UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Tesis para Optar
el Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMÁTICA

Titulada:

Análisis no estándar y algunas de sus aplicaciones

Presentada por:

Henry Edwin Ponce Reyes

Asesor

Prof. William Carlos Echegaray Castillo

LIMA-PERÚ

2014

CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

Ponce Reyes, Henry Edwin

Análisis no estándar y algunas de sus aplicaciones / Henry Edwin Ponce Reyes. – EPM - FC - UNI, 2014.

119 p.: il.

Tesis (Licenciatura)—Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, Lima, 2014. Asesor: William Carlos Echegaray Castillo.

Dedico esta tesis a Dios por guiar
mi camino, a mis padres Santos y Nelly
quienes me apoyaron todo el tiempo.

Agradezco en primer lugar a Dios, padre celestial que me dió fuerzas y fé para creer lo que parecía muy difícil de culminar.

A mis padres y hermanos por haberme apoyado siempre, por la orientación, sabios consejos, paciencia y amor que me brindaron siempre.

Un agradecimiento muy especial a mi asesor, Mg. William Carlos Echegaray Castillo, por su tiempo y constante apoyo y dirección en la ejecución y culminación del presente trabajo.

A los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNI que contribuyen significativamente en mi formación profesional.

También deseo agradecer a Jhimy Alex Borbor Perea, Felipe Enrique Pascual Bellido y al ingeniero Jexy Arturo Reyna Medina por su amistad y estímulo que me ayudaron a culminar el presente trabajo.

Resumen

En el capítulo 1 establecemos los conceptos preliminares sobre el análisis no estándar, como la construcción ultraproducto, la que nos permitirá construir el conjunto de los números reales no estándar ($^*\mathbb{R}$) definiendo en él lo que es un infinitesimal, así como los conjuntos internos y externos como subconjuntos de $^*\mathbb{R}$. Definimos una superestructura de un modelo estándar $\mathscr{X}$ y mencionamos el principio de definición interna así como el muy importante principio de transferencia.

En el capítulo 2 establecemos la formulación no estándar de conceptos y resultados básicos en espacios topológicos, espacios métricos y espacios euclidianos, tales como conjuntos abiertos y cerrados, conjuntos compactos, el Teorema de Bolzano Weierstrass, topología producto, el teorema de Tychonov, continuidad y el Teorema de Ascoli no estándar.

En el capítulo 3 desarrollamos una teoría de integración no estándar, con la estandarización $(\widehat{L}, \widehat{I})$ de una estructura de integración interna (L, I). Asimismo desarrollamos una teoría de la medida para tales estructuras de integración. Definimos un espacio de medida $(X, \mathscr{M}_X, \mu_X)$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto o cerrado. Establecemos una teoría de integración sobre $\mathbb{R}^n$, estudiamos el teorema de Representación de Riesz, así como teoremas básicos de convergencia para sucesiones de funciones integrables que no son necesariamente monótonas.

En el capítulo 4 presentamos algunas aplicaciones de las estructuras de integración no estándar y su teoría de la medida en teoría de la probabilidad, en particular a los procesos estocásticos. Asimismo mostramos algunas aplicaciones del Análisis No estándar concentrándonos en los tópicos de integración Estocástica.

Finalmente damos las conclusiones del presente trabajo.

Índice general

Introducción

Comenzamos haciendo una pregunta muy importante que alguien podría hacerse: ¿cuándo es útil el análisis no estándar? El Análisis no estándar puede ser usado para formalizar la mayoría de áreas de la matemática moderna, incluyendo análisis real y complejo, teoría de la medida, teoría de la probabilidad, análisis funcional y topología de conjuntos de puntos, ecuaciones diferenciales, incluso álgebra que es menos susceptible al análisis no estándar pero se han encontrado significativas aplicaciones.
Históricamente la idea del Análisis no estándar, que fue desarrollado por Abraham Robinson en 1960, fue la de justificar rigurosamente el cálculo con números infinitesimales. Por ejemplo, formalmente la regla de la cadena del cálculo de Leibnitz para la función $F = f(g(x))$ puede ser escrito como

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

y para una prueba formal uno puede dividir numerador y denominador por el número infinitesimal pequeño dg.
Hoy en día el análisis no estándar ha ido más lejos en el reino de los infinitesimales. El análisis no estándar provee una maquinaria la cual permite a uno describir explícitamente conceptos matemáticos, los cuales por métodos estándar pueden ser sólo descritos implícitamente y en una manera incómoda. En el ejemplo dado arriba, la noción estándar de límite es en cierto sentido reemplazado por la noción no estándar de infinitesimal. Si uno aplica un enfoque similar a otros objetos (tales como espacios topológicos, espacios de Banach, espacios métricos, etc.) uno tiene una herramienta la cual provee definiciones explícitas para objetos, los cuales pueden en principio no ser

descritos explícitamente por métodos estándar. Ejemplos de tales objetos son conjuntos los cuales son Lebesgue medibles entre otros. También podemos considerar funcionales con tales propiedades (límites de Hanh Banach). Como esto es posible en el análisis no estándar para simplificar cálculos con tales objetos, uno puede obtener resultados acerca de ellos los cuales son extremadamente difíciles de obtener por métodos estándar.
No solamente matemáticos han tratado de justificar cálculos con infinitesimales. Hay muchos otros casos similares: los físicos han estado derivando funciones no derivables durante mucho tiempo, con la convicción de que las derivadas eran unas "funciones generalizadas", que no sabían definir, pero en la que se podía confiar. La razón por la que éstos cálculos con funciones misteriosas no llevaban a paradojas o contradicciones es que es posible construir unos objetos (las distribuciones) con las propiedades que los físicos postulaban implícitamente en el uso que hacían de sus funciones generalizadas. Así, el análisis no estándar, es la respuesta última a una asignatura pendiente que tenía la matemática. En su origen, el cálculo diferencial se basó en sus "números ideales" que nadie sabía definir porque tenían que ser no nulos y a la vez menor que cualquier cantidad positiva. Eran los infinitésimos (ó infinitesimales) lo cual al calcular la derivada por ejemplo de $f(x) = x^2$ llevaba a contradicciones al suponer $dx \neq 0$ y luego se eliminaba como si fuera $dx = 0$. Sin embargo Leibnitz era consciente de que los resultados a los que se llegaba con este tipo de razonamientos eran correctos.
El hecho de que los infinitesimales "funcionaran" indicaba claramente que podían construirse, pero no fue hasta finales de los años 60, cuando Abraham Robinson logró este objetivo. Por desgracia los infinitésimos de Robinson se construían y manejaban mediante técnicas de lógica matemáticas que no eran fáciles para los matemáticos no familiarizados con esta disciplina. Luego surgen aproximaciones axiomáticas al análisis no estándar que en lugar de construir los infinitésimos (que es complicado), lo que hacen es postular mediante unos axiomas sencillos, su existencia y propiedades.

Tabla de símbolos

$\mathbb{R}_{++}$	: conjunto de números reales positivos ($\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$)
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	: Espacio de sucesiones de números reales.
$\mathscr{U}$	: Ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$
$=_u$	: Relación de equivalencia
${}^*\mathbb{R}$	: Conjunto de los números reales no estándar $\left({}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{=_u}\right)$
$[x]$	: Clase de equivalencia de x respecto a $=_u$
$<_{\mathscr{U}}$	: Relación definida sobre ${}^*\mathbb{R}$.
$\left(\mathscr{P}(\mathbb{R})\right)^{\mathbb{N}}$	: Sucesión de subconjuntos de números reales.
${}^*\mathbb{N}$	: conjunto de los números naturales no estándar.
$\overline{\mathbb{N}} = \{[\overline{n}]/n \in \mathbb{N}\}$	: conjunto de clases de sucesiones
$\mathscr{X}$	: superestructura determinada por un conjunto X.
$* : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$	: superestructura incrustrada (saturada),
	: también denota una extensión no estándar.
$\mathscr{F}\mathscr{P}(B)$	: conjunto de todos los subconjuntos finitos de B.
${}^*\mathscr{X}$	: Igual al conjunto $\{y \in \mathscr{Y}/y$ es interno$\}$.
$\mathscr{L}$	: Lenguaje que describe la superestructura estándar.
u(x)	: Mónada de $x \in X$, considerando X espacio topológico (X, τ).
$\simeq$	: infinitamente cercano a.
$u_d(x)$	: Mónada de x, considerando (X, d) espacio métrico.
T_1	: Propiedad de separación T_1.
$X = {}^\circ Y$	: X es la parte estándar de Y.

$n_S(^*X)$	: Conjunto de puntos NE (near standar) a X.
$(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$	: Familia de espacios topológicos.
$(C(X,Y), \overline{d})$	: Espacio métrico de las funciones continuas acotadas de X a Y.
(L, I)	: Estructura de integración (interna).
L	: Lattice (conjunto de funciones integrables sobre un espacio X).
I	: Funcional $(I : L \to \mathbb{R})$.
$\widetilde{L}, \widetilde{I}$	: Extensión de la estructura de integración (L, I).
$(\widehat{L}, \widehat{I})$	: Estandarización de (L, I).
χ_E	: Función característica $\chi_E : X \to \{0,1\}$, donde $E \subset X$.
$S(\mathbb{R})$	: Conjunto de funciones de paso sobre $\mathbb{R}$.
$\$$	: Funcional definida sobre $S(\mathbb{R})$.
$^\circ\phi$	: Parte estándar de ϕ, $\phi \in L$.
$\widehat{M}$	: Conjunto de funciones medibles.
$\widehat{L}^+$	: Conjunto de funciones no negativas en $\widehat{L}$.
$\widehat{M}^+$	: Conjunto de funciones no negativas h sobre con valores en $\overline{\mathbb{R}}$
	: tal que $h \wedge f \in \widehat{L}$, $\forall f \in \widehat{L}$.
$\widehat{M}$	: Conjunto de funciones h sobre X con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ cuya parte
	: positiva $h^+ = h \vee 0$, y parte negativa $h^- = -h \vee 0$ están en $\widehat{m}^+$.
$\widehat{J}_h$	: Función definida en $\widehat{M}^+$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$.
L_1	: Conjunto de funciones $h \in \widehat{M}$ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $\widehat{J}(h)$ es finito.
$\widehat{L}_1^{!}$	: Conjunto de funciones no negativas en $\widehat{L}_1$.
$\widehat{\mathscr{L}}$	: Colección de todos los conjuntos $A \subset X$ para los cuales $\chi_A \in \widehat{L}^+$.
$\mathscr{M}$	: σ-álgebra sobre X.
$(X, \mathscr{M})$	: Espacio medible.
μ	: Medida sobre $\mathscr{M}$.
$(X, \mathscr{M}, \mu)$	: Espacio de medida.
$C_C(X)$	: Conjunto de funciones continuas con soporte compacto sobre X.
I_0	: Funcional lineal positiva sobre $C_C(X)$.

$({}^*C_C(X), {}^*I_0)$	: Estructura de integración interna sobre ${}^*X$.
Ω	: Espacio muestral.
$P(A)$	: Probabilidad de un evento A.
P	: Medida probabilidad.
$\mathscr{E}$	: σ-álgebra llamado colección de eventos.
$(\Omega, \mathscr{E}, P)$	: Espacio de probabilidad.
X_t	: Variables aleatorias.
$E(X) = \int X dP$	: Valor esperado $E(X)$ de X.
$\widetilde{N}(w, t)$	: Número de llamadas entrantes en $[0, t]$, para w fijo.
$\beta(t, \cdot)$	: Movimiento Browniano sobre $(\Omega, \widehat{\mathscr{E}}, \widehat{P})$.
$(\Omega, L(A), L(v))$	: Espacio de Loeb construido a partir de un espacio de
	: medida interna (Ω, A, v).
$h : [0, +\infty\rangle \times \Omega \to \mathbb{R}$	: Proceso estocástico.
$H : T \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}$	: Proceso interno.
(A_t)	: Martingala (proceso interno, A_t adaptado con valores en ${}^*\mathbb{R}$).

Capítulo 1

Conceptos preliminares sobre análisis no estándar

En este capítulo presentamos al análisis no estándar en el contexto familiar del cálculo. Fue en este contexto que el concepto de infinitesimal fue usado por Leibnitz y sus seguidores para definir la derivada para de esta manera iniciar el cálculo infinitesimal y su espectacular desarrollo. La noción de infinitesimal es la piedra angular en todas las aplicaciones de métodos no estándar al análisis y de éste modo un entendimiento de este capítulo es básico para el resto del presente trabajo.

1.1. Ultraproductos

Una construcción muy sencilla, la cual produce elementos con propiedades infinitesimales, es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el espacio de sucesiones reales. Nosotros podemos sumergir $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mediante la asignación a cada $r \in \mathbb{R}$ la sucesión constante $\bar{r} = (r, r, r, \ldots)$. Ahora, consideremos la sucesión definida mediante $x_n = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$.
Denotemos por $\mathbb{R}_{++}$ el conjunto de los números reales estrictamente positivos (i.e. $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$). Dado cualquier $r \in \mathbb{R}_{++}$, observemos que $x_n < \bar{r}_n$ para todo n salvo una cantidad finita de valores de n. En efecto: Dado $r \in \mathbb{R}_{++}$, y

denotemos $F = \{n \in \mathbb{N}/\frac{1}{n} > r\}$. Como $r > 0$ Entonces:

Si $r \geq 1$ entonces $\frac{1}{n} \leq 1 \leq r$. Por lo tanto $F = \emptyset$. Como $0 < r$, entonces por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < r$$

Entonces, para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < r$$

Luego $\frac{1}{n} < r$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus F$, donde $F \subset \{1; 2; \cdots ; n_0 - 1\}$ finito. $\square$

Definición 1.1. Consideremos $x = (x_n), y = (y_n)$ sucesiones reales, luego definimos una relación $<_F$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como

$$x <_F y \quad \Leftrightarrow \quad x_n < y_n \ , \forall n \in F, F \subset \mathbb{N} \text{ donde } F \text{ finito.}$$

Además, denotaremos que $x >_F y$ si, y solo si, $y <_F x$.

Diremos que

$$x =_F y \quad \Leftrightarrow \quad x_n = y_n \; \forall n \in F, \; F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito}$$

Proposición 1.1. La relación $<_F$ definida en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por

$$x <_F y \quad \Leftrightarrow \quad x_n < y_n \ , \forall n \in F, F \subset \mathbb{N} \text{ donde } F \text{ finito.}$$

es una relación de orden parcial en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Prueba. 1) Veamos que $<_F$ es reflexiva.

Sea $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cualquiera. Como $x_n < x_n, \forall n \in F = \emptyset$ (F finito), entonces $x <_F x$. Así $x <_F x, \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.Por lo tanto $<_F$ es reflexiva.

2) Veamos que $<_F$ es antisimétrica.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $x <_F y, y <_F x$. Mostraremos que $x =_F y$. En efecto: como $x <_F y \Rightarrow x_n < y_n, \forall n \in F_1 \subset \mathbb{N}$, finito. Como

$y <_F x \Rightarrow y_n < x_n, \forall n \in F_2 \subset \mathbb{N}$ finito. Observando que si $a < b \Rightarrow a \leq b$ entonces tenemos que

$$x_n < y_n \wedge y_n < x_n \ , \forall n \in F_1 \cap F_2 \subset \mathbb{N}(F_1 \cap F_2 : \text{ finito}) \tag{1.1}$$

(Si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ también sería válido 1.1 pues $F_1 \cap F_2$ finito)

Así: $x_n \leq y_n \wedge y_n \leq x_n, \forall n \in F = F_1 \cap F_2 \subset \mathbb{N}, F$ finito. Como la relación $\leq$ usual es antisimétrica resulta que $x_n = y_n, \forall n \in F = F_1 \cap F_2 \subset \mathbb{N}$, F finito. Así $x =_F y$. Por lo tanto $<_F$ es antisimétrica.

iii) Veamos que $<_F$ es transitiva.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cualesquiera $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x <_F y \wedge y <_F z$. Mostraremos que $x <_F z$. En efecto: como $x <_F z$ entonces $x_n < y_n, \forall n \in F_1$ finito, $F_1 \subset \mathbb{N}$. Además, como $y <_F z$ entonces $y_n < z_n, \forall n \in F_2$ finito, $F_2 \subset \mathbb{N}$. Luego, como la relación $<$ usual es transitiva tenemos que:

$$x_n < y_n \wedge y_n < z_n \Rightarrow x_n < z_n, \ \forall n \in F = F_1 \cap F_2 \tag{1.2}$$

(Nuevamente, si $F = F_1 \cap F_2 = \emptyset$, también se cumple pues $F = \emptyset$ es finito).

Por lo tanto: $x_n < z_n, \ \forall n \in F, \ (F = F_1 \cap F_2)$ donde F finito. Así $x <_F z$.

Por lo tanto $<_F$ es transitiva

Finalmente, de (i),(ii) y (iii) se concluye que $<_F$ es una relación de orden parcial sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

□

Entonces x podría ser un infinitesimal en el sentido que

$$x <_F \bar{r}, \ \forall \ r > 0, r \in \mathbb{R}$$

Desafortunadamente, esta construcción muy sencilla no nos brinda una teoría satisfactoria de infinitesimales. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. Consideremos la sucesión $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la siguiente manera:

$$y_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

No se cumple que

$$y <_F \bar{1} \text{ y que tampoco } \bar{1} <_F y \tag{1.3}$$

Pues, como $\bar{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, $y = (2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots)$ vamos a demostrar que $y \not<_F \bar{1}$. En efecto, $y_n = 2 > 1$, para todo n impar, observando que existen infinitos impares. Del mismo modo, $\bar{1} \not<_F y$, pues $y_n = 0 < 1$ $\forall n$ par, observando que existen infinitos pares. □

En otras palabras, la relación $<_F$ es solamente un orden parcial en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Para construir una teoría satisfactoria de infinitesimales, nosotros consideramos una construcción ligeramente más elaborada, conocida como ultraproducto.

Definición 1.2. Un *ultrafiltro libre* sobre $\mathbb{N}$ es una colección $\mathscr{U}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) Si $A, B \in \mathscr{U}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{U}$;

(ii) Si $A \in \mathscr{U}$ y $A \subset B \subset \mathbb{N}$, entonces $B \in \mathscr{U}$ (cualquier $B \subset \mathbb{N}$ que contenga a un elemento $A \in \mathscr{U}$ también pertenece a $\mathscr{U}$);

(iii) Si A es finito, entonces $A \notin \mathscr{U}$;

(iv) Si $A \subset \mathbb{N}$, se tiene que $A \in \mathscr{U}$ ó $\mathbb{N} \setminus A \in \mathscr{U}$.

En adelante $\mathscr{U}$ denotará un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$.

Observación 1.1. Dado cualquier ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$, notemos, por el item (iv) de la Definición 1.2 que debemos tener:

$$P = \{2, 4, 6, \ldots\} \in \mathscr{U} \text{ o } I = \{1, 3, 5, \ldots\} \in \mathscr{U} \text{ pues } I = \mathbb{N} \setminus P.$$

Pero no ambos por los items (i) y (iii).

En efecto: Si $P \in \mathscr{U}$ y además $I \in \mathscr{U}$, tendríamos que $P \cap I \in \mathscr{U}$ (por (i)). Pero $P \cap I = \emptyset$. Luego $\emptyset \in \mathscr{U}$ lo cual es una contradicción puesto que como $\emptyset$ es finito, entonces $\emptyset \notin \mathscr{U}$ (por (iii)).

Observación 1.2. Acerca de un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$, podemos indicar que los ultrafiltros libres existen sólo con la ayuda del Lema de Zorn. No sólo existe un único ultrafiltro libre, sino que existen 2^c ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$, donde $c = \text{card}(\mathbb{R})$ (Ver [11])

Proposición 1.2. Supongamos que $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A \cup \cdots \cup A_n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$. Entonces existe un único $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i \in \mathscr{U}$.

Prueba.

Para probar la existencia, definamos $B_i = \mathbb{N} \setminus A_i$. Supongamos que: $(\forall\, i \in \mathbb{N}) : A_i \notin \mathscr{U}$. Como $A_i \in \mathbb{N}$, entonces $B_i \in \mathscr{U}$ (por (iv)). Así, desde que $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, tomando el complemento, tenemos

$$\emptyset = [(B_1 \cap B_2) \cap B_3] \cap \cdots \cap B_n \in \mathscr{U}.$$

Luego $\emptyset \in \mathscr{U}$, lo cual es una contradicción. Así $A_i \in \mathscr{U}$, para algún $i \in \mathbb{N}$.
Para probar la unicidad, supongamos que existen $i, j \in \{1, \ldots, n\}; i \neq j$, tales que $A_i, A_j \in \mathscr{U}$. Como $A_i, A_j \in \mathscr{U}$ entonces $A_i \cap A_j \in \mathscr{U}$, es decir $\emptyset \in \mathscr{U}$ lo cual nuevamente es una contradicción. Por lo tanto $i = j$. □

Definición 1.3. La relación $=_{\mathscr{U}}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es definida por:

$$x =_{\mathscr{U}} y \text{ si y solo si } \{n \in \mathbb{N} / x_n = y_n\} \in \mathscr{U}$$

Proposición 1.3. La relación $=_u$ definida en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por

$$x =_u y \text{ si y sólo si } \{n \in \mathbb{N} / x_n = y_n\} \in \mathscr{U}$$

es una relación de equivalencia.

Prueba. i) Veamos que $=_u$ es reflexiva.

Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cualquiera. Puesto que $\{n \in \mathbb{N}/x_n = x_n\} = \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ por (iv) de la definición de ultrafiltro libre $\mathscr{U}$, tenemos $\{n \in \mathbb{N}/x_n = y_n\} = \mathbb{N} \in \mathscr{U}$ (No se puede tener $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset \in \mathscr{U}$, pues contradice (iii))

Así $x =_u x, \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto $=_u$ es reflexiva.

ii) Veamos que $=_u$ es simétrica.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x =_u y$. Tenemos que demostrar que $y =_u x$

En efecto: como $x =_u y$ entonces $\{n \in \mathbb{N}/x_n = y_n\} \in \mathscr{U}$. Como la relación de igualdad es simétrica en $\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\{n \in \mathbb{N}/y_n = x_n\} = \{n \in \mathbb{N}/x_n = y_n\} \in \mathscr{U}.$$

Así $\{n \in \mathbb{N}/y_n = x_n\} \in \mathscr{U}$. Por tanto $=_u$ es simétrica.

iii) Veamos que $=_u$ es transitiva.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cualesquiera con $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. tales que $x =_u y$, $y =_u z$. Tenemos que demostrar que $x =_u z$. En efecto: como $x =_u y$ se tiene $\{n \in \mathbb{N}/x_n = y_n\} \in \mathscr{U}$ y como $y =_u z$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N}/y_n = z_n\} \in \mathscr{U}$. Luego:$\{n \in \mathbb{N}/x_n = z_n\} = \{n \in \mathbb{N}/y_n = x_n\} \cap \{n \in \mathbb{N}/y_n = z_n\} \in \mathscr{U}$ Así $x =_u z$. Por lo tanto $=_u$ es transitiva.

Finalmente de i),ii) y iii) concluimos que $=_u$ es una relación de equivalencia. $\square$

Definición 1.4. Dado $x \in \mathbb{R}^N$, denotemos por $[x]$ la clase de equivalencia de x respecto a la relación de equivalencia $=_{\mathscr{U}}$. Es decir

$$[x] = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/y =_{\mathscr{U}} x\}$$

El conjunto de los números reales no estándar denotado por $^*\mathbb{R}$ (léase $\mathbb{R}$ estrella) es

$$^*\mathbb{R} = \{[x]/x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{=_{\mathscr{U}}}$$

Cualquier relación sobre $\mathbb{R}$ puede ser extendida a $^*\mathbb{R}$.

En particular dado $[x],[y] \in {}^*\mathbb{R}$, podemos definir:

$$[x] <_{\mathscr{U}} [y] \text{ si y sólo si } \{n \in \mathbb{N}/x_n < y_n\} \in \mathscr{U}.$$

Es fácil verificar que ésta definición es independiente de los representantes particulares x e y elegidos de las clases de equivalencia $[x]$ e $[y]$.

En efecto:

sean $[x] <_{\mathscr{U}} [y]; [x] = [x'], [y] = [y']$.

Entonces $[x'] <_{\mathscr{U}} [y']$, luego

$$\{x'_n < y'_n\} \in \mathscr{U} \tag{1.4}$$

- Como $[x] = [x']$ entonces $x =_{\mathscr{U}} x'$. Luego $A = \{n \in \mathbb{N}/x_n = x'_n\} \in \mathscr{U}$
- Como $[y] = [y']$ entonces $y =_{\mathscr{U}} y'$. Luego $B = \{m \in \mathbb{N}/y_m = y'_m\} \in \mathscr{U}$.

Sea $C = \{n \in \mathbb{N}/x'_n < y'_n\} \in \mathscr{U}$ (por (1.4))

Entonces

$$A \cap B \cap C = \{n/x_n = x'_n\} \cap \{n/y_n = y'_n\} \cap \{n/x_n < y_n\} \subset \{n/x'_n < y'_n\}$$

Como $A \cap B \cap C \in \mathscr{U}$, entonces $\{n \in \mathbb{N}/x'_n < y'_n\} \in \mathscr{U}$.

Por tanto $[x'] <_{\mathscr{U}} [y']$

Definición 1.5. $[x] >_{\mathscr{U}} [y]$ si y sólo si $[y] <_{\mathscr{U}} [x]$.

Proposición 1.4. Supongamos que $[x],[y] \in {}^*\mathbb{R}$. Entonces exactamente una de las siguientes relaciones se satisface.

$$[x] <_{\mathscr{U}} [y], \quad [x] =_{\mathscr{U}} [y], \quad [x] >_{\mathscr{U}} [y].$$

Prueba. Definamos:

$$\begin{aligned} A &= \{n/x_n < y_n\} \\ B &= \{n/x_n = y_n\} \\ C &= \{n/x_n > y_n\} \end{aligned}$$

Es claro que

$$\mathbb{N} = A \cup B \cup C; \text{ donde } A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \cap C = \emptyset$$

Luego

$$A \in \mathscr{U} \text{ o } B \in \mathscr{U} \text{ o } C \in \mathscr{U} \text{ sólo una de ellas se cumple}$$

Es decir

$$[x] <_{\mathscr{U}} [y] \text{ o } [x] =_{\mathscr{U}} [y] \text{ o } [x] >_{\mathscr{U}} [y]$$

$\square$

Ejemplo 1.2. Sea $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definida por $x_n = \frac{1}{n}$, $\bar{r} = (r, r, \ldots, r)$ para $r \in \mathbb{R}$.
Veamos que $[x]$ es un infinitesimal.
En efecto, si $r > 0$ entonces $\{n \in \mathbb{N}, x_n < \bar{r}_n\} \in \mathscr{U}$ porque su complemento es finito.

Definición 1.6.
Diremos que

- $[x] \in {}^*\mathbb{R}$ es llamada *infinita* si $[x] >_{\mathscr{U}} \bar{m}$, para todo $m \in \mathbb{N}$
- Dado cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos definir una función

$$^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R} \text{ por } \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad {}^*f([\bar{r}]) = [\overline{f(r)}].$$

En otras palabras, $^*f$ es definida evaluando f puntualmente en los componentes de $\bar{r}$.

Definición 1.7. Definimos

$$[x] \cong [y] \quad , \text{ si } [x] - [y] = [z] \text{ es un infinitesimal}$$

(donde $z_n = x_n - y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$).

Ejemplo 1.3 (de una clase infinita). Sea $x = (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots), n \in \mathbb{N}$.
AFIRMACIÓN: $[x]$ es infinita. Sea $m \in \mathbb{N}$ cualquiera (fijo), entonces

$$\bar{m} = (m, m, \ldots, m, \ldots), \text{ sucesión constante.}$$

Hay que probar que $[x] >_{\mathscr{U}} \bar{m}$ si y sólo si $A = \{n/n > m\} \in \mathscr{U}$.

Entonces definimos el conjunto $A^c = \{1, \ldots, m-1\}$ el cual es finito y por tanto llegamos a que $A^C \notin \mathscr{U}$.
Por tanto $A = \{n/n > m\} \in \mathscr{U}$.
Así, $[x]$ es infinita.

1.2. Conjuntos Internos y Externos

Para trabajar con los números reales no estándar, necesitamos ser capaces de hablar acerca de los subconjuntos de $^*\mathbb{R}$. Extendemos la construcción *ultraproducto* a conjuntos, considerando sucesiones en $(\mathscr{P}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$, donde $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ es la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ y extendiendo la relación de equivalencia $=_{\mathscr{U}}$ de la Definición 1.3.

