

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA**



**ANÁLISIS DE LA PROPAGACIÓN DE FRACTURAS EN  
PLACAS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS  
ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO (XFEM)**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
INGENIERO MECÁNICO**

**MARKO ANTONIO LÓPEZ BENDEZÚ**

**PROMOCION 2005-I**

**LIMA-PERU**

**2015**

Esta tesis se la dedico a mis padres José Luis y María Imperio por el amor y apoyo incondicional que siempre estuvieron conmigo para mi logro profesional.

## ÍNDICE

<b>PRÓLOGO.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>2</b>
1.1. Antecedentes .....	2
1.2. Planteamiento del problema .....	5
1.3. Descripción de la realidad problemática .....	7
1.4. Problema principal.....	8
1.5. Objetivo .....	9
1.6. Alcances y limitaciones .....	10
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA DE LA FRACTURA .....</b>	<b>12</b>
2.1. Concentración de tensiones .....	12
2.2. El balance de energía de Griffith .....	13
2.3. La tasa de liberación de energía .....	16
2.4. Factor de Intensidad de Tensión (FIT) .....	16
2.5. Integral $J$ .....	20
2.6. Propagación de grietas por fatiga.....	23
2.7. Teoría de la fractura cohesiva .....	27
2.8. Ensayos relacionados a la mecánica de la fractura .....	30

### **CAPÍTULO 3**

<b>MÉTODOS NUMÉRICOS DE PROPAGACIÓN DE FRACTURA .....</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción.....	35
3.2. Elemento singular.....	36
3.3. Elementos cohesivos .....	39
3.3.1. Modelo intrínseco .....	39
3.3.2. Modelo extrínseco .....	40
3.4. Elementos Enriquecidos.....	42
3.5. Técnicas Alternativas .....	44

### **CAPÍTULO 4**

<b>MÉTODOS DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDOS.....</b>	<b>46</b>
4.1. Introducción.....	46
4.2. Formulación del Método XFEM .....	47
4.3. Discontinuidad con nodos fantasmas .....	52
4.4. Modelo de la zona cohesiva .....	54
4.5. Discretización espacial.....	59

### **CAPÍTULO 5**

<b>SIMULACIONES NUMERICAS.....</b>	<b>63</b>
5.1. Introducción.....	63
5.2. Calculo del Factor de Intensidad de Tensión (FIT).....	64
5.3. Ensayo de flexión en tres puntos .....	68
5.4. Problema de una placa con un agujero.....	72

5.5. Propagación dinámica de la fractura .....	76
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>82</b>
<b>RECOMENDACIONES.....</b>	<b>83</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>84</b>
<b>APÉNDICES... ..</b>	<b>89</b>

## PRÓLOGO

El desarrollo de la presente Tesis, abarca seis capítulos con alcances respaldados en las referencias bibliográficas. El primer capítulo es la introducción, en él se presenta la visión global del problema, la motivación del estudio, la especificación del problema a solucionar y el objetivo principal.

El Capítulo 2 da una breve revisión general sobre la Mecánica de la Fractura, describe los conceptos, teorías y análisis desarrolladas por investigadores del área, conteniendo un resumen de las principales modelos que hasta hoy son adoptados como base para la simulación del comportamiento de fractura en piezas estructurales. El Capítulo 3, presenta los diferentes métodos numéricos de propagación de fracturas en el marco de los Método de los Elementos Finitos (MEF).

Una discusión en detalle del Método de los Elementos Finitos Extendidos (*Extended Finite Element Method - XFEM*) es presentada en el Capítulo 4. En el Capítulo 5, son analizados ejemplos de aplicación de la metodología empleada, mostrando su eficiencia y exactitud. Los resultados son comparados con soluciones analíticas, con otros métodos numéricos e ensayos experimentales, por tanto validando el método XFEM. Finalmente se concluye esta investigación y presenta direcciones de posibles trabajos futuros.

Deseo expresar mi agradecimiento a mi orientador Prof. Fortunato Alva Davila por la colaboración en la elaboración de la presente Tesis. Expresarle mi admiración y respeto. Al igual de sentirme orgulloso de ser parte de esta excelente institución.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Antecedentes

Uno de los requerimientos fundamentales de una estructura en ingeniería es que ésta no falle en servicio. El problema de resistencia y fractura de materiales es conocido como uno de los más importantes para el progreso de la ciencia y la tecnología. No es una idea nueva el diseñar estructuras para evitar la fractura. Estructuras antiguas que están en pie hasta hoy, son ejemplos de diseños exitosos, principalmente conseguidos a prueba y error.

Se encuentran numerosos registros de casos de accidentes catastróficos con consecuencias graves para la sociedad, debido al apareamiento de grietas en los materiales. En la Figura 1.1 ilustra algunos ejemplos de fallas catastróficas, que será explicado a seguir.

En la Figura 1.1-a, se cita la Torre *Ronan Point* (1968) cuyos ladrillos fallaron por colapso progresivo. En la Figura 1.1-b, el puente *Tacoma Narrows* (1940) bajo cargas inducidas por el viento (flameo) se fracturo. En la Figura 1.1-c, el buque petrolero *Kurdistan* (1979) se fracturo completamente en dos partes mientras navegaba en el Atlántico Norte, debido al petróleo caliente en el interior del buque con el agua fría en contacto en la parte externa del casco, lo cual produjo grandes gradientes de esfuerzos térmicos. La fractura se inició desde una quilla de la sentina que fue soldada

de manera inapropiada. La soldadura falló hasta penetrar la estructura, resultando en una severa concentración de esfuerzos. Aunque el acero del casco tenía una tenacidad adecuada para prevenir el inicio de la fractura, falló para detener la propagación de la grieta.

A mediados de los años 50 dos aviones *Comet De Havilland* fallaron catastróficamente a elevada altitud (Figura 1.1-d), las investigaciones revelaron que los fallos se originaron a partir de grietas de fatiga muy pequeñas cerca de las aberturas de las ventanas en el fuselaje. Otros numerosos fallos en la industria aeronáutica, en relación con los trenes de aterrizaje, y en los motores se han atribuido a fatiga y a corrosión bajo tensión. Un ejemplo más reciente de una catástrofe trágica, que pudo haber sido prevista, fue la explosión del Transbordador Espacial *Challenger* en 1986 (Figura 1.1-e), el cual explotó debido a que un sello en uno de los propulsores principales no respondió bien al ambiente frío.

Con esto, varias áreas de ingeniería se ven dedicando a los estudios de estos fenómenos para evitar que fallas catastróficas puedan ocurrir.



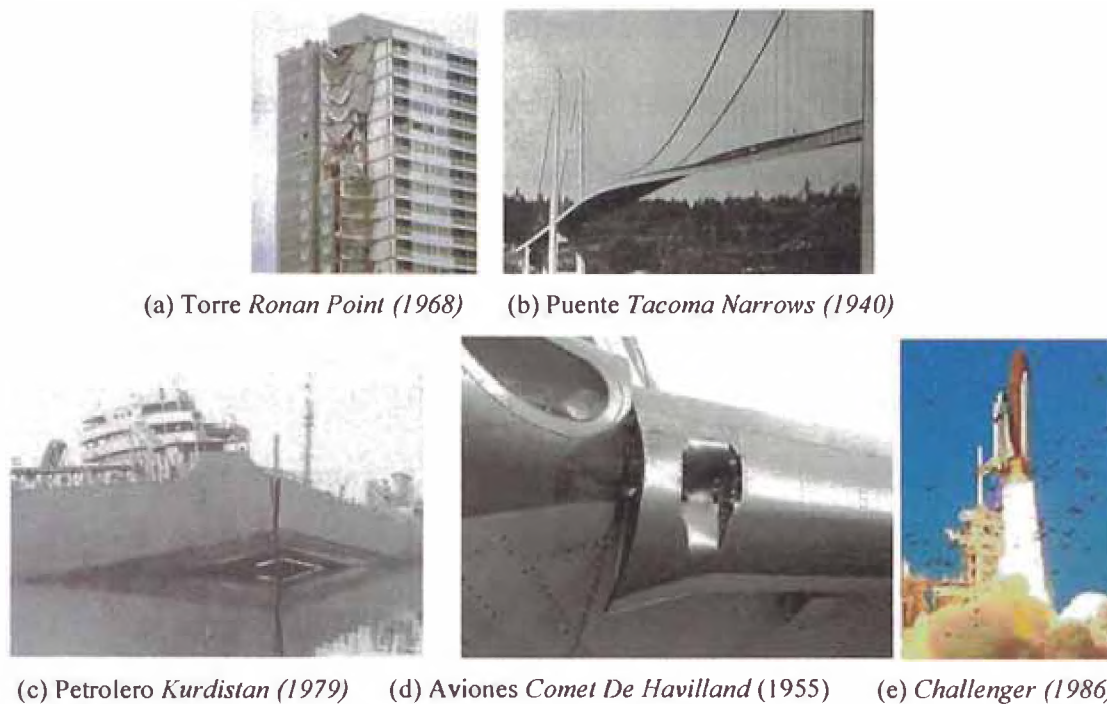


Figura 1.1 - Accidentes catastróficos.

La meta principal de cualquier análisis de mecánica de fractura es prevenir la falla. Para conseguir esto, la fuerza de crecimiento de la grieta debe ser menor que la resistencia del material al agrietamiento, como se ilustra en la Figura 1.2.

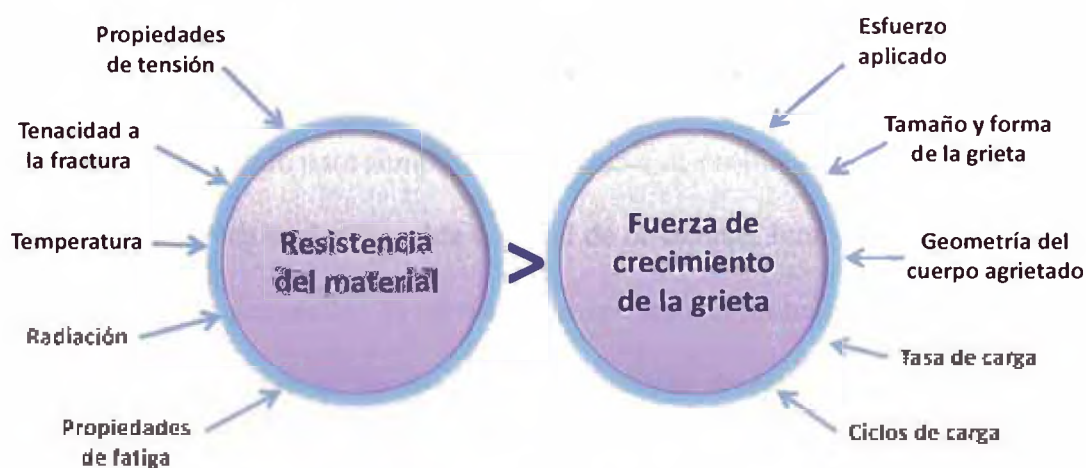


Figura 1.2 - Criterio básico en la Mecánica de la Fractura.

La fuerza de crecimiento de la grieta y la resistencia del material dependen del régimen de la mecánica de fractura. Bajo un determinado juego de esfuerzos, el tamaño

del defecto para el cual la fuerza de crecimiento de la grieta es igual a la resistencia del material es llamado tamaño crítico de grieta. La noción recientemente desarrollada de los Mapas de Mecanismos de Fractura (MMF) ponen el resto de las creencias sencillas en la existencia de un criterio universal de falla en término de la mecánica clásica del medio continuo. Los MMF se parecen a un diagrama de fase, sugiriendo que diferentes criterios de falla pueden ser empleados para varios esfuerzos y condiciones de temperatura. Aunque la diversidad de comportamiento de falla es enorme, existen pocos elementos genéticos, por tanto en la mayoría de los casos ocurren solo modelos estándar. Esto explica los logros espectaculares de la mecánica de fractura en el análisis de fallas.

Por tanto, la Mecánica de la Fractura puede ser utilizada a través de la realización de pronósticos de los potenciales padrones de propagación de fracturas, verificando la existencia o no de riesgo de mantener determinada estructura en servicio.

## **1.2. Planteamiento del problema**

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una de las herramientas numéricas extensamente utilizado para simular algunas clases de problemas de ingeniería, en que la solución analítica es desconocida o difícil de obtenerse. Junto con la utilización de los computadores personales, el método se volvió uno de los más utilizados en los días de hoy. El método permite, por ejemplo, el estudio de desplazamientos y tensiones en piezas mecánicas, en represas, en un campo de petróleo, así como la determinación de flujo de calor, de presión y de muchos otros análisis. Básicamente, esos tipos de análisis tiene en común el hecho de que basa en la solución de un problema para el cual son establecidas ecuaciones diferenciales parciales relacionando variables de

campo fundamentales dentro de un determinado dominio, y satisfaciendo condiciones de restricciones para esas variables fundamentales y sus derivadas en la frontera del dominio. De una manera general, se puede decir que la idea central del método es subdividir el dominio en pequeñas regiones (elementos) donde el comportamiento del campo pueda ser aproximado por polinomios o por funciones armónicas. Esas funciones son expresadas con base en valores del campo en los vértices (nodos) de los elementos, las incógnitas del problema discreto, son determinados a través de la minimización de un funcional asociado a la ecuación diferencial.

A fin de pronosticar no sólo la carga de falla, sino también el comportamiento correcto pos-pico, algoritmos computacionales robustos y estables que son capaces de manejar gran conjunto de ecuaciones gobernantes no lineales son un requisito esencial. Hay una serie de casos en los que el método de elementos finitos convencional tiene restricción en una aplicación eficiente. La solución aproximada puede converger a la exacta si ésta tiene un comportamiento polinómico, en cambio, cuando existe una singularidad, resulta difícil aproximar correctamente el campo de la solución en sus cercanías. En este caso, la solución está dominada por el efecto local de la singularidad.

Estructuras de ingeniería cuando se someten a una carga elevada pueden causar tensiones en el cuerpo excediendo la resistencia del material y, por lo tanto, resulta en la falla progresiva. Estas fallas se inician normalmente por grietas superficiales y disminuyen la resistencia del material. Esto requiere un cuidadoso análisis y modelado aproximado de la estructura para evaluar la verdadera fuerza del cuerpo. Por otra parte, el modelaje de agujeros e inclusiones, deslizamientos de tierra presenta otra clase de problemas en que método de elementos finitos convencional se vuelve una opción costosa para la convergencia óptima de la solución.

Una amplia variedad de métodos se ha desarrollado en los últimos años para simular la iniciación y propagación de fracturas dentro del Método de los Elementos Finitos, cada método proporciona ventajas y desventajas de manipular ciertas partes de la simulación.

### **1.3. Descripción de la realidad problemática**

Así como en otras áreas, la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica también usa las facilidades numéricas del método de los elementos finitos. Elementos especiales, llamados elementos singulares, que fueron creados para que la grieta fuera adecuadamente representada de modo a obtener resultados sobre el principal parámetro que rige, el Factor de Intensidad de Tensión (FIT). Con este parámetro se puede estimar la dirección del crecimiento incremental de la grieta y analizar la propagación de la fractura, utilizando un proceso paso a paso. La ventaja del método de los elementos finitos en análisis de fracturamiento es viabilizar el modelaje de geometrías complejas donde el factor de intensidad de tensión es desconocida. En análisis de fatiga este método ha tenido muy buenos resultados, aunque el tiempo requerido para hacer los cálculos es extenso.

Fenómenos de propagación de fracturas y fragmentación en sólidos pueden ser descritos por Modelos de Zona Cohesiva (MZC) y simulados con el Método de los Elementos Finitos. Con este modelo es posible simular otros tipos de materiales como: metales dúctiles, concreto, roca, materiales compuestos, materiales viscoelásticos y polímeros. Entre los enfoques computacionales de reciente interés para la representación de fracturas en mallas de elementos finitos, se encuentra los elementos de interface cohesivas. En ellos, el comportamiento de fracturas es representado por

elementos cohesivos insertados en las interfaces entre los elementos continuos de la malla original. Los modelos de elementos cohesivos pueden ser clasificados como **intrínsecos o extrínsecos**. **Modelos intrínsecos** requieren elementos cohesivos pre-insertados en todas las interfaces continuas posibles de fracturas. Por otro lado, modelos extrínsecos requieren que elementos cohesivos sean insertados de forma adaptativa, a penas donde y cuando necesarios. Pero la representación de mallas tradicional (elementos y nodos) no es suficiente para tratar mallas adaptativas eficientemente, o que hace necesario un soporte topológico apropiado. En general, modelos **cohesivos de fractura** también **requieren un alto nivel de refinamiento de malla**, para que resultados precisos sean obtenidos. Esto implica en un consumo de memoria y procesamiento que puede ser prohibitivo en las estaciones de trabajo tradicionales.

Las desventajas del modelamiento computacional de los diferentes métodos han sido evitadas por el desarrollo de nuevas ideas y técnicas; sin embargo problemas de **costo computacional** han llevado al desarrollo de **nuevas técnicas**.

#### **1.4. Problema principal**

El modelado de grietas en estructuras especialmente la evolución de las grietas requiere que la malla de elementos finitos se ajuste a la geometría de la grieta, por lo que debe ser actualizado cada vez que se propaga la grieta. Esto no sólo es computacionalmente caro y complicado, sino que también resulta en la pérdida de precisión ya que los datos son mapeados a partir de una malla antigua para la nueva malla.

El Método de los Elementos Finitos Extendido (*Extended Finite Element Method* – XFEM), que fue presentado por Belytschko et al.<sup>1</sup> (1999) y Moes et al. (1999), constituye una alternativa eficaz para la modelización de este tipo de problemas. El enriquecimiento se realiza con unas funciones conocidas a priori que gobiernan el comportamiento de la solución en la región singular.

La base enriquecida está formado por la combinación de las funciones de forma nodales asociados con la malla y las funciones de forma nodales con funciones discontinuas. Esta construcción permite modelar geometrías que son independientes de la malla. Además, se añade el enriquecimiento sólo a nivel local, es decir, donde el dominio es necesario para ser enriquecido. El sistema de ecuaciones algebraicas resultante consiste en dos tipos de incógnitas: los grados de libertad clásicos y enriquecidos.

Por lo tanto, las principales ventajas es que la malla de elementos finitos no necesita ajustarse a los límites de la grieta para modelar la discontinuidad geométrica. Además, la regeneración de la malla no es necesaria en las simulaciones de crecimiento de la grieta. Así que, una única malla, que a menudo se genera con facilidad, puede ser utilizada para cualquier longitud de grieta y orientación.

## **1.5. Objetivo**

El objetivo principal de esta Tesis es analizar la propagación de fracturas utilizando el Método de los Elementos Finitos Extendidos (*Extended Finite Element*

---

<sup>1</sup> La abreviatura et al. procede de la expresión latina et alii, que significa ‘y otros’. Se emplea en bibliografías para indicar que uno o varios autores se han suprimido.

*Method – XFEM*). Para ello, se modela el comportamiento de grietas en cuerpos de prueba cuando haya presencia de discontinuidades internas, comparando el comportamiento de la propagación de la fractura con datos experimentales y/o con otros métodos computacionales existentes, en análisis estático o dinámico.

El problema a solucionar son cuatro simulaciones numéricas, estas son: (1) cálculo del factor de intensidad de tensión; (2) ensayo de flexión en tres puntos; (3) propagación de la fractura de una placa con un agujero; y finalmente (4) propagación de una fractura bajo un análisis dinámico.

El método XFEM se encuentra implementado en el software comercial de elementos finitos ABAQUS, versión 6.11 con los siguientes mínimos requerimientos para la PC: Sistema Operativo: Windows XP/Vista/7/8. RAM: mínimo con 1Gb. Microsoft Visual C++ 2010 y Intel Visual Fortran 10.1.

## **1.6. Alcances y limitaciones**

Las principales aportaciones realizadas en esta Tesis están relacionadas con los siguientes aspectos:

1. Presenta los fundamentos de la mecánica de la fractura. El propósito de este aporte es examinar brevemente algunos trabajos de la mecánica de la fractura. Parámetros de fractura pueden ser determinados directamente a través de ecuaciones analíticas. Los casos en que la obtención se vuelve compleja debido a la geometría o condiciones de carga, será más exactamente determinados empleando un método numérico. También se da una breve revisión de los ensayos de laboratorio.

2. Compara los diferentes métodos numéricos de propagación de fracturas. Son presentados los principales abordajes que existen por los Métodos de los Elementos Finitos para el modelado de grietas y su evolución en el tiempo.
3. El modelado de la grieta para problemas de Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (MFLE), es decir el cálculo de los Factores de Intensidad de Tensión (FIT's).
4. El modelado de la orientación de grieta, en su fase de iniciación y propagación en problemas de cuerpos de prueba, así como su validación e eficacia del método XFEM.

Entre las principales limitaciones de esta Tesis están relacionadas a los siguientes aspectos:

1. Limitaciones del software comercial. El trabajo es realizado por el software comercial ABAQUS 6.11. En la tesis se describen sus muchas ventajas, pero entre las principales desventajas tenemos que sólo está disponible para elementos bidimensionales de primer orden y elementos tetraedros de segundo orden.
2. Las evaluaciones de la integral de contorno (integral  $J$ ) es realizado solamente para grietas estacionarias, es decir, no se simula a propagación de la fractura.
3. Parámetros de la zona cohesiva, para modelos complejos requieren más parámetros que es difícil encontrar en la literatura, aunque se puede encontrar aproximaciones.



## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA DE LA FRACTURA

#### 2.1. Concentración de tensiones

Inglis (1913) fue el primero para cuantificar los efectos de la concentración de tensión al analizar entalles elípticos en placas planas. En este análisis Inglis obtiene una expresión que determina la tensión en el extremo del eje mayor de la elipse (Figura 2.1), siendo  $a$  y  $b$  los semiejes de la elipse ( $a > b$ ). Consideró que las tensiones en el entalle no fueron influenciadas por el contorno de la placa. La ecuación de la tensión en el punto A, en la Figura 2.1, es dado por:

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.1)$$

donde  $\rho = b^2/a$  es el radio de curvatura de la punta de la elipse.

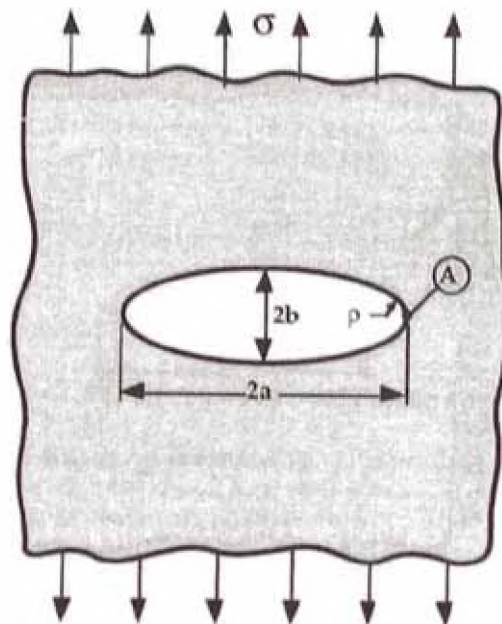


Figura 2.1 - Entalle elíptico en una placa plana.

De acuerdo con la ecuación (2.1) el efecto de la concentración de tensiones es mayor cuando más afilado es el entalle, es decir, cuando menor es el radio de la curvatura de la elipse. Pero la concentración de tensión para un radio nulo en el entalle, en este caso llamado de una grieta, tiende al infinito. Esto sugiere que la ruptura ocurriría en una tensión nominal aplicada próxima de cero, lo que evidentemente no sucede en la realidad. Inglis apenas resolvió el problema del entalle, pero no explicó porque las piezas no rompían. Fue Griffith (1920) que dio el paso siguiente para la mejor comprensión de las grietas.

## **2.2. El balance de energía de Griffith**

En 1920, Griffith desarrolló el primer análisis bien hecho del comportamiento de la fractura de componentes con grietas. Griffith realizó experiencias con vidrio, asumiendo que la fractura ocurre en un material frágil ideal, con una grieta de tamaño  $2a$  en el interior de una placa, como ilustrado en la Figura 2.2.

