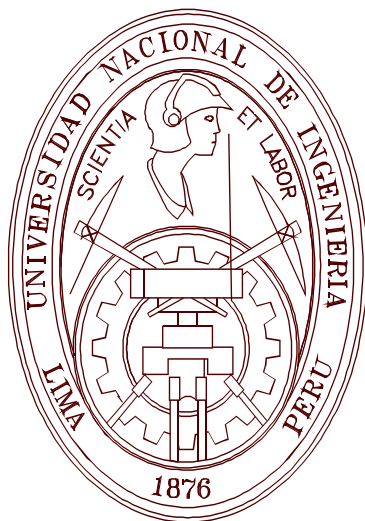


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIDAD DE POSGRADO



**“CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES
GRAVITATORIAS PARA SATÉLITES DEL SISTEMA GLOBAL DE
NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS)”**

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN FÍSICA

PRESENTADA POR:

LEONARDO JOSÉ CHÉVEZ ABANTO

ASESORES:

DR. ORLANDO LUIS PEREYRA RAVINEZ

PROF. HOLGER GUSTAVO VALQUI CASAS

Universidad Nacional de Ingeniería

Lima - Perú

2016

AGRADECIMIENTOS

En estos tiempos tan agitados donde la economía personal juega un rol importante en los quehaceres, tendemos a dejar la educación de lado para dedicarnos a actividades que nos produzcan bienestar económico. El seguir estudios de posgrado y dedicarme seriamente al trabajo de tesis con la respectiva compensación económica me fue posible mediante una beca integral otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONCYTEC).

Agradezco a mi profesor asesor Holger G. Valqui, a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería y a CONCYTEC por hacer posible mi grado de Maestro en Ciencias con Mención en Física.

También agradezco a la Pontificia Universidad Católica del Perú por ofrecerme su colaboración para poder mejorar la marcada reducción de los datos numéricos, lo que por falta de tiempo podré explotar posteriormente.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I:	
Adquisición de mediciones de la misión GOCE y procesamiento de datos	5
1.1 Interpretar los datos obtenidos y darles forma ordenada para trabajarlos	6
1.1.1 Tiempo GPS	8
1.1.2 Posición en coordenadas geográficas	8
1.1.3 Gradiente Gravitatorio	9
CAPÍTULO II:	
Modelamiento del Potencial Gravitatorio y Cálculo de Coeficientes	14
2.1 Darles forma analítica a los datos numéricos (mediciones)	14
2.1.1 Procedimiento de Mínimos Cuadrados	20
2.2 Cálculo de las familias de coeficientes	25
2.2.1 Cálculos Día 1	26
2.3 Dependencia temporal de los coeficientes	33
CAPÍTULO III:	
Construcción de Superficies Equipotenciales Gravitatorias	38
OBSERVACIONES FINALES Y LIMITACIONES COMPUTACIONALES	41
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Grupo de mediciones encontradas en un bloque de texto	7
Tabla 2: Comparación entre Tiempo GPS y Fecha UTC	8
Tabla 3: Cadenas de texto almacenadas en los elementos de una matriz en MATLAB	10
Tabla 4: Comparación de coeficientes de correlación	31
Tabla 5: Comparación del módulo de \vec{G} en un punto del ecuador terrestre	32

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1: Sistema de referencia propio del satélite, cuya orientación cambia continuamente con respecto a la Tierra	9
Fig. 2: Matriz M donde se acumula todas las mediciones de manera ordenada	12
Fig. 3: Trayectoria del satélite medidor durante un mes	13
Fig. 4: Relación entre el sistema de referencia fijo a Tierra (coordenadas esféricas) y el sistema propio del satélite	15
Fig. 5: Valores que toma el Laplaciano en función del tiempo	22
Fig. 6: Azul: Valores del Laplaciano completos. Rojo: Valores del Laplaciano luego de la eliminación de los más lejanos a cero	23
Fig. 7: Zoom de Fig. 6	23
Fig. 8: Trayectoria del satélite medidor en un día (1 de setiembre del 2013)	25
Fig. 9: Familia de coeficientes J_n con términos desde $n = 1$ (izquierda) y desde $n = 2$ (derecha)	26
Fig. 10: Familia de coeficientes C_n^m con términos desde $n = 1$	27
Fig. 11: Familia de coeficientes S_n^m con términos desde $n = 1$	28
Fig. 12: Familia de coeficientes C_n^m con términos desde $n = 2$	29
Fig. 13: Familia de coeficientes S_n^m con términos desde $n = 2$	30
Fig. 14: Variación temporal del coeficiente J_1	34
Fig. 15: Variación temporal del coeficiente C_1^1	34
Fig. 16: Variación temporal del coeficiente S_1^1	35
Fig. 17: Serie de Fourier de la variación temporal del coeficiente J_1 con $R^2 = 99.92\%$...	36
Fig. 18: Serie de Fourier de la variación temporal del coeficiente C_1^1 con $R^2 = 98.49\%$...	36
Fig. 19: Serie de Fourier de la variación temporal del coeficiente S_1^1 con $R^2 = 96.95\%$..	37
Fig. 20: Superficie equipotencial terrestre para el día $t = 1.0000$	40
Fig. 21: Superficie equipotencial terrestre para el día $t = 9.8283$	40

RESUMEN

Con el creciente número de aplicaciones del geoposicionamiento, se pone cada vez mayor énfasis en el mejor cálculo de trayectorias de satélites que luego serán usados como referencia para el cálculo de la posición de un vehículo receptor en Tierra. Las trayectorias de los satélites son determinadas por el campo gravitatorio causado principalmente por la Tierra, el Sol, la Luna, Júpiter y otros cuerpos celestes; sin embargo, conocer el campo gravitatorio total no es tan simple. Con la finalidad de hallar el campo gravitatorio circundante a la Tierra existen misiones encargadas de medir el gradiente gravitatorio a 280 km de altura, tales como la misión GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*). En este trabajo se usan las mediciones de la misión GOCE para determinar el potencial gravitatorio total alrededor de la Tierra en forma “analítica”, que será usado para construir superficies equipotenciales gravitatorias y un mejor y más preciso cálculo de las trayectorias de satélites GNSS (*Global Navigation Satellite System*) que orbitan la Tierra.

Palabras clave: satélites, misión GOCE, potencial gravitatorio.

ABSTRACT

With the increasing number of applications of GEO, it puts the emphasis on the best estimate of trajectories of satellites increases to which will then be used as a reference for calculating the position of a receiver vehicle on Earth. The trajectories of satellites are determined by the gravitational field produced principally by the Earth, the Sun, the Moon and others celestial bodies, but to know the total gravitational field is not so simple. In order to find the gravitational field surrounding Earth missions are responsible for measuring gravity gradient at height 280 km such as GOCE mission (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*). In this work the mission GOCE measurements are used to determine "analytically" the total gravitational potential around the Earth that can be used for build gravitational equipotential surfaces and a better and more accurate calculation of the trajectories of satellites orbiting the Earth.

Keywords: satellites, GOCE mission, gravitational potential.

INTRODUCCIÓN

Existen varios Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS por sus siglas en inglés) como el *Global Positioning System* (GPS - Departamento de Defensa de los Estados Unidos), *Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema* (GLONASS - Unión Soviética), *Galileo* (Unión Europea), etc. donde estos satélites juegan el papel de puntos de referencia para determinar la posición instantánea de un vehículo receptor en Tierra.