Definición 1.8. Supongamos que $A, B \in (\mathscr{P}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$. Definimos una relación de equivalencia $=_{\mathscr{U}}$ mediante:

$$A =_{\mathscr{U}} B \Leftrightarrow \{n/A_n = B_n\} \in \mathscr{U}$$

Denotemos por $[A]$ la clase de equivalencia de A. Dado $[x] \in {}^*\mathbb{R}$, definimos:

$$[x] \in_{\mathscr{U}} [A] \Leftrightarrow \{n/x_n \in A_n\} \in \mathscr{U}$$

Notemos que $[A]$ no es un subconjunto de $^*\mathbb{R}$, es una clase de equivalencia de sucesiones de conjuntos de números reales, no un conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de números reales. Sin embargo, podemos asociar a ella un subconjunto de $^*\mathbb{R}$ en forma natural como sigue:

Definición 1.9 (Mostowski Collapsing Function). Dado $A \in (\mathscr{P}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$, definamos un conjunto $M([A]) \subset {}^*\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$M([A]) = \{[x] \in {}^*\mathbb{R}/[x] \in_{\mathscr{U}} [A]\} \tag{1.5}$$

Dicho conjunto $M([A])$ está bien definido, pues si $[B]=[A]$ entonces

$$M([B])=\{[x]\in {}^*\mathbb{R}/[x]\in_{\mathscr{U}}[B]=[A]\}=M([A])$$

Además $[x]\in_{\mathscr{U}}[A]$ si y sólo si $\{n/x_n\in A_n\}\in\mathscr{U}$ está bien definido. En efecto, sea $[x]\in_{\mathscr{U}}[A]$ entonces $\{n/x_n\in A_n\}\in\mathscr{U}$. Sea $[y]=[x],[y]\in B$ con $[B]=[A]$. Mostraremos que $[y]\in_{\mathscr{U}}[B]\equiv\{n/y_n\in B_n\}\in\mathscr{U}$. Como $[x]=[y]$ entonces $x=_{\mathscr{U}}y$ entonces $\{n/x_n=y_n\}\in\mathscr{U}$. Como $[A]=[B]$ entonces $A=_{\mathscr{U}}B$ entonces resulta $\{n/A_n=B_n\}\in\mathscr{U}$. Además, tenemos que $\{n/x_n\in A_n\}\in\mathscr{U}$. Entonces

$$C=\{n/x_n=y_n\}\cap\{n/A_n=B_n\}\cap\{n/x_n\in A_n\}\in\mathscr{U}$$

Notemos que $C\subset\{n/y_n\in B_n\}$ y como $C\in\mathscr{U}$ entonces $\{n/y_n\in B_n\}$

Definición 1.10. Un conjunto $B\subset {}^*\mathbb{R}$ es llamado *interno*, si $B=M([A])$ para algún $A\in(\mathscr{P}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$. En otro caso será llamado *externo*.

Definición 1.11.

- Una función $f:{}^*\mathbb{R}\to{}^*\mathbb{R}$ es *interna*, si su rango es un conjunto interno en ${}^*\mathbb{R}$.
- Sea $B\subset\mathbb{R}$ definimos ${}^*B=M([A])$, donde $A\in(\mathscr{P}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ es la sucesión constante $A_n=(B)_{n\in\mathbb{N}}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Ejemplo 1.4. El conjunto de los números naturales no estándar, es:

$${}^*\mathbb{N}=\{[x]\in{}^*\mathbb{R}/\{n/x_n\in\mathbb{N}\}\in\mathscr{U}\}$$

En efecto, de la definición anterior consideremos $B=\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}{}^*\mathbb{N}=M([A]) &= \{[x]\in{}^*\mathbb{R}/[x]\in_{\mathscr{U}}[A]\}\\ &= \{[x]\in{}^*\mathbb{R}/\{n/x_n\in A_n\}\in\mathscr{U}\}\\ &= \{[x]\in{}^*\mathbb{R}/\{n/x_n\in\mathbb{N}\}\in\mathscr{U}\}\end{aligned}$$

□

Sea $\overline{\mathbb{N}} = \{[\bar{n}]/n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\overline{\mathbb{N}} \subset {}^*\mathbb{N}$. En efecto, sea $[\bar{n}] \in \overline{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $[\bar{n}] \in {}^*\mathbb{N}$ donde $\bar{n} = (n)_{n\in\mathbb{N}} = (n, n, \ldots)$ lo cual es equivalente a

$$[\bar{n}] \in {}^*\mathbb{R} \text{ y } \{n/n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$$

Observemos que, realmente $\overline{N}$ es un subconjunto propio de ${}^*\mathbb{N}$.
En efecto, consideremos $[x]$, donde $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x_n = (1, 2, \ldots)$

- Veamos que $[x] \in {}^*\mathbb{N}$.
  Notemos que $\{n/n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$ entonces $[x] \in {}^*\mathbb{N}$.

- Falta ver que $[x] \notin \overline{\mathbb{N}}$.
  Supongamos que $[x] \in \overline{\mathbb{N}}$, entonces $[x] = [\bar{n}_0]$, para algún $n_o \in \mathbb{N}$
  Entonces

  $$x =_{\mathscr{U}} \bar{n}_0. \text{ Por tanto } \{n/x_n = n_0\} \in \mathscr{U}$$

  De lo que obtenemos que $\{n_0\} \in \mathscr{U}$ lo cual es una contradicción puesto que $\{n_0\}$ es un conjunto finito.
  En resumen, si $m \in \mathbb{N}$, entonces $\{n/x_n = \bar{m}_n\} = \{m\} \notin \mathscr{U}$

  Luego

  $$[x] \neq [\bar{m}] \text{ donde } \bar{m} = (m, m, \cdots) = (n_0, n_0, \cdots).$$

Proposición 1.5. El conjunto ${}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}}$ es un conjunto externo.

Prueba. Supongamos que ${}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}}$ es un conjunto interno, es decir,

$$ {}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}} = M([A]), \text{ para algún } A \in (\mathscr{P}(\mathbb{R}))^N$$

La idea de la demostración es construir un elemento $[y] \in {}^*\mathbb{N} - \overline{\overline{\mathbb{N}}}$ pero que $[y] \notin M([A])$ (y así, ${}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}} \neq M([A])$).

Sea $J = \{n/A_n \subset \mathbb{N}\}$, podemos escoger $x \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \in J \\ x_n, & n \notin J \end{cases}$$

con $x_n \in A_n - \mathbb{N}$.

Por tanto se tiene que $\{n \in \mathbb{N}/x_n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. En efecto, notemos que $\mathbb{N} = J \cup (\mathbb{N} - J)$

- Si $n \in J \Rightarrow x_n = 0 \notin \mathbb{N}$
- Si $n \in \mathbb{N} - J \Rightarrow x_n \in A_n - \mathbb{N}$ i.e. $x_n \in \mathbb{N}$

En cualquier caso $x_n \notin \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Así, } \{n \in \mathbb{N}/x_n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

Luego, como $\{n \in \mathbb{N}/x_n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ se llega a que $[x] \notin {}^*\mathbb{N}$, pues si $[x] \in {}^*\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \{n/x_n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$$
$$\Rightarrow \emptyset \in \mathscr{U} (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Como $M([A]) \subset {}^*\mathbb{N}$ (pues $M([A]) = {}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}} \subset {}^*\mathbb{N}$)

$$\Rightarrow [x] \notin M([A])$$
$$\Rightarrow [x] \notin_{\mathscr{U}} [A]$$
$$\Rightarrow \{n/x_n \in A_n\} \notin \mathscr{U}$$
$$\Rightarrow \mathbb{N} - J \notin \mathscr{U}$$

Luego, se debe tener que $J \in \mathscr{U}$.

Nota.

$\mathbb{N} - J = \{n/x_n \in A_n\}$. Recordar

$$\begin{cases} x_n = 0, & n \in J = \{n/A_n \subset \mathbb{N}\} \\ x_n \in A_n - \mathbb{N}, & n \notin J \end{cases}$$

- $\mathbb{N} - J \subset \{n/x_n \in A_n\}$. Sea $n \in \mathbb{N} - J$

$$\Rightarrow n \notin J$$
$$\Rightarrow x_n \in A_n - \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow x_n \in A_n$$
$$\Rightarrow n \in \{n/x_n \in A_n\}$$

- $\{n/x_n \in A_n\} \subset \mathbb{N} - J$. Sea $n \in \{n/x_n \in A_n\}$, entonces $x_n \in A_n$ P.D.Q.: $n \in \mathbb{N} - J \equiv n \notin J$. Supongamos que $n \in J$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x_n = 0 \\
&\Rightarrow 0 \in A_n \\
&\Rightarrow 0 \in A_n \subseteq \mathbb{N} (\Rightarrow\Leftarrow)(\text{pues } 0 \notin A_n)
\end{aligned}$$

Así, $n \in \mathbb{N} - J$

Retomando prueba, llegamos a que $J \in \mathscr{U}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $A_n \subset \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos

$$T_m = \{n/m \notin A_n\}$$

Notemos que $[\bar{m}] \notin M([A])$ pues

$$\begin{aligned}
&\text{Si } [\bar{m}] \in M([A]) = {}^*\mathbb{N} - \overline{N} (\text{por lo que hemos supuesto}) \\
&\Rightarrow [\bar{m} \notin \overline{N}] (\Rightarrow\Leftarrow)(\text{ya se ha demostrado esto})
\end{aligned}$$

Así, $[\bar{m}] \notin M([A])$.

Como $[\bar{m}] \notin M([A])$, entonces $[m] \notin_{\mathscr{U}} [A]$, entonces $\{n/n \in A_n\} \notin \mathscr{U}$; luego tomando complemento

$$T_m = \{n/m \notin A_n\} \in \mathscr{U}$$

De esta manera, $T_m \in \mathscr{U}$.

Ahora, para $m \in \mathbb{N} \cup 0$, definamos

$$S_m = \{n \in \mathbb{N}/A_n \subset \{m, m+1, m+2, \ldots\}\}$$

Entonces

$$S_m = \bigcap_{k=1}^{m-1} T_k = T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_{m-1} \text{ donde cada } T_k \in \mathscr{U}.$$

En efecto, sea $n \in S_m$, entonces $A_n \subset \{m, m+1, \ldots\}$. Basta probar que $n \in T_1 = \{n/1 \notin A_n\}$ (y así $n \in \bigcap_{k=1}^{m-1} T_k$).

Supongamos que $n \notin T_1$ entonces $1 \in A_n$, luego tenemos que
$1 \in \{m, m+1, m+2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 \geq m \\
&\Rightarrow m < 2 (\Rightarrow\Leftarrow) \\
&\Rightarrow n \in T_1 \\
&\Rightarrow n \in \textstyle\bigcap_{k=1}^{m-1} T_k
\end{aligned}$$

Nota. Si $n \in T_2 \Rightarrow m \geq 3 \Rightarrow 2 \notin A_n$.

Luego tenemos que $S_m \in \mathscr{U}$ (pues S_m es intersección finita de elementos en $\mathscr{U}$).

Además $S_0 = \{n/A_n \subset \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ (hemos supuesto $A_n \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N} \cup \{0\} \forall n \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow S_0 = \mathbb{N}.$$

Definamos $S_\infty = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} S_m$, entonces

$$S_\infty = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} S_m = \{n/A_n = \emptyset\} \text{ donde } S_m = \{n/A_n \subset \{m, m+1, \ldots\}\}$$

En efecto, para ver que $S_\infty \subset \{n/A_n = \emptyset\}$, sea $n \in S_\infty$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall m, n \in S_m \\
&\Rightarrow \forall m, A_n \subset \{m, m+1, \ldots\} \\
&\Rightarrow A_n \subset \{p+1, p+2, \ldots\} (m = p+1)
\end{aligned}$$

Si $A_n \subset \mathbb{N}, A_n \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists p \in A_n, p \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow p \in A_n \subset \{p+1, p+2, \ldots\} \\
&\Rightarrow \text{ se llegaría a que } p \in \{p+1, \ldots\} (\Rightarrow\Leftarrow)
\end{aligned}$$

$$\text{Así } S_\infty \subset \{n/A_n = \emptyset\}.$$

Para ver que $\{n/A_n = \emptyset\} \in S_\emptyset$ consideremos $n \in \{n/A_n = \emptyset\}$, entonces $A_n = \emptyset$, P.D.Q.: $n \in S_\infty = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} S_m$, i.e. $n \in S_m, \forall m \in \mathbb{N}$.

Es claro que $A_n = \emptyset \subset \{m, m+1, \ldots\} \forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A_n \subset \{m, m+1, \ldots\} \\
&\Rightarrow n \in \{n/A_n \subset \{m, m+1, \ldots\}\} \forall m \\
&\Rightarrow n \in \textstyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}} S_m = S_\infty
\end{aligned}$$

$$\text{Así } S_\infty = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} S_m = \{n/A_n = \emptyset\}$$

Afirmación: Si $S_\infty \in \mathscr{U} \Rightarrow M([A]) = \emptyset$.

En efecto, supongamos que $M([A]) = \emptyset$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists [x] \in M([A]) \\
&\Rightarrow [x] \in_{\mathscr{U}} [A] \\
&\Rightarrow \{n/x_n \in A_n\} \in \mathscr{U}
\end{aligned}$$

Así, $\{n/x_n \in A_n\} \in \mathscr{U}$ y $\{n/A_n = \emptyset\} \in \mathscr{U}$ (por la suposición). Entonces la intersección

$$\begin{aligned}
&\{n/x_n \in A_n = \emptyset\} \in \mathscr{U} \\
&\Rightarrow \emptyset \in \mathscr{U} \\
&\qquad \therefore M([A]) = \emptyset
\end{aligned}$$

Así tenemos que $M([A]) = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues ${}^*\mathbb{N} - \overline{N} \neq \emptyset$ (recordar que $M([A]) = {}^*\mathbb{N} - \overline{N}$)

$$\text{Así hemos probado que } S_\infty \notin \mathscr{U}$$

Se define una sucesión $y \in \mathbb{R}^N$ de la siguiente manera

$$y_n = \begin{cases} m, & \text{si } n \in S_{m+1} - S_{m+2} \\ 0, & \text{si } n \in S_\infty \end{cases}$$

Nótese que $\mathbb{N} = [\bigcup_{m=0}^{\infty}(S_{m+1} - S_{m+2})] \cup S_{\infty}$.

De la definición de y_n se tiene que $\{n/y_n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} - S_{\infty}$.
En efecto, sea $n \in \mathbb{N}/y_n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $n \in S_{\infty}$ entonces $y_n = 0(\Rightarrow\Leftarrow)$, pues $y_n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $\mathbb{N} - S_{\infty} \subset \{n/y_n \in \mathbb{N}\}$. Sea $n \in \mathbb{N} - S_{\infty}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow n \in \mathbb{N} \text{ y } n \notin S_{\infty}\\
&\Rightarrow y_n \neq 0\\
&\Rightarrow y_n = m, \text{ para algún } m(n \in S_{m+1} - S_{m+2})\\
&\Rightarrow y_n = m \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\text{Así } n \in \{n/y_n \in \mathbb{N}\}$$

Por lo tanto $\{n/y_n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} - S_{\infty} \in \mathscr{U}$ (lo cual es claro, ya que $S_{\infty} \notin \mathscr{U}$).
De este modo

$$[y] \in {}^*\mathbb{N}(\text{por definición de } {}^*\mathbb{N})$$

Por otro lado, dado $m \in \mathbb{N}$ (fijo), $\{n/y_n = m\} = S_{m+1} - S_{m+2} \subset \mathbb{N} - S_{m+2} \notin \mathscr{U}$ pues $S_m \in \mathscr{U}$, $\forall m$.

Sea $n \in \{n/y_n = m\}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow y_n = m, \text{ donde } n \in S_{m+1} - S_{m+2}\\
&\Rightarrow n \in S_{m+1} - S_{m+2}
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } \{n/y_n = m\} \subset S_{m+1} - S_{m+2}$$

Sea $n \in S_{m+1} - S_{m+2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow y_n = m, m \in \mathbb{N}\\
&\Rightarrow n \in \{n/y_n = m\}
\end{aligned}$$

De este modo llegamos a que $[y] \notin \overline{\mathbb{N}}$ donde $\overline{\mathbb{N}} = \{[\bar{n}]/n \in \mathbb{N}\}$ pues si $[y] \in \overline{N}$

$$\Rightarrow [y] = [\bar{m}], \text{ para algún } m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y \sim \bar{m}$$

$$\Rightarrow \{n/y_n = m\} \in \mathscr{U} (\Rightarrow\Leftarrow) \text{ pues } \{n/y_n = m\} \notin \mathscr{U}$$

Así $[y] \notin \overline{\mathbb{N}}$

De aquí $[y] \in {}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}}$.

Sin embargo $\{n/y_n \in A_n\} \subset S_\infty \notin \mathscr{U}$. En efecto, sea $n \in \{n/y_n \in A_n\}$. Mostraremos que $n \in S_\infty$.

Supongamos que $n \notin S_\infty$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } y_n = m, \text{ donde } n \in S_{m+1} - S_{m+2}$$

$$\Rightarrow m \in A_n; n \in S_{m+1} \text{ y } n \notin S_{m+2}$$

$$\Rightarrow A_n \subset \{m+1, \ldots\} \text{ pero } A_n \not\subset \{m+2, \ldots\}$$

Así, $m \in A_n \subset \{m+1, \ldots\}$, entonces $m \in \{m+1, \ldots\} (\Rightarrow\Leftarrow)$. Por lo tanto $n \in S_\infty$. Fin de la Proposición 1.5. □

Corolario. $\overline{\mathbb{N}}$ es un conjunto externo.

Prueba. Supongamos lo contrario, i.e. $\overline{\mathbb{N}}$ es un conjunto interno. Por definición, $\overline{\mathbb{N}} = M([A])$, para algún $A \in (\mathscr{P}(\mathbb{R}))^N$, $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $A_n \subset \mathbb{R}$.

Sea $B = \mathbb{N} - A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$

Afirmación: $M([B]) \subset {}^*\mathbb{N}$.

En efecto, sea $[x] \in M([B])$

$$\Rightarrow [x] \in_{\mathscr{U}} [B]$$

$$\Rightarrow \{n/x_n \in B_n\} \in \mathscr{U} \text{ pero } x_n \in B_n = \mathbb{N} - A_n$$

$$\Rightarrow \{n/x_n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$$

$$\Rightarrow x_n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n \notin A_n$$

$$\text{Así, } [x] \in {}^*\mathbb{N}$$

Por tanto $M([B]) \in {}^*\mathbb{N}$.

Supongamos ahora que $[y] \in {}^*\mathbb{N}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad, que $y_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned}
[y] \in M([B]) &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N}/y_n \in B_n\} \in \mathbb{U} \text{ (por definición)} \\
&\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N}/y_n \in A_n\} = \{n \in \mathbb{N}/y_n \in B_n\}^c \notin \mathscr{U} \\
&\Leftrightarrow [y] \notin M([A])
\end{aligned}$$

Así, $M([B]) = {}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}}$, pues si $[y] \in {}^*\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [y] \in M([B]) \text{ cualquiera} \\
&\Leftrightarrow [y] \notin M([A]) = \overline{\mathbb{N}} \\
&\Rightarrow [y] \in M([B]) \\
&\Leftrightarrow [y] \notin \overline{N} \text{ y } [y] \in {}^*\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow [y] \in {}^*\mathbb{N} - \overline{N}
\end{aligned}$$

De este modo, llegamos a que ${}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}} = M([B])$ donde $B \in (\mathscr{P}(\mathbb{R}))^N$, i.e. ${}^*\mathbb{N} - \overline{\mathbb{N}}$ es un conjunto interno, lo cual contradice la proposición anterior

$$\therefore \overline{\mathbb{N}} \text{ es un conjunto externo}$$

□

1.3. Convenciones de Notación

Es costumbre omitir los asteriscos (*) en muchos casos. Nótese primero que podemos incrustar $\mathbb{R}$ en ${}^*\mathbb{R}$ mediante la aplicación $r \to [\overline{r}]$. Así, es costumbre visualizar a $\mathbb{R}$ como un subconjunto de ${}^*\mathbb{R}$ y referirnos a $[\overline{r}]$ como r. Así, podemos también escribir $\mathbb{N}$ en lugar del símbolo más esforzado $\overline{\mathbb{N}}$. Relaciones básicas tales como $<, >, \leq, \geq$ son escritas sin la adición de un asterisco (*). Funciones tales como $\text{sen}, \cos, \log, e^x, |\cdot|$

(para valor absoluto o cardinalidad) son similarmente escritos sin la presencia de los asteriscos (*).

Considere la función $g : {}^*\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, definida por $g(n) = \mathbb{R}^N$. Si n es un número natural infinito, entonces ${}^*\mathbb{R}^n$ es definido como $({}^*g)(n)$; equivalentemente, es el conjunto de todas las funciones internas de $\{1, \ldots, n\}$ a ${}^*\mathbb{R}$. El símbolo de suma $\sum$, representa una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Así, si n es un número natural infinito e $y \in {}^*\mathbb{R}^n$, $({}^*\sum)_{i=1}^n y_i$ está bien definida. Es costumbre omitir el asterisco (*) de las sumas, productos o productos cartesianos.
Así, las siguientes expresiones son aceptables:

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} \quad ; \quad e^x > 0$$
$$\exists n \in {}^*\mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

1.4. Modelos Estándar

Nosotros necesitamos ser capaces de considerar objetos como espacios topológicos, o medidas de probabilidad además de los números reales.
Esto es tomando en consideración una *superestructura*. Tomamos un conjunto base X consistiendo de la unión de conjuntos de puntos de todos los objetos que nosotros deseamos considerar. Por ejemplo, si deseamos considerar funciones reales valoradas sobre un espacio topológico particular $(T, \mathscr{T})$, tomamos $\mathbb{R} \cup T$.
La superestructura es la clave de todos los objetos los cuales pueden ser obtenidos del conjunto base por iteración de la operación de formación de subconjuntos. Nosotros nos referiremos a ésta como el *modelo estándar* generado por X.

Definición 1.12. Suponga que X es un conjunto cuyos elementos son todos atómicos, es decir, $\emptyset \notin X$ y no existe $x \in X$ que contiene elementos algunos.

Sea $\mathscr{X}_0 = X$; entonces definimos el conjunto

$$\mathscr{X}_{n+1} = \left[\mathscr{P}(\bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{X}_k)\right] \cup \mathscr{X}_0 (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde $\mathscr{P}$ es el operador conjunto potencia.

Sea

$$\mathscr{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{X}_n$$

Entonces, la familia de conjuntos $\mathscr{X}$ es llamada la *superestructura determinada* por X. Para cualquier conjunto $B \in \mathscr{X}$, $\mathscr{F}\mathscr{P}(B)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos finitos de B.

La superestructura determinada por X contiene representaciones de subconjuntos de X, funciones definidas sobre X, productos cartesianos de subconjuntos de X, y esencialmente todas las construcciones matemáticas clásicas que pueden ser definidas usando X como el conjunto de puntos, dado al inicio. La forma exacta de la representación puede llegar a ser un poco complicado.
Los siguientes ejemplos ilustran como varias construcciones matemáticas son representadas en la superestructura.

Ejemplo 1.5. Un par ordenado $(x, y) \in X \times X$ es definido en teoría de conjuntos como

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}, x, y \in \mathscr{X}_0 = \mathscr{X}$$

Así $\{x\} \in \mathscr{X}_1$, donde para $n = 0$

$$\mathscr{X}_1 = [\mathscr{P}(\mathscr{X}_0)] \cup \mathscr{X}_0 = [\mathscr{P}(\mathscr{X})] \cup \mathscr{X}$$

entonces $\mathscr{X}_1 \subset \mathscr{P}(\mathscr{X})$

Además $\{x, y\} \in \mathscr{X}_1$. Así

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathscr{X}_2$$

lo cual es cierto pues,

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathscr{X} \cup \mathscr{P}(\mathscr{X})$$

En realidad $\{\{x\},\{x,y\}\} \subset \mathscr{P}(\mathscr{X}) \subset \mathscr{X} \cup \mathscr{P}(\mathscr{X})$, donde para $n=1$

$$\begin{aligned}\mathscr{X}_2 &= [\mathscr{P}(\bigcup_{k=0}^{1} \mathscr{X}_k)] \cup \mathscr{X}_0, k=0,1 \\ &= [\mathscr{P}(\mathscr{X}_0 \cup \mathscr{X}_1)] \cup \mathscr{X}_0\end{aligned}$$

entonces

$$\mathscr{X}_2 = \mathscr{P}(\mathscr{X} \cup \mathscr{P}(\mathscr{X})) \cup \mathscr{X}_0$$

Ejemplo 1.6. Una función $f : A \to B$, donde $A, B \subset X$ puede ser representada por su gráfico

$$G = \{(x, f(x))/x \in A\}$$

Del ejemplo previo sabemos que cada par ordenado $(x, f(x))$ en el gráfico G es un elemento de $\mathscr{X}_2$. Así $G \in \mathscr{X}_3$

Sea $(x, f(x)) \in G$. Debemos mostrar que $(x, f(x)) \in \mathscr{X}_2$, lo cual es equivalente a

$$(x, f(x)) = \{\{x\}, \{x, f(x)\}\} \subset \mathscr{X} \cup \mathscr{P}(\mathscr{X})$$

esto es debido a que:

$$\{x\} \subset X, \text{ es decir } \{x\} \in \mathscr{P}(X)$$

Así $(x, f(x)) \in \{x\} \subset \mathscr{X}_2$.

Ahora veamos que $G \in \mathscr{X}_3$, es decir cuando $G = \{x, f(x)/x \in A\}$ debemos mostrar que $G \in \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X))) \cup X$, esto es,

$$G \subset X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X))$$

Sea $(x, f(x)) \in G$, luego

$$(x, f(x)) = \{\{x\}, \{x, f(x)\}\} \in \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X)) \equiv \{\{x\}, \{x, f(x)\}\} \subset X \cup \mathscr{P}(X)$$

y además

$$\{x, f(x)\} \in \mathscr{P}(X) \subset X \cup \mathscr{P}(X).$$

Ejemplo 1.7. El conjunto de todas las funciones de A a B, con $A, B \subset X$ es así representada por un elemento de $\mathscr{X}_4$ y la denotamos por

$$B^A = \{f : A \to B / f \text{ es función}\} \in \mathscr{X}_4$$

donde

$$\mathscr{X}_4 = \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X)) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X)))) \cup X$$

es decir, debemos mostrar que

$$\{f : A \to B / f \text{ es función}\} \subset X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X)) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X)))$$

Basta ver que, por el ejemplo anterior, f puede ser representada por su gráfico

$$\{f : A \to B / f \text{ es función}\} =$$
$$\mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X)) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X)))) \cup X$$

lo cual es cierto, debido a que

$$G = \{(x, f(x)) / x \in A\} \subset \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X))$$

En efecto, si $(x, f(x)) \in G$
Veremos que: $(x, f(x)) \in \mathscr{P}(X \cup \mathscr{P}(X))$

$$(x, f(x)) = \{\{x\}, \{x, f(x)\}\} \subset X \cup \mathscr{P}(X)$$

lo cual es cierto pues

$$\{x\} \subset X \text{ es decir } \{x\} \in \mathscr{P}(X)$$

de lo cual se obtiene que $\{x, f(x)\} \subset \mathscr{X}$, es decir $\{x, f(x)\} \in \mathscr{P}(\mathscr{X})$.

Por lo tanto

$$B^A = \{f : A \to B / f \text{ es función}\} \in \mathscr{X}_4.$$

1.5. Superestructuras incrustadas

Dado un modelo estándar $\mathscr{X}$, se desea construir una extensión no estándar, es decir: una superestructura $\mathscr{Y}$ y una función : $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ satisfaciendo ciertas propiedades.

Definición 1.13. El conjunto $A \in \mathscr{Y}$ es llamado *interno* si $A \in {}^*B$ para algún $B \in \mathscr{X}$, y *externo* en otro caso.

Definición 1.14. Consideremos una función $* : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, donde $\mathscr{X}$, es un modelo estándar e $\mathscr{Y}$ una superestructura. Diremos que esta función $* : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es llamada una *superestructura incrustada* si

1. * es una función inyectiva.
2. $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{Y}_0$, más aún $x \in \mathscr{X}_0$.
3. ${}^*\mathscr{X}_0 = \mathscr{Y}_0$.
4. $\mathscr{X}_n \subset \mathscr{Y}_n,\ n = 1, 2, \ldots$
5. ${}^*(\mathscr{X}_{n+1} - \mathscr{X}_n) \subset \mathscr{Y}_{n+1} - \mathscr{Y}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$
6. $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{X} \Rightarrow {}^*\{x_1, \ldots, x_n\} = \{{}^*x_1, \ldots, {}^*x_n\}$
7. Si $A, B \in \mathscr{X} \Rightarrow \{A \in B \Leftrightarrow {}^*A \in {}^*B\}$
8. $A, B \in \mathscr{X}$, entonces:

   a) ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$

   b) ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$

   c) ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$

   d) ${}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$

9. Si $\Gamma = G(A, B)$, es el gráfico de una función de A a B, $A, B \in \mathscr{X}$, entonces ${}^*\Gamma = G({}^*A, {}^*B)$ es el gráfico de una función de ${}^*A$ en ${}^*B$

10. Si $A \in \mathscr{X}_n$, $B \in A \Rightarrow B \in {}^*\mathscr{X}_{n-1}$

11. Si A es interno, $A \subset B$, $B \in {}^*\mathscr{P}(C) \Rightarrow A \in {}^*\mathscr{P}(C)$

Definición 1.15.

- El conjunto $A \in \mathscr{Y}$ es llamado hiperfinito, si $A \in {}^*(\mathscr{F}\mathscr{P}(B))$ para algún $B \in \mathscr{X}$, donde $\mathscr{F}\mathscr{P}(B)$ es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de B.