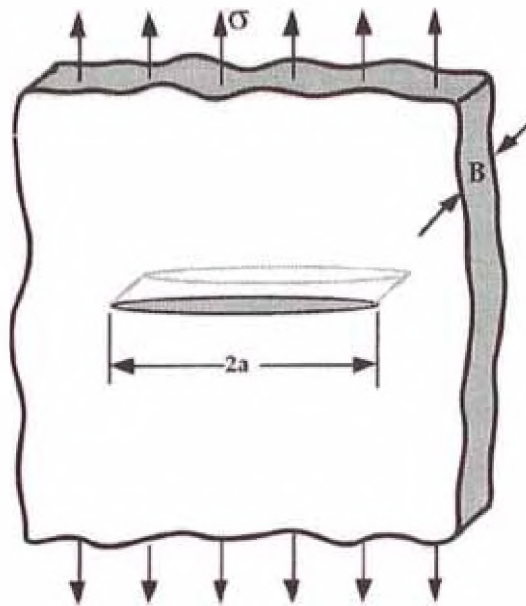


Figura 2.2 – Modelo usado por Griffith (1920).

Según Griffith, en materiales idealmente frágiles la grieta se propagaría de manera inestable si la energía de deformación liberada cuando la grieta avanzase de una longitud infinitesimal fuera mayor que la energía requerida para formar una nueva superficie de la grieta, esto significa que, la energía necesaria para romper la cohesión entre átomos al frente de la grieta. Considerando una placa infinita, como en la Figura 2.2, con longitud de grieta  $2a$  y sujeta a una tensión uniforme aplicada en el infinito, el balance energético de Griffith para un incremento de área de grieta  $dA$ , bajo condiciones de equilibrio puede ser expreso como:

$$\frac{dE_T}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (2.2)$$

donde  $E_T$  es la energía total del sistema,  $\Pi$  es la energía potencial en la placa y  $W_s$  es la energía de formación de las superficies de la grieta.

Griffith, uso el análisis desarrollada por Inglis, demostró que:

$$\Delta\Pi = \Pi - \Pi_0 = -\frac{\pi\sigma^2 \cdot a^2 \cdot B}{E} + W_s \quad (2.3)$$

donde  $\Pi_0$  es la energía potencial total de una placa sin grieta y  $B$  espesura de la placa.  $W_s$  es igual al producto de la energía elástica de superficie del material  $\gamma_s$  y la nueva superficie de área de la grieta:

$$W_s = 2(2\alpha \cdot B \cdot \gamma_s) \quad (2.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.3) y (2.4) en (2.2) se obtiene la tensión de fractura:

$$\sigma_f = \left( \frac{2 \cdot E \cdot \gamma_s}{\pi \cdot a} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

La ecuación anterior es válida solamente para materiales idealmente frágiles. Griffith obtiene buenos resultados trabajando con vidrios, sin embargo la ecuación subestima la tensión de fractura de los materiales estructurales comunes.

Irwin (1948) y Orowan (1948) independientemente modificaron la expresión de Griffith para llevar en cuenta materiales elástico-plásticos, introduciendo el trabajo plástico  $\gamma_p$ , de esta forma la ecuación (2.5) se convierte en:

$$\sigma_f = \left( \frac{2 \cdot E \cdot (\gamma_s + \gamma_p)}{\pi \cdot a} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

o de forma más general:

$$\sigma_f = \left( \frac{2 \cdot E \cdot w_f}{\pi \cdot a} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

donde  $w_f$  es la energía de fractura, que puede incluir efectos de plasticidad, viscoelásticos, viscoelásticos, dependiendo do material.

### 2.3. La tasa de liberación de energía

En 1956, Irwin propuso un modelo equivalente al de Griffith, excepto que en una forma más conveniente de resolver problemas de ingeniería. Irwin definió la energía absorbida para propagar una grieta o tenacidad del material,  $G$ , que es la tasa de liberación potencial almacenado en el sistema por unidad de área de grieta.  $G$  es obtenida por la derivada del potencial total y es dada por:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (2.8)$$

Para una placa infinita de la sección anterior, la tasa de liberación es dada por:

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (2.9)$$

Para un valor crítico  $G_c = 2 \cdot w_f \cdot G$  es una propiedad del material, y existen en la literatura manuales que listan para varios materiales.

### 2.4. Factor de Intensidad de Tensión (FIT)

Primero es conveniente definir los tres tipos de movimientos relativos de las dos superficies de las grietas, que son mostrados en la Figura 2.3. Con base en el sistema de ejes mostrados en la Figura 2.4, el modo de abertura, Modo I, es caracterizado por el desplazamiento local que es simétrico a los planos  $x-y$  y  $x-z$ . El modo de cizallamiento en el plano, Modo II, los desplazamiento son simétricos al plano  $x-y$  y antisimétricos al plano  $x-z$ . El Modo III, es asociado con los desplazamiento que son antisimétricos con los planos  $x-y$  y  $x-z$ .

Cada uno de estos modos está asociado a un tipo básico de campo de tensiones alrededor de la punta de la grieta. Cualquier problema de deformación de la punta de la grieta puede ser tratado como una combinación de estos modos de desplazamiento.

De esta forma, el campo de tensiones puede ser también tratado como la combinación de los tres tipos básicos de campo de tensión. En proyecto, el Modo I es el más importante, pues corresponde al modo de fractura de la mayoría de las piezas con grietas.

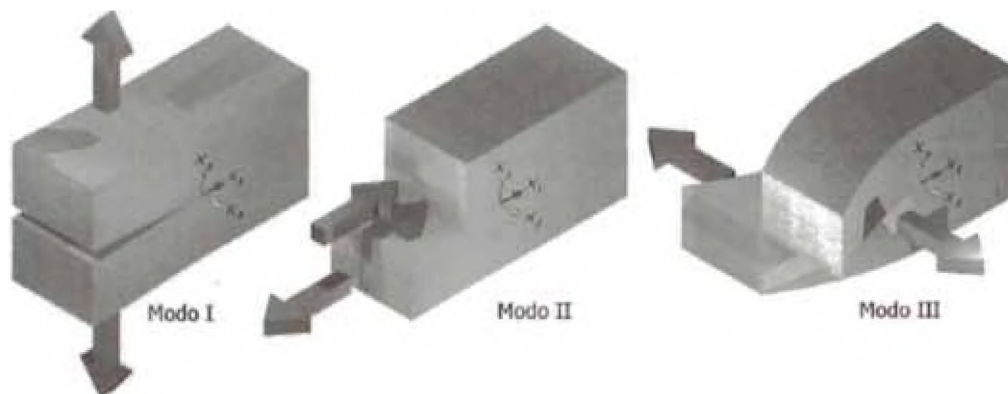


Figura 2.3 - Modos de desplazamiento de la punta da la grieta:  
a) abertura; b) cizallamiento en el plano y c) cizallamiento fuera del plano.

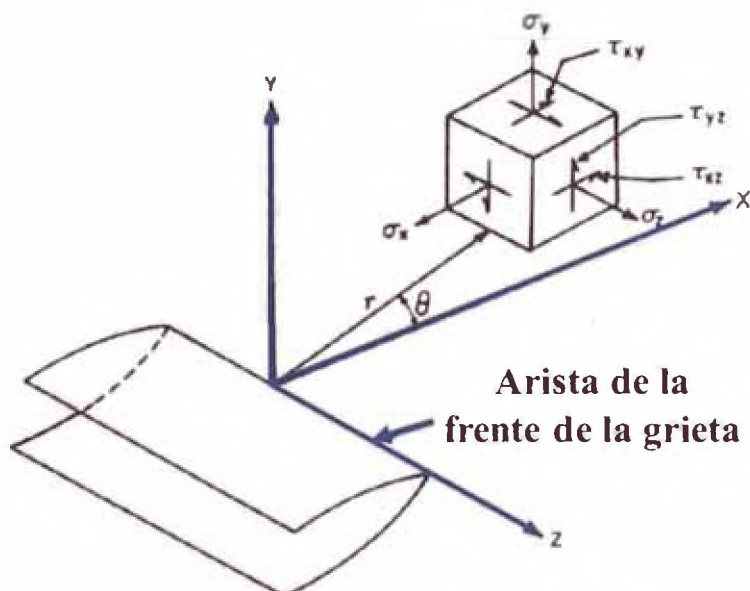


Figura 2.4 - Coordenadas en la frente de la grieta.

En la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (MFLE) la grieta puede ser caracterizada (medida) en términos de un parámetro simple  $K$ , llamado factor de intensidad de tensión, introducido por Irwin (1957) y Williams (1957) para cuantificar

el campo de tensiones alrededor de una grieta en una pieza predominante elástica. Los trabajos fueron independientes, pero llegaron al mismo resultado.

Cada modo está asociado a un factor de intensidad de tensión:  $K_I$  para el Modo I;  $K_{II}$  para el Modo II y  $K_{III}$  para el Modo III. El valor crítico de  $K_I$ ,  $K_{IC}$ , es una propiedad del material y es llamado tenacidad a la fractura.

Si definimos un eje de coordenadas polares con el origen en la frente de la grieta, como muestra la Figura 2.4, el campo de tensiones en un material elástico puede ser dado por la expresión (Anderson, 1995):

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.10)$$

donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones,  $r$  y  $\theta$  son definidos en la Figura 2.4,  $k$  es una constante relacionada al factor de intensidad de tensiones ( $K = k\sqrt{\pi a}$ ) y  $f_{ij}$  una función de  $\theta$ .

Usando funciones armónicas propuestas por Willian (1957) y desarrollando la ecuación (2.10), se encuentra el campo de tensiones y desplazamiento en la punta de la grieta para los tres modos de deformación. Con  $K = k\sqrt{\pi a}$  por conveniencia, se tiene para el Modo I:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para el modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2.12)$$

Esas ecuaciones muestran que la distribución del campo de tensiones en el alrededor de la punta de la grieta es invariante en todos los componentes sujetos a un dado modo de deformaciones y que la magnitud del campo elástico de tensiones puede ser descrita por los términos  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$ .

Sim embargo, como enfatizado anteriormente, valores de  $K$  caracterizan la medida del campo de tensiones en torno de la punta de la grieta, hasta porque el análisis de tensiones lineal elástica en la punta cuando  $r = 0$  lleva a valores infinitos.

Consecuentemente, adoptando apenas  $K$  para evaluación de la grieta, el valor del factor de intensidad de tensión puede ser directamente relacionado con la carga nominal aplicada  $\sigma$ , y con la raíz cuadrada del tamaño de la grieta  $a$ . En todos los casos, la forma general del factor de intensidad de tensión puede ser dada por:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} f \quad (2.13)$$

donde  $f$  es un parámetro que depende de la geometría de la pieza, condiciones de cargamento, forma y orientación de la grieta. En la literatura diversas expresiones de  $K$  para diversas condiciones (Apéndice A).

Las siguientes relaciones existen entre la energía de la fractura  $G$  y  $K_I$ :



$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} \text{ y } G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (2.14)$$

siendo  $E' = E / (1-\nu)$  en estado de deformación plana y  $E' = E$  en estado de tensión plana.  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

En caso general:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (2.15)$$

donde  $G$  es el módulo de cizallamiento.

## 2.5. Integral J

La Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (MFLE) solamente es válida cuando la deformación no lineal del material es confinada a una pequeña región alrededor de la punta de la grieta. En muchas situaciones es virtualmente imposible caracterizar el comportamiento por la MFLE, y otro enfoque de la Mecánica de la Fractura tiene que ser usada. La Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica se aplica varias de aquellas situaciones.

Los dos parámetros elasto-plásticos más usados son CTOD (*crack tip opening displacement*) y la integral  $J$ . Estos parámetros describen condiciones de la grieta para materiales elasto-plásticos y pueden ser usados como criterio de falla. Hay límites de aplicabilidades para la integral  $J$  y para o CTOD, sin embargo no son tan restrictos como los de la MFLE.

La integral  $J$ , introducida por Rice (1968), es una integral de línea en torno de la punta de la grieta, invariante para cualquier recorrido utilizado desde que se inicie en la cara inferior y termine en la cara superior de la grieta.

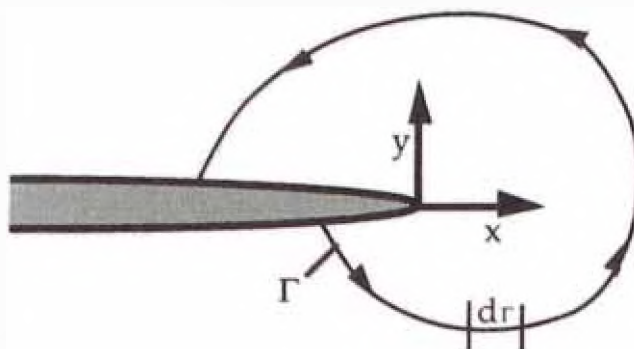


Figura 2.5 - Contorno arbitrario alrededor de la punta de una grieta.

La integral  $J$  es definida en relación a un eje local de coordenadas cuyo origen se sitúa en la punta de la grieta, como muestra la Figura 2.5. La expresión de  $J$  es:

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W n_x - \sigma_{ij} \eta_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] d\Gamma \quad (2.16)$$

donde  $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  es una energía de deformación por unidad de volumen,  $u_i$  representa el vector de desplazamientos y  $\eta_j$  son los cosenos directores del camino  $\Gamma$ .

En el caso de la MFLE, la integral  $J$  es numéricamente igual la tasa de liberación  $G$  y, por lo tanto, también se relaciona con  $J$  a través de la ecuación (2.15).

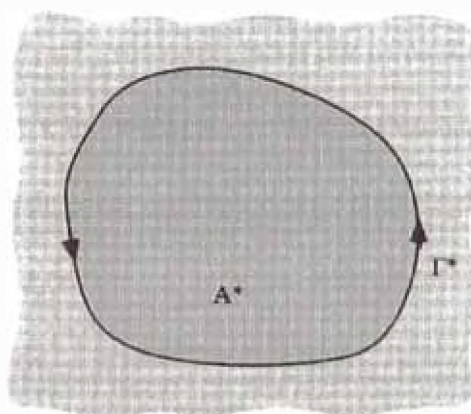


Figura 2.6 - Contorno cerrado utilizado para cálculo de la integral  $J$ .

Rice (1968) demostró la independencia de la integral  $J$  en el camino considerando la Figura 2.6, que representa un camino de integración cerrado, sin incluir ninguna grieta, donde se tiene que:

$$J^* = \int_{\Gamma^*} \left[ W n_x - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] d\Gamma^* \quad (2.17)$$

Aplicando el teorema de Green, la expresión de  $J^*$  se convierte en:

$$J^* = \int_A \left[ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (2.18)$$

donde  $A^*$  es el área cerrada de  $\Gamma^*$ . Desarrollando el primer término de esta ecuación:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \quad (2.19)$$

Aplicando la relación tensión-deformación (pequeños desplazamientos), y

utilizando la ecuación de equilibrio  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$  y  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , por fin se tiene que:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) es idéntica al segundo término de la ecuación (2.18). Esto demuestra que la integral  $J = 0$  para cualquier contorno cerrado.

Se considera ahora dos contornos arbitrarios  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  en vuelta de la grieta, como muestra la Figura 2.7. Si  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  son conectados por otros dos caminos a lo largo de la cara de la grieta por  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ , un contorno cerrado es formado. La energía total  $J$  en el contorno cerrado es suma de las contribuciones de cada segmento.

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0 \quad (2.21)$$

Si en la superficie de la grieta  $T_i = 0$ . Luego,  $J_3 = J_4 = 0$  y  $J_1 = -J_2$ . Así que, cualquier camino en torno de la grieta tendrá el mismo valor de  $J$ , que independiente del camino.

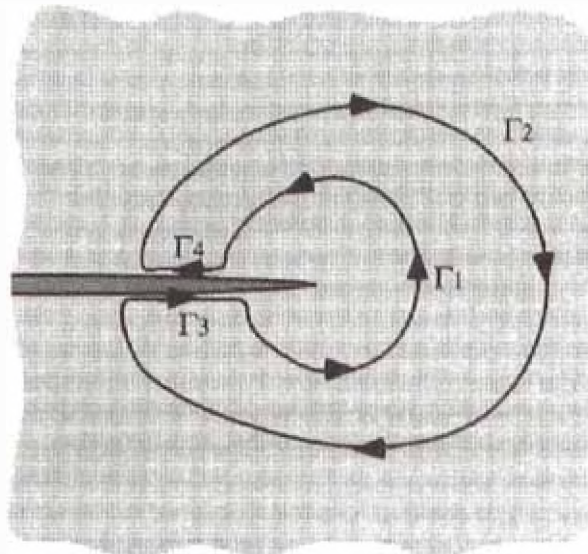


Figura 2.7 - Dos contornos arbitrarios,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , en torno de la grieta. Eses contornos son conectados por  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  formando un contorno cerrado, y el total de  $J=0$ .

## **2.6. Propagación de grietas por fatiga**

La rotura por fatiga es un tipo de falla mecánica caracterizada por la generación y/o propagación paulatina de una grieta, causada por las repeticiones de las cargas aplicadas sobre la pieza. Ese proceso puede en muchos casos causar la fractura de los componentes de la estructura.

Muchos parámetros afectan la resistencia de los componentes estructurales a la fatiga. Estos parámetros son relativos a las sollicitaciones, geometría, propiedades de los materiales y ambiente externo. Los parámetros de sollicitaciones incluyen estados de tensiones, razón entre los factores de intensidad de tensión máxima y mínima, cargas constantes o variantes, frecuencias o tensiones máximas. A geometría de la estructura influye principalmente el gradiente de las tensiones y los factores de intensidad de tensiones. Las propiedades mecánicas y metalúrgicas caracterizan el comportamiento del material. Los parámetros del ambiente externo incluyen temperaturas y agresividad del ambiente.

### Curva $da/dN$ vs. $\Delta K$

En el inicio de la década de 60, Paris (1960; 1961) demostró convincentemente que la variación del factor de intensidad de tensión ( $\Delta K$ ), y no la tensión, es el parámetro que controla la propagación de las grietas por fatiga, ver Figura 2.8.

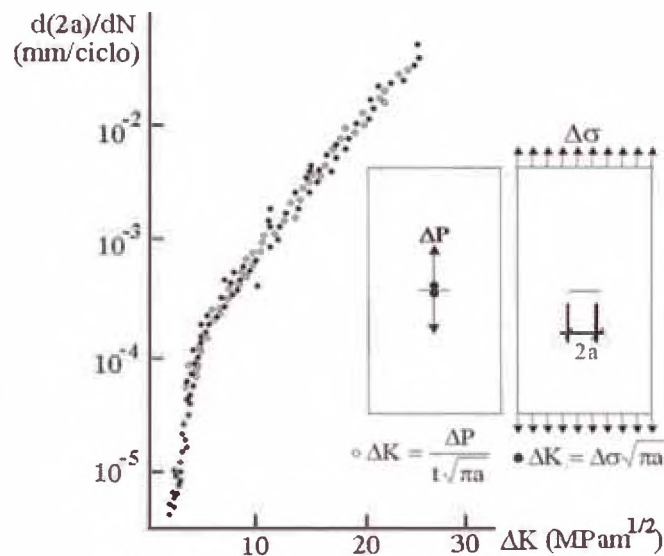


Figura 2.8 - Experiencia efectuada por Paris.

En un experimento clásico, Paris usó dos placas idénticas, hechas del mismo material y con una grieta central de la misma longitud. La placa 1 fue cargada por los bordes mientras que la placa 2 fue cargada por las caras de la grieta, manteniendo el mismo rango de tensión en las dos placas. Como ambas placas trabajaban bajo el mismo  $\Delta\sigma$ , la tensión no podía estar controlando la propagación de las grietas. Sin embargo, debido a la forma de la aplicación de la carga, en la placa 1  $\Delta K$  aumentaba a medida que la grieta crecía, mientras en la placa 2  $\Delta K$  decrecía a medida que la grieta crecía. Así que Paris sugiere que era  $\Delta K$  que controlaba la propagación, y demostró que cuando se relaciona la tasa de propagación de la grieta ( $da/dN$ ) con  $\Delta K$ , los puntos experimentales generados para ambas placas coincidían.

Graficando  $da/dN$  vs.  $\Delta K$ , en la forma logarítmica, típicamente se obtiene una curva con 3 fases bien distintas (Figura 2.9). Esta curva es de grande importancia en la práctica, porque con ese tipo de información se puede hacer previsiones sobre la vida residual de las estructuras agrietadas. Las tres fases son:

**Fase I:** tiene como principal característica un umbral de propagación, abajo del cual las cargas no causan daños a la pieza agrietadas y la grieta no se propaga. Este umbral recibe el nombre de umbral de propagación de grietas por fatiga, y es caracterizado por un factor de intensidad de tensión umbral ( $\Delta K_{th}$ -*threshold*).  $\Delta K_{th}$  es mucho influenciado por obstáculos (como vacíos e inclusiones) y por cierre de las grietas de fatiga. El cierre ocurre porque las grietas se propagan cortando un material previamente deformado por las zonas plásticas que (siempre) las acompañan. Las caras de las grietas de fatiga quedan embutidas en una envoltura de deformaciones residuales tractivas, que las comprimen cuando son completamente descargadas, y solamente abren paulatinamente al ser cargadas.

La fase I va del umbral  $\Delta K_{th}$  hasta las tasas de  $10^{-10}$  a  $10^{-9}$  *m/ciclo*, esto es, hasta tasas de orden de un espacio atómico por ciclo (diámetro atómico  $\sim 0.3$  nm). La zona plástica  $ZP_{cíclica} \sim (\Delta K/2S_E)^2/2\pi < d_{grano}$  ( $d_{grano}$  es típicamente de 10 a 100  $\mu m$  en las ligas estructurales metálicas). El crecimiento de la grieta es discontinuo, generado por micro-mecanismos intergranular sensibles a la carga media, a la microestructura del material, al ambiente y a la carga de abertura de la grieta. Abajo  $\Delta K_{th}$  del umbral las grietas no propagan.

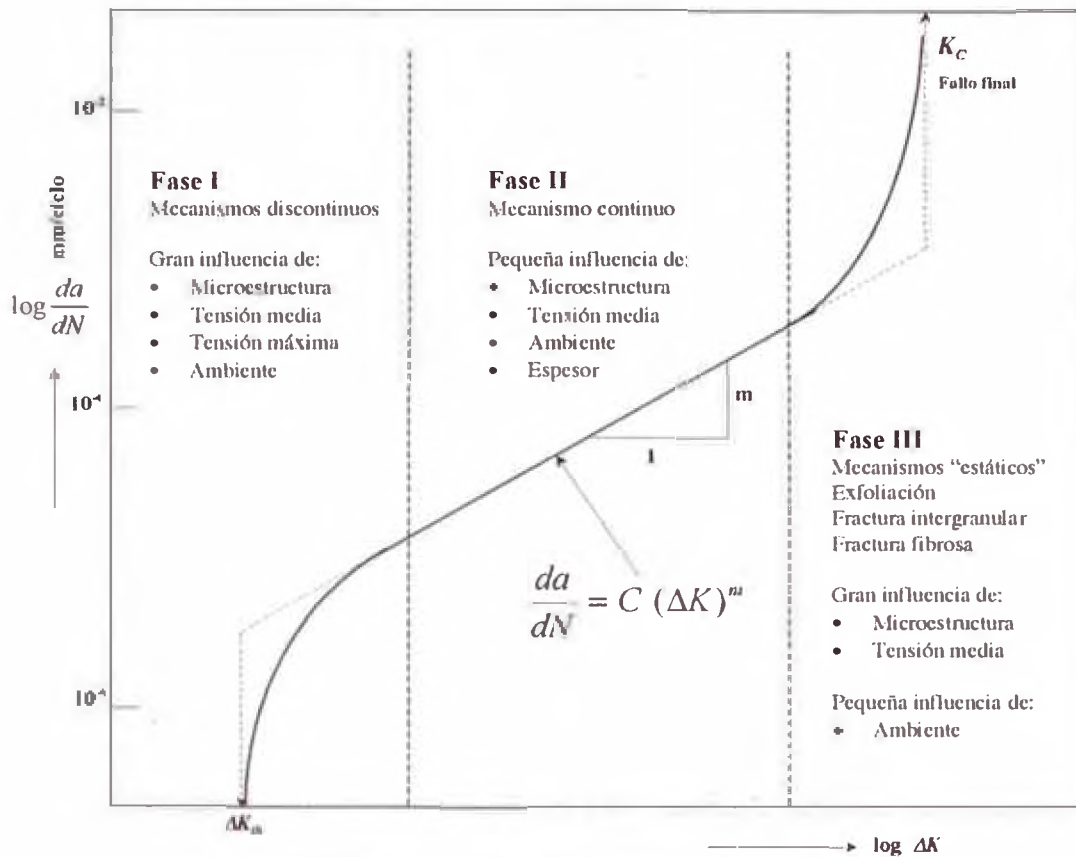


Figura 2.9 - Curva típica de propagación de grietas por fatiga.