A estos sistemas de navegación cada vez se les encuentran más aplicaciones (trayectorias de barcos y aviones, navegación “a ciegas”, seguimiento de los movimientos de placas tectónicas, etc.) que requieren cada vez de mayor precisión y rapidez en el cálculo de la posición de un vehículo en Tierra.

Las trayectorias que siguen cada uno de los satélites que conforman un GNSS son descritas por movimientos “aparentemente” elípticos. Estas trayectorias de los satélites GNSS son corregidas remotamente desde estaciones en Tierra, tratando que los satélites sigan trayectorias previamente calculadas. Estas correcciones implican sofisticados mecanismos, demanda de energía y tiempo.

Es natural que, si las trayectorias previamente calculadas fueran más precisas, las correcciones serían menores, ahorrando así mecanismos, energía, tiempo y dinero. Entonces es necesario construir mejores métodos para el cálculo de las trayectorias, y así obtener los beneficios mencionados.

En este trabajo de tesis se propone calcular las trayectorias de los satélites GNSS en la forma más precisa posible, empleando para ello el cálculo del potencial gravitatorio dependiente del tiempo y la construcción de superficies equipotenciales gravitatorias (dependientes del tiempo) en la zona del espacio donde orbitan los satélites GNSS (aproximadamente 20 000 km de altura). Conocer el potencial gravitatorio y las superficies equipotenciales facilitaría significativamente el control de los satélites.

Usando mediciones experimentales del gradiente gravitatorio provistos por la misión GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*) de la Agencia Espacial Europea

(ESA por sus siglas en inglés), es posible calcular los coeficientes de la expansión en armónicos esféricos del potencial gravitatorio; de esta manera se tendría una función matemática con la mayor cantidad de coeficientes posibles calculados con datos experimentales, es decir, se transforman los datos numéricos en una ecuación analítica bien determinada, la cual permitiría un mejor y más preciso cálculo de las trayectorias de los satélites, por lo tanto mejor control de los mismos, (por supuesto adicionalmente se debe considerar otras correcciones menores, por ejemplo la presión de radiación) consiguiendo así ahorro de energía y simplificación del mecanismo de control (las correcciones aplicadas serían menores).

Se debe tratar de ser lo más preciso posible, pues los resultados finales de posición que calcula un vehículo receptor GNSS en Tierra son bastante sensibles a pequeñas variaciones en el sistema, por ejemplo, un error de una millonésima de segundo en los relojes involucrados se traduce en un error de posición de unos 300 metros del vehículo en Tierra.

Es necesario anotar que, en rigor, el potencial gravitatorio no sólo depende del espacio sino también del tiempo, esta dependencia temporal del potencial gravitatorio causado por las posiciones variables de los cuerpos celestes (Tierra, Sol, Luna, Júpiter, etc.) que intervienen, será resuelta usando series de Fourier para hallar funciones dependientes del tiempo que describan la variación temporal del potencial, de los coeficientes de la expansión en serie del potencial. Esta dependencia temporal es debida principalmente a los cambios de posición de cuerpos externos a la Tierra y en menor grado a la rotación de una Tierra no homogénea alrededor de su eje polar.

Este trabajo se ve justificado bajo las siguientes consideraciones:

- i. Algunos resultados se pueden comparar con similares ya existentes, como es el caso de la superficie equipotencial gravitatoria más cercana al nivel del mar, el geoide.
- ii. Se recurre a una expansión en armónicos esféricos, desarrollo conocido en múltiples y diferentes aplicaciones científicas.
- iii. Aplicación del método de mínimos cuadrados que es un método matemático confiable para regresiones lineales.

- iv. Uso del coeficiente de determinación, cuyo límite máximo es 1 (en nuestro caso hallamos coeficientes del orden de 0.99)
- v. Cada vez se pueden encontrar más aplicaciones, dependiendo de la necesidad e inventiva de los interesados; y cada vez la tecnología informática y sus dispositivos son más accesibles y más económicos.

Las mediciones experimentales directas de la gravedad resultan muy inciertas, por ello se recurre a mediciones indirectas de la gradiente del campo gravitatorio que compensan la mencionada incertidumbre (ruido), con esta gradiente de la gravedad, que son las componentes del operador Laplaciano aplicado al potencial, se puede realizar una expansión en armónicos esféricos que permite obtener los coeficientes para el cálculo “analítico” del potencial.

En este sentido la metodología consistirá

- i. Adquirir mediciones del gradiente del campo gravitatorio alrededor de la Tierra de la misión GOCE.
- ii. Puesto que estos datos experimentales se obtienen como una lista de datos cada segundo, requieren ser interpretados y tabulados adecuadamente de manera que permita trabajar con ellos.
- iii. Considerando la expresión analítica del potencial gravitatorio en armónicos esféricos, aparecen coeficientes que necesitamos determinar. De esta fórmula analítica para el potencial, se calculan las componentes del Laplaciano, que dependerán también de los coeficientes anteriormente mencionados. Ahora, como disponemos de los datos numéricos de las gradientes podemos obtener los valores correspondientes de los coeficientes. Para la mejor obtención de estos coeficientes recurrimos al método de mínimos cuadrados. La calidad o bondad de esta aproximación es calificada por medio del llamado *Coficiente de Determinación*, cuyo valor ideal es 1, en nuestro caso obtenemos valores generalmente mayores que 0.99. Habiendo determinado estos coeficientes ya tenemos el desarrollo “analítico” mencionado inicialmente. El cálculo de los

coeficientes se realizará usando los datos de las mediciones de cada día independientemente, esto permitirá luego obtener una dependencia temporal de los coeficientes.

- iv. Considerando un punto del espacio (exterior a la Tierra) que tendrá un valor U_0 para el potencial gravitatorio, se programa el proceso de búsqueda de todos los puntos espaciales que tengan el mismo valor del potencial (superficie equipotencial), por razones operacionales no se hará la búsqueda sobre todo el espacio continuo sino sobre un mallado angular tan fino como queramos. Teniendo la expresión del potencial terrestre dependiente de la posición y del tiempo, el cálculo de las superficies equipotenciales se puede realizar en el instante de tiempo que queramos, pudiendo así construir muchas equipotenciales a lo largo del tiempo y poder apreciar la variación de estas superficies (superficies “vibrantes”).
- v. Construir trayectorias de satélites descritas por el campo gravitatorio terrestre calculado a partir del gradiente del potencial gravitatorio. Este paso resultó frustrado por carencia computacional.

Cabe recalcar que en este trabajo se deben hacer una serie de ensayos tanto teóricos como numéricos que irán determinando los pasos a seguir y mejoras de los métodos, entre otras cosas.

CAPÍTULO I:

Adquisición de mediciones de la misión GOCE y procesamiento de datos

La Agencia Espacial Europea (ESA) está a cargo de la misión GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*) que se encarga de la medición del campo gravitatorio terrestre.

La misión GOCE consta de un satélite orbitando la Tierra a una altura de 268 km, equipado con un gradiómetro y un receptor GPS. El gradiómetro es el instrumento que medirá el gradiente gravitatorio en el punto donde se encuentre el satélite y el receptor GPS se encarga de medir su posición y tiempo mientras se realizan las mediciones.

Con ello se obtiene una colección de puntos del espacio alrededor de la Tierra (a una altura de 268 km) donde se conoce el gradiente gravitatorio en 3 direcciones espaciales, el instante de tiempo en el que se realizó la medición y la posición del satélite medidor (satélite GOCE).

