

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL



MÉTODO DE LOS ELEMENTOS NATURALES PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ELASTICIDAD LINEAL Y APLICACIONES EN MECÁNICA COMPUTACIONAL

TESIS

Para Optar el Título Profesional de:

INGENIERO CIVIL

ALAN FISCHER AYALA OBREGÓN

Lima - Perú

2014

Digitalizado por:

Consortio Digital del
Conocimiento MebLatam,
Hemisferio y Dalse

Dedicatoria:

Dedico este trabajo a Dios, a mis padres, hermanos y demás seres amados; por ser cada uno de ellos la inspiración de mi vida y el aliento diario para continuar firme por la senda del saber.

Agradecimientos:

Estoy muy agradecido con mi asesor, Prof. Leonardo Flores, por su apoyo constante, motivación y amistad durante mis estudios de pregrado y en el desarrollo de mi tesis. Agradezco también a mis amigos y profesores del Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, en especial a Percy Guerra, con quienes pude consolidar los temas relativos al análisis funcional, y demás tópicos de gran utilidad para el desarrollo teórico de esta tesis. Finalmente, quiero agradecer de todo corazón a mis padres por los valores inculcados en mí; y a toda mi familia por su amor y apoyo incondicional para alcanzar mis objetivos académicos.

ÍNDICE

RESUMEN	IV
LISTA DE FIGURAS	V
LISTA DE TABLAS	VII
LISTA DE SIGLAS Y SÍMBOLOS	VIII
CAPÍTULO I GENERALIDADES	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 ESTADO DEL ARTE	3
1.3 MÉTODOS SIN MALLA	4
1.3.1 Métodos sin Malla Estructurados y No Estructurados	4
1.3.2 Técnicas de Aproximación sin Malla	5
1.3.3 Método Derivable de Partículas Hidrodinámicas (SPH)	8
1.3.4 Método de Partículas con Kernel Reproductivo (RKPM)	9
1.3.5 Método de Interpolación Radial de Puntos (RPIM)	9
1.3.6 Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)	10
1.3.7 Métodos de Partición a la Unidad (PUM)	12
1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	12
1.5 HIPÓTESIS	13
1.6 OBJETIVOS Y ALCANCES	13
1.7 METODOLOGÍA	14
1.8 ORGANIZACION DE LA TESIS	14
CAPÍTULO II FUNDAMENTO TEÓRICO	16
2.1 DEFINICIONES PRELIMINARES	16
2.1.1 Mecánica del Medio Continuo y el Problema General de la Elasticidad Lineal	16
2.1.2 Espacios Vectoriales de Dimensión Infinita	18
2.2 ESPACIOS FUNCIONALES	20

2.2.1	Espacios de Hilbert	20
2.2.2	Espacios de Sobolev	24
2.3	PROBLEMAS DE CONTORNO ELÍPTICOS	24
2.3.1	Método de Galerkin	31
2.4	FORMA DÉBIL DEL PROBLEMA GENERAL DE ELASTICIDAD LINEAL	32
2.4.1	Formulación Débil Considerando Condiciones Mixtas	32
2.4.2	Existencia y Unicidad de la Formulación Débil	34
CAPÍTULO III INTERPOLACIÓN POR VECINOS NATURALES		39
3.1	Diagramas de Voronoi y triangulación de Delaunay	39
3.2	Construcción de las funciones de forma	42
3.3	Propiedades	45
3.3.1	Interpolación	45
3.3.2	Partición de la Unidad	45
3.3.3	Consistencia y estabilidad	46
3.3.4	Soporte de las funciones de forma	47
3.3.5	Continuidad y derivabilidad	48
3.4	Aproximación con el NEM	48
3.4.1	Interpolación en una dimensión.	49
3.4.2	Interpolación en dos dimensiones.	50
3.5	Imposición de condiciones de contorno.	53
CAPÍTULO IV IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL NEM		56
4.1	Sistema discreto e implementación del NEM	56
4.2	Construcción de las Funciones de Forma	58
4.2.1	Área del triángulo	58
4.2.2	Circuncentro y circunradio	59
4.3	Algoritmo de Watson	60
4.4	Integración numérica	65
4.5	Eficiencia Computacional del NEM y Comparación con el FEM.	67
CAPÍTULO V APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS NATURALES		69
5.1	VIGA DE TIMOSHENKO	70
5.2	PLACA INFINITA CON AGUJERO CIRCULAR	74
CAPÍTULO VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		80
6.1	CONCLUSIONES	80

6.2	RECOMENDACIONES	81
	BIBLIOGRAFÍA	83
	ANEXO	87
A.1	TENSORES Y OPERADORES TENSORIALES	87

RESUMEN

La presente tesis plantea la solución del problema del cálculo de esfuerzos y deformaciones en un medio continuo, expresado en la ecuación de la elastostática (Ecuación de Poisson). Se utiliza una formulación basada en desplazamientos. Inicialmente se revisarán conceptos de análisis funcional, involucrados en la solución de ecuaciones en derivadas parciales, con los cuales se obtendrá la formulación débil de la ecuación de Poisson. Una vez planteado el problema en su forma débil, se procede a encontrar la solución numérica del problema mediante la aproximación de la misma como combinación lineal de funciones de interpolación, las cuales son construidas de ideas geométricas simples como los diagramas de Voronoi y triangulación de Delaunay. Finalmente, se presentará formalmente el Método de Elementos Naturales y se aplicará dicho método a la solución de ejemplos prácticos de interés de la ingeniería civil mediante la redacción de pequeños programas en Java, C y Fortran. Se comparan los resultados con el método de Elementos Finitos y otros métodos sin malla.

SUMMARY

This thesis raises the solution of the problem of calculation of stresses and strains in a continuum medium, expressed in the Elastostatics equation (Poisson equation), using a formulation based on displacement. Initially, concepts of functional analysis will be reviewed, which are involved in the solution of partial differential equations. These concepts will allow to obtain the weak formulation of the Poisson equation. After the problem is formulated in its weak form, we proceed with the numerical solution of the problem by approximating the solution as a linear combination of interpolation functions, which are constructed from simple geometric ideas such as Voronoi diagrams and Delaunay triangulation. Finally, the Natural Element Method is formally presented and it is applied to the solution of practical examples of interest in civil engineering by writing small programs in Java, Fortran and C. The results will be compared with the Finite Element Method and other meshless methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Soportes compactos	5
Figura 3.1	Estructuras geométricas para un conjunto de 6 nodos (a) Conjuntos de nodos N y su diagrama de Voronoi $V(N)$, (b)Triangulación de Delaunay $DT(N)$, (c) Circuncírculos de vecino natural	41
Figura 3.2	Construcción de coordenadas de vecino natural (a) Diagrama de Voronoi original $V(N)$ y el punto x , (b)Circuncírculos de vecino natural originales y x , (c) Celdas de Voronoi de primero y segundo orden de x	43
Figura 3.3	Soporte para la función de forma del NEM (a) Conjunto uniforme de nodos, (b)Función de forma $\phi_A(x)$ para el nodo A . (Fuente: Sukumar, 1998)	48
Figura 3.4	Aproximación en el elemento de referencia unidimensional	49
Figura 3.5	Coordenadas baricéntricas ($n=3$)	50
Figura 3.6	Interpolación bilineal en malla uniforme ($n=4$)	52
Figura 3.7	Comportamiento lineal de $u^h(\zeta)$ en el borde de la cápsula convexa.	54
Figura 4.1	Circuncírculo y circuncentro del triángulo.	59
Figura 4.2	Cálculo de las funciones de forma del NEM (Algoritmo de Watson).	61
Figura 4.3	Diagrama de flujo para la implementación del Algoritmo de Watson.	64
Figura 4.4	Integración en métodos sin malla basados en Galerkin: Malla de fondo (Izquierda) y fondo con estructura de celdas (Derecha)	65
Figura 4.5	Dominios de soporte de los puntos de Gauss	66
Figura 5.1	Viga de Timoshenko	70
Figura 5.2	Distribución de nodos de la viga de Timoshenko (180 nodos distribuidos uniformemente)	71
Figura 5.3	Puntos de Gauss (912 puntos)	71
Figura 5.4	Desplazamientos de la viga de Timoshenko	72

Figura 5.5 Comparación de la distribución de esfuerzos σ_{11} en la viga de Timoshenko 74

Figura 5.6 Comparación de la distribución de esfuerzos σ_{22} en la viga de Timoshenko 74

Figura 5.7 Problema de la placa con agujero circular sometida a tracción. 75

Figura 5.8 Discretización del problema de la placa con agujero circular con 1345 nodos. 76

Figura 5.9 Comparación de valores de σ_{11} a lo largo del lado ED obtenidos con el NEM, FEM y solución exacta. 77

Figura 5.10 Comparación de la distribución de esfuerzos σ_{11} : (a) Solución Teórica, (b) Solución *NEM* (c) Solución *FEM* (d) Solución *EFGM* 79

LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1	Categorías de técnicas de interpolación sin malla	7
Tabla 5.1	Resultados para la Viga de Timoshenko	72
Tabla 5.2	Comparación de desplazamientos verticales del eje de la viga	73
Tabla 5.3	Resultados para la placa con agujero circular.	76

LISTA DE SIGLAS Y SÍMBOLOS

$a(,)$	Forma bilineal
\bar{A}	Tensor de orden 2
$C^\infty(V)$	Conjunto de funciones infinitamente derivables sobre V
$C_0(\Omega)$	Espacio de funciones continuas con soporte compacto sobre Ω
$C(\Omega)$	Espacio de funciones continuas sobre Ω
$D(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en Ω
$D'(\Omega)$	Espacio de distribuciones sobre Ω
D^p	Derivada distribucional de orden p
E	Matriz del material ó Módulo de Young
H	Espacio de Hilbert
H^m	Espacio de Hilbert cuya derivada hasta de orden m pertenece a L^2
H_0^m	Espacio H^m con soporte compacto
$\overline{H^k}$	Complemento de MR en H^k
J	Funcional lineal de energía ó funcional lineal de aproximación
\bar{J}	Funcional que incluye las condiciones iniciales
$L^2(\Omega)$	Espacio de funciones cuadrado integrable
$L^p(\Omega)$	Espacio de funciones L^p sobre (Ω)
L	Transformación lineal de desplazamientos a deformaciones
$l()$	Forma lineal
$M_n(\mathbb{R})$	Espacio vectorial de matrices cuadradas de orden n
$EFGM$	Método Libre de Galerkin
FDM	Método de Diferencias Finitas
FEM	Método de Elementos Finitos
$GFDM$	Método General de Diferencias Finitas
MLS	Mínimos Cuadrados Móviles

MM	Métodos sin Malla
MR	Núcleo no trivial de la transformación de esfuerzos
NEM	Método de los Elementos Naturales
PUM	Método de Partición a la Unidad
PIM	Método de Interpolación Puntual
RBF	Funciones de Base Radial
$RPIM$	Método Radial de Interpolación de Puntos
SPH	Método de las Partículas Derivables
WBF	Funciones de Base Rectangular
$W^{m,p}$	Espacio de Sobolev cuya derivada hasta de orden m pertenece a L^p
tr	Traza de una representación matricial
$\nabla \cdot$	Divergencia
∇	Gradiente
σ	Tensor de esfuerzos
ϵ	Tensor de deformación
δ_{nm}	Delta de Kronecker
Ω	Dominio del problema
Γ	Frontera del dominio del problema
$\partial\Omega$	frontera de Ω
$\sigma : \epsilon$	Producto escalar de los tensores σ y ϵ
$(,)$	Producto interno
$d(,)$	Función distancia Euclidiana
$\ \cdot \ $	Norma de un espacio funcional
$u \otimes v$	Producto de Kronecker, de u y v
\oplus	Suma directa de dos espacios vectoriales
$\bigcup_i \Omega_i$	Unión de las particiones Ω_i de Ω
$\bigcap_i \Omega_i$	Intersección de las particiones Ω_i de Ω
λ	Multiplicadores de Lagrange
μ, λ	Constantes de Lamé
κ	Constante de Kolosov
ν	Razon de Poisson

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

1.1. INTRODUCCIÓN

Desde su aparición en los años 50, el método de los elementos finitos ha sido una técnica ampliamente usada por los ingenieros con propósitos de diseño y análisis. Siendo en sus inicios una herramienta muy útil, su uso era limitado debido a que el desarrollo de los ordenadores estaba aún en sus inicios. Hoy en día, el método de los elementos finitos permite simular el comportamiento de sólidos, fluidos y gases cuyo comportamiento se rige mediante una formulación matemática, permitiendo así obtener resultados cuantitativos de fenómenos de gran complejidad. Sin embargo, éste método numérico no es el óptimo para cierto tipo de problemas, tales como los problemas que presentan una malla muy distorsionada [28].

En las últimas décadas, la aparición de los métodos sin malla como alternativa al método de los elementos finitos ha permitido la simulación de problemas de gran complejidad mostrando ser eficientes y precisos; a la vez, la mejora en la capacidad de los nuevos ordenadores permite realizar algoritmos más elaborados con tiempos de cálculo razonables, utilizando un ordenador de escritorio [18].

En el caso del Método de los Elementos Finitos (FEM), se necesita una discretización del dominio, que con características especiales permite la construcción de las funciones de forma así como también la integración numérica del sistema al que conduce el método de Galerkin. La generación de estas mallas aún viene siendo investigada y es en algunos casos, por ejemplo en dominios complejos en tres dimensiones, uno de los pasos que más tiempo requiere en la solución de problemas con ese método [29].

Con el fin de prescindir de la dificultad de generar una malla y del tiempo que se dedica a ello, en los Métodos Sin Malla se discretiza el continuo mediante un conjunto de nodos, en vez de hacerlo mediante un conjunto de elementos (como en el caso del FEM). Estos métodos se pueden clasificar, teniendo en cuenta los modelos computacionales, en dos grupos: en primer lugar están los que aproximan la forma fuerte de las ecuaciones en derivadas parciales y en segundo lugar los que están basados en la aproximación de la forma débil del problema [19].

Aproximar la forma fuerte del problema usando Métodos sin Malla se hace discretizando las ecuaciones en derivadas parciales mediante técnicas específicas de colocación. Algunos de los prominentes métodos de este grupo son: Método Partícula Hidrodinámica Suavizada (Gingold y Monaghan, 1977), el cual fue el primer método sin malla en desarrollarse, Método de Diferencias Finitas Generalizado (Liszka, 1984), entre otros.

Por otro lado, los métodos que aproximan la forma débil del problema se conocen como métodos de Galerkin sin malla. Algunos de estos métodos son: Método Libre de Galerkin (EFGM) (Belytschko, Lu, y Gu, 1994), Método de Partición a la Unidad (PUM) (Babuska y Melenk, 1997), Método de los Elementos Naturales NEM (Braun y Sambridge, 1995), entre otros.

El método sin malla a utilizar en la presente tesis es el Método de los Elementos Naturales (NEM) denominado así por Braun y Sambridge (1995), el cual ha demostrado ser óptimo para problemas bidimensionales de valores iniciales en mecánica de sólidos, Sukumar (1998). Este método se diferencia de sus análogos sin malla, en que su función de forma es estrictamente interpolante, esto es, su función de forma toma el valor unidad en el nodo al cual está adscrita y cero en el resto, haciendo de esta manera más fácil imponer las condiciones de contorno; a las funciones de forma de los demás métodos sin malla, que carecen de esta característica, se les asigna el nombre de aproximantes. El esquema de interpolación usado en los elementos naturales NEM es conocido como interpolación de vecinos naturales (n-n) (Sibson, 1981). Este tipo de interpolación fue inicialmente utilizado para modelar el fenómeno geofísico. La interpolación de vecinos naturales se basa en conceptos tales como los diagramas de Voronoi y los mosaicos Delaunay.

La interpolación por vecinos naturales tiene óptimas propiedades espaciales de adyacencia y es sensitivo a la posición y densidad de los nodos. Algo a resaltar del NEM es que en una dimensión la interpolación por vecinos naturales coincide con la de los elementos finitos; en dos dimensiones, para crear las funciones de forma tenemos la propuesta de Watson (1994) y la de Laserre (1983), las cuales son robustas computacionalmente para 2 y 3 dimensiones respectivamente. Aplicaciones del método de Elementos Naturales a la mecánica de sólidos fueron desarrolladas por Sukumar (1998) mostrando la convergencia, capacidad, versatilidad y robustez de este método numérico en problemas orientados a la elasticidad; por otro lado, aplicaciones de este método a medios incomprensibles y a la dinámica de fluidos son analizadas en Gonzalez (2004).

Para la solución numérica de problemas de la Ingeniería Civil mediante el NEM, en la presente tesis se hace mención a su formulación matemática e implementación numérica, además se muestra la existencia y unicidad de la solución para problemas de elasticidad lineal, también se presenta la obtención e integración de la forma débil del problema, la imposición de condiciones de frontera esenciales, la forma de calcular las funciones de forma y finalmente, la obtención de la solución numérica con el método de Galerkin.

1.2. ESTADO DEL ARTE

Actualmente los métodos sin malla se encuentran en la mayoría de los casos en fase de desarrollo, sin embargo algunos trabajos de los últimos años, apoyados en conceptos de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales con espacios funcionales, han contribuido de manera muy importante a la comprensión del funcionamiento de los mismos y de los principios que permiten construir espacios de funciones de aproximación de una manera adecuada [22]. Otros métodos han sufrido un desarrollo algo mayor y su estudio se ha extendido a problemas no lineales, como los problemas estudiados por Belytschko en [6].

Históricamente el primer método sin malla se denominó "Smooth Particle Hydrodynamics" y fue desarrollado en 1977 por Lucy y Monaghan; el siguiente fue el "Reproducing Kernel Particle Method" [27] de Liu y Chen en 1995 el cual es una generalización del anterior y prueba la consistencia lineal del método.

Luego se desarrollaría la familia de métodos basados en esquemas de Mínimos Cuadra-

dos Móviles (MLS), dentro de los cuales se encuentran métodos como el "Diffuse Element Method" de Nayroles [32] en 1992 y las "nubes-hp" de Duarte y Oden [15] en 1996. Posteriormente y casi en paralelo, Duarte y Oden, por un lado, y Babuska y Melenk por otro, observaron que la particularidad fundamental de estos métodos residía en la construcción de una partición de la unidad, con lo cual se estableció el método "Partición de la Unidad" (PUM) a mediados de los 90 por Babuska en [3].

Todos los métodos anteriores presentan en su formulación más general funciones de forma no estrictamente interpolantes. Como consecuencia, los resultados calculados no necesariamente coinciden con los valores nodales, así que, como respuesta a este hecho aparecieron los denominados métodos de interpolación, tales como el "Point Interpolation Method" (PIM) alrededor del 2005, el cual si posee la propiedad de delta de Kronecker, y al cual posteriormente se le adicionaría otro desarrollo matemático, el de las funciones de base radial (RBF). Estas funciones son adecuadamente estudiadas por Fassenhauer en [18], con lo cual se obtiene una variante del método anterior denominado "Radial Point Interpolation Method" (RPIM). Por otro lado, dentro de estos métodos de carácter interpolante aparece también el método estudiado por Sukumar [40] en 1998, denominado "Método de los Elementos Naturales" (NEM).

En la siguiente sección se describirá, con un poco más de detalle, algunas de las técnicas de aproximación antes mencionadas.

1.3. MÉTODOS SIN MALLA

1.3.1. Métodos sin Malla Estructurados y No Estructurados

Para resolver problemas en derivadas parciales con condiciones de frontera se discretiza el dominio del problema mediante un conjunto de nodos, los cuales pueden estar estructurados o no. En este caso debe entenderse al conjunto de nodos como estructurado si el conjunto de dichos nodos está uniformemente distribuido y espaciado. Por el contrario el conjunto de nodos no estructurados hace referencia al conjunto en el cual los nodos se encuentran arbitrariamente distribuidos y espaciados en todo el dominio [28].

Generalmente los métodos sin malla estructurados se emplean cuando el tiempo es una variable del problema; sin embargo, un problema dinámico involucra el uso de nubes de

puntos estructuradas y no estructuradas. En este caso el tiempo se discretiza en una nube estructurada de puntos y el espacio en una nube no estructurada [19].

Por otro lado, es necesario mencionar que los métodos sin malla basan sus aproximaciones enteramente en función de la ubicación de los nodos. Estas aproximaciones se denominan funciones de forma (o funciones de aproximación) y son estas funciones las que caracterizan al método o técnica. Una característica de las funciones de forma es que si bien están definidas en todo el dominio general del problema de análisis, su valor difiere de cero sólo en una región local cerrada, alrededor del nodo en el que se desea conocer su valor. A esta región local se le denomina soporte compacto de la función o también dominio de influencia del nodo; generalmente los soportes son discos o rectángulos como los mostrados en la figura (1.1).

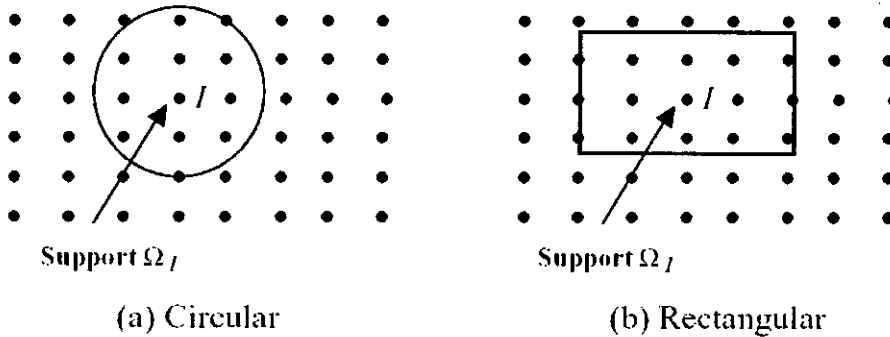


Figura 1.1: Soportes compactos

1.3.2. Técnicas de Aproximación sin Malla

En general un buen método para crear funciones de forma libres de mallas debe cumplir con los siguientes requisitos:

1. *Dar buenos resultados para nodos distribuidos razonable y arbitrariamente (distribución nodal arbitraria).*
2. *Ser numéricamente estable (estabilidad).*
3. *Poseer cierto orden de consistencia (consistencia).*
4. *Producir funciones de forma que poseen soporte compacto.*

5. *La función incógnita aproximada por la función de forma debe ser compatible (compatibilidad) en todo el dominio del problema cuando la formulación es global débil, o debe ser compatible dentro de la cuadratura del dominio cuando la formulación es local débil.*
6. *Poseer la propiedad delta de Kronecker, es decir que si se evalúa dicha función en su nodo origen debe resultar uno en dicho nodo y cero en los demás nodos del dominio de soporte.*
7. *Ser computacionalmente eficiente (eficiencia).*

El requisito de una distribución nodal arbitraria es esencial para el desarrollo de un método sin malla robusto aplicable a problemas prácticos de ingeniería. La condición de estabilidad se refiere a dos cuestiones, la primera es la estabilidad de interpolación, lo que significa que las funciones de forma construidas deben ser estables con respecto a pequeñas perturbaciones de la localización del nodo en el dominio de soporte. Esto requiere que la matriz creada usando los nodos distribuidos arbitrariamente, esté bien condicionada; la segunda cuestión es la estabilidad de la solución, lo que significa que la solución numérica a través de las funciones de forma en un procedimiento de formulación variacional no debe presentar oscilaciones numéricas.