- Denotemos por ${}^*\mathscr{X} = \{y \in \mathscr{Y} / y \text{ es interno}\}$

- Una función cuyo dominio y rango pertenecen a $\mathscr{Y}$ es llamada *interna* si su gráfico es interno ($f : A \to B$ con $A, B \in \mathscr{Y}$)

Ejemplo 1.8. Supongamos $X = \mathbb{R}$, tomemos $Y = {}^*\mathbb{R}$ definida vía la construcción ultraproducto. Sea $\mathscr{Y}$ la superestructura construida con Y como un conjunto base. Luego * como se definió a partir de la construcción ultraproducto es una superestructura incrustada. Note que $\mathscr{Y}_1$ contiene ambos conjuntos internos y conjuntos externos, así la función * no es sobreyectiva.

1.6. Principio de Transferencia

Leibniz aseveró que los números reales no estándar obedecen todas las mismas propiedades que los números reales ordinarios. El principio de transferencia dá una afirmación precisa de la aserción de Leibniz. El hecho clave el cual no fue extendido hasta el trabajo de Robinson (ver [10]) es que el *principio de transferencia* no puede ser aplicado para conjuntos externos. Así la distinción entre conjuntos internos y externos es crucial en análisis no estándar.

Dada una afirmación $F \in \mathscr{L}$ el cual describe la superestructura estándar $\mathscr{X}$ nosotros podemos formar una afirmación ${}^*F$, haciendo las siguientes sustituciones:

1. Para cualquier conjunto $A \in \mathscr{X}$, sustituir por ${}^*A$.

2. Para cualquier función $f : A \to B$ con $A, B \in \mathscr{X}$, la sustituimos por ${}^*f$.

3. Para cualquier cuantificador sobre conjuntos tales como

$$\forall A \in \mathscr{P}(B) \text{ ó } \exists A \in \mathscr{P}(B),$$

donde $B \in \mathscr{X}$ se sustituye por el cuantificador

$$\forall A \in {}^*(\mathscr{P}(B)) \text{ ó } \exists A \in {}^*(\mathscr{P}(B))$$

el cual vale sobre todo subconjunto interno de ${}^*B$.

4. Para cualquier cuantificador sobre funciones tales como

$$\forall f \in \mathscr{F}(A, B) \text{ ó } \exists f \in \mathscr{F}(A, B),$$

donde $\mathscr{F}(A, B)$ denota el conjunto de funciones de A a B para $A, B \in \mathscr{X}$, sustituir el cuantificador

$$\forall f \in {}^*(\mathscr{F}(A, B)) \text{ ó } \exists f \in {}^*(\mathscr{F}(A, B))$$

el cual varía sobre toda función interna de ${}^*A$ a ${}^*B$.

Nota. El principio de transferencia asevera que: F es una afirmación verdadera acerca de números reales si y sólo si ${}^*F$ es una afirmación verdadera acerca de los números reales no estándar.

Ejemplo 1.9. Consideremos la siguiente afirmación F:

$$\forall S \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \quad [S = \emptyset \vee \exists n \in S / \forall m \in S : m \geq n]$$

F asevera que cada subconjunto no vacío de números naturales tiene un primer elemento.

${}^*F$ es la afirmación

$$\forall S \in {}^*(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \quad [S = \emptyset \vee \exists n \in S / \forall m \in S : m \geq n]$$

Observación 1.3. Cabe mencionar que los subconjuntos externos de ${}^*\mathbb{N}$ no necesariamente tienen primer elemento.

Ejemplo 1.10. El conjunto ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ no tiene primer elemento: sino fuera así, es decir si ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tuviera un primer elemento digamos n_0, entonces $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ pero entonces $n_0 \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción, pues $n_0 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

1.7. Saturación

La idea de saturación fue presentado al análisis no estándar por Luxemburg en 1969.

Definición 1.16. Una superestructura incrustada * de $\mathscr{X}$ a $\mathscr{Y}$ es *saturada*, si para cada colección $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ donde A_λ es interno $\forall\lambda \in \Lambda$ y $|\Lambda| < |\mathscr{X}|$, donde $|D|$ indica el cardinal del conjunto D, se tiene que,

$$\text{Si } \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset \text{ entonces } \exists\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ tal que } \bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = \emptyset$$

Proposición 1.6. Supongamos que $^*\mathbb{R}$ es construida vía la construcción ultraproducto. Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos internos de $^*\mathbb{R}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{n_0} A_n = \emptyset$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

Prueba. Como A_n es interno para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una sucesión B_{nm} $(m \in \mathbb{N})$ tal que $A_n = M([B_n])$. Procedamos por contradicción es decir si

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para todo } n_0 \in \mathbb{N},$$

podemos encontrar $[x_n^m] \in {}^*\mathbb{R}$ con

$$[x_n] \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \text{ para cada } n.$$

Notemos que $x_n^m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, así denotamos por x_n^m la m-ésima componente de x_n.
Luego, el conjunto $\{m/z_m \in B_n^m\} \supset \{n, n+1, \dots\} \in \mu$. Así $[z] \in A_n$.
Por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{n_0} A_n = \emptyset$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.1. Supongamos que $^* : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es una superestructura incrustada saturada. Si B es interno y $x_1, x_2, \dots$ es una sucesión con $x_n \in B, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces existe una sucesión interna y_n con $y_n \in B$ para todo $n \in {}^*\mathbb{N}$ tal que $y_n = x_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Prueba. Sea $A_n = \{\text{sucesiones internas } y : y_i = x_i(1 \leq i \leq n), y_i \in B(i \in {}^*\mathbb{N})\}$.
Fijemos $b \in B$. Si consideramos y definido por $y_i = x_i(1 \leq i \leq n)$ y además $y_i = b$ para $i > n$. Veamos entonces que $A_n = \emptyset$.
Por saturación, podemos encontrar $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Luego y es una sucesión interna, $y_n \in B$ para todo $n \in {}^*\mathbb{N}$ y además $y_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

1.8. El Principio de Definición Interna

Como una consecuencia del principio de transferencia podemos tener el principio de *definición interna*, la cual informalmente es como sigue: cualquier objeto en el modelo no estándar el cual se puede describir usando una formula la cual no contiene expresiones externas, es interno.

Ejemplo 1.11.
1. Si $n \in {}^*\mathbb{N}$, el conjunto $\{m \in {}^*\mathbb{N}, m > n\}$ es interno.
2. Si f es una función interna y B es un conjunto interno, entonces $f^{-1}(B)$ es interno.
3. Si A, B son subconjuntos internos con $A \subset B$, entonces la clase de todos los subconjuntos internos de B que contienen a A $\{C \in \mathscr{P}(B)/C \supset A\}$, es interno.
4. El conjunto $\{x \in {}^*\mathbb{R} : x \simeq 0\}$ no es interno (por la presencia de la expresión externa $x \simeq 0$).

1.9. Extensiones no estándar

Definición 1.17. Una extensión no estándar de un modelo estándar $\mathscr{X}$ es una superestructura incrustada saturada $^* : \mathbb{X} \to \mathscr{Y}$ la cual satisface el principio de transferencia y el principio de definición interna.

Los números reales $\mathbb{R}$ son definidos como la completación de los números racionales $\mathbb{Q}$ la cual es construida en una de las dos maneras: *cortaduras de Dedekind* o *sucesiones* *de Cauchy*. En la práctica, argumentos matemáticos concernientes a $\mathbb{R}$ nunca refieren a los detalles de la construcción. La construcción es usado una vez para establecer la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ satisfaciendo ciertos axiomas. Todos los argumentos son dados en términos de los axiomas.

En la misma forma, la construcción ultraproducto es usada para demostrar la existencia de extensiones no estándar. Las pruebas no estándar son entonces establecidas completamente en términos de aquellas propiedades sin referencia a los detalles de la construcción ultraproducto.

1.10. Conjuntos Hiperfinitos

Definición 1.18. Supongamos que $A \in \mathscr{X}$ y $^* : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es una extensión no estándar. Sea $\mathscr{F}\mathscr{P}(A)$ el conjunto de los subconjuntos finitos de A. Un conjunto $B \subset {}^*A$ es llamado *hiperfinito*, si $B \in {}^*(\mathscr{F}\mathscr{P}(A))$

Ejemplo 1.12. Supongamos que m es un número natural infinito.
Consideremos $B = \{k \in {}^*\mathbb{N}/k \leq m\}$. Luego la afirmación

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \{k \in \mathbb{N}/k \leq m\} \in \mathscr{F}\mathscr{P}(\mathbb{N})$$

es verdadera en el modelo estándar $\mathscr{X}$. Por el principio de transferencia, la afirmación

$$\forall m \in {}^*\mathbb{N}\{k \in {}^*\mathbb{N}/k \leq m\} \in {}^*(\mathscr{F}\mathscr{P}(\mathbb{N}))$$

es verdadera. Por lo tanto B es un conjunto hiperfinito.

Nota. El principio de transferencia implica que los conjuntos hiperfinitos poseen todas las propiedades formales de conjuntos finitos.

Teorema 1.2. Supongamos que $^* : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es una extensión no estándar. Si $B \in \mathscr{X}$ y $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces existe un conjunto hiperfinito D con $|D| < n$ tal que

$$x \in B \Rightarrow {}^*x \in D.$$

Prueba. Como $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $n > m$.
Sea $\Lambda = B, A_\lambda = \{D \in {}^*\mathscr{F}\mathscr{P}(B) : {}^*\lambda \in D, |D| < n\}$. A_λ es interno, por el principio de definición interna y $|\Lambda| = |B| < |\mathscr{X}|$.
Dado $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ con $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \{{}^*\lambda_1, \ldots, {}^*\lambda_m\} \in \bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$. De este modo la intersección es no vacía.
Luego $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ por saturación.
Si D es cualquier elemento de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, entonces $D \in {}^*\mathscr{F}\mathscr{P}(B)$. Así D es hiperfinito, $|D| < n$ y $D \supset \{{}^*x : x \in B\}$ □

Proposición 1.7. Supongamos que ${}^*\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es una extensión no estándar. Supongamos que B es hiperfinito y $A \subset B$, con A interno. Entonces A es un conjunto hiperfinito.

Prueba. Como B es hiperfinito, se tiene que $B \in {}^*(\mathscr{F}\mathscr{P})(C)$ para algún $C \in \mathscr{X}$.
Como A es interno, y $A \subset {}^*C \Rightarrow A \in {}^*(\mathscr{P}(C))$ por el item 11 de la 1.14. Luego se tiene que

$$\forall B \in \mathscr{F}\mathscr{P}(C) \forall A \in \mathscr{P}(C) \left[\forall x \in C[x \in A \Rightarrow x \in B]\right] \Rightarrow \left[A \in \mathscr{F}\mathscr{P}(C)\right]$$

lo cual asevera que un subconjunto de un subconjunto finito es finito, y esto vale en $\mathscr{X}$.
Luego por el principio de transferencia

$$\forall B \in {}^*\mathscr{F}\mathscr{P}(C) \forall A \in {}^*\mathscr{P}(C) \left[\forall x \in {}^*C[x \in A \Rightarrow x \in B]\right] \Rightarrow \left[A \in {}^*\mathscr{F}\mathscr{P}(C)\right]$$

y esto vale en ${}^*\mathscr{X}$ Así $A \in {}^*\mathscr{F}\mathscr{P}(C)$ para algún $C \in \mathscr{X}$, lo cual muestra que A es hiperfinito. □

Capítulo 2

Espacios Topológicos, Métricos y Euclidianos

En este capítulo exploraremos la formulación no estándar de los resultados básicos en espacios topológicos, métricos y euclidianos. Los resultados establecidos aquí son de uso considerable en aplicaciones del análisis no estándar a la economía. Formamos una superestructura tomando $\mathscr{X}_0$ como la unión de los conjuntos de puntos de todos los espacios bajo consideración y suponemos que $* : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es una extensión no estándar.

2.1. Mónadas

Definición 2.1. Supongamos que $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico. Si $x \in X$, la *mónada* de X, denotada por $\mu(x)$ es definida como

$$\mu(x) = \bigcap_{x \in T \in \mathscr{T}} {}^*T.$$

Además, si $y \in {}^*X$ con $y \in \mu(x)$ entonces denotamos

$$y \simeq x$$

(léase y es *infinitamente cercano* a x)

Definición 2.2. Supongamos (X, d) es un espacio métrico. Si $x \in {}^*X$, la mónada de x denotada por $\mu(x)$ es definida por:

$$\mu(x) = \{y \in {}^*X / {}^*d(x, y) \simeq 0\}$$

Si $x, y \in {}^*X$, con $y \in \mu(x)$, entonces escribiremos

$$y \simeq x$$

(léase y es *infinitamente cercano* a x)

Proposición 2.1. Supongamos (X, d) un espacio métrico, $x \in X$. Entonces

$$\mu_{\mathscr{T}}(x) = \mu_d(x)$$

donde,

$\mu_{\mathscr{T}}(x)$: mónada de x, considerando X como espacio topológico.

$\mu_d(x)$: mónada de x, considerando X como espacio métrico.

Prueba.

(i) Veamos que $\mu_d(x) \subset \mu_{\mathscr{T}}(x)$

Sea $y \in \mu_d(x)$. Entonces ${}^*d(x, y) \simeq 0$. Mostraremos que

$$y \in \mu_{\mathscr{T}}(x) = \bigcap_{x \in T \in \mathscr{T}} {}^*T$$

En efecto, sea T arbitrario tal que $x \in T, T \in \mathscr{T}$, entonces como T es abierto, existe $\delta \in \mathbb{R}_{++}$ tal que $B(x, \delta) \subset T$. Es decir

$$\forall z \in B(x, \delta), d(x, z) < \delta \Rightarrow z \in T, \text{ se cumple en } X$$

Por el principio de transferencia

$${}^*d(z, x) < \delta \Rightarrow z \in {}^*T, \text{ se cumple en } {}^*X$$

Ahora, como ${}^*d(x, y) \simeq 0$ y ${}^*d(z, x) < \delta$, entonces

$${}^*d(y, x) < \delta \Rightarrow y \in {}^*T \text{ (considerando para } z = y)$$

Así, hemos probado que $y \in {}^*T$ con $x \in T$, $T \in \mathscr{T}$ (T fue arbitrario, pero fijo). Entonces

$$y \in \bigcap_{x \in T \in \mathscr{T}} {}^*T = \mu_{\mathscr{T}}. \text{ Por tanto } y \in \mu_{\mathscr{T}}(x)$$

(ii) Veamos que $\mu_{\mathscr{T}}(x) \subset \mu_d(x)$

Sea $y \in \mu_{\mathscr{T}}(x)$. Mostraremos que

$$y \in \mu_d(x) = \{y \in {}^*X / {}^*d(x,y) \simeq 0\}$$

Sea $\delta \in \mathbb{R}_{++}$ y definamos $T = \{z \in X / d(x,z) < \delta\} = B(x,\delta)$ (abierto).

Dado que $x \in T$ y $T \in \mathscr{T}$ y

$${}^*T = \{z \in {}^*X / {}^*d(x,z) < \delta\}$$

Luego $y \in {}^*T$, por definición de $\mu_{\mathscr{T}}(x) = \bigcap_{x \in T \in \mathscr{T}} {}^*T$.

Como $y \in {}^*T$, entonces $y \in {}^*X$ y ${}^*d(x,y) < \delta, \forall \delta \in \mathbb{R}_{++}$, entonces

$${}^*d(x,y) \simeq 0$$

$$y \in \mu_d(x)$$

Así

$$\mu_{\mathscr{T}}(x) \subset \mu_\delta(x)$$

□

Proposición 2.2 (Overspill). Sea $(X, \mathscr{T})$ espacio topológico y consideremos A un subconjunto interno de ${}^*X$. Se cumple que

1. Si $x \in A \subset \mu(x)$, entonces existe $S \in {}^*T$ con $A \subset S \subset \mu(x)$.

2. Si $A \supset \mu(x)$, entonces $A \supset {}^*T$, para algún T, satisfaciendo $x \in T \in \mathscr{T}$.

3. Si $(X, \mathscr{T})$ es T_1, además $\mu(x)$ es interno, entonces $\mu(x) = \{x\} \in \mathscr{T}$

Nota. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es llamado T_1 (cumple la propiedad de separación T_1) si para cada par de puntos distintos a, b existen $N \in \mathscr{N}_a$ con $b \notin N$ y $M \in \mathscr{N}_b$ con $a \notin M$.

Además

$$(X, \mathscr{T}) \text{ es } T_1 \Leftrightarrow \forall x \in X, \bigcap_{N \in \mathscr{N}_x} N = \{x\}$$

Prueba. Sea $\mathscr{T}' = \{T \in \mathscr{T} / x \in T\}$

1. Tenemos $x \in A \subset \mu(x)$. Mostraremos que

$$\exists S \in {}^*T \text{ con } A \subset S \subset \mu(x).$$

Por Teorema 1.2 existe un conjunto hiperfinito

$$S \subset {}^*\mathscr{T}' / T \in \mathscr{T}' \Rightarrow {}^*T \in S$$

Sea $S' = \{T \in S / T \supset A\}$. Es claro que $S' \subset S$.

Así S' es *interno*, por el principio de definición interna.

Además S' es *hiperfinito*, por la Proposición 1.7 ($S' \subset S$, donde S: hiperfinito, S': interno).

Sea $S = \bigcap_{T \in S'} T$.

Afirmación: $A \subset S \subset \mu(x)$, donde

$$\mu(x) = \bigcap_{x \in T \in \mathscr{T}} {}^*T.$$

Veamos que $A \subset S$:

$$T \in S' \Rightarrow T \supset A, \text{ luego } S = \bigcap_{T \in S'} T \supset A$$

Por lo tanto $A \subset S$.

Como $\mathscr{T}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, entonces ${}^*T$ es cerrado bajo intersecciones hiperfinitas (por el principio de transferencia).

Por lo tanto $S \in {}^*\mathscr{T}$, donde $S = \bigcap_{T \in S'} T)$, S' : hiperfinito.

2. Sea $A \subset \mu(x)$. Mostraremos que:

$$A \supset {}^*T, \text{ para algún } T, \text{ tal que } x \in T \in \mathscr{T}.$$

En efecto:

Dado $T \in \mathscr{T}'$, sea $A_T = {}^*T \setminus A$.

Luego, tenemos que A_T es interno, por el principio de definición interna.

$$\bigcap_{T \in \mathscr{T}'} A_T = \bigcap_{T \in \mathscr{T}'} ({}^*T \setminus A) = (\bigcap_{T \in \mathscr{T} \in \mathscr{T}'} {}^*T) \setminus A = \mu(x) \setminus A = \emptyset$$
$$\Rightarrow \bigcap_{T \in \mathscr{T}'} A_T = \emptyset$$

Así, tenemos que $\bigcap_{T \in \mathscr{T}'} A_T = \emptyset$. Luego por saturación existen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{T_i} = \emptyset \text{ y}$$

como $\bigcap_{i=1}^{n} A_{T_i} = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} {}^*T_i \setminus A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} {}^*T_i \subset A$.

$$\Rightarrow A \supset \bigcap_{i=1}^{n} {}^*T_i = {}^*(\bigcap_{i=1}^{n} T_i)$$

Como $A \subset \mu(x)$, tenemos que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} T_i = T \in \mathscr{T}.$$

3. Tenemos que $(X, \mathscr{T})$ es T_1. Mostraremos que

$$\mu(x) = \{x\} \in \mathscr{T}, \ \mu(x) \text{ interno}.$$

Por la parte 2.) de la proposición

$$\exists T \in {}^*\mathscr{T} \text{ tal que } \mu(x) \subset {}^*T \subset \mu(x) (\text{ considerando } A = \mu(x))$$

Así $\mu(x) = {}^*T$.

Como $(X, \mathscr{T})$ es T_1. Si $y \in X$ con $y \neq x$, entonces $\exists S \in \mathscr{T}$ con $x \in S$ e $y \notin S$.
Por el principio de transferencia $y \notin {}^*S$.
Así $y \notin \mu(x) = {}^*T$ (notemos que ${}^*S$ es uno de los ${}^*T$ en $\bigcap_{x \in T \in \mathscr{T}} {}^*T$).

Luego, por el principio de transferencia $y \notin T$.
Siendo $y \in X$ (arbitrario), $y \neq x$, entonces $T = \{x\}$.
Entonces

$$\mu(x) = {}^*T = \{x\}, \text{ por el principio de transferencia.}$$

$\square$

Proposición 2.3 (Overspill). Supongamos A subconjunto interno de ${}^*\mathbb{N}$
Se cumple:

1. Si $A \supset {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ entonces $A \supset \{n, n+1, \ldots\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $A \supset \mathbb{N}$ entonces $A \supset \{1, \ldots, n\}$ para algún $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Prueba.

1. Definamos el conjunto

$$B = \{n \in {}^*\mathbb{N} / \ \forall m \in {}^*\mathbb{N} \ [m \geq n \rightarrow m \in A] \ \}$$

Es claro que $B \subset {}^*\mathbb{N}$. Además B es interno, por el principio de definición interna.
Sea n el primer elemento de B. Como $A \supset {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $B \supset {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Así $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $B = \{n \in {}^*\mathbb{N} / \ \forall m \in {}^*\mathbb{N} \ [m \leq n \Rightarrow m \in A] \ \}$.

Por el principio de definición interna, tenemos que

$$B \text{ y } {}^*\mathbb{N} \setminus B \text{ son internos.}$$

Si ${}^*\mathbb{N} \setminus B$, no hay nada que probar. En otro caso sea n el primer elemento de ${}^*\mathbb{N} \setminus B$. Como $A \supset \mathbb{N}, B \supset \mathbb{N} \Rightarrow n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

□

Proposición 2.4. Supongamos $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Luego:

$$X \text{ es } \textit{Hausdorff} \text{ si y sólo si } \forall x, y \in X, x \neq y, \mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$$

Prueba.

[⇒] Sea X espacio de Hausdorff.

Sea $x, y \in X, x \neq y$, entonces existen conjuntos $S, T \in \mathscr{T}$ con

$$x \in S \in \mathscr{T}, y \in T \in \mathscr{T}, S \cap T = \emptyset.$$

Luego ${}^*S \cap {}^*T = {}^*(S \cap T) = \emptyset$ y por el principio de transferencia

$$\mu(x) \cap \mu(y) \subset {}^*S \cap {}^*T = \emptyset$$

Así $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$

[⇐] Supongamos $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$. Como $\{x\} \subset \mu(x), \{y\} \subset \mu(y)$, entonces por la proposición 2.2 $\exists S, T \in {}^*\mathscr{T}$

Luego $x \in S \subset \mu(x)$, $y \in T \subset \mu(y)$, entonces

$$S \cap T \subset \mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset \Rightarrow S \cap T = \emptyset$$

Así

$$\exists S \in {}^*\mathscr{T}, \exists\, T \in {}^*\mathscr{T}\ [x \in S \wedge y \in T \in S \cap T = \emptyset] \text{ vale en } {}^*X$$

Luego, por el principio de transferencia

$$\exists S \in \mathscr{T}, \exists\, T \in \mathscr{T}\ [x \in S \wedge y \in T \in S \cap T = \emptyset] \text{ vale en } X$$

Por lo tanto X es de Hausdorff. □

Definición 2.3. Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio de Hausdorff, $y \in {}^*X, y \in \mu(x)$ escribiremos

$$x = {}^\circ y \text{ (leáse } x \text{ es la parte estándar de } y)$$

Proposición 2.5. Supongamos que $\{x_n/n \in {}^*\mathbb{N}\}$ es una sucesión de elementos de ${}^*\mathbb{R}$. Entonces la sucesión estándar $\{°x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\exists\, n_0 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tal que $x_n \simeq x\ \forall n \leq n_0, n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Supongamos que $°x_n \to x$. Sea $\delta \in \mathbb{R}_{++}$, entonces existe $n_\delta \in \mathbb{N}/n \geq n_\delta; n \in \mathbb{N}$. entonces $|°x_n - x| < \frac{\delta}{2}$, entonces se tiene que $|x_n - x| < \delta$. Pues

$$|x_n - x| <\leq |x_n -° x_n| + |°x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$|°x_n - x_n| < \frac{\delta}{2}$ esto es debido a que $x_n \simeq °x_n$.

Así, dado $\delta \in \mathbb{R}_{++}$ y $k \in \mathbb{N}$, sea

$$A_{\delta k} = \{n \in {}^*\mathbb{N}/n \geq k \wedge |x_n - x| < \delta, \text{ para cada } m \in \{k, \ldots, m\}\}$$

Para cualquier colección finita $\{(\delta_1, k_1), \ldots, (\delta_n, k_n)\}$ con $k_i \geq n_\delta$, tenemos

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\delta_i k_i} \neq \emptyset \text{ (por saturación)}$$

Sea $\Lambda = \{(\delta, k) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{N}/k \geq n_\delta\}$, entonces por saturación

$$\bigcap_{(\delta,k)\in\Lambda} A_{\delta k} \neq \emptyset$$

Podemos escoger $n_0 \in \bigcap_{(\delta,k)\in\Lambda} A_{\delta k} \Rightarrow$

Dado $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ con $n \leq n_0, |x_n - x| \simeq 0$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\exists n_0 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}, n \leq n_0 \Rightarrow x_n \simeq x$.

Ahora dado $\delta \in \mathbb{R}_{++}$, definimos el conjunto

$$A = \{n \in {}^*\mathbb{N}/|x_n - x| < \frac{\delta}{2}\} \cup \{n \in {}^*\mathbb{N}/n > n_0\}$$

A es interno y contiene a ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Por la Proposición 2.3, tenemos que $A \supset \{n, n+1, \ldots\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto es

$$|°x_n - x| < \delta, \forall m \geq n \Rightarrow °x_n \to x.$$

□

Proposición 2.6. Supongamos que $\{x_n/n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Luego

$$x_n \to x, x \in \mathbb{R} \text{ si y sólo si } x_n \simeq x \text{ para cada } n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$$

Prueba.

($\Rightarrow$) Supongamos $x_n \to x$. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon) \text{ se cumple en } X.$$

Por el principio de transferencia

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N}(n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon) \text{ vale en } {}^*\mathscr{X}.$$

Si $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$, siendo ε arbitrario de $\mathbb{R}_{++}$, entonces

$$x_n \simeq x$$

($\Leftarrow$) Supongamos $x_n \simeq x, \forall n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Para $n \in \mathbb{N}, {}^\circ x_n = x_n$, así $x_n \to x$ (por la Proposición 2.5) □

2.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Proposición 2.7. Supongamos $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico. Luego $A \subset X$ es abierto si y sólo si $\mu(x) \subset {}^*A, \forall x \in A$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Si A es abierto y $x \in A$, entonces $\mu(x) \subset {}^*A$ (por la definición de

$$\mu(x) = \bigcap_{x \in T \in \mathscr{T}} {}^*T$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mu(x) \subset^* A, \forall x \in A$, por la Proposición 2.2 (parte 2), $\exists S \in {}^*\mathscr{T}$ con $x \in S \subset \mu(x)$, esto es

$$\exists S \in {}^*\mathscr{T}, x \in S \subset {}^*A \text{ vale en } {}^*X.$$

Luego

$$\exists S \in \mathscr{T}, x \in S \subset A \text{ vale en } X, \text{ por transferencia.}$$

Es decir, A es abierto. $\square$

Proposición 2.8. Supongamos $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico. Luego

$$A \text{ es cerrado si y sólo si } y \in {}^*A \Rightarrow x \in A \text{ para cada } x \in X \text{ tal que } y \in \mu(x)$$

Prueba. $(\Rightarrow)$
Sea $B = X \setminus A$. Supongamos que A es cerrado. Si $y \in^* A \wedge y \in \mu(x)$ con $x \in X \setminus A$, entonces $x \in B$, siendo A cerrado.
Como $y \in \mu(x), y \in {}^*B$ (por la Proposición 2.7). Luego ${}^*B \cap {}^*A = {}^*(B \cap A) = \emptyset$, por transferencia.
Así $y \notin {}^*A (\Rightarrow\Leftarrow)$.
Por lo tanto $x \in A$ $\forall x \in X$ con $y \in \mu(x)$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos $y \in^* A \Rightarrow x \in A, \forall x \in X$ tal que $y \in \mu(x)$. Suponiendo que $x \in B$ entonces debemos tener que

$$y \in {}^*X \setminus {}^*A = {}^*B, \ \forall y \in \mu(x).$$

Entonces B es abierto (por la proposición 2.7)
Así A es cerrado. $\square$

Proposición 2.9. Sea $(X, \mathscr{T})$ espacio topológico y $A \subset {}^*X$, con A interno, entonces el conjunto

$$\{x \in X / \exists y \in A\ [y \in \mu(x)]\} \text{ es cerrado.}$$

Prueba. Definamos $C = \{x \in X / \exists y \in A\ [y \in \mu(x)]\}$. Debemos mostrar que

$$B = X \setminus C \text{ es abierto}$$

Sea $D = {}^*X \setminus A$, D es interno por el principio de definición interna. Si $x \in B$, entonces $D \supset \mu(x)$. Así $D \supset {}^*T$ para algún T satisfaciendo $x \in T \in \mathscr{T}$ lo cual se cumple en virtud de la Proposición 2.2.

Si $y \in T$ entonces $\mu(y) \subset {}^*T$. Entonces $D \supset \mu(y)$. Así $y \in B$

Luego B es abierto.

Por lo tanto C es cerrado.

□

2.3. Compacidad

Definición 2.4. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y consideremos $y \in {}^*X$. Diremos que y es NE (near standard), si existe $x \in X/\ y \simeq x$. Denotamos por

$$n_s({}^*x) = \{y \in {}^*X/y \text{ es } NE\}$$

Teorema 2.1. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, se cumple

$$(X, \mathscr{T}) \text{ es compacto si y sólo si } \forall y \in {}^*X, y \text{ es } NE \text{ a } X.$$

Prueba.