Se logró contactar con la ESA mediante su sitio web oficial

<http://www.esa.int/Services/Contacts>

al establecer el contacto, se le solicitó poder acceder a las mediciones de la misión GOCE, detallando cómo usaríamos sus datos, nos permitieron el acceso creando una cuenta de usuario GOCE con su respectiva contraseña. Con esta cuenta se puede acceder al **Archivo Virtual GOCE ESA** de las mediciones desde noviembre del 2009 hasta octubre del 2013.

Los archivos contenedores de las mediciones disponibles para descarga son mensuales y tienen un tamaño aproximado de 100 MB, su extensión es .TAR (archivo comprimido) y dentro de este hay un archivo .TGZ que a su vez dentro contiene un archivo .DBL.

Este archivo .DBL (de un tamaño de 1.5 GB) contiene la información de la medición completa del mes correspondiente. Se puede abrir con un editor de texto simple como el **Bloc de notas** de Windows.

Debido al tamaño del archivo DBL (1.5 GB conteniendo 51 644 240 filas de texto), se dificulta poder abrirlo y visualizarlo con comodidad (sin que la PC experimente significativa lentitud), ante ello se dividió el gran archivo de texto en 10 archivos más pequeños usando el aplicativo llamado **Text Cleaver** para Windows. Resultando archivos de 159 MB más manejables que el original de 1.5 GB.

1.1 Interpretar los datos obtenidos y darles forma ordenada para trabajarlos

El texto contenido en los archivos tiene una estructura repetitiva (1 518 948 veces) que muestra la información de tiempo GPS, posición del satélite medidor en coordenadas geográficas y mediciones del gradiente gravitatorio con sus respectivas incertidumbres.

```
<GG_spatial_Record>
  <Time_Information>
    <GPS_Time>1064743469.076554656</GPS_Time>
  </Time_Information>
  <Position>
    <Radius_from_Geocenter unit="m">6606430.0300</Radius_from_Geocenter>
    <Phi unit="deg">0.026189144</Phi>
    <Lambda unit="deg">142.254191017</Lambda>
  </Position>
  <Gravity_Gradients unit="1/s^2">
    <XX>-1.38881675E-06</XX>
    <YY>-1.38468887E-06</YY>
    <ZZ>2.77349486E-06</ZZ>
    <XY>1.22803778E-10</XY>
    <XZ>1.57201381E-10</XZ>
    <YZ>-2.99748646E-11</YZ>
  </Gravity_Gradients>
  <Sigmas unit="1/s^2">
    <XX>8.27182765E-12</XX>
    <YY>9.73673287E-12</YY>
    <ZZ>1.16057764E-11</ZZ>
    <XY>3.60422181E-12</XY>
    <XZ>9.77689583E-12</XZ>
    <YZ>3.75721317E-12</YZ>
  </Sigmas>
  <Flags>
    <XX>1</XX>
    <YY>1</YY>
    <ZZ>1</ZZ>
    <XY>1</XY>
    <XZ>1</XZ>
    <YZ>1</YZ>
  </Flags>
</GG_spatial_Record>
```

En este bloque de texto tenemos, por ejemplo:

Tiempo GPS		1064743469.076554656
Posición en coordenadas geográficas	Radio (m)	6606430.0300
	Latitud (°)	0.026189144
	Longitud (°)	142.254191017
Gradiente Gravitatorio	Dirección XX (s ⁻²)	-1.38881675E-06
	Dirección YY (s ⁻²)	-1.38468887E-06
	Dirección ZZ (s ⁻²)	2.77349486E-06
	Dirección XY (s ⁻²)	1.22803778E-10
	Dirección XZ (s ⁻²)	1.57201381E-10
	Dirección YZ (s ⁻²)	-2.99748646E-11
Incertidumbre	Dirección XX (s ⁻²)	8.27182765E-12
	Dirección YY (s ⁻²)	9.73673287E-12
	Dirección ZZ (s ⁻²)	1.16057764E-11
	Dirección XY (s ⁻²)	3.60422181E-12
	Dirección XZ (s ⁻²)	9.77689583E-12
	Dirección YZ (s ⁻²)	3.75721317E-12

Tabla 1: Grupo de mediciones encontradas en un bloque de texto

En la **Tabla 1** se muestran los datos numéricos identificados de los bloques de texto con su correspondiente descripción. Este es el primer paso para ordenar la gran cantidad de datos con los que contamos.

1.1.1 Tiempo GPS

Es la escala de tiempo que manejan los equipos GPS, este número indica la cantidad de segundos que transcurrieron desde el 6 de enero de 1980 (en tiempo UTC, Tiempo Universal Coordinado, el actual estándar de medición de tiempo). Si queremos saber qué instante representa un tiempo GPS dado, debemos convertirlo a UTC. Hay algunos sitios web que ofrecen esta conversión como, por ejemplo:

<http://www.andrews.edu/~tzs/timeconv/timeconvert.php>

Por ejemplo, para nuestro caso deseamos saber qué fecha es 1064743469

Entonces:

Tiempo GPS	Fecha UTC
1064743469	Oct 02, 2013 10:04:13

Tabla 2: Comparación entre Tiempo GPS y Fecha UTC

1.1.2 Posición en coordenadas geográficas

Las coordenadas geográficas de un punto nos indican la distancia desde el centro de la Tierra hasta dicho punto, el ángulo que forma el plano Ecuatorial terrestre con la línea que une el centro de la Tierra y el punto, y el ángulo que forma el plano del Meridiano de Greenwich con la proyección de la línea que une el centro de la Tierra y el punto sobre el plano Ecuatorial.

1.1.3 Gradiente Gravitatorio

El satélite GOCE cuenta con 6 acelerómetros, 2 en cada uno de sus 3 ejes espaciales (Gradiometer Reference Frame)

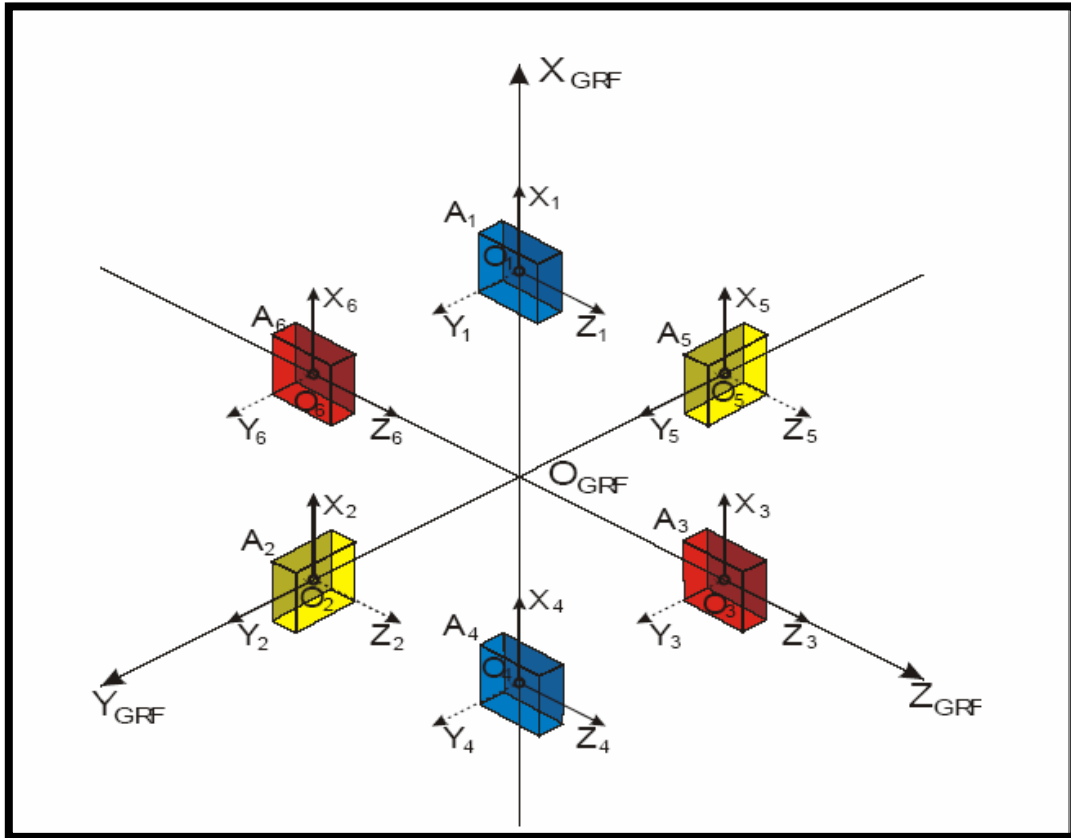


Fig. 1: Sistema de referencia propio del satélite, cuya orientación cambia continuamente con respecto a la Tierra