La consistencia es importante para una buena aproximación a la función exacta, pues de esta manera el límite de la solución discreta propuesta será la solución exacta, garantizando la convergencia del método sin malla. Se requiere un soporte compacto para producir un sistema discreto de ecuaciones del tipo esparcido que se pueda resolver con eficacia; ésto es extremadamente importante para los grandes sistemas de ecuaciones. Cuando se emplea interpolación con funciones monótonas, es recomendable una alta densidad de puntos, de manera que se tengan nubes de puntos próximas y los puntos lejanos no tengan intersección entre sí.

Si bien es cierto la propiedad de función delta de Kronecker no es obligatoria, ya que es posible tomar medidas especiales para imponer condiciones esenciales de borde si la función de forma no tiene esta propiedad, el presente trabajo muestra que es posible obtener esta propiedad sin demasiadas complicaciones y de esta manera garantizar el cumplimiento de las condiciones impuestas.

El desarrollo de métodos para la construcción efectiva de funciones de forma es una de las áreas más importantes en la investigación de estos métodos. Existen varias formulaciones de

aproximación. GR Liu en [28] clasifica estas formulaciones en tres grandes categorías sobre la base de los tipos de teorías de la aproximación o representación de la función. Estas son: la representación integral, la representación en serie, y la representación diferencial. En la tabla (1.1) se enumeran algunas de las técnicas en estas categorías.

Tabla 1.1: Categorías de técnicas de interpolación sin malla

Categorías	Técnicas de aproximación sin malla
Representación Integral	Partícula hidrodinámica Suavizada (SPH)
	Método de Reproducción del Núcleo de Partículas (RKPM)
Representación en Series	Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)
	Métodos de Interpolación Puntual (PIM, RPIM)
	Métodos de Partición de la Unidad (PUM)
Representación Diferencial	Método General de Diferencias Finitas (GFDM)

Acerca de la categorización anterior se puede mencionar que en el método de representación integral la función se representa en un dominio local (dominio suavizado o dominio de influencia) a través de una integral ponderada; a menudo se utiliza el método Partícula Hidrodinámica Suavizada (SPH). Los métodos de representación en series tienen una larga historia. Ellos están bien desarrollados en los FEM y ahora se utilizan en los métodos sin malla basados en distribuciones arbitrarias de nodos. La aproximación por mínimos cuadrados móviles (MLS) fue el método más utilizado hasta finales de la década de los 90, posteriormente con la invención del método de interpolación puntual (PIM) y la adición de funciones de base radial (RBF), el método RPIM y los métodos basados en RBF son actualmente los de mayor aplicación.

El método de representación en diferencias, que también se ha desarrollado y utilizado durante mucho tiempo, es el método de diferencias finitas (FDM). Los métodos de representación en diferencias se utilizan generalmente para el establecimiento de sistema de ecuaciones basadas en formulaciones fuertes, tales como el FDM y el método general de diferencias finitas (GFDM).

A continuación se describe brevemente la manera en la que algunos métodos sin malla construyen sus funciones de forma.

1.3.3. Método Derivable de Partículas Hidrodinámicas (SPH)

Este método es el más antiguo de los métodos sin malla. Fue desarrollado por Gingold y Monaghan en 1977 [13]. En este método se crea una aproximación para una única función $u(x)$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ según:

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(x-y, h)u(y)dy \quad (1.1)$$

Donde $w(x-y, h)$ es una función de ponderación o función kernel, y h una medida del tamaño del soporte.

La forma discreta de la aproximación anterior puede ser obtenida por una cuadratura numérica. Esta forma es:

$$u^h(x) = \sum_i w(x-x_i)u_i\Delta V_i = \sum_i \phi_i(x)u_i \quad (1.2)$$

Donde ΔV_i es el volumen (en 3D), el área (en 2D), o la longitud (en 1D) asociada al nodo i y $\phi_i(x) = w(x-x_i)\Delta V_i$ es la función de forma del método SPH. Una de las dificultades en la aplicación de lo anterior es el desarrollo de una técnica robusta para asignar ΔV_i a cada uno de los nodos.

Ya que fue mencionado, es necesario introducir la idea de función kernel para lograr una mejor idea sobre este método y el siguiente. Así que primero se debe entender que en estos métodos se realizan aproximaciones mediante funciones pertenecientes a espacios de Hilbert (los que se definen en el siguiente capítulo). Entonces, dado un espacio funcional de Hilbert H con un producto interno definido $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ (donde cada punto representa a cualquier elemento de H) una función $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *kernel reproductivo* de H si:

1. $K(\cdot, x) \in H \quad \forall x \in \Omega$
2. $f(x) = \langle f, K(\cdot, x) \rangle_H \quad \forall f \in H \quad y \quad \forall x \in \Omega$

La segunda propiedad mencionada, es conocida como propiedad de reproducción y será referida en el siguiente método.

1.3.4. Método de Partículas con Kernel Reproductivo (RKPM)

Siguiendo la línea de desarrollo del SPH, Liu y sus colaboradores [13] desarrollaron el RKPM y propusieron una función de corrección para las funciones kernel en ambos casos (continuo y discreto). La aproximación en este método está dada por:

$$u^h(x) = \int_{\Omega} C(x, x-y) \Phi_{\alpha}(x-y) u(y) dy \quad (1.3)$$

Donde $C(x, x-y)$ es llamada función de corrección, la cual es obtenida por imposición de condiciones de kernel reproductivo (mencionado anteriormente), e implica que la aproximación obtenida debería reproducir exactamente polinomios y puede ser expresada como una combinación lineal de una base polinomial; α es el parámetro de dilatación de la función kernel $\Phi_{\alpha}(x-y)$. De forma análoga al método anterior la forma discreta de la aproximación resulta:

$$u^h(x) = \sum_i \Phi_{\alpha}(x, x-x_i) u(x_i) \Delta V_i = \sum_i \phi_i(x) u_i \quad (1.4)$$

1.3.5. Método de Interpolación Radial de Puntos (RPIM)

El método de interpolación puntual (PIM) [29] es uno de los métodos cuya función de aproximación se representa en series y es empleado para la creación de funciones de forma de métodos sin malla. En este método la función de aproximación $u(x)$ en un punto de interés $x \in \mathbb{R}^2$ tiene la forma:

$$u(x) = \sum_{i=1}^m B_i(x) a_i \quad (1.5)$$

Donde $B_i(x)$ son las funciones base definidas en \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , m es el número de funciones base, generalmente en este método se trabaja con una base polinomial; a_i son los coeficientes de cada función base. Para la función de aproximación, primero se forma un dominio de soporte local en el punto de interés x , el cual incluye un total de n nodos.

En el RPIM, generalmente se considera el uso de dos tipos de funciones base, tanto funciones polinomiales como funciones de base radial, así, la función de interpolación se puede expresar como (1.6), donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{i=1}^m p_j(x) b_j = R(x)^T a + p(x)^T b = \begin{bmatrix} R(x)^T & p(x)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Donde $R_i(x)$ es la función de base radial (RBF), n es el número de RBFs, $p_j(x)$ es la base polinomial en \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , m es el número de funciones base polinomiales.

Para determinar los coeficientes a_i y b_j , se plantea un sistema de ecuaciones lineales basado en el dominio de soporte local formado para el punto de interés x . Entonces al evaluar la función de aproximación en cada uno de los n nodos del dominio de soporte local y considerando ciertas restricciones se obtiene:

$$u_s = R_0 a + P_m b$$

$$P_m^T a = 0$$

Estas ecuaciones se representan matricialmente como sigue:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G a_0$$

Teniendo en cuenta ciertas características [14], semejantes a las descritas en el capítulo 4, se puede obtener la solución del sistema planteado:

$$u(x) = \left[R(x)^T p(x)^T \right] G^{-1} \tilde{u} = \tilde{\Phi}^T(x) \tilde{u}$$

Con este último resultado se obtienen las funciones de forma:

$$\tilde{\Phi}^T(x) = [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_n(x) \ \phi_{n+1}(x) \ \dots \ \phi_{n+m}(x)]$$

Finalmente, la función de forma RPIM correspondiente al vector de desplazamiento nodal $\Phi(x)$ se obtiene de las primeras n componentes del vector $\tilde{\Phi}^T(x)$ y la aproximación del método se podría expresar como sigue:

$$u(x) = \Phi^T(x) u = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \tag{1.7}$$

1.3.6. Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)

Este método emplea funciones de interpolación radial (RBF) o funciones de interpolación rectangular (WBF), y consiste en resolver la formulación global de la aproximación mediante

la solución de varios sistemas lineales pequeños ([19] y [22]). A continuación se expone sucintamente la estructura lineal algebraica de MLS.

La aproximación se realiza mediante:

$$u(x) = \sum_{j=1}^m c_j p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

Donde, $c_j \in \mathbb{R}$, y $p_j(x)$ es un polinomio de aproximación. El problema consiste en encontrar los c_j y para esto se plantea lo siguiente:

$$\min \|f - u\|_{2,w}, \quad f \in \mathbb{R}^n$$

Luego se define el producto interno como:

$$(f, g)_w = \sum_{i=1}^N f(x_i)g(x_i)w(x_i), \quad g \in \mathbb{R}^n$$

Además, es recomendable que la función de ponderación w_i sea definida positiva y monótona decreciente. Luego se debe observar que:

$$\|f\|_{2,w}^2 = \sum_{i=1}^N [f(x_i)]^2 w(x_i)$$

Por otro lado se sabe que la menor distancia entre dos espacios normados es el espacio ortogonal, si $u \in U$, entonces

$$f - u \perp_w U \Leftrightarrow (f - u, p_k)_w = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Reemplazando la aproximación de $u = \sum_{i=1}^m c_j p_j$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^m c_j (p_j, p_k)_w = (f, p_k)_w$$

Lo que puede ser expresado de la siguiente manera:

$$Gc = f_p$$

$$\text{donde } G_{ij} = (p_i, p_j)$$

Luego:

$$c = G^{-1} f_p$$

Y finalmente:

$$u = \sum_{i=1}^m G^{-1} f_p p_j \quad (1.9)$$

1.3.7. Métodos de Partición a la Unidad (PUM)

A mediados de los 90, surge el método de Partición de la Unidad [3]. Los autores expresaban que cuando se tiene cierta información acerca de la solución de un problema, parece lógico intentar incluir dicha información en el espacio de funciones de forma del método de Galerkin. Una de las características que los autores destacan del método es la capacidad de incluir este conocimiento previo de la solución del problema en el espacio de aproximación.

La idea básica de este método es comenzar con una partición de un dominio abierto y acotado Ω , tal que $\bigcup_i \Omega_i \supseteq \Omega$ con algún traslape leve de los subdominios es decir $\bigcap_i \Omega_i \neq \emptyset$. Asociado a estos subdominios se elige una *partición de la unidad* es decir una familia de funciones w_i continuas, no negativas y, de soporte compacto en Ω_i tal que para todo punto $x \in \Omega$ se tiene que:

$$\sum_{i=1} w_i(x) = 1 \quad (1.10)$$

Al igual que RPIM o MLS, la función de aproximación se presenta en series. Así, la aproximación sobre el dominio global Ω se construye mediante aproximaciones locales u_i :

$$u^h(x) = \sum_{i=1} u_i(x)w_i(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.11)$$

Babuska y Melenek [3] plantearon la siguiente función de forma (considerando $u_i = \phi_i^0$):

$$u^h(x) = \sum_{i=1} \phi_i^0(x)(a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{ki}x^k + b_{1i} \sinh nx + b_{2i} \cosh nx) \quad (1.12)$$

Donde $\phi_i^0(x)$ es la función de Shepard [13]. Los coeficientes a_{ki} , b_{1i} y b_{2i} son incógnitas de la aproximación que pueden ser determinadas por el método de Galerkin o por procedimientos de colocación.

1.4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Resolver la ecuación elástica lineal con condiciones de borde mixtas (deformaciones y esfuerzos) permite la obtención final de esfuerzos y deformaciones en problemas de ingeniería civil. Para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan los fenómenos involucrados en el estudio de la elastostática es necesaria la definición formal del espacio de soluciones, conformado por el espacio del cuerpo rígido y el cuerpo de deformaciones

elásticas. Hoy en día, el desarrollo de los métodos numéricos brinda de manera explícita la forma funcional del espacio del cuerpo rígido y el espacio de deformaciones elásticas de un sistema bidimensional. Se conocen también las formulaciones variacionales con metodologías libre de malla para la solución de esta ecuación.

Sin embargo, los métodos sin malla, aunque mejoran en varios aspectos al Método de Elementos Finitos, no son una completa panacea. Ellos han venido experimentando, en los últimos años, problemas en lo que refiere a la integración nodal. Es por ello que un aporte novedoso de esta investigación será mostrar alternativas para la integración numérica. Se espera concluir mostrando mejores resultados que los obtenidos por investigaciones recientes relativas al tema.

1.5. HIPÓTESIS

El Método de Elementos Naturales (NEM) mejora tiempos de cómputo y tasas de convergencia en problemas de la elastostática lineal, en comparación al Método de Elementos Finitos. Su formulación variacional en espacios funcionales y fundamento geométrico de su desarrollo brindan un sólido cimiento para su extensión a espacios n-dimensionales y la mejora en los procesos de integración numérica hará que los métodos libres de malla aumenten su auge y desarrollo.

1.6. OBJETIVOS Y ALCANCES

El objetivo general de la presente tesis es introducir el método de los elementos naturales como herramienta numérica de interpolación para resolver problemas de estado plano de esfuerzos o de deformaciones en ingeniería civil, mostrando la versatilidad de los métodos sin malla al mejorar el proceso de integración numérica.

Como objetivos específicos se tienen:

- Introducir conceptos de matemática relativa al análisis funcional y geometría computacional, esto en beneficio del planteamiento formal del tema en estudio.

- Presentar el Método de los Elementos Naturales (NEM) como alternativa al Método de Elementos Finitos, y desarrollar su estudio e implementación numérica para ser usado en posteriores aplicaciones en las diversas ramas de la ingeniería.
- Aplicar el método mencionado a la solución de problemas de la elasticidad bidimensional y problemas generales de ingeniería civil con códigos desarrollados en diferentes lenguajes de programación.
- Mostrar mejoras en tiempo de cálculo de programas realizados para la ingeniería civil, orientando su programación y desarrollo futuro al trabajo con super-computadoras.

1.7. METODOLOGÍA

El desarrollo del presente trabajo exigirá principalmente una comparación entre los resultados del método libre de mallas escogido, con soluciones analíticas como las propuestas en el libro de Teoría de la Elasticidad [42]. Para la solución numérica de problemas relativos a métodos sin malla, se escriben pequeños programas desarrollados en C y Fortran.

Se trabaja con conceptos de análisis funcional, esto en beneficio del planteamiento formal del tema de estudio. A partir de éstos se explica de manera rigurosa la obtención de la formulación variacional de la ecuación de la elastostática; así mismo se estudia la convergencia de la solución obtenida con la formulación variacional y se garantiza que la solución de la ecuación de la elasticidad siempre se puede obtener mediante las funciones desarrolladas con el NEM.

Además, se presentan ejemplos de aplicación a problemas de interés en ingeniería civil. También se presenta, cuando sea necesario, el planteamiento y la demostración de ciertos teoremas, los cuales conducen a un mejor entendimiento de lo que se hace o a la certeza de la factibilidad de lo propuesto.

1.8. ORGANIZACION DE LA TESIS

En el capítulo dos se presenta formalmente el tratamiento matemático del problema a resolver, se analizan los conceptos relativos al análisis funcional lineal, los espacios de búsqueda de la solución y los métodos existentes para encontrarla. En el capítulo tres se presenta

la interpolación por vecinos naturales para la formulación del sistema a resolver mediante el Método de Elementos Naturales (NEM). En el capítulo cuatro se planteará la solución numérica mediante algoritmos computacionales teniendo como pilar fundamental la optimización de la razón de convergencia y tiempo de cómputo. En el capítulo cinco se mostrarán y resolverán modelos numéricos relativos a diferentes problemas de ingeniería civil y a la mecánica computacional, comparando finalmente los resultados obtenidos con soluciones analíticas, así como también las provenientes del Método de Elementos Finitos y de otros métodos sin malla. En el capítulo seis se darán al conclusiones del trabajo realizado en la tesis y se brindarán recomendaciones para futuras investigaciones en temas relacionados a la misma.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTO TEÓRICO

En este capítulo se desarrollan los conceptos formales del método de los elementos naturales NEM. En la primera sección se hace una introducción al problema que se quiere resolver, y también se presentan definiciones básicas de la teoría del análisis funcional, los cuales se profundizan en las siguientes secciones, culminando el capítulo con la formulación débil del problema.

2.1. DEFINICIONES PRELIMINARES

Las siguientes definiciones tienen como objetivo presentar los fundamentos básicos del problema a tratar y los necesarios para la obtención de la formulación débil del problema elástico lineal, que es la parte principal del presente capítulo. A los lectores que no tengan el conocimiento de operaciones con tensores, se les recomienda revisar el Anexo donde se presenta un resumen conciso del tema.

2.1.1. Mecánica del Medio Continuo y el Problema General de la Elasticidad Lineal

La mecánica del medio continuo es la ciencia que estudia el comportamiento mecánico de los sólidos y los fluidos en una escala macroscópica, ignorando la naturaleza discontinua del material. En esta mecánica, cada partícula del material está asociada a un punto del espacio ocupado por el cuerpo en estudio (dominio), al cual además se le pueden atribuir cantidades de campo como la densidad, desplazamiento, velocidad a través de funciones continuas en términos de la posición. En la mecánica de medios continuos se describe la interacción entre el esfuerzo y el desplazamiento que actúan sobre determinado medio continuo, esta interac-

ción es modelada con ayuda de formas bilineales. En el caso de la elasticidad lineal estas formas bilineales son el tensor de esfuerzos (σ) y el tensor de deformaciones (ϵ), dados por:

$$\sigma = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j \quad (2.1)$$

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes v + (\nabla \otimes v)^T) \quad (2.2)$$

Para el tratamiento de problemas de mecánica del medio continuo generalmente se utilizan dos tipos de ecuaciones; la primera representa el estado de equilibrio según las leyes de la física y la segunda que se denomina relación constitutiva, describe el comportamiento mecánico (naturaleza) de los materiales mediante alguna función $\sigma = f(\epsilon)$. Así, en el caso tratado por el presente trabajo, se considera una relación esfuerzo deformación lineal e isotrópica, apropiada para la formulación de la elasticidad lineal, dada por:

$$\sigma(u) = \lambda \text{Tr}(\epsilon(u))\delta + 2\mu\epsilon(u) \quad (2.3)$$

Donde:

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

y λ, μ son las *constantes de Lamé* y tienen una relación directa con el *módulo de Young* E y la *razón de Poisson* ν , típicos en la caracterización de un material elástico, según:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Con estas definiciones preliminares se puede presentar la ecuación de equilibrio de fuerzas que regirán el movimiento de sólidos elásticos. Para ello, considerando σ como el tensor de esfuerzos, tenemos que (ver [42]):

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad (2.5)$$

Con b representando la fuerza externa por unidad de volumen.

Respecto a las condiciones de borde se tienen por lo menos dos posibilidades, una condición que especifica el desplazamiento de un punto de la frontera o una condición que especifica la fuerza por unidad de área en la frontera. Este par de condiciones se conocen como *condiciones de Dirichlet* y *Neumann* respectivamente y se describen en el acápite 2.4.1.

2.1.2. Espacios Vectoriales de Dimensión Infinita

Cuando se trata de solucionar un problema definido por una ecuación en derivadas parciales, generalmente no es posible encontrar una solución explícita para la función incógnita. Más aún, generalmente no se necesita conocer esta forma explícita, pues resulta más factible calcular su valor como combinación de otras funciones (funciones base). De la misma manera en que se puede representar a un vector de dimensión finita como la combinación lineal de los vectores correspondientes a una base del espacio vectorial al cual pertenece dicho vector, esta representación es también posible para funciones, ya que los conjuntos de estas funciones forman espacios vectoriales, pero a diferencia de los espacios vectoriales de dimensión finita los espacios de funciones (espacios funcionales) poseen dimensión infinita. Es decir, cualquier base de este espacio vectorial tiene infinitos elementos. A continuación se revisan conceptos de los espacios de dimensión infinita útiles para buscar y encontrar características de las funciones base mencionadas en la definición 2.2.7.

Un punto importante es la definición de producto interno, que posteriormente induce la definición de la norma euclidiana, la cual proporciona una métrica para los espacios funcionales.

Definición 2.1.1. Sea H un espacio funcional vectorial sobre \mathbb{R} . Una forma bilineal

$$H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u, v \mapsto (u, v)$$

Se denomina producto interno si es simétrica y definida positiva, es decir, si cumple que

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in H$$

$$(v, u) \geq 0 \quad \forall u \in H$$

$$(u, u) = 0 \iff u = 0$$

En tal caso

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)} \quad u \in H \tag{2.6}$$

Define una norma sobre H . Un espacio vectorial dotado de un producto interno se dice pre-Hilbert.

Las ideas anteriores se pueden extender a tensores (ver anexo), ya que los mismos son también funciones multilineales. Entonces sean dos tensores σ, τ cuyas componentes pertenecen a H , el producto interno se define como sigue:

$$(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma : \tau d\Omega \quad (2.7)$$

y naturalmente la norma inducida resulta:

$$\|\sigma\| = \left(\int_{\Omega} \sigma : \sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Este concepto es muy importante, ya que la función norma es en general continua, por lo que también es acotada en cualquier dominio cerrado. A continuación se define un espacio funcional de manera explícita.

Definición 2.1.2. *El espacio de funciones continuas con soporte compacto se denomina $C_0(\Omega)$.*

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) / f(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K, K \text{ compacto} \subseteq \Omega\}$$

Donde $C(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas sobre Ω .

Para consolidar ideas sobre el empleo de espacios funcionales, a continuación se definen algunos conceptos adicionales.

Definición 2.1.3. *(CÓMPACTO) Un espacio métrico A se dice compacto si toda cobertura abierta de A posee una cobertura finita.*

La definición anterior es la versión genérica de compacidad. Ya que el entorno sobre el que trabajan las funciones requeridas es \mathbb{R}^n , es posible obtener una consecuencia de la definición que resulta más comprensible y directamente aplicable.

Teorema 2.1.1. *$K \in \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [4]. □

Ahora se presenta una herramienta útil para demostrar ciertas convergencias de sucesiones de funciones, y que proporciona características importantes a ciertos espacios funcionales.

Definición 2.1.4. *Dada una sucesión de funciones de un espacio funcional, se dice que es de Cauchy si cumple que*

$$\lim_{\min\{n,m\} \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Definición 2.1.5. *Un espacio métrico E se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge a un punto de E .*

Además, de las definiciones anteriores, se considera necesario entender los siguientes conceptos.

Definición 2.1.6. *Un subespacio vectorial $Y \subset X$ se dice denso en X si este último es igual a la clausura del primero $\bar{Y} = X$, es decir si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Definición 2.1.7. *Un espacio vectorial es de Banach si es normado (en él está definida una norma) y completo con la norma definida previamente.*

A continuación se describen diversos espacios funcionales que poseen características apropiadas para la búsqueda eficaz de las funciones base, las que pueden aproximar funciones solución de ecuaciones en derivadas parciales.