**Fase II:** En esta fase las tasas van de  $10^{-10}$  hasta  $\sim 10^{-9}$  m/ciclo, o de cerca de un espaciado atómico hasta de la orden de un tamaño de grano por ciclo. La zona plástica cíclica  $ZP_{ciclica} > d_{grano}$ , esto es, la plasticidad cíclica al frente de la punta de la grieta activa micro-mecanismos multigranulares. El crecimiento de la grieta es aproximadamente continuo a lo largo de su frente, como indicado por las estrías observadas en las caras de las grietas cuando observadas en un microscopio electrónico de barrido (las estrías son la características de la fractografía más importante de las grietas de fatiga).

La regla de propagación  $da/dN$  es controlada por las fuerzas cíclicas que acompañan las puntas de las grietas de fatiga, y es poco sensible a la microestructura, la carga media, al medio ambiente y la espesura de la pieza. En esta fase el rango de

las deformaciones cíclicas dependiendo principalmente de  $\Delta K$ , y tanto la carga de abertura de la grieta  $K_{ab}$  cuanto la tenacidad del material  $K_C$  poco influyen las tasas de propagación.

**Fase III:** Esta fase tiene como característica principal la propagación inestable de la grieta (o la fractura de la pieza) cuando  $K_{max} = \Delta K/(1-R)$  alcanza la tenacidad del material  $K_C$ .

La zona plástica  $ZP_{ciclica} \gg d_{grano}$ , y la mayor tasa de crecimiento de la grieta es limitada por  $CTOD_C \sim K_C^2/ES_E$ . Los mecanismos de fractura pueden ser dúctiles (cavitaciones y coalescencia de vacíos) o frágiles (clivaje), y se superponen a los de grieta. Esta fase depende de  $K_{max}$  y de  $K_C$ , luego es sensible a la carga media y los factores que afectan la tenacidad del material, como la microestructura, el medio ambiente y la espesura de la pieza ( $K_C$  depende no apenas del material pero también de la geometría, a menos que  $Z_{PC} \ll$  todas las dimensiones de la pieza). En el Apéndice B se presenta ecuaciones empíricas para describir el crecimiento de las grietas por fatiga.

## **2.7. Teoría de la fractura cohesiva**

Existe una zona donde se procesa la fractura en la punta de la grieta que puede ser resultado de la fluencia en el caso de materiales dúctiles, o de la formación de microfisuras para materiales frágiles homogéneos. Teniendo en vista la existencia de la referida zona, Barenblatt (1962), citado por Liebowitz (1968), desarrollo modelos que la llevan en consideración. Un modelo que se basa en el concepto de longitud de fisura ficticia, cuyo objetivo era representar de forma simplificada la zona de procesos inelásticos en la punta de la grieta. Estos modelos son considerados cohesivos, una que



asumen la presencia de fuerzas cohesivas actuando a lo largo de la zona de procesamiento de la fractura.

A través de una teoría, compuesta de tres postulados, Barenblatt (1962) represento explícitamente las fuerzas de cohesión como siendo una distribución de fuerzas actuando en pequeñas zonas de longitud  $d$  despreciable cuando comparada al tamaño de la grieta.

De acuerdo con la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFLE), una grieta con la forma inicial de una línea asume la forma de una elipse esbelta con la aplicación de una tensión normal de tracción, considerando que las caras de la grieta están completamente libres de fuerzas aplicadas, conforme puede ser observado en la Figura 2.1 por la línea discontinua.

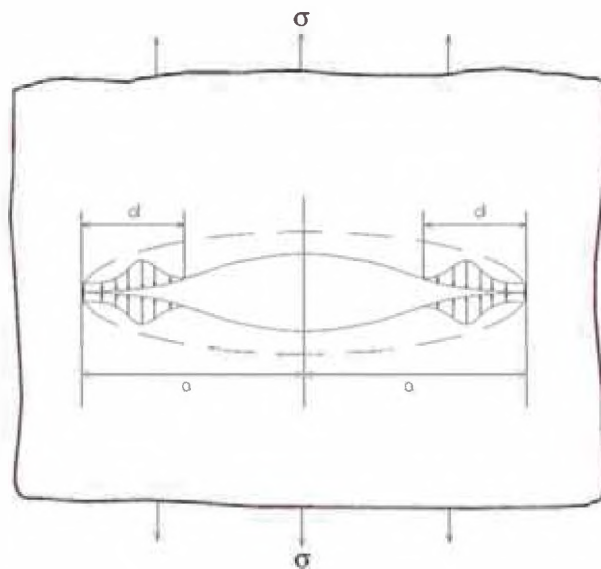


Figura 2.10 - Tensiones cohesivas en la punta de la grieta.

El primer postulado de la teoría dice que las tensiones cohesivas son de carácter comprensivo y tienden a unir las caras de la grieta, mientras que las singularidades inducidas por la tracción externa son de carácter tractivo. Entonces surge la posibilidad de una cancelar a otra y el campo final de tensiones se convierte no singular.

El segundo postulado hace referencia a la región de actuación de las tensiones cohesivas, indicando que la distribución de tensiones cohesivas  $G_m(\xi)$  es limitada a una zona pequeña dentro de una distancia  $d$ , distancia que se extiende de la grieta en  $x=a$  como indicado en la Figura 2.11. Así,  $G_m(\xi)$  es significativa en la zona cohesiva  $a-d < x < a$ , pero desaparece para  $0 < x < a-d$ , siendo  $d/a$  es pequeño, comparado con la unidad.

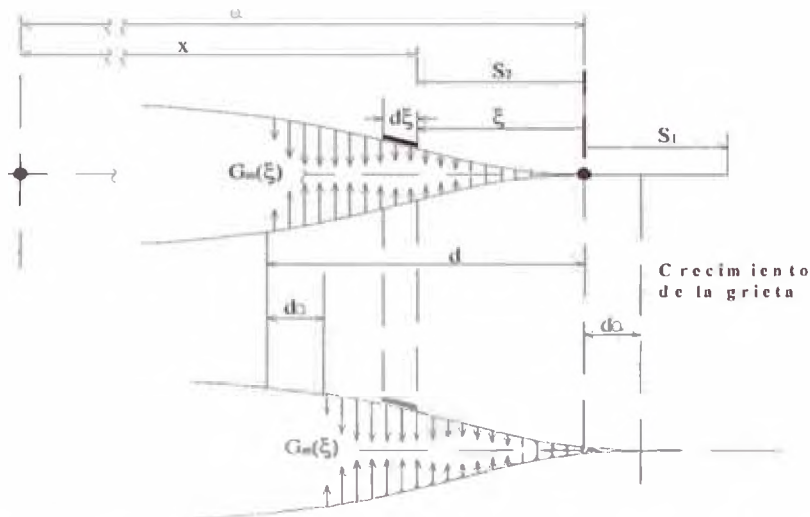


Figura 2.11 - Crecimiento de la grieta conforme la teoría de Barenblatt (1962).

O tercer postulado dice: “La forma de la sección normal de la superficie de la grieta en la región de sus extremos – y consecuentemente, la distribución local de las tensiones de cohesión sobre la superficie agrietada – no depende de las cargas aplicadas y es siempre la misma para un dado material bajo las mismas condiciones (temperaturas, composición y presión ambiente)”.

Conforme el tercer postulado, Barenblatt (1962) constata que la forma y la distribución de las tensiones cohesivas  $G_m(\xi)$  permanece la misma, sin embargo traslada junto con la punta de la grieta, siendo por tanto una propiedad del material.

Dugdale (1960), formuló independiente una teoría semejante para materiales elasto-plásticos, en el cual la tensión de fluencia desempeña función similar a la tensión cohesiva del modelo de Barenblatt.

## **2.8. Ensayos relacionados a la mecánica de la fractura**

Para la realización del ensayo que determina la tenacidad de la fractura  $K_{IC}$ , se tiene normas como la ASTM E 399 que es la más difundida, además se tiene la Norma Europea EN ISO 12737 y la Británica BS:7448, que confieren el conjunto de Normas para caracterizar, el parámetro más importante de la tenacidad de un material, por dos razones: 1) en esas condiciones ocurren la mayoría de roturas catastróficas en la práctica; 2) representa un valor mínimo de la tenacidad del material cargado estáticamente y por tanto el diseño con la máxima seguridad de estructuras para las que no se prevén cargas dinámicas.

Las Normas indicadas sugieren distintos tipos de probetas, siendo las más utilizadas las probetas de flexión y la probeta compacta, cuyas formas y dimensiones pueden verse en la Figura 2.12-a. El método de ensayo con estas probetas consiste en el plegado (con tres puntos de apoyo), para la probeta de flexión y la tracción, para la probeta compacta. En la Figura 2.12-b se presentan otras probetas que tienen la forma de disco o arco, que se utilizan en ocasiones para secciones de materiales con formas acabadas próximas a las probetas indicadas, como barras redondas, tubos, etc.

Es muy importante tener en cuenta el plano y la dirección de extensión de la grieta en relación con las direcciones características del producto, particularmente si se trata de productos laminados, forjados o fundidos que presentan importantes diferencias anisotrópicas. Para tal efecto la Normalización actual contempla la

identificación del plano de agrietamiento. Se utiliza una notación con guiones en los que las letras que preceden al guion representan la dirección perpendicular al plano de agrietamiento y las letras que siguen al guion representan la dirección prevista de la extensión de la grieta (como muestra la Figura 2.13).

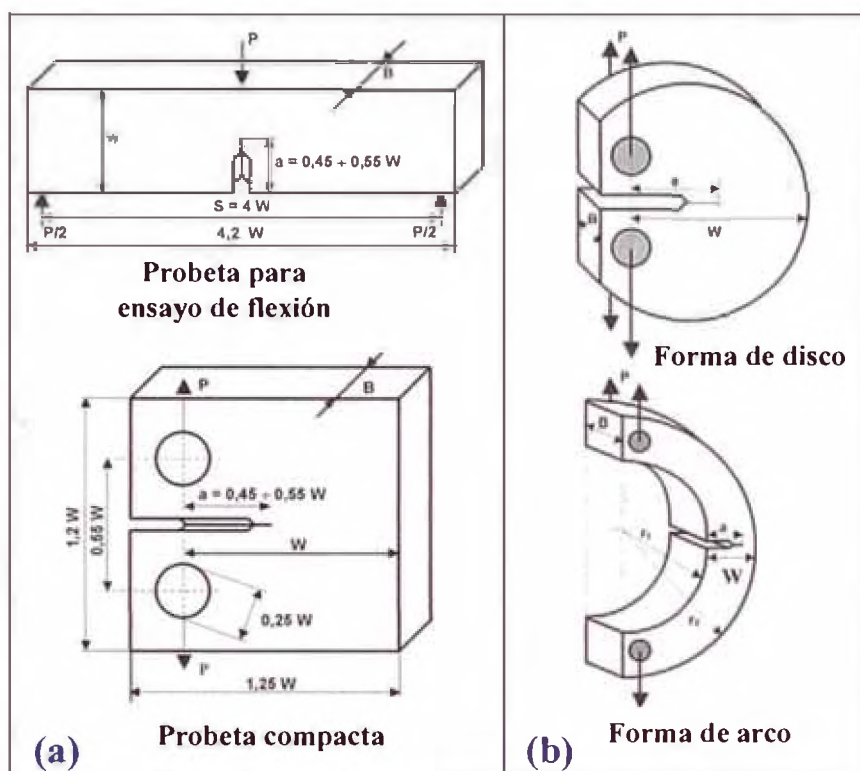


Figura 2.12 - Probetas Normalizadas para los ensayos de determinación de la tenacidad de fractura.

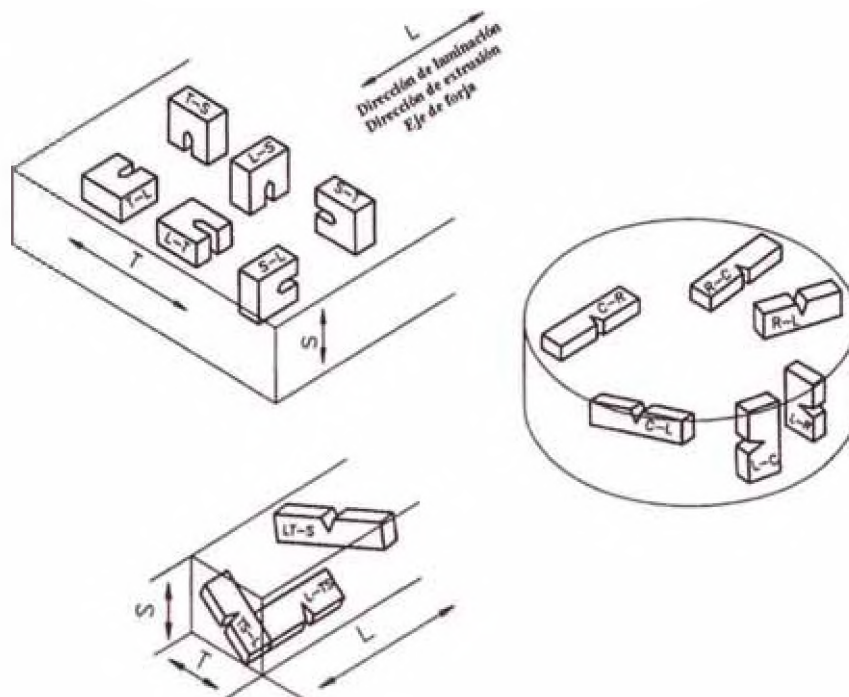


Figura 2.13 - Denominación de las probetas según su orientación (UNE 7540-1998).

La introducción de una grieta aguda en una probeta se realiza habitualmente por fatiga. Esta permite la creación y propagación controladas de la grieta y es el método prescrito por las Normas. Para asegurar la posición de la grieta de fatiga, así como para poder desarrollarla con niveles de intensidad de tensiones bajos, las probetas se mecanizan con una entalla cuya forma más conveniente es el entalle terminada en V como muestra la Figura 2.14), pues evita la progresión de la grieta fuera del plano central de la probeta y favorece la propagación de la grieta con un frente aproximadamente normal a las caras externas, todo lo cual es también exigencia de la Norma<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> La descripción del método de medida de  $K_{IC}$  se está haciendo de una manera general. Para los detalles de dimensiones secundarias en el ensayo, tolerancias, etc., debe consultarse el texto completo de alguna de las Normas que se han recomendado.

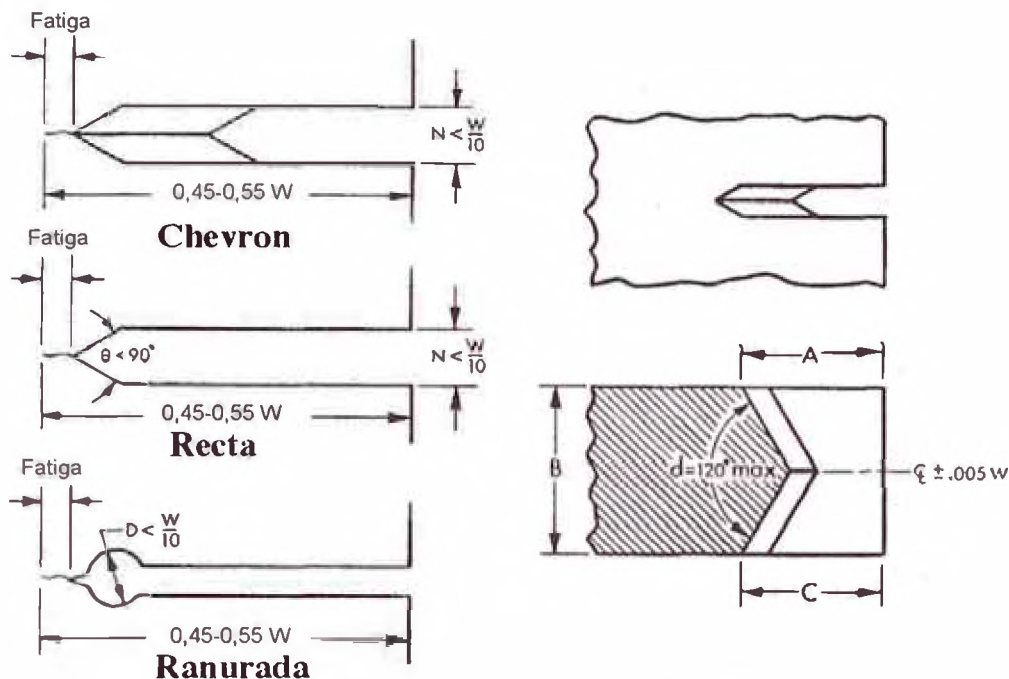


Figura 2.14 - Formas de entalles (ASTM E 399).

El valor de  $K_{IC}$ , determinado a partir de la estricta aplicación de las Normas es una constante del material. Si no se siguen los criterios normalizados para la determinación de  $K_{IC}$ , el valor de  $K$  no es una constante del material, ya que depende de la geometría. Teniendo en cuenta que las estructuras no presentan un estado de deformación plana por razones de espesor insuficiente su resistencia a la propagación de grietas no está determinada por  $K_{IC}$ . En estos casos la tenacidad real es normalmente mayor que  $K_{IC}$  y en cualquier caso el uso de  $K_{IC}$  representa un cálculo conservador del tamaño de grieta y de la tensión residual para dicha estructura.

Los materiales presentan en deformación plana valores de  $K_{IC}$  que van desde 1 a 7  $MPa m^{1/2}$  para los polímeros hasta 25 a 120  $MPa m^{1/2}$  para los aceros y metales de alta resistencia. Los aceros y metales de bajo límite elástico y alta ductilidad llegan a tener valores de tenacidad de fractura  $K_{IC}$  de hasta 200  $MPa m^{1/2}$ , de manera que para alcanzar las condiciones de validez de deformación plana se requieren probetas con espesor de un metro aproximadamente y en este caso la caracterización de la

resistencia al agrietamiento estará basada en mecanismos de fractura diferentes que el elástico-lineal del  $K_{IC}$ ; de esta manera se utilizarán el valor de CTOD o la integral  $J$ . En el Apéndice C se presenta una tabla valores típicos de tenacidad  $K_{IC}$  de fractura para diferentes materiales.

Los valores de la tenacidad de fractura  $K_{IC}$  dependen de la temperatura y de la velocidad del ensayo. Se consideran ensayos dinámicos a los correspondientes a una velocidad de impacto, es decir en torno a  $dK/dt = 10^5 \text{ MPa m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$  es decir  $10^5$  veces más que las velocidades de carga que consideramos en régimen estático. Existen diversos métodos para la medida experimental de  $K_{Id}$  (tenacidad en condiciones dinámicas). El más utilizado es el del péndulo Charpy instrumentalizado y la fuerza se registra en función del tiempo en un osciloscopio, el cual inicia la lectura cuando la maza del péndulo intercepta un rayo luminoso de una fotocélula, justamente antes del impacto con la probeta.

Con relación a los ensayos relacionados a mecánica de la fractura existen aún otros procedimientos normalizados que analiza el comportamiento de la fractura. En el Apéndice D se presenta las siguientes tablas: (1) Principales ensayos relacionados a la mecánica de la fractura lineal elástica normalizada por la ASTM. (2) Principales parámetros y definiciones de métodos de ensayos con base en la mecánica de la fractura elasto-plástica.

## CAPÍTULO 3

### MÉTODOS NUMÉRICOS DE PROPAGACIÓN DE FRACTURA

#### 3.1. Introducción

En este capítulo se presenta una revisión de los principales métodos numéricos disponibles en la literatura para el análisis del problema de propagación de la fractura. Una amplia variedad de métodos se ha desarrollado en los últimos años para simular la iniciación y propagación de grietas. Soluciones analíticas o semianalíticas, método integral de contorno, método de elementos de contorno, método de elementos finitos, método de elementos discretos y, recientemente, una serie de elementos sin malla ha sido utilizado con éxito para modelar grietas, cada uno proporciona ventajas y desventajas de manipular ciertas partes de la simulación. Aunque los mismos conceptos pueden ser más o menos aplicados a diversos métodos numéricos, el énfasis de este capítulo es sólo para el método de los elementos finitos.

Para modelar numéricamente la propagación de la fractura existen en la literatura dos enfoques, esto son abordaje discreta y continua. En el modelamiento de la discontinuidad discreta se representa geoméricamente la discontinuidad en la malla de elementos finitos, la parte continua tiene un modelo constitutivo, mientras que la interface discontinua tiene otro modelo constitutivo, la Figura 3.1-a. En este grupo se tiene los elementos de interface. En el modelamiento continuo de discontinuidad no hay representación geométrica de la discontinuidad en la malla de elementos finitos,



un único modelo constitutivo se aplica tanto a la parte continua y la interface discontinua, la Figura 3.1-b en este grupo se tienen modelo de fisuración distribuida (*smearred crack*), *embedded finite element method* (EFEM) y *extended finite element method* (XFEM).

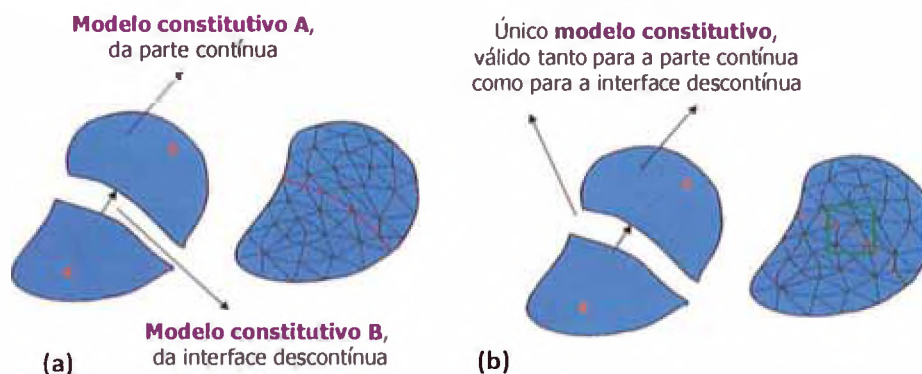


Figura 3.1 - Modelos de la discontinuidad vía MEF: a) discreta b) continua.

### 3.2. Elemento singular

En la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (MFLÉ), el cálculo de los factores de intensidad de tensión es uno de los principales objetivos del análisis. Estos factores definen la magnitud de los campos de tensiones en la punta de la grieta y auxilian en la predicción de los ángulos e incrementos de la evolución de la grieta. Las tensiones, en este caso, presentan una singularidad en la punta de la grieta, donde  $r$  es la distancia radial a partir de la punta de la grieta.

La principal dificultad fue capturar la singularidad de la punta de la grieta con elementos convencionales, así fue propuesto los elementos *quater-points* o elementos singulares, isoparamétricos, sugeridos independientemente por Henshell & Shaw (1975) y Barsoum (1976), que se tornaron populares entre los investigadores por ser más simple y proporcionar resultados más precisos con mallas relativamente groseras.

Los elementos finitos singulares fueron desarrollados para simular la singularidad de la punta de la grieta, que ofrecen grandes ventajas. El modelo es construido moviendo los nodos del medio para puntos próximos de un cuarto, ninguna otra alteración en la formulación de los elementos finitos es necesaria como se muestra en la Figura 3.2.

Los elementos singulares *quarter-points* son formados por los elementos isoparamétricos convencionales, triangulares o cuadrangulares, de orden cuadrática, cuya singularidad  $1/\sqrt{r}$  es introducida desviando el nodo del medio del lado para la posición de  $1/4$  del lado (Figura 3.2). Barsoum (1976) demostró que el elemento triangular proporciona mejores resultados que el elemento cuadrilateral. En el triangular, la singularidad es encontrada tanto en el contorno cuanto en el interior del elemento, mientras que en el cuadrilateral, solamente es encontrada en el interior del elemento.