Estos acelerómetros se encuentran separados por una pequeña distancia. Cada par de acelerómetros toma una medición de la aceleración (vector gravedad, gradiente del potencial gravitatorio, 3 componentes), luego evalúa la diferencia entre estas mediciones teniendo un “vector diferencia de gravedad” (de 3 componentes) y finalmente divide esta diferencia entre el valor de la distancia a la que se encuentran separados los acelerómetros, obteniendo así tres cantidades que son las segundas derivadas espaciales del potencial gravitatorio en las direcciones X_{GRF} , Y_{GRF} , Z_{GRF} . Los valores que toman las segundas derivadas del potencial

gravitatorio en la posición (coordinada geográfica) correspondiente son los que se obtienen como resultado de la medición.

Habiendo interpretado las mediciones con las que se cuenta, aún no tenemos dichas mediciones de manera que sea cómodo trabajar con ellas. Es conveniente darles forma matricial a los datos para así poder acceder a ellos y trabajarlos con mayor facilidad.

Para lograr esto usaremos el software MATLAB en su versión R2015a.

Abrimos en MATLAB y en la línea de comandos escribimos

```
>> fid = fopen('ARCHIVO_DE_TEXTO.txt');
```

Con esto abrimos el ARCHIVO_DE_TEXTO.txt (que contiene todas las líneas de texto donde se encuentran las mediciones, como se vio en la TABLA 1) en MATLAB y se lo asignamos a la variable fid. Ya teniendo el texto dentro de una variable, debemos escanearlo y acumularlo en un vector columna, para ello usamos la función *textscan* del MATLAB. Esta función tiene como salida una variable que le llamaremos MAT (que es un vector columna) cuyo elemento j contiene la j-esima fila del ARCHIVO_DE_TEXTO. Escribimos:

```
>> MAT=textscan(fid, '%s');
```

Ahora tenemos que la variable MAT es de la siguiente forma

<i>Elemento de la variable MAT</i>	<i>Contenido</i>	<i>Utilidad</i>
1	<GG_spatial_Record>	No
2	<Time_Information>	No
3	<GPS_Time>1064743469.076554656</GPS_Time>	Si
4	</Time_Information>	No
5	<Position>	No
6	<Radius_from_Geocenter unit="m">6606430.0300</Radius_from_Geocenter>	Si
...

Tabla 3: Cadenas de texto almacenadas en los elementos de una matriz en MATLAB

Donde puede notarse que no todas las filas son útiles, pues solo algunas filas contienen los datos numéricos y, de las filas útiles, no todos los caracteres son los de interés.

Para extraer solo los datos numéricos de interés y acumularlos en una matriz donde se separen por columnas el tiempo, posición (radio, latitud y longitud), gradiente gravitatorio (las 6 componentes) e incertidumbres, escribimos un algoritmo en MATLAB que haga lo deseado:

```
function M=AcumularTotal (MAT)
for k=1:(length(MAT{1,1}))/39
    Cad = extraer (MAT,3+39*(k-1),11);
    M(k,1) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,7+39*(k-1),10);
    M(k,2) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,9+39*(k-1),12);
    M(k,3) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,11+39*(k-1),12);
    M(k,4) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,15+39*(k-1),5);
    M(k,5) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,16+39*(k-1),5);
    M(k,6) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,17+39*(k-1),5);
    M(k,7) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,24+39*(k-1),5);
    M(k,8) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,25+39*(k-1),5);
    M(k,9) = str2double (Cad);
    Cad = extraer (MAT,26+39*(k-1),5);
    M(k,10) = str2double (Cad);
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function Cad=extraer (MAT,j,ini)
l = encontrar (MAT{1,1}{j,1}, '<', ini);
Cad = MAT{1,1}{j,1} (ini:ini+l-2);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function l = encontrar (texto,caracter,ini)
n = length (texto);
l = 0;
for i = ini:n
    c = texto (i);
    l = l+1;
    if c == caracter
        break
    end
end
end
end
```


La función **AcumularTotal** se encarga de separar los datos en las columnas deseadas, para ello se apoya de dos subfunciones **encontrar** y **extraer**. La primera subfunción encuentra los caracteres de la fila que representan algún valor numérico de interés, y la segunda extrae dichos caracteres y forma una cadena solo con los caracteres que contienen los valores numéricos. Luego esta última cadena se convierte en un número real para ser acumulada la columna respectiva, finalmente se tiene una matriz numérica de 1 518 948 x 10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.0647e+09	6.6064e+06	1.5703	2.4828	-1.3888e-06	-1.3847e-06	2.7735e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
2	1.0647e+09	6.6064e+06	1.5692	2.4826	-1.3888e-06	-1.3847e-06	2.7735e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
3	1.0647e+09	6.6064e+06	1.5680	2.4824	-1.3888e-06	-1.3847e-06	2.7735e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
4	1.0647e+09	6.6064e+06	1.5668	2.4822	-1.3889e-06	-1.3847e-06	2.7735e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
5	1.0647e+09	6.6064e+06	1.5657	2.4820	-1.3889e-06	-1.3847e-06	2.7736e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
6	1.0647e+09	6.6064e+06	1.5645	2.4818	-1.3889e-06	-1.3847e-06	2.7736e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
7	1.0647e+09	6.6063e+06	1.5633	2.4816	-1.3889e-06	-1.3847e-06	2.7736e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
8	1.0647e+09	6.6063e+06	1.5622	2.4814	-1.3889e-06	-1.3847e-06	2.7736e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
9	1.0647e+09	6.6063e+06	1.5610	2.4811	-1.3889e-06	-1.3847e-06	2.7736e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
10	1.0647e+09	6.6063e+06	1.5598	2.4809	-1.3889e-06	-1.3848e-06	2.7736e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
11	1.0647e+09	6.6063e+06	1.5587	2.4807	-1.3889e-06	-1.3848e-06	2.7737e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
12	1.0647e+09	6.6063e+06	1.5575	2.4805	-1.3889e-06	-1.3848e-06	2.7737e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
13	1.0647e+09	6.6062e+06	1.5563	2.4803	-1.3889e-06	-1.3848e-06	2.7737e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
14	1.0647e+09	6.6062e+06	1.5551	2.4801	-1.3889e-06	-1.3848e-06	2.7737e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11
15	1.0647e+09	6.6062e+06	1.5540	2.4799	-1.3889e-06	-1.3848e-06	2.7737e-06	8.2718e-12	9.7367e-12	1.1606e-11

Fig. 2: Matriz M donde se acumula todas las mediciones de manera ordenada

donde el orden es

- Columna 1 : Instante de tiempo de la medición (s)
- Columna 2 : Coordenada radial (m)
- Columna 3 : Coordenada angular θ (rad)
- Columna 4 : Coordenada angular φ (rad)
- Columna 5 : Gradiente gravitatorio en dirección XX
- Columna 6 : Gradiente gravitatorio en dirección YY
- Columna 7 : Gradiente gravitatorio en dirección ZZ
- Columna 8 : Incertidumbre del gradiente gravitatorio en dirección XX
- Columna 9 : Incertidumbre del gradiente gravitatorio en dirección YY
- Columna 10 : Incertidumbre del gradiente gravitatorio en dirección ZZ

De la matriz M podemos extraer datos de manera más cómoda para trabajar con ellos o por ejemplo, plotear la trayectoria del satélite medidor.