2.2. ESPACIOS FUNCIONALES

2.2.1. Espacios de Hilbert

En este sub capítulo se definen y describen algunas características de los espacios de Hilbert, las cuales son importantes ya que sobre estos se desarrolla la formulación variacional del problema en derivadas parciales que se desea resolver. Esto en virtud de que las bases del espacio funcional en mención son las que hacen posible la solución de la ecuación en su forma débil. Por esta razón es importante el estudio de la separabilidad, densidad, numerabilidad y completitud de estos espacios, ya que gracias a estas propiedades este tipo de espacios resulta útil para la construcción de la forma débil de la ecuación de la elasticidad (Ecuación de Poisson).

Definición 2.2.1. *Un espacio vectorial H dotado de un producto escalar se dice espacio de Hilbert si es completo para la norma asociada, es decir, si toda sucesión de Cauchy del espacio es convergente.*

Definición 2.2.2. *Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^n , se define el espacio $L^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones integrables en (Ω) . A su vez, se define*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / |f|^p \in L^1(\Omega)\} \quad (2.9)$$

Con $(p < \infty)$, $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial cuya norma euclidiana viene dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.10)$$

Notar que los espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach, es decir, espacios vectoriales normados y completos.

De lo anterior $L^2(\Omega)$ es conocido como el espacio de las funciones cuadrado integrables sobre el conjunto abierto Ω de \mathbb{R}^n .

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} / \int_{\Omega} (f)^2 dx < \infty\} \quad (2.11)$$

Con el producto escalar

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (2.12)$$

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert [4]; la mayor parte de las integrales del presente trabajo se desarrollan en este espacio.

Definición 2.2.3. Dado un espacio de Hilbert, se denomina *convergencia fuerte a la convergencia en la norma asociada al producto escalar*, es decir $(f_n) \subset H$ converge (fuertemente) a $f \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

se denota por

$$f_n \rightarrow f$$

Definición 2.2.4. Dado el conjunto abierto Ω de \mathbb{R}^n , definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \exists c \geq 0 \text{ tal que } \|f(x)\| \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

Así, L^∞ es un espacio vectorial y tiene inducida la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c / \|f(x)\| \leq c \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

Por lo tanto L^∞ es un espacio vectorial normado. Se debe notar que c.t.p., significa "en casi todos los puntos" del dominio.

Definición 2.2.5. Sea H un espacio de Hilbert, $(f_n) \subset H$ converge débilmente a $f \in H$ y se denota por

$$f_n \rightharpoonup f$$

si

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in H.$$

A continuación se presentan algunos resultados que se derivan directamente de las definiciones anteriores. Muchas de las demostraciones de dichos resultados se omiten pues son resultados conocidos que se pueden encontrar en textos clásicos de análisis funcional y FEM como [11], [12], [34].

Proposición 2.2.1. *Si $f_n \rightarrow f$, entonces $f_n \rightharpoonup f$, es decir, la convergencia fuerte implica la convergencia débil.*

El recíproco de este resultado no es cierto en general y la demostración es inmediata.

Proposición 2.2.2. *Si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita, la convergencia fuerte y débil son equivalentes.*

Demostración. Basta con tomar una base ortonormal y demostrar que las componentes convergen. Sea e_1, \dots, e_m base ortonormal de H , $f_n \rightharpoonup f$.

Se tiene que

$$f = \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j \quad \forall f \in H$$

Al considerar que, converge débilmente,

$$(f_n, e_j) \rightarrow (f, e_j) \quad \forall j$$

Entonces, $(f_n, e_j) e_j \rightarrow (f, e_j) e_j$ en H , por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^m (f_n, e_j) e_j \rightarrow \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j$$

Esta última expresión indica que $f_n \rightarrow f$, dado que las coordenadas son únicas. □

Teorema 2.2.1. *En un espacio de Hilbert, toda sucesión débilmente convergente es acotada.*

Demostración. Véase [4]. □

Definición 2.2.6. *Un subespacio V de un espacio de Hilbert H , $V \subset H$ se denomina denso en H si para toda función u en H se puede encontrar una sucesión de funciones $u_n \in V$ que converge a u en H .*

Lema 2.2.1. *Sea H un espacio de Hilbert y $V \subset H$ denso en H . Sea una sucesión $(f_n) \subset H$. Entonces si (f_n) es acotada, es decir, existe M tal que:*

$$\|f_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y además

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in V$$

Entonces

$$f_n \rightarrow f.$$

Demostración. Sean $u \in H$ y $v \in V$ funciones cualesquiera, entonces:

$$\|(f_n - f, u)\| \leq \|(f_n, u - v)\| + \|(f_n - f, v)\| + \|(f, u - v)\|$$

De donde se deduce el resultado, ya que los términos del lado derecho de la inecuación son convergentes y se podría acotar cada uno por un $\varepsilon/3$. □

Definición 2.2.7. Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$ se dice base Hilbertiana (numerable) de H si:

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm}, \quad \forall n, m$$

y $\mathbb{R}\langle e_n : n \geq 1 \rangle$, el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) generado por $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$, es denso en H .

Teorema 2.2.2. Sea $u \in H$. Entonces:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n$$

Es decir, la serie anterior converge en H a u . Además se tiene la llamada igualdad de Bessel-Parseval:

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2.$$

Demostración. Puede consultarse en [4]. □

Teorema 2.2.3. Sea (e_n) una base Hilbertiana de un espacio de Hilbert H . Entonces la sucesión (e_n) converge débilmente a 0, pero no fuertemente.

Demostración. Sea $g \in \mathbb{R}\langle e_n, n \geq 1 \rangle$, entonces

$$(e_n, g) = (e_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) \rightarrow 0 = (0, g)$$

Suponer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \rightarrow 0$, entonces $\|e_n\| < 1$, pero $\|e_n\| = 1$ por la definición 2.2.7, entonces $e_n \not\rightarrow 0$. □

2.2.2. Espacios de Sobolev

En este acápite se definen conceptos relativos a los espacios de Sobolev, paso previo para un estudio posterior de los problemas variacionales, ya que son necesarias funciones de clase 1 ($\in C^1(\Omega)$) que satisfagan la condición de Poisson, lo que implica que estas funciones y sus derivadas sean medibles en espacios de Hilbert (elementos de L^2). Además, con ayuda de estos espacios se definen las formas variacionales abstractas.

Definición 2.2.8. Se denota por $D(\Omega)$ el espacio de funciones indefinidamente diferenciable sobre Ω ($C^\infty(\Omega)$) y con soporte compacto en Ω .

Definición 2.2.9. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Se denomina Espacio de Sobolev al espacio definido por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}. \quad (2.13)$$

La norma asociada a $W^{m,p}(\Omega)$ es:

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.14)$$

En el caso que $p = 2$, se denota por $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, con norma asociada:

$$\|u\|_{m,2,\Omega} = \|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

Definición 2.2.10. Un espacio vectorial se dice que es separable, si posee un subconjunto denso y numerable.

Teorema 2.2.4. El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Lema 2.2.2. $D(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^m(\mathbb{R}^n)$, es decir, $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$

Para ver la demostración del teorema y el lema anteriores, se puede revisar [34].

2.3. PROBLEMAS DE CONTORNO ELÍPTICOS

En esta sección se presenta de manera introductoria la formulación del problema variacional abstracto correspondiente al problema en estudio presentado en el acápite 2.1.2, es

decir, la formulación variacional de la ecuación elíptica de Poisson, con condiciones no homogéneas de Dirichlet y condiciones de Neumann:

$$\nabla \cdot \sigma(u) + b = 0 \quad (2.16)$$

$$\sigma(u) \cdot \nu = t$$

$$u|_{\Gamma_1} = \bar{u}$$

Donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $u \in \Omega$.

Antes de plantear el problema abstracto, se comentan algunos aspectos relacionados a este problema, como el hecho de que para obtener la ecuación anterior se emplea el cálculo variacional, a partir del cual se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange de cierto funcional relacionado con la energía de deformación elástica. Sin embargo, resolver la ecuación anterior en su forma diferencial para diversas condiciones de frontera no es tarea fácil, por lo que es conveniente llevarla a su forma variacional.

Como primera aproximación al tema se puede analizar el problema de Dirichlet homogéneo, es decir se emplea la ecuación anterior con las condiciones esenciales

$$u|_{\Gamma_1} = 0$$

Ahora, si se identifica el espacio funcional al que pertenecen las soluciones de la ecuación (2.16), se puede multiplicar la misma por alguna función que forme parte de la base del espacio funcional, y obtener la medida de la misma de la siguiente manera

$$\int_{\Omega} [v \cdot \nabla \cdot \sigma(u) + b \cdot v] d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

Si a esta última expresión se le aplica el teorema de Gauss, se emplea el tensor de deformación y se utilizan las condiciones de frontera, se obtiene

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega$$

Esta última expresión se puede representar de la siguiente manera

$$a(u, v) = l(v) \quad (2.18)$$

Donde a, l son aplicaciones bilineal y lineal respectivamente. De esta manera el término izquierdo de la ecuación y el término derecho de la misma vienen representados así

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega \quad (2.19)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega \quad (2.20)$$

Se debe notar que $a(u, v)$ es una aplicación simétrica construida a partir de la teoría de elasticidad. Esto último se estudia en la sección 2.4 para relacionar la solución de la formulación variacional y la solución de la ecuación original.

Ya que se dispone de un entendimiento inicial del proceso de formulación variacional, se define el problema variacional abstracto sin pérdida de generalidad, de la siguiente manera.

Definición 2.3.1. Sea V espacio de Hilbert, con producto escalar (\cdot, \cdot) y norma asociada $\|\cdot\|$. Sea $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y sea $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua, entonces el problema

$$(P) \begin{cases} \text{Calcular } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

(P) se denomina **Problema Variacional Abstracto**.

Como dato histórico se puede ver que el punto de partida de la solución de la primera ecuación del presente acápite es el funcional de energía potencial y elástica, el que se puede representar en términos de a y l como se indica a continuación

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v) \quad (2.21)$$

Dicho funcional representa la diferencia entre la energía elástica y el trabajo virtual de fuerzas externas. Se puede ver rápidamente que la solución del funcional anterior es un problema de extremos. Así tenemos

$$J(v) = J(u + v - u) = \frac{1}{2}a(u + v - u, u + v - u) - l(u + v - u)$$

Considerando la simetría de $a(u, v)$, la expresión anterior se puede escribir así

$$J(v) = J(u) + a(u, v - u) - l(v - u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u)$$

Si u es solución de $a(u, v) = l(v)$ entonces se cumple que $a(u, u - v) = l(u - v)$; además, asumiendo $a(u, v)$ elíptica (ver definición 2.3.2) se tiene que:

$$\frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq \alpha \|v - u\|^2$$

Por tanto considerando $u \neq v$ se puede ver que

$$J(v) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2$$

De esto se concluye que $J(v) > J(u)$, lo que indica que la solución del problema variacional débil es un problema de extremos. Si u es un mínimo de $J(v)$, se puede apreciar que para todo $s \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{J(u + sv) - J(u)}{s} &\geq 0 \\ \frac{a(u + sv, u + sv) - a(u, u) + 2l(u) - 2l(u + sv)}{s} &\geq 0 \\ 2(a(u, v) - l(v)) + sa(v, v) &\geq 0 \end{aligned}$$

Si se toma el límite cuando $s \rightarrow 0$ se tiene que:

$$a(u, v) \geq l(v)$$

Si hacemos el cambio de v por $-v$ obtenemos:

$$a(u, v) \leq l(v)$$

Estos dos últimos resultados indican que $a(u, v) = l(v)$, es decir el problema de extremos que conduce a las ecuaciones de elasticidad es un problema de mínimos estrictos. Lo que podría ser enunciado de la siguiente manera:

Si $a(u, v)$ es simétrico y elíptico, entonces u es solución del problema (P) si y sólo si es un mínimo de $J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - l(v)$.

En el cálculo variacional se utiliza con frecuencia la propiedad de elipticidad de ciertas funcionales bilineales; entonces es necesario definir esta propiedad.

Definición 2.3.2. Dada una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ en un espacio lineal normado H , se dice que la forma bilineal es acotada (o continua) si $\exists c_1 < \infty$ tal que:

$$|a(v, w)| \leq c_1 \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H$$

Y se dice que es elíptica (o coercitiva) en $V \subset H$ si \exists una constante $c_2 > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq c_2 \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V$$

En general, un problema variacional simétrico se plantea de la forma presentada anteriormente mientras se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $(H, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.
- b) V es un subespacio cerrado de H .
- c) $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal acotada, simétrica y coercitiva en V .

Con los conceptos e ideas previas, a continuación se establece el tratamiento de la existencia y unicidad de la solución del problema variacional abstracto (P). Para esto es importante el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. (Lax-Milgram). *Suponer que en el problema variacional (P) la forma bilineal es V-elíptica. Entonces existe solución única y la aplicación que lleva de la forma bilineal a la solución u es continua.*

Demostración. Para una lectura de su demostración se puede consultar la mayoría de los textos clásicos, como por ejemplo [11] o [12]. □

La solución del problema variacional abstracto (P) en dimensión infinita se realiza a través de aproximaciones en espacios funcionales de dimensión finita, según el esquema de aproximación "Ritz-Galerkin", es decir dado el problema (P):

$$(P) \begin{cases} \text{Calcular } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Se considera ahora $\{V_h\}_{h>0}$ ($h \rightarrow 0$) con V_h sub espacio de dimensión finita de V . Por lo tanto podemos definir para cada índice h el problema (que también será variacional).

$$(P_h) \begin{cases} \text{Calcular } u_h \in V_h \text{ tal que,} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

V_h también será espacio de Hilbert por ser subespacio de dimensión finita de un espacio de Hilbert V , con su correspondiente norma inducida de V . Si la forma bilineal a es *elíptica* en V , es decir, si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in V,$$

Entonces también la forma bilineal a es V_h -elíptica es decir

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u_h \in V_h \subseteq V.$$

De acuerdo al teorema de Lax, los problemas abstractos P y P_h tienen solamente una solución, razón por la cual si se encuentra una solución en el espacio de dimensión finita, ésta debe ser la misma en el de dimensión infinita, esto gracias al hecho de que el problema P_h está definido en un espacio de dimensión finita denso en el espacio solución de P . A continuación se formalizan estas ideas.

Lema 2.3.1. (Lema de Céa). Si se cumplen las condiciones del teorema de Lax se tiene

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \text{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

Donde M es la constante de continuidad de la forma bilineal, y α es la constante de coercitividad de la misma.

Demostración.

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - u_h + v_h - v_h) \\ a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) - a(u - u_h, u_h - v_h) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la bilinealidad y el hecho de que la solución de P_h está en el espacio solución de P , con $w_h = u_h - v_h$, se tiene:

$$\begin{aligned} a(u, u_h - v_h) &= l(u_h - v_h) \\ a(u_h, u_h - v_h) &= l(u_h - v_h) \end{aligned}$$

Por lo que al restar las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} a(u, u_h - v_h) - a(u_h, u_h - v_h) &= 0 \\ a(u - u_h, u_h - v_h) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, al reemplazar la última expresión obtenida en la segunda expresión de esta demostración, se tiene:

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$$

Ahora, por coercitividad y según la identidad de Schwartz:

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

De donde:

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \forall v_h \in V_h,$$

□

Se puede observar que a medida que la dimensión de V_h aumenta $V_h \rightarrow V$. Entonces la norma:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \rightarrow 0$$

Lo que significa que se obtiene la solución del problema P a través de la de P_h .

Teorema 2.3.2. (Teorema General de Convergencia)

Suponer que existe \mathcal{V} subespacio denso de V y $v_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$, tales que se cumple que $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h(v)\| = 0$, $v \in \mathcal{V}$. Entonces el método de aproximación variacional converge, es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0, \quad u \in V$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, con \mathcal{V} subespacio denso en V , entonces $\exists v \in \mathcal{V}$, tal que:

$$\|u - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2c}$$

Con $c = \frac{M}{\alpha}$. Por la hipótesis del teorema:

$$\exists h_0 \text{ tal que } \|v - v_h(v)\| < \frac{\varepsilon}{2c}, \quad \forall h \leq h_0$$

Finalmente, en virtud del Lema de Céa:

$$\|u - u_h(v)\| \leq c \|u - v_h(v)\| \leq c (\|u - v\| + \|v - v_h(v)\|) \leq \varepsilon$$

ya que $v_h(v) \in V_h$.

□

Teorema 2.3.3. Si la forma bilineal continua $a(u, v)$ es V -elíptica (coercitiva), entonces $\exists u_m \in V_m$, solución única del problema (P_m) y el $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$, en V (converge fuertemente), donde u es la solución del problema (P) .

Demostración. Para una lectura de su demostración ver [19].

□

Notar que el teorema 2.3.3 prueba la consistencia de las aproximaciones.

2.3.1. Método de Galerkin

Por lo mencionado en las secciones 2.2 y 2.3, se está en condiciones de describir el método de Galerkin.

Dada:

$$Au = f \quad (2.22)$$

Una ecuación diferencial en el espacio H , el problema consiste en encontrar un elemento $u_0 \in D_A$ (Dominio de A) que cumpla:

$$(Au_0 - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Entonces, $\forall \varphi_k \in H$ base de H , se tiene que:

$$Au_0 - f = 0 \quad \text{en } H$$

Esta expresión indica que u_0 es la solución del problema.

Este razonamiento constituye la base del método de Galerkin, que es la base fundamental de la mayoría de los métodos sin malla y del método de los elementos finitos. A continuación, consideremos de nuevo la base $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ del subespacio H . Se puede construir una solución aproximada u_n a partir de esta base, en la forma:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (2.24)$$

Siendo n un número arbitrario, pero fijo; a partir de este momento, los coeficientes a_k son las incógnitas. En el método de Galerkin, estas constantes se calculan imponiendo la siguiente igualdad:

$$(Au_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

La ecuación anterior representa un sistema de n ecuaciones con n incógnitas (los coeficientes a_k). Dado que el operador diferencial A es lineal, las ecuaciones anteriores se podrán transformar en:

$$(a_1 A\varphi_1 + \dots + a_n A\varphi_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

O bien,

$$(A\varphi_1, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_1)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_1)a_n = (f, \varphi_1)$$

$$(A\varphi_1, \varphi_2)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_2)a_n = (f, \varphi_2)$$

...

$$(A\varphi_1, \varphi_n)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_n)$$

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.4. *Sea A un operador definido positivo sobre un conjunto D_A , denso en un espacio separable de Hilbert H y $f \in H$, considerar que los elementos $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in D_A$, constituyen una base de D_A . Entonces, la sucesión de Galerkin, presentada en un principio con las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, determinadas unívocamente por las condiciones mostradas, esto es, por el sistema de ecuaciones (2.25), converge a la solución de la ecuación $Au = f$.*

2.4. FORMA DÉBIL DEL PROBLEMA GENERAL DE ELASTICIDAD LINEAL

2.4.1. Formulación Débil Considerando Condiciones Mixtas

En la mayoría de las aplicaciones físicas, las magnitudes relativas a funcionales multilineales están relacionadas por sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Así por ejemplo, debe considerarse que un sistema de ecuaciones de este tipo procede de la mecánica de medios continuos aplicada a sólidos, la cual se denomina "ecuación de equilibrio". Así que para tratar este problema se aplica la teoría desarrollada anteriormente. Gran parte del trabajo consiste en el establecimiento de la coercitividad de la formulación variacional, la cual garantiza el cumplimiento del teorema de Lax-Milgram; una vez hecho esto, la aplicación de la teoría es inmediata para el caso general.

Entonces, considérese un material elástico e isotrópico definido sobre $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Además sea $u(x)$ el vector de desplazamiento y $b(x)$ el vector de fuerzas de cuerpo en Ω . Entonces según la teoría de elasticidad lineal a la que se ha hecho referencia en el acápite 2.1.2, $u(x)$ debe satisfacer la ecuación:

$$\nabla \cdot \sigma(u) + b = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.26)$$

Si se considera $\epsilon(u)$ como en (2.2) se tiene:

$$\epsilon(v) = \nabla \otimes v + \frac{1}{2}(\nabla \times v)\chi \quad (2.27)$$

Donde:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Para un medio estático el tensor de esfuerzos está definido por la ecuación constitutiva (2.3).

Sean Γ_1 y Γ_2 dos subconjuntos abiertos de $\partial\Omega$, tal que $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Con condiciones de Dirichlet no homogéneas (desplazamiento) sobre Γ_1 , como:

$$u|_{\Gamma_1} = \bar{u} \quad (2.29)$$

Y condiciones de Neumann (tensión) sobre Γ_2 , como:

$$(\sigma(u) \cdot \nu)|_{\Gamma_2} = t \quad (2.30)$$

Donde ν es el vector unitario normal. Nótese que, si $\Gamma_1 = \emptyset$ o $\Gamma_2 = \emptyset$, el problema de contorno es llamado de Neumann o Dirichlet (tracción o desplazamiento) puro, respectivamente. Además, también se debe notar que $\epsilon(u)$ posee un núcleo no trivial, dado por:

$$MR := \{v : v = c + d(x_2, -x_1)^T, c \in \Omega, d \in R\}$$

el cual representa el espacio de los movimientos infinitesimales de cuerpo rígido, ya que al ser núcleo (es decir $\epsilon(v) = 0$) las deformaciones siempre son nulas. Ahora, se sabe que $u \in H^2(\Omega)$ satisface la ecuación de equilibrio. Entonces para cualquier $v \in H^1(\Omega)$ y $v|_{\Gamma_1} = 0$, se obtiene lo siguiente:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma(u) \cdot v d\Omega$$

Al usar la identidad de Green, el teorema de la divergencia [34] y reemplazar la ecuación constitutiva en la expresión anterior, se obtiene:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \{2\mu\epsilon(u) + \lambda \text{tr}(\epsilon(u))\delta\} : \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma_2} \sigma(u) \cdot \nu \cdot v dS$$

Luego, la formulación débil de la ecuación de equilibrio se escribe como sigue:

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u|_{\Gamma_1} = g$ y:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v ds \quad (2.31)$$

Para todo $v \in V$, donde:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega$$

$$V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

Es importante notar que $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega$, ya que esta representación será útil en el capítulo cuatro para la representación discreta de la formulación débil.

de MR son polinomios de primer grado, estos sólo cumplen con la condición si sus coeficientes constantes son idénticamente nulos, es decir si $v \equiv 0$, por lo que este elemento es el único que pertenece al conjunto mencionado. Entonces, en virtud de la primera desigualdad de Korn (la cual es válida $\forall v \in H^1$), se tiene que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Pero como se manifestó anteriormente, el único elemento de este conjunto cumple que:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 d\Omega = 0$$

Por lo tanto:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.32)$$

Además, se tiene la condición que $medida(\Gamma_1) > 0$. Esto implica la existencia de más elementos que satisfagan la condición $v|_{\Gamma_1} = 0$ y ya que todos los demás elementos son $v \neq 0$, se tiene que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \neq 0$, se concluye que los demás elementos de V deben pertenecer a $\overline{H^1}$. Para estos elementos se cumple la segunda desigualdad de Korn, es decir:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.33)$$

Entonces, por (2.32) y (2.33) se concluye que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V \quad (2.34)$$

donde, $C_1 = \max\{C, \alpha\}$. □

Ahora, es momento de explicar cómo este corolario ayuda a probar la coercitividad de la aplicación bilineal $a(u, v)$, la cual obviamente es el motivo del corolario. Se debe notar que:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot v)(\nabla \cdot v)) d\Omega \\ a(v, v) &= \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot v)^2) d\Omega \geq 2\mu \int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) d\Omega = 2\mu \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ a(v, v) &\geq 2\mu \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 2\mu C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

A continuación se debe probar la continuidad (acotación) de la forma bilineal $a(u, v)$.