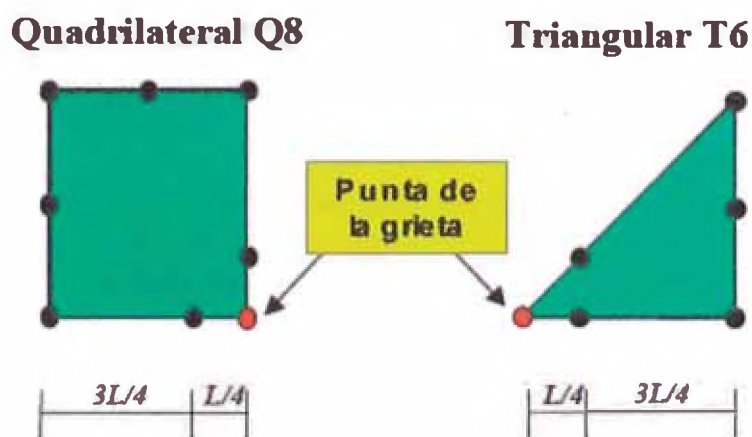


Figura 3.2 - Elementos singulares cuadrilateral y triangular.

Estos elementos son dispuestos en la punta de la grieta en forma de una roseta. La roseta padrón es formada por ocho elementos que forman entre si un ángulo de  $45^\circ$ , normalmente alineada con la grieta (Figura 3.3-a). Otras configuraciones de rosetas pueden ser formadas, como la roseta de elementos con ángulo de  $40^\circ$  (Figura 3.3-b) y

con ángulo de  $30^\circ$  (Figura 3.3-c). Un ejemplo de como la roseta se posiciona en la malla de elementos finitos es mostrado en la Figura 3.4. En esta figura dos rosetas están posicionadas en las puntas de las grietas

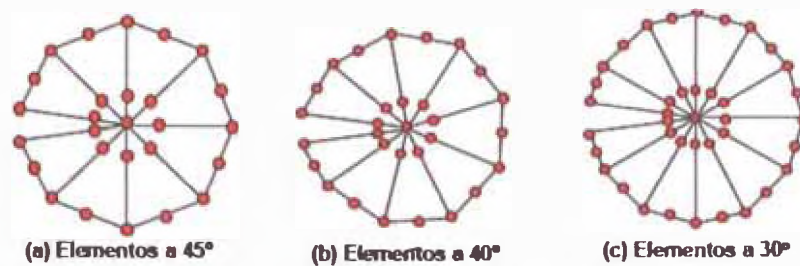


Figura 3.3 - Rosetas de elementos finitos: (a) padrón; (b) con elementos a  $40^\circ$ ; (c) con elementos a  $30^\circ$ .

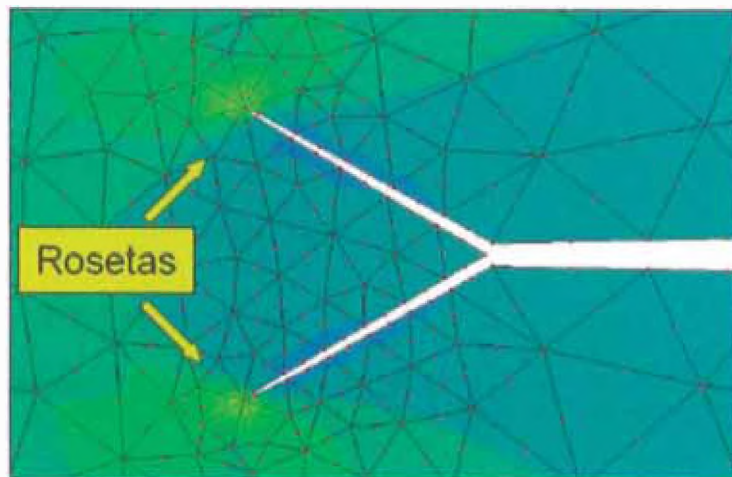


Figura 3.4 - Posición de dos rosetas en las puntas de grieta.

La propagación de la fractura requiere que la malla de elementos finitos que conforma la geometría del modelo y contiene la grieta, necesita ser actualizado cada vez que la grieta crece (*remeshing*). Esto es computacionalmente caro y complicado.

El uso de estos elementos tiene considerablemente reforzado nivel de precisión obtenida por el método de los elementos finitos para la simulación en el campo de desplazamientos en la punta de la grieta, Anderson (1995). Antes del desarrollo de nueva técnicas como XFEM, los elementos singulares han sido el enfoque más popular para el análisis de fractura.

### **3.3. Elementos cohesivos**

Fenómenos de propagación de fracturas y fragmentación pueden ser modelados a través de Modelos de Zona Cohesiva (Xu & Needleman, 1994; Camacho & Ortiz, 1996; Zhang & Paulino, 2005; Park et al., 2009), y simulados en el método de los elementos finitos. Entre los principales enfoques computacionales para la representación de fracturas es a partir de elementos de interface, llamados cohesivos, mientras que los elementos volumétricos tradicionales representan las deformaciones del medio continuo. Los elementos cohesivos son insertados en las interfaces entre pares de elementos volumétricos adyacentes en la malla de elementos finitos.

Los modelos con base en elementos cohesivos pueden ser clasificados como: intrínseco o extrínseco.

#### **3.3.1. Modelo intrínseco**

En el enfoque intrínseco (Xu & Needleman, 1994), elementos cohesivos poseen una respuesta inicial elástica, como mostrada por la curva de tracción-separación en la Figura 3.5-a. A partir del origen, la tracción  $T$  aumenta en relación a la separación  $\delta$ , hasta alcanzar un valor máximo  $\sigma_c$ , que corresponde al límite para el inicio de fractura. Después este punto, la tracción disminuye hasta el momento en que la separación alcanza el valor de  $\delta_c$ , en el cual se considera haber ocurrido una completa separación (o descohesión).

De forma general, modelos intrínsecos requieren que elementos cohesivos estén presentes en las interfaces entre todos los elementos volumétricos de la malla, o de toda la región donde haya la posibilidad de ocurrencia de fracturas, antes del inicio de

la simulación, pues la trayectoria de la fractura no es conocida a priori. Después del inicio de la simulación, no es más necesario modificar la topología de la malla.

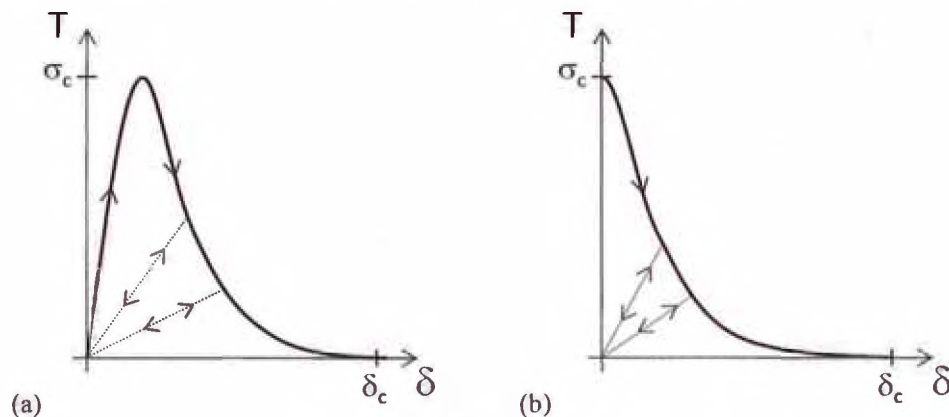


Figura 3.5 - Curvas de tracción ( $T$ ) en función de la separación ( $\delta$ ) para: (a) modelos cohesivos intrínsecos; e (b) modelos cohesivos extrínsecos. Para efecto de ilustración, se asume descarga/recarga elástico (líneas punteadas).

### 3.3.2. Modelo extrínseco

Modelos extrínsecos (Camacho & Ortiz, 1996; Ortiz & Pandolfi, 1999; Park et al., 2009), por otro lado, requieren que elementos cohesivos sean insertados de forma adaptativa en las interfaces entre elementos volumétricos, apenas donde y cuando necesarios (es decir, cuando un criterio de fractura es alcanzado). De esta forma, solamente la parte de la curva de tracción-separación relativa a la fractura es representada, como se muestra en la Figura 3.5-b, evitándose así un comportamiento artificial antes de la ocurrencia de la fractura. Durante la evolución de la simulación numérica, se determina si el criterio de la fractura fue alcanzado para las interfaces entre cada par de elementos volumétricos del modelo de elementos finitos. En caso positivo, elementos cohesivos son creados. Con esto, fracturas pueden propagarse u ocurrir espontáneamente, conforme dictado por la física del problema; esto es ilustrado en la Figura 3.6.

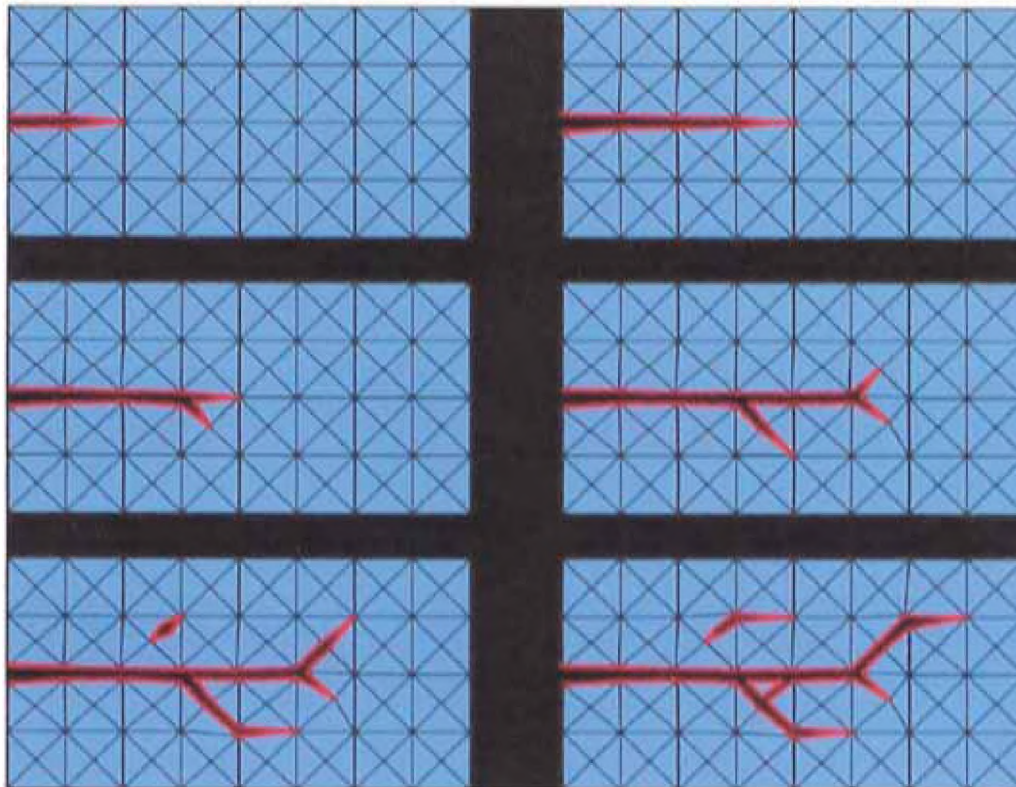


Figura 3.6 - Propagación y ocurrencia espontánea de fracturas.

Modelos cohesivos de fractura, en general, requieren un alto nivel de refinamiento de malla en regiones alrededor de puntos de fracturas, de forma que el comportamiento no lineal en esas regiones pueda ser correctamente capturado. Además de eso, la dirección de propagación de fracturas tiende a ser altamente dependiente del nivel de refinamiento. Debido a las limitaciones de los recursos computacionales actuales, modelos de dimensiones reducidas son utilizados. De esta forma, para obtenerse resultados precisos y poco sensibles a la malla utilizada, es necesaria una grande cantidad de memoria y poder de procesamiento.

### 3.4. Elementos Enriquecidos

En este método, el campo de desplazamientos discontinuo dentro de un elemento finito es simulado por un conjunto especial de funciones de forma enriquecida que permiten la aproximación rigurosa del campo de desplazamiento. La Figura 3.7 ilustra un modelo en que el camino de la grieta atraviesa por el medio de los elementos. La presencia de la grieta no es geoméricamente modelada y la malla no precisa ser actualizada. La aproximación enriquecida es adicionada al modelo clásico de elementos finitos para llevar en cuenta los efectos de la grieta o de la discontinuidad (Moes et al., 1999).

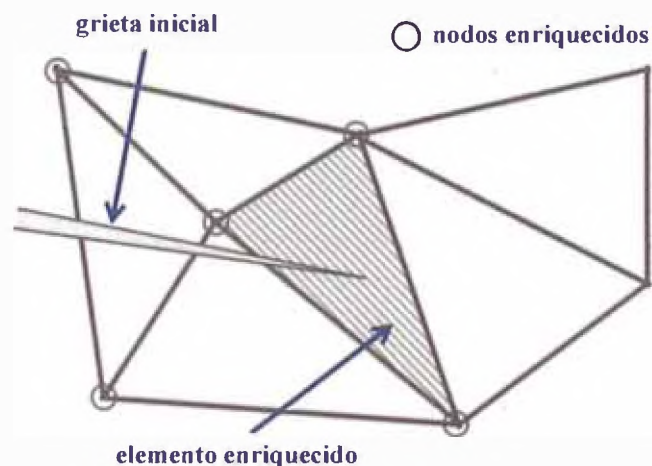


Figura 3.7 - Elemento enriquecido.

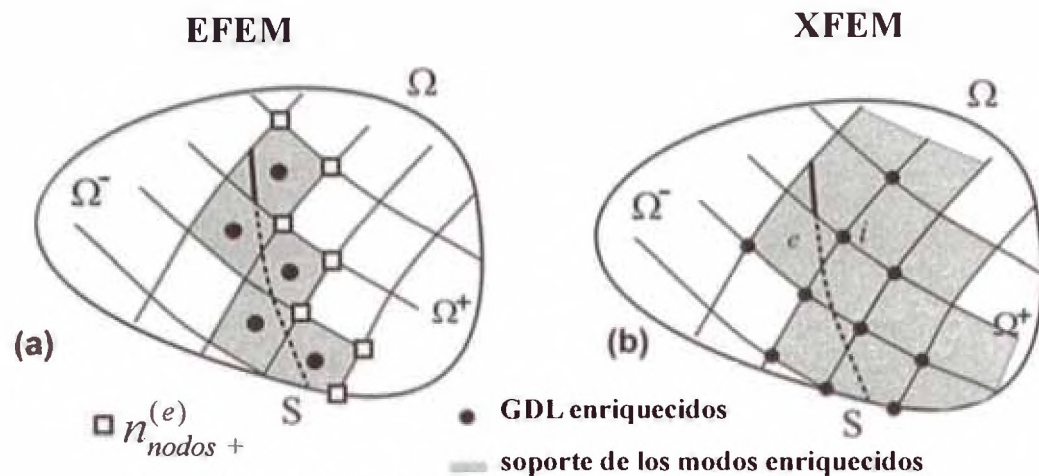
La ventaja principal del método es que no requiere remallado (*remeshing*) en el proceso de propagación de la grieta. Por avance de la posición de la punta de la grieta o cualquiera alteración en el camino debido a las condiciones de carga, el método determina automáticamente los elementos alrededor del camino/punta de la grieta y genera las funciones necesarias para el enriquecimiento de los elementos finitos asociados o puntos nodales en conformidad.

La localización de grietas iniciales o propagación de caminos potenciales no afectan la forma como el modelo de elemento finito inicial es construido. Múltiples grietas e intersecciones pueden ser igualmente simuladas por la misma malla de elementos finitos con niveles comparables de precisión.

Cuanto a la técnica de enriquecimiento, dos grandes familias pueden ser distinguidas en términos de soporte de los modos de desplazamientos discontinuos enriquecidos, un estudio comparativo sobre estos enfoques puede ser encontrado en Oliver et al. (2006):

- Formulación de tipo EFEM: En este método el soporte de cada modo es un elemento, lo que significa que los modos discontinuos son incorporados a un nivel de elemento (Figura 3.8-a). Este enfoque requiere que la fractura propaga un elemento de cada vez.
- Formulación de tipo XFEM: En este método el soporte de cada modo es el mismo que el soporte de funciones de forma del método de los elementos finitos, i.e., los elementos comparten un nodo específico (Figura 3.8-b). Este método generalmente utiliza el concepto de partición de la unidad de modo a incluir las funciones de enriquecimiento y es conocida con el nombre de Método de los Elementos Finitos Extendidos (XFEM). En el Capítulo 4 se describe con detalle este método numérico.





### 3.5. Técnicas Alternativas

El método de los elementos finitos ha sido ampliamente utilizado para el análisis de fractura de las estructuras por muchos años. Sus desventajas han sido evitadas por el desarrollo de nuevas ideas y técnicas, y ahora se tornó un abordaje maduro y poderoso para el análisis de ingeniería y muchos problemas físicos. Sin embargo, problemas envolviendo la generación temporal de la malla llevaron los investigadores al desarrollo de técnicas adaptativas de la discretización del dominio. Por ejemplo, los métodos sin malla se desarrollaron significativamente en últimas dos décadas.

Algunos de los métodos alternativos son los siguientes:

- *Numerical Manifold Method* (NMM);
- *Smoothing Particle Hydrodynamics* (SPH);
- Acoplamiento del Método Elementos Finitos -Método Elementos Discretos;
- *Discontinuous Galerkin Method* (DGM); y
- *Multi-scale distinct lattice spring model* (M-DLSM)

La discusión sobre estas técnicas está fuera del ámbito de esta tesis. Con todo, ellos comparten ideas semejantes, y muchas partes de la presente discusión,

metodología y formulación en técnicas de enriquecimiento pueden ser extendidas para métodos sin malla y otras técnicas numéricas.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODOS DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDOS

#### 4.1. Introducción

El Método de los Elementos Finitos Extendidos (*Extended Finite Element Method* – XFEM) es el método de los elementos finitos convencional sumado de recursos complementares que permiten el tratamiento numérico de diversos problemas donde ocurren discontinuidades acentuadas en pequeñas partes del dominio. Así que, el XFEM se hace muy eficaz en aplicaciones que necesiten describir discontinuidades y singularidades en el dominio, por tal motivo ha sido usado en los campos de Mecánica de Fractura, Mecánica de Sólidos, Mecánica de los Fluidos y Biomecánica.

El método XFEM fue introducidos por los investigadores Belytschko et al. (1999) y Moes et al. (1999). El método es una aplicación de la Partición local de la Unidad (Moes et al., 1999 y Babuska et al., 2002). En el caso de elementos para simulaciones de discontinuidades (fracturas), funciones de forma adicionales son utilizadas para enriquecer el elemento finito y mejorar la representación del campo de desplazamientos. La presencia de la grieta no es geoméricamente modelada y la ventaja principal del método es que no requiere cualquier remallado en el proceso de propagación de la fractura.

Dos partes independientes están envueltas en el análisis dinámica de la fractura por XFEM. Inicialmente, un procedimiento de acompañamiento de la fractura es

necesario para representar una fractura existente y su evolución a través del tiempo. La segunda parte está relacionada con la formulación de la propagación de la fractura es formulada.

Una alternativa del método XFEM tradicional para discontinuidades fuertes basado en el abordaje de Hansbo & Hansbo (2004) e fue desarrollado por Song et al. (2006). Y fue llamado del método de los nodos fantasmas. En este caso la fractura no es modelada con la adición de grados de libertad, y si por elementos sobrepuestos (será discutido a seguir).

#### **4.2. Formulación del Método XFEM**

En la formulación del XFEM se adicionan a la aproximación por elementos finitos convencionales funciones especiales que satisfacen la partición de la unidad, en las regiones donde existe discontinuidad.

Esto es conseguido usando la partición de la unidad en un dominio  $\Omega$  que es un conjunto de funciones de forma  $N_I$  tal que:

$$\sum_{i \in I} N_I(x) = 1, \quad x \in \Omega \quad (4.1)$$

Usando esta propiedad, cualquier función  $\psi(x)$  puede ser reproducida exactamente por:

$$\sum_{i \in I} N_I(x) \cdot \psi(x) = \psi(x) \quad (4.2)$$

Es esta propiedad que forma a base do XFEM. Al escoger adecuadamente la función  $\psi(x)$  para cada nodo, se puede incorporar el comportamiento deseado, manteniendo la base matemática del método de elementos finitos tradicional

Se considera  $I$  el conjunto de todos los nodos,  $I_\Lambda$  los nodos que contiene la punta de la fractura, y  $I_\Gamma$  todos los nodos que contiene el camino de la fractura ( $I_\Lambda \cap I_\Gamma = \emptyset$ ). La aproximación del desplazamiento enriquecido se convierte:

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) \left[ u_i + \underbrace{H(x)a_j}_{j \in I_\Gamma} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^4 F_\alpha(x)b_K^\alpha}_{K \in I_\Lambda} \right] \quad (4.3)$$

donde  $u_i$  el vector de desplazamiento nodal del MEF tradicional,  $a_j$  es el vector del salto en la discontinuidad del nodos enriquecido, y  $b_K^\alpha$  es vector de grado de libertad del nodo enriquecido de la punta de la fractura asintótica. La Figura 4.1 presenta un ejemplo de los subdominios enriquecidos. La función *Heaviside* asociada con el camino de la fractura es:

$$H(x) = \begin{cases} +1, & \text{si } (x-x^*) \cdot n \geq 0 \\ -1, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (4.4)$$

donde  $x$  es un punto cualquier (o un punto de integración),  $x^*$  es la proyección de  $x$  sobre la superficie de la fractura, y  $n$  es vector unitario normal a la fractura en  $x^*$ , como ilustra la Figura 4.1. Las funciones  $F_\alpha(x)$  en la MFLE son las funciones asintóticas asociadas con la punta de la fractura:

$$[\Phi(x)]_{r=1}^4 = \left[ \sqrt{r} \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cdot \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (4.5)$$

Las funciones dependen del sistema de coordenadas polar localizado en la punta de la fractura;  $(r, \theta)$  son las coordenadas radial y angular, respetivamente, y  $\theta = 0^\circ$  es tangente al camino en la punta de la fractura, como se puede ver en la Figura 4.1.

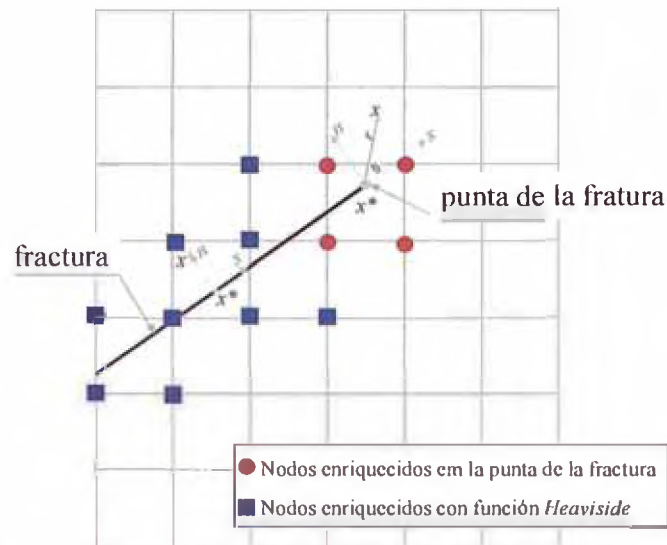


Figura 4.1 - Esquema de enriquecimiento de los nodos en una malla de elementos finitos.

Para la eficiencia computacional, el enriquecimiento es preferencialmente localizado en subdominios donde son necesarios. Se identifica el subconjunto de nodos pertenecientes a  $I_\Lambda$  y  $I_\Gamma$ , esto es, los nodos a enriquecer. Un método conveniente para escoger los nodos a ser enriquecidos es el método *level-set*, descrito a seguir.

El método *level set* es una técnica numérica para la localización de interfaces (fracturas) y es largamente utilizado en asociación con el método XFEM. El uso de *level set* simplifica la actualización de la posición de la interface, bien como el cálculo de la curvatura de la misma. En general, una interface  $\Gamma$  puede ser expresada por:

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x, t) = 0\} \quad (4.6)$$

La función *level set*  $\Phi$  empleada es típicamente la función distancia de la interface a un punto  $x$ , definida por:

$$\Phi(x) = \pm \min_{x^* \in \Gamma} \|x - x^*\|, \quad \forall x \in \Omega \quad (4.7)$$

donde la señal positivo y la señal negativo indican el lado de la interface en el cual se encuentra el punto  $x$ .

La descripción de una interface abierta requiere una segunda función *level-set*  $\Psi$ , para localizar donde termina la interface. La función  $\Psi$  también es una función distancia similar con la función  $\Phi$  y ortogonal a la superficie de la fractura. Por tanto, la interface abierta  $\Gamma$  es expresada por:

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,t) = 0 \text{ e } \Psi(x,t) \leq 0\} \quad (4.8)$$

La geometría de la interface es descrita a partir de los valores nodales de la función *level set*,  $\Phi_i$ .