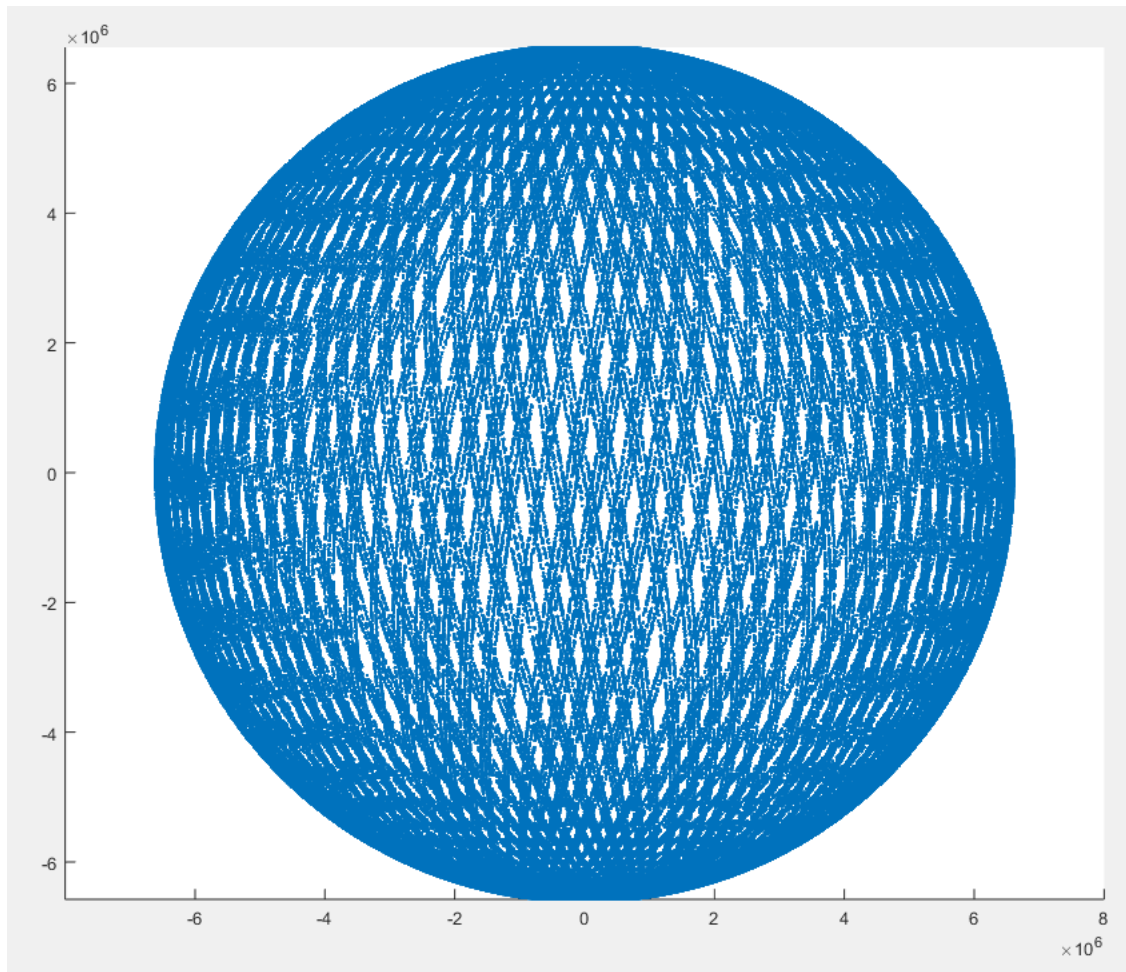


Fig. 3: Trayectoria del satélite **medidor** durante un mes

La trayectoria del satélite medidor mostrada en la **Fig. 3** es controlada desde estaciones en Tierra.

CAPÍTULO II:

Modelamiento del Potencial Gravitatorio y Cálculo de Coeficientes

2.1 Darles forma analítica a los datos numéricos (mediciones)

El potencial gravitatorio U cumple con la ecuación de Laplace fuera de la Tierra $\nabla^2 U = 0$ que nosotros la usaremos en coordenadas esféricas, cuyas soluciones son los armónicos esféricos. En la bibliografía^[1] se encuentra que la expansión del potencial gravitatorio se escribe como sigue:

$$U(r, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{r} + \sum_{n=2}^{N_z} \frac{J_n P_n^0(\sin \theta)}{r^{n+1}} + \sum_{n=2}^{N_t} \sum_{m=1}^n \frac{P_n^m(\sin \theta)(C_n^m \cos m\varphi + S_n^m \sin m\varphi)}{r^{n+1}} \quad \dots (1)$$

Donde

- G : Constante de gravitación universal $6.67384 \times 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$
- M : Masa de la Tierra $5.9736 \times 10^{24} kg$
- P_n^0 : Polinomios de Legendre
- P_n^m : Polinomios asociados de Legendre
- N_z : Número de términos zonales
- N_t : Número de términos teserales

Nótese que en la expresión (1) se eliminan los términos J_1 , C_1^1 y S_1^1 sin una explicación clara del porqué se hace tal eliminación. Aquí proponemos usar todos los términos de la expansión y si, de forma natural, luego del cálculo, dichos términos resultan ser cero, entonces lo aceptaríamos.

En adelante la expresión del potencial gravitatorio que consideraremos será:

$$U(r, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{r} + \sum_{n=1}^{N_z} \frac{J_n P_n^0(\sin \theta)}{r^{n+1}} + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \frac{P_n^m(\sin \theta)(C_n^m \cos m\varphi + S_n^m \sin m\varphi)}{r^{n+1}} \quad \dots (2)$$

En esta expresión hay 3 familias de constantes J_n , C_n^m y S_n^m que queremos determinar.

Por otra parte, las mediciones realizadas por el satélite medidor son de tipo cartesiano con respecto a su sistema de referencia propio, entonces resulta necesario transformar la ecuación (2) al sistema de referencia cartesiano del satélite medidor (cuya posición y orientación cambian con el tiempo).

Notemos que los datos numéricos son las segundas derivadas del potencial U (en el sistema propio del satélite medidor) pero, dentro de los 6 valores de segundas derivadas, algunos son mejores que otros.

De la **Fig. 2** se puede notar que las incertidumbres de los valores numéricos de U_{xx} , U_{yy} y U_{zz} son (en orden de magnitud) un millonésimo del valor nominal, mientras que las incertidumbres de las derivadas mixtas U_{xy} , U_{xz} y U_{yz} son, en el mejor de los casos, del orden de un centésimo de su valor nominal. En adelante nos centraremos en trabajar con U_{xx} , U_{yy} y U_{zz} , descartando U_{xy} , U_{xz} y U_{yz} por su elevada incertidumbre y porque no son indispensables.