$(\Rightarrow)$ Supongamos que $(X, \mathscr{T})$ es compacto.

Por contradicción, supongamos que $\exists y \in {}^*X$ tal que y no es NE.

Luego $\forall x \in X, \exists T_x$ con $x \in T_x \in \mathscr{T} \wedge y \notin {}^*T_x$.

Así $\{T_x/x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X, es decir $X = \bigcup_{x\in X} T_X$.

Como $(X, \mathscr{T})$ es compacto, $\exists\{T_{x_1}, \ldots, T_{x_n}\}$ un subcubrimiento abierto finito. Como X es una superestructura incrustada

$$\bigcup_{i=1}^{n} {}^*T_{x_i} = {}^*(\bigcup_{i=1}^{n} T_{x_i}) ={}^* X$$

Así $y \notin {}^*X(\Rightarrow\Leftarrow)$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que

$$\forall y \in {}^*X, y \text{ es } NE \text{ a } X.$$

Mostraremos que $(X, \mathscr{T})$ es compacto.

En efecto, sea $\{T_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto abierto de X.

Consideremos el conjunto $C_\lambda = X \setminus T_\lambda$.

Por contradicción, sino existiera un subcubrimiento finito, entonces para cada colección $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} \neq \emptyset, \text{ pues}$$

si $\bigcap_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} = \emptyset$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} T_{\lambda_i} = X (\Rightarrow\Leftarrow)$.

Luego,

$$\bigcap_{i=1}^{n} {}^*C_{\lambda_i} = {}^*(\bigcap_{i=1}^{n} C_{\lambda_i}) \neq \emptyset (|\lambda| \leq |x_1|) \text{ Luego por}$$

saturación

$$C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {}^*C_\lambda \neq \emptyset.$$

Así, podemos escoger algún $y \in C$. Dado $x \in X$, puesto que y es NE a x existe λ tal que $x \in T_\lambda$. Como $y \in C \subset {}^*C_\lambda$, es decir $y \in {}^*C_\lambda$ entonces $y \notin {}^*T_\lambda$.

Como x es un elemento arbitrario de X, se concluye que y no es NE $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Así $\{T_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ tiene un subcubrimiento abierto finito.

Por lo tanto

$$(X, \mathscr{T}) \text{ es compacto.}$$

$\square$

Definición 2.5. $x \in {}^*\mathbb{R}$ es llamado finito, si existe algún $n \in \mathbb{N}$, tal que $x \leq n$.

Proposición 2.10. Supongamos que $y \in {}^*\mathbb{R}, y$ finito, entonces y es NE a $\mathbb{R}$.

Prueba. Consideremos $A = \{z \in \mathbb{R} / z < y\}$ y además $x = \sup A$.

Sea $\delta \in \mathbb{R}_{++}$. Por definición de supremo, podemos encontrar $z \in A$ tal que $z > x - \delta$. Pero $z < y$ entonces $x - \delta < y$. Por otro lado $x + \delta > y$. Por lo tanto

$$x - \delta < y < x + \delta.$$

Dado que $\delta \in \mathbb{R}_{++}$ fue arbitrario, se tiene que $y \simeq x$. Por lo tanto y es NE. $\square$

Teorema 2.2 (Bolzano-Weierstrass). si C es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^k(k \in \mathbb{N})$. Entonces C es compacto.

Prueba. Supongamos que $y \in {}^*C$. Como C es acotado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall z \in C, |z| \leq n$.

Ahora, por el principio de transferencia

$$\forall\, z \in {}^*C,\ |z| \leq n$$

En particular para $z = y \in {}^*C$ se tiene que $|y| \leq n$. Así, cada componente $y_i \in y$ es finito. Luego por la Proposición 2.10 se obtiene que y_i es NE, con $y_i \simeq x_i$ para algún $x_i \in \mathbb{R}$.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces $y \simeq x$. Como C es cerrado, $x \in C$. Así C es compacto, por el Teorema 2.1. $\square$

Teorema 2.3. Supongamos $\succ$ es una relación binaria en un espacio topológico compacto $(X, \mathscr{T})$ satisfaciendo:

1. Irreflexividad $(\forall x \in X, x \not\succ x)$.

2. Transitividad $(\forall x, y, z \in X, x \succ y, y \succ z \Rightarrow x \succ z)$.

3. Continuidad $(\{(x, y) \in X^2/x \succ y\})$ es abierto.

Entonces X contiene un elemento maximal con respecto a $\succ$, i.e. existe algún $x \in X$ tal que $\nexists z \in X$ con $z \succ x$.

Prueba. Por el Teorema 1.2 existe un conjunto hiperfinito A tal que

$$T \in \mathscr{T} \Rightarrow \exists x \in A[x \in {}^*T]$$

Como $\succ$ es irreflexiva y transitiva, cualquier conjunto finito $B \subset X$ contiene un elemento maximal con respecto a $\succ$.

Por el principio de transferencia, cualquier conjunto hiperfinito contiene un elemento maximal con respecto a ${}^*\succ$.

Sea y un elemento maximal de A. Como X es compacto $\exists x \in X$ tal que $y \simeq x$, por el Teorema 2.1. Procedamos por contradicción. Supongamos que $z \in X$ y $z \succ x$, entonces $\exists S, T \in \mathscr{T}$ con $x \in T \in \mathscr{T}, z \in S \in \mathscr{T}$ tal que

$$v \succ w \, \forall v \in S, \; \forall w \in T$$

Por el principio de transferencia $v \, {}^*{\succ} w$, para todo $v \in {}^*S$, y para todo $w \in {}^*T$.
Pero existe $v \in {}^*S \cap A$. Luego $v \, {}^*{\succ} y (\Rightarrow\Leftarrow)$.
Por lo tanto

$$x \text{ es maximal en } X \text{ con respecto a } \succ.$$

□

Proposición 2.11. Supongamos que $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico regular. $A \subset {}^*X$ es interno. Supongamos además que para todo $y \in A$, y es NE. Entonces el conjunto

$$\{x \in X / \exists y \in A \, [y \in \mu(x)]\}$$

es compacto.

Prueba. Definamos

$$C = \{x \in X / \exists y \in A \, [y \in \mu(x)]\}$$

Veamos que C es compacto.
Supongamos que $\{C_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ es una colección relativamente cerrado con

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \emptyset$$

pero $\bigcap_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} \neq \emptyset$, para cada colección finita $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
C es cerrado por la Proposición 2.9. De este modo C_λ es cerrado en X.
Dado $x \in C$ con $x \notin C_\lambda$ podemos encontrar $S_{\lambda_x}; T_{\lambda_x}$ tal que $C_\lambda \subset S_{\lambda_x}; x \in T_{\lambda_x}$ y $S_{\lambda_x} \cap T_{\lambda_x} = \emptyset$.

Sea $\Lambda' = \{(\lambda, x)/x \notin C_\lambda\}$. Para cualquier colección finita $\{(\lambda_1, x_1), \ldots, (\lambda_n, x_n)\} \subset \Lambda'$. $\bigcap_{i=1}^n S_{\lambda_i x_i}$ es abierto, el contiene a $\bigcap_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} \neq \emptyset$.

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} S_{\lambda_i x_i} \neq \emptyset$$

Elegimos entonces $c \in \bigcap_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} \Rightarrow c \in C$.
De este modo, existe $a \in A$ con $a \in \mu(c)$.

$$\bigcap_{i=1}^{n} {}^*S_{\lambda_i x_i} = {}^*(\bigcap_{i=1}^{n} S_{\lambda_i x_i}) \neq \emptyset \qquad \text{(pues } a \in A, a \in \mu(c)\text{)}.$$

Luego, por saturación

$$A \cap (\bigcap_{(\lambda,x)\in\Lambda'} S_{\lambda_i x_i}) \neq \emptyset$$

escogemos $y \in A \cap (\bigcap_{(\lambda,x)\in\Lambda'} S_{\lambda_i x_i})$. Como $y \in A \Rightarrow y$ es NE.
Así $y \in \mu(x)$ para algún $x \in X$.
Por la definición de $C, x \in C$. Como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \emptyset$ existe $\lambda \in \Lambda$ con $x \in C_\lambda$.

Como

$${}^*T_{\lambda_x} \supset \mu(x), {}^*S_{\lambda_x} \cap {}^*T_{\lambda_x} = {}^*(S_{\lambda_x} \cap T_{\lambda_x}) = \emptyset,$$

Así obtenemos $y \notin \mu(x)$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto C es compacto. $\square$

2.4. Productos

Proposición 2.12. Sea $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ una familia de espacios topológicos, y sea $(X, \mathcal{T})$ el espacio topológico producto. Entonces

$${}^*X = \{y/y \text{ es una función interna de } {}^*\Lambda \text{ a } \bigcup_{\lambda\in{}^*\Lambda} {}^*X_\lambda \text{ y para todo } \lambda \in {}^*\Lambda, \quad y_\lambda \in {}^*X_\lambda\}$$

Además, si $x \in X$, entonces

$$\mu(x) = \{y \in {}^*X/\forall\lambda \in \Lambda, y_\lambda \simeq x_\lambda\}$$

Prueba. ($\subset$) La definición formal de producto es

$$X = \{f \in \mathscr{F}(\Lambda, \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)/\forall\lambda \in \Lambda, f(x) \in X_\lambda\}$$

donde $\mathscr{F}(A, B) = \{f : A \to B/f$ es una función$\}$.

Por el principio de transferencia

$$\begin{aligned} {}^*X &= \{f \in {}^*(\mathscr{F}(\Lambda, \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda))/\forall\lambda \in {}^*\Lambda, f(x) \in {}^*X_\lambda\} \\ &= \{y : {}^*\Lambda \to \textstyle\bigcup_{\lambda\in{}^*\Lambda} {}^*X_\lambda/y \text{ es interno}, \forall\lambda \in {}^*\Lambda, y_\lambda \in {}^*X_\lambda\} \end{aligned}$$

Sea $x \in X$ cualquiera. Supongamos que $y \in \mu(x)$. Fijemos $\lambda \in \Lambda$.

Dado $T \in \mathscr{T}_\lambda$ con $x_\lambda \in T$, definimos

$$S = \{z \in X/z_\lambda \in T\}.$$

Entonces $S \in \mathscr{T}$ y $x \in S$. De aquí se tiene $y \in {}^*S$ donde ${}^*S = \{z \in {}^*X/z_\lambda \in {}^*T\}$.

Luego tenemos que $y_\lambda \in {}^*T$

Por lo tanto

$$y_\lambda \simeq x_\lambda.$$

($\supset$) Supongamos que $y \in {}^*X$ y además $y_\lambda \simeq x_\lambda$ $\forall\lambda \in \Lambda$.

En efecto

Si $x \in T \in \mathscr{T}$ entonces existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ con $n \in \mathbb{N}$ y $T_{\lambda_i} \in \mathscr{T}_i$ tal que si

$$S = \{z \in X/z_{\lambda_i} \in T_{\lambda_i}, 1 \leq i \leq n\}, \text{ entonces}$$

$$x \in S \subset T$$

Pero ${}^*S = \{z \in {}^*X/z_{\lambda_i} \in {}^*T_{\lambda_i}, 1 \leq i \leq n\}$ por el principio de transferencia.

Luego $y \in {}^*S \subset {}^*T$ □

Teorema 2.4 (Tychonoff). Sea $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)(\lambda \in \Lambda)$ una familia de espacios topológicos y $(X, \mathscr{T})$ espacio topológico producto. Si $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ es compacto $\forall\lambda \in \Lambda$, entonces $(X, \mathscr{T})$ es compacto.

Prueba. Supongamos que $y \in {}^*X$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces existe $x_\lambda \in X_\lambda$ tal que $y_\lambda \simeq x_\lambda$ (por Teorema 2.1 $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ es compacto).

Por el Axioma de Elección, este define un elemento $x \in X$ tal que $y_\lambda \simeq x_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto

$$y \simeq x \qquad \text{(por la Proposición 2.1)}$$

Entonces X es compacto, por el Teorema 2.1. □

2.5. Continuidad

Proposición 2.13. Supongamos que (X, S) e (Y, T) son espacios topológicos y $f : X \to Y$. Entonces f es continua si y sólo si ${}^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$ para todo $x \in X$.

Prueba. $[\Rightarrow]$

Supongamos que f es continua. Si $y = f(x)$ e $y \in T \in \mathscr{T}$, entonces $S = f^{-1}(T) \in S$. De aquí se cumple que $\forall z \in S, f(z) \in T$ vale en X.

Por el principio de transferencia, tenemos:

$$\forall z \in {}^*S,\ {}^*f(x) \in {}^*T \text{ vale en } {}^*X.$$

$$\text{Tomemos } z \in \mu(x) \text{ entonces } z \in {}^*S \Rightarrow {}^*f(z) \in {}^*T \qquad (1^*)$$

Dado que $(1*)$ se cumple para todo T satisfaciendo $f(x) \in T \in \mathscr{T}$ se tiene que $f(z) \in \mu(f(x))$.

$$\text{Así } {}^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x)).$$

$(\Leftarrow)$ Mostraremos que f es continua. Supongamos que ${}^*f(\mu(z)) \subset \mu(f(x))$, para todo $x \in X$.

Consideremos el abierto T arbitrario tal que $f(x) \in T \in \mathscr{T}$.

Definamos $A = \mu(x)$, el cual es un conjunto interno, por el principio de definición interna. Luego, por la por la Proposición 2.2 existe $s \in {}^*S$ tal que

$$x \in S \text{ con } {}^*f(S) \subset {}^*T \text{ en } {}^*X$$

Luego, por el principio de transferencia

$$\exists s \in {}^*S, x \in S \text{ con } f(s) \subset T \text{ en } X$$

Por lo tanto

$$f \text{ es continua}$$

□

Corolario. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función. Entonces

$$f \text{ es continua si y sólo si } [y \simeq x \in \mathbb{R} \Rightarrow {}^*f(y) \simeq f(x)]$$

Prueba. Consecuencia inmediata del teorema anterior. □

Definición 2.6. Supongamos que (X, S) e (Y, T) son espacios topológicos con (Y, T) Hausdorff y supongamos que la función $f : {}^*X \to {}^*Y$ es interna. La función f es llamada S-continua si $f(x)$ es NE y

$$f(\mu(x)) \subset \mu({}^\circ f(x)) \text{ para todo } x \in X$$

Definición 2.7. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es regular si es de Hausdorff y dados $x \in X$ y $C \subset X$ con $x \notin C$ y C cerrado, existen $S, T \in \mathscr{T}$ con $x \in S, C \subset T$ y $S \cap T = \emptyset$.

Luego, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.14. Supongamos que (X, S) e (Y, T) son espacios topológicos con (Y, T) regular. Además supongamos que $f : {}^*S \to {}^*T$ es S-continua, definamos una función ${}^\circ f : X \to Y$ mediante $({}^\circ f)(x) ={}^\circ (f(x))$, para todo $x \in X$. Entonces ${}^\circ f$ es una función continua.

Prueba. Como f es S-continua, entonces $f(x)$ es NE, para todo $x \in X$, entonces existe $y \in Y$ tal que $f(x) \in \mu(y)$.

Ahora como (Y, T) es de Hausdorff, y es único, por la Proposición 2.4. De este modo, la fórmula para ${}^\circ f$ define una función.

Supongamos ahora que $x \in X, y ={}^\circ (f(x))$. Si $y \in V \in \mathscr{T}$ entonces $X \setminus V$ es cerrado.

Como $(Y, \mathscr{T})$ es regular, podemos encontrar $S, T \in \mathscr{T}$ con $y \in S, X\backslash V \subset T$ y $S \cap T = \emptyset$.
Como f es S-continua

$$f^{-1}(^*S) \supset \mu(x)$$

Luego $f^{-1}(^*S)$ es interno por el principio de definición interna.
Así $f^{-1}(^*S) \supset {}^*W$ para algún W satisfaciendo $x \in W \in S$ por la Proposición 2.2.
Si $w \in W \Rightarrow w \in {}^*W$, luego $f(w) \in {}^*S$. Si ${}^\circ f(w) \notin V \Rightarrow {}^\circ f(w) \in X \setminus V \subset T$.
Como $T \in \mathscr{T}, f(w) \in {}^*T$ (por la Proposición 2.7). Pero

$$^*S \cap {}^*T = {}^*(S \cap T) = \emptyset \Rightarrow f(w) \notin {}^*S (\Rightarrow\Leftarrow)$$

lo cual muestra que ${}^\circ f(w) \in V$ para $w \in W$.
Así ${}^\circ f$ es continua. □

Definición 2.8. Supongamos $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Diremos que una función $f : X \to Y$ es *acotada* si

$$\sup_{x,y \in X} d(f(x), f(y)) < \infty$$

El conjunto $(C(X, Y), \bar{d})$ denota el espacio métrico de las funciones continuas acotadas de X a Y donde

$$\bar{d}(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Teorema 2.5 (Teorema de Ascoli no estándar). Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico compacto e (Y, d) espacio métrico. Si $f :^* X \to {}^*Y$ es una función S-continua entonces ${}^*\bar{d}(f, {}^\circ f) \simeq 0$, i.e. f es NE como elemento de $(C(X, Y), \bar{d})$ y ${}^\circ f$ es su parte estándar.

Prueba. Por la Proposición 2.14 ${}^\circ f$ es una función continua de $(X, \mathscr{T})$ a (Y, d). Definamos $g ={}^\circ f$. Dado $z \in^* X, z \in \mu(x)$ para algún $x \in X$.

Transfiriendo la desigualdad triangular

$$^*d(^*g(z), f(z)) \leq {}^*d(^*g(z), g(x)) + {}^*d(g(x), f(x)) + {}^*d(f(x), f(z))$$

El primer término es infinitesimal por las Proposiciones 2.13 y 2.14.
El segundo lo es por la definición de $g = {}^\circ f$.

El tercero también lo es, pues f es S-continua.

Por lo tanto ${}^*d(g(z), f(z)) \simeq 0, \forall z \in {}^*S$

Entonces ${}^*\bar{d}(f, g) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$

Así ${}^*\bar{d}(f, g) \simeq 0$. □

Corolario (Ascoli). Supongamos $A \subset C([0,1], \mathbb{R})$ es cerrado, acotado y equicontinuo. Entonces A es compacto.

Prueba. Dado que A es equicontinuo y acotado entonces existe $\delta \in \mathbb{R}_{++}$ y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $f \in A$, para todo $x, y \in [0,1]$ se tiene

$$\{[|f(x)| < M] \wedge [|y - x| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\} \text{ en } X$$

Por transferencia, se tiene que $\forall f \in {}^*A$, para todo $x, y \in {}^*[0,1]$

$$\{[|f(x)| < M] \wedge [|y - x| < \delta] \Rightarrow |{}^*f(x) - {}^*f(y)| < \varepsilon\} \text{ vale en } {}^*X$$

Supongamos que $f \in {}^*A$, con $f(x)$ finito para todo $x \in {}^*[0,1]$. Más aún si

$$y \in \mu(x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, $|f(y) - f(x)| \simeq 0$. Por lo tanto ${}^*f$ es S-continua. Luego por el teorema 3.5 tenemos que $f \in \mu({}^\circ f)$.

Como A es cerrado, ${}^\circ f \in A$ por la Proposición 2.8.

Así, para todo $f \in {}^*A$, f es NE, entonces A es compacto, por el Teorema 2.1. □

Capítulo 3

Teoría de integración no estándar

3.1. Introducción

Al estudiar la teoría de integración de Riemann, uno puede plantearse la siguiente situación: si asumimos que tenemos una sucesión monótona creciente $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones integrables y que $g_n(x)$ converge a $g(x)$ sobre un intervalo $[a,b]$, necesitamos condiciones que aseguren que $g(x)$ sea integrable y que se cumpla:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Un resultado de este tipo es conocido como un *Teorema de Convergencia Monótona.*

Desafortunadamente las condiciones para que se cumpla este teorema son bastante restrictivas en esta teoría (por ejemplo, se necesita que la sucesión $g_n(x)$ converja uniformemente sobre $[a,b]$).

En vista de este inconveniente, Lebesgue y otros matemáticos generalizaron el proceso de integración tal que las condiciones para el teorema de convergencia monótona sean menos exigentes. Por ejemplo, Lebesgue generalizó el concepto de longitud de un intervalo, usando el concepto de medida para un subconjunto general de $\mathbb{R}$.

P. Daniel comenzó con las nociones generales de Lattice L de funciones sobre un conjunto X y una integral I sobre L.

Nuestro trabajo de integración no estándar sigue el modelo del trabajo de P. Daniel excepto que comenzamos con una estructura de integración "interna" (L, I) sobre un conjunto interno X.

Mostramos que sin necesidad de continuidad podemos construir a partir de (L, I) una estructura de integración estándar $(\widehat{L}, \widehat{I})$ sobre el mismo conjunto interno X y que tal estructura satisface el Teorema de Convergencia Monótona.

Empezamos nuestro trabajo estudiando un proceso que denominamos la estandarización $(\widehat{L}, \widehat{I})$ de una estructura de integración interna (L, I).

3.2. Estandarización de una estructura de integración interna

Una teoría general de integración debe especificar:

i) Una clase L de funciones "integrables" sobre un espacio X y

ii) Una función I con valores reales sobre L. Es decir

$$\begin{aligned} I : L &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto I(f) \end{aligned}$$

la cual es usualmente llamada una *funcional.*

Nosotros abstraemos estas propiedades en la noción de una *estructura de integración.*

Definición 3.1. Sean X un conjunto, $E \subseteq X$. Las funciones $\chi_E, 1$ y 0 sobre X son definidas de la siguiente manera:

a) $$\begin{array}{rcl} \chi_E : X & \to & \{0;1\} \\ x & \mapsto & \chi_E(x) = \begin{cases} 1; & x \in E \\ 0; & x \notin E \end{cases} \end{array}$$

b) $1 = \chi_X$.

c) $0 = \chi_\emptyset$ donde $\emptyset$ denota al conjunto vacío.

Observación 3.1. Si f y g son funciones definidas sobre X, escribimos

$$f \leq g, \text{ si } f(x) \leq g(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Además, definimos

$$\alpha f, f+g, f.g \text{ y } f/g \text{ (si } g \text{ no se anula en todo punto en } X) \text{ y } |f|,$$

como:

$$\alpha f(x), f(x)+g(x), f(x).g(x), f(x)/g(x) \text{ y } |f(x)| \text{ en } x \in X.$$

Definición 3.2. Un conjunto L de funciones con valores reales o hiperreales sobre un conjunto X es llamado un *lattice* real o hiperreal respectivamente, si:

a) $f, g \in L$ implica $\alpha f + \beta g \in L, \forall \alpha, \beta$ reales o hiperreales.

b) $f \in L$ implica $|f| \in L$.

Definición 3.3. Una función con valores reales o hiperreales I sobre L es llamada una *funcional lineal positiva* (flp) si:

a) $I(\alpha f+\beta g) = \alpha I(f)+\beta I(g)$, para todo $f, g \in L$ y para todo α, β real o hiperreal.

b) $I(f) \geq 0$, si $f \geq 0$.

El par (L, I) forma una estructura de integración real (hiperreal) sobre X.

Definición 3.4. Una estructura de integración $(\widetilde{L}, \widetilde{I})$ sobre X es una *extensión* de la estructura de integración (L, I) si:

$$L \subseteq \widetilde{L} \text{ y } \widetilde{I}(f) = I(f) \text{ cuando } f \in L$$

Definición 3.5. Si f y g son funciones con valores reales o hiperreales definidas sobre X, definimos el *máximo* y *mínimo* de f y g mediante:

$$\begin{aligned}\text{máx}(f,g) = f \vee g = \frac{(f+g+|f-g|)}{2},\\ \text{mín}(f,g) = f \wedge g = \frac{(f+g-|f-g|)}{2}.\end{aligned}$$

Además, definimos la parte positiva y negativa de f mediante:

$$\begin{aligned}f^+ &= f \vee 0,\\ f^- &= (-f) \vee 0.\end{aligned}$$

Observación 3.2. Un lattice L siempre contiene a 0. Además es cerrado bajo la operación de tomar máximo y mínimo.

Además, si L es un conjunto de funciones sobre X, el cual es cerrado bajo combinaciones lineales y para el cual $f, g \in L$ implica que $f \vee g$ y $f \wedge g \in L$, entonces L es un lattice.

Ejemplo 3.1. En el conjunto de funciones continuas con valores reales $C([a,b])$ donde $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo finito, definimos la funcional lineal

$$\begin{array}{rcl}\int_a^b : C[a,b] & \to & \mathbb{R}\\ f & \mapsto & \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx\end{array}$$

entonces $(C([a,b]), \int_a^b)$ es una estructura de integración real sobre $[a,b]$.

Ejemplo 3.2. Una función de paso sobre $\mathbb{R}$ es una función f de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i},$$

donde los conjuntos E_i son intervalos finitos disjuntos. Sea $S(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones de paso sobre $\mathbb{R}$. Definimos la funcional $\displaystyle\oint$ sobre $S(\mathbb{R})$ mediante

$$\begin{array}{rcl}\oint : S(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}\\ f & \mapsto & \oint f = \sum_{i=1}^{n} c_i(b_i - a_i), \text{ donde } f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}\end{array}$$

y además E_i tiene los extremos a_i y b_i $(a_i \leq b_i)$.

Así $(S(\mathbb{R}), \oint)$ es una estructura de integración real sobre $\mathbb{R}$.

La siguiente proposición muestra que cada estructura de integración real estándar sobre un conjunto Y origina una estructura de integración interna sobre $^*Y$.

Proposición 3.1. Si (L, I) es una estructura de integración real sobre un conjunto Y, entonces $(^*L, {}^*I)$ es una estructura de integración sobre $X = {}^*Y$.

Prueba. Consecuencia directa del principio de transferencia. □

Nuestro objetivo en esta sección es construir una estructura de integración real $(\widehat{L}, \widehat{I})$ a partir de una estructura de integración hiperreal interna (L, I) sobre un conjunto interno X en una extensión $V(^*S)$ de una superestructura $V(S)$ conteniendo los reales. De esta manera, en $(\widehat{L}, \widehat{I})$ será valido el Teorema de Convergencia Monótona. $(\widehat{L}, \widehat{I})$ será llamado la *estandarización* de (L, I).

Definición 3.6. Sea (L, I) una estructura de integración interna sobre un conjunto interno X, definimos:

i) El conjunto L_0 de funciones nulas como el conjunto de funciones con valores hiperreales (posiblemente externa) g sobre X tal que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists \psi \in L : |g| \leq \psi \text{ y } {}^\circ I(\psi) < \varepsilon$$

ii) El conjunto $\widehat{L}$,

$$\widehat{L} = \{f : X \to \mathbb{R} : f = \phi + g, \text{ donde } \phi \in L, {}^\circ I(|\phi|) < \infty \text{ y } g \in L_0\}$$

Lema 3.1. *a*) Si $f = \phi + g \in \widehat{L}$, con $\phi \in L, {}^\circ I(|\phi|) < \infty, g \in L_0$, y si además $f = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ con $\widetilde{\phi} \in L, \widetilde{g} \in L_0$. Entonces

$${}^\circ I(|\phi|) < \infty \text{ y } \phi - \widetilde{\phi} \in L_0.$$

Así que $I(\phi) - I(\widetilde{\phi}) = I(\phi - \widetilde{\phi}) \simeq 0$.

b) Si $f_i \in \widehat{L}$, con $f_i = \phi_i + g_i, \phi_i \in L, g_i \in L_0(i = 1, 2)$, entonces

$$(f_1 \vee f_2) - (\phi_1 \vee \phi_2) \text{ y } (f_1 \wedge f_2) - (\phi_1 \wedge \phi_2) \text{ pertenecen a } L_0$$

Prueba.

a) Como $f = \phi + g \in \widehat{L}$ (por hipótesis) donde $\phi \in L, {}^\circ I|\phi| < \infty$

y además $f = \widetilde{\phi} + \widetilde{g}$, donde $\widetilde{\phi} \in L, \widetilde{g} \in L_0$

Entonces $\phi + g = \widetilde{\phi} + \widetilde{g}$, es decir $\widetilde{\phi} - \phi = g - \widetilde{g}$

Afirmación: $g - \widetilde{g} \in L_0$

En efecto:

Como $g, \widetilde{g} \in L_0$, por definición:

Dado $\epsilon > 0$ cualquiera, $\exists \psi, \widetilde{\psi} \in L$ tal que $|g| < \psi, |\widetilde{g}| < \widetilde{\psi}$

con ${}^\circ I(\psi) < \frac{\varepsilon}{2}, {}^\circ I(\widetilde{\psi}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Luego,

$$\boxed{|g - \widetilde{g}| < |g| + |\widetilde{g}| < \psi + \widetilde{\psi} = \psi'' \in L}$$

Así $\exists\, \psi'' = \psi + \widetilde{\psi} \in L$ tal que $|g - \widetilde{g}| < \psi''$

Además

$$^\circ I(\psi'') = {}^\circ(\psi + \widetilde{\psi}) = {}^\circ I(\psi) + {}^\circ I(\widetilde{\psi}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto $g - \widetilde{g} \in L_0$ y como $\widetilde{\phi} - \phi = g - g_0$

entonces $\widetilde{\phi} - \phi \in L_0$ Ahora, vemos que: ${}^\circ I|\widetilde{\phi}| < \infty$

$|{}^\circ I(\widetilde{\phi} - \phi)| \leq {}^\circ|\widetilde{\phi} - \phi| = 0$, pues $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \bar{\psi} \in L$

tal que $|\widetilde{\phi} - \phi| < \bar{\psi}$

$\Rightarrow {}^\circ I|\widetilde{\phi} - \phi| < {}^\circ I\bar{\psi} < \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{{}^\circ I|\widetilde{\phi} - \phi| = 0}$

Luego:

$|{}^\circ I|\widetilde{\phi}| - {}^\circ I|\phi|| \leq {}^\circ I|\widetilde{\phi} - \phi| = 0$

Así ${}^\circ I|\widetilde{\phi}| - {}^\circ I|\phi| = 0$

Entonces ${}^\circ I|\widetilde{\phi}| = {}^\circ I|\phi|$ y como ${}^\circ I|\phi| < \infty$

se concluye ${}^\circ I|\widetilde{\phi}| < \infty$.