Las funciones de forma convencionales de elementos finitos pueden ser utilizadas para interpolar la función  $\Phi$  en cualquier punto  $x$  en el dominio como:

$$\Phi(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) \cdot \Phi_i \quad (4.9)$$

donde el sumatorio se da sobre todos los nodos en la conectividad del elemento que contiene  $x$ .

Así, la selección de los nodos a ser enriquecidos en el dominio puede ser expresada por las expresiones (4.10) y (4.11). Un elemento es cortado si la función distancia ( $\Phi$ ) cambia de señal en el interior del elemento. Para identificar el elemento que contiene la punta de la fractura, dos criterios deben ser atendidos simultáneamente, como presenta la expresión (4.11), donde  $I^{el}$  es el conjunto de nodos del elemento. Un ejemplo es ilustrado en la Figura 4.2

$$\begin{aligned} \min_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) \cdot \max_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) < 0, \text{ elemento cortado} \\ \min_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) \cdot \max_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) > 0, \text{ elemento no cortado} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \min_{i \in I^{nl}}(\Phi(x)) \cdot \max_{i \in I^{nl}}(\Phi(x)) < 0 \\ \min_{i \in I^{nl}}(\Psi(x)) \cdot \max_{i \in I^{nl}}(\Psi(x)) < 0 \end{array} \right\} \text{elemento de punta} \quad (4.11)$$

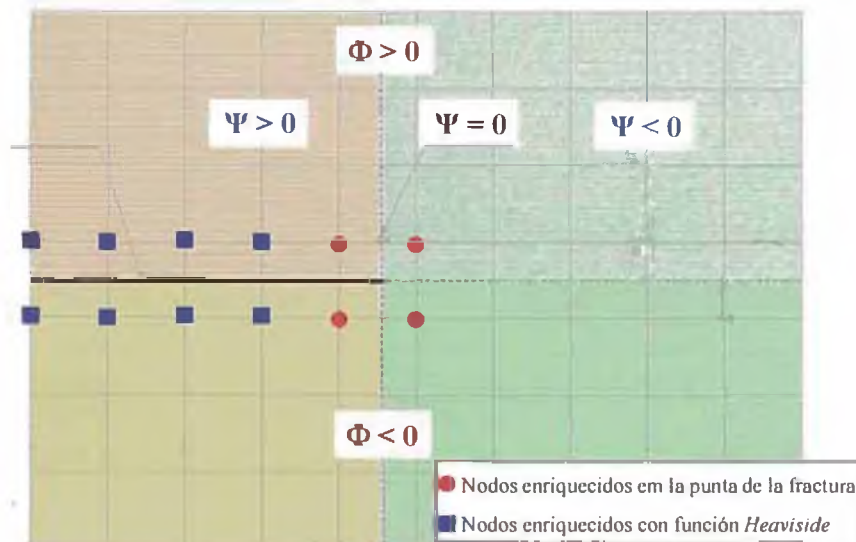


Figura 4.2 - Valores de las funciones *level set* para describir una fractura.

Para obtener mejores resultados los nodos que están en un determinado radio a partir de la punta de la fractura son enriquecidos.

$$I_{punta}^* = \{i : \|x_i - x_i^*\| < r\} \quad (4.12)$$

donde  $\|x_i - x_i^*\|$  es la distancia entre un punto  $x_i$  y punta de la fractura  $x_i^*$ . Para fracturas estacionarias, el programa Abaqus (2011) usa esta aproximación que enriquece los elementos con un radio tres veces superior al de la longitud característica del elemento. Para propagación de fracturas el enriquecimiento de la punta de la fractura no está implementado no programa Abaqus (2011).



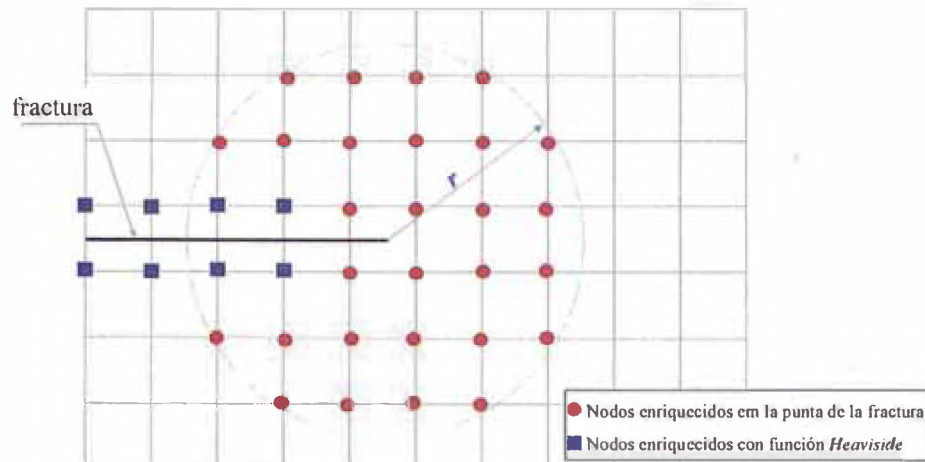


Figura 4.3 - Estrategia de enriquecimiento en la punta de la fractura.

### 4.3. Discontinuidad con nodos fantasmas

Song et al. (2006) presentaron un nuevo método XFEM para modelar propagación dinámica de fracturas, describiendo la discontinuidad como elementos sobrepuestos e introduciendo el concepto de los nodos fantasmas. El método de los nodos fantasmas se basa en la superposición de un elemento al elemento existente a ser cortado. A través de ese método la fractura cinemática es obtenida por la superposición de elementos, en lugar de introducir grados de libertad adicionales, como inicialmente propuesto en el método XFEM. Las funciones de forma asociadas a un elemento fracturado son idénticas a las funciones de forma de los elementos intactos simplificando su implementación en códigos existentes.

La Figura 4.4 presenta un ejemplo de un dominio fracturado  $\Omega_0$  soportado a lo largo del contorno  $\Gamma_u$  y sometido a fuerzas de superficie  $t$  aplicada a lo largo de  $\Gamma_t$ , y presenta su correspondiente discretización por elementos finitos. En los elementos cortados los nodos fantasmas se agregan sobre los nodos reales y por tanto, conducen a un elemento adicional sobre el elemento cortado. Cada elemento consiste en el subdominio fantasmas, por ejemplo,  $\Omega_0^+$  y  $\Omega_0^-$ , donde  $\Omega_0 = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$  (Figura 4.4). La

continuación, el campo de desplazamiento en el dominio real puede ser interpolado utilizando los grados de libertad en el dominio fantasma. Inicialmente, el nodo real y el nodo fantasma están unidos tienen la misma coordenada. Cuando surge la fractura cada nodo fantasma y su correspondiente nodo real, se separan. La magnitud de la separación de la abertura de la fractura, es gobernada por una ley cohesiva hasta que a resistencia de la cohesión del elemento caí a cero. Esta relación es gobernada por el modelo de la zona cohesiva.

La aproximación del campo de desplazamiento sobre una fractura se define como la diferencia entre los campos de desplazamiento de los dos elementos:

$$u^h(X) = \sum_{I \in \{w_0^+, w_p^-\}} N_I(x) \cdot u_I \cdot H(f(X)) + \sum_{J \in \{w_0^-, w_p^+\}} N_J(x) \cdot u_J \cdot H(-f(X)) \quad (4.13)$$

donde  $w_0^+$ ,  $w_0^-$ ,  $w_p^+$  y  $w_p^-$  son los nodos que pertenecen a  $\Omega_0^+$ ,  $\Omega_0^-$ ,  $\Omega_p^+$  y  $\Omega_p^-$ , respectivamente, y  $f(X)$  es la función *level set* evaluada en la coordenada cartesiana  $X$ . El salto de desplazamiento es realizado por la integración solamente sobre el área del lado de los nodos reales hasta la fractura, i.e.  $\Omega_0^+$  y  $\Omega_0^-$  (ver Figura 4.4).



una región caracterizada por el comportamiento ablandando del material, y una región subyacente en la que la plasticidad o endurecimiento plástico ocurre (Figura 4.5). Para materiales frágiles, la zona de proceso plástico es pequeño, así MFLE es aplicable. Para metales dúctiles, aunque la zona de ablandamiento es aún pequeña, la zona de proceso de plástico no es insignificante y pide la aplicación de la Mecánica de Fractura Elástica Plástico (MFEP).

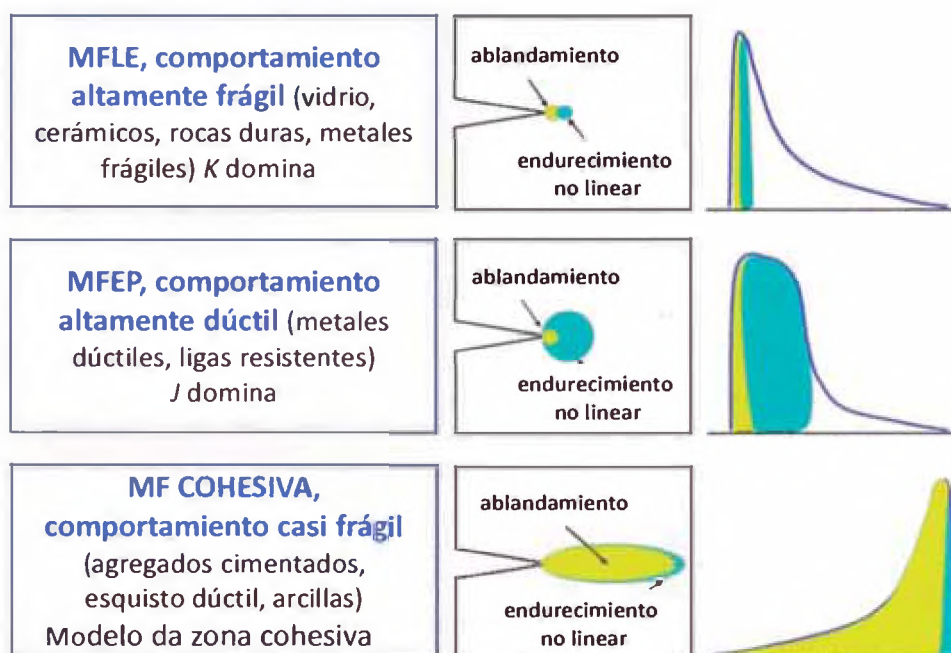


Figura 4.5 - Proceso de zona de fractura en diferentes materiales.

A fin de tener en cuenta las deformaciones inelásticas que surgen en la zona de proceso de fractura, el modelo de zona cohesiva (MZC), propuesto originalmente por Barrenblatt (1962) y Dugdale (1960) puede ser empleado. Con este modelo, las deformaciones en la punta de la grieta antes de propagación son contabilizadas y la disipación de energía ocurre en una región finita. Hillerberg et al. (1976) propusieron el modelo de fractura ficticia en que una grieta propaga cuando la tensión en la punta de la fractura llega la resistencia a la tracción, luego las tensiones aplicadas sobre la

superficie de la fractura disminuyen con el aumento de la abertura de la fractura, pero no repentinamente para cero.

El Modelo de Zona Cohesiva (MZC) puede ser usado para simular la iniciación y propagación de fracturas a través de un camino arbitrario dependiente de la solución. La zona cohesiva no es restricta para estar localizada a lo largo de los contornos del elemento, pero puede estar localizado en posiciones y direcciones arbitrarias, permitiendo la resolución de fracturas complejas. Por esta razón, no debe ser confundido con un elemento interface descrito en el capítulo 3.3, donde la zona cohesiva es conducida a extenderse a través del elemento para el contorno en que es insertado.

Un modelo constitutivo específico es considerado mientras el comportamiento constitutivo elástico lineal es usado para otras regiones (Figura 4.6). De acuerdo con este modelo la tensión disminuye con el aumento de la abertura de la fractura de acuerdo con una función específica. La punta de la fractura real (o punta de la fractura física) es el punto sobre la superficie de la fractura en la cual no hay tensión, es decir, la abertura normal es mayor del que la abertura crítica.

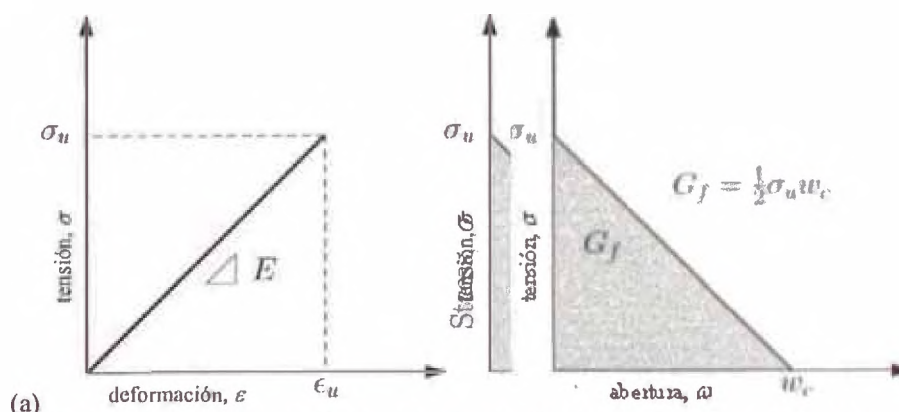


Figura 4.6 - Modelo constitutivo: (a) fuera y (b) dentro de la zona de fractura.

El área bajo la curva de tensión versus abertura de la fractura representa la energía de fractura que es una propiedad del material. La siguiente ecuación muestra esta propiedad:

$$G_f = \int_0^{w_f} \sigma dw \quad (4.14)$$

La tasa de liberación de energía  $G_f$  es especificada como un parámetro del material y está relacionada con la tenacidad a la fractura o factor de intensidad de tensión crítica por la siguiente ecuación:

$$G_f = \frac{K_{IC}^2}{E'} \quad (4.15)$$

donde,  $E' = E$  para el estado plano de tensión y  $E' = E/(1-\nu^2)$  para el estado plano de deformación, y  $E$  y  $\nu$  son el módulo de elasticidad longitudinal del material y el coeficiente de Poisson, respectivamente.

Valores de  $K_{IC}$  y  $G_f$  pueden ser obtenidos experimentalmente y son encontrados en la literatura. La comparación de estos valores constituye la forma usual, en ingeniería, para la determinación del inicio de la propagación de fracturas, sin embargo no proporciona ninguna información cuanto a lo que va suceder después del inicio de la propagación.

El inicio de daño se refiere al inicio de la degradación de la respuesta en un punto del material. El proceso de degradación comienza cuando las tensiones o deformaciones satisfacen los criterios de iniciación de daño que se tiene que especificar. En este estudio, la tensión principal máxima será utilizada como criterio, tal como muestra la siguiente ecuación:

$$f = \left\{ \frac{\langle \sigma_{\max} \rangle}{T_{\max}^0} \right\} \quad (4.16)$$

donde  $T_{\max}^0$  es la tensión principal máxima permisible o la resistencia a la tracción máxima del material. El símbolo  $\langle \rangle$  representa los paréntesis de *Maculay* y su interpretación es:  $\sigma_{\max} = 0$ , si  $\sigma_{\max} < 0$  y  $\langle \sigma_{\max} \rangle = \sigma_{\max}$ , si  $\sigma_{\max} \geq 0$ . La iniciación del daño comienza cuando la razón es igual a un, i.e.  $f = 1$ .

La evolución del daño describe la tasa en la cual la rigidez del material es degradado una vez que el criterio de iniciación correspondiente es alcanzado. La tasa de degradación es especificada cuando el criterio de iniciación haya ocurrido. La variable escalar de daño  $D$  muestra el daño entre las superficies de la fractura de los elementos cortados. Tiene valor cero en el comienzo, luego empieza a aumentar hasta alcanzar el valor de uno. Las componentes de la tensión son afectadas por el daño en los elementos y las componentes de la tensión normal y cizallantes son:

$$\begin{aligned} t_n &= \begin{cases} (1-D)T_n & , T_n \geq 0 \\ T_n & , \text{para lo demás} \end{cases} \\ t_s &= (1-D)T_s \\ t_t &= (1-D)T_t \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde la tensión de tracción nominal  $t$  tiene tres componentes que reflejen las tracciones normales y dos de cizallamiento,  $T_n$ ,  $T_s$  y  $T_t$  son componentes de tensión normal y cizallantes suministrado por el comportamiento elástico de tracción-separación para las separaciones actuales sin daño.

Para el ablandamiento lineal (Figura 4.7-a), el daño  $D$  se reduce a la expresión propuesta por Camacho & Dávila (2002):

$$D = \frac{\delta_m^f (\delta_n^{\max} - \delta_m^o)}{\delta_m^{\max} (\delta_n^f - \delta_m^o)} \quad (4.18)$$

donde  $\delta_m^{\max}$  se refiere al valor máximo de separación efectiva alcanzada durante la

historia de carga. La separación efectiva definida como:  $\delta_m = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2}$ .

Además del ablandamiento lineal existen otros modelos de evolución de daño para el comportamiento constitutivo tracción-separación, por ejemplo, la evolución exponencial (Figura 4.7-b).

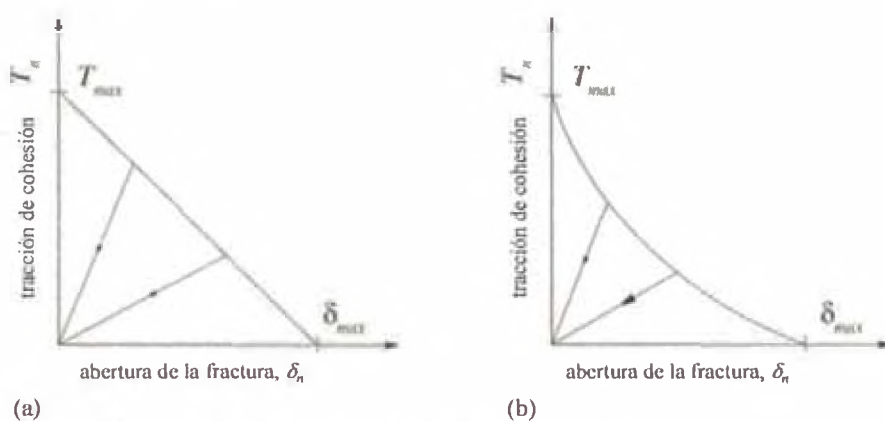


Figura 4.7 - Evolución del daño: (a) lineal, y (b) exponencial.

#### 4.5. Discretización espacial

Considerando un problema dinámico bidimensional. La forma fuerte de la ecuación del momento lineal de una descripción total de *Lagrange* es:

$$\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i - \rho_0 \ddot{u}_i = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (4.19)$$

donde  $P$  es el tensor de tensión nominal,  $\rho_0$  es la densidad de masa inicial y  $b$  es el vector de fuerza del cuerpo.

Las condiciones de contorno son:  $n_j^0 P_{ji} = t_i^{-0}$  sobre  $\Gamma_t^0$ ;  $u_i = \bar{u}_i$  sobre  $\Gamma_u^0$  y  $n_j^0 P_{ji}^- = -n_j^0 P_{ji}^+ = \tau_i^{0c} (\llbracket u_i \rrbracket)$  sobre  $\Gamma_c^0$ , donde  $n^0$  es la normal para el contorno indicado,



$\tau^{0c}$  es la tracción cohesiva sobre la grieta,  $\bar{t}^0$  es la tracción aplicada sobre el contorno de Neumann  $\Gamma_t$  y  $\bar{u}$  es el desplazamiento aplicado sobre el contorno de *Dirichlet*  $\Gamma_u^0$ ;  $\Gamma_u^0 \cup \Gamma_t^0 = \Gamma^0$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ , como ilustrado en la Figura 4.8. Los signos sobrescritos de más y de menos se refieren a los dos lados de la discontinuidad. La notación indicial es utilizada para todos los casos de índices más bajos e índices repetidos implican sumatorio.

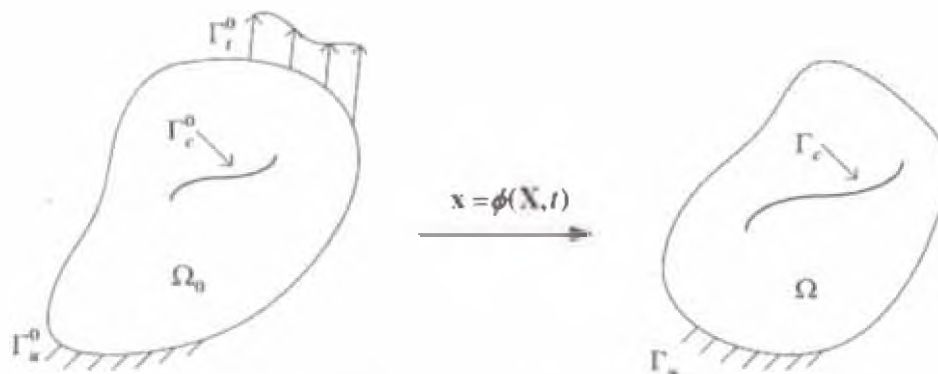


Figura 4.8 – Un cuerpo 2D con una discontinuidad y su representación en el dominio inicial y actual.

Las ecuaciones discretas son construidas a través de procedimientos estándar de Galerkin. El espacio admisible para los campos de desplazamiento es definido como sigue:

$$\mathcal{U} = \{ u(X, t) \mid u(X, t) \in C^0, u(X, t) = \bar{u}(t) \text{ sobre } \Gamma_u^0, u \text{ discontinua en } \Gamma_c \} \quad (4.20)$$

$$\mathcal{U}_0 = \{ \partial u(X, t) \mid \partial u(X, t) \in C^0, \partial u(X, t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_u^0, u \text{ discontinua en } \Gamma_c \} \quad (4.21)$$

La forma débil de la ecuación de momento para  $u(X, t) \in \mathcal{U}$  es dada por:

$$\partial W^{kin} = \partial W^{int} - \partial W^{ext} + \partial W^{coh} \quad \forall \partial u(X) \in \mathcal{U}_0 \quad (4.22)$$

donde  $\partial W^{int}$  es el trabajo interno,  $\partial W^{ext}$  es el trabajo externo realizado por cargas aplicadas,  $\partial W^{kin}$  es el trabajo realizado por la inercia cinética y  $\partial W^{coh}$  es el trabajo

realizado por la tracción cohesiva sobre la superficie de la grieta  $\Gamma_c$ . Estas cantidades son definidas como (ver Belytschko et al., 2000 para detalles).

$$\partial W^{kin} = \int_{\Omega_0} \delta u \cdot \rho_0 \ddot{u} d\Omega_0 \quad (4.23)$$

$$\partial W^{int} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \delta u}{\partial X} : P d\Omega_0 \quad (4.24)$$

$$\partial W^{ext} = \int_{\Omega_0} \delta u \cdot \rho_0 b d\Omega_0 + \int_{\Gamma_i^0} \delta u \cdot \bar{t}^0 d\Gamma_i^0 \quad (4.25)$$

$$\partial W^{coh} = - \int_{\Gamma_c} \delta [ [ u ] ] \cdot \tau^c d\Gamma_c \quad (4.26)$$

donde  $\bar{t}$  es la tracción normalizada prescrita en  $\Gamma_i^0$  y  $\tau^c$  es la tracción cohesiva aplicada sobre la superficie de la discontinuidad; una forma Lagrangiana actualizada es utilizada para a ecuación (4.26).

La discretización de elemento finito de la ecuación (4.22) produce la forma discreta de la ecuación de momento, que lleva a:

$$\mathbf{f}^{kin} = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{coh} \quad (4.27)$$

donde la fuerza interna  $\mathbf{f}^{int}$ , la fuerza externa  $\mathbf{f}^{ext}$ , y la fuerza cohesiva  $\mathbf{f}^{coh}$  son montados a partir de matrices de elementos abajo indicados. Una vez que las matrices de los elementos son convencionales, se da a penas por un par genérico de elementos 1 y 2 atravesados por una grieta:

$$\mathbf{f}_e^{kin} = \int_{\Omega_e^0} \rho_0 N^T N H \left( (-1)^e f(X) \right) d\Omega_e^0 \ddot{u}_e \quad (4.28)$$

$$\mathbf{f}_e^{int} = \int_{\Omega_e^0} B^T P_e H \left( (-1)^e f(X) \right) d\Omega_e^0 \quad (4.29)$$

$$\mathbf{f}_e^{coh} = \int_{\Omega_e^0} \rho_0 N^T b H \left( (-1)^e f(X) \right) d\Omega_e^0 + \int_{\Gamma_i^{e0}} N^T \bar{t}^0 H \left( (-1)^e f(X) \right) d\Gamma_i^{e0} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{f}_e^{coh} = (-1)^e \int_{\Gamma_c^{e0}} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau}^c \mathbf{n}_0 d\Gamma_c^{e0} \quad (4.31)$$

donde el índice subscripto 'e' es 1 o 2 representa el elemento real y sobrepuesto. El índice sobrescrito 'e' indica una restricción de dominio de elemento 'e'. B es el operador discreto deformación-desplazamiento.