Entonces tenemos:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega$$

$$|a(u, v)| \leq 2\mu \left| \int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(v) d\Omega \right| + \lambda \left| \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v) d\Omega \right|$$

$$|a(u, v)| \leq 2\mu |(\epsilon(u), \epsilon(v))| + \lambda |(\nabla \cdot u, \nabla \cdot v)|$$

$$|a(u, v)| \leq 2\mu \|\epsilon(u)\|_{L^2} \|\epsilon(v)\|_{L^2} + \lambda \|\nabla \cdot u\|_{L^2} \|\nabla \cdot v\|_{L^2}$$

Con lo cual se concluye que la forma bilineal $a(u, v)$ es acotada, por ser u y v continuas en \mathbb{R}^n .

Entonces, gracias a estas dos últimas ideas, se puede concluir que efectivamente el funcional bilineal $a(u, v)$ es coercitivo en V , acotado y obviamente simétrico, con lo cual se garantiza la solución única del problema abstracto (resultado de la ecuación de equilibrio) como consecuencia del teorema de Lax-Milgram.

Nota 1. Un hecho importante en este desarrollo es que inicialmente se exigía que exista $\nabla \cdot \sigma(u)$ para u , con lo que la función solución fuerte o clásica del problema, en caso de existir, debe pertenecer al espacio $C^2(\Omega)$, de lo contrario no existiría la expresión. Como consecuencia de la manipulación efectuada en la subsección 2.4.1, la solución débil del problema se busca en el espacio H^1 , es decir, se reducen las exigencias sobre el espacio de búsqueda, a funciones con sólo una derivada continua en casi todos los puntos.

Si bien es cierto con esto queda resuelto el problema, se debe observar que durante el trabajo de las ecuaciones, las condiciones de Neumann surgieron naturalmente. No ocurrió lo mismo con las condiciones de desplazamiento; más aún, al abordar estas condiciones aparece un nuevo problema, ya que se pierde la linealidad del conjunto de funciones en el que se busca la solución. Para resolver este problema se utiliza un cambio de variable que se plantea de la siguiente manera:

Supongamos las condiciones de deformación como:

$$g = w|_{\Gamma_1}$$

Entonces, sea $u^* = u - w$, además de la ecuación (2.31):

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma$$

$$a(u^* + w, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma$$

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma - a(w, v) \quad (2.36)$$

Así, el problema es equivalente a encontrar $u^* \in V$ tal que para todo $v \in V$, se cumple:

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v d\Gamma - \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(w) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot w)(\nabla \cdot v)) d\Omega. \quad (2.37)$$

Nótese que en el lado derecho de la ecuación b, t, w son conocidos, así que todo este lado es únicamente una funcional lineal de v . Por lo tanto, al definir el lado derecho de la ecuación como $F(v)$, el problema consiste en encontrar u^* tal que:

$$a(u^*, v) = F(v) \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) vuelve a ser el problema abstracto desarrollado en 2.4.1, para el que se demostró la unicidad de su solución, con ayuda del teorema de Lax. Además, se debe mencionar también que la función que depende de w en el funcional $F(v)$ es formulable por métodos matemáticos conocidos, tal como el "Método de los Multiplicadores de Lagrange".

Ahora, una vez concluida la formulación y demostración de la unicidad del problema planteado, queda por demostrar la existencia de la solución. Para esto se presenta el siguiente teorema.

Teorema 2.4.3. *Supongase $b \in L^2(\Omega)$ y $t \in L^2(\Gamma)$. Entonces el problema variacional:*

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Posee solución si y sólo si, se cumple la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in MR$$

Y cuando el problema variacional posee solución, existe una solución única en $\overline{H^1}(\Omega)$.

Demostración. (Necesidad) Si el problema variacional posee solución, entonces:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = a(u, v)$$

Pero:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega; \quad \epsilon(v) = 0 \text{ y } \nabla \cdot v = 0 \quad \forall v \in MR$$

$$\therefore a(u, v) = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS = 0 \quad \forall v \in MR$$

(Suficiencia) Si se supone que se cumple la segunda condición del problema, es decir que:

$$\int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in MR$$

Según la segunda desigualdad de Korn y el teorema de Lax, se garantiza la coercitividad del funcional bilineal $a(u, v)$ y por lo tanto existe una única solución $u \in \overline{H^1}(\Omega)$ tal que:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in \overline{H^1}(\Omega)$$

Pero por razones análogas a las mencionadas en la primera parte de esta demostración, se tiene que:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in MR$$

Entonces como $H^1(\Omega) = MR \oplus \overline{H^1}(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Y por lo tanto u es la solución única del problema variacional. □

Un aspecto importante del teorema 2.4.3 es que indica categóricamente que el equilibrio de fuerzas volumétricas y de superficie es una condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución de (2.26), lo que concuerda con el teorema de Clapeyron presentado en [39].

CAPÍTULO III

INTERPOLACIÓN POR VECINOS NATURALES

Este tipo de interpolación fue desarrollado por Sibson (1980) y Watson (1981). En este capítulo se presenta una descripción detallada de la construcción, propiedades e implementación de las funciones de forma para el método de elementos naturales. Se discute también la imposición de condiciones de contorno y la correspondencia exacta del *NEM* con el método de elementos finitos en una dimensión.

Se inicia describiendo estructuras geométricas de gran utilidad en el contexto de interpolación por vecinos naturales y que a la vez servirán para presentar las siguientes secciones.

3.1. Diagramas de Voronoi y triangulación de Delaunay

El desarrollo a continuación se presenta para el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 . La mayoría de los conceptos son extendibles a \mathbb{R}^3 o incluso a un espacio genérico \mathbb{R}^n . En los casos que no se pueda realizar esta extensión se hará una referencia explícita a esas particularidades.

Dado un conjunto de puntos $N = [n_1, n_2, \dots, n_M]$ en el plano, el diagrama de Voronoi (o Diagrama de Voronoi de primer Orden) de este conjunto es una subdivisión del plano en regiones T_I , las cuales son cerradas y convexas o ilimitadas. Cada una de estas regiones está asociada con un nodo n_I , tal que cualquier punto en T_I está más cerca de T_I (vecino más cercano) que cualquier otro nodo n_J con $I \neq J$; dicho de otra manera, T_I es el lugar geométrico de los puntos que están más cerca al nodo n_I que a cualquier otro. Estas regiones T_I son conocidas como celdas de Voronoi (también llamadas Polígonos de Thiessen o polígonos de Voronoi); A continuación se da la definición matemática:

Definición 3.1.1. Celda de Voronoi. Dado un conjunto de nodos en el plano $N = [n_1, n_2, \dots, n_M]$,

la celda de Voronoi T_I para un nodo n_I se define como el subconjunto:

$$T_I = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, n_I) < d(x, n_J) \quad I \neq J\} \quad (3.1)$$

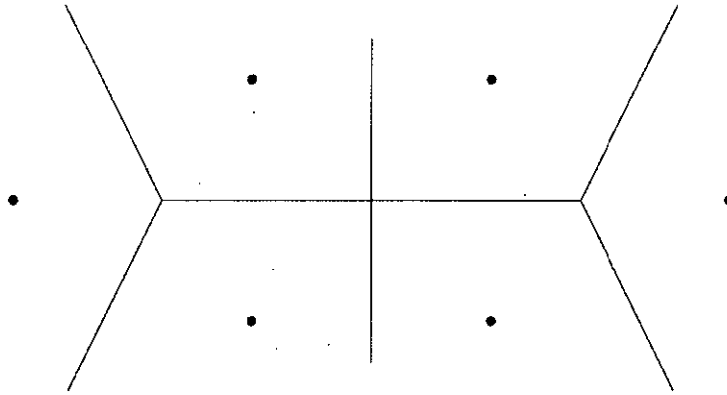
Donde, $d(n_I, n_J)$ es la distancia de dos puntos n_I, n_J del plano (métrica Euclidiana).

El diagrama de Voronoi $V(N)$ para un conjunto de 6 nodos (N) se muestra en la figura (3.1), según la definición dada, la celda de Voronoi (T_I) para un nodo (n_I), vendría a ser la intersección de semiplanos abiertos, cada uno de los cuales está limitado por la mediatriz de la recta que une n_I y n_J ($J \neq I$). Consecuentemente, las celdas de Voronoi de nodos que se encuentren dentro de la cápsula convexa $CH(N)$ (menor conjunto convexo que contiene al conjunto de nodos) serán convexas, mientras que las asociadas con nodos en el borde, serán ilimitadas, ver Figura 3.1a.

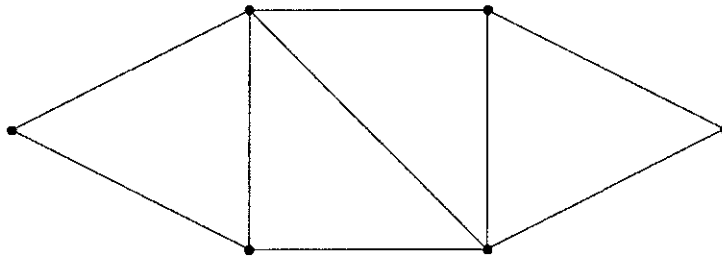
La triangulación de Delaunay se construye uniendo los nodos cuyas celdas de Voronoi tienen bordes en común; existe una dualidad entre el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos, esto es, hay una línea de Delaunay entre dos nodos en el plano si y solamente si sus celdas de Voronoi comparten un borde en común, una explicación detallada se puede encontrar en [9], ver Figura 3.1b.

La triangulación de Delaunay posee las siguientes propiedades importantes:

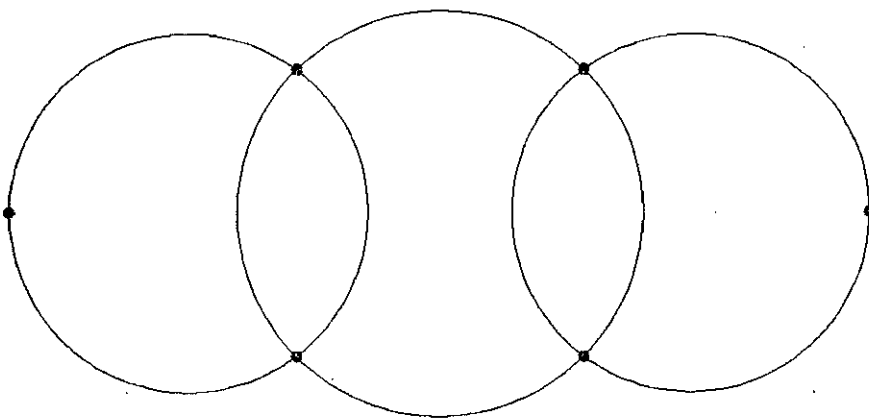
- De entre todos los triángulos, los triángulos de Delaunay maximizan el mínimo ángulo (Lawson, 1977)
- Cumplen con el criterio del circuncírculo vacío (Lawson, 1977), esto es, si un triángulo de Delaunay fue generado por los nodos n_I, n_J, n_K entonces el circuncírculo de este triángulo no contiene ningún otro nodo (caso no degenerado), esto puede ser apreciado en la figura 3.1c. donde se muestran los circuncírculos de Delaunay para el conjunto de 6 nodos. estos círculos son conocidos como circuncírculos de vecino natural (Watson, 1992). Existe el caso degenerado en el que el número de puntos ($n \geq d + 2$) estén situados en la misma esfera, siendo d la dimensión del problema, por ejemplo tenemos el caso de 4 puntos en una circunferencia o 5 puntos en una esfera.
- De la forma en la que creamos los diagramas de Voronoi se deduce también que los centros de los circuncírculos serán los vértices de las celdas de Voronoi.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.1: Estructuras geométricas para un conjunto de 6 nodos (a) Conjuntos de nodos N y su diagrama de Voronoi $V(N)$, (b) Triangulación de Delaunay $DT(N)$, (c) Circuncírculos de vecino natural

La importancia de la triangulación de Delaunay en el contexto de la solución de ecuaciones diferenciales parciales, radica en su uso para la generación de mallas para el método de elementos finitos. Muchos algoritmos han sido creados con este propósito, ver [24].

En la presente tesis, usamos el paquete *Triangle* (ver [36]); la discretización nodal del dominio y la triangulación de Delaunay son dibujados usando el paquete *Show Me* (ver [35]).

3.2. Construcción de las funciones de forma

Para definir los vecinos dados naturales de un punto dado en el plano respecto a un conjunto de nodos, Sibson (1980) usa el concepto de diagramas de Voronoi de segundo orden. Con estos diagramas podremos construir las coordenadas del vecino natural, las cuales posteriormente serán nuestras "funciones de forma".

Definición 3.2.1. Celda de Voronoi de segundo orden.

Dado un conjunto de puntos $N = [n_1, n_2, \dots, n_M]$ en el plano, el diagrama de Voronoi de segundo Orden de un punto x del plano es una subdivisión del plano en regiones T_{IJ} llamadas celdas de Voronoi de segundo orden. Cada una de ellas está definida (Sibson, 1980) como:

$$T_{IJ} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, n_I) < d(x, n_J) < d(x, n_K) \quad K \neq I, J\} \quad (3.2)$$

Podemos hacer una interpretación geométrica de esto diciendo que la celda de Voronoi de segundo orden de un punto x respecto a los nodos I, J es una subregión del plano para la cual se cumple que x está más cerca de los nodos n_I, n_J que de cualquier otro nodo y a la vez la distancia de x al nodo n_I siempre es menor que la respectiva distancia al nodo n_J .

Continuando con el conjunto de nodos de la figura 3.1, insertemos un punto x , y creemos su diagrama de Voronoi de segundo orden. Los resultados se muestran en la figura 3.2

Si obtenemos los nuevos diagramas de Voronoi de x y el conjunto de nodos, entonces los **vecinos naturales** de x son los nodos que forman un borde de triángulo con x en la nueva triangulación; utilizando los conceptos de la sección 3.1. podemos llegar a una definición equivalente de vecinos naturales de un punto x :

Definición 3.2.2. Vecino Natural de un punto.

Dado un conjunto de puntos $N = [n_1, n_2, \dots, n_M]$ en el plano, añadimos un punto x . Si éste cae dentro del circuncírculo del triángulo de vértices n_I, n_J, n_K , entonces dichos nodos se denominan vecinos naturales de x .

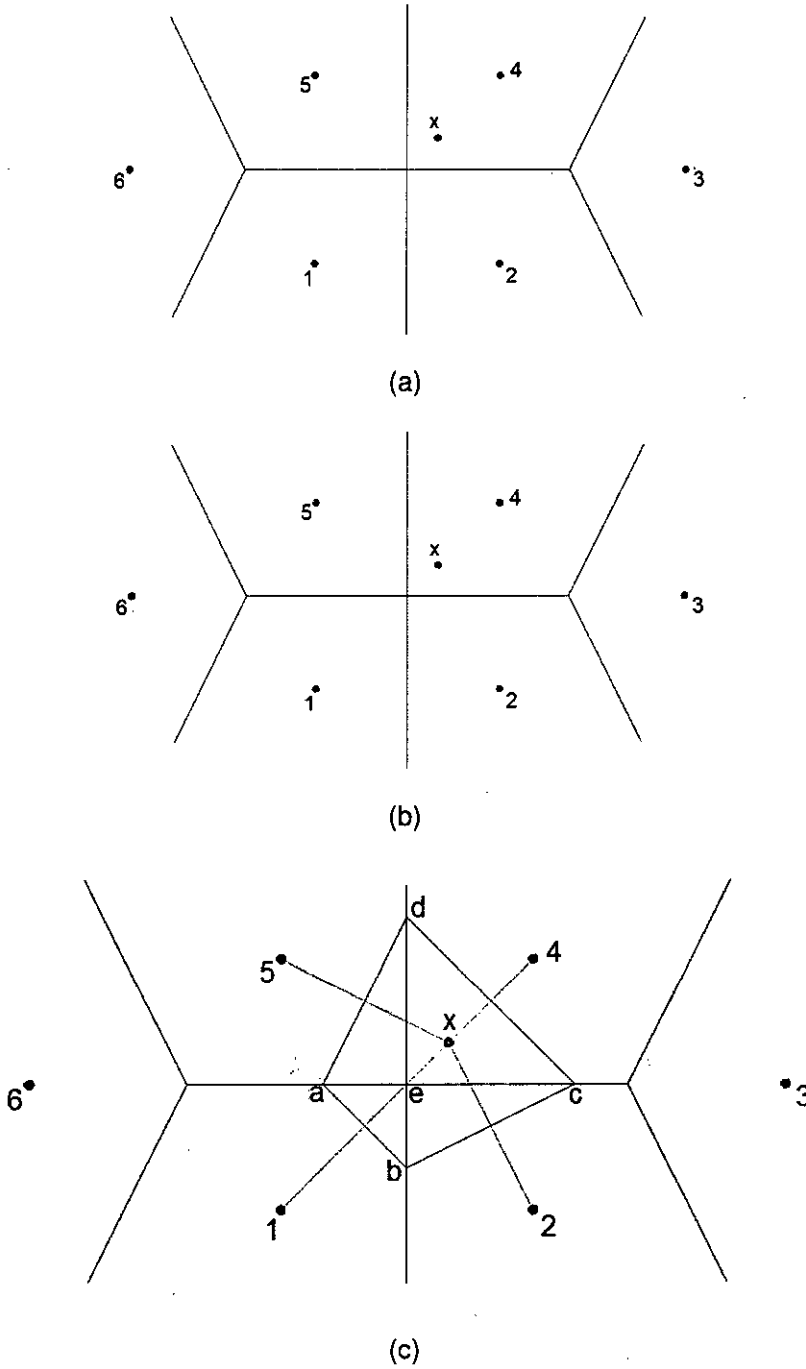


Figura 3.2: Construcción de coordenadas de vecino natural (a) Diagrama de Voronoi original $V(N)$ y el punto x , (b) Circuncírculos de vecino natural originales y x , (c) Celdas de Voronoi de primero y segundo orden de x .

Se observa de la figura 3.2b. que el punto x tiene cuatro ($n = 4$) vecinos naturales (1,2,4,5); en la figura 3.2c. las mediatrices del punto x hacia sus vecinos naturales son construídas obteniendo así la celda de Voronoi T_x (polígono $abcd$).

Sea $k(x)$ la medida de Lebesgue (longitud, área o volumen si tratamos de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 respectivamente) de la celda T_x , y $k_I(x)$ la de la celda T_{xI} . En dos dimensiones las medidas son áreas, y por lo tanto denotamos $A(x) = k(x)$ y $A_I(x) = k_I(x)$.

Definición 3.2.3. Coordenadas de Vecino Natural ($n - n$)

La coordenada de vecino natural de un punto x respecto a su vecino natural I se define como la razón del área de intersección de T_I y T_x al área total de la celda de Voronoi de x :

$$\phi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)} \tag{3.3}$$

Donde I toma los valores de $1, \dots, n$, y $A(x) = \sum_{i=1}^M A_i$

Las 4 regiones mostradas en la figura 3.2c. son celdas de Voronoi de segundo orden, mientras su unión (polígono $abcd$) es una celda de Voronoi de primer orden. Teniendo en cuenta ejemplo que venimos tratando (figura 3.2), la función de forma $\phi_4(x)$ está dada por:

$$\phi_4(x) = \frac{A_{ecd}}{A_{abcd}}$$

Las derivadas de las coordenadas $n - n$ se obtienen derivando la ecuación (3.3):

$$\phi_{I,j}(x) = \frac{A_{I,j}(x) - \phi_I(x)A_{,j}(x)}{A(x)} \tag{3.4}$$

Sea $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ un punto en el plano. Considere un esquema de interpolación para la función real de variable vectorial $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x)u_I \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{3.5}$$

Donde $u_I (I = 1, 2, \dots, n)$ son vectores de desplazamiento en los n vecinos naturales, y $\phi_I(x)$ se toma como la coordenada $n - n$ del punto x en el plano.

3.3. Propiedades

En esta sección se presentan las propiedades de las funciones de forma así como también el interpolante NEM (función de prueba).

3.3.1. Interpolación

De la definición dada en la ecuación (3.3), resulta evidente que:

$$0 \leq \phi_I(x) \leq 1. \quad (3.6)$$

Refiriéndonos a la figura 3.2c, vemos que si x coincide con un nodo, por ejemplo el 4, entonces $\phi_4(x) = 1$ y $\phi_I(x) = 0$, si $I \neq 4$.

Más específicamente, podemos decir que funciones de forma del método de elementos naturales, se diferencian de la mayoría de métodos sin malla en que son estrictamente interpolantes, es decir, la superficie interpolada contiene los valores nodales, esta propiedad es también característica de las funciones de forma del método de elementos finitos:

$$\phi_I(x_J) = \delta_{IJ} \quad (3.7)$$

Donde δ_{IJ} es la función delta de Kronecker.

Como consecuencia de esta propiedad, en la implementación por el método de Galerkin tendremos que las variables de cálculo u_I son los desplazamientos nodales, lo cual está en contraste con la mayoría de métodos sin malla, y a la vez muestra la primera ventaja del método, pues no hace uso de técnicas de aproximación para la prescripción de desplazamientos nodales.

3.3.2. Partición de la Unidad

Por construcción (ecuación 3.3), las funciones de forma del MEN constituyen una partición de la unidad, es decir,

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(x) = 1 \text{ en } \Omega, \quad (3.8)$$

Donde n es el número de vecinos naturales del punto x .

3.3.3. Consistencia y estabilidad

Es bien conocido que para asegurar la convergencia de un método, es necesario que éste sea consistente y estable (ver [8]). La consistencia del método está relacionada con el grado del polinomio que es capaz de reproducir. Si la ecuación diferencial que rige el problema es de orden $2k$, entonces al método se le exige consistencia de orden k , es decir, que sea capaz de reproducir un campo constante en las derivadas de hasta orden k de la variable esencial. Particularmente en el caso de la elastostática, cuya ecuación diferencial es de grado 2, se debe poder reproducir un campo de desplazamientos constante o lineal.

Proposición 3.3.1. Consistencia y estabilidad. *El método de los elementos naturales presentado en las secciones anteriores es consistente y estable.*

Demostración. Sibson en 1980, ver [37], mostró que las funciones de forma del NEM satisfacen:

$$x = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) x_I, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (3.9)$$

Donde x_I es la coordenada geométrica del vecino natural I de x . Este resultado indica que las funciones de forma pueden reproducir exactamente las coordenadas geométricas.

Usando las ecuaciones 3.8 y 3.9, sea $u(x) = \alpha + \beta x$, donde α y β son un vector y escalar constantes, respectivamente.