Además $\left|{}^\circ I|\widetilde{\phi}| - {}^\circ I|\phi|\right| = 0$.

b) Por hipótesis tenemos $f_i \in L, f_i = \phi_i + g_i, \phi_i \in L, g_i \in L_0 (i = 1, 2)$

Mostraremos que : $(f_1 \vee f_2) - \phi_1 \vee \phi_2 \in L_0$

$$(f_1 \wedge f_2) - \phi_1 \wedge \phi_2 \in L_0$$

En efecto

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y como $g_i \in L_0 (i = 1, 2)$

$\exists\ \psi \in L$ con $|g_i| < \psi$ (Considerando $\psi = \text{máx}\{\psi_1, \psi_2\}$ donde $\psi_1, \psi_2 \in L$, $|g_1| < \psi_1, |g_2| < \psi_2$)

Además $°I\psi < \varepsilon$

Luego:

$$(\phi_1 \vee \phi_2) - \psi = (\phi_1 - \psi) \vee (\phi_2 - \psi)$$

Como $|g_1| < \psi_1$, se tiene $-\psi \leq g_1 \leq \psi$

Luego $\phi_1 - \psi \leq \phi_1 + g_1$. Análogamente se demuestra: $\phi_2 - \psi \leq \phi_2 + g_2$

Luego:

$$(\phi_1 - \psi) \vee (\phi_2 - \psi) \leq (\phi_1 + g_1) \vee (\phi_2 + g_2) = f_1 \vee f_2$$

y como $|g_1| < \psi, |g_2 < \psi|$

se tiene $(\phi_1 + g_1) \vee (\phi_2 + g_2) = f_1 \vee f_2 \leq (\phi_1 \vee \phi_2) + \psi$

Así $f_1 \vee f_2 \leq (\phi_1 \vee \phi_2) + \psi$

Luego $f_1 \vee f_2 - (\phi_1 \vee \phi_2) \leq \psi$

Nótese que

$$(\phi_1 \vee \phi_2) - \psi \leq f_1 \vee f_2. \text{ De aquí } -\psi \leq f_1 \vee f_2 - (\phi_1 \vee \phi_2)$$

Así, se tiene:

$$-\psi \leq \underbrace{f_1 \vee f_2 - (\phi_1 \vee \phi_2)} \leq \psi. \text{ Sea } g = f_1 \vee f_2 - (\phi_1 \vee \phi_2)$$

Entonces: $-\psi \leq g \leq \psi$

$$\text{Por tanto } |g| = |f_1 \vee f_2 - (\phi_1 \vee \phi_2)| < \psi$$

$$\text{Así hemos probado que } g = f_1 \vee f_2 - (\phi_1 \vee \phi_2) \in L_0$$

Análogamente se demuestra $(f_1 \wedge f_2) - (\phi_1 \wedge \phi_2) \in L_0$.

□

Teorema 3.1. Los conjuntos L_0 y $\widehat{L}$ son lattices reales.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Observación 3.3. Si $f \in \widehat{L}$ tiene dos representaciones $f = \phi + g = \widetilde{\phi} + \widetilde{g}$ como en el Lema 3.1, entonces $^\circ I(\phi) = {}^\circ I(\widetilde{\phi}) < \infty$.

Definición 3.7. Para cada $f = \phi + g \in \widehat{L}$, donde $\phi \in L$ y $g \in L_0$ establecemos $\widehat{I}(f) = {}^\circ I(\phi)$. El número real $\widehat{I}(f)$ es llamado la *integral de* f (con respecto a la estructura de integración hiperreal (L, I))

Teorema 3.2. La funcional $\widehat{I}$ es una funcional lineal positiva sobre $\widehat{L}$

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Observación 3.4. El par $(\widehat{L}, \widehat{I})$ es una estructura de integración real sobre X.

Definición 3.8. La estructura $(\widehat{L}, \widehat{I})$ construida de esta manera a partir de (L, I) es llamada la *estandarización* de (L, I).

Caracterización de las funciones en $\widehat{L}$

Teorema 3.3. Una función con valores reales f sobre X está en $\widehat{L}$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$ existen funciones ψ_1 y ψ_2 en L con $\psi_1 \leq f \leq \psi_2, {}^\circ I(|\psi_1|) < \infty$ y $I(\psi_2 - \psi_1) < \varepsilon$ en cuyo caso se tiene:

$$^\circ I(\psi_1) \leq \widehat{I}(f) \leq {}^\circ I(\psi_1) + \varepsilon$$

Prueba.

[⇒] Sea $f : X \to \mathbb{R}, f \in \widehat{L}$

Como $f \in \widehat{L}$, existen $\phi \in L, g \in L_0$ tal que $f = \phi + g$ y además $^\circ I|\phi| < \infty$

Como $g \in L_0$. Sea $\varepsilon > 0$ fijo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\phi_n \in L$ con $|g| \leq \phi_n$ y $I\phi_n < \frac{\varepsilon}{2n}$

Definimos

$$\psi_1 = \phi - \phi_n, \quad \psi_2 = \phi + \phi_n$$

Afirmación: $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$.

En efecto:

Veamos primero que $\psi_1 \leq f$

Como $|g| \leq \phi_n$

Entonces $-\phi_n \leq g \leq \phi_n$

luego $-\phi_n - g \leq 0$,

$f - \phi_n - g \leq f$

$f - g - \phi_n \leq f$

y como $f = \phi + g$ se tiene $\phi = f - g$

entonces $\phi - \phi_n \leq f$

$\psi_1 \leq f$

- Veamos ahora que $f \leq \psi_2$

Como $|g| \leq \phi_n$

entonces $\quad -\phi_n \leq g \leq \phi_n$

$$\phi + g \leq \phi_n + g$$

$$f \leq \psi_2$$

Así $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$

Afirmación: $^\circ I|\psi_1| < \infty$

En efecto

$$\text{como } |\phi - \phi_n| \leq |\phi|$$

entonces $^\circ I|\phi - \phi_n| \leq {}^\circ I|\phi|$, donde $^\circ I|\phi| < \infty$

Luego $^\circ I|\phi - \phi_n| < \infty$, donde $\psi_1 = \phi - \phi_n$

$$\text{Por tanto } ^\circ I|\psi_1| < \infty.$$

Veamos ahora que $I(\psi_2 - \psi_1) < \varepsilon$

$$\begin{aligned} I(\psi_2 - \psi_1) &= I(\phi + \phi_n - \phi + \phi_n) \\ &= I|2\phi_n| = 2I|\phi_n| < 2(\tfrac{\varepsilon}{2n}) < \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto

$$I(\psi_2 - \psi_1) < \varepsilon.$$

Notemos ahora que $\psi_1 = \phi - \phi_n \in L$ (pues $\phi, \phi_n \in L$)

Además: $\psi_2 = \phi + \phi_n \in L$ (pues $\phi, \phi_n \in L$)

Afirmación: $\psi_1 - \phi_n \leq \phi \leq \psi_2 + \phi_n$

•Veamos primero que $\psi_1 - \phi_n \leq \phi$:

Como $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$, entonces $\psi_1 \leq f \leq \phi + \phi_n$,

$$\psi_1 \leq \phi + \phi_n,$$

$$\psi_1 - \phi_n \leq \phi$$

Así $\psi_1 - \phi_n \leq \phi$

•Veamos ahora que $\phi \leq \psi_2 + \phi_n$:

Como $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$, entonces $\phi - \phi_n \leq f \leq \psi_2$,

$$\phi - \phi_n \leq \psi_2$$

Así $\phi \leq \psi_2 + \phi_n$.

Por tanto hemos demostrado que:

$$\psi_1 - \phi_n \leq \phi \leq \psi_2 + \phi_n.$$

De esto se tiene que:

$$^\circ I\psi_1 - \frac{\varepsilon}{n} \leq {}^\circ I\phi = \widehat{I}f, \text{(Por definición)}$$

(Recordar que $I\phi_n < \frac{\varepsilon}{n}$ y como $\psi_1 \leq \phi_n + \phi$ entonces $^\circ I\psi_1 \leq I\phi_n + {}^\circ I\phi < \frac{\varepsilon}{n} + {}^\circ I\phi$)

Luego

$$^\circ I\psi_1 - \frac{\varepsilon}{n} \leq {}^\circ I\phi = \widetilde{I}f \leq {}^\circ I\psi_2 + \frac{\varepsilon}{n} \leq {}^\circ I\psi_1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

En efecto

Para la última parte de la desigualdad, nótese que: como $\phi \leq \psi_2 + \phi_n$ entonces $^\circ I\phi \leq {}^\circ I\psi_2 + I\phi_n < {}^\circ I\psi_2 + \frac{\varepsilon}{n}$

$$\text{Así } {}^\circ I\phi \leq {}^\circ I\psi_2 + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Ahora, como $I(\psi_2 - \psi_1) < \varepsilon$, entonces: $I(\psi_2) - I(\psi_1) < \varepsilon$,

$$I(\psi_2) < I(\psi_1) + \varepsilon$$

$$\text{luego } {}^\circ I\psi_2 < {}^\circ I\psi_1 + \varepsilon$$

entonces, como

$$^\circ I\psi_1 - \frac{\varepsilon}{n} \leq {}^\circ I\phi = \widehat{I}f \leq {}^\circ I\psi_2 + \frac{\varepsilon}{n} \leq {}^\circ I\psi_1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

resulta que:

$$^\circ I\psi_1 - \frac{\varepsilon}{n} \leq \widehat{I}f \leq {}^\circ I\psi_1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

Haciendo que $n \to \infty$, resulta

$$^\circ I\psi_1 \leq \widehat{I}f \leq {}^\circ I\psi_1 + \varepsilon$$

[$\Leftarrow$] Para demostrar el recíproco del teorema, usaremos saturación.

Supóngase $f : X \to \mathbb{R}$ arbitraria, para la cual se cumple que:

$\forall\, \varepsilon > 0$, existen $\psi_1, \psi_2 \in L$ con $\psi_1 \leq f \leq \psi_2, {}^\circ I|\psi_1| < \infty$ y $I(\psi_1 - \psi_1) < \varepsilon$.

Luego, existe una sucesión creciente $\{\psi\}_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e $\psi_{n+1} \geq \psi_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$).

y una sucesión decreciente $\{\psi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en L, con $\psi_n \leq f \leq \psi'_n, {}^\circ I|\psi_n| < \infty$ y $I(\psi'_n - \psi_n) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$

Aplicamos el Teorema II.8.5 ([5, cap 2]);

con $C = \mathbb{N}, D = L$ y $\phi : \mathbb{N} \to L, \phi' : \mathbb{N} \to L$

definidas por $\phi(n) = \psi_n, \phi'(n) = \psi'_n$.

Entonces,

existen extensiones internas $\widetilde{\phi} : {}^*\mathbb{N} \to L$ y $\widetilde{\phi}' : {}^*\mathbb{N} \to L$.

Ahora, por el principio de permanencia (Ver Teor II.7.1, pag 107 [5]) podemos encontrar $k \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ tal que:

ψ_n y ψ'_n formen sucesiones crecientes y decrecientes, además $\psi_n \leq \psi'_n$ para $n \leq k$

Así, para algún infinito $w, w \leq k$,

$$\psi_n \leq \psi_w \leq \psi'_w \leq \psi'_n$$

De aquí:

$-(\psi' - \psi_n) = \psi_n - \psi'_n \leq f - \psi_w \leq \psi'_n - \psi_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

entonces $|f - \psi_w| \leq \psi'_n - \psi_n$, donde $\psi'_n - \psi_n \in L$ $(\psi_n, \psi'_n \in L)$

y como $I(\psi'_n - \psi_n)\frac{1}{n}$

se tiene que $f - \psi_w \in L_0$ Así $f \in L$

(pues $f - \psi_n = g \in L_0$ de donde $f = \psi_n + g, \psi_n \in L, g \in L_0$) □

A continuación, veamos un teorema llamado *Teorema de Convergencia Monótona*, el cual nos dice que $\widehat{L}$ es "cerrado" bajo límites monótonos si las integrales son acotados uniformemente.

Teorema 3.4 (Teorema de Convergencia Monótona). Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in \widehat{L}, \forall n \in \mathbb{N}$ es una sucesión monótona creciente tal que:

a) existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

b) $\sup\{\widehat{I}(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \widehat{I}(f_n) < \infty$

entonces $f \in \widehat{L}$ y $\widehat{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \widehat{I}(f_n)$

Prueba. Asumimos sin pérdida de generalidad que $f_n \geq 0$ (sino consideramos $f_n - f_1$)
Como cada $f_n \in \widehat{L}$, podemos encontrar representaciones:

$$f_n = \phi_n + g_n, \text{ con } \phi_n \in L, g_n \in L_0, \text{ además } 0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$$

Sea $B = \lim_{n\to\infty} \widehat{I} f_n$ entonces dado $\varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ (en $\mathbb{N}$)

$$\text{se tiene que } B - \varepsilon < \widehat{I} f_n \leq B \quad (\text{ya que } \lim_{n\to\infty} \widehat{I} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\widehat{I} f_n\})$$

De aquí:

$$B - \varepsilon < I\phi_n < B + \varepsilon, \text{ para cualquier } \varepsilon > 0.$$

Usamos saturación nuevamente. Como en la demostración del teorema 3.3, extendemos la sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L$ a una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}} \subset L$ tal que ésta es aún creciente. (Si es necesario, repetimos algún $\phi \in L$, para todo $n, n \geq k$, para algún $k \in \mathbb{N}_\infty$).
Así, para algún w infinito, $\phi_w \geq \phi_n$ (pues ϕ es creciente) para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$°I\phi_w = \sup\{°I\phi_n / n \in \mathbb{N}\}. \text{ (ya que como } \phi_w \geq \phi_n > \phi_n - \varepsilon \; \forall\, \varepsilon > 0$$
$$\text{entonces } °I\phi_w > °I\phi_n - \varepsilon, \; \forall\, \varepsilon > 0)$$

Necesitamos sólo mostrar que $f - \phi_w \in L_0$
Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $g_n \in L_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $\psi_n \in L$ con $|g_n| \leq \psi_n$ y además $I\psi_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$
Nuevamente por $\mathbb{N}_1$-saturación, podemos extender la sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a una sucesión $\{\psi_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ tal que para algún infinito $k \in {}^*\mathbb{N}, \psi_n \geq 0$ y $I\psi_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$ para cada $n \leq k$.
Sea $\boxed{\psi = \sum_{n=1}^{k} \psi_n} \equiv \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_k$, donde $I\psi_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$ para cada $n \leq k$
entonces $I\psi = I\psi_1 + I\psi_2 + \cdots + I\psi_k < k\frac{\varepsilon}{2^k}$ (pues $k < 2^k \Rightarrow \frac{k}{2^k} < 1$ para $k \geq 1$)
Además, como $\boxed{\psi_n \leq \psi}$ entonces:

$$\phi_n - \psi \leq \phi_n - \psi_n \leq \phi_n + g_n \leq f \leq (1+\varepsilon)(\phi_w + \psi), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

Luego

$$(\phi_n - \phi_w) - \psi \leq f - \phi_w \leq \varepsilon\phi_w + (1+\varepsilon)\psi$$

podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $-2\varepsilon < I(\phi_n - \phi_w) - I\psi$
Además

$$I(\varepsilon\phi_w + (1+\varepsilon)\psi) < \varepsilon I\phi_w + \varepsilon + \varepsilon^2, \qquad \text{ya que } I(\varepsilon\phi_w + (1+\varepsilon)\psi)$$
$$= I(\varepsilon\phi_w) + I((1+\varepsilon)\psi)$$
$$= \varepsilon I(\phi_w) + (1+\varepsilon)I\psi, I\psi < \varepsilon$$
$$< \varepsilon I(\phi_w) + (1+\varepsilon)\varepsilon$$
$$\Rightarrow I(\varepsilon\phi_w + (1+\varepsilon)\psi) < \varepsilon I\phi_w + \varepsilon + \varepsilon^2.$$

como ε es arbitrario, tenemos que $f - \phi_w \in L_0$ $\square$

Nuestro siguiente teorema nos da condiciones bajo la cual la parte estándar $^\circ\phi$ de una función $\phi \in L$, está en $\widehat{L}$ y $\widehat{I}(^\circ\phi) = {}^\circ I(\phi)$. En general, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.9. Sea $\phi \in L$. Definimos la parte estándar de ϕ, denotada por $^\circ\phi$, mediante

$$\begin{cases} st(\phi(x)), & \phi(x) \text{ finito} \\ \infty, & \phi(x) \in {}^*\mathbb{R}^+_\infty \\ -\infty, & \phi(x) \in {}^*\mathbb{R}^-_\infty \end{cases}$$

Teorema 3.5. Si $\phi \in L$ asume solamente valores finitos y para algún $\psi \geq 0$ en L con $^\circ I(\psi) < \infty$, se tiene

$$\{x \in X : \phi(x) \neq 0\} \subset \{x \in X : \psi(x) \geq 1\}$$

entonces

$$\phi - {}^\circ\phi \in L_0, \text{ con } {}^\circ\phi \in L \text{ y } \widehat{I}(^\circ\phi) = {}^\circ I(\phi).$$

Prueba.

Mostraremos que $\phi - {}^\circ\phi \in L_0$. En efecto sea $\varepsilon > 0$ cualquiera

como ϕ toma valores finitos, $^\circ\phi(x) = st(x)$

Luego $\phi - {}^\circ\phi = \varepsilon, \psi \geq 0$.

Entonces $|\psi| = \psi \geq 1, |\phi - {}^\circ\psi| = \varepsilon$

De aquí: $|\phi - {}^\circ\phi| \leq \psi\varepsilon$

Por tanto $\phi - {}^\circ\phi \in L_0$

Afirmación: $|\phi(x)| \leq n\psi(x)$ para todo n infinito, y para todo $x \in X$.

Usando el principio de permanencia tenemos $|\phi| \leq n\psi$ para algún $n \in \mathbb{N}$ finito.

De aquí $^\circ I\phi < \infty$ (pues $^\circ I\phi = {}^\circ|\phi| \leq n{}^\circ I\psi < \infty$).

Así $^\circ\phi = \underbrace{\phi}_{\in L} + \underbrace{^\circ\phi - \phi}_{\in L_0} \in \widehat{L}$

Además:

$$\widehat{I}(^\circ\phi) = {}^\circ I\phi (\text{por definición de } \widehat{I}).$$

$\square$

Ejemplo 3.3. Sea X un conjunto interno y sea $x_0 \in X$. Sea L el conjunto de todas las funciones con valores hiperreales las cuales se anulan excepto en x_0. Poniendo $I(f) = f(x_0)$ para todo $f \in L$. Entonces (L, I) es una estructura de integración interna. Además L_0 consiste de todas las funciones que se anulan excepto en x_0, donde ellas son infinitesimales y $\widehat{L}$ consiste de todas las funciones f con valores reales las cuales se anulan excepto en x_0, donde $f(x_0)$ es finito y $\widehat{I}(f) = f(x_0)$, donde $(\widehat{L}, \widehat{I})$ es la estandarización de (L, I).

3.3. Teoría de la medida para estructuras de integración completa

En esta sección desarrollaremos una teoría de medida para cualquier estructura de integración $(\widehat{L}, \widehat{I})$ para el cual es válido el Teorema de Convergencia Monótona. Tales estructuras serán llamadas *completas.*

Definición 3.10. Una estructura de integración real $(\widehat{L}, \widehat{I})$ sobre un conjunto X es *completo* si dada una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \in \widehat{L}, \forall n \in \mathbb{N}$ monótona creciente que cumple

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, existe para todo $x \in X$,

b) $\sup\{\widehat{I}(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \widehat{I}(f_n) < \infty$.

Entonces

$$f \in \widehat{L} \text{ y } \widehat{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \widehat{I}(f_n).$$

Observación 3.5. En esta sección $(\widehat{L}, \widehat{I})$ denotará una estructura de integración completa.

Presentaremos un conjunto $\widehat{M}$ de funciones que incluye a $\widehat{L}$. Las funciones en $\widehat{M}$ son llamados funciones *medibles*. Extenderemos la funcional $\widehat{I}$ a un subconjunto $\widehat{L}_1$ de

$\widehat{M}$ para obtener una estructura de integración real el cual será una extensión de $(\widehat{L}, \widehat{I})$. Estudiaremos también las propiedades básicas de estos conjuntos llamados *medibles* cuyas funciones características están en $\widehat{M}$.

Definición 3.11. El *sistema de los números reales extendido* es el conjunto $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Además de las reglas usuales de aritmética, tenemos en $\mathbb{R}$ lo siguiente:

i) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$,

ii) $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$,

iii) $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$,

iv) $$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ \mp\infty, \text{si } x < 0 \end{cases}$$

v) $x/(\pm\infty) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es acotado superiormente, definimos $\sup A = +\infty$. Análogamente, si $A \subset \mathbb{R}$ no es acotado inferiormente definimos $\inf A = -\infty$.

Definición 3.12.

- El conjunto $\widehat{L}^+$ denota el conjunto de funciones no negativas en $\widehat{L}$.
- Denotamos por $\widehat{M}^+$ al conjunto de funciones no negativas h sobre X con valores en $\bar{\mathbb{R}}$ tal que $h \wedge f \in \widehat{L}$ para cada $f \in \widehat{L}$.

Definición 3.13.

- Si $h \in \widehat{M}^+$ definimos:

$$\begin{aligned} \widehat{J} : \widehat{M}^+ &\to \bar{\mathbb{R}} \\ h &\mapsto \widehat{J}(h) = \sup\{\widehat{I}(h \wedge f) : f \in \widehat{L}\} \end{aligned}$$

- Denotamos por $\widehat{M}$ el conjunto de las funciones h sobre X con valores en $\bar{\mathbb{R}}$ cuya parte positiva $h^+ = h \vee 0$ y parte negativa $h^- = -h \vee 0$ están en $\widehat{M}^+$.
- Si $h \in \widehat{M}$ y al menos $\widehat{J}_{h^+}$ o $\widehat{J}_{h^-}$ es finito, definimos

$$\widehat{J}_h = \widehat{J}_{h^+} - \widehat{J}_{h^-}$$

Observación 3.6.

1. Si L es un lattice, entonces $\widehat{L} \subset \widehat{M}$. Además, si $h \in \widehat{L}$ entonces $\widehat{J}_h = \widehat{I}_h$.
2. $\widehat{J}(h) = \sup\{\widehat{I}(f) : 0 \leq f \leq h, f \in \widehat{L}\}$ para $h \in \widehat{M}^+$.

Proposición 3.2. Si $h_1, h_2 \in \widehat{M}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $h_1 + h_2, \alpha h_1, h_1 \wedge h_2$ y $h_1 \vee h_2$ pertenecen a $\widehat{M}^+$. Además

$$\begin{aligned}
\widehat{J}(h_1 + h_2) &= \widehat{J}(h_1) + \widehat{J}(h_2), \\
\widehat{J}(\alpha h_1) &= \alpha \widehat{J}(h_1), \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ y} \\
\widehat{J}(h_1) &\leq \widehat{J}(h_2), \text{ si } h_1 \leq h_2.
\end{aligned}$$

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Nuestro siguiente resultado extiende el Teorema de Convergencia Monótona a $(\widehat{M}^+, \widehat{J})$.

Teorema 3.6 (Teorema de Convergencia Monótona). Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}, h_n \in \widehat{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ una sucesión creciente en $\widehat{M}^+$, entonces

$$h = \sup h_n \in \widehat{M}^+ \text{ y } \widehat{J}_h = \sup\{\widehat{J}(h_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \widehat{J}(h_n).$$

Prueba. Sea $f \in \widehat{L}^+$ cualquiera. Como $h_n \in \widehat{M}^+$ entonces

$$h_n \wedge f \in \widehat{L} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

Luego, la sucesión $(h_n \wedge f)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente a $h \wedge f$ y

$$\sup\{\widehat{I}(h_n \wedge f)\}_{n\in\mathbb{N}} \leq \widehat{I}f < \infty$$

pues $\sup\{\widehat{I}(h_n \wedge f)\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \widehat{I}(h_n \wedge f) = \widehat{I}(h \wedge f)$ por teorema 3.4 donde $h \wedge f \in L$
De este modo: $h \in \widehat{M}^+$
Luego

$$\begin{aligned}
\widehat{J}h &= \sup\{\widehat{I}(h \wedge f)/f \in L\} \\
&= \sup\{\sup\{\widehat{I}(h_n \wedge f)/f \in L\}_{n\in\mathbb{N}}\} \\
&= \sup\{(\widehat{J}h_n)_{n\in\mathbb{N}}\}
\end{aligned}$$

□

Observación 3.7. Restringiremos nuestra atención a aquellas funciones cuyas integrales son finitas.

Definición 3.14. Definimos:

- L_1 como el conjunto de funciones $h \in \widehat{M}$ con valores en $\bar{R}$ tal que $\widehat{J}(h)$ es finito y
- $\widehat{L}_1^+$ como el conjunto de funciones no negativas en $\widehat{L}_1$.

Proposición 3.3. El conjunto de funciones con valores reales en $\widehat{L}_1$ con $\widehat{J}$ forma una estructura de integración completa sobre X. Además, $\widehat{L} \subset \widehat{L}_1$ y $\widehat{J}(f) = \widehat{I}(f)$ si $f \in \widehat{L}$.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Observación 3.8.

1. Para determinar que una función dada h pertenece a $\widehat{L}_1$ es suficiente ver que $h \in \widehat{M}$ y $|h| \leq g$ para algún $g \in \widehat{L}_1^+$.
2. Si $1 \in \widehat{L}$, entonces toda función con valores reales en $\widehat{L}_1$ pertenece a $\widehat{L}$.

Definición 3.15.

1. Un lattice L (real o hiperreal) es *Stoniano* si $\phi \in L$ implica $\phi \wedge 1 \in L$.

2. Diremos que una estructura de integración (L, I) es Stoniano, si L es Stoniano.

Observación 3.9.

1. Si $1 \in L$ entonces L es Stoniano.

2. Si $\widehat{L}$ es Stoniano entonces $1 \in \widehat{M}^{+}$.

3. Si L es un lattice Stoniano real sobre un conjunto estándar Y, entonces ${}^{*}L$ es un lattice Stoniano interno sobre $X = {}^{*}Y$.

4. Si L es Stoniano, entonces $\phi \wedge \alpha \in L$ para cualquier $\alpha > 0$, pues,

$$\phi \wedge \alpha = \alpha\Big(\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\phi \wedge 1\Big).$$

Proposición 3.4. Si (L, I) es una estructura de integración interna Stoniana sobre el conjunto interno X, entonces la estandarización $(\widehat{L}, \widehat{I})$ es una estructura de integración Stoniana.

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y $f \in \widehat{L}$ dada. Por teorema 3.3 existen $\psi_1, \psi_2 \in L$ tal que $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$, ${}^{\circ}I(|\psi_1|) < \infty$ y ${}^{\circ}I(\psi_2 - \psi_1) < \varepsilon$
Entonces

$$\psi_1 \wedge 1 \leq f \wedge 1 \leq \psi_2 \wedge 1 \text{ y}$$

como $(\psi_2 - \psi_1) \wedge 1 \leq \psi_2 - \psi_1$
entonces ${}^{\circ}I\big((\psi_2 \wedge 1) - (\psi_1 \wedge 1)\big) \leq {}^{\circ}I(\psi_2 - \psi_1) < \varepsilon$, además ${}^{\circ}I(|\psi_1 \wedge 1|) < \infty$
lo cual demuestra que

$$f \wedge 1 \in \widehat{L} \text{ por teorema 3.3}$$

Por tanto $\widehat{L}$ es Stoniano
Finalmente $(\widehat{L}, \widehat{I})$ es una estructura de integración Stoniana □

Observación 3.10. En lo que sigue asumiremos que todas las estructuras de integración son Stonianas.

Definición 3.16. Denotamos por $\widehat{\mathscr{L}}$ a la colección de todos los conjuntos $A \subset X$ para los cuales $\chi_A \in \widehat{L}^+$.