## **CAPÍTULO 5**

### **SIMULACIONES NUMERICAS**

#### **5.1. Introducción**

Para el análisis de propagación de fracturas fue utilizado el programa de elementos finitos ABAQUS. Este software de carácter bastante general y de grande versatilidad para aplicaciones en muchas áreas de ingeniería. Que envuelve problemas de ingeniería complejos, envolviendo geometrías complicadas, relaciones constitutivas no lineales, ocurrencia de grandes deformaciones, interacciones entre materiales (suelo-estructura, fluido-estructura, etc.) que pueden ser modelados numéricamente con el software ABAQUS.

En la Figura 5.1 ilustra un ejemplo de cómo trabaja un problema por el método de los elementos finitos. El preprocesador consiste de una interface gráfica que permite al usuario una rápida y eficiente definición de la geometría del problema, la atribución de las cargas y de las condiciones de contorno, selección del número de etapas pretendidas en el análisis y, finalmente, generación de malla de elementos finitos correspondiente al cuerpo analizado. Es posible entonces ejecutar la simulación computacional por el método de los elementos finitos. El software dispone aún el pos-procesador que posibilita la interpretación de los resultados numéricos, procedimientos de visualización gráfica y de animación.

En esta capítulo visa a demostrar la aplicabilidad de la teoría estudiada en los capítulos anteriores. La validación del método se hace mediante la consideración de cuatro ejemplos distintos entre sí, que será detalladamente presentado en las secciones siguientes. Es importante resaltar que todos los resultados obtenidos en estos ejemplos son comparados con otros valores con el objetivo de probar la confiabilidad del método XFEM.

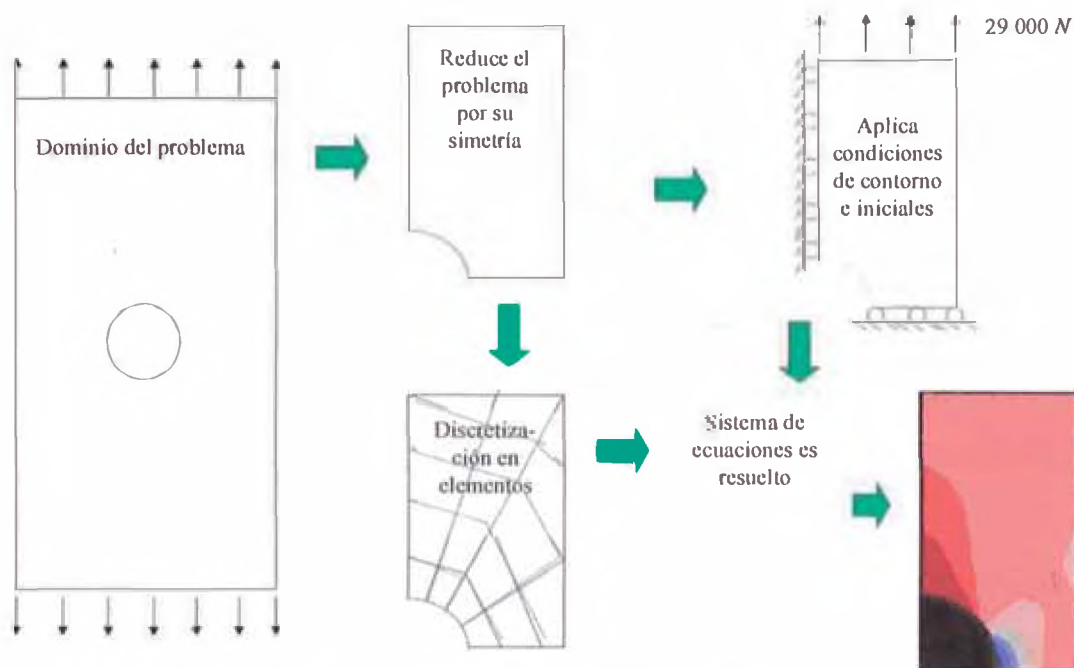


Figura 5.1 – Esquema de trabajo del método de los elementos finitos.

## 5.2. Calculo del Factor de Intensidad de Tensión (FIT)

En la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFLE), la velocidad de crecimiento de grietas está gobernada por el Factor de Intensidad de Tensión  $K$  aplicado. Se utiliza la integral  $J$  modificada, con una integral de contorno para el cálculo indirecto de  $K$ . Para evaluar el FIT utilizando método de elemento finitos convencional, i.e. elementos singulares, se debe definir la punta de la grieta explícita y especificar la dirección de su evolución, además de igualar la malla a la geometría

agrietada. Aunque en problemas 2-D se obtienen muy buenos resultados, para el caso 3-D resulta engorroso. El método XFEM alivia estas deficiencias. Con el campo asintótico singular y la discontinuidad son asegurados por las funciones especiales de enriquecimiento junto con los grados de libertad adicionales.

Para evaluar el cálculo del FIT con el método XFEM, se ha tomado una placa rectangular con solución conocida. Se considera una grieta de longitud  $2a$  en una placa rectangular, de altura  $2h$ , ancho  $2w$ , cargada biaxialmente con tracciones uniformes,  $\sigma$ , en los bordes (como muestra la Figura 5.2). La solución analítica de este problema para  $h/w > 3$  es encontrada en Anderson (1995), y es:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left( 1 - 0.5 \left( \frac{a}{w} \right) + 0.375 \left( \frac{a}{w} \right)^2 - 0.044 \left( \frac{a}{w} \right)^3 \right) / \sqrt{1 - \left( \frac{a}{w} \right)} \quad (5.1)$$

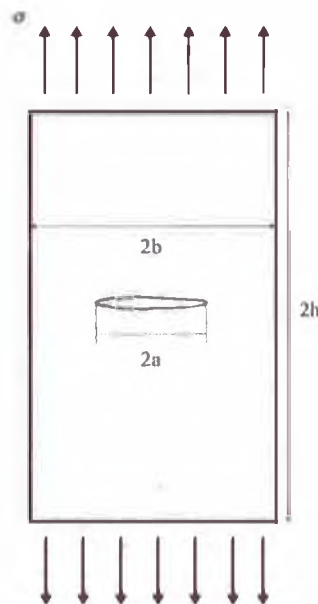


Figura 5.2 – Placa finita con una grieta en el centro sometida a una carga biaxial.

Para el análisis numérico se ha utilizado mallas estructurales de elementos cuadrilaterales (de cuadro nodos) como se muestra en la Figura 5.3-a, para el caso del método XFEM. Para comparación, también se usó elementos singulares (para más

detalle ver el Capítulo 3.2), en la Figura 5.3-b se muestra la malla utilizando elementos singulares.

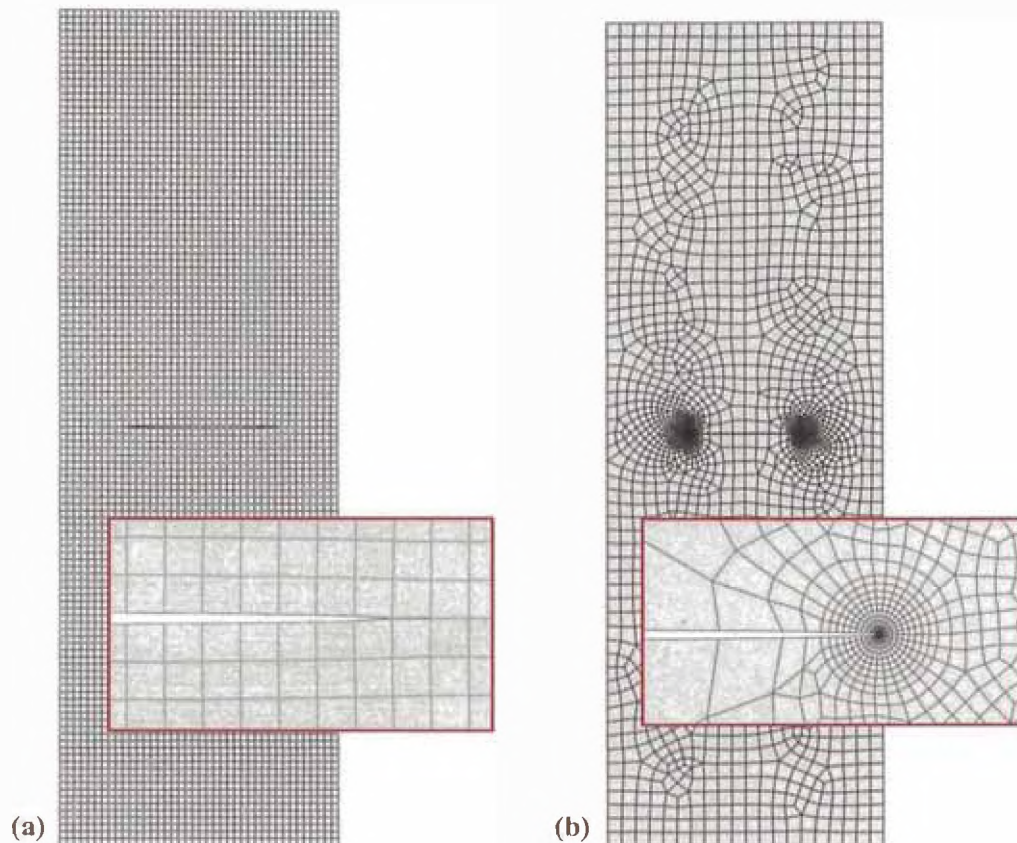


Figura 5.3 – Malla de elementos finitos con detalle en la punta de la grieta: (a) XFEM, y (b) Elementos singulares.

La Tabla 5.1 y Figura 5.4 muestra algunos valores de  $K_I/K_0$ , donde  $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$ . Los resultados tienen buena concordancia con los predichos por la solución analítica y por la solución utilizando elementos singulares. Para valores inferiores de  $a/w$  los resultados se aproximan más con la solución analítica.

Tabla 5.1: Factor de Intensidad de Tensión ( $K_I/K_0$ )

	$a/w = 0.1$	$a/w = 0.2$	$a/w = 0.4$	$a/w = 0.6$	$a/w = 0.8$
<i>Analítico</i>	1.01	1.03	1.11	1.30	1.82
<i>Elementos singulares</i>	1.01	1.03	1.11	1.30	1.81
<i>XFEM</i>	1.01	1.04	1.14	1.34	1.87

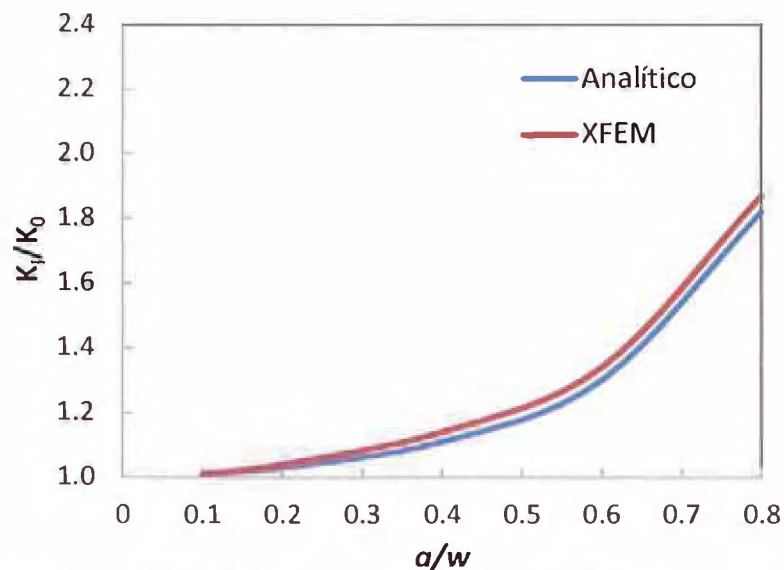


Figura 5.4 – Comparación de los resultados con el método XFEM y la solución analítica.

El Factor de Intensidad de Tensión (FIT) depende de la geometría de la placa considerada, en particular, depende de la razón  $h/w$ . Por tanto, fue simulado con el método XFEM para valores diferentes de  $h/w$ , donde no existe solución analítica. En la Tabla 5.2 y en la Figura 5.5 muestra los resultados de  $K_I/K_0$ , determinado por XFEM para diferentes geometrías.

Tabla 5.2: Factor de Intensidad de Tensión ( $K_I/K_0$ )

	$a/w = 0.1$	$a/w = 0.2$	$a/w = 0.4$	$a/w = 0.6$	$a/w = 0.8$
$h/w = 0.25$	1.22	1.69	2.84	4.41	8.40
$h/w = 0.50$	1.04	1.17	1.63	2.42	3.77
$h/w = 1.00$	1.01	1.06	1.22	1.48	1.99
$h/w = 3.00$	1.01	1.04	1.14	1.34	1.87
$h/w = \infty$	1.01	1.04	1.14	1.34	1.87

Se observa que cuando los valores de  $h/b$  incrementa, los valores de  $K_I/K_0$  tiende a los valores de la última línea ( $h/b = \infty$ ), que se refiere para valores que se esperaría para el caso de una placa infinita con una grieta bajo tensión.



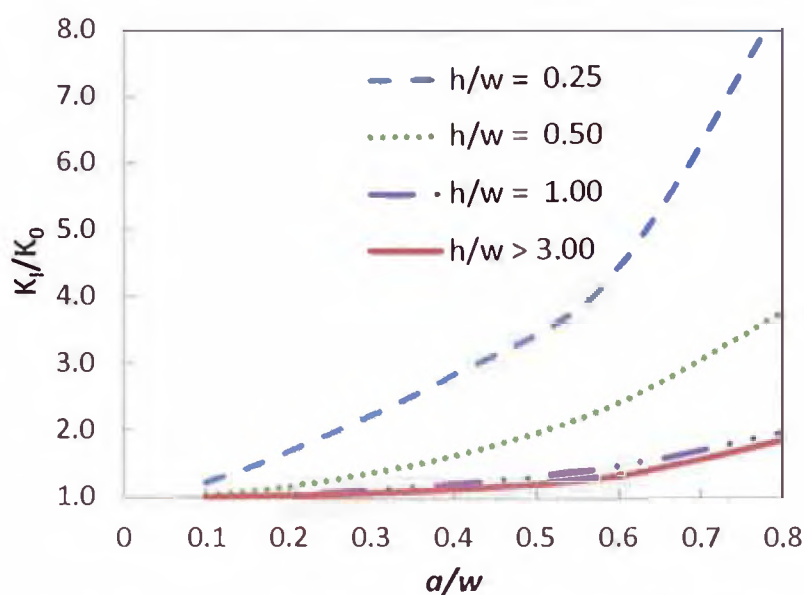


Figura 5.5 – Comparación de los resultados con el método XFEM.

Con mallas relativamente groseras pero regulares y usando elementos singulares es posible obtener buenas predicciones del Factor de Intensidad de Tensión (FIT's). Con el método XFEM no es necesario una disposición especial de los elementos en la punta de la grieta, lo que hace el método más computacionalmente atractivo.

### 5.3. Ensayo de flexión en tres puntos

El propósito de este ejemplo es verificar la propagación de la fractura utilizando el método XFEM. Fue escogido el ensayo de flexión en tres puntos (*Three Point Bending*), con Modo I de propagación de la fractura, por lo tanto el punto de iniciación y el camino de la fractura son conocidos a priori.

La geometría de la probeta ha sido escogida siguiendo las recomendaciones de la norma ASTM E 399 para el ensayo de flexión. Las dimensiones de la probeta y las condiciones de contorno de carga están ilustradas en la Figura 5.6. Las dimensiones de la viga son:  $t = h = 150 \text{ mm}$ ,  $L = 4h = 600 \text{ mm}$  y  $d = 10 \text{ mm}$ . Note que con el fin de evitar valores singulares de tensión en el punto de aplicación, la carga es distribuida

sobre una longitud  $d$ , como es también el caso en la realidad. Además, con el fin de evitar movimiento cuerpo rígido en la probeta son restringidos los desplazamientos en la dirección 'y' en sus soportes, también en la dirección 'x' en el punto  $O$  (centro de la probeta).

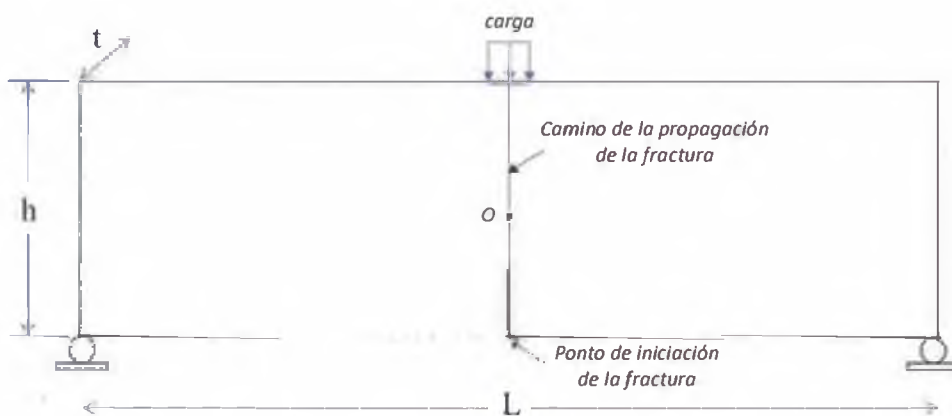


Figura 5.6 – Esquema de la viga sujeta a flexión en tres puntos.

El material utilizado en este problema es un hormigón de alta calidad y sus propiedades están listados en la Tabla 5.1.

Tabla 5.3: Propiedades del material

Parámetro	Valor
Módulo de Young, $E$ (GPa)	36.5
Coefficiente de Poisson, $\nu$	0.10
Energía de la fractura, $G_f$ (N/m)	50 / 10
Resistencia máxima a la tracción, $\sigma_t$ (MPa)	3.19

El tamaño de la grieta inicial es de  $37.5 \text{ mm}$ . A medida que aumenta la fuerza el valor de la tensión en el punto de iniciación de la grieta inicial se incrementará linealmente hasta que alcanza la resistencia a la tracción del material. Después la zona cohesiva comienza a desarrollarse en este punto hasta la abertura de la fractura llega hasta su valor crítico. El comportamiento de la viga se convierte en no lineal en este

nivel. El aumento de la carga en este estado provocará una propagación de la fractura real.

La viga es analizada en estado plano de deformación. La propagación de la fractura del mismo ensayo, con la misma geometría y parámetros mecánicos fue extensamente analizada por Carpinteri & Colombo (1989) usando un estado de plano de tensión. La diferencia entre el estado plano de tensión y de deformación es el factor de  $(1-\nu^2)$  en el módulo de Young, la diferencia de estos dos estados es pequeña para pequeños valores de coeficiente de Poisson ( $\nu = 0.1$ ).

Se han obtenido los resultados numéricos para los materiales con los siguientes valores de energía de la fractura:  $G_f = 50 \text{ N/m}$  y  $G_f = 10 \text{ N/m}$  y utilizando un modelo lineal de tracción-separación. La Figura 5.7 ilustra a distribución de la tensión principal máxima para diferentes instantes de la evolución de la fractura para el caso que la energía de la fractura es  $50 \text{ N/m}$ .

Se observa de la Figura 5.7, que la malla no necesita ajustarse a la geometría de la fractura, esto es debido a las funciones de enriquecimiento discontinuas utilizadas en el XFEM. También se observa que la concentración de tensiones al frente de la punta de la fractura.

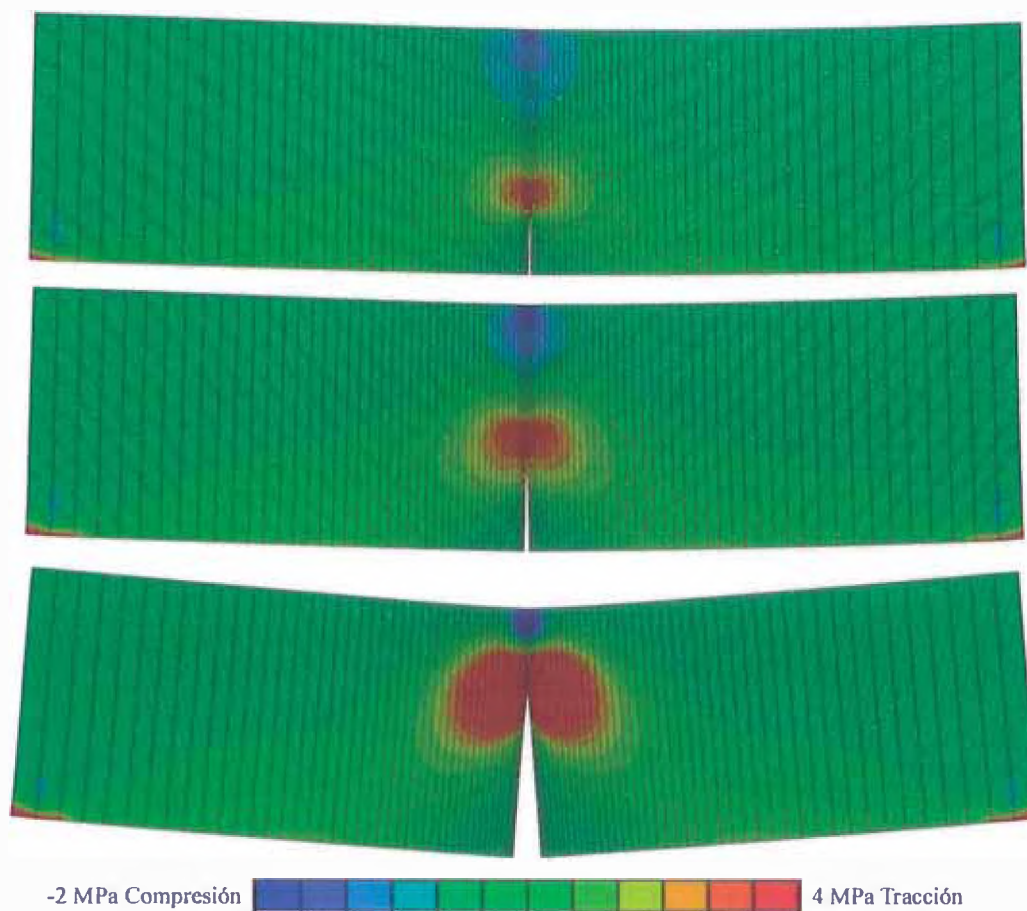


Figura 5.7 – Evolución de la fractura y distribución de la tensión principal máxima de una viga con una grieta.

La Figura 5.8 muestra las curvas de carga-deflexión adimensionales obtenidos para los dos valores de  $G_f$ , así como también las curvas obtenidas por Carpinteri & Colombo (1989). Se observa que los resultados obtenidos por XFEM están muy cerca de los resultados numéricos provenientes de un análisis utilizando elementos de interface cohesivas realizado por Carpinteri & Colombo.