Los desplazamientos nodales exactos, para cada vecino natural I , están dados por:

$$u_I = \alpha + \beta x_I \quad (3.10)$$

Ahora consideremos la función de prueba del NEM:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) u_I \quad (3.11)$$

Reemplazando la ecuación 3.10 en ésta última, obtenemos:

$$u^h(x) = \alpha \sum_{I=1}^n \phi_I(x) + \beta \sum_{I=1}^n \phi_I(x) x_I \quad (3.12)$$

Usando las ecuaciones 3.8 y 3.9, terminamos la prueba:

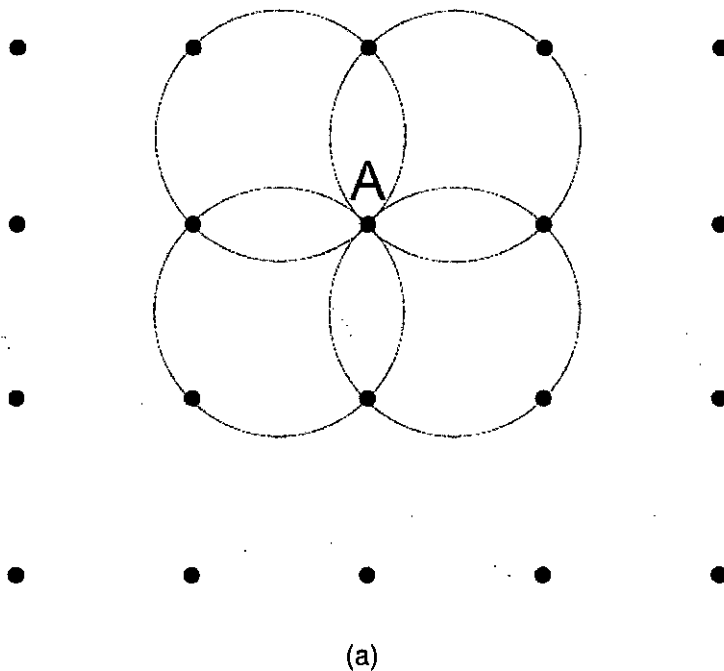
$$u^h(x) = \alpha + \beta x = u(x) \tag{3.13}$$

□

3.3.4. Soporte de las funciones de forma

Si consideramos un nodo $I \in N$, donde N es un conjunto consistente de n vecinos naturales para un punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, el soporte o dominio de influencia de la función de forma $\phi_I(x)$ asociado con el nodo I es definido como el sub-dominio cerrado Ω_{sI} tal que $\phi_I(x) > 0$ en Ω_{sI} , $\phi_I(x) = 0$ en $\partial\Omega_{sI}$, y $\phi_I(x) = 0$ en $CH(N) - \Omega_{sI}$. Por el criterio del circuncírculo vacío, es evidente que para $\phi_I(x)$ tenga una contribución no nula en x , el punto x debe caer dentro del circuncírculo de un triángulo Delaunay que tenga al nodo I como uno de sus vértices.

En la figura 3.3a. se muestra una distribución uniforme de 25 nodos y en la figura 3.3b. se muestra la función de forma del nodo A ($\phi_A(x)$).



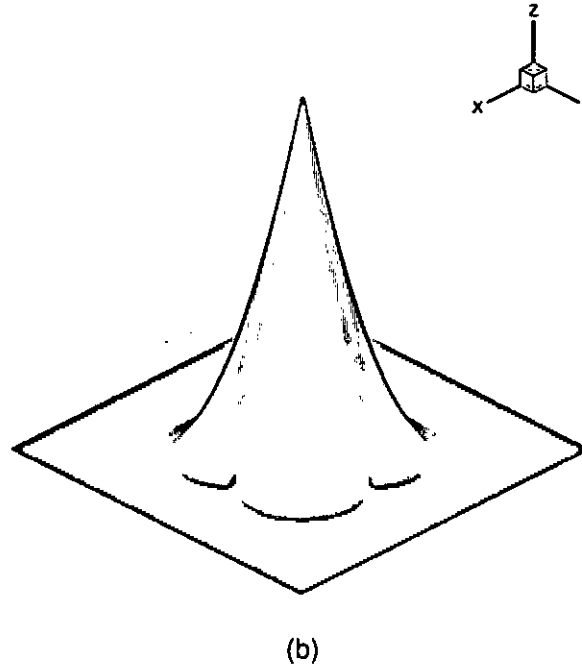


Figura 3.3: Soporte para la función de forma del NEM (a) Conjunto uniforme de nodos, (b) Función de forma $\phi_A(x)$ para el nodo A . (Fuente: Sukumar, 1998)

3.3.5. Continuidad y derivabilidad

la función de forma del MEN es derivable, de clase C^∞ , en todos los puntos del dominio, excepto en los nodos, donde es C^0 (Sibson, 1980). Basados en observaciones de la construcción de las coordenadas de vecino natural (ver Fig.3.3) vemos que $\phi_I(x)$ es una función continua de x . Los únicos puntos que requieren mayor atención son los nodos mismos, pero ya que $\phi_I(x) = 1$ cuando $x \rightarrow x_I$ desde cualquier dirección, entonces la continuidad queda establecida.

La derivabilidad de la función de forma en todos los puntos, menos los nodos, es también evidente.

3.4. Aproximación con el NEM

El grado de aproximación que las funciones de forma del NEM proporcionan en un determinado punto depende directamente del número de vecinos naturales que tiene ese punto. En esta sección consideramos 3 teoremas que muestran el comportamiento de las funciones

de forma en casos particulares; el primero de ellos muestra la correspondencia exacta del NEM con el método de elementos finitos en una dimensión.

3.4.1. Interpolación en una dimensión.

Proposición 3.4.1. *En dominios de una sola dimensión, la función de forma del MEN equivale a la del método de los Elementos Finitos lineales.*

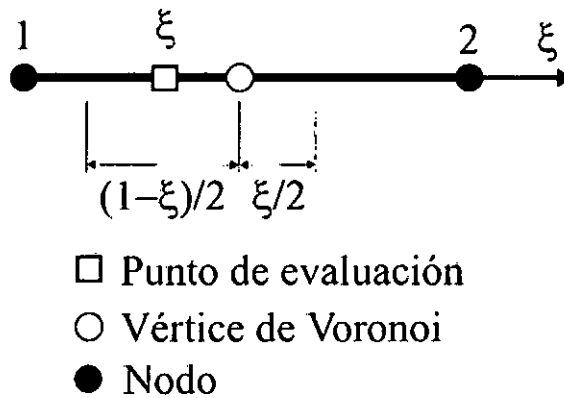


Figura 3.4: Aproximación en el elemento de referencia unidimensional

Demostración. (Sukumar,1998) Considérese un espacio físico conformado por una barra de longitud L , la cual discretizamos por M nodos uniformemente espaciados. Los vértices del diagrama de Voronoi en una dimensión se localizan, por definición, en el punto medio entre los nodos. Como consecuencia, cada punto del intervalo abierto $(0, L)$ tiene siempre dos vecinos naturales (el nodo más cercano y el segundo nodo en cercanía), mientras que los puntos extremos tienen sólo un vecino natural.

Tomemos dos nodos consecutivos de esta discretización, tales como los nodos n_I y n_{I+1} , numerados en el sistema de referencia como 1 y 2 (ver Fig. 3.4). Llamemos Ω_I a la parte de la barra entre estos nodos. Si establecemos un sistema de coordenadas:

$\zeta = \frac{(x-x_I)}{x_{I+1}-x_I}$, donde $\zeta \in [0, 1]$ podemos escribir las funciones de forma de la siguiente manera:

$$\phi_I(\zeta) = \frac{L_{\zeta I}}{L_{\zeta 1} + L_{\zeta 2}} \tag{3.14}$$

Siendo:

$$L_{\zeta 1} = \frac{(1-\zeta)}{2} \quad \text{y} \quad L_{\zeta 2} = \frac{\zeta}{2}$$

De aquí se deduce que $\phi_1(\zeta) = 1 - \zeta$ y que $\phi_2(\zeta) = \zeta$, las cuales son las funciones de forma lineales del FEM. □

3.4.2. Interpolación en dos dimensiones.

A continuación se muestra la equivalencia entre las funciones de forma del NEM a las coordenadas baricéntricas e interpolación bilineal, para los casos especiales de $n = 3$ y $n = 4$ (malla uniforme), respectivamente. Cuando el número de vecinos naturales es mayor que cuatro ($n > 4$), las funciones de forma son funciones racionales cuadráticas (ver referencia [17]).

Teorema 3.4.1. *Si un punto tiene tres vecinos naturales, las funciones de forma del MEN equivalen a las coordenadas baricéntricas del triángulo, es decir, a las funciones de forma del elemento finito triangular lineal (Constant Strain Triangle, CST).*

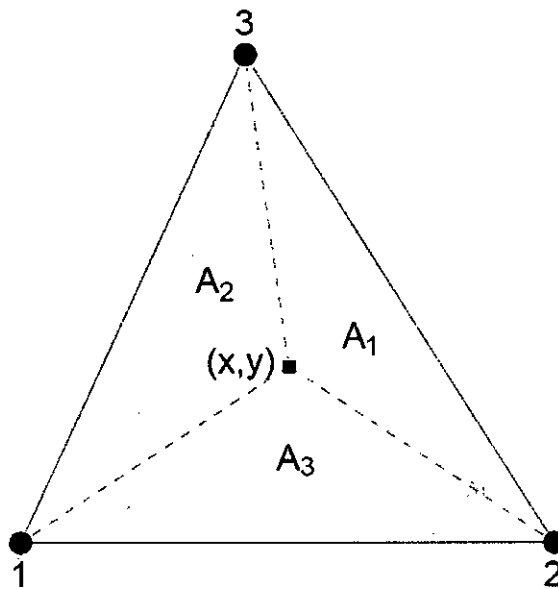


Figura 3.5: Coordenadas baricéntricas ($n = 3$)

Demostración. (Gonzalez, 2004) Denominando 1, 2 y 3 a los nodos vecinos del punto $x = (x, y)$ en cuestión, de coordenadas (x_I, y_I) y acudiendo a la consistencia lineal del NEM (Sección 3.3.3) se deberá cumplir que:

$$\sum_{I=1}^3 \phi_I(x) = 1 \tag{3.15}$$

$$\sum_{I=1}^3 \phi_I(x) x_I = x \quad (3.16)$$

$$\sum_{I=1}^3 \phi_I(x) y_I = y \quad (3.17)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

La solución del sistema de ecuaciones anterior vendrá dada por:

$$\phi_1(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} \quad (3.19)$$

$$\phi_2(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} \quad (3.20)$$

$$\phi_3(x) = \frac{D_3(x)}{D(x)} \quad (3.21)$$

Donde:

$$D(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

y siendo $D_1(x) = 2A_1(x)$, $D_2(x) = 2A_2(x)$ y $D_3(x) = 2A_3(x)$ (Ver Fig.3.5), lo cual constituye precisamente la definición de las coordenadas baricéntricas o, lo que es lo mismo, las funciones de forma de los Elementos Finitos triangulares lineales.

□

Teorema 3.4.2. *Si un punto tiene cuatro vecinos naturales, situados en una malla uniforme, la aproximación obtenida es una interpolación bilineal entre esos nodos.*

Demostración. Viendo el ejemplo de la figura 3.2c, el punto x tenía 4 vecinos naturales los cuales pertenecían a un cuadrado, volvamos a graficar, considerando ahora una nueva enumeración de estos nodos colocados sobre un cuadrado unitario (ver Fig.3.6, entonces tendremos que las coordenadas de los nodos serán: $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (1, 1)$ y $(x_4, y_4) = (0, 1)$. Por definición de las funciones de forma del NEM podemos escribir:

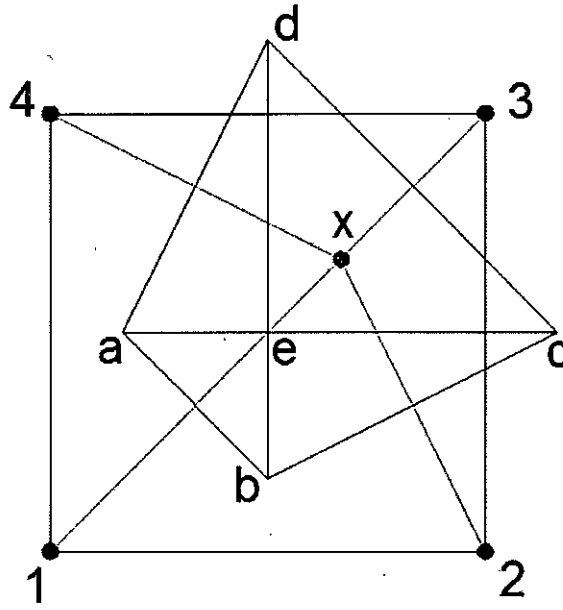


Figura 3.6: Interpolación bilineal en malla uniforme ($n=4$)

$$\phi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)} \quad (I = 1 - 4) \quad (3.23)$$

Donde: $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ y $A_4(x)$, son respectivamente, las áreas de los triángulos bea , bce , cde y eda . $A(x)$ representa al área del polígono $abcd$, y e es el centro del cuadrado unitario con coordenadas $(0,5, 0,5)$.

Calculemos estas áreas usando la siguiente consideración: Por construcción de las celdas de Voronoi se tiene que el vértice a es el centro del círculo que circunscribe al triángulo de vértices $1 - x - 4$, análogamente, b es el circuncentro del triángulo $2 - x - 1$, c corresponde al triángulo $2 - x - 3$ y d corresponde al triángulo $3 - x - 4$. Usando las ecuaciones 4.3 y 4.4, calculamos las coordenadas de cada uno de estos circuncentros:

$$a_1 = \frac{-y + x^2 + y^2}{2x}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{-x + x^2 + y^2}{2y} \quad (3.25)$$

$$c_1 = \frac{1 + y - x^2 - y^2}{2(1 - x)}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

$$d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{1 + x - x^2 - y^2}{2(1 - y)} \quad (3.27)$$

Siendo el área total $A(x) = \sum_{i=1}^4 A_i$, tendremos:

$$A(x) = \frac{(x^2 + y^2 - x - y)^2}{8xy(1 - x)(1 - y)} \quad (3.28)$$

Reemplazando en la ecuación 3.23, podemos expresar las funciones de forma del NEM como:

$$\phi_1(x) = (1 - x)(1 - y) \quad (3.29)$$

$$\phi_2(x) = x(1 - y) \quad (3.30)$$

$$\phi_3(x) = xy \quad (3.31)$$

$$\phi_4(x) = (1 - x)y \quad (3.32)$$

Las cuales son precisamente las funciones de forma bilineales del método de elementos finitos. □

3.5. Imposición de condiciones de contorno.

En esta sección veremos la imposición de condiciones de contorno esenciales. Según se traten contornos cóncavos o convexos, las propiedades de aproximación del método de los elementos naturales son diferentes. Esto hace que el MEN tenga en lo relativo a la imposición de condiciones de contorno esenciales unas características diferentes a los demás métodos sin malla.

En el siguiente teorema, el modelo discreto del problema consiste en un conjunto de nodos N que describen un dominio convexo Ω , con $\partial\Omega$ representando el contorno de la cápsula convexa $CH(N)$.

Teorema 3.5.1. *En el contorno de $CH(N)$ las funciones de prueba $u^h(x)$ son estrictamente lineales entre dos nodos que pertenecen a un borde de un triángulo de Delaunay.*

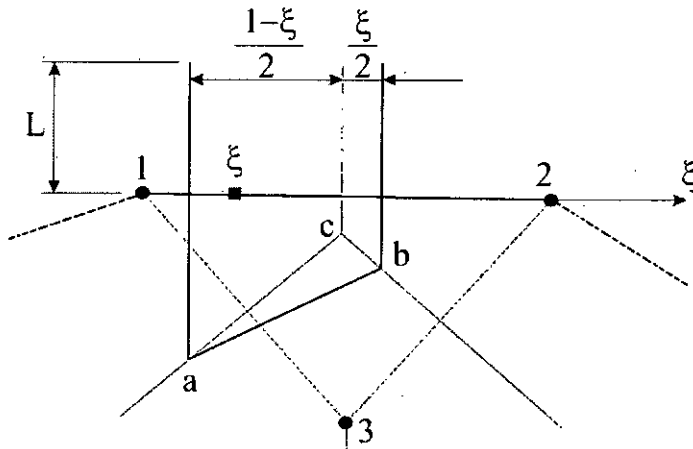


Figura 3.7: Comportamiento lineal de $u^h(\zeta)$ en el borde de la cápsula convexa.

Demostración. (Sukumar, 1998) Tomemos un típico triángulo de Delaunay, el cual tiene un borde (dos nodos) en el borde de cápsula convexa $CH(N)$. La función u^h será evaluada en un punto ζ entre el segmento 1 – 2 (ver Fig.3.7). Considérese un sistema de coordenadas lineal ζ definido entre esos dos nodos. Se supone que el punto ζ tiene sólo tres vecinos naturales (1, 2y3). La figura 3.7 muestra los diagramas de Voronoi de primer y segundo orden. Por definición de las funciones de forma, podemos escribir:

$$\phi_I(\zeta) = \frac{A_I(\zeta)}{A(\zeta)}, (I = 1, 2, 3). \tag{3.33}$$

Donde $A(\zeta) = \sum_{i=1}^3 A_i(\zeta)$. En la Fig.3.7 se puede observar que las celdas de Voronoi en esta parte del dominio no tienen límite superior y por tanto poseen un área no acotada. Por consiguiente, las áreas de la ecuación (3.33) se pueden expresar como:

$$A_1(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} L \frac{1-\zeta}{2} + \delta_1, \quad A_2(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} L \frac{\zeta}{2} + \delta_2, \quad A_3(\zeta) = \delta_3 \tag{3.34}$$

Donde cada δ_I representa un área finita. Se tiene entonces que:

$$\phi_1(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L(1-\zeta) + 2\delta_1}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3} \tag{3.35}$$

$$\phi_2(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L\zeta + 2\delta_2}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3} \tag{3.36}$$

$$\phi_3(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\delta_3}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3} \tag{3.37}$$

Tomando límites cuando $L \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$\phi_1(\zeta) = 1 - \zeta, \quad \phi_2(\zeta) = \zeta, \quad \phi_3(\zeta) = 0 \quad (3.38)$$

Resulta entonces que sólo las contribuciones de las funciones de forma del nodo 1 y 2 son no nulas. Este resultado es cierto en general si se consideran más de tres vecinos naturales. Esto se debe a que las celdas de Voronoi respecto a ζ y un nodo interior son polígonos limitados y por lo tanto tienen áreas finitas; por ejemplo el área $A_3(\zeta)$ en la figura 3.7. Usando la ecuación 3.38, las funciones de prueba en el punto ζ pueden ser escritas como:

$$u^h(\zeta) = (1 - \zeta)u_1 + \zeta u_2 \quad (3.39)$$

las cuales claramente son funciones lineales. □

Del último teorema se observa el hecho de que las áreas asociadas a nodos en el contorno tienen un área infinita, la contribución de los nodos interiores en esta zona se hace nula. Siguiendo este mismo razonamiento, se puede observar cómo esta propiedad no es extensible a dominios no convexos. En ese caso, la contribución de nodos interiores se hace no despreciable frente a la de los nodos exteriores. En el trabajo de Sukumar (1998) se hace referencia a que los errores están en el rango de 2%.

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL NEM

En este capítulo se desarrolla la implementación numérica y computacional del NEM. Inicialmente se muestra cómo plantear el sistema discreto de ecuaciones (Implementación de Galerkin) para la solución de la elasticidad bidimensional, mientras que en las secciones posteriores se indica la manera de resolverla computacionalmente.

4.1. Sistema discreto e implementación del NEM

De acuerdo a la formulación desarrollada en el capítulo 2 y a los conceptos allí expuestos, de la ecuación 2.31, vemos que resolver la ecuación de la elasticidad se reduce al problema (en forma débil):

Hallar $u \in (H^1(\Omega))^2$ tal que :

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v ds \quad \forall v \in V = H_0^1(\Omega)$$

En forma resumida:

Hallar $u \in (H^1(\Omega))^2$ tal que :

$$a(u, v) - l(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Donde:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega$$

$$l(v) = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v ds$$

Para discretizar la formulación débil, consideremos la implementación de Galerkin desarrollada en el capítulo 2. Para el método de elementos naturales se consideran subespacios finito-dimensionales $W^h \subset (H^1(\Omega))^2$ y $V^h \subset V$. La forma discreta se puede expresar como:

Hallar $u^h \in W^h$ tal que :

$$\int_{\Omega^h} \sigma(u^h) : \epsilon(v^h) d\Omega = \int_{\Omega^h} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma^h} t \cdot v ds \quad \forall v^h \in V^h$$

En el proceso de Galerkin-Bubnov, la función de aproximación u^h así como también las funciones de prueba v^h se representan como combinación lineal de las mismas funciones de forma, entonces:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) u_I \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad v^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) v_I \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

Sustituyendo los valores de las funciones de aproximación y de prueba de ecuación 4.2 en la ecuación 4.1., se obtiene el siguiente sistema discreto de ecuaciones lineales:

$$Ku=F \quad (4.2)$$

Donde K_{ij} , es llamada matriz de rigidez nodal o también **Matriz de Rigidez Local** y naturalmente se define como:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega^h} (B_I^T) C (B_J) d\Omega \quad (4.3)$$

$$f_I = \int_{\Gamma^h} \phi_I t ds + \int_{\Omega^h} \phi_I b d\Omega + \int_{\Omega^h} (B_I^T) C (\epsilon^*) d\Omega \quad (4.4)$$

y como $\Gamma^h = \Gamma_2^h \cup \Gamma_2^h$, sabiendo que $v \in V$ y por la definición de V (ver Pág.33), entonces v se anula sobre el contorno esencial y la última ecuación se escribe como:

$$f_I = \int_{\Gamma_2^h} \phi_I t ds + \int_{\Omega^h} \phi_I b d\Omega + \int_{\Omega^h} (B_I^T) C (\epsilon^*) d\Omega \quad (4.5)$$

Donde B_I es:

$$B_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La matriz constitutiva C para un material isótropico, elástico y lineal, viene dada por (según sea el tipo de problema):

$$C = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Deformación Plana} \quad (4.7)$$

$$C = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Esfuerzo Plano} \quad (4.8)$$

En el contexto del NEM, la matriz de rigidez K y el vector de fuerzas F en la ecuación 4.2, son ensamblados usando un enfoque nodal. Debido a la ausencia de una estructura de elemento inherente en el NEM, a diferencia del FEM donde K y F son construídas en base a un enfoque por elementos. La matriz de rigidez del NEM es simétrica y dispersa (con la mayoría de sus elementos nulos), pero no necesariamente es matriz banda.

4.2. Construcción de las Funciones de Forma

En esta tesis se utiliza el algoritmo de Watson (Watson, 1994) para el cálculo de las funciones de forma. Este algoritmo es robusto en dos dimensiones; al final de esta sección se presentan comentarios y métodos para generalizar a más dimensiones. Inicialmente, se presentan formulás geométricas conocidas las cuales se usarán en una segunda parte en la implementación computacional del método. Para mayores detalles ver [40].

4.2.1. Área del triángulo

Consideremos el triángulo mostrado en la figura 4.1., con vértices $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$. El área con signo del triángulo ABC se define como:

$$A = \frac{(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(a_2 - c_2)}{2} \quad (4.9)$$

Para la creación de las funciones de forma, también se requiere hallar las derivadas del área cuando dos de sus vertices (Digamos A y B) son variables, esto es, $A = A(a_1(x), a_2(x))$,

$B = B(b_1(x), b_2(x))$ y $C(c_1, c_2)$ independiente de x . Entonces las derivadas se obtienen de la ecuación 4.9.:

$$A_{,i} = \frac{(a_1(x) - c_1)b_{2,i}(x) + (b_2(x) - c_2)a_{1,i}(x)}{2} - \frac{(b_1(x) - c_1)a_{2,i}(x) + (a_2(x) - c_2)b_{1,i}(x)}{2} \quad (4.10)$$

Donde $i = 1, 2$ y la coma denota diferenciación respecto a la apropiada coordenada espacial.