Proposición 3.5. Si $A = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ donde $f \in \widehat{L}^1$ y $\alpha > 0$ entonces $A \in \widehat{\mathscr{L}}$.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. $\square$

Proposición 3.6. $\widehat{M}^+$ consiste de todas las funciones con valores en $\bar{R}$ no negativas h tal que $h \wedge n\chi_A \in \widehat{L}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \widehat{\mathscr{L}}$. Además, dado $h \in \widehat{M}^+$, se tiene

$$\widehat{J}_h = \sup\{\widehat{I}(h \wedge n\chi_A) : n \in \mathbb{N}, A \in \widehat{\mathscr{L}}\}.$$

Prueba. Por definición

$$\widehat{M}^+ = \{h : X \to \bar{\mathbb{R}}/h \geq 0, h \wedge f \in \widehat{L}, \text{ para cada } f \in \widehat{L}\}$$

además, si $h \in \widehat{M}^+$ se tiene

$$\widehat{J}h = \sup\{\widehat{I}(h \wedge f) : f \in \widehat{L}\}$$

Definamos $B := \{h : X \to \bar{\mathbb{R}}/h \geq 0, h \wedge n\chi_A \in \widehat{L}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } A \in \widehat{\mathscr{L}}\}$

<u>Mostraremos que:</u>

$$\widehat{M}^+ = \{h : X \to \bar{\mathbb{R}}/h \geq 0, h \wedge n\chi_A \in \widehat{L}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } A \in \widehat{\mathscr{L}}\}$$

<u>En efecto</u>
Sea $h \in \widehat{M}^+$ veamos que $h \in B$.
Como $h \in \widehat{M}^+$, entonces $h \wedge f \in \widehat{L}$, para cada $f \in \widehat{L}$
En particular, consideremos $f \geq 0$ cualquiera en $\widehat{L}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$A_n\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}. \text{ De aquí } A_n \in \widehat{\mathscr{L}} \text{ por la proposición 3.5}$$

Entonces $\chi_{A_n} \in \widehat{L}^+$ por la definición de $\widehat{\mathscr{L}}$
Por tanto $\chi_{A_n} \in \widehat{L}$ $\square$

Daremos a continuación algunas definiciones de teoría de la medida.

Definición 3.17. Una Colección $\mathscr{M}$ de subconjuntos de un conjunto X es llamado un σ-álgebra si

a) $X \in \mathscr{M}$.

b) $A \in \mathscr{M}$ implica que el complemento A^C de A satsface que $A^C \in \mathscr{M}$.

c) Dada una colección numerable en $\mathscr{M}$, $\{A_i \in \mathscr{M}\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{M}$.

d) Cada conjunto en $\mathscr{M}$ es llamado *medible* y el par $(X, \mathscr{M})$ es llamado *espacio medible*.

e) Una función $\mu : \mathscr{M} \to \bar{R}^+$ es llamada una *medida* sobre $\mathscr{M}$, si

i) $\mu(\emptyset) = 0$ y

ii) Para cada colección $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde $A_i \in \mathscr{M}, \forall i \in \mathbb{N}$ la cual es disjunta dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$) se tiene

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Esta propiedad es llamada *aditividad contable.*

iii) Una medida μ sobre $\mathscr{M}$ es *completa* si dado $A \in \mathscr{M}$ con $\mu(A) = 0$ y $B \subset A$, se tiene $B \in \mathscr{M}$. Además $\mu(B) = 0$, puesto que
$\mu(B) \leq \mu(A - B) + \mu(B) = \mu(A)$.

Observación 3.11.

1. La tripleta $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es llamada un *espacio de medida.*

2. El término *completo* para medidas o está relacionada con la completitud de las estructuras de integración.

Definición 3.18. Un conjunto $A \subset X$ es *medible* con respecto a $(\widehat{L}, \widehat{I})$ si $\chi_A \in \widehat{M}^+$.

La colección de estos conjuntos medibles es denotado por $\widehat{\mathscr{M}}$. Para cada $A \in \widehat{\mathscr{M}}$, definimos

$$\widehat{\mu}(A) = \widehat{J}_{\chi(A)}$$

Observación 3.12. Notemos que $\widehat{\mathscr{L}} \subset \{A \in \widehat{\mathscr{M}} : \mu(A) < \infty\}$.

Teorema 3.7. $\widehat{\mathscr{M}}$ es un σ-álgebra sobre X y $\widehat{\mu}$ es una medida sobre $\widehat{\mathscr{M}}$.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Ejemplo 3.4. Sea $(\widehat{L}, \widehat{I})$ la estandarización de $(L, I) = ({}^*C_C(\mathbb{R}), {}^*\int)$ sobre $X = {}^*\mathbb{R}$, donde:

- $C_C(\mathbb{R})$ denota al conjunto de todas las funciones continuas con valores reales sobre $\mathbb{R}$ con soporte compacto, donde el soporte de f es el conjunto

$$\operatorname{sop}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

- $\int$ es una funcional sobre $C_C(\mathbb{R})$ definida como:

$$\begin{array}{rcl} \int : C_C(\mathbb{R}) : & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int f = \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

El par $(C_C(\mathbb{R}), \int)$ es una estructura de integración real. Además $1 \notin C_C(\mathbb{R})$.

a) $\widehat{\mathscr{L}}$ contiene todos los intervalos de longitud finita, incluyendo intervalos de longitud infinitesimal y conjuntos unitarios.

b) $\widehat{\mathscr{M}}$ contiene todo intervalo sobre ${}^*\mathbb{R}$.

c) El conjunto G de números finitos en ${}^*\mathbb{R}$ está en $\widehat{\mathscr{M}}$.

d) El conjunto de números infinitesimalmente cercano a cualquier $a \in \mathbb{R}$ está en $\widehat{\mathscr{L}}$.

Ejemplo 3.5. En el Ejemplo 3.3, $\widehat{\mathscr{L}}$ consiste de $\{x_0\}$, y $\widehat{\mathscr{M}}$ consiste de todos los conjuntos.

Mostraremos ahora que comenzando con $\widehat{\mathscr{M}}$ y $\widehat{\mu}$ obtenido de $(\widehat{L},\widehat{I})$ entonces las funciones medibles e integrales obtenidas a partir del desarrollo estándar coinciden con aquellas obtenidas de $(\widehat{L},\widehat{I})$.

En lo que sigue, μ denotará una medida sobre un σ-álgebra arbitrario $\mathscr{M}$.

Definición 3.19. Una función h con valores en $\bar{\mathbb{R}}$ sobre X es *medible* con respecto a $\mathscr{M}$ si $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{M}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. El conjunto de funciones f que son medibles con respecto a $\mathscr{M}$ es denotado por M.

Veremos que $M = \widehat{M}$, para ello mostraremos que cada $h \in M$ es el límite de una sucesión de funciones en M, que toman solo valores finitos.

Definición 3.20. Una función $v \in M$ es *simple* si ésta toma solamente valores reales finitos y distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y los conjuntos $A_i = \{x \in X : v(x) = a_i\} \in \mathscr{M}$ para $i = 1, \ldots, n$.

La representación

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

es llamada la *representación reducida* de v.

Proposición 3.7. Sea $h \in M$ una función no negativa cualquiera. Entonces h es el límite de una sucesión monótona creciente $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}, v_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$ de funciones simples no negativas.

Prueba. Ver [5, cap 4] □

Definición 3.21.

- Dada una medida μ sobre $\mathscr{M}$. Si $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ es una función simple con $a_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$. Definimos la *integral* de v mediante:

$$\int v d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

- Si $h \in M$ es una función no negativa, definimos la integral de h mediante

$$\int h d\mu = \sup\{\int v d\mu : v \text{ es función simple}, 0 \leq v \leq h\}$$

- Si $h \in M$ y $h = h^+ - h^-$, definimos:

$$\int h d\mu = \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu,$$

si una de las integrales es finita.

Mostremos que nuestro desarrollo de integración coincide con este desarrollo estándar.

Teorema 3.8. Sea $(\widehat{L}, \widehat{I})$ una estructura de integración completa con funciones medibles $\widehat{M}$ y sea M las funciones medibles respecto al σ-álgebra $\widehat{\mathscr{M}}$ obtenida de $(\widehat{L}, \widehat{I})$. Entonces una función h con valores en $\bar{\mathbb{R}}$, pertenece a $\widehat{M}^+$ si y sólo si $h \in M^+$ y

$$\widehat{J}(h) = \int h d\widehat{\mu},$$

donde $\widehat{\mu}$ es la medida obtenida de $(\widehat{L}, \widehat{I})$.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Corolario. $\widehat{M} = M$ y $\widehat{J}(h) = \int h d\widehat{\mu}$, para todo $h \in \widehat{M}$ tal que $\widehat{J}$ esté bien definida.

Observación 3.13. Sea $(\widehat{L}, \widehat{I})$ una estructura de integración completa con conjuntos asociados $\widehat{M}, \widehat{\mathscr{M}}$ y medida $\widehat{\mu}$. Denotaremos el valor de $\widehat{J}$ en $h \in \widehat{M}$ mediante:

$$\int h d\widehat{\mu}.$$

Proposición 3.8. Si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $h_n \in \widehat{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de funciones en $\widehat{M}$, entonces las siguientes funciones:

$$h(x) = \inf\{h_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$H(x) = \sup\{h_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$\widetilde{h}(x) = \liminf h_n(x),$$

$$\widetilde{H}(x) = \limsup h_n(x),$$

pertenecen a $\widehat{M}$.

Proposición 3.9. Sean $f, g \in \widehat{M}$ y H una función continua sobre el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces la función

$$\begin{aligned} h : X &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto h(x) = H(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

pertenece a $\widehat{M}$. En particular $f + g$ y fg pertenecen a $\widehat{M}$.

Prueba. Como H es una función continua, entonces se tiene que los conjuntos $U_n = \{\{u, v\} : H(u, v) > \alpha\}$ son abiertos y de esta manera, se puede escribir como la unión de rectángulos abiertos

$$U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\{u, v\} : \{u, v\} \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\}$$

Por tanto:

$$\{x : h(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\{x : f(x) \in (a_n, b_n)\} \cap \{x : g(x) \in (c_n, d_n)\} \Big)$$

es medible

Por tanto, h es medible □

Observación 3.14. Si $f \in \widehat{M}$ y $\int f d\widehat{\mu}$ está definida, entonces $f\chi_a \in \widehat{M}$, para cualquier $A \in \widehat{\mathscr{M}}$. Definimos

$$\int_A f d\widehat{\mu} = \int f \chi_A d\widehat{\mu}.$$

Proposición 3.10. Si $\phi \in L$ entonces ${}^\circ\phi \in \widehat{M}$.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Proposición 3.11. Supongamos que $1 \in \widehat{L}$. Para cada $h \in \widehat{M}^+$ existe una función $\phi \in L$ tal que $|(h \wedge n) - (\phi \wedge n)| \in L_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y así

$$\widehat{J}(h) = \sup\{\widehat{J}(h \wedge n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \sup\{{}^\circ I(\phi \wedge n)\}_{n \in \mathbb{N}} = {}^\circ I(\phi \wedge w)$$

para algún $w \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.

Prueba. Por el teorema 3.3 podemos elegir sucesiones $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en L tal que $\phi_n \leq h \wedge n \leq \psi_n$, $\phi_n \leq \phi_{n+1}$
y $I(\psi_n - \phi_n) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$
Dado $k \geq m \geq n$ en $\mathbb{N}$, podemos obtener

$$\phi_m \wedge n \leq \phi_k \wedge n \leq h \wedge n \leq \psi_m \wedge n$$

Además tenemos que

$$I\big((\psi_m \wedge n) - (\phi_m \wedge n)\big) \leq I(\psi_m - \phi_m) < \frac{1}{m}.$$

Por saturación, podemos encontrar $\phi \in L$ tal que:

$$\phi_m \wedge n \leq \phi \wedge n \leq \psi_m \wedge n \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}, \text{ con } m \geq n$$

De aquí:

$$|(h \wedge n) - (\phi \wedge n)| \in L_0.$$

□

3.4. Integración sobre $\mathbb{R}^n$ y el Teorema de Representación de Riesz

En esta sección queremos utilizar la teoría desarrollada en las Secciones 3.2 y 3.3 para definir un espacio de medida $(X, \mathscr{M}_X, \mu_X)$ y una estructura de integración completa correspondiente (L_X, I_X) sobre X, el cual es una extensión de la estructura $(C_c(X), I_0)$.

Observación 3.15. Aquí estamos considerando

i) $X \subset \mathbb{R}^n$, abierto o cerrado.

ii) I_0 es una funcional lineal positiva sobre $C_c(X)$.

iii) $C_c(X)$ es el conjunto de funciones continuas con soporte compacto sobre X.

Sea $(L, I) = ({}^*C_c(X), {}^*I_0)$, una estructura de integración interna sobre ${}^*X$, con $(\widehat{M}, \widehat{J}), (\widehat{L}_1, \widehat{J}), \widehat{M}, \widehat{L}, \widehat{\mu}$ denotando los objetos construidos de (L, I) mediante los procedimientos de las Secciones 3.2 y 3.3.

Observación 3.16. Recordemos que si G denota los elementos near-estándar (NE) en ${}^*X$ entonces el mapeo parte estándar st, definido por

$$\begin{aligned} st : G : &\rightarrow X \\ x &\mapsto st(x) \end{aligned}$$

mapea G sobre X.

Definición 3.22.

- Si $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definimos $\widetilde{f}$ mediante

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : {}^*X &\rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(st(x)), & x \in G, \\ 0, & x \notin G \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $A \subset X$, definimos $\widetilde{A}$ mediante:

$$\widetilde{A} = st^{-1}(A) \cap {}^*X.$$

Observación 3.17.

1. $\widetilde{f}$ es constante sobre las mónadas de puntos estándar en ${}^*X$ y 0 en todos los puntos remotos (i.e. no near-estándar). En particular $\widetilde{f}(x) = 0$ si $x \in {}^*X$ y la norma de x es infinita.

2. $\widetilde{af} = a\widetilde{f}, \widetilde{f+g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}, \widetilde{f \vee g} = \widetilde{f} \vee \widetilde{g}, \widetilde{f \wedge g} = \widetilde{f} \wedge \widetilde{g}$.

3. $\widetilde{\chi_A} = \chi_{\widetilde{A}}$.

Definición 3.23.

- Sea $M_X = \{f : \widetilde{f} \in \widehat{M}\}$.

- Definimos J_X, mediante:

$$\begin{array}{rcl} J_X : M_X & \to & \bar{\mathbb{R}} \\ f & \mapsto & J_X(f) = \widehat{J}(\widetilde{f}), \text{ cuando } \widehat{J}(\widetilde{f}) \text{ esté definida} \end{array}$$

- Para cada $A \subset X$, con $\widetilde{A} \in \widehat{\mathscr{M}}$ (i.e. $\chi_A \in M_X$), definimos

$$\mu_X(A) = \widehat{\mu}(\widetilde{A}) \text{ y } \mathscr{M}_X = \{A \subset X, \widetilde{A} \in \widehat{\mathscr{M}}\}.$$

- Definimos

$$L_X = \{f : M_X \to \mathbb{R} \text{ tal que } J_X(f) \text{ está definida y } J_X(f) < \infty\}.$$

Proposición 3.12. (L_X, J_X) es una estructura de integración completa que extiende $(C_c(X), I_0)$. Además $(X, \mathscr{X}, \mu_X)$ es un espacio de medida tal que $f \in M_X$ si y sólo si f es $\mathscr{M}_X$-medible y

$$\int f d\mu_X = J_X(f),$$

cuando $J_X(f)$ está definida.

Prueba.

Hay que probar que (L_X, J_X) es una estructura de integración real (hiperreal)

Veamos que L_X es un lattice:

Sean $f, g \in L_X$ cualesquiera. Sean α y β reales (o hiperreales)

Donde

$$L_X = \{f : M_x \to \mathbb{R}/J_X(f) \text{ está definida, } J_X(f) < \infty\}.$$

Mostraremos que

i) $\alpha f + \beta g \in L_X$

ii) Si $f \in L_X \Rightarrow |f| \in L_X$

En efecto:

i) $J_X(\alpha f + \beta g) = \widehat{J}(\widetilde{\alpha f + \beta g}) \;= \widehat{J}(\alpha \widetilde{f} + \beta \widetilde{g}) =$

$$= \alpha \widehat{J}(\widetilde{f}) + \beta \widehat{J}(\widetilde{g}) \qquad \text{(Por proposición 3.2)}$$

$$= \alpha J_X(f) + \beta J_X(g)$$

Así $J_X(\alpha f + \beta g)$ está definida pues $J_X(f)$ y $J(g)$ están definidas ya que $f, g \in L_X$

Además $\alpha J(f) < \infty, \beta J(g) < \infty$.

ii) Sea $f \in L_X$ cualquiera veamos que $|f| \in L_X$

En efecto

Por teoría, sabemos que $|f| = f^+ + f^-$

entonces

$$J_X(|f|) = J_X(f^+ + f^-) = \widehat{J}(\widetilde{f^+}) + \widehat{J}(\widetilde{f^-}) \text{ está definida pues } \widehat{J}(\widetilde{f}) \text{ está definida}$$

Además $\widehat{J}(\widetilde{f^+}) \;\leq \widehat{J}(\widetilde{f}) < \infty$

$\widehat{J}(\widetilde{f^-}) \;\leq \widehat{J}(\widetilde{f}) < \infty$

Por tanto $J_X(|f|) < \infty$ Así L_X es un lattice

veamos que J_X es una funcional lineal positiva:

Sean $f, g \in L_X$ y α, β reales o hiperreales. Entonces $\alpha f + \beta g \in L_X$

$$\Rightarrow J_X(\alpha f + \beta g) = \widehat{J}(\widetilde{\alpha f + \beta g}) = \widehat{J}(\alpha \widetilde{f}) + \widehat{J}(\beta \widetilde{g})$$

$$= \alpha \widehat{J}(\widetilde{f}) + \beta \widehat{J}(\widetilde{g})$$

la cual esta definida pues $f, g \in L_X$

$$= \alpha J_X(f) + \beta J_X(g)$$

Así J_X es lineal

Si $f \geq 0 \Rightarrow J_X(f) = \widehat{J}(\widetilde{f}) \geq 0$

Ahora, mostremos que (L_X, J_X) extiende $(C_C(X), I_0)$

Sea $f \in C_C(X)$. Por la continuidad uniforme de f, se tiene ${}^*f(y) \simeq {}^*f(x)$

Si $y \simeq x$ y ${}^*f = 0$ en cualquier remoto puesto que f tiene soporte compacto Así $\widetilde{f} = f(st(x)) = {}^\circ({}^*f)$. Por la extensión del ejemplo 3.4(b) se tiene que

$$\widetilde{f} \in \widehat{L} \text{ y } \widehat{J}(\widetilde{f}) = \widehat{I}\widetilde{f} = {}^\circ I^* f = I_0 f$$

•Veamos ahora que (L_X, J_X) es completo:

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente en L_X tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe, para todo $x \in X$ y además $\sup\{J_X f_n\}_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. Por la definición de $\widetilde{f_n}$ tenemos que $\{\widetilde{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente de funciones en $\widehat{L}_1$ y además $\sup\{\widehat{J}\widetilde{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}} < \infty$ □

Ejemplo 3.6. Considerando I_0 la funcional lineal positiva dada por la integración de Riemann en el sentido usual, entonces $\mathscr{M}_X$ es llamado la clase de conjuntos Lebesgue medibles y μ_X es llamado la medida de Lebesgue. De este modo, escribimos

$$\int f d\mu_X = \int f dx.$$

Observación 3.18.

- Sea $\mathscr{K}$ la colección de subconjuntos de X que son compactos en X. Un conjunto $K \subset X$, se dice *compacto* en X si y solo si K es compacto en $\mathbb{R}^n$.
- Sea $\mathscr{T}$ la colección de subconjuntos de X que son abiertos en X. Un conjunto $V \subset X \subset \mathbb{R}^n$ se dice *abierto* en X si $V = X \cap W$, para algún abierto $W \subset \mathbb{R}^n$.
- Ponemos $K \prec f$ si $K \in \mathscr{K}, f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1$ y $f(x) = 1$, para todo $x \in K$.
- Ponemos $f \prec V$ si $V \in \mathscr{T}, f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1$ y $sop(f) \subset V$.
- La notación $K \prec f \prec V$ quiere decir $K \prec f$ y $f \prec V$.

Definición 3.24. Sea μ una medida sobe un σ-álgebra $\mathscr{M} \supset \mathscr{K} \cup \mathscr{T}$ de subconjuntos de un espacio métrico.

a) Diremos que μ es *regular interior*, si

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathscr{K}\}, A \in \mathscr{M}.$$

b) Diremos que μ es *regular exterior*, si

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(V) : A \subset V, V \in \mathscr{T}\}, A \in \mathscr{M}.$$

c) Diremos que μ es *regular* si μ es regular interior y regular exterior a la vez.

Lema 3.2. Supongamos que $K \in \mathscr{K}, V \in \mathscr{T}$ y $K \subset V$. Entonces existe una función $f \in C_c(X)$ tal que $K \prec f \prec V$.

Prueba. Sea U un conjunto abierto con clausura compacta $\bar{U}$ tal que $K \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq Y$ Definamos $f, f : X \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \frac{\rho(x, U')}{[\rho(x, U') + \rho(x, K)]}$$

donde $\rho(x, A) = \text{ínf}\{|y - x|; y \in A\}$, $|\cdot|$ es la norma en X.
$\rho(x, A)$ es la distancia de x a A, la cual es continua como función de x y además $\rho(x, A) = 0$, si $x \in \bar{A}$.

Luego tenemos que $f \in C_C(X)$ y $K < f < V$ □

Proposición 3.13. Si $V \in \mathscr{T}$ entonces $V \in \mathscr{M}_X$ y

$$\mu_X(V) = \sup\{I_0(f) : f \prec V\}.$$

Prueba. Sea $A \in \widehat{\mathscr{L}}$ y $\varepsilon > 0$ dados
Como $A \in \widehat{\mathscr{L}} \Rightarrow \chi_A \in \widehat{L}^+ \subset \widehat{L}$. Por el teorema 3.3
existen $\psi_1, \psi_2 \in L$ con $0 \leq \psi_1 \leq \chi_A \leq \psi_2 \leq 1$ y $I(\psi_2 - \psi_1) < \frac{\varepsilon}{3}$
Recordando que estamos trabajando con estructuras Stonianas, al ser L Stoniano se obtiene que $\psi_2 \leq 1$.
Definamos el conjunto

$$\mathscr{K}_0 = \{K \in \mathscr{K} / K \subset V\}.$$

Para cada $K \in \mathscr{K}_0$, sea:

$$\alpha_k = \text{ínf}\{{}^\circ I(\psi_1 \wedge {}^*f)/K < f\}$$

$$\beta_k = \text{ínf}\{{}^\circ I(\psi_2 \wedge {}^*f)/K < f\}$$

Consideremos además

$$\alpha = \sup\{\alpha_K : K \in \mathscr{K}_0\}, \quad \beta = \sup\{\beta_K : K \in \mathscr{K}_0\}$$

Ahora, para cada $K \in \mathscr{K}_0, \beta_k - \alpha_k \leq \frac{\varepsilon}{3}$, por definición de ínfimo.

Luego, tenemos que $\beta - \alpha \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$

Nuevamente, por la definición de α, podemos elegir $f \in C_C(X)$, f standar con $f < V$ tal que $I(\psi_1 \wedge {}^*f) > \alpha - \frac{\varepsilon}{3}$. Por K-saturación, podemos escoger $K' \in {}^*\mathscr{K}_0$ y $\phi \in L$ tal que $K' \supset {}^*K$

para cada $K \in \mathscr{K}_0, 0 \leq \phi \leq 1, \phi|_{K'} \equiv 1$ y $I(\psi_2 \wedge \phi) < \beta + \frac{\varepsilon}{3}$

Luego,

$$\psi_1 \wedge {}^*f \leq \chi_A \wedge \chi_{\widetilde{V}} \leq \psi_2 \wedge \phi \quad \text{y} \quad I(\psi_2 \wedge \phi) - I(\psi_1 \wedge {}^*f) < \beta - \alpha + 2\frac{\varepsilon}{3} \leq 3.$$

De aquí $\chi_A \wedge \chi_{\widetilde{V}} \in \widehat{L}$, para cada $A \in \mathscr{L}$

Concluimos que $\widetilde{V} \in \widehat{\mathscr{M}}$ y $V \in \mathscr{M}_X$.

Asumamos que $\mu_X(V) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $A \in \widehat{\mathscr{L}}$

tal que

$$\widehat{J}(\chi_{\widetilde{V}}) \leq \widehat{\mu}(A \cap \widetilde{V}) + \varepsilon, \text{ pues } \widehat{J}_{\chi_{\widetilde{V}}} = \sup\{\widehat{J}(\chi_A \wedge \chi_{\widetilde{V}}) : A \in \widehat{\mathscr{L}}\}.$$

Con las funciones ψ_1 y f obtenido para este ε y A, tenemos:

$${}^\circ I(\psi_1 \wedge {}^*f) \leq \widehat{\mu}(A \cap \widetilde{V}) \leq {}^\circ I(\psi_1 \wedge {}^*f) + \varepsilon, \text{ por tanto}$$

$${}^\circ I(\psi_1 \wedge {}^*f) \leq \widehat{J}_{\chi_{\widetilde{V}}} = \mu_X(V) \leq {}^\circ I(\psi_1 \wedge {}^*f) + 2\varepsilon.$$

Además, por el teorema 3.5 tenemos que ${}^\circ({}^*f) = \widehat{f} \in \widehat{L}$

Además

$${}^\circ I(\psi_1 \wedge {}^*f) \leq {}^\circ I^* f = I_0 f = \widehat{J}\widetilde{f} \leq \widehat{J}_{\chi_{\widetilde{V}}} = \mu_X(V) \text{ pues } \widetilde{f} \leq \chi_{\widetilde{V}}$$

Concluimos que $\mu_X(V) = \sup\{I_0 f : f < V\}$. $\square$

Proposición 3.14. Si $K \in \mathscr{K}$, entonces $\widetilde{K} \in \widehat{\mathscr{L}}$, entonces $K \in \mathscr{M}_X$ y

$$\mu_X(K) = \text{ínf}\{I_0(f) : K \prec f\}.$$

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Corolario. Si $K \in \mathscr{K}$ entonces

$$\mu_X(K) = \text{ínf}\{\mu_X(V) : V \in \mathscr{T}, V \supset K\}.$$

Teorema 3.9 (Teorema de Representación de Riesz). Sea T una funcional lineal positiva sobre $C_c(X)$. Entonces existe un σ-álgebra $\mathscr{M}_X$ sobre X que contiene todos los subconjuntos abiertos y compactos de X. Existe además una única medida regular μ_X sobre $\mathscr{M}_X$ tal que:

$$T(f) = \int f d\mu_X, \text{ para todo } f \in C_c(X).$$

Prueba.

La medida μ_X es regular debido al Teorema 3.12

Falta ver la unicidad y completitud de μ_X.

•UNICIDAD

Sea μ otra medida regular cualquiera sobre $\mathscr{M}_X$ tal que:

$$Tf = \int f d\mu, \text{ para todo } f \in C_C(X).$$

Basta probar, por regularidad que:

$$\mu(K) = \mu_X(K) \text{ para todo } K \in \mathscr{K}.$$

En efecto: Sea $K \in \mathscr{K}$, $\varepsilon > 0$ fijo. Como μ es regular existe $V \supseteq K, V$ abierto con $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$

Consideremos f tal que $K \prec f \prec V$, entonces:

$$\mu(K) + \varepsilon > \mu(V) = \int \chi_V d\mu \geq \int f d\mu = T(f) = \int f d\mu_X \geq \mu_X(K).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tenemos que $\mu_X(K) \leq \mu(K)$.

Análogamente, podemos obtener $\mu(K) \leq \mu_X(K)$

Por tanto, μ_X es única.

La completitud de μ_X se sigue de la completitud de $\widehat{\mu}$ que la hereda de μ en el proceso de estandarización $\square$

3.5. Teoremas básicos de convergencia

En esta sección nuestro objetivo es establecer resultados análogos al Teorema de Convergencia Monótona en los cuales trataremos con sucesiones de funciones integrables que no son necesariamente monótonas. Además consideramos las clases M y L_1 de funciones con valores en $\bar{\mathbb{R}}$ medibles e integrables sobre un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$. También las integrales de funciones f en M y L_1.

Definición 3.25. Una proposición $P(x)$, que depende de $x, x \in X$, se cumple μ-casi en todas partes (c.t.p.), si existe un conjunto E de medida cero tal que $P(x)$ es verdad, para todo $x \in E^c$.

Ejemplo 3.7.

1. Una función f es acotada c.t.p. si existe una constante $B > 0$ tal que

$$\mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0.$$

2. Decimos que $f = g$ c.t.p. si existe un conjunto $A \subset X$, con $\mu(A) = 0$ y $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset A$.

Teorema 3.10. *a*) Si $f \in M$ y $f = 0$ c.t.p., entonces $\int f d\mu = 0$.

b) Si $f \in M^+$ y $\int f d\mu = 0$, entonces $f = 0$ c.t.p.

Prueba. Definamos $E = \{x / f(x) \neq 0\}$. Entonces $E \in \mathscr{M}$

a) Supongamos primero que $f \in M^+$ y que $\mu(E) = 0$. Poniendo $v_n = n\chi_E$ tenemos $v_n \in M^+$. Además tenemos que:

$$\int v_n d\mu = n\mu(E) = 0$$

como $\{v_n\}$ converge, sea $h = \lim v_n$, se sigue del

teorema 3.6 que $h \in M^+$ y $\int hd\mu = \sup\{\int v_n d\mu : n \in \mathbb{N}\} = 0$

Como $f = 0$ c.t.p., tenemos que $f \leq h$

luego

$$0 \leq \int fd\mu \leq \int hd\mu = 0. \text{ Por tanto } \int fd\mu = 0.$$

Para el caso general $f \in M, f = f^+ - f^-$. Si $f = 0$ c.t.p. entonces f^+ y f^- son ceros ambas c.t.p.