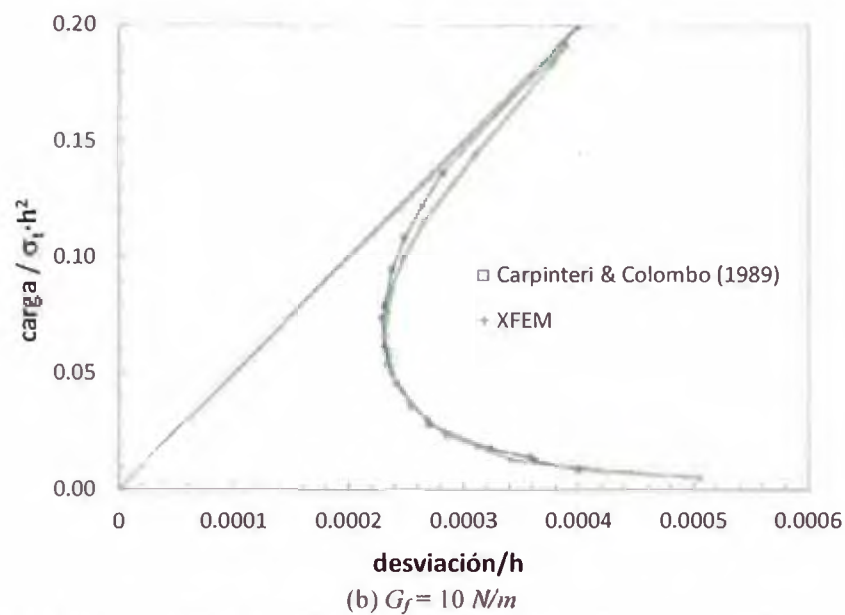
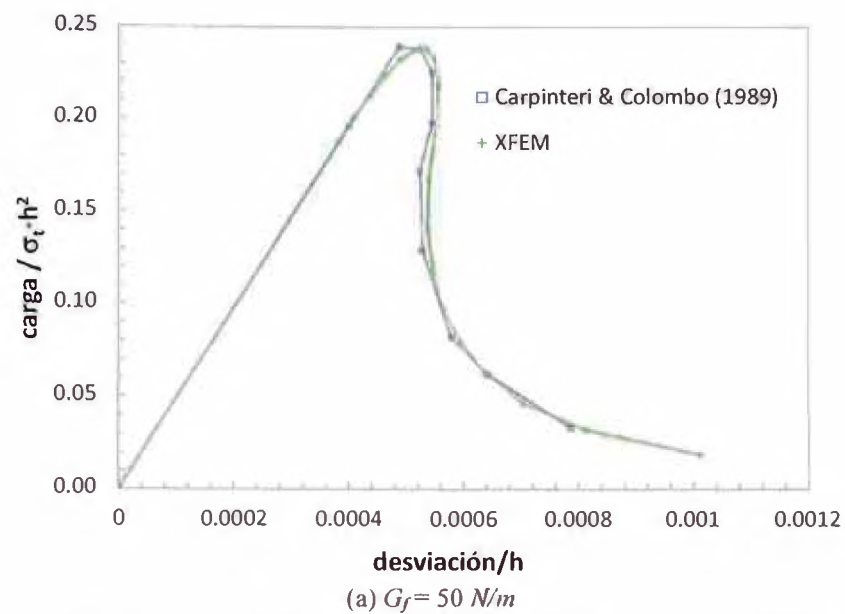


Figura 5.8 – Curvas de carga-deflexión adimensionales para un ensayo de flexión en tres puntos.

#### 5.4. Problema de una placa con un agujero

La siguiente prueba, basado en Rubistein (1991), estudia la influencia de un agujero en la trayectoria de la fractura en una placa de acero cargada a tensión. El propósito del análisis es mostrar, que el XFEM puede simular propagación de fracturas sin necesidad de remallado para representar la geometría compleja de la fractura.

Diferentes lugares de partidas de la grieta se eligen para ver como la proximidad del agujero afecta el campo de tensiones, y por lo tanto la trayectoria de la propagación de la fractura.

Las dimensiones de la muestra de acero son  $7\text{ mm} \times 21\text{ mm} \times 0.1\text{ mm}$ , como muestra la Figura 5.9. Los resultados numéricos de la trayectoria de la propagación de la fractura son comparados con los resultados numéricos obtenidos por Ventura & Belytschko (2003). Tres escenarios son testados con tres distancias diferentes entre la grieta y el agujero. Los tres escenarios tienen una distancia desde el centro del agujero para la grieta de A:  $0.75\text{ mm}$ , B:  $1.50\text{ mm}$  y C:  $2.25\text{ mm}$ . La Figura 5.9 muestra la configuración del Caso A con las condiciones de contorno e iniciales de carga. La carga en los modelos es incrementada hasta alcanzar la falla. Una grieta inicial de  $2\text{ mm}$  se coloca en cada modelo. Las propiedades del medias de un acero con  $0.2\%$  de carbono están listadas en la Tabla 5.4.

La malla de elementos finitos es discretizado como muestra la Figura 5.10, y es compuesta de elementos 2D: cuadrilaterales de cuatro nodos. El número de elementos y nodos son 5139 y 5300, respectivamente.

Tabla 5.4: Propiedades del acero

Parámetro	Valor
Coefficiente de Poisson, $\nu$	0.3
Módulo de Young, $E$ (GPa)	210
Energía de la fratura, $G_f$ (N/mm)	173
Factor de intensidad crítica ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{\frac{1}{2}}$ )	200
Resistencia máxima a la tracción, $\sigma_t$ (MPa)	380
Abertura máxima de separación, $\delta_n$ (mm)	0.912

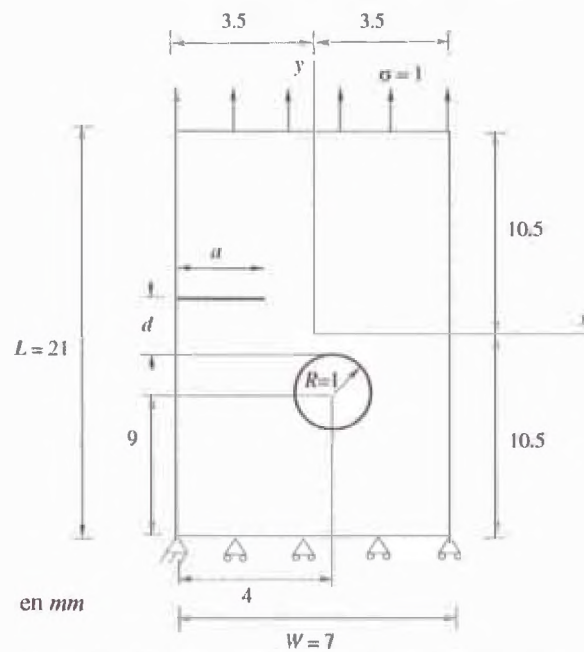


Figura 5.9 – Geometría problema de interacción agujero-grieta.

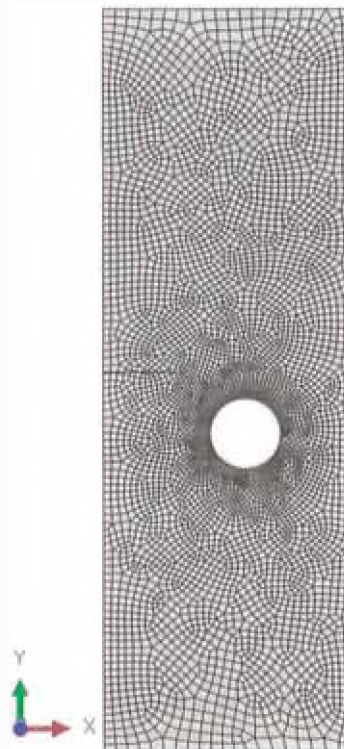


Figura 5.10 – Malla de elementos finitos del problema de interacción agujero-grieta.

La Figura 5.11 muestra los resultados numéricos obtenidos por Ventura & Belytschko (2003). La fractura está claramente afectada por la presencia del agujero. Se propaga hacia el agujero y termina en la periferia del agujero. Los resultados se

observa que son similares con la diferencia de la suavidad de la trayectoria de la fractura. Se observa, que el recorrido de la fractura se vuelve menos afectado por el agujero cuando la grieta inicial se coloca más distante del agujero.

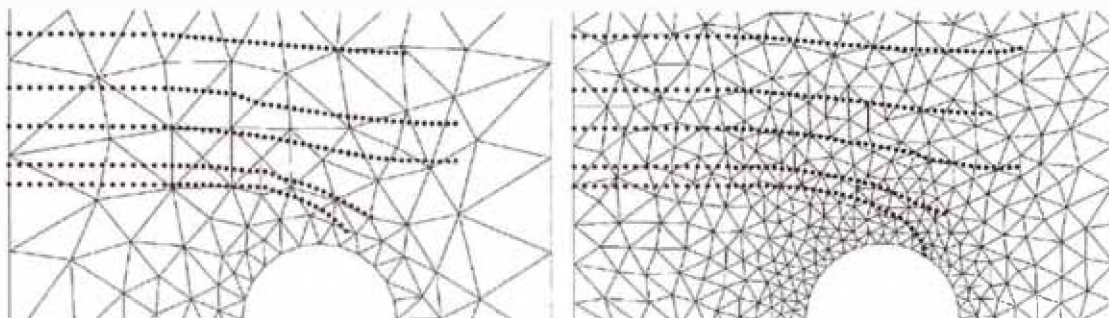


Figura 5.11 – Resultados numéricos de las trayectorias de la fractura en una placa de acero obtenido por Ventura & Belyschko (2003), comparando dos diferentes tipos de malla.

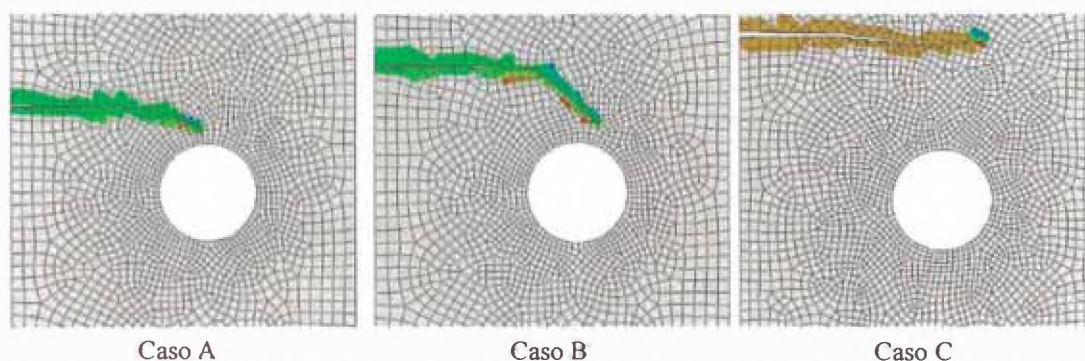


Figura 5.12 - Trayectorias de la propagación de la fractura para tres diferentes localizaciones de la grieta inicial de A:  $0.75\text{ mm}$ , B:  $1.50\text{ mm}$  y C:  $2.25\text{ mm}$  son las distancias del centro del agujero a la grieta.

Los resultados muestran boa concordancia con el hecho por otro autor con su código propio del método XFEM. Por lo tanto, el método XFEM en ABAQUS es capaz de modelar la propagación de grietas con respecto a un cambio en la geometría, tal como el agujero en el problema de referencia.



### 5.5. Propagación dinámica de la fractura

Kalthoff & Winkler (1987) analizaron placas sujetas a un impacto con una alta tasa de velocidad. El principio del experimento se muestra en la Figura 5.13. Una placa con dos entalles paralelos es impactada por un proyectil que tiene un diámetro  $d$  igual a la distancia  $h$  de los dos entalles. El proyectil es acelerado por una pistola de aire con su hocico directamente en frente de la placa. Los experimentos mostraron diferentes comportamientos de fractura y/o daño de un material con diversos tipos de carga.

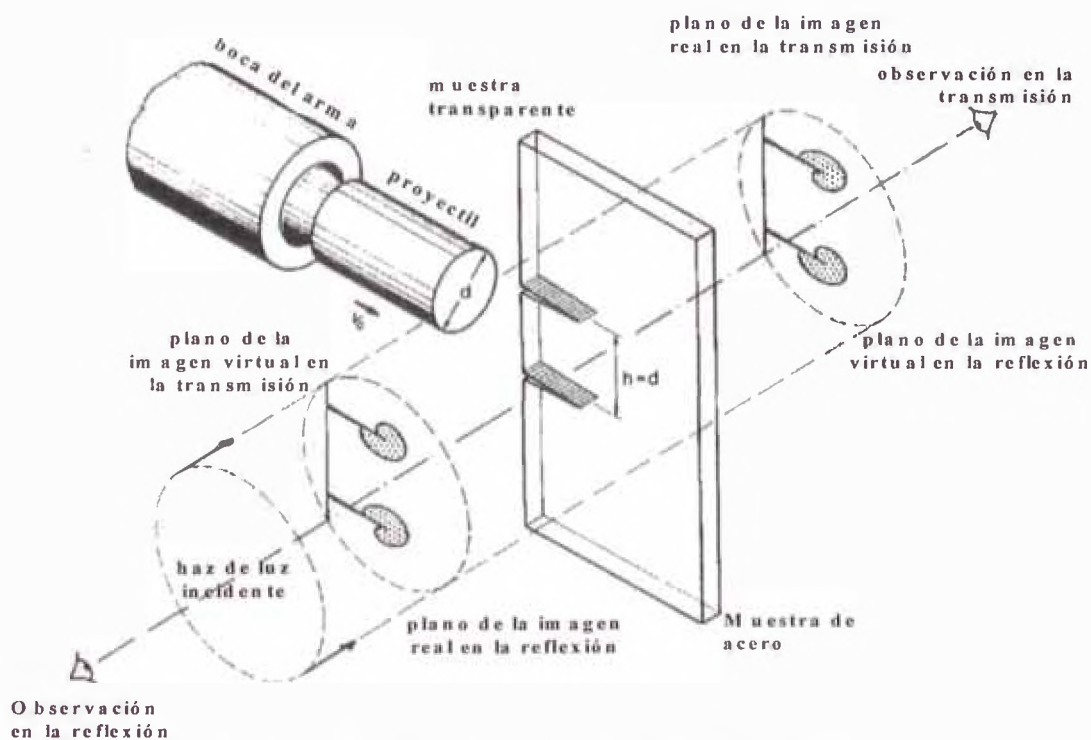


Figura 5.13 - Esquema do ensayo de Kalthoff-Winkler.

En este problema, la trayectoria de la grieta no se conoce a priori. Con el fin de simular la propagación de la fractura a lo largo de un camino arbitrario en este estudio, e investigar el ángulo de propagación de la grieta, el tiempo de iniciación de la fractura y la velocidad de propagación usando el método XFEM. Los resultados fueron comparados con las soluciones numéricas obtenidas por elementos cohesivos con

mallas adaptativas (Park et al., 2012) y con los resultados experimentales (Kalthoff & Winkler, 1987).

La geometría del modelo se muestra en la Figura 5.14-a. Dado que el problema posee simetría, sólo la mitad de la geometría es modelada, como se muestra en la Figura 5.14-b. Por tanto, las condiciones de contorno en la base del modelo es  $u_y=0$ . Las propiedades del material están listadas en la Tabla 5.5. La tasa de carga de impacto es  $16.5 \text{ m/s}$ , que es modelada como una velocidad prescrita.

Tabla 5.5: Propiedades del acero 18Ni(300)

Parámetro	Valor
Densidad, $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	8000
Coefficiente de Poisson, $\nu$	0.3
Módulo de Young, $E$ (GPa)	190
Energía de la fractura, $G_f$ ( $\text{kPa}\cdot\text{m}$ )	22.2
Resistencia máxima a la tracción, $\sigma_t$ (MPa)	1733
Abertura máxima de separación, $\delta_n$ ( $\mu\text{m}$ )	25.63

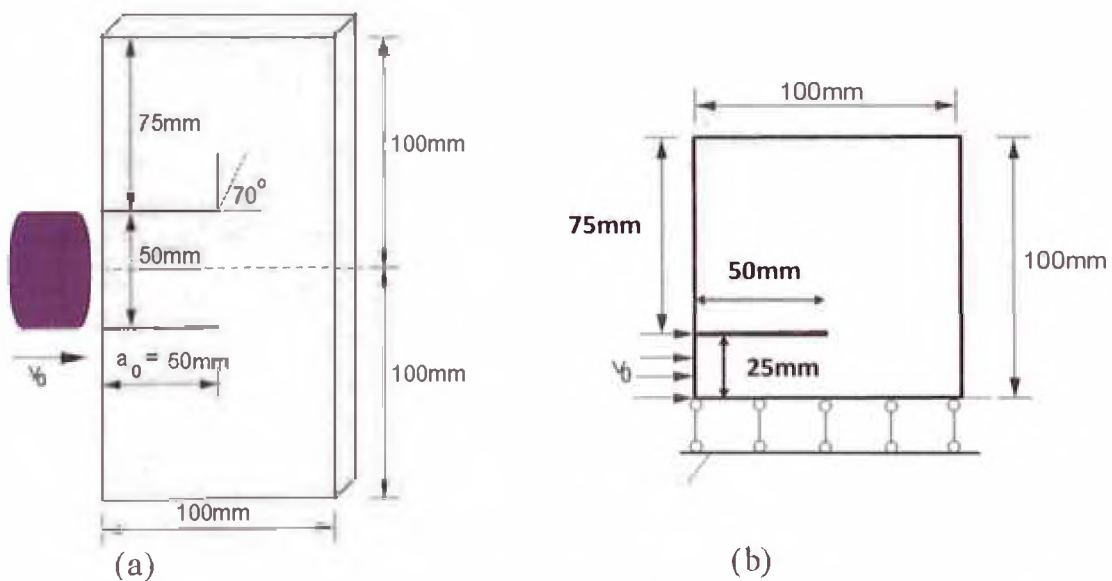


Figura 5.14 - (a) Geometría y la carga del modelo. (b) Modelo de la placa de Kalthoff analizado.

La malla de elementos finitos es discretizado como muestra la Figura 5.15-a. El número de elementos y nodos son 7885 y 8064, respectivamente. La Figura 5.15-b muestra la malla del elementos finitos al final del análisis ( $t = 80 \mu s$ ). El ángulo de propagación con respecto al eje horizontal es cerca de  $72^\circ$ , que se compara bien con lo observado experimentalmente de  $70^\circ$ .

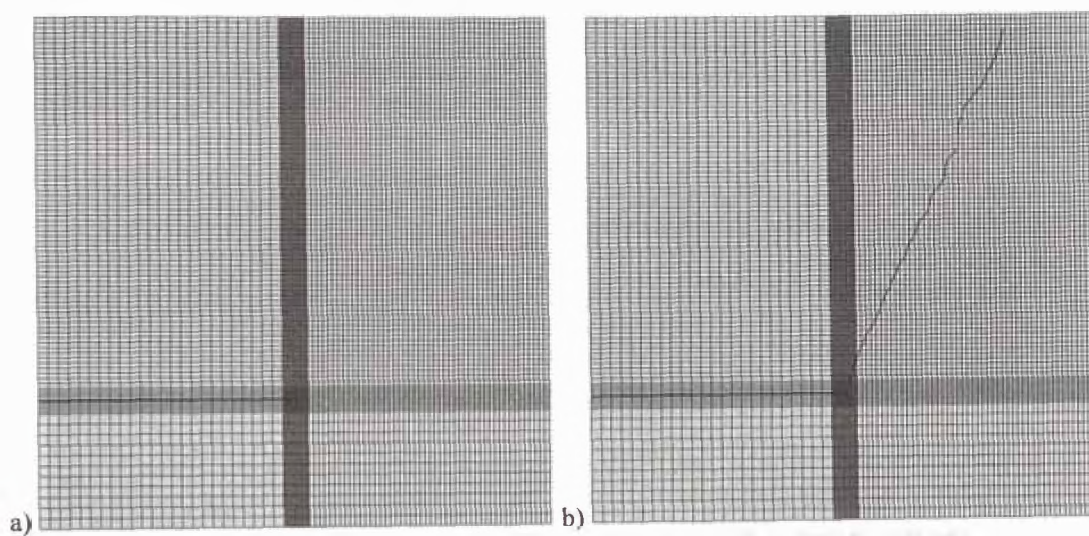


Figura 5.15 – Malla de elementos finitos: a) al inicio y b) al final del análisis.

La evolución de la fractura y la distribución de la tensión principal máxima son mostradas en la Figura 5.16. La fractura ocurre en una región de alta tensión, donde las tensiones locales superan la tensión cohesiva.

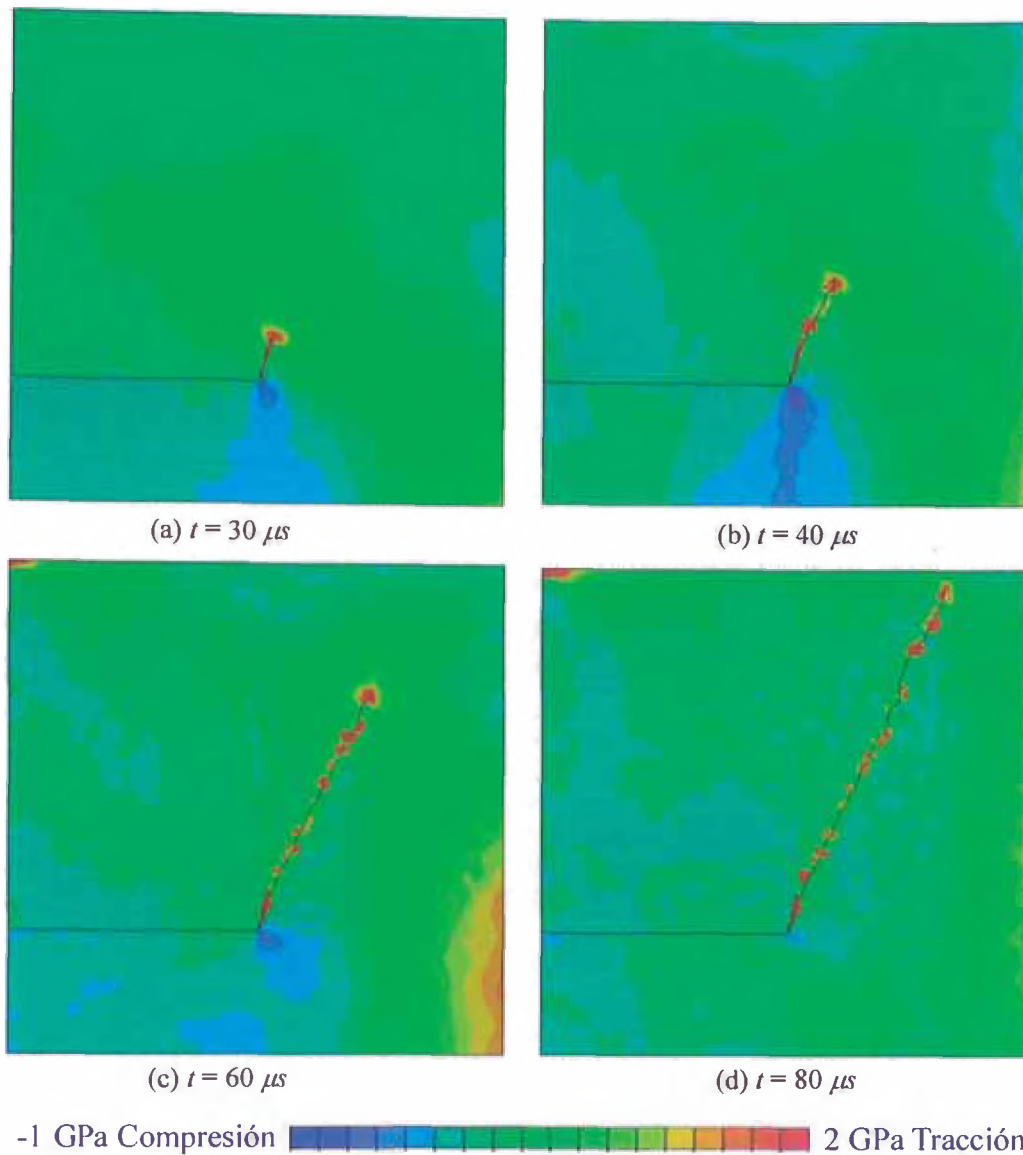


Figura 5.16 –Evolución de la fractura y distribución de la tensión principal máxima en:

(a)  $t = 30 \mu s$ ; (b)  $t = 40 \mu s$ ; (c)  $t = 60 \mu s$ ; y (a)  $t = 80 \mu s$ .

Como muestra la Figura 5.17, la fractura empieza a propagar en  $26.17 \mu s$ . La velocidad inicial en la punta de fractura es cerca de 75% la velocidad de onda de Rayleigh. La velocidad de propagación de la fractura luego disminuye lentamente. Después de los  $70 \mu s$ , la fractura desacelera más rápidamente y cerca al final de la simulación está por debajo de  $100 m/s$ . La trayectoria de la fractura para la simulación es mostrada en la Figura 5.18. El recorrido de la fractura es casi recto.