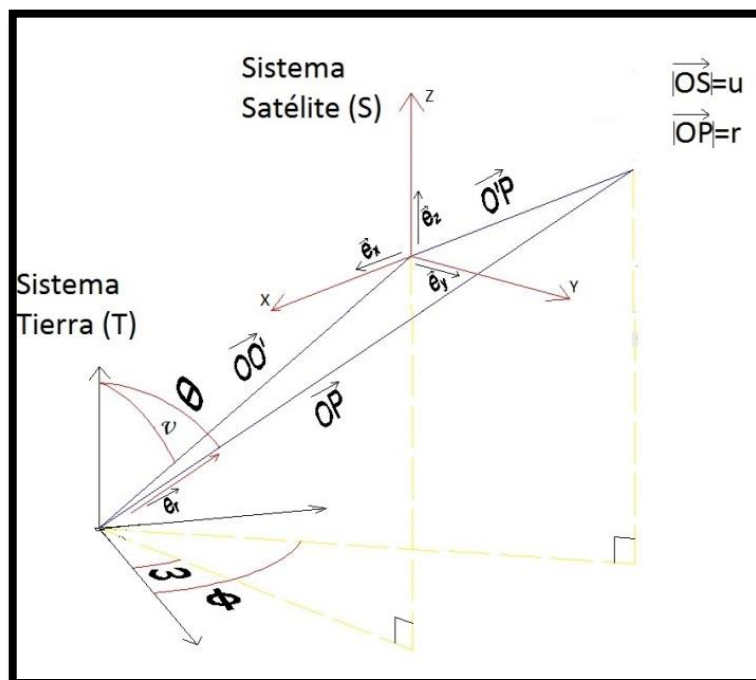


Fig. 4: Relación entre el sistema de referencia fijo a Tierra (coordenadas esféricas) y el sistema propio del satélite

Notación	\vec{a}	: Segmento Orientado (segdo ^[VI])
	\bar{a}	: Vector que representa al segdo \vec{a} en algún sistema de referencia
	$\vec{a}_{/S}$: Vector del segdo \vec{a} especificando el sistema de referencia S en el que se expresa
	T	: Sistema T, Sistema de referencia de la Tierra
	S	: Sistema S, Sistema de referencia del Satélite

La definición detallada de **segdo** se encuentra en la referencia [VI]. De la referencia [IV] se tiene que:

$$\vec{e}_{x/T} = \bar{e}_x = \begin{pmatrix} -\cos v \cos w \\ -\cos v \sin w \\ \sin v \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{y/T} = \bar{e}_y = \begin{pmatrix} \sin w \\ -\cos w \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{z/T} = \bar{e}_z = \begin{pmatrix} \sin v \cos w \\ \sin v \sin w \\ \cos v \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{x/S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{y/S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{z/S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que $\overrightarrow{OO'} = u\vec{e}_z$, $\overrightarrow{OP} = r\vec{e}_r$ y $\overrightarrow{O'P} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, entonces:

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP}$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$u\vec{e}_z + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r$$

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (u+z)\vec{e}_z = r\vec{e}_r \quad \dots (3)$$

El segdo \vec{e}_r representado en el sistema T es el vector unitario radial de coordenadas esféricas

$$\vec{e}_{r/T} = \bar{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ luego el vector posición del punto } P \text{ escrito en el sistema } T \text{ será}$$

$r\bar{e}_r$, y en el sistema S será escrito $x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$, entonces:

$$x \begin{pmatrix} -\cos v \cos w \\ -\cos v \sin w \\ \sin v \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \sin w \\ -\cos w \\ 0 \end{pmatrix} + (u+z) \begin{pmatrix} \sin v \cos w \\ \sin v \sin w \\ \cos v \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \dots (4)$$

Resolviendo la ecuación (4) para r , θ y φ tenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (u + z)^2} \quad \theta = \text{ArcCos} \left[\frac{(u + z) \cos v + x \sin v}{\sqrt{x^2 + y^2 + (u + z)^2}} \right]$$

$$\varphi = \pi + \text{ArcTan} \left[\frac{x \cos v \cos w - (u + z) \cos w \sin v - y \sin w}{\sqrt{y^2 + (x \cos v - (u + z) \sin v)^2}}, \frac{y \cos w + (x \cos v - (u + z) \sin v) \sin w}{\sqrt{y^2 + (x \cos v - (u + z) \sin v)^2}} \right] \dots (5)$$

donde la función $\text{ArcTan}[a, b]$ indica el ángulo en sentido antihorario entre el eje X y el radio-vector (a, b) .

De las ecuaciones (5) tenemos una relación entre las coordenadas del sistema T y las del S :

$$r = r(x, y, z) \quad \theta = \theta(x, y, z) \quad \varphi = \varphi(x, y, z)$$

Por otra parte, considerando las funciones G y U de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde G es el potencial gravitatorio escrito en el sistema S , y U el potencial gravitatorio escrito en el sistema T .

Tenemos:

$$G(x, y, z) = U(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \dots (6)$$

De (6) podemos calcular las primeras derivadas, así:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

y luego las segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Por otra parte, los datos numéricos nos dan el valor del gradiente gravitatorio en la posición del satélite medidor, es decir, en el punto O' .

Entonces debemos usar el resultado anterior para el punto $P = O'$, donde $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ luego $u = r$, $v = \theta$, $w = \varphi$. Evaluando en este punto:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(-\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \left(-\frac{\csc \theta}{r}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\cot \theta}{r^2} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

Ahora podemos verificar que:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(-\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \left(-\frac{\csc \theta}{r}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\cot \theta}{r^2} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

$$\nabla^2_{\text{cartesiano}} G = \nabla^2_{\text{esférico}} U$$

lo cual indica que los resultados son consistentes.

Retomando, las expresiones que tenemos son:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \left(\frac{\csc \theta}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad \dots (7)$$

Queremos encontrar la forma explícita de las ecuaciones (7), luego debemos calcular $\frac{\partial U}{\partial r}$,

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \text{ y } \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

Derivando (2) tenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} + \sum_{n=1}^{N_z} J_n (n+1) GMR^n \frac{P_n^0(\sin \theta)}{r^{n+2}} + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n (n+1) GMR^n \frac{P_n^m(\sin \theta) (C_n^m \cos m\varphi + S_n^m \sin m\varphi)}{r^{n+2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{N_z} J_n (n+1) GMR^n \frac{P_{n+1}^0(\sin \theta) - \sin \theta P_n^0(\sin \theta)}{r^{n+1} \cos \theta}$$

$$+ \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n GMR^n \frac{[(n-m+1)P_{n+1}^m(\sin \theta) - (n+1) \sin \theta P_n^m(\sin \theta)] (C_n^m \cos m\varphi + S_n^m \sin m\varphi)}{r^{n+1} \cos \theta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -\frac{2GM}{r^3} - \sum_{n=1}^{N_z} J_n (n+1)(n+2) GMR^n \frac{P_n^0(\sin \theta)}{r^{n+3}}$$

$$- \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n (n+1)(n+2) GMR^n \frac{P_n^m(\sin \theta) (C_n^m \cos m\varphi + S_n^m \sin m\varphi)}{r^{n+3}}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_z} J_n (n+1) GMR^n \frac{[(n+1) \cos 2\theta - n-3] P_n^0(\sin \theta) - 2(n+2)(P_{n+2}^0(\sin \theta) - 2 \sin \theta P_{n+1}^0(\sin \theta))}{r^{n+1} (\cos \theta)^2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n GMR^n \frac{[(n+1)((n+1) \cos 2\theta - n-3) P_n^m(\sin \theta) + 2(m-n-1)((n-m+2) P_{n+2}^m(\sin \theta) - 2(n+2) \sin \theta P_{n+1}^m(\sin \theta))] (C_n^m \cos m\varphi + S_n^m \sin m\varphi)}{r^{n+1} \cos \theta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n GMR^n m^2 \frac{P_n^m(\sin \theta) (C_n^m \cos m\varphi + S_n^m \sin m\varphi)}{r^{n+1}}$$

donde aparecen las mismas familias de constantes anteriores. Reemplazando estas últimas expresiones en (7) conseguimos escribir las segundas derivadas de G (datos numéricos) en función de las derivadas de U .