Finalmente

$$\int fd\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = 0 - 0 = 0$$

Por tanto $\int fd\mu = 0$

b) Definamos, para cada $n \in \mathscr{N}$, los conjuntos $E_n = \{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$.

E_n es medible ($E \in \mathscr{M}$)

Definamos $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. E es medible.

Como $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$, tenemos $0 = \int fd\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$

Por tanto: $\mu(E_n) = 0$

Luego $\mu(E) = \mu(\bigcup E_n) = \sum \mu(E_n) = \sum 0 = 0$

Por tanto $\mu(E) = 0$

□

Corolario. Si $f, g \in M$ y $f = g$ c.t.p., entonces $\int fd\mu = \int gd\mu$

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Teorema 3.11. Si $f \in M$ y $\int |f|d\mu < \infty$, entonces f es finito c.t.p.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Teorema 3.12 (Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue).

Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M, g \in M$. Si $f_n \geq g$ c.t.p. donde $\int g d\mu > -\infty$, y $f_n \leq f_{n+1}$ c.t.p. $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces f_n converge c.t.p. a una función $f \in M$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Prueba. luego, por el Teorema de convergencia monótona

existe $\lim \bar{f}_n = \bar{f}$, donde $\bar{f}_n(x) = f_n - g$

luego $\lim f_n - \lim g = \bar{f}$

$\lim f_n - G = \bar{f}$

Entonces $\lim f_n = \bar{f} + G$, haciendo $\bar{f} + G = f$

Tenemos que $\lim f_n = f$

Además también tenemos: $\lim \int f_n = \int f$. □

Lema 3.3 (Lema de Fatou). Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Prueba. Definamos la sucesión

$$\begin{aligned} g_n &= \inf f_i \ (i \geq n) \\ &= \inf\{f_i\}_{i\geq n} \end{aligned}$$

Luego g_n es medible, $g_n \in M^+$

Además, se tiene que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que converge a

$$\liminf f_n$$

Ahora, si $n \leq m$, entonces $g_n \leq f_m$

$$\text{integrando} \int g_n d\mu \leq \int f_m d\mu$$

De aquí

$$\int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Por tanto

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \text{ (Por el TCM)}$$

$$\therefore \int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

$\square$

Teorema 3.13 (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue). Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles que converge c.t.p. a una función medible f. Si existe una función no negativa $g \in L_1$ tal que $|f_n| \leq g$ c.t.p., para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$f \in L_1 \text{ y } \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Prueba. Fijemos un conjunto $E \in \mathscr{M}$ con $\mu(E) = 0$, tal que $\{f_n\}$ converge a f excepto posiblemente en el conjunto E y $|f_n| \leq g$ excepto posiblemente sobre el conjunto E. Definamos

$$\widetilde{f}_n = f_n \chi_{X-R} \quad , \quad \widetilde{f} = f\chi_{X-E} \text{ y } \widetilde{g} = g\chi_{X-E}.$$

Luego, la sucesión $\{\widetilde{f}_n\}$ de funciones medibles converge c.t.p. a $\widetilde{f}$,
además $|\widetilde{f}_n| \leq \widetilde{g}$ sobre X y finalmente $\int \widetilde{f} d\mu = \int f d\mu$, $\int \widetilde{f}_n d\mu = \int f_n d\mu$ por el corolario del teorema 3.10.

Como $|\widetilde{f}_n| \leq \widetilde{g}$, entonces tomando límite tenemos que:

$$\lim |\widetilde{f}_n| = |\lim \widetilde{f}_n| = |\widetilde{f}| \leq \widetilde{g}$$

Luego, tenemos también que $\widetilde{f} \in M, \widetilde{f} \in L_1$, así como cada $f_n, n \in \mathbb{N}$.
Ahora como $|\widetilde{f}_n| \leq \widetilde{g}$, tenemos que $\widetilde{g} + \widetilde{f} \geq 0$. De este modo, aplicando el teorema de Fatou, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \widetilde{g} d\mu + \int \widetilde{f} d\mu = \int (\widetilde{g} + \widetilde{f}) d\mu &\leq \liminf \int (\widetilde{g} + \widetilde{f}_n) d\mu \\
&= \liminf [\int \widetilde{g} d\mu + \int \widetilde{f}_n d\mu] \\
&= \int \widetilde{g} d\mu + \liminf \int \widetilde{f}_n d\mu
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \widetilde{f} d\mu \leq \liminf \int \widetilde{f}_d\mu$$

Similarmente, aplicando el teorema de Fatou a $\widetilde{g} - \widetilde{f}_n \geq 0$

$$\int \widetilde{g}d\mu - \int \widetilde{f}d\mu = \int (\widetilde{g} - \widetilde{f})d\mu \leq \liminf \int (\widetilde{g} - \widetilde{f}_n)d\mu = \int \widetilde{g}d\mu - \limsup \int \widetilde{f}_n d\mu$$

Luego, tenemos que

$$\int \widetilde{f}d\mu \leq \liminf \int \widetilde{f}_n d\mu \leq \limsup \int \widetilde{f}d\mu \leq \int \widetilde{f}d\mu$$

$$\therefore \lim \int \widetilde{f}_n d\mu = \int \widetilde{f}d\mu$$

□

A continuación veamos algunas propiedades de convergencia.

Definición 3.26. Una sucesión $\{f_n\}$ converge *casi uniformemente*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E \in \mathscr{M}$, con $\mu(E) < \varepsilon$ tla que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre E^c.

Teorema 3.14 (Teorema de Egoroff). Si $\mu(x)$ es finito y $\{f_n\}$ converge c.t.p. a f sobre X entonces $\{f_n\}$ converge casi uniformemente a f.

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Otro tipo de convergencia que es importante en teoría de la probabilidad, es la de convergencia en medida.

Definición 3.27.

- Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones con valores en $\mathbb{R}$ medibles sobre X *converge en medida* a una función f con valores reales si:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ se tiene } \lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

- Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones es de *Cauchy en medida* si:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ se tiene } \lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Observación 3.19. Si $\{f_n\}$ es convergente en medida a una función f, entonces $\{f_n\}$ es de Cauchy en medida.

El siguiente resultado muestra que la convergencia casi uniforme es más fuerte que la convergencia c.t.p. y la convergencia en medida.

Teorema 3.15. Si una sucesión $\{f_n\}$ converge a f casi uniformemente entonces dicha sucesión converge c.t.p. y converge en medida.

Prueba.

Veamos que f_n converge casi uniformemente

Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi uniformemente a f sobre F_k donde $\mu(F_k') < \frac{1}{k}$. Luego (f_n) converge sobre F, donde $F = \bigcup F_k (1 \leq k < \infty)$ y

$$\mu(F') \leq \mu(F_k') < \frac{1}{k}, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}$$

Por tanto $\mu(F') = 0$

De este modo (f_n) converge c.t.p. a f

Veamos que (f_n) converge en medida

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Elijamos $k \in \mathbb{N}/\frac{1}{k} < \varepsilon$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre F_k, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{x/|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq F_k'$

$$\text{para todo } n \geq m = m(k)$$

Luego $\mu\{x/|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \frac{1}{k} < \varepsilon$, para todo $n \geq m$.

Dado que ε fue arbitrario, tenemos $\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x/|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0$

Por lo tanto: (f_n) converge en medida a f. □

Teorema 3.16. Si $\{f_n\}$ converge en medida a f, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge casi uniformemente y por tanto converge c.t.p. a f.

Prueba.

Dado $k \in \mathbb{N}$, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a f podemos encontrar n_k tal que

$\mu\big(\{x/|f_n(x)-f(x)|\geq 2^{-k}\}\big) < 2^{-k}$, para todo $n \geq n_k$
considerando $n_{k+1} > n_k$, sea $E_k = \{x/|f_{n_k}(x)-f(x)| \geq 2^{-k}\}$
Dado $\varepsilon > 0$, podemos escoger $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{m+1} < \varepsilon$. Si $x \notin \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k = A$
entonces $|f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}$, para $k \geq m$
Por tanto $f_{n_k}(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ sobre A'.
Pero $\mu(A) = \mu\big(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_k\big) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-m+1} < \varepsilon$.

$$\text{Entonces} : \mu(A) < \varepsilon,\ \forall\, \varepsilon > 0$$

Por lo tanto (f_{n_k}) converge casi uniformemente a f. □

3.6. El Teorema de Fubini

En esta sección, nuestro objetivo es establecer la versión no estándar de un conocido resultado en la integración de Riemann denominado Teorema de Fubini, el cual nos dice que en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, si $f(x,y)$ es una función continua sobre el conjunto $[a,b]\times[c,d]$ en $\mathbb{R}^2$, entonces se tiene:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

La versión no estándar del Teorema de Fubini será aplicada sobre estructuras de integración en espacio Euclidianos.

Observación 3.20. Trataremos con estructuras de integración (internas o estándar) sobre espacios producto $U\times V$ (interno o estándar). Estas estructuras serán denotadas por $(L_{U\times V}, I_{U\times V})$. También consideramos dadas las estructuras de integración (L_U, I_U) y (L_V, I_V) sobre U y V respectivamente.

Observación 3.21. Dada una función $f \in L_{U\times V}$, se puede tener que $f(u,\cdot) \in L_V$ para algún $u \in U$ (fijo pero arbitrario). En este caso $I_V(f)$ es una función de u.

Si $g = I_V(f) \in L_U$, denotamos la integral $I_U(g)$ mediante:

$$I_U g = I_U I_V(f)$$

Definición 3.28.

- Sean (L_U, I_U), (L_V, I_V) y (L_W, I_W) estructuras de integración sobre U, V y $W = U \times V$ respectivamente. Si las estructuras de integración son estándar, diremos que una función $f \in L_W$ tiene la propiedad fuerte de *Fubini* con respecto a I_U, I_V y I_W si:

  i) $f(u, \cdot) \in L_V$, para todo $u \in U$ y $f(\cdot, v) \in L_U$, para todo $v \in V$,

  ii) $I_V f \in L_U, I_U f \in L_V$,

  iii) $I_W f = I_U I_V f = I_V I_U f$.

- Si reemplazamos en (i) "para todo" por casi todo punto (c.t.p.) y (ii) y (iii) son válidas si $I_U(f)$ y $I_V(f)$ son iguales a cero donde no está definida, entonces decimos que f tiene la *propiedad de Fubini*.

- Si las estructuras de integración son internas y además las condiciones (i),(ii) y (iii) se cumplen sin excepción, decimos que f tiene la *propiedad fuerte interna de Fubini*.

Lema 3.4. Sean (L_U, I_U), (L_V, I_V) y (L_W, I_W) con $W = U \times V$ estructuras de integración completa reales sobre U, V y W respectivamente. Supongamos que cada función $f_n \in L_W$ en la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la propiedad de Fubini con respecto a I_U, I_V y I_W donde $\{f_n\}$ es una sucesión monótona creciente que converge a una función f con valores reales. Además supongamos que $\sup\{I_W f_n\}_{n \in \mathbb{N}} < \infty$. Entonces f tiene la propiedad de Fubini con respecto a I_U, I_V y I_W.

Prueba. Consecuencia directa de la definición 3.27. □

A continuación estableceremos resultados análogos relativos a las estandarizaciones $(\widehat{L}_U, \widehat{I}_U)$, $(\widehat{L}_V, \widehat{I}_V)$ y $(\widehat{L}_W, \widehat{I}_W)$ de estructuras de integración internas (L_U, I_U), (L_V, I_V) y (L_W, I_W) sobre conjuntos internos U, V y $W = U \times V$ respectivamente en una extensión N_1-saturada.

Lema 3.5. Supongamos que ϕ es una función con valores finitos en L_W. Entonces $^\circ\phi$ tiene la propiedad fuerte de Fubini con respecto a $\widehat{I}_U, \widehat{I}_V$ y $\widehat{I}_W$.

Prueba. Desde que, por hipótesis, $\phi(u,\cdot) \in L_V$ para cada $u \in U$, podemos ver que $^\circ\phi(u,v) \in L_V$, por el teorema 1.16 (ver [5]) Similarmente, usando el teorema 1.16 (ver [5]) adecuadamente, tenemos que $\widehat{I}_V(^\circ\phi) = {}^\circ I_V\phi$ en L_U, $\widehat{I}_U(^\circ\phi) = {}^\circ I_U\phi$ en L_V y además $\widehat{I}_W(^\circ\phi) = {}^\circ I_W(\phi) = {}^\circ I_U I_V(\phi) = \widehat{I}_U{}^\circ I_V(\phi) = \widehat{I}_U\widehat{I}_V(^\circ\phi)$ Utilizando el mismo argumento con U y V invertido nos dá el resultado. □

Observación 3.22. Si h es una función con valores reales y no negativa, entonces h es una función nula con respecto a una estructura de integración (L, I) si u sólo si $h \in \widehat{L}$ y $\widehat{I}(h) = 0$.

Lema 3.6. Supongamos que h es una función nula acotada con valores reales sobre W. Entonces h tiene la propiedad de Fubini con respecto a $\widehat{I}_U, \widehat{I}_V$ y $\widehat{I}_W$

Prueba. Ver [5, Cap. 4]. □

Teorema 3.17 (Teorema No Estándar de Fubini). Sean $(L_U, I_U), (L_V, I_V)$ y (L_W, I_W) estructuras de integración internas sobre los conjuntos internos U, V y $W = U \times V$, respectivamente, con $1 \in L_W$ y $^\circ I_W 1 < \infty$. Asumiendo que toda función ϕ con valores finitos en L_W tiene la propiedad fuerte interna de Fubini con respecto a I_U, I_V y I_W. Entonces cualquier $f \in \widehat{M_W}$ con $\widehat{J}_W|f| < \infty$ tiene la propiedad de Fubini con respecto a $\widehat{I}_U, \widehat{I}_V$ y $\widehat{I}_W$.

Teorema no estándar de Fubini. Usando el hecho que la propiedad fuerte de Fubini es preservada bajo sumas y escribiendo la función f como $f = f^+ - f^-$, podemos asumir que f es positiva. Además, podemos asumir que f sea acotada (estableciendo primero el resultado para $f \wedge n$ y usando el lema 3.4 para el paso al límite).
Supongamos entonces que $f \in \widehat{L}_W$ es una función acotada y no negativa. Entonces f tiene una descomposición $f = \phi + h$ con $\phi \in L_W$ acotada y h una función nula y acotada. Así $f = {}^\circ\phi + (\phi - {}^\circ\phi + h)$ y puesto que la función nula $(\phi + {}^\circ\phi + h)$ es real valorada, el teorema se obtiene de los lemas 3.5 y 3.6. □

Capítulo 4

Procesos estocásticos desde el punto de vista no estándar y algunas de sus aplicaciones

En este capítulo presentaremos algunas aplicaciones de las estructuras de integración no estándar y su teoría de la medida en teoría de la probabilidad, en particular a procesos estocásticos. La idea fundamental es extender los conceptos de teoría de la probabilidad elemental sobre espacios muestrales finitos a situaciones en que el espacio muestral es un conjunto $*$-finito en alguna extensión. Asimismo terminaremos presentando algunas aplicaciones del análisis no estándar y en particular el espacio de Loeb en teoría de la probabilidad enfocándonos en los tópicos de integración estocástica.

4.1. Nociones preliminares sobre teoría de la probabilidad

Comenzamos dando nociones básicas de teoría de la probabilidad que fue desarrollada para proveer un fundamento matemático al estudio de problemas donde los resultados de ciertos experimentos o mediciones no pueden ser determinadas con certeza.

En general, un modelo abstracto para problemas en probabilidad se construye de la siguiente manera:

i) Construimos un espacio Ω, llamado *espacio muestral* cuyos puntos consisten de todos los resultados del experimento.

ii) Los eventos a los cuales queremos asignar una probabilidad son subconjuntos de Ω.

Requerimos que el conjunto de eventos sea cerrado bajo complementos y uniones contables, es decir sea un σ-álgebra $\mathscr{E}$.

iii) La probabilidad de un evento A es un número $P(A)$ tal que $0 \leq P(A) \leq 1$. Dado que $\mathscr{E}$ es un σ-álgebra, podemos hacer que P sea una medida sobre $\mathscr{E}$. En particular

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n);$$

para eventos A_n disjuntos.

Definición 4.1.

- Un *espacio de probabilidad* es un espacio medible $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ donde P es una medida sobre $(\Omega, \mathscr{E})$ que satisace $P(\Omega) = 1$.
- El σ-álgebra $\mathscr{E}$ es llamado la colección de eventos y P es la medida probabilidad.

El modelo de equiprobabilidad

Cuando el espacio Ω es finito y $\mathscr{E}$ es el conjunto de todos los subconjuntos de Ω entonces P está completamente determinado por sus valores sobre los elemenos de Ω.

Cuando todos los puntos de Ω tienen igual probabilidad, tenemos que

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

donde $|\cdot|$ representa el número de elementos de dicho conjunto.

Observación 4.1. En los ejemplos que siguen, los modelos no estándar serán análogos hiperfinitos del modelo de equiprobabilidad. Siguiendo una convención usual para teoría de la probabilidad, usaremos w para denotar elementos de Ω

Definición 4.2.

- Una variable aleatoria es una función X medible con valores reales sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{E}, P)$.
- El *valor esperado* $E(X)$ de X es:

$$E(X) = \int X dP,$$

  cuando la integral está definida.
- Una distribución P_X, es una medida probabilidad definido sobre la colección $\mathscr{M}$ de subconjuntos Borel-medibles de $\mathbb{R}$, por la fórmula:

$$P_X(A) = P\Big(\{w \in \Omega : X(w) \in A\}\Big), A \in \mathscr{M}.$$

- Una *función distribución* de X, es una función definida como:

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]).$$

Observación 4.2. Cuando X toma sólo una cantidad finita de valores $\{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces P_X está completamente determinado por los valores

$$P_X(a_i) = P\Big(\{w \in \Omega : X(w) = a_i\}\Big), i = 1, \ldots, n$$

Definición 4.3 (Proceso estocástico). Un *proceso estocástico* es una familia $\{X_t, t \in I\}$ de variables aleatorias, todas definidas sobre un espacio común de probabilidad $(\Omega, \mathscr{E}, P)$. I es llamado el conjunto parámetro.

Definición 4.4. Una colección $X_1, \ldots, X_n$ de variables aleatorias es *independiente*, si para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se tiene:

$$P\Big(\{w \in \Omega : X_1(w) \leq x_1, \ldots, X_n(w) \leq x_n\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P\Big(\{w \in \Omega : X_i(w) \leq x_i\}\Big).$$

Si las variables aleatorias X_i tiene valores enteros, podemos reemplazar las desigualdades $\leq$ por igualdad.

Una práctica común es definir un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in I}$ mediante propiedades que involucran las funciones de distribución de ciertas combinaciones de X_t, como por ejemplo, los incrementos $X_t - X_s$. Los proceso de Poisson y el movimiento Browniano son aquellos en los cuales los incrementos sobre un número finito de intervalos disjuntos son independientes.

Definición 4.5. La probabilidad condicional del evento A dado el evento B es dado por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ si } P(B) \neq 0.$$

4.2. Ejemplos de procesos estocásticos

4.2.1. Proceso de Poisson

El proceso de Poisson es un proceso el cual intenta modelar situaciones en donde ocurren eventos aislados aleatoriamente en el tiempo. Consideremos por ejemplo un experimento en el cual registramos el tiempo $t \geq 0$ de llegada de cada llamada telefónica a una oficina. Podemos definir un conjunto $\{\widetilde{N}(w,t) : t \in [0; +\infty\rangle\}$ de variables aleatorias donde $w \in (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{E}}, \widetilde{P})$ (espacio de probabilidad aún no especificado).

Además w debería representar una selección particular del conjunto de maneras en las que las llamadas que ingresan. Para w fijo pero arbitrario, $\widetilde{N}(w,t)$ es igual al número de llamadas entrantes en el intervalo de tiempo $[0,t]$. Entonces, para $s < t$, $\widetilde{N}(w,t) - \widetilde{N}(w,s)$ es igual al número de llamadas en el intervalo $\langle s,t]$. En muchos caso, se tiene que $\widetilde{N}(w,t)$ posee las siguientes propiedades:

i) Para cada w, $\widetilde{N}(w,t) \geq 0$, $\widetilde{N}(w,0) = 0$ y $\widetilde{N}(w,t)$ toma valores enteros.

ii) Si $s < t$ y $w \in \widetilde{\Omega}$ entonces $\widetilde{N}(w,s) \leq \widetilde{N}(w,t)$ y $\widetilde{N}(w,t)$ es continua por la derecha.

iii) Para cada $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}$, las variables aleatorias: $\widetilde{N}(\cdot,t_2) - \widetilde{N}(\cdot,t_1), \ldots, \widetilde{N}(\cdot,t_n) - \widetilde{N}(\cdot,t_{n-1})$ son independientes.

iv) $\widetilde{P}(\{w : \widetilde{N}(w,s+t) - \widetilde{N}(w,s) = k\}) = e^{-\lambda t}\left(\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$

Observación 4.3.

1. La condición *iii)* nos dice que lo que sucede en un intervalo de tiempo no es afectado por lo que sucede en otro intervalo de tiempo disjunto.

2. La condición *iv)* dice que la probabilidad de que ocurran n llamadas en el intervalo $\langle s, s+t\rangle$ es independiente de S y depende sólo de la longitud t del intervalo y el parámetro λ en la manera indicada. Llamamos a λ la velocidad o ritmo del proceso.

4.2.2. Movimiento Browniano

El movimiento Browniano es un proceso estocástico el cual pretende modelar el comportamiento de una partícula, por ejemplo, un grano de polen suspendido en agua. La partícula esta sujeta a una turbulencia (por ejemplo colisiones con las moléculas del agua) que causan que su posición cambie con el tiempo. Por simplicidad, consideremos el caso unidimensional y denotemos la posición aleatoria de la partícula sobre la recta real en tiempo $t \geq 0$, por $X(t)$.

Por simplicidad, seguimos a la partícula sólo para un intervalo de tiempo unitario. Entonces $\{X_t : t \in [0,1]\}$ será un proceso estocástico sobre un espacio de probabilidad aún no especificado $(\Omega, \mathscr{E}, P)$.

Un movimiento Browniano (estándar) $\{X_t : t \in [0,1]\}$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

i) $X_0 = 0$

ii) Si $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots\cdots s_n < t_n$ pertenecen a $[0,1]$ entonces las variables aleatorias $X(t_1) - X(s_1), X(t_2) - X(s_2), \ldots, X(t_n) - X(s_n)$ son variables aleatorias independientes, las cuales denotamos por $X_{t_1} - X_{s_1}, X_{t_2} - X_{s_2}, \ldots$ etc.

iii) Si $t > s$ pertenecientes a $[0,1]$, entonces

$$P(\{w \in \Omega : X_t(w) - X_t(w) \leq \alpha\}) = \psi(\alpha/\sqrt{t-s}),$$

donde

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Observación 4.4.

- La condición *i*) ubica la partícula en el origen en $t = 0$.
- La condición *ii*) nos dice que la probabilidad de un cambio en la posición de la partícula en cualquier intervalo de tiempo $\langle s_i, t_i]$ no es afectado por los cambios en posición en otros intervalos disjuntos.
- La condición *iii*) indica cuan cercana la posición de la partícula en el tiempo t puede ser determinada si su posición en el tiempo s es conocida. La función de distribución de probabilidad $\psi(x)$ es conocida como la distribución normal con media 0 y varianza 1. Podemos notar que

$$\psi(\frac{x}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2\sigma^2}} du,$$

que es la distribución normal con media 0 y varianza σ^2.

Un movimiento Browniano puede ser definido como sigue: Fijamos $n = \zeta!$ un factorial infinito en $^*\mathbb{N}$; y sea $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ el espacio interno para el lanzamiento de moneda infinito (con Ω siendo todas las sucesiones $w = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$, y $w_i = +1$ ó -1) construido a partir de la estructura de integración interna (L, I). Sea $(\Omega, \widetilde{\mathscr{E}}, \widetilde{P})$ la estandarización correspondiente de $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ construida de (L, I). Denotemos por $X(t, \cdot)$ la variable aleatoria interna (función en L) definida como:

$$X(t, w) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i(w), \quad t \in {}^*[0, 1],$$

donde $X_i(w) = w_i$. Aquí $[nt]$ denota el mayor elemento de $^*\mathbb{N}$ menor o igual a nt.

Así, para cualquier $w = \langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$ la partícula ubicada por $X(t, w)$ comienza en el origen en $t = 0$ (i.e. $X(0, w) = 0$), y en cualquier tiempo $t_i = \frac{i}{n}(i = 1, 2, \ldots, n)$ la partícula se mueve a la derecha o izquierda una distancia $\frac{1}{\sqrt{n}}$, dependiendo de si w_i es $+1$ o -1; en los tiempos entre los t_i la partícula permanece fija. El movimiento resultante es un análogo interno de un camino aleatorio simétrico (estándar).

Definimos ahora $\beta(t, w) =^\circ X(t, w)$ para $t \in [0, 1]$ y $w \in \Omega$. Mostraremos que $\beta(t, \cdot)$ es un movimiento Browniano sobre $(\Omega, \widehat{\mathscr{E}}, \widehat{P})$.

Definición 4.6.

- Una variable aleatoria interna sobre $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ es una función $X \in L$.
- Una colección $\{X_i : i \in I\}$ de variables aleatorias internas es $*$-independiente si para toda $*$-finita subcolección interna $\{X_1, \ldots, X_m\}(m \in {}^*\mathbb{N})$ y cada m-upla interna $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in {}^*\mathbb{R}$, tenemos:

$$P(\{w \in \Omega : X_1(w) < \alpha_1, \ldots, X_m(w) < \alpha_m\}) = \prod_{k=1}^{m} P(\{w \in \Omega : X_k(w) < \alpha_k\}) \tag{4.1}$$

- $\{X_i : i \in I\}$ es S-independiente si para toda subcolección finita $\{X_1, \ldots, X_m\}(m \in \mathbb{N})$ y cada m-upla $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in \mathbb{R}^m$, (4.1) es válido con $=$ reemplazado por $\simeq$

Lema 4.1. Supongamos que $\{X_i : i \in I\}$ es S-independiente. Luego $\{{}^\circ X_i : i \in I\}$ es una colección independiente de variables aleatorias sobre $(\Omega, \widehat{\mathscr{E}}, \widehat{P})$.

Prueba. Supongamos que $m \in \mathbb{N}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\widehat{P}\Big(\{w :^\circ \mathscr{X}_{i1}(w) < \alpha_1, \ldots, {}^\circ X - im(w) < \alpha_m\}\Big). \\
&= \lim_{n\to\infty} {}^\circ P\Big(\{w : \mathscr{X}_{i1}(w) < \alpha_1 - \frac{1}{n}, \ldots, X_{im} < \alpha_m - \frac{1}{n}\}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} {}^\circ\Big(\prod_{j=1}^{m} P\Big(\{w : X_{ij}(w) < \alpha_j - \frac{1}{n}\}\Big)\Big) \\
&= \prod_{j=1}^{m} \lim_{n\to\infty} {}^\circ P\Big(w : X_{ij}(w) < \alpha_j - \frac{1}{n}\Big) \\
&= \prod_{j=1}^{m} \widehat{P}\Big(\{w : {}^\circ X_{ij}(w) < \alpha_j\}\Big).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 4.1. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión interna de variables aleatorias $*$-independiente sobre $(\Omega, \mathscr{E}, P)$. Asumiendo que existe una función de distribución estándar tal que ${}^*F$ es la distribución de x_n, $E(x_n) = 0$ y $E(x_n^2 = 1)$ para cada $n \in {}^*\mathbb{N}$. Denotemos por ψ la distribución normal estándar. Entonces para cualquier $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ y cualquier $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$, se tiene:

$$P(\{w \in \Omega : \frac{1}{\sqrt{m}} \sum X_n(w) \leq \alpha\}) \simeq {}^*\psi(\alpha)$$

Prueba. Ver [2, teorema 21]. □

Teorema 4.2. Si $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$; entonces $\beta(t, \cdot)$ es un movimiento Browniano sobre $(\Omega, \widehat{\mathscr{E}}, \widehat{P})$.