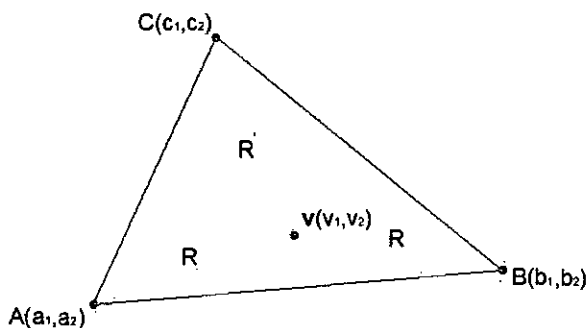


Figura 4.1: Circuncírculo y circuncentro del triángulo.

4.2.2. Circuncentro y circunradio

Para determinar las coordenadas del circuncentro de un triángulo dado, se procede a calcular las ecuaciones de las mediatrices de los lados, las cuales al ser intersectadas de dos en dos proporcionan las ecuaciones para calcular el circuncentro. Usando como referencia la Fig. 4.1 y operando cuidadosamente encontramos que:

$$v_1 = \frac{(a_1^2 - c_1^2 + a_2^2 - c_2^2)(b_2 - c_2) + (b_1^2 - c_1^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_2 - c_2)}{D} \quad (4.11)$$

$$v_2 = \frac{(b_1^2 - c_1^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_1 - c_1) + (a_1^2 - c_1^2 + a_2^2 - c_2^2)(b_1 - c_1)}{D} \quad (4.12)$$

Siendo D:

$$D = 2[(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(a_2 - c_2)]. \quad (4.13)$$

Para la creación de las funciones de forma, también se requiere hallar las derivadas de las coordenadas del circuncentro cuando uno de sus vértices (tal como C) es variable, esto es, $C = \mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y A, B independientes de x . Entonces las derivadas se obtienen de las ecuaciones 4.11. y 4.12.:

$$v_{1,1}(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 - v_1(x))D_{,1}(x)}{D(x)}, \quad (4.14)$$

$$v_{1,2}(\mathbf{x}) = \frac{(\alpha + x_2 D_{,1}(x) - v_1(x) D_{,2}(x))}{D(x)}, \quad (4.15)$$

$$v_{2,1}(\mathbf{x}) = \frac{(-\alpha + x_1 D_{,2}(x) - v_2(x) D_{,1}(x))}{D(x)}, \quad (4.16)$$

$$v_{2,2}(\mathbf{x}) = \frac{(x_2 - v_2(x))D_{,2}(x)}{D(x)}, \quad (4.17)$$

Siendo v_1, v_2 y D definidos en las ecuaciones 4.11, 4.12 y 4.13 respectivamente, y además:

$$\alpha = (b_1 + a_1)(b_1 - a_1) + (b_2 + a_2)(b_2 - a_2), \quad (4.18)$$

$$D_{,1}(x) = 2(a_2 - b_2), \quad D_{,2}(x) = 2(b_1 - a_1). \quad (4.19)$$

Finalmente, por definición y de la Fig.4.1, se tiene que el circunradio R se puede obtener de:

$$R^2(x) = (a_1 - v_1(x))^2 + (a_2 - v_2(x))^2. \quad (4.20)$$

4.3. Algoritmo de Watson

Como se mencionó al inicio del capítulo, en la presente tesis, al tratarse del estudio de la elasticidad en dos dimensiones, se utiliza el algoritmo de Watson [43]. En esta sección se explica el algoritmo, su aplicabilidad e implementación computacional.

Para ilustrar la funcionalidad del algoritmo de Watson, plantearemos una nueva y pequeña distribución de nodos en el plano. El conjunto de nodos consiste de 4 nodos para los cuales se han constudido los diagramas de Voronoi y la triangulación de Delaunay. Además, se muestra un punto x que se ha incluido y se dibujan los diagrama de Voronoi de segundo orden. Respecto a dicho punto calcularemos las funciones de forma, ver Fig.4.2.

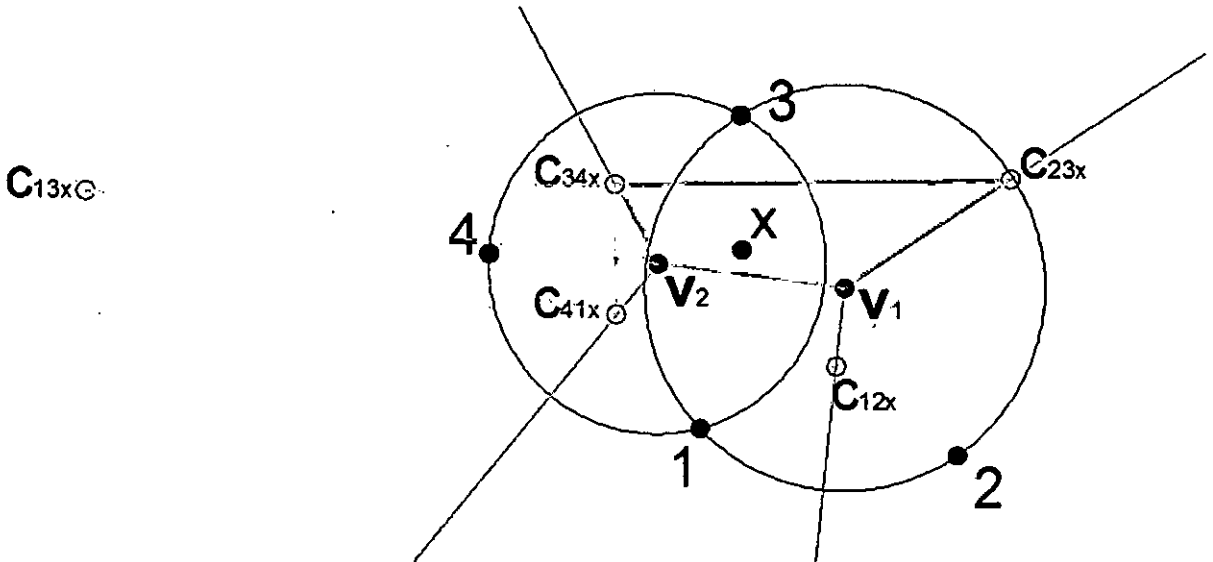


Figura 4.2: Cálculo de las funciones de forma del NEM (Algoritmo de Watson).

La metodología de Watson para el cálculo de las funciones de forma se basa en que la celda de Voronoi de segundo orden de x puede ser calculada mediante la suma de áreas (con signo) de triángulos.

Primeramente, determinamos los vecinos naturales del punto en cuestión: para determinar fácilmente si un nodo del arreglo de nodos es vecino natural de x se usa el criterio del circuncírculo vacío definido en la sección 3.1, esto es, si el cuadrado de la distancia Euclídea desde x al centro del circuncírculo v (asociado con los nodos n_I, n_J y n_K) es menor que el radio del circuncírculo:

$$\|v - x\|^2 < R^2, \tag{4.21}$$

entonces los nodos n_I, n_J y n_K son vecinos naturales de x .

Una vez guardados los triángulos cuyos vértices son los vecinos naturales de x procedemos a explicar el algoritmo de Watson: Sea una terna (p, q, r) que representa los vértices de un triángulo de Delaunay t . Se forma un nuevo grupo de triángulos t_1, t_2, t_3 , definidos cada

uno por el punto x y por dos de los vértices de t . Consideremos ahora una enumeración local ($i = 1, 2, 3$) de los vértices a_i de los nuevos triángulos t_i , a la vez, asociamos cada vértice i con su lado opuesto ($j - k$). Se escribe los circuncentros y sus derivadas en la siguiente forma compacta:

$$c_i(x) = \theta(a_j, a_k, x), \quad (4.22)$$

$$c_{i,m}(x) = \theta_m(a_j, a_k, x), \quad (4.23)$$

Donde $m = 1, 2$ e i, j y k se toman como una permutación cíclica de $1, 2, 3$ en sentido contrario de las agujas de reloj. θ y θ_m representan funcionales que proporcionan el circuncentro de un triángulo y su derivada, respectivamente.

Para fijar ideas, observe la figura 4.2. El punto x claramente posee 4 vecinos naturales los nodos $(1, 2, 3$ y $4)$, los cuales son vértices de dos triángulos $t_1 = t(1, 2, 3)$ y $t_2 = t(1, 3, 4)$. Para el caso de t_1 tendríamos por ejemplo que $c_1 = c_{23x}$, $c_2 = c_{31x}$ y $c_3 = c_{12x}$.

Seguimos trabajando con el triángulo t_1 . El siguiente paso involucra la construcción de subtriángulos usando la colección $c_1(x), c_2(x), c_3(x), v$, de manera tal que v aparece en cada uno de los subtriángulos, manteniendo la permutación cíclica de $1, 2, 3$ para los vértices, es claro también que existen 3 tales subtriángulos: $(c_1(x), c_2(x), v)$, $(c_2(x), c_3(x), v)$, $(c_3(x), c_1(x), v)$, asociados con los nodos $3, 1, 2$. El área y las derivadas de esos triángulos se pueden escribir en la forma:

$$\alpha_{it}(x) = \psi(c_j, c_k, v) \quad (4.24)$$

$$\alpha_{it,m}(x) = \psi_m(c_j, c_k, v) \quad (4.25)$$

Siendo t el triángulo en cuestión, $m = 1, 2$ e i, j, k permutados cíclicamente. Ahora de la asociatividad nodal de local a global. Se puede determinar la contribución de área a cada nodo global, se usa la siguiente simbología:

$$\beta_I(x) = \beta_I(x) + \alpha_{it}(x), \quad (4.26)$$

$$\beta_{I,m}(x) = \beta_{I,m}(x) + \alpha_{it,m}(x), \quad (4.27)$$

Siendo $\beta_I(x)$ y $\beta_{I,m}(x)$ inicializados con valor cero para todos los vecinos naturales antes de empezar con el bucle de iteración.

El procedimiento arriba mencionado se aplica a cada triángulo Delaunay $t(t = 1, 2, \dots, t_n)$. Finalmente, el área de la celda de Voronoi de segundo orden y sus derivadas se obtienen de la siguiente forma:

$$A_I(x) = \beta_I(x), \quad (4.28)$$

$$A_{I,m}(x) = \beta_{I,m}(x), \quad (4.29)$$

Para $m = 1, 2$ e $I = 1, 2, \dots, n$. Recordando que n es el número de vecinos naturales de x .

$$A(x) = \sum_{I=1}^n A_I(x), \quad (4.30)$$

$$A_{,m}(x) = \sum_{I=1}^n A_{I,m}(x). \quad (4.31)$$

Las n funciones de forma estarán dadas por las ecuaciones 3.3 y 3.4, reproducidas a continuación:

$$\phi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)} \quad (4.32)$$

$$\phi_{I,j}(x) = \frac{A_{I,j}(x) - \phi_I(x)A_{,j}(x)}{A(x)} \quad (4.33)$$

En la figura 4.3 se presenta un diagrama de flujo para la implementación computacional del algoritmo que se ha tratado.

El algoritmo de Watson funciona siempre y cuando el punto x no caiga dentro de un lado de un triángulo de Delaunay (Por ejemplo el caso del ejemplo en la Fig.3.2c.). Esto es así pues en el caso que el punto x cae dentro del lado $A - B$ del triángulo (A, B, C) cuando se forme el nuevo subtriángulo (A, B, x) que se requiere en el algoritmo no tiene un único circuncentro pues es infinito. Para el esquema de integración de la forma débil presentado en esta tesis, el punto x siempre cae dentro del triángulo de Delaunay; entonces esta situación nunca se presentará.

Para finalizar, se puede ver que para el cálculo de las funciones de forma bastaría un algoritmo que pueda calcular áreas de polígonos a partir de conocer sus vértices. Para el caso de 3 dimensiones se puede utilizar el algoritmo de Laserre (Laserre, 1983), mientras que para el caso general n -dimensional, el autor recomienda utilizar el software LattE para el cálculo del volumen de polítopos, ver [5].

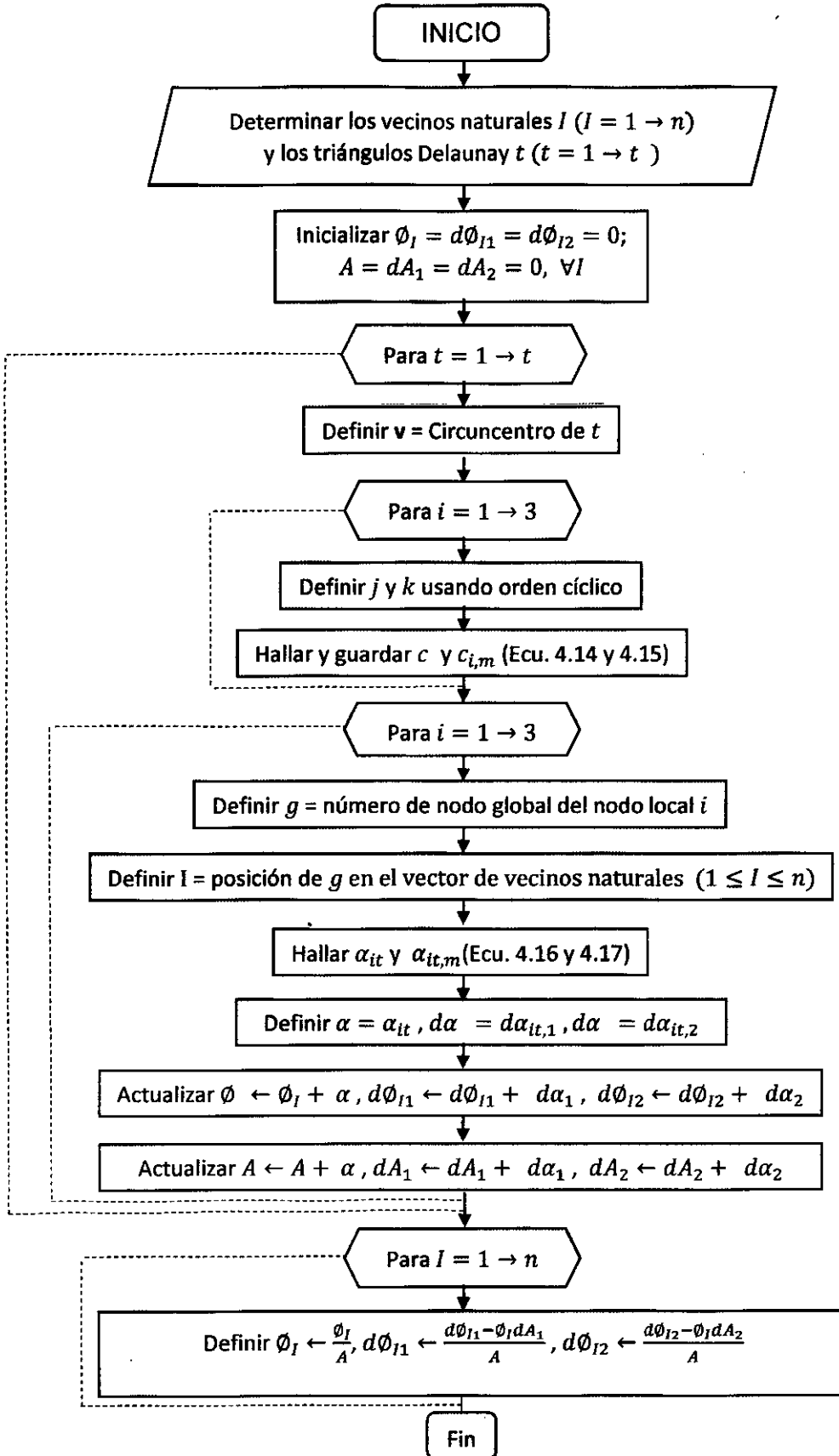


Figura 4.3: Diagrama de flujo para la implementación del Algoritmo de Watson.

4.4. Integración numérica

Para la integración de la forma débil de la elasticidad lineal, la cual se expuso en el capítulo 2, se requieren procesos descritos en esta sección. Se debe notar que estas integrales fueron planteadas desde el punto de vista de la teoría de medida, es decir las integrales correspondientes a la formulación débil son integrales de Lebesgue en el sentido general, pero en virtud de que el problema generalmente está planteado para funciones de desplazamiento pertenecientes a \mathbb{R}^n donde la integral de Lebesgue y la de Riemman coinciden.

Generalmente, son empleadas dos tipos de aproximaciones que a continuación se describen:

Integración nodal directa. Las integrales son evaluadas en los nodos más cercanos al punto de integración. En este tipo de integración se corre el riesgo de obtener incompatibilidades en los resultados.

Malla de fondo o estructura de celdas. El dominio es dividido en celdas de integración sobre las cuales se encuentran los puntos de Gauss. En el caso de la malla de fondo, los nodos coinciden con los nodos de la malla. En el caso de la estructura de celdas, generalmente los nodos no son coincidentes con los nodos de la malla de fondo.

En el presente trabajo se usa la estructura de malla generada (Triangulación de Delaunay) durante la construcción de las funciones de forma.

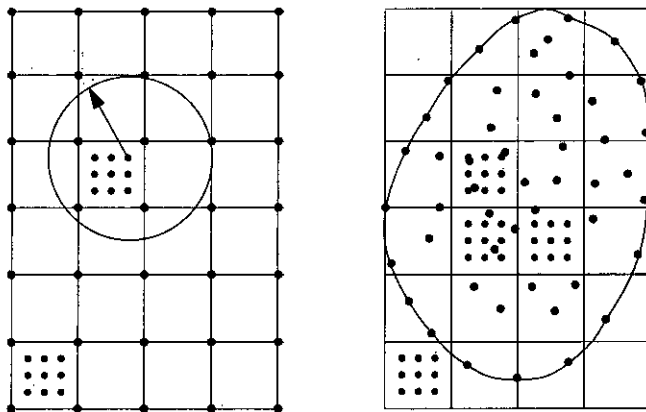


Figura 4.4: Integración en métodos sin malla basados en Galerkin: Malla de fondo (Izquierda) y fondo con estructura de celdas (Derecha)

En el presente trabajo, para evaluar integrales implicadas en el proceso de ensamblaje de matrices se utiliza el siguiente esquema de cuadratura:

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} \psi d\Omega = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i \psi(x_{gi}) |J_{ik}^D|$$

Donde ψ representa la función que se desea integrar, w_i es el factor de ponderación para el i -ésimo punto x_{gi} , y $|J_{ik}^D|$ es la matriz Jacobiana para el área de integración de la celda k , en el cual se ubica el punto de Gauss x_{gi} , n_c es el número de celdas (triángulos de Delaunay en el caso del NEM) y n_g es el número de puntos de Gauss; de manera similar se puede integrar sobre la frontera.

Puntos de Gauss, el valor numérico de los puntos de Gauss de cada celda son las raíces del polinomio de Legendre de grado n , las cuales se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$ y los factores de ponderación se obtienen utilizando procesos de cuadratura.

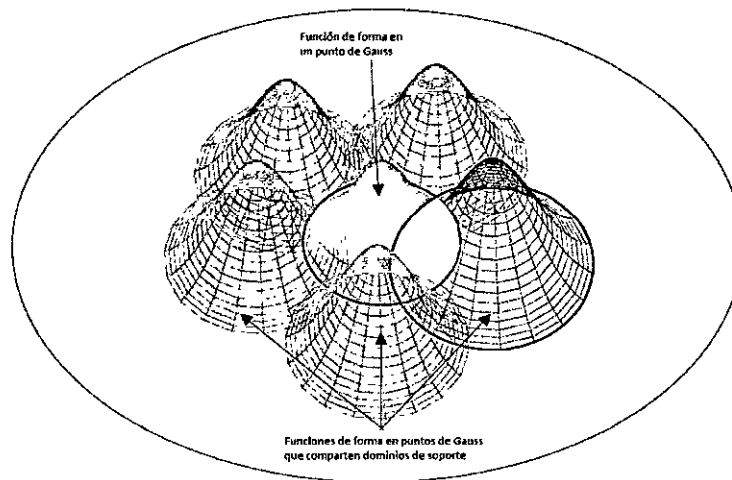


Figura 4.5: Dominios de soporte de los puntos de Gauss

El proceso de integración numérica en esta tesis es realizado usando las reglas de cuadratura simétrica para un triángulo, las cuales pueden ser encontradas en las referencias [16] y [31].

4.5. Eficiencia Computacional del NEM y Comparación con el FEM.

El costo computacional de cualquier método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales parciales es un factor esencial para determinar su eficiencia, robustez y potencial para su uso en problemas a gran escala. En el método de los elementos naturales, los procesos que consumen costo en tiempo de cómputo son:

- Generación de diagramas de Voronoi y triangulación de Delaunay. Para este caso, como se mencionó en la teoría, usamos el paquete *triangle* (ver [36]), el cual puede realizar la triangulación de un millón de nodos, aleatoriamente distribuidos en un cuadrado, en un tiempo de 56.115 segundos (Probado por el creador del software en una PC Dell Pentium II). En el test realizado por el autor en un ordenador actual con procesador Intel Core i7 se obtuvo la triangulación de un millón de nodos en un tiempo de 4.111 segundos. Lo cual quiere decir que este proceso no es de gran costo.
- Para la búsqueda de los vecinos naturales de un punto, se busca en todos los triángulos de la triangulación Delaunay, este proceso no es costoso cuando el número de triángulos es del orden de 10^3 (como los casos presentados en este trabajo) si fuera del orden de 10^5 , lo más eficiente sería utilizar el algoritmo de Lawson (ver [24]).
- Los procesos para el cálculo de las funciones de forma del NEM, son puramente algebraicos, sin operaciones con vectores o matrices.
- Para el ensamblaje de la matriz de rigidez K se utiliza una estructura nodal conformada por los vecinos naturales; a diferencia del FEM que usa una estructura de elementos, y ya que el número de vecinos naturales es pequeño, no se requiere mucho costo en este proceso.

En comparación con el FEM, el cual es utilizado en la mayoría de softwares para la solución de problemas ingenieriles, el NEM programado produce tiempos mucho menores con una programación en un lenguaje de alto nivel como el Fortran, el cual es usado en esta tesis por ser uno de los lenguajes más populares en el área de la computación de alto rendimiento y es el lenguaje usado para programas que evalúan el desempeño (benchmark) y el ranking de los supercomputadores más rápidos del mundo.

Para el cálculo del interpolante en el NEM, la triangulación de Delaunay utilizada no tiene restricciones de ángulos para la convergencia del método, como en el caso del FEM (ver [2]). Esto hace que aunque se dependa aún de una malla para la integración numérica, el proceso no tiene restricciones con las características de la misma.

En el FEM, el interpolante se basa en una estructura de elementos, mientras que en la mayoría de métodos sin malla se basa en funciones de peso con soporte compacto. En el caso del NEM, el interpolante se basa en una medida de Lebesgue normalizada que toma en cuenta la distribución de nodos y su relación con cada uno en el espacio. Esta es una ventaja del NEM frente a la mayoría de métodos sin malla basados en funciones de peso, en los cuales presentan distorsiones en regiones con alta densidad nodal.