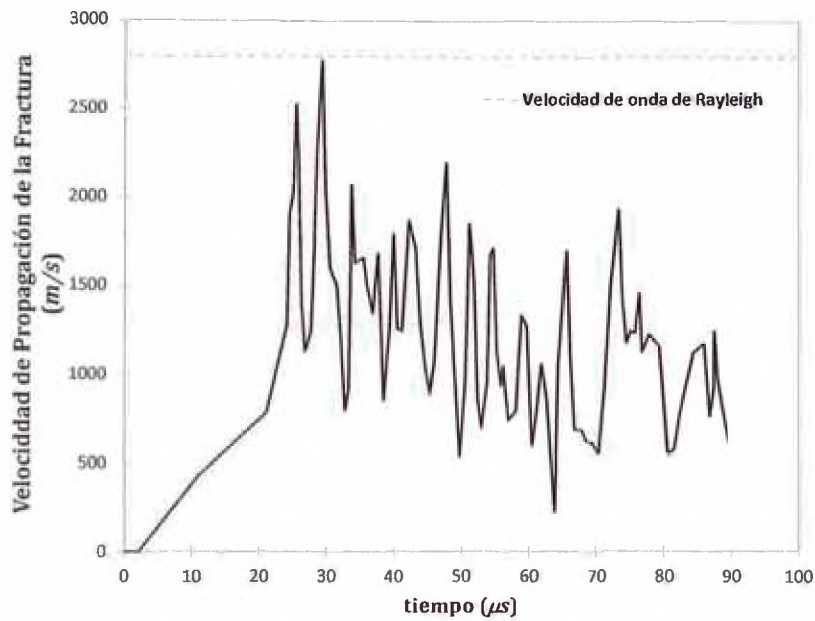


Figura 5.17 – Velocidad de propagación de la fractura.

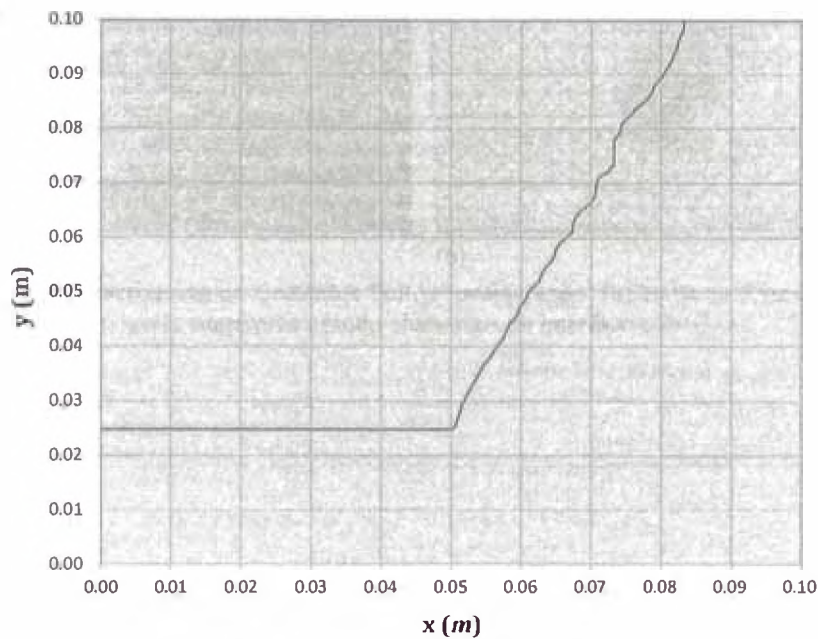


Figura 5.18 – Comportamiento de la fractura dinámica.

El mismo problema usando elementos de interfaces cohesivas (para más detalle ver el Capítulo 3.3) fue hecho por Zhang & Paulino (2005) y Park et al. (2012), considerando malla uniforme refinada y malla adaptativa, respectivamente. En el primer caso, los elementos cohesivos se insertan en una región relativamente grande a través del cual la grieta podría crecer potencialmente, como muestra la Figura 5.19-a.

Los resultados son óptimos, pero con un elevado costo computacional, ya que el número de elementos utilizado es muy alto, porque utiliza la técnica de remallado. En el segundo caso, utiliza la técnica de la malla adaptativa, donde el refinamiento de la malla es sólo alrededor de la punta de la fractura y la malla se adapta a medida que la fractura evoluciona. El costo computacional con el método XFEM es considerablemente mejor que utilizando una malla adaptativa.

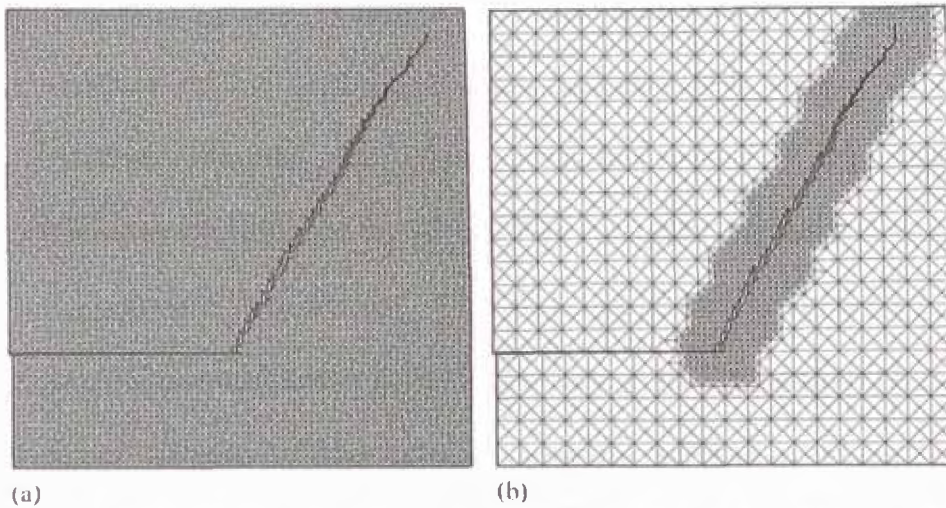


Figura 5.19 - Discretización de elementos finitos considerando: (a) malla uniforme refinada; y (b) malla adaptativa usando elementos de interface cohesivos.

## CONCLUSIONES

1. El presente trabajo el método de los elementos extendidos (XFEM) fue empleado para el análisis del comportamiento de la fractura en régimen estático y dinámico. Este método se ha mostrado como una herramienta numérica eficiente, que ha sido validada a través de problemas de referencia. La geometría de la fractura no es físicamente modelada, sin la necesidad de constantes e ineficientes actualizaciones de malla de elementos finitos.
2. Se ha utilizado la integral  $J$  para el cálculo indirecto del FIT presente en grietas con el método XFEM, ha permitido comparar la eficacia de una malla poco refinada en comparación a una malla refinada en la punta de la fractura que usa elementos singulares.
3. Las aplicaciones expuestas en el modo I y Mista de propagación de fractura, con diferentes materiales, proporcionaron resultados similares a los resultados experimentales y numéricos encontrados en la literatura.
4. El modelo de la zona cohesiva es capaz de representar el comportamiento frágil a dúctil de la estructura. Permite modelar adecuadamente la iniciación y propagación.

## RECOMENDACIONES

A partir de este método presentado en esta tesis se abre la posibilidad de otras investigaciones puedan ser realizadas de modo a contribuir para un mejor entendimiento del comportamiento de la fractura.

1. Estudiar el comportamiento en materiales dúctiles, no homogéneos o anisotrópicos. Por ejemplo, implementar de la heterogeneidad en el modelo, directamente, a través de la modelación de las microestructura del material, o indirectamente, usando distribuciones estadísticas de las propiedades del material, o aún, por la variación de la resistencia de los elementos, permitiendo la mejor representación del comportamiento del material.
2. Estudiar otros criterios de inicialización y evolución de la fractura del Modelo de la Zona Cohesiva. Establecer relaciones entre  $\sigma_d$ ,  $G_f$  y  $\delta_{max}$  con propiedades físicas y morfológicas del material. Sería posible realizar un análisis paramétrica del problema caso y/o adoptar otro comportamiento constitutivo de tracción-separación además del lineal empleado en esta tesis. Investigar otros modelos constitutivos para el caso de modo mixto (I y II). Así también, para el caso de modo III de abertura (caso 3D o altiplano).
3. Investigar el uso del XFEM para el caso de propagación de grietas por fatiga.
4. Investigar la propagación de fracturas múltiples y de bifurcación de fracturas.



## BIBLIOGRÁFIA

- [1] ABAQUS (2011). Abaqus 6.11 User's manuals. Abaqus Inc., Pawtucket, RI, USA.
- [2] ANDERSON, T., 1995. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. Third Edition ed. s.l.:CRC PRESS. Parution.
- [3] BABUŠKA I.; BANERJEE U.; OSBORNE J.E., 2002. On the principles for the selection of shape functions for the generalized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 191, p. 5595–5629.
- [4] BARENBLATT, G., 1962. Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Advances in Applied Mechanics*, Volume 7, pp. 55-129.
- [5] BARSOUM, R. S., 1976. On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 10, pp. 25-37.
- [6] BELYTSCHKO T.; BLACK T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 45(5), p. 601–620.

- [7] BELYTSCHKO, T.; LIU, WK.; MORAN B., 2000. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. *Wiley: New York*.
- [8] CAMACHO, G. T.; ORTIZ, M., 1996. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 33 (20-22), p. 2899–2938.
- [9] CAMANHO, P.; DAVILA. C. 2002. Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials. NASA/TM-2002–211737, p. 1–37.
- [10] CARPINTERI, A.; COLOMBO, G., 1989. Numerical analysis of catastrophic softening behavior (snap back instability). *Computers and Structures*, Volume 31, pp. 607-636.
- [11] DUGDALE, D., 1960. Yielding of Steel Sheets Containing Slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Volume 8, pp. 100-104.
- [12] GRIFFITH, A., 1920. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions*, Volume 221, pp. 163-198.
- [13] HANSBO, A.; HANSBO, P. 2004. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, no. 33–35, p. 3523–3540.
- [14] HENSHELL, R. D.; SHAW, K. G., 1975. Crack Tip Finite Elements are Unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 9, pp. 495-507.

- [15] HILLERBORG A.; MODEER M.; PETERSSON PE., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem Concr Res*, Volume 6, pp. 773-782.
- [16] INGLIS, C. E., 1913. Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp. *Transactions of the Institute of Naval Architects*, v. 55, pp. 241-249.
- [17] IRWIN, G. R., 1948. Fracture Dynamics. *Fracturing of Metals, American Society*, pp. 147-166.
- [18] IRWIN, G. R., 1956. Onset Of Fast Crack Propagation in High Streght Steel and. *Sagamore Reseach Conference Proceedings*, Volume 2, pp. 289-305.
- [19] IRWIN, G. R., 1957. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Jornal of Applied Mechanics*, Volume 24, pp. 361-364.
- [20] KALTHOFF, JF.; WINKLER, S., 1987. Failure mode transition at high rates of shear loading. *International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials, Bremen, Germany*, Volume 1, p. 185–195.
- [21] LIEBOWITZ, H., 1968. Fracture: an Advanced Treatise. *New York: Academic*, Volume 2, p. 759.
- [22] MOËS N.; DOLBOW J.; BELYTSCHKO T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 46(1), p. 131–150.
- [23] OLIVER J.; HUESPE A.E.; SÁNCHEZ P.J., 2006. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM.

*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 195, pp. 4732-4752.

- [24] OROWAN, E., 1948. Fracture and Strength of Solids. *Reports on Progress in Physics*, Volume XII, p. 185.
- [25] ORTIZ, M.; PANDOLFI, 1999. A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal Numerical Methods in Engineering* 44 (9), 1267–1282.
- [26] PARIS, P.C.; ERDOGAN, 1960. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. *Journal of Basic Engineering*, Volume 1960, pp. 528-534.
- [27] PARIS, P.C.; GOMES, M.P.; ANDERSON, 1961. A Rational Analytic Theory of Fatigue. *The Trend in Engineering*, Volume 13, pp. 9-14.
- [28] PARK, K.; PAULINO, G. H.; ROESLER, J. R. , 2009. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 57 (6), p. 891–908.
- [29] PARK, K.; PAULINO, G.; CELES, W.; ESPINHA, R., 2012. Adaptive mesh refinement and coarsening for cohesive zone modeling of dynamic fracture. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, v 92, pp. 1-35.
- [30] RABCZUK, T.; ZI, G.; GERSTENBERGER, A.; WALL, W., 2008. A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 75, pp. 577-599.


- [31] RICE, J., 1968. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 35, pp. 379-386.
- [32] RUBINSTEIN, A., 1991. Mechanics of the crack path formation. *International Journal of Fracture*, Volume 47, pp. 291-305.
- [33] SONG, J. H.; AREIAS, P. M. A.; BELYTSCHKO, T., 2006. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 67, p. 868–893.
- [34] VENTURA, G.; BUDYN, E. BELYTSCHKO, T., 2003. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *Int. Journal Numerical Methods in Engineering*, v 58, pp. 1571-1592.
- [35] WILLIAM, G., 1957. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 24, pp. 109-114.
- [36] XU, X. P. & NEEDLEMAN, A., 1994. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 42(9), p. 1397–1434.
- [37] ZHANG, Z.; PAULINO, G., 2005. Cohesive zone modeling of dynamic failure in homogeneous and functionally graded materials. *International Journal of Plasticity*, Volume 21, pp. 1195-1254.

## APÉNDICE A:

### FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSION

Tabla A.1: Factores para el cálculo de  $K$  de diversas geometrías comunes (Anderson, 1995)

#### Fisura pasante en placa finita

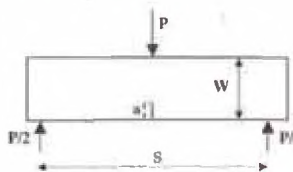


$$K_I = F \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$Y = \left( \frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2} ; a = 0 \rightarrow K_I = \sigma \sqrt{\pi a} ; a = \frac{W}{2} \rightarrow K_I \text{ es muy grande}$$

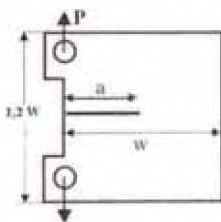
$$Y = \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W} \left( 1 - 0.025 \frac{a^2}{W^2} + 0.06 \frac{a^4}{W^4} \right)}$$

#### Probeta de flexión



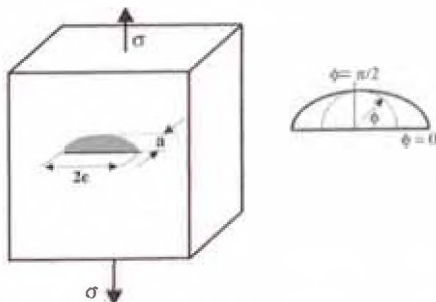
$$K_I = \frac{P}{B \sqrt{W}} \frac{3}{2} \frac{s}{W} \sqrt{\frac{a}{W}} \left[ \frac{1.99 - \frac{a}{W} \left( 1 - \frac{a}{W} \right) \left( 2.15 - 3.93 \frac{a}{W} + 2.7 \frac{a^2}{W^2} \right)}{\left( 1 + 2 \frac{a}{W} \right) \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{3/2}} \right]$$

#### Probeta compacta



$$K_I = \frac{P}{B \sqrt{W}} \frac{2 + \frac{a}{W}}{\left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{3/2}} \left[ 0.866 + 4.64 \frac{a}{W} - 13.32 \frac{a^2}{W^2} + 14.72 \frac{a^3}{W^3} - 5.60 \frac{a^4}{W^4} \right]$$

#### Fisuras no pasantes en placas



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{\lambda_1 \cdot f(\Phi)}{\sqrt{Q}}$$

$$Q = 1 + 1.464 \left( \frac{a}{c} \right)^{1.65}$$

$$\lambda_1 = \left[ 1.13 - 0.11 \left( \frac{a}{c} \right) \right] \left[ 1 + 0.11 (1 - \cos \Phi)^2 \right]$$

$$f(\Phi) = \left[ \sin^2 \Phi + \left( \frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \Phi \right]^{1/4}$$

## APÉNDICE B:

### ECUACIONES EMPÍRICAS PARA DESCRIBIR EL CRECIMIENTO DE LAS GRIETAS POR FATIGA.

Existen algunos modelos empíricos bien conocidos para cuantificar las tasas de propagación por fatiga a través de parámetros que son ajustados a los resultados obtenidos en ensayos experimentales. Estos modelos describen, por lo menos en parte, la forma de la curva  $da/dN$  vs.  $\Delta K$ , y consideran los efectos de  $\Delta K_{th}$ , de  $K_C$ , de la razón  $R$  entre los factores de intensidad de tensión máximo y mínima (o por  $K_{max} = \Delta K / (1 - R)$ ). El más clásico es el llamado modelo de Paris (1960):

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (B.1)$$

Este modelo describe el comportamiento a fatiga del material apenas en la fase II y no lleva en consideración la razón  $R$ . Los parámetros  $C$  y  $m$  son constantes empíricas (obtenidas experimentalmente) dependientes del material utilizado. El parámetro  $C$  representa el coeficiente lineal del trecho recto de la curva de Figura 2.8, mientras  $m$  representa el coeficiente angular.

Forman (1967) propuso otro modelo empírico, más sofisticado, que lleva en consideración la razón  $R = K_{min} / K_{max}$ , modelando tanto la fase I como la fase II:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \cdot \Delta K^{m-1}}{\left( \frac{K_{IC}}{K_{max}} - 1 \right)} \quad (B.2)$$

Walker (1970) propuso un modelo similar al modelo de Paris (Fase II), pero que incorpora los efectos de  $R$ :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^{(m+p)} \cdot \left( \frac{1}{1-R} \right)^p \quad (\text{B.3})$$

Este modelo posee tres parámetros experimentales,  $C$ ,  $m$  y  $p$ ; siendo  $p$  un parámetro empírico adicional.

Priddle (1976) propuso un modelo para modelar las tres fases de la curva  $da/dN$  vs.  $\Delta K$ , pero no incluye los efectos de la razón  $R$ .

$$\frac{da}{dN} = \left( \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_{IC} - K_{max}} \right)^m \quad (\text{B.4})$$

El valor de  $\Delta K_{th}$  es función de  $R$  y, en la ausencia de resultados experimentales confiables, puede ser estimado para aceros estructurales conforme las reglas abajo (Barsom, 1987):

$$\Delta K_{th} = 6.4 \cdot (1 - 0.85R) \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2} \quad R > 0.1 \quad (\text{B.5})$$

$$\Delta K_{th} = 7.04 \cdot (1 - 0.85R) \text{ ksi} \cdot \text{in}^{1/2} \quad R > 0.1 \quad (\text{B.6})$$

$$\Delta K_{th} = 5.5 \text{ ksi} \cdot \text{in}^{1/2} \quad R < 0.1 \quad (\text{B.7})$$

$$\Delta K_{th} = 6.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2} \quad R < 0.1 \quad (\text{B.8})$$

En la Tabla B.1, como ejemplo, son mostrados algunos valores usuales de las constantes citadas encima para los aceros del tipo ferrítico-perlíticos (Barsom, 1987).

Tabla B.1: Valores usuales de las constantes para los aceros del tipo ferrítico-perlíticos.

Modelo	C	m	p
Paris	$7 \cdot 10^{-9}$	3.0	--
Walker	$7 \cdot 10^{-9}$	2.0	1.0
Forman	$2 \cdot 10^{-6}$	2.9	--
Priddle	$2 \cdot 10^{-6}$	2.0	--



## APÉNDICE C:

### VALORES TÍPICOS DE TENACIDAD $K_{IC}$ DE FRACTURA

Tabla C.1: Valores Típicos de Tenacidad  $K_{IC}$  de Fractura para diferentes Materiales, Anderson 1995)

Material	Condicion	$\sigma_{ys}$ (MPa)	$K_{IC}$ (MPa·m <sup>1/2</sup> )	Espesor min. (mm)
<b>Acero</b>				
Maraging 300	500°C 3 horas	1980	60	3
Maraging 250	500°C 3 horas	1500	100	12
40NiCrMo10	Revenido a 150°C	1850	50	2
	Revenido a 550°C	1200	120	25
A 533 B	Recipientes a presión	350	≈ 190	750
Al carbono	Baja resistencia	240	≈ 200	1750
D6 Herramientas	Forjado	1500	100	12
	Revenido a 450°C	1500	75	7
304	Solución	300	180	900
<b>Titanio</b>				
6Al-4V	( $\alpha + \beta$ ) STA	1100	40	4
13V-11Cr-3Al	STA	1150	35	3
6Al-2Sn-4Zr-6Mo	( $\alpha + \beta$ ) STA	1200	30	1.5
6Al-6V-2Sn	( $\alpha + \beta$ ) STA	1100	40	3.5
4Al-4Mo-2Sn-0.5Si	( $\alpha + \beta$ ) STA	950	70	13.5
<b>Aluminio</b>				
7075	T651	550	31	8
7079	T651	460	33	13
DTD 5024	Forjado-Longitudinal	500	43	18.5
	Transversal	480	15	2.5
2014	T4	450	30	12
2024	T3	400	34	18
<b>Polimeros</b>				
Nylon-6.6		90	5	
ABS		45	3	
Epoxy		60	0.6	
PET		11	5	
PVC mod.	Con goma	40	3.5	
Pollester		30	0.6	
<b>Ceramicas</b>				
Vidrio		50 <sup>1</sup>	0.8	
Alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>			4	
Magnesia MgO			3	
Carburo de silicio SiC			3.7	
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -15% ZrO <sub>2</sub>			5	
Nitruro de silicio Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>		450 <sup>1</sup>	6	
Dolomia			1.3	
Granito			0.9	
Hormigón			0.2	

<sup>1</sup> Valores de rotura

## APÉNDICE D:

### PRINCIPALES ENSAYOS REALIZADOS EN LA MFLE Y MFEP

Tabla D.1: Principales ensayos relacionados a la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (MFLE) normalizada por la ASTM.

Parámetro	Caracterización	Definición	Norma
$K_{IC}$	Tenacidad a la fractura en deformación plana.	Valor crítico de $K_I$ en la cual ocurre propagación de grietas inestable en condiciones de deformación plana. Propiedad del material.	E399-90 E1820-99a
$da/dN$ vs. $\Delta K$	Tasa de crecimiento de grietas por fatiga.	Tasa de crecimiento de la grieta en función de $\Delta K$ bajo carga de fatiga (extensión de la grieta por ciclo de carga de fatiga en función del $\Delta K$ aplicado). Propiedad del material.	E647-00
$\sigma_c$	Resistencia al agrietamiento.	Valor máximo soportado por un cuerpo de prueba del tipo Charpy pre-agrietado sometido a baja tasa de carga.	E812
$K_{IA}$	Tenacidad de parada de grieta en deformación plana.	Valor crítico de $K_I$ en el cual una grieta se propaga rápidamente pueda ser inmovilizada. Propiedad del material.	E1221
$K_{IV}$ (o $K_{IV}$ ) y $K_{IVM}$	Tenacidad a la fractura en deformación plana con entalle del tipo "Chevron".	Valor crítico de $K_I$ a partir de cual ocurre propagación inestable de la grieta. Utilizado en materiales de alta resistencia cuando ocurren crecimientos esporádicos de la grieta seguida de paradas hasta que se alcanza un valor crítico de carga.	E1304
$K_{ISCC}$	Umbral para la propagación de grietas por corrosión bajo tensión.	Valor de $K$ encima del cual ocurrirá la propagación de grietas por corrosión bajo tensión sobre condiciones de carga estática. Propiedad del material para un dado ambiente.	E1681-99

Tabla D.2: Principales ensayos con base en la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica (MFEP) normalizada por la ASTM.

Parámetro	Caracterización	Definición	Norma
Curva $R$	Variación de $K$ en función del tamaño de la grieta.	La curva $R$ es caracterizada por el registro continuo del valor de tenacidad en función de la extensión de la grieta para un determinado material.	E561-98
$J_{IC}$	Inicio de la extensión dúctil de la grieta.	Valor crítico de $J$ para el inicio de la extensión dúctil de la grieta. Propiedad del material.	E1820-99a
Curva $J-R$	Resistencia al crecimiento dúctil, estable de la grieta.	Resistencia de un dado material a la extensión continua dúctil y estable de la grieta durante la carga monotónica (expreso en términos de $J$ vs. $\Delta a$ ). Propiedad del material.	E1820-99a
$CTOD$	Tenacidad de la fractura en el campo elástico-plástico	Se basa en la medida de la abertura de la punta de la trinca.	E 1290-06 E1820-99a
$J_C$	$J$ de clivaje.	Medida de la tenacidad a la fractura en el momento de la inestabilidad.	E1820-99a E1921-97
$T_0$	Temperatura de referencia $T_0$ .	Temperatura de referencia relativa a una tenacidad de $100 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$	E1921-97