Luego del reemplazo se puede notar que las expresiones resultantes para $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$ en general tienen la forma:

$$D^2 G = F(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{N_z} J_n Fz_n(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n (C_n^m A_n^m(\bar{x}) + S_n^m B_n^m(\bar{x})) \quad \dots (8)$$

que por su longitud no se muestran aquí, pero si son escritas en los algoritmos mostrados más adelante.

Donde $D^2 G$: Segunda derivada de G , puede ser $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ ó $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$

$F(\bar{x})$: Parte independiente de coeficientes

$Fz_n(\bar{x})$: Función que acompaña al coeficiente J_n

$A_n^m(\bar{x})$: Función que acompaña al coeficiente C_n^m

$B_n^m(\bar{x})$: Función que acompaña al coeficiente S_n^m

Queremos encontrar los valores de J_n , C_n^m y S_n^m que hacen que $D^2 G$ sea lo más cercana posible a sus valores numéricos (datos experimentales).

2.1.1 Procedimiento de Mínimos Cuadrados

Se puede notar de (7) que podemos escribir $D^2 G = g(J_n, C_n^m, S_n^m, \bar{x})$ y G_i representa el i -ésimo dato numérico (valores del gradiente gravitatorio, segundas derivadas de G).

Considerando que tenemos N datos, construimos la función d

$$d(J_n, C_n^m, S_n^m, \bar{x}) = \sum_{i=1}^N [g(J_n, C_n^m, S_n^m, \bar{x}_i) - G_i]^2$$

y deseamos que la función d sea mínima según J_n, C_n^m, S_n^m entonces

$$\frac{\partial d}{\partial J_l} = 0 \quad \frac{\partial d}{\partial C_j^k} = 0 \quad \frac{\partial d}{\partial S_p^q} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3, \dots, N_z \quad ; \quad j, p = 1, 2, 3, \dots, N_t$$

(N_z coeficientes J_n , $\frac{N_t(N_t-1)}{2}$ coeficientes C_n^m y $\frac{N_t(N_t-1)}{2}$ coeficientes S_n^m , haciendo un total de $N_z + N_t(N_t - 1)$ coeficientes)

de donde obtenemos las ecuaciones:

$$\sum_{n=1}^{N_z} \left[\sum_{l=1}^N F_{Z_n}(\bar{x}_i) F_{Z_l}(\bar{x}_i) \right] J_n + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[\sum_{l=1}^N A_n^m(\bar{x}_i) F_{Z_l}(\bar{x}_i) \right] C_n^m + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[\sum_{l=1}^N B_n^m(\bar{x}_i) F_{Z_l}(\bar{x}_i) \right] S_n^m = \sum_{i=1}^N (G_i - F(\bar{x}_i)) F_{Z_l}(\bar{x}_i)$$

$$\sum_{n=1}^{N_z} \left[\sum_{l=1}^N F_{Z_n}(\bar{x}_i) A_j^k(\bar{x}_i) \right] J_n + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[\sum_{l=1}^N A_n^m(\bar{x}_i) A_j^k(\bar{x}_i) \right] C_n^m + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[\sum_{l=1}^N B_n^m(\bar{x}_i) A_j^k(\bar{x}_i) \right] S_n^m = \sum_{i=1}^N (G_i - F(\bar{x}_i)) A_j^k(\bar{x}_i)$$

$$\sum_{n=1}^{N_z} \left[\sum_{l=1}^N F_{Z_n}(\bar{x}_i) B_p^q(\bar{x}_i) \right] J_n + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[\sum_{l=1}^N A_n^m(\bar{x}_i) B_p^q(\bar{x}_i) \right] C_n^m + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[\sum_{l=1}^N B_n^m(\bar{x}_i) B_p^q(\bar{x}_i) \right] S_n^m = \sum_{i=1}^N (G_i - F(\bar{x}_i)) B_p^q(\bar{x}_i)$$

Este último sistema de ecuaciones, cuyas variables son todos los J_n , C_n^m y S_n^m se puede escribir en forma matricial:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} J_n \\ C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (G_i - F(\bar{x}_i)) F_{Z_l}(\bar{x}_i) \\ \sum_{i=1}^N (G_i - F(\bar{x}_i)) A_j^k(\bar{x}_i) \\ \sum_{i=1}^N (G_i - F(\bar{x}_i)) B_p^q(\bar{x}_i) \end{pmatrix} \quad \dots (9)$$

Para calcular los elementos de la matriz \mathcal{M} y dar solución a (9), escribimos un programa en MATLAB. Este se muestra en el **ANEXO 1**, que además calcula el **Coefficiente de Determinación**.

Se realizaron varios ensayos con este programa y se pudo notar que, por la cantidad enorme de datos, el tiempo de cálculo es demasiado (más de 6 días). Se paralelizó el código, para aprovechar todos los núcleos del computador, con lo cual el tiempo de cálculo se redujo bastante, pero no lo suficiente para nuestras expectativas.

Debido a esto nos vimos en la necesidad de reducir la densidad de datos. Se pueden considerar varios criterios para discriminar datos, tomar los N primeros, tomar un dato de cada 5, eliminar los de mayor incertidumbre, etc. Puesto que, teóricamente el Laplaciano debería ser igual a cero, esto no es así desde el punto de vista numérico, sino que se obtienen valores cercanos a cero, entonces decidimos eliminar los datos cuyos Laplacianos se alejen más de cero.

Tengamos en cuenta que los valores numéricos producto de las mediciones GOCE son las segundas derivadas del potencial gravitatorio medido desde el sistema de referencia cartesiano propio del satélite medidor $\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)$, pero como se verá más adelante, bastaría solo un grupo de estas mediciones (según el eje X , Y o Z) para obtener los resultados. Como los datos numéricos que tenemos son las componentes del Laplaciano del potencial gravitatorio, entonces sumados deben ser cero (o casi cero).