Una de las mayores dificultades en la implementación de métodos sin malla se refiere a la imposición de condiciones de contorno esenciales. Por ejemplo las funciones de forma del método RKPM (ver sección 1.3.4) y MLS (ver sección 1.3.6) no cumplen con la propiedad de Delta de Dirac (Ecuación 3.7). Esto ocasiona que se requieran utilizar usar multiplicadores de Lagrange (ver [14] para el caso del RPIM) o métodos de penalización para lograrlo.

La imposición de condiciones de contorno tanto en el FEM como en el NEM se hacen de la misma manera pues tienen la misma característica de interpolación (Delta de Dirac), por lo que basta con sustituir en el sistema discreto de ecuaciones del método de Galerkin aquellos valores nodales que son conocidos.

Vemos entonces que existen similitudes entre el NEM, el FEM y los muchos métodos sin malla; el NEM puede ser tratado entonces con un intermedio entre el FEM y un método completamente libre de malla, como el Método Libre de Galerkin (EFGM).

CAPÍTULO V

APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS NATURALES

En este capítulo se presentan aplicaciones del NEM para la solución de problemas de elasticidad bidimensional, en ausencia de fuerzas de cuerpo. Se utiliza el sistema inglés de unidades. Los indicadores de error en desplazamiento (norma L^2) y energía están, respectivamente, definidos como sigue:

$$\|u^{exac} - u^{num}\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (u_i^{exac} - u_i^{num})^2 d\Omega} \quad (5.1)$$

$$\|u^{exac} - u^{num}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon^{exac} - \epsilon^{num})^T C (\epsilon^{exac} - \epsilon^{num}) d\Omega} \quad (5.2)$$

Donde los superíndices denotan el tipo de solución obtenida (exacta o numérica).

Para la solución de los ejemplos de las siguientes secciones utilizaremos programas generados en diferentes lenguajes de programación; el primero consiste de un pequeño programa, desarrollado por el autor, en Java (Generator NEM) el cual permite al usuario crear la geometría del problema, a la vez se encarga de crear los archivos *.node* necesarios para usar el paquete *triangle* (ver [36]) con el que se generan el diagrama de Voronoi y la triangulación Delaunay. El archivo de salida contiene los nodos y triángulos con vértices ordenados en sentido contrario de las agujas de reloj, requisito necesario para la correcta implementación del algoritmo de Watson.

El segundo programa que utiliza la presente tesis, tiene la función de leer los datos de entrada, discernir el tipo de problema, ubicar los puntos de Gauss, calcular las funciones de forma, ensamblar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas. Dicho programa está desarrollado en los lenguajes de Fortran y C, en parte de su desarrollo se utiliza códigos existentes desarrollados por Sukumar (1998) [40]. Para la solución del sistema $Ku = F$, el programa

llama al software libre Lapack (ver [1]) el cual es un paquete muy potente de álgebra lineal, siendo uno de los más eficientes para este tipo de problemas. Para los cómputos realizados en la presente tesis se utiliza un ordenador con procesador intel core i7.

5.1. VIGA DE TIMOSHENKO

En el siguiente ejemplo numérico de elasticidad lineal, estudiamos la viga de Timoshenko, ejemplo que es adecuado para la exposición de un problema con condiciones de frontera mixtas en el cual es posible comparar los resultados obtenidos a través de la formulación débil con propuestas teóricas como [42].

Considere una viga de dimensiones L por D , supeditada a la acción de una fuerza con distribución parabólica en el extremo libre como se muestra en la figura (5.1). Para efectos prácticos se considera que la viga es de profundidad unitaria y predomina el estado plano de esfuerzos.

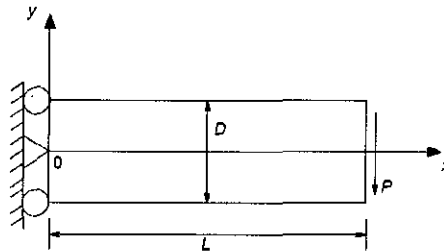


Figura 5.1: Viga de Timoshenko

La distribución de la fuerza parabólica está dada por:

$$t_y = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.3)$$

Donde el momento de inercia está dado por

$$I = \frac{D^3}{12}$$

Los desplazamientos teóricos de este problema están dados por las siguientes fórmulas:

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (5.4)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (5.5)$$

Y los esfuerzos teóricos por:

$$\sigma_x = \sigma_{11} = -\frac{P(L-x)y}{I} \tag{5.6}$$

$$\sigma_x = \sigma_{22} = 0 \tag{5.7}$$

$$\sigma_x = \sigma_{12} = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \tag{5.8}$$

Se consideran las siguientes propiedades para los materiales: $E = 3,0 \times 10^7 \text{ psi}$, la razón de Poisson $\nu = 0,3$ y las dimensiones de la viga $D = 12 \text{ in}$, $L = 48 \text{ in}$. La fuerza debida al esfuerzo de corte es $P = 1000 \text{ lb}$.

A continuación se muestra distribución de los nodos así como también los puntos de Gauss que se obtuvieron para una quadratura de 3 (3 puntos por cada triángulo Delaunay), los mismos son utilizados para la integración numérica de la forma débil. En este problema, la triangulación de Delaunay produce 304 triángulos y por consiguiente se tiene 912 puntos de Gauss.

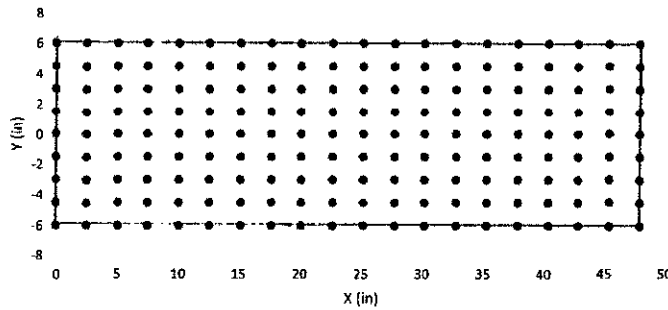


Figura 5.2: Distribución de nodos de la viga de Timoshenko (180 nodos distribuidos uniformemente)

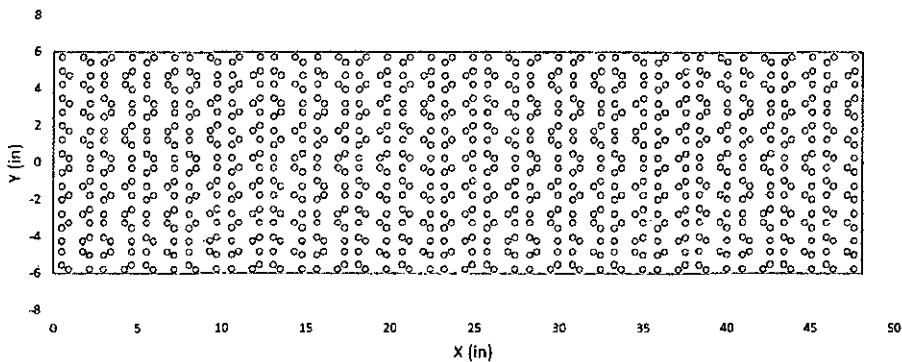


Figura 5.3: Puntos de Gauss (912 puntos)

Al ejecutar el programa mencionado en la introducción de este capítulo, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 5.1. Para la comparación con un método sin malla se utiliza el Método Radial de Interpolación de Puntos RPIM y el método de Mínimos Cuadrados Móviles MLS, utilizando para cada caso los programas desarrollados, respectivamente, por Córdova (2013) [14] y Flores [19]. En cada caso se usan los mismos nodos en cantidad y distribución que los empleados en el *NEM*.

Tabla 5.1: Resultados para la Viga de Timoshenko

Error en norma L^2	0.21 in^2
Error en norma de energía	$0.34 \sqrt{\text{psi} - \text{in}^2}$
Tiempo de cómputo total con el <i>NEM</i>	0.08 segundos
Tiempo de cómputo total con el <i>FEM</i>	0.12 segundos
Tiempo de cómputo total con el <i>MLS</i>	27.13 segundos
Tiempo de cómputo total con el <i>RPIM</i>	46.81 segundos

La figura 5.4 muestra gráficamente la deflexión del eje neutro ($y = 0$). La tabla 5.2 muestra el desplazamiento vertical del eje neutro; se comparan los resultados del *NEM* con la solución teórica dada en [42], la solución obtenida con el *RPIM* ([14]) y con el *MLS* ([19]), este cuadro muestra la excelente concordancia entre la solución del *NEM* y la analítica.

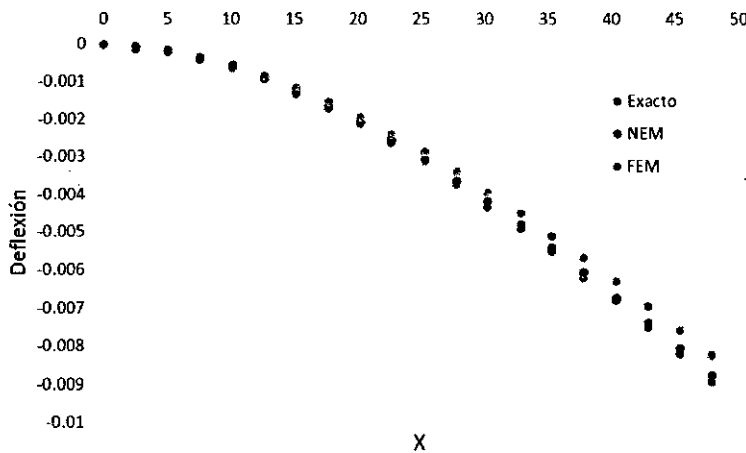


Figura 5.4: Desplazamientos de la viga de Timoshenko

Tabla 5.2: Comparación de desplazamientos verticales del eje de la viga

x (m)	u_y Teórico	u_y NEM	u_y FEM	u_y RPIM	u_y MLS
0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.526	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0001
5.053	-0.0002	-0.0002	-0.0001	-0.0002	-0.0002
7.579	-0.0004	-0.0003	-0.0003	-0.0004	-0.0004
10.105	-0.0006	-0.0006	-0.0005	-0.0006	-0.0006
12.632	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0009	-0.0009
15.158	-0.0013	-0.0012	-0.0011	-0.0013	-0.0013
17.684	-0.0017	-0.0016	-0.0015	-0.0017	-0.0017
20.211	-0.0021	-0.0021	-0.0019	-0.0021	-0.0021
22.737	-0.0026	-0.0025	-0.0024	-0.0026	-0.0026
25.263	-0.0031	-0.0030	-0.0029	-0.0031	-0.0031
27.790	-0.0037	-0.0036	-0.0034	-0.0037	-0.0037
30.316	-0.0043	-0.0042	-0.0039	-0.0043	-0.0043
32.842	-0.0049	-0.0048	-0.0045	-0.0049	-0.0049
35.368	-0.0055	-0.0054	-0.0051	-0.0055	-0.0055
37.895	-0.0062	-0.0060	-0.0057	-0.0062	-0.0062
40.421	-0.0068	-0.0067	-0.0063	-0.0068	-0.0068
42.947	-0.0075	-0.0074	-0.0069	-0.0075	-0.0075
45.474	-0.0082	-0.0080	-0.0076	-0.0082	-0.0082
48.000	-0.0089	-0.0087	-0.0082	-0.0089	-0.0089

De la última tabla se aprecia que para el ejemplo presentado, el *RPIM* y el *MLS* producen resultados más exactos que el *NEM*. Sin embargo, según la tabla 5.1 el tiempo de cálculo del *RPIM* es más de 500 veces el del *NEM*, mientras que el tiempo que tarda el *MLS* es más de 300 veces el del *NEM*.

Para comparar los resultados de los esfuerzos calculados con el *NEM*, *RPIM* y las fórmulas de Timoshenko, se presenta en la figura (5.5), la distribución de esfuerzos a lo largo de toda la viga.

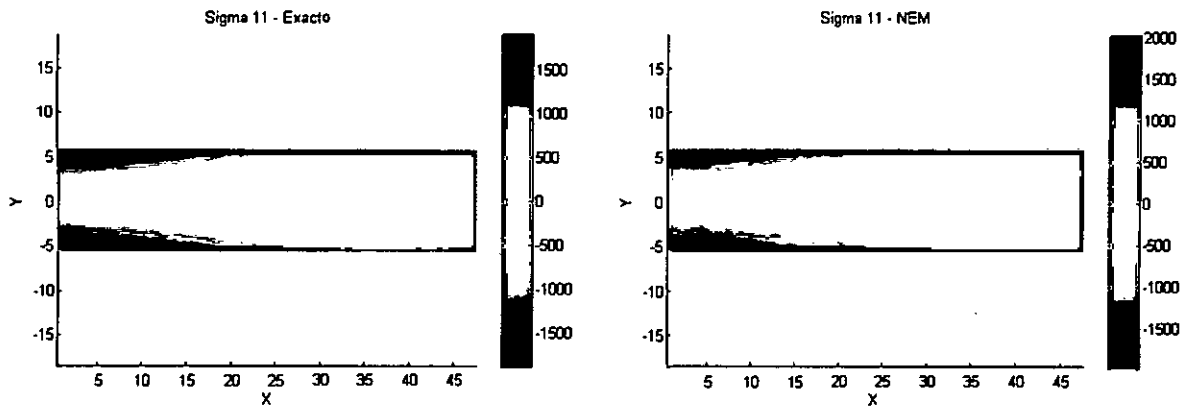


Figura 5.5: Comparación de la distribución de esfuerzos σ_{11} en la viga de Timoshenko

De la solución teórica (Ecuación 5.7) tenemos que $\sigma_{22} = 0$, se compara a continuación los resultados del *NEM* y los obtenidos con el *RPIM* ([14]):

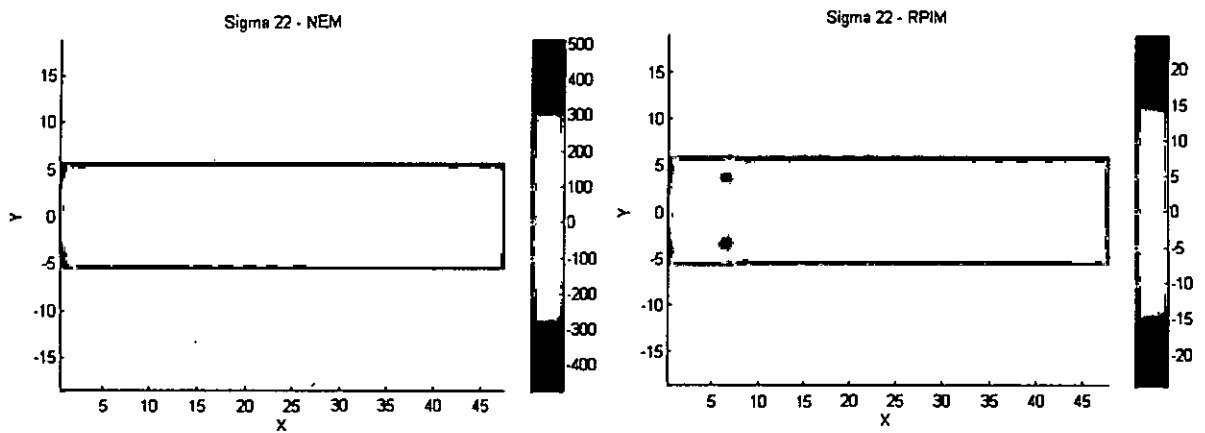


Figura 5.6: Comparación de la distribución de esfuerzos σ_{22} en la viga de Timoshenko

5.2. PLACA INFINITA CON AGUJERO CIRCULAR

Se considera una placa infinita con un agujero circular sometido a una tensión unidireccional a lo largo del eje x_1 . La solución exacta de este problema se puede encontrar en la referencia [42]. El dominio *ABCDE* mostrado en la figura 5.7 es modelado con las tracciones exactas impuestas a lo largo de *BC* y *CD*.

Debido a la simetría, las condiciones de contorno esencial son: $u_2 = 0$ a lo largo de *AB*, y $u_1 = 0$ a lo largo de *DE*.

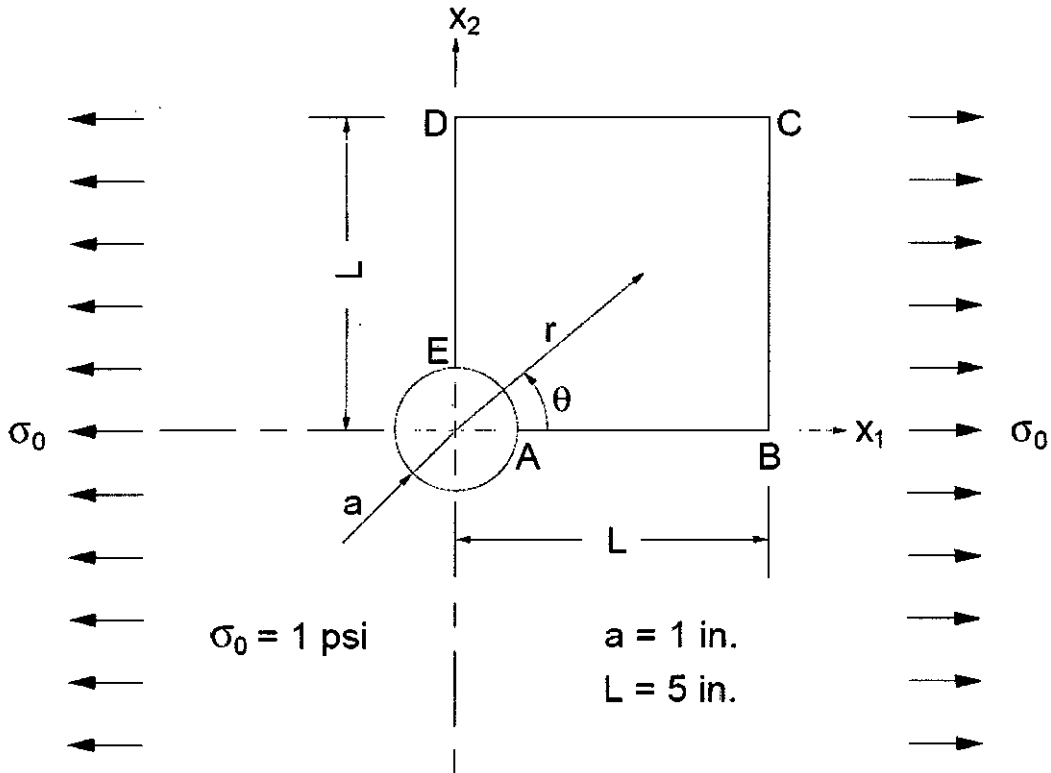


Figura 5.7: Problema de la placa con agujero circular sometida a tracción.

En coordenadas polares (r, θ) , la distribución exacta de esfuerzos para $\sigma_0 = 1 \text{ psi}$ está dada por:

$$\sigma_{11}(r, \theta) = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\theta), \quad (5.9)$$

$$\sigma_{22}(r, \theta) = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\theta), \quad (5.10)$$

$$\sigma_{12}(r, \theta) = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin(4\theta) \quad (5.11)$$

Donde a es el radio del agujero circular. Los componentes de desplazamiento son:

$$u_1(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\frac{r}{a} (\kappa + 1) \cos(\theta) + 2 \frac{a}{r} \left((1 + \kappa) \cos(\theta) + \cos(3\theta) \right) - 2 \frac{a}{r^3} \cos(3\theta) \right], \quad (5.12)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\frac{r}{a} (\kappa - 3) \sin(\theta) + 2 \frac{a}{r} \left((1 - \kappa) \sin(\theta) + \sin(3\theta) \right) - 2 \frac{a}{r^3} \sin(3\theta) \right], \quad (5.13)$$

Donde: ν es el módulo de corte y κ (constante de Kolosov) es definida (según el problema) como:

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (\text{Deformación Plana}). \quad (5.14)$$

$$\kappa = \frac{3 - 4\nu}{1 + \nu} \quad (\text{Esfuerzo Plano}). \quad (5.15)$$

Para la solución numérica se toma $a = 1in$ y $L = 5in$, y se asume la condición de deformación plana. En la figura 5.8 se muestra la discretización del dominio.

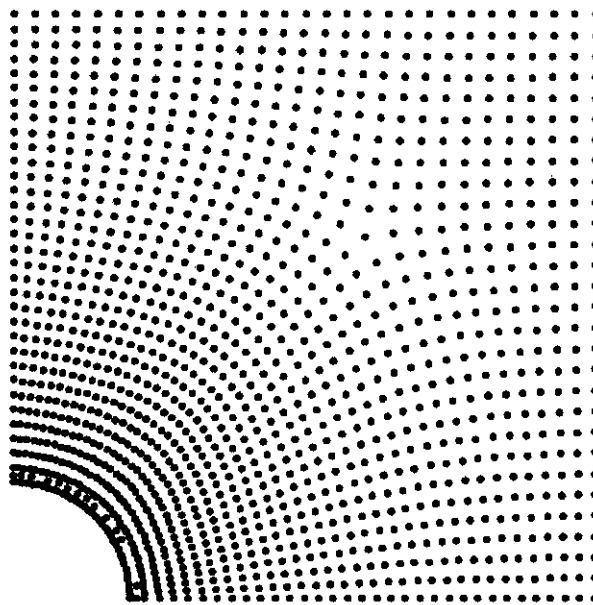


Figura 5.8: Discretización del problema de la placa con agujero circular con 1345 nodos.

Al ejecutar el programa mencionado en la introducción de este capítulo, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 5.3. Para la comparación con un método sin malla se utiliza el Método Libre de Galerkin *EFGM* utilizando el programa en MatLab desarrollado Nguyen (2016) [33].

Tabla 5.3: Resultados para la placa con agujero circular.

Error en norma L^2	$3.26 \times 10^{-10} in^2$
Error en norma de energía	$9.09 \times 10^{-6} \sqrt{psi - in^2}$
Tiempo de cómputo total con el <i>NEM</i>	4.15 segundos
Tiempo de cómputo total con el <i>FEM</i>	7.55 segundos
Tiempo de cómputo total con el <i>EFGM</i>	27.13 segundos

En la figura 5.9. el valor numérico y el exacto de σ_{11} son ploteados a lo largo del lado ED (ver Fig.5.7). Se observa que la aproximación con el NEM es excelente para este caso. A la vez se compara con el FEM, observando que ambos aproximan de manera excelente el problema.