Prueba.

i) Dado $t \in [0, 1]$, $\mathscr{X}(t, \cdot)$ es $\mathscr{E}$-medible, y de este modo también $\beta(t, \cdot)$ es $\widehat{\mathscr{E}}$-medible, por [5, proposición 2.31]

ii) Por el principio de transferencia del caso del lanzamiento de monedas finito, vemos que los $\mathscr{X}_i$ tienen distribuciones idénticas. Además si $S_K = \sum_{i=1}^{K} X_i$ para cualquier $K \in {}^*\mathbb{N}$, entonces los S_K tienen incrementos (Por la transferencia del ejercicio (1)(ver [5, cap 4]))

Así, si $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \ldots \leq s_n < t_n$ son puntos en $[0, 1]$, entonces $\{\mathscr{X}(t_1, \cdot) - \mathscr{X}(s_1, \cdot), \ldots, \mathscr{X}(t_n, \cdot) - \mathscr{X}(s_n, \cdot)\}$ son $*$-independientes, y por tanto s-independientes y la condición (ii) de movimiento Browniano se obtiene, por el lema 4.1

iii) Dado $s < t$ en $[0, 1], \lambda = [nt] - [ns]$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego

$$
\begin{aligned}
&\widehat{P}\Big(\{w \in \Omega : \beta(t, w) - \beta(s, w) \leq \alpha\}\Big) \\
&= \widehat{P}\Big(\{w : {}^\circ\mathscr{X}(t, w) - {}^\circ\mathscr{X}(s, w) \leq \alpha\}\Big) \\
&= \widehat{P}\Big(\{w : {}^\circ\Big(\sum_{K=[n,s]}^{[nt]} \frac{w_K}{\sqrt{n}}\Big) \leq \alpha\}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \widehat{P}\Big(\{w : \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{K \quad [ns]}^{[nt]} w_K \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda}}\Big(\alpha + \frac{1}{n}\Big)\}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} {}^\circ({}^*\psi)\Big(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\Big(\alpha + \frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad \text{(Por el teorema 4.1)} \\
&\lim_{n\to\infty} \psi\Big({}^\circ\Big(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\Big(\alpha + \frac{1}{n}\Big)\Big)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \psi\Big[\frac{\alpha + \frac{1}{n}}{\sqrt{t-s}}\Big] = \psi\Big[\frac{\alpha}{\sqrt{t-s}}\Big]
\end{aligned}
$$

Esto establece la condición (iii) de movimiento Browniano.

□

4.3. Aplicaciones del análisis no estándar a los procesos estocásticos

De manera preliminar, estudiaremos el movimiento Browniano y una descripción del espacio de Loeb. Luego daremos una construcción no estándar de la integral de Itô. Finalmente presentaremos unos teoremas de existencia para las ecuaciones de Itô.

Desarrollaremos nuestro trabajo en una extensión w_1-saturada de una superestructura conteniendo los números reales. $(\Omega, L(A), L(v))$ denota el espacio de Loeb construido a partir de un espacio de medida interna (Ω, A, v). Esto es $^\circ v$ se extiende a una única medida σ-aditiva sobre $\sigma(A)$, el σ-álgebra estándar generado por A y $(\Omega, L(A), L(v))$ denota el completamiento del espacio de medida resultante. Además usaremos el siguiente Teorema de Fubini:

Teorema 4.3. Si $(\Omega_i, A_i, v_i) i = 1, 2$ son espacios de medida interna finita, $(^\circ v_i(\Omega_i) < \infty)$, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ es acotada y $L(A_1 \times A_2)$-medible. Entonces

i) $w_2 \to f(w_1, w_2)$ es $L(A_2)$-medible para $L(v_1)$ a.a.w_1,

ii) $w_1 \to \displaystyle\int f(w_1, w_2) dL(v_2)$ es $L(A_1)$-medible

iii) $\displaystyle\iint f(w_1, w_2) dL(v_1 \times v_2) = \int \Big(\int f(w_1, w_2) dL(v_2) \Big) dL(v_1).$

Prueba. Ver [8]. □

4.3.1. Preliminares

Elijamos un elemento infinito $n \in {}^*\mathbb{N}$ y sea $T = \{\frac{i}{n} / i = 0, \ldots, n^2\}$. Escribiremos $\Delta t = \frac{1}{n}$. Nuestro espacio muestral es el *espacio producto* interno $\Omega = \{-1, 1\}^T$ el cual dotamos con el álgebra A de subconjuntos internos y la medida de probabilidad interna $\bar{P}$ asignando masa igual a $\frac{1}{2^{n^2+1}}$ a cada punto de Ω. El espacio de Loeb construido de

$\Omega, A, \bar{P}$ es denotado por (Ω, F, P). Los elementos de T son denotados por $\underline{s}, \underline{t}, \ldots$. Para cada $\underline{t} \in T$, $A_{\underline{t}}$ es el σ-álgebra generado por las aplicaciones coordenadas

$$w \to \underline{w} \text{ para } \underline{s} \leq \underline{t}.$$

Una familia no-decreciente de sub-σ-álgebras de F, es decir $\{F_t/t \in [0; +\infty)\}$ es definido por

$$F_t = \Big(\bigcap_{^\circ\underline{s} \geq t} \sigma(A_{\underline{s}}) \Big) \vee N,$$

donde N denota la clase de los conjuntos P-nulos en F.

Observación 4.5.

1. $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$.

2. Si $w = (w_{\underline{s}})_{\underline{s} \in T} \in \Omega$ entonces $\{w_{\underline{s}}/\underline{s} \in T\}$ son variables aleatorias independientes sobre (Ω, F, P), tomando los valores ± 1 con igual probabilidad.

El camino aleatorio infinitesimal de Anderson es definido mediante:

$$X(\underline{t}, w) = \sum_{0 < \underline{s} < \underline{t}} w_{\underline{s}} (\Delta t)^{1/2}$$

Deseamos usar el proceso interno X con valores en $^*\mathbb{R}$ para construir un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}$ sobre el espacio de Loeb (Ω, F, P). Para ello, consideremos el espacio $C(L, \mathbb{R}^n)$ de las funciones continuas con valores en $\mathbb{R}^n$ sobre $L(L \subset \mathbb{R}^k)$ desde un punto de vista no estándar. Consideramos $C(L, \mathbb{R}^n)$ la topología compacta-abierta (es decir, la topología de convergencia uniforme sobre compactos).

Definición 4.7. Sea Λ un subconjunto interno de $^*\mathbb{R}^k$. Una función $F : \Lambda \to {}^*\mathbb{R}^n$ es S-continua (sobre Λ) si y sólo si cuando $\lambda_1 \approx \lambda_2$ están en $ns(\Lambda)$, tenemos que

$$^\circ F(\lambda_1) = {}^\circ F(\lambda_2) \in \mathbb{R}^n.$$

Observación 4.6. Si F es S-continua sobre $\Lambda(\Lambda \subset {}^*\mathbb{R}^k)$, existe una única función continua $f : st(\Lambda) = \{^\circ\lambda/\lambda \in ns(\lambda) \to \mathbb{R}^n\}$ satisfaciendo:

$$f(^\circ\lambda) = {}^\circ F(\lambda)$$

para cada $\lambda \in ns(\Lambda)$. Escribimos $f = st(F)$.

Definición 4.8. Un proceso interno, $X : \Lambda \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}^n$ es S-continuo si y sólo si $X(\cdot, w)$ es S-continuo a.s. y en este caso podemos definir un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}^n$ con caminos continuos sobre $st(\Lambda), st(X)$, mediante:

$$st(X)(\lambda, w) = \begin{cases} st(X(\cdot, w)), & \text{si } X(\cdot, w) \text{ es } S\text{-continuo;} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 4.1. Si $L \subset \mathbb{R}^k$, entonces $F \in {}^*C(L, \mathbb{R}^n)$ es S-continuo si y sólo si F es near-standar en ${}^*C(L, \mathbb{R}^n)$ y en este caso, $st(F)$ es la parte estándar de F en $C(L, \mathbb{R}^n)$

Prueba. Ver [8]. □

Teorema 4.4. El camino aleatorio infinitesimal, X, es S-continuo. El proceso $B = st(X)$, es un movimiento Browniano continuo sobre (Ω, F, P, F_t). Esto es, para todo $s < t, B(t)$ es F_t-medible, $B(t) - B(s)$ es independiente de F_s y tiene una distribución con media cero y varianza $t - s$ y la aplicación $t \to B(t, w)$ es continua para cada w.

Prueba. Ver [7]. □

4.4. Integración de Itô

Para motivar la aproximación no estándar a la integración de Itô, primero recordemos una construcción no-estándar de la integral de Lebesgue debido a Anderson.

Denotemos por C el álgebra de subconjuntos internos de T y sea λ la medida interna sobre (T, C) asignando masa ΔT a cada elemento. Por un ligero abuso de notación escribimos $(ns(T), L(C), L(\lambda))$ para la "restricción" del espacio de Loeb $(T, L(C), L(\lambda))$ al subconjunto medible $ns(T)$.

Observación 4.7. Si B denota los subconjuntos Lebesgue-medibles de $[0, +\infty\rangle$ y m es la medida de Lebesgue, entonces:

$$^\circ : (ns(T), L(C), L(\lambda)) \to ([0, \infty\rangle, B, m)$$

es medible y preserva la medida.

Por lo tanto, si $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ es acotado y Lebesgue-medible entonces la aplicación $\underline{t} \to f(^\circ t)$ es $L(C)$-medible sobre $ns(T)$ y de aquí, por el Teorema Lifting de Loeb, existe una función interna acotada (de manera estándar) $F : T \to {}^*\mathbb{R}$ tal que $^\circ F(\underline{t}) = f(^\circ\underline{t}), L(\lambda)$-a.e. sobre $ns(T)$.

Para cada $\underline{t} \in ns(T)$, tenemos:

$$\begin{aligned} ^\circ\sum_{\underline{s}<\underline{t}} F(\underline{s})\Delta t &= {}^\circ\int I(\underline{s} < \underline{t}) F(\underline{s}) d\lambda \\ &= \int I(\underline{s} < \underline{t})^\circ F(\underline{s}) dL(\lambda) \\ &= \int I(^\circ\underline{s} \leq {}^\circ\underline{t}) f(^\circ\underline{s}) dL(\lambda) \\ &= \int_0^{^\circ\underline{t}} f(s) ds. \end{aligned}$$

De aquí, para construir $\int_0^t f ds$, primero encontramos un apropiado lifting F, de f y luego tomamos la parte estándar de una suma de Riemann interna. El mismo procedimiento puede ser usado para construir la integral de Itô.

La integral de Itô, $\int_0^t h(s,w)dB(s,w)$ es definido (de manera estándar) cuando $h \in I = \{h : [0, +\infty\rangle \times \Omega \to \mathbb{R}/h$ es medible, $h(s,\cdot)$esF_s $-$ medible para cada $s \geq 0$ y $\int_0^t h^2(s,w)ds < \infty$, para todo $t > 0, a.s\}$.

Notación

1. $\bar{I} = \{H : T \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}/H$ es interna, $H(\underline{t}, \cdot)$ es $A_{\underline{t}}$ $-$ medible para todo

$$\underline{t} \in T, H(\cdot, w)^2 I(\cdot < m)$$

es S-integrable sobre (T, C, λ) para cada $m \in \mathbb{N}$ y para a.a.s y además $\sup |H(\underline{t}, w)| \in {}^*\mathbb{R}\}$.

2. Si $H : T \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ es interna. Consideremos

$$\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w) dX(\underline{s}, w) = \sum_{\underline{s}<\underline{t}} H(\underline{s}, w) \Delta X(\underline{s}, w),$$

donde $\Delta X(\underline{s}, w) = X(\underline{s} + \Delta t, w) - X(\underline{s}, w)$ y además

$$\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w) d\lambda = \int I(\underline{s} < \underline{t}) H(\underline{s}, w) d\lambda = \sum_{\underline{s}<\underline{t}} H(\underline{s}, w) \Delta t.$$

Definición 4.9. Un proceso interno $H : T \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ (i.e. H es una función interna es un lifting de un proceso estocástico $h : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$) si

$$^\circ H(\underline{t}, w) = h(^\circ \underline{t}, w)$$

$L(\lambda \times \bar{P})$-a.s sobre $ns(T) \times \Omega$. Decimos que un proceso interno H, es A_t-adaptado si $H(\underline{t}, \cdot)$ es A_t-medible para cada $\underline{t} \in T$.

Proposición 4.2. Todo proceso en I tiene un lifting en $\bar{I}$.

Prueba. Todo proceso en I tiene un lifting en $\bar{I}$ Asumamos que $h \in I_N$. Entonces existe una sucesión de funciones, $\{h_n\}$, en I de la forma:

$$h_n(t, w) = \sum_{i=1}^{n} h_i^n(w) I_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(t), \quad 0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{N_n+1}^n \leq \infty \tag{2}$$

tal que $|h_n| \leq C_n$ ($C_n \in \mathbb{R}$),

$$P\Big(\Big(\int_0^n (h_m - h_n)^2(s, w) ds\Big)\Big) \geq 2^{-(n+1)}\Big) < 2^{-(n+1)} \tag{3}$$

y por lo tanto

$$P\Big(\Big(\int_0^n (h_n - h_m^2(s, w)) ds\Big) \geq 2^{-n}\Big) < 2^{-n},\ \forall m \geq n. \tag{4}$$

(La existencia de tal sucesión se sigue sin dificultad de Doob [3]).

Fijemos n, con $i \leq N_n$ y escojamos una sucesión, $\{\underline{S}_K/K \in \mathbb{N}\}$, en T tal que ${}^\circ\underline{S}_K$ decrece a T_i^n. Como h_i^n es a.s igual a la variable aleatoria medible $\sigma(A_{\underline{S}_K})$, podemos aplicar el teorema 9 de I.V.A de Loeb [7] para obtener una variable aleatoria interna medible-$A_{\underline{S}_K}$, digamos H_K tal que ${}^\circ H_K = h_i^n$ a.s y $|H_K| = C_n$. Por un argumento rutinario de saturación producimos una variable aleatoria interna H_i^n tal que

$$^\circ H_i^n = h_i^n \text{ a.s. }, |H_i^n| \leq C_n \text{ y}$$

H_i^n es $A_{\underline{t}_i^n}$-medible, para algún $\underline{t}_i^n \approx t_i^n$.

Sea $H_n(t,w) = \sum_{i=0}^n H_i^n(w) I_{[\underline{t}_i^n, \underline{t}_{i+1}^n)}(t)$,

donde

$$^\circ\underline{t}_{N_n+1}^n = t_{N_n+1}^n.$$

Entonces (4) y la construcción previa de la integral de Lebesgue muestran que

$$\bar{P}\Big(\Big(\int_0^n (H_m - H_n)^2(s,w)d\lambda\Big)^{1/2} > 2^{-n}\Big) < 2^{-n}, \ \forall\, m \geq n$$

Por W_1-saturación, podemos extender $\{H_n/n \in n \in \mathbb{N}\}$ a una sucesión interna indexada por ${}^*\mathbb{N}$ y de aquí se obtiene un proceso interno, digamos H_γ, (para algún $\gamma \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$), esto es $A_{\underline{t}}$-adaptado, acotado en valor absoluto por C_γ y satisface:

$$\bar{P}\Big(\Big(\int_0^n (H_\gamma - H_n)^2(\underline{s},w)d\lambda\Big)^{1/2} > 2^{-n}\Big) < 2^{-n}, \ \forall\, n \leq \gamma.$$

Las ecuaciones (3) y (5), junto con el hecho que H_n es un lifting de h_n, muestran que $H_\gamma \in \bar{I}$ y H_γ es un lifting de h. □

Observación 4.8. La proposición es un resultado que asocia a un proceso estándar dado, un proceso interno con propiedades análogas.

Habiendo encontrado un lifting H de $h \in I$, deseamos construir $\int_0^t h(s)dB(s)$ tomando la parte estándar de $\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s})dX(\underline{s})$ es S-continua para $H \in \bar{I}$ y que la parte estándar de su proceso interno no depende de la elección del lifting.

Definición 4.10.

- Un proceso interno, A_t-adaptado con valores en ${}^*\mathbb{R}$, $M(\underline{t},w)$ es un $(A_{\underline{t}})$ martingala si $\bar{R}(|M(t)|) \in {}^*\mathbb{R}$ para $\underline{t} \in T$ y

$$\bar{E}(M(\underline{t}+\Delta t)|A_{\underline{t}}) = M(\underline{t}) \qquad \bar{P}-a.s$$

- Una aplicación interna $V : \Omega \to T \cup \{\infty\}$, es un $(A_{\underline{t}})$- tiempo de para si $\{V = \underline{t}\} \in A_{\underline{t}}$ para cada $\underline{t}$ en T.

Observación 4.9. Si $H \in \bar{I}$ entonces

$$\bar{E}\big(H(\underline{t},w)\Delta X(\underline{t},w)|A_{\underline{t}}\big) = 0 \quad \bar{P}-a.s$$

Con esto se tiene que

$$\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s},w)dX(\underline{s},w)$$

es un $(A_{\underline{t}})$ martingala.

Proposición 4.3. 1. Si $H_1, H_2 \in \bar{I}$ satisface ${}^\circ H_1(\underline{t},w) = {}^\circ H_2(\underline{t},w) \quad L(\lambda \times \bar{P})$-a.s sobre $ns(T) \times \Omega$, entonces:

$$\int_0^{\underline{t}} H_1(\underline{s},w)dX(\underline{s},w) \approx \int_0^{\underline{t}} H_2(\underline{s},w)dX(\underline{s},w),$$

para todo $t \in ns(T)$ a.s

2. Si $H_n, H_\infty \in \bar{I}(n \in \mathbb{N})$ satisface

$${}^\circ \int_0^m \big(H_n(\underline{s},w) - H_\infty(\underline{s},w)\big)^2 d\lambda \xrightarrow{P} 0, \text{ cuando } n \to \infty \;\forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$${}^\circ \max_{\underline{t} \leq m} \left| \int_0^{\underline{t}} H_n(\underline{s},w)dX(\underline{s},w) - \int_0^{\underline{t}} H_\infty(\underline{s},w)dX(\underline{s},w) \right| \xrightarrow{P} 0, \text{ cuando } n \to \infty \forall m \in \mathbb{N}.$$

Prueba. Sea $H \in \bar{I}$, y para $b > 0$, definamos

$$T(b) = \min\{\underline{t} / \int_0^{\underline{t}+\Delta t} H^2(\underline{S},w)d\lambda > b\} \quad (\min \phi = \infty)$$

Puesto que

$$\int_0^{\underline{t}} H^2(\underline{s}, w)d\lambda \text{ es } A_{\underline{t}-\Delta t}\text{-medible para } \underline{t} \geq \Delta t, T(b) \text{ es un}$$

$(A_{\underline{t}})$-tiempo de parada. Note que para $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$\bar{P}\Big(\max_{\underline{t}\leq m}\Big|\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w)dX(\underline{s}, w)\Big| > \varepsilon\Big) \leq \bar{P}\Big(\max_{\underline{t}\leq m}\Big|\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w)dX(\underline{s}, w)\Big| > \varepsilon, T(\varepsilon^3) \geq m\Big)$$

$$\bar{P}(T(\varepsilon^3))$$

$$\leq \bar{P}\Big(\max_{\underline{t}\leq m\wedge T(\varepsilon)^3}\Big|\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w)dX(\underline{s}, w)\Big| > \varepsilon\Big) + \bar{P}(T(\varepsilon^3) < m)$$

$$\leq \varepsilon^{-2}\bar{E}\Big(\Big(\int_0^{T(\varepsilon^3)} H(\underline{s}, w)dX(\underline{s}, w)\Big)^2\Big) + \bar{P}(T(\varepsilon^3) < m)$$

Desigualdad martingala maximal, Ver Doob [3].

$$= \varepsilon^{-}2\bar{E}\Big(\sum_{\underline{s}<T(\varepsilon^3)} H(\underline{s}, w)^2\Delta t\Big) + \varepsilon^2\bar{E}\Big(2\sum_{\underline{s}<\underline{t}<T(\varepsilon^3)} H(\underline{s}, w)H(\underline{t}, w)$$

$$\times \Delta x(\underline{s}, w)\Delta X(\underline{t}, w)\Big) + \bar{P}(T(\varepsilon^3) < m\}$$

$$\varepsilon^{-2}\bar{E}\Big(\int_0^{T(\varepsilon^3)} H(\underline{s}, w)^2 d\lambda\Big) + \bar{P}(T(\varepsilon^3) < m\}$$

(la última parte sigue por la independencia de $\Delta X(\underline{t}, w)$ y A_t).

Por lo tanto

$$\bar{P}\Big(\max_{\underline{t}\leq m}\Big|\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w)dX(\underline{s}, w)\Big| > \varepsilon\Big) \leq \varepsilon + \bar{P}\Big(\int_0^{m} H(\underline{s}, w)^2 d\lambda > \varepsilon^3\Big) \qquad (6)$$

Para demostrar (1), establezcamos $H = H_1 - H_2$ en (6) para encontrar que para cada $\varepsilon \in \langle 0, +\infty\rangle$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$P\Big(\max_{\underline{t}\leq m}\Big|\int_0^{\underline{t}} H_1(\underline{s}, w)dX(\underline{s}, w) - \int_0^{\underline{t}} H_2(\underline{s}, w)dX(\underline{s}, w)\Big| > \varepsilon\Big)$$

$$\varepsilon + P\Big(^{\circ}\Big(\int_0^{m} (H_1 - H_2)^2(\underline{s}, w)d\lambda\Big) \geq \varepsilon^3\Big)$$

$$= \varepsilon + P\Big(\int_0^{m_0} (H_1 - H_2)^2(\underline{s}, w)dL(\lambda) \geq \varepsilon^3\Big) = \varepsilon$$

(2) El resultado es una consecuencia inmediata de (6), (poniendo $H = H_n - H_\infty$) $\square$

Definición 4.11.

- Un proceso interno Y, $(A_{\underline{t}})$-adaptado con valores en ${}^*\mathbb{R}$, es *localmente S-integrable* si existe una sucesión de $(A_{\underline{t}})$-tiempos de parada $\{V_n\}$ tal que ${}^\circ V_n$ crece a ∞ a.s. y $Y(V_n \wedge \underline{t})$ es S-integrable para todo $\underline{t} \in T$ y $n \in \mathbb{N}$.

- La *variación cuadrática* de un proceso interno Y, es el proceso

$$[Y](\underline{t}) = Y(0)^2 + \sum_{\underline{s}<\underline{t}} (\Delta Y(\underline{s}))^2 \qquad (\Delta Y(\underline{s}) = Y(\underline{s} + \Delta t) - Y(\underline{s})).$$

- Más generalmente, si Y_1 e Y_2 son procesos estocásticos tenemos

$$[Y_1, Y_2](\underline{t}) = Y_1(0)Y_2(0) + \sum_{\underline{s}<\underline{t}} \Delta Y_1(\underline{s})\Delta Y_2(\underline{s}).$$

Observación 4.10. 1. $\left[\int HdX\right](\underline{t}) = \int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w)^2 d\lambda$

2. $\left[\int H_1 dx, \int H_2 dX\right](\underline{t}) = \int_0^{\underline{t}} (H_1(\underline{s}, w) H_2(\underline{s}, w)) d\lambda$

Ahora daremos un teorema el cual es la clave para construcción no estándar de soluciones para las ecuaciones de Itô.

Teorema 4.5. Una $(A_{\underline{t}})$-martingala M, es S-continua y localmente S-integrable si y sólo si $[M]^{1/2}$ es S-continua y localmente S-integrable.

Prueba. Ver [4]. □

Corolario. Si $H \in \bar{I}$, entonces

$$\int_0^{\underline{t}} H(\underline{s}, w) dX(\underline{s}, w)$$

es S-continuo.

Prueba. Ver [8, Sec. 3]. □

Definición 4.12. Si $h \in I$, elegimos un lifting H de h en $\bar{I}$. Definimos la *integral de Itô* de h con respecto a B mediante

$$\int_0^t h(s, w) dB(s, w) = st\left(\int HdX\right)(t).$$

Observación 4.11.

- El Corolario 4.4 y la Proposición 4.3 muestra que la integral $\int hdB$ es un proceso bien definido con caminos continuos y es independiente de la elección del lifting H.
- La integral $\int_0^t hdB$ es F_t-medible para cada $t \geq 0$, es decir $\int_0^t hdB$ es (F_t)-adaptado.
- El Corolario 4.4 tiene un mayor alcance que establecer la continuidad de la integral de Itô, pues se aplica a procesos internos en $\bar{I}$, que no necesita ser un lifting de algún proceso estándar en I.
- La definición anterior coincide con la definición clásica de la integral de Itô.

Hemos construido la integral de Itô $\int hdB$ para el movimiento Browniano particular $B = st(x)$. Surge naturalmente la siguiente pregunta: ¿Tal construcción también funciona para otro movimiento Browniano B' sobre (Ω, F, P, F_t)?

Parte de la respuesta la tenemos con el siguiente teorema bajo consideraciones especiales.

Teorema 4.6. Si B' es un movimiento Browniano sobre Ω, F, P, F_t existe una biyección interna que preserva medida $\phi : \Omega \to \Omega$ tal que $A \in F_t$ si y sólo si $\phi(A) \in F_t$ (ϕ es llamada una transformación interna sobre ϕ) y $B'(t,w) = B(t, \phi(w))$ para todo $t \geq 0$ a.s.

Luego, podemos definir la integral de Itô con respecto a B', mediante:

$$\int_0^t h(s,w)dB'(s,w) = \int_0^t h(s,\phi^{-1}(\cdot))dB(s,\cdot).\phi(w).$$

Prueba. Ver [8]. □

4.5. Ecuaciones de Itô

A continuación describiremos un teorema de existencia simple para las ecuaciones de Itô.

Teorema 4.7. Sean $\sigma, f : [0, +\infty\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles acotadas tal que: $x \to \sigma(t, x)$ y $x \to f(t, x)$ son continuas para cada $t \geq 0$. Entonces, para cada movimiento Browniano B' sobre (Ω, F, P, F_t) e $y_0 \in \mathbb{R}$ existe un proceso F_t-adaptado, $y'(t, w)$ con caminos continuos tal que:

$$y'(t,w) = y_0 + \int_0^t \sigma(s, y'(s,w))dB'(s,w) + \int_0^t f(s, y'(s,w))ds \forall t \geq 0 a.s$$

Prueba. Ver [8, Sec. 3]. □

Haciendo pequeños cambios en las pruebas anteriores, como por ejemplo si $\sigma : [0; +\infty\rangle \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+d}$ ($n \times d$ matrices), $f : [0, \infty\rangle \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tenemos que B' es un movimiento Browniano d-dimensional sobre (Ω, F, P, F_t) donde $\Omega = (\{-1, 1\}^d)^T$ y y_0 es una variable aleatoria F_0-medible.

Algunas otras posibles extensiones son las siguientes

1. Sean $\sigma[0, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ y $f : [0, \infty\rangle \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ dependiendo de w, donde $\sigma, f(t, x, \cdot)$ son F_t-medibles, para todo (t, x).

2. Permitir que σ y f dependan de la historia pasada de y, esto es: $\sigma : [0, +\infty\rangle \times C([0, +\infty\rangle, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times d}$ y $f : [0, +\infty\rangle \times C([0, +\infty\rangle, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times d}$, donde $x|_{[0,t]} = y|_{[0,t]}$ implica que

$$\sigma(t, x) = \sigma(t, y) \text{ y } f(t, x) = f(t, y).$$

Conclusiones

El título del presente trabajo pretende ser una introducción al análisis no estándar, que fue iniciado por Abraham Robinson a finales de los años 60. El análisis no estándar es una técnica ampliamente utilizada en diversas áreas de la matemática pura y aplicada (incluyendo teoría de la probabilidad, física, matemática, análisis funcional, entre otros). El análisis no estándar es útil cuando se reemplaza argumentos $\varepsilon - \delta$ en el análisis (cálculo) los cuales son complicados por los más simples e intuitivos argumentos no estándar involucrando infinitesimales.
Dada la dependencia por ejemplo del trabajo en economía matemática sobre argumentos del análisis real de nivel (como por ejemplo, Rudin (1976) o Royden (1968)) un número muy grande de artículos pueden ser simplificados en forma significativa usando argumentos no estándar. La teoría de la probabilidad es actualmente el campo más activo para las aplicaciones del análisis no estándar Debido a que las construcciones probabilísticas son ampliamente usadas en teoría de equilibrio general, teoría de juegos y finanzas, éstas parecen ser áreas fructíferas para aplicaciones del análisis no estándar.
Asimismo como consideramos en el presente trabajo podemos mencionar algunas aplicaciones del análisis no estándar en teoría de la probabilidad (integración estocástica) así como a los proceso estocásticos.

Bibliografía

[1] Anderson, Robert M.; *Infinitesimal Methods in Mathematical Economics.* University of California, 2008.

[2] Anderson, R. M.;*A non-standar representation for Brownian motion and Itô integration.* Israel J. Math 25 (1976),15-46.

[3] Doob, J. L. *Stochastic Processes.* John Wiley, 1953.

[4] Hoover, D. N. y Perkins E.; *nonstandard construction of the stochastic integral and applications to stochastic differential equations I,* Transactions of the American Mathematica Society, Vol. 275, number 1, january 1983.

[5] Hurt, A., Loeb P., *An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Academic Press Inc., 1985.

[6] Ivorra, Carlos; *Análisis no estandar.* Universidad de Valencia, 2008.

[7] Loeb, P. A.; *An introduction to nonstandar analysis and hyperfinite probability theory. Probabilistic analysis and related topics.* A. Barucha-Reid Ed., New York. Academic Press, 1979

[8] Perkins, E.; *Stochastic processes and nonstandard analysis*, in *Nonstandard analysis-recent developments*, ed. A.E. Hurd, Lectures Notes in Mathematics 983, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[9] Robert, Alain; *Nonstandar Analysis.* University of Neuchâtel, 1985.

[10] Robinson, Abraham; *Non-standard Analysis*. Segunda edición. Princeton University Press. 1996.

[11] Salvador García Ferreira; *Ultrafiltros sobre* $\mathbb{N}$ *y sistemas dinámicos discretos*. Instituto de matemáticas. Unidad Morelia. Universidad Nacional Autonóma de México (XXII Escuela Venezolana de Matemática). 2010.

[12] Väth, Martin; *Nonstandar Analysis*. Freie Universität Berlin, 2007.