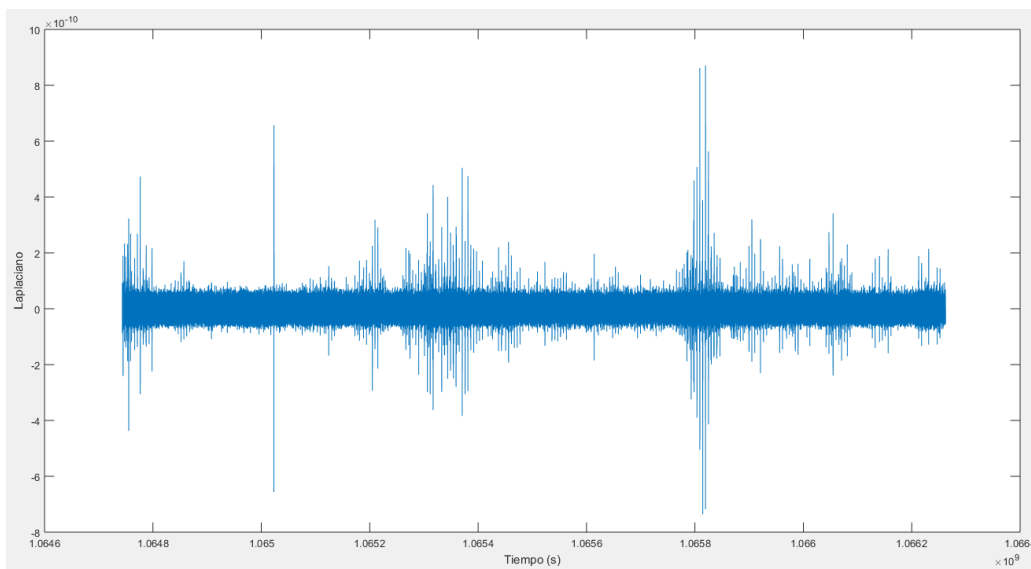


Fig. 5: Valores que toma el Laplaciano en función del tiempo

De la **Fig. 5** se puede apreciar que hay zonas donde el valor del Laplaciano se aleja considerablemente de cero. Así estas zonas pierden propiamente “sentido físico” y sugieren no tomarlas en cuenta para los cálculos.

Se hizo un programa que, dando un valor numérico como cota superior para este Laplaciano que teóricamente debe ser cero, elimina los datos mayores a dicha cota; en nuestro caso $5 \times 10^{-12} \text{s}^{-2}$, es decir, gráficamente:

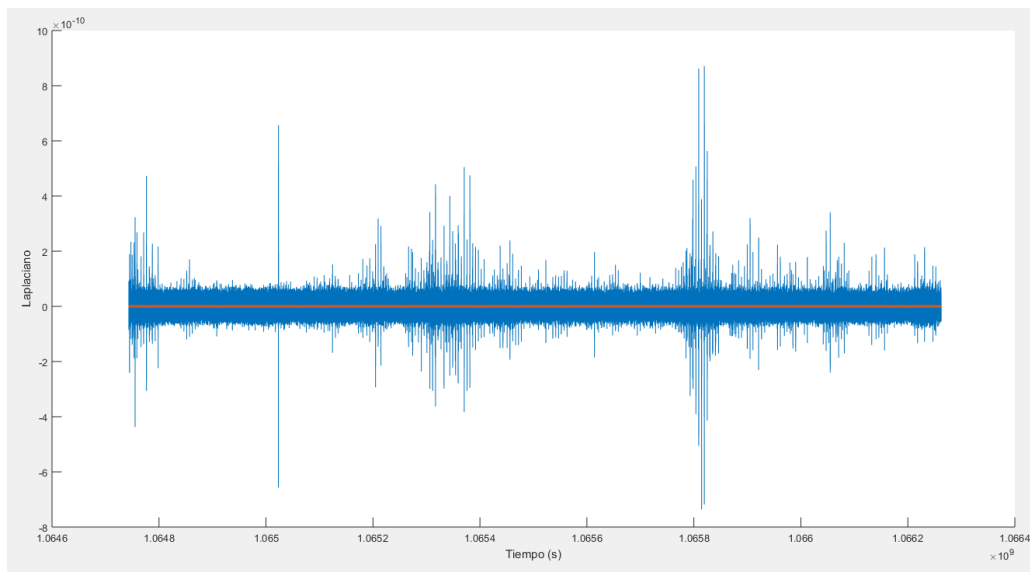


Fig. 6. Azul: Valores del Laplaciano obtenidos con todos los datos. Rojo: Valores del Laplaciano luego de la eliminación del 80% de datos alejados de cero.

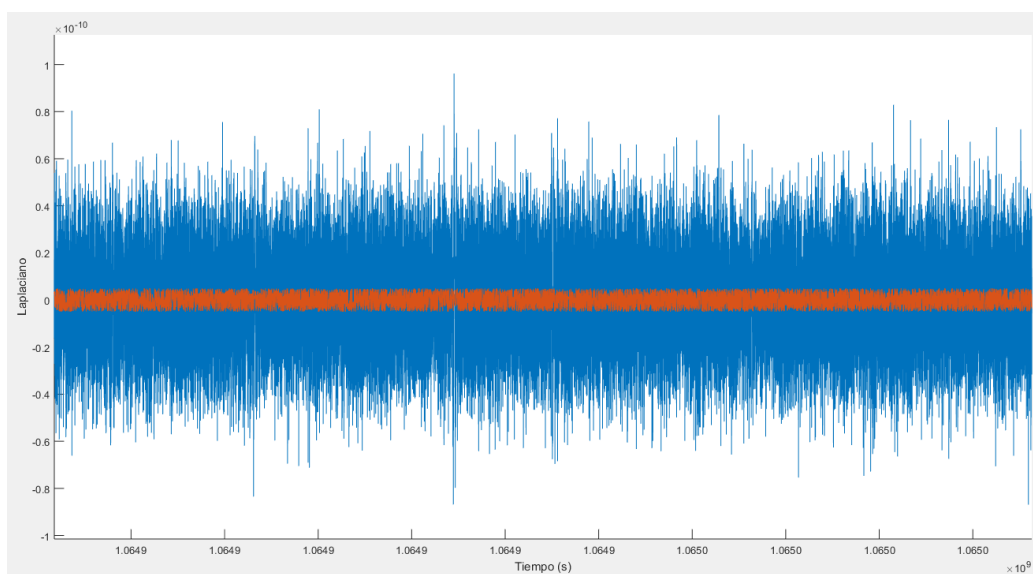


Fig. 7: Zoom de Fig. 6

Se eliminaron del orden del 80% de datos, es decir 4 de cada 5, lo cual es equivalente a que el satélite medidor tome medidas cada 5 segundos. De esta manera (principalmente por las limitaciones computacionales) tenemos un universo de datos más reducido, pero a su vez más significativo en el sentido que corresponden a mejores valores del Laplaciano. En adelante se trabajará con estos datos depurados.

Se escribieron tres algoritmos en MATLAB que calculan los coeficientes de la expansión del potencial usando cada una de las tres componentes del gradiente gravitatorio $\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)$. Estos algoritmos fueron escritos para que calculen tanto los coeficientes de la expansión del potencial gravitatorio como el coeficiente de determinación usando las fórmulas (1) y (2) independientemente (con y sin los términos de correspondientes a $n = 1$), esto permitirá visualizar qué ventajas (o desventajas) tiene una expresión sobre la otra.

El trabajo se realiza utilizando los datos del mes de setiembre y octubre del 2013, haciendo un total de 48 días de datos (30 del mes de setiembre y 18 de octubre). Sólo usamos 18 días del mes de octubre pues el último día de mediciones al que se tiene acceso es el 18 de octubre del 2013.

Con este conjunto de mediciones de gradiente gravitatorio se repitió el procedimiento de discriminación según su Laplaciano (análogo a lo visto en la primera parte de la tesis), reduciendo la cantidad de datos al 20%. Seguidamente, usando un algoritmo escrito en MATLAB se separaron estos datos de los 48 días según la fecha en la que fueron medidos; teniendo así los datos del día 1, día 2, ..., día 47 y día 48. Cada grupo diario de datos fue almacenado en una matriz.

Los datos diarios corresponden a todas las mediciones realizadas en un día determinado durante todo el recorrido del satélite medidor alrededor de la Tierra.