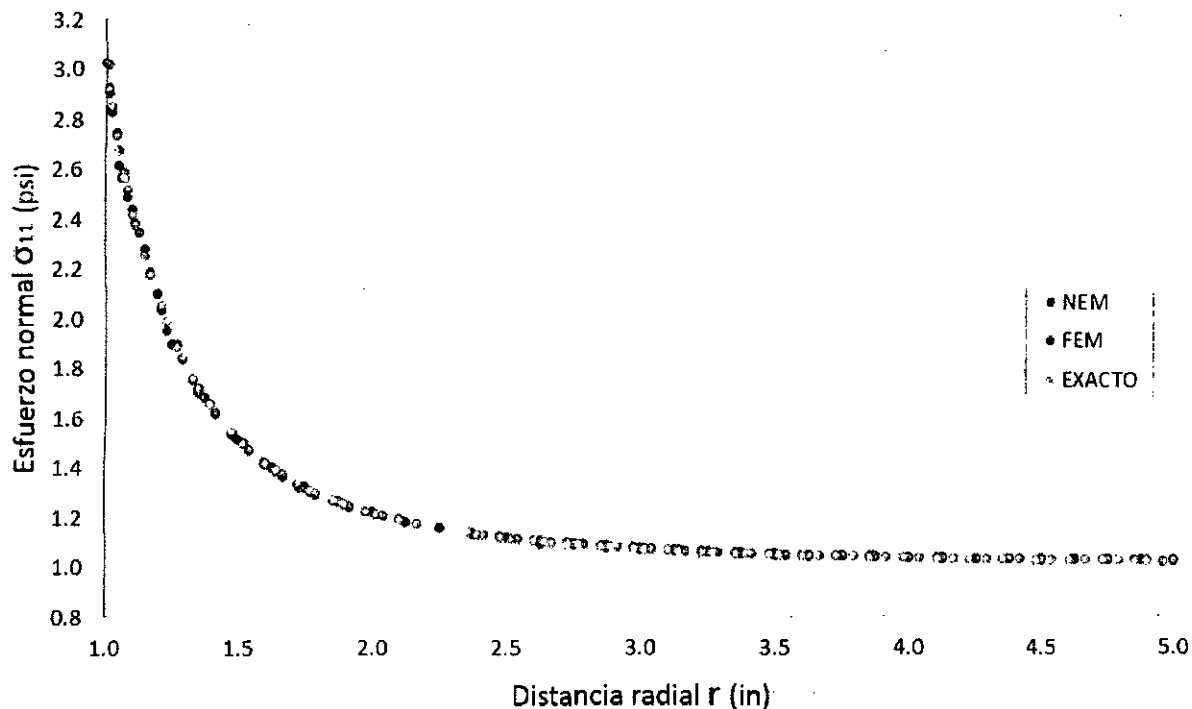
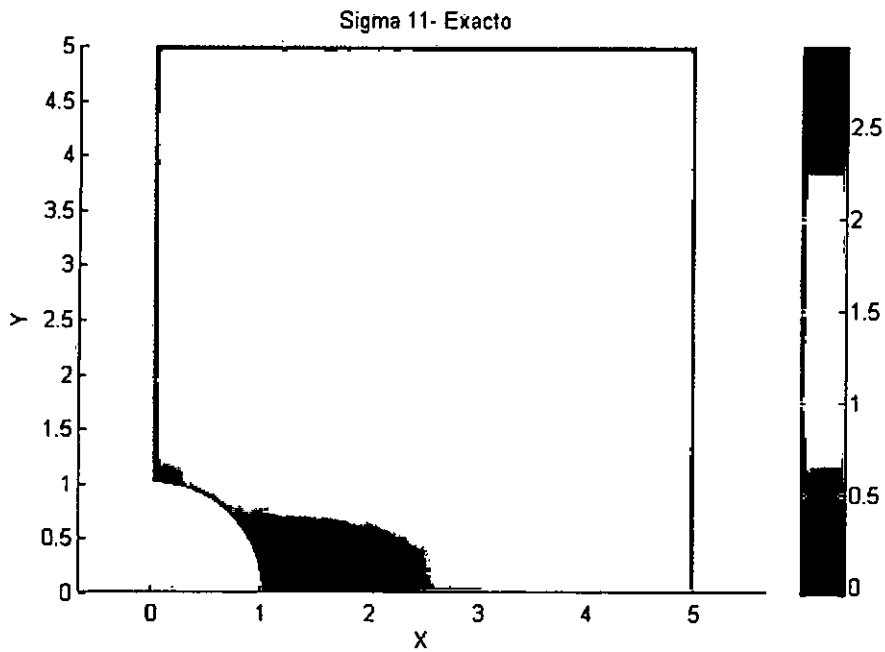
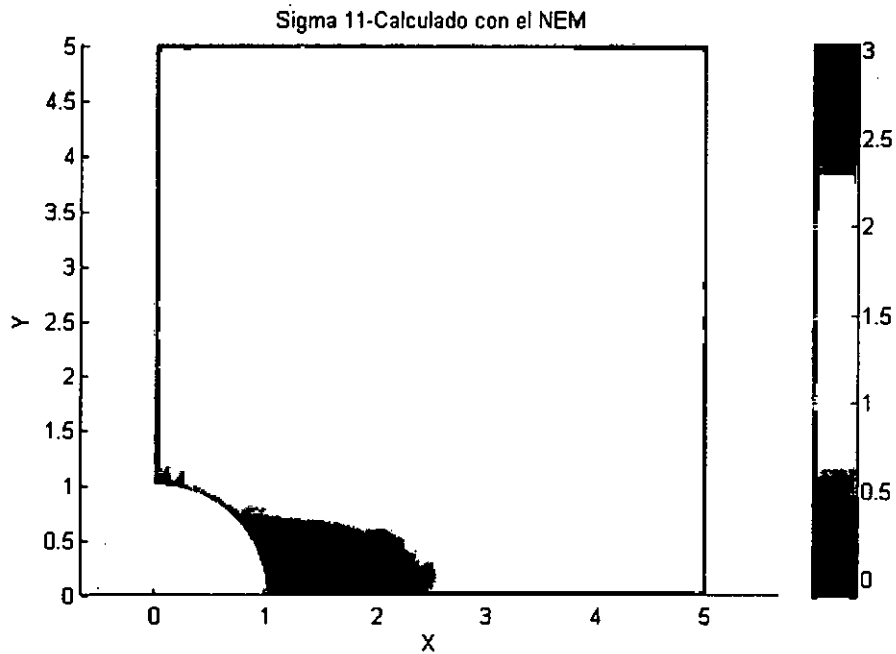


Figura 5.9: Comparación de valores de σ_{11} a lo largo del lado ED obtenidos con el NEM, FEM y solución exacta.

En la figura 5.10 se compara los resultados para el esfuerzo σ_{11} . Para comparar con un método sin malla se utiliza el Método Libre de Galerkin *EFGM* ([33]) y también se compara con el *FEM*. Se aprecia que de los tres métodos empleados el *NEM* presenta la solución más próxima a la analítica.

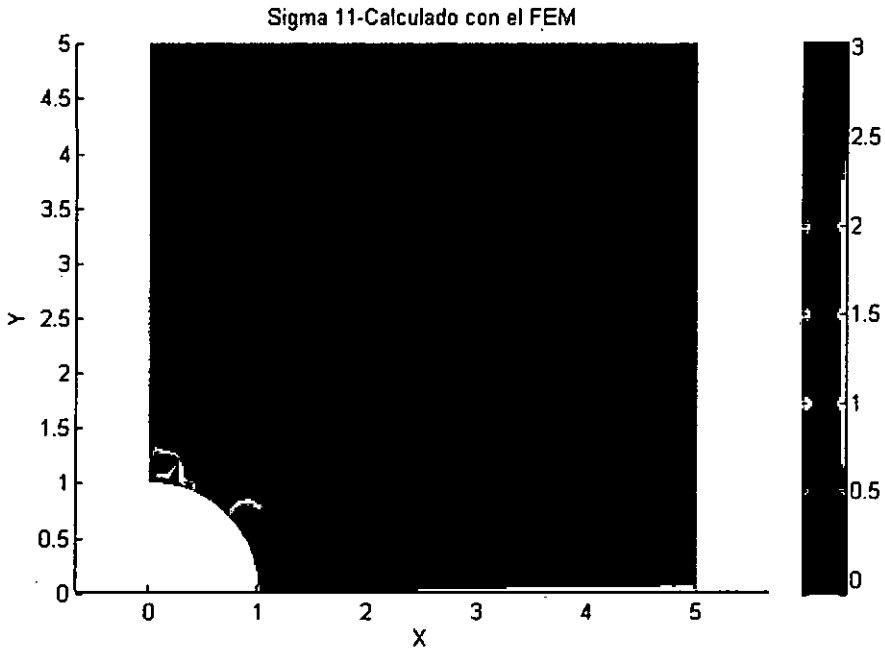


(a)

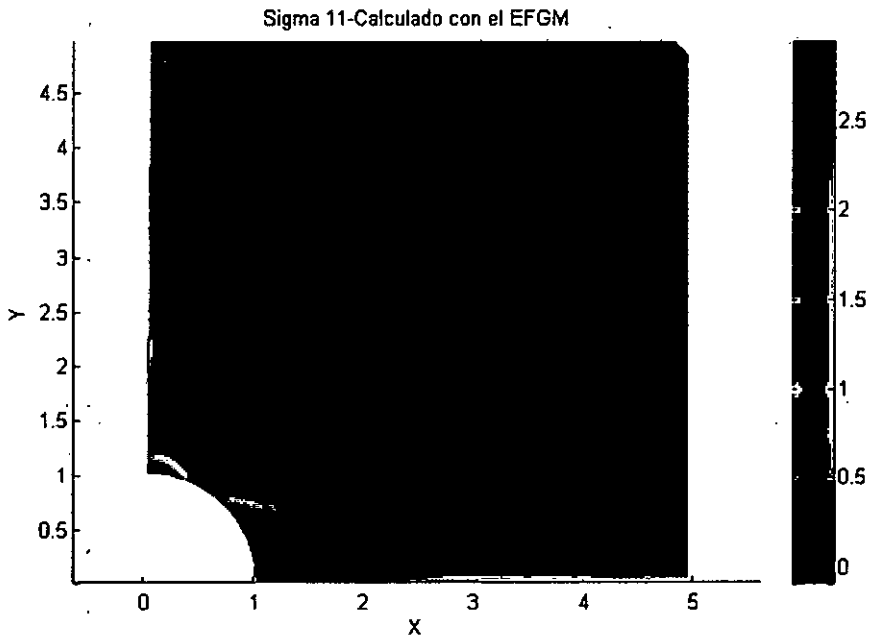


(b)

Figura 5.10: Comparación de la distribución de esfuerzos σ_{11} : (a) Solución Teórica, (b) Solución NEM (c) Solución FEM (d) Solución EFGM .



(c)



(d)

Figura 5.10: Comparación de la distribución de esfuerzos σ_{11} : (a) Solución Teórica, (b) Solución NEM (c) Solución FEM (d) Solución EFGM .

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. CONCLUSIONES

Del capítulo dos, se concluye que es necesario definir un espacio formal para la búsqueda de funciones de prueba necesarias para aproximar la solución de la elastostática. Este espacio se construye de la idea física de representar todo movimiento (espacio de desplazamiento) como la suma directa entre movimientos de cuerpo rígido y deformaciones infinitesimales. Esta suma está dada por el núcleo del tensor de deformaciones y el sub-espacio $\overline{H^k(\Omega)}$.

Se garantiza la existencia y unicidad de la solución del problema en forma débil, por tanto se garantiza la factibilidad de aproximar la solución teórica del problema mediante una familia de funciones, que en el caso particular del Método de Elementos Naturales (NEM) son las coordenadas de vecino natural.

Del capítulo tres, se puede concluir que la construcción de las funciones de forma está basada en conceptos geométricos simples como los diagramas de Voronoi y triangulación de Delaunay; su cálculo se reduce, en el caso bidimensional, al cálculo de áreas de polígonos, lo que hace factible la extensión del método para la solución de problemas en un espacio de mayor dimensión que el bidimensional. Esto prueba parte de la hipótesis de la presente tesis.

De la obtención geométrica de las coordenadas de vecino natural (Sección 3.2), se concluye que estas son infinitamente derivables (C^∞) en todo su dominio, excepto en los nodos donde son C^0 . En una dimensión la interpolación del método de elementos naturales coincide con la de los elementos finitos. A la vez, la linealidad de estas funciones de forma en la frontera del dominio, facilitan la imposición de condiciones de contorno.

Del capítulo cuatro, se concluye que la implementación del Método de Elementos Natu-

rales es más sencilla que la de los demás métodos sin malla, pues está basada en cálculos geométricos sencillos y no requiere parámetros de forma, como por ejemplo el caso del RPIM ([14], [28]). La integración numérica se realiza de manera rápida usando la triangulación Delaunay construida para hallar las funciones de forma, ahorrando el proceso de creación de una malla de integración realizado por la mayoría de métodos sin malla. Esta última característica hace que en *NEM* se adapte a actuales o futuros mecanismos de integración nodal; esto prueba la segunda parte de la hipótesis de la presente tesis.

De las aplicaciones mostradas en el capítulo 5, se concluye que el *NEM* mejora los tiempos de todos los métodos con los que se le comparó en la presente tesis, incluido el *FEM*. Con respecto al ejemplo de la sección 5.1 se apreció que el *NEM*, implementado en lenguajes de alto nivel Fortran y C, es hasta 500 veces más rápido que el *RPIM* implementado con un software comercial, mostrando resultados realmente satisfactorios para el campo de la ingeniería.

Con respecto al ejemplo de la sección 5.2, se hizo una comparación del *NEM* con el *FEM* y el *EFGM* de los cuales se dijo, en la última parte del capítulo 4, que éste es un intermedio; se pudo apreciar que el *NEM* mejora la aproximación respecto a ambos, en un tiempo de casi la mitad del que le toma al *FEM* (programado en Fortran) y casi en la séptima parte del tiempo que tarda el *EFGM* programado en software comercial. Verificado de esta manera la hipótesis de la presente tesis.

Finalmente, se concluye, de los ejemplos del capítulo 5, que los resultados obtenidos para los esfuerzos son de gran exactitud, pese a que la formulación presentada está basada en desplazamientos. Lo cual indica que en esquemas mixtos basados en desplazamientos y presiones se puede esperar mejores resultados en los resultados de esfuerzos.

6.2. RECOMENDACIONES

Buscar nuevos algoritmos que permitan encontrar de manera más eficiente los vecinos naturales de un punto, para ahorrar tiempo de cómputo en problemas a gran escala; a la vez, quedan abiertas líneas de investigación en lo concerniente a la integración numérica. Para la extensión del método a más dimensiones se recomienda estudiar los conceptos de convexidad fuerte de manera que se pueda construir un dominio tipo polígono, en el cual existen técnicas más poderosas para la integración (ver [5]).

Estudiar la aplicación del Método de Elementos Naturales en la simulación de fenómenos dinámicos, como por ejemplo en la mecánica de fluidos y los problemas tipo *Level Set*. Dichas simulaciones son hoy en día motivo de muchas investigaciones y son una puerta abierta para el desarrollo de algoritmos y formulaciones cada vez más eficientes que puedan resolver problemas a gran escala con la ayuda de super-computadoras.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Sorensen D., "LAPACK Users' Guide, Third Edition 1999", Society for Industrial and Applied Mathematics, Lapack software disponible en <http://www.netlib.org/lapack/>
- [2] Babuska I., Aziz A., "On the angle condition in the finite element method", *SIAM J. Numer. Analysis* 13: Pág.214 a 227, 1976.
- [3] Babuska I., Melenk J. M., "The partition of unity finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40: Pág.727 a 758, 1997.
- [4] Bachman G., Narici L., "Functional Analysis", Academic Press Inc., New York, 1972.
- [5] Baldoni V., Berline J., De Loera B., Dutra B., "A User's guide for LattE integrale v1.7.1, 2013", LattE software disponible en <https://www.math.ucdavis.edu/latte/>
- [6] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Flemming M., Krysl P., "Meshless Methods: an Overview and Recent Developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139: Pág.3 a 47, 1996.
- [7] Belytschko T., Lu Y. Y. y Gu L., "Element-Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37: Pág. 229 a 256, 1994.
- [8] Belytschko T., Liu W. K. y Singer M., "On adaptivity and error criteria for meshless methods.", Northwestern University, Evanston, 1998.
- [9] Boots B., "Voronoi (Thiessen) Polygons", UK: Geo Books, Norwich, 1986.
- [10] Braun J. y Sambridge M., "A Numerical Method for Solving Partial Differential Equations on Highly Irregular Evolving Grids", *Nature* 376: Pág. 655 a 660, 1995.

- [11] Brenner S. C., Scott L. R., "The Mathematical Theory of Finite Element Methods", Springer, New York, 1994.
- [12] Brézis H., Brézis H., "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations", Springer, New York, 2011.
- [13] Chen Y., Lee J. D., Eskandarian A., "Meshless Methods in Solid Mechanics", Springer, New York, 2006.
- [14] Córdova R., "Formulación variacional y solución de la ecuación de la elasticidad lineal con el método radial de interpolación de puntos", Tesis de grado, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 2013.
- [15] Duarte C., Oden J., "H-p clouds and h-p meshless method", John Wiley & Sons, Austin, 1996.
- [16] Dunavant D., "High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle", International Journal for Numerical Methods in Engineering 21: Pág. 1129 a 1148, 1985.
- [17] Farin G., "Surfaces over Dirichlet tessellations.", Journal Computer Aided Geometric Design Volume 7, Pág. 281 a 292, Amsterdam, 1990.
- [18] Fasshauer G. E., "Meshfree Approximation Methods with MatLab", World Scientific, Evanston, 2008.
- [19] Flores L., "Métodos sin Malla como Alternativa al Método de Elementos Finitos", Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 2011.
- [20] Gingold R.A., Monaghan J. J.: "Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 181, Pág. 375 a 389, 1977.
- [21] Gonzalez D.: "Aproximaciones Mixtas en Métodos de Lagrange-Galerkin de Vecindad Natural. Aplicación a la Mecánica de Sólidos y de Fluidos", Tesis Doctoral Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2004.
- [22] Lancaster P., Salkauskas K., "Surface generated by moving least square method", American Mathematical Society, Providence, 1981.

- [23] Lasserre J.B.: "An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in \mathbb{R}^n ", Journal of Optimization Theory and Applications 39(3), Pág. 363 a 377, 1983.
- [24] Lawson C. L., "Software for C^1 surface interpolation", Mathematical Software III, Volumen 3, N.Y. Academic Press, Nueva York, 1977.
- [25] Lima E. L., "Cálculo Tensorial", Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, 1965.
- [26] Liszka T.: "An interpolation method for an irregular net of nodes", International Journal for Numerical Methods in Engineering 20: Pág. 1599 a 1612, 1984.
- [27] Liu W.K., Chen Y., Uras R.A., "Enrichment of the finite element method whit reproducing kernel particle method", Northwestern University, Evanston, 1995.
- [28] Liu G. R., "Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method", CRC Press, New York, 2009.
- [29] Liu G. R., Gu Y. T. "An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming", Springer, New York, 2005.
- [30] Liu G.R., Zhang G.Y., Wang Y.Y., Zhong Z.H., Li G.Y., Han X., "A nodal integration technique for meshfree radial point interpolation method", International Journal of Solids and Structures, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [31] Lyness J., Jespersen D., "Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle", Journal of the Institute of Mathematical and its Applications 15: Pág. 19 a 32, 1975.
- [32] Nayroles B., Touzot G., Villon P., "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", Computational Mechanics, Springer, New York, 1992.
- [33] Nguyen V., "Two dimensional Element Free Galerkin code", Northwestern university, Evanston, 2006. Código disponible en: [http://read.pudn.com/downloads138/sourcecode/math/591675/EFG %20Matlab %20code/plate_hole.asv__.htm](http://read.pudn.com/downloads138/sourcecode/math/591675/EFG%20Matlab%20code/plate_hole.asv__.htm)
- [34] Rektorys K., "Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering", D. Reidel Publisher Company Inc., Praga, 1980.

- [35] Shewchuk J.R.: "Show Me: A Display Program for Meshes and More" School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, disponible en <http://www.cs.cmu.edu/quake/showme.html>.
- [36] Shewchuk J.R.: "Triangle: A Two Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator" School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, disponible en <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>.
- [37] Sibson R.: "A Vector Identity for the Dirichlet Tessellation." Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 87: Pág. 151 a 155, 1980.
- [38] Sibson R.: "A brief description of natural neighbor interpolation", Interpreting Multivariate Data, V. Barnett (Editor) 21-36 . Jhon Wiley and Sons, Chichester, 1981.
- [39] Sokolnikoff I. S., Specht E. D., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York, 1946.
- [40] Sukumar N., "The Natural Element Method in Solid Mechanics", Tesis Doctoral Northwestern University Evanston, 1998.
- [41] Sukumar N., Huang Z., Prévost J., Suo Z., "Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons Inc., New York, 2004.
- [42] Timoshenko S. P., Goodier J. N., "Theory of Elasticity", Editorial McGraw Hill, New York, 1951.
- [43] Watson D.F.: "*nnggridr* : An implementation of natural neighbor interpolation", Dave Watson Publisher, Claremont, Australia, 1994.

ANEXO

A.1. TENSORES Y OPERADORES TENSORIALES

Se presenta a continuación la teoría de Tensores, dando prioridad a tensores de orden 2, ya que en el ámbito de ingeniería es al que se conoce propiamente como *Tensor*. Pues bien, un tensor viene a ser aquel elemento que representa a una aplicación $F : V \rightarrow U$, donde U y V son espacios vectoriales y dicha aplicación es una función bilineal de variable vectorial. A continuación se define formalmente a un tensor de orden 2, en general es posible obtener funciones lineales de variable vectorial que sean representadas por tensores de orden superior, para esto se puede ver [25].

Definición A.1.1. (*Tensores de Orden 1*)

Toda función lineal que haga corresponder a cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ un número real (función real de variable vectorial), se puede representar por cierto vector u , es decir sea:

$$f(v) = v \cdot u$$

Donde $f : v \rightarrow v \cdot u$ y $v \cdot u \in \mathbb{R}$.

Ahora para extender la definición anterior a funciones vectoriales de variable vectorial requerimos el conocimiento de cierto tipo de operaciones y funciones las cuales serán presentadas a continuación.

Producto de Kronecker(Conocido también como producto tensorial). Dados 2 vectores a y b se define el producto tensorial $a \otimes b$ de dichos vectores como:

$$a \otimes b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

Además este producto resulta ser una función bilineal, entonces podemos extender la definición anterior a funciones vectoriales de variable vectorial como sigue:

Definición A.1.2. (Tensor de Orden 2)

Toda función lineal que haga corresponder a cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ otro vector de \mathbb{R}^n , se puede representar mediante el producto de Kronecker, de la siguiente manera:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j e_i \cdot \sum_{j=1}^n (\lambda_j e_j)$$

Donde se puede definir $\bar{A} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j e_i = a_{ji} e_j \otimes e_i$ y ahora se puede plantear lo siguiente:

$$f(v) = \bar{A} \cdot v$$

De aquí que \bar{A} representa a la función bilineal y recibe el nombre de tensor de orden 2.

A continuación se indican algunas transformaciones lineales aplicables a tensores en los diversos espacios vectoriales empleados (estas transformaciones lineales son útiles sobre todo en el acápite 2.4). Existe la necesidad de definir la transformación *gradiente* y la transformación *divergencia* para cada espacio vectorial, ya que de un espacio a otro estas transformaciones presentan diferencias. A continuación se las define:

- El **gradiente de una función escalar** $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y su ortogonal, como:

$$\nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix}; \quad (\nabla p)^\perp = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_1} \end{bmatrix};$$

- El **gradiente de una función vectorial** $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, como:

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

- La **divergencia de una función vectorial** $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

- El gradiente de un tensor $\nabla : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, como:

$$\nabla_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Además, se define el *producto escalar* de tensores de orden 2, como:

$$\sigma : \epsilon = tr(\sigma^T \cdot \epsilon) = tr(\sigma \cdot \epsilon^T) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

Este producto es utilizado en el planteamiento de la formulación débil del problema de la elastostática.