toda función convexa es continua en el interior de su dominio.
- Las derivadas laterales, porque toda función convexa tiene derivadas laterales en el interior de su dominio.

Esta presente monografía es solo una introducción a un libro que puede ser utilizado en el curso de Cálculo, debido a que solo explota la geometría de la convexidad y esto nos permite visualizar los conceptos abstractos y los conceptos topologicos.

Estos resultados se pueden generalizar en $\mathbb{R}^n$.

Bibliografía

[1] Apostol, T.; *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, 2000.

[2] Canales, P.; *Convexidad y aplicaciones.* Sociedad Matemática Peruana, 2004.

[3] Crouzeix, J-P.; Ocaña, E. y Sosa, W.; *Análisis Convexo.* Monografías del IMCA. 2003.

[4] Izmailov, A.; *Otimizaçao (Vol. 1)"Condiciones de Otimalidade, Elementos de Analise Convexa e de Dualidade".* Río de Janeiro: IMPA, 2005.

[5] Lang, S.; *Introducción al análisis matemático.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1980.

[6] Rockafellar, T.; *Convex Analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics, 1997.

[7] Dominguez Hygino; *Espacos Metricos e Introducão À Topología.* Atual Editora 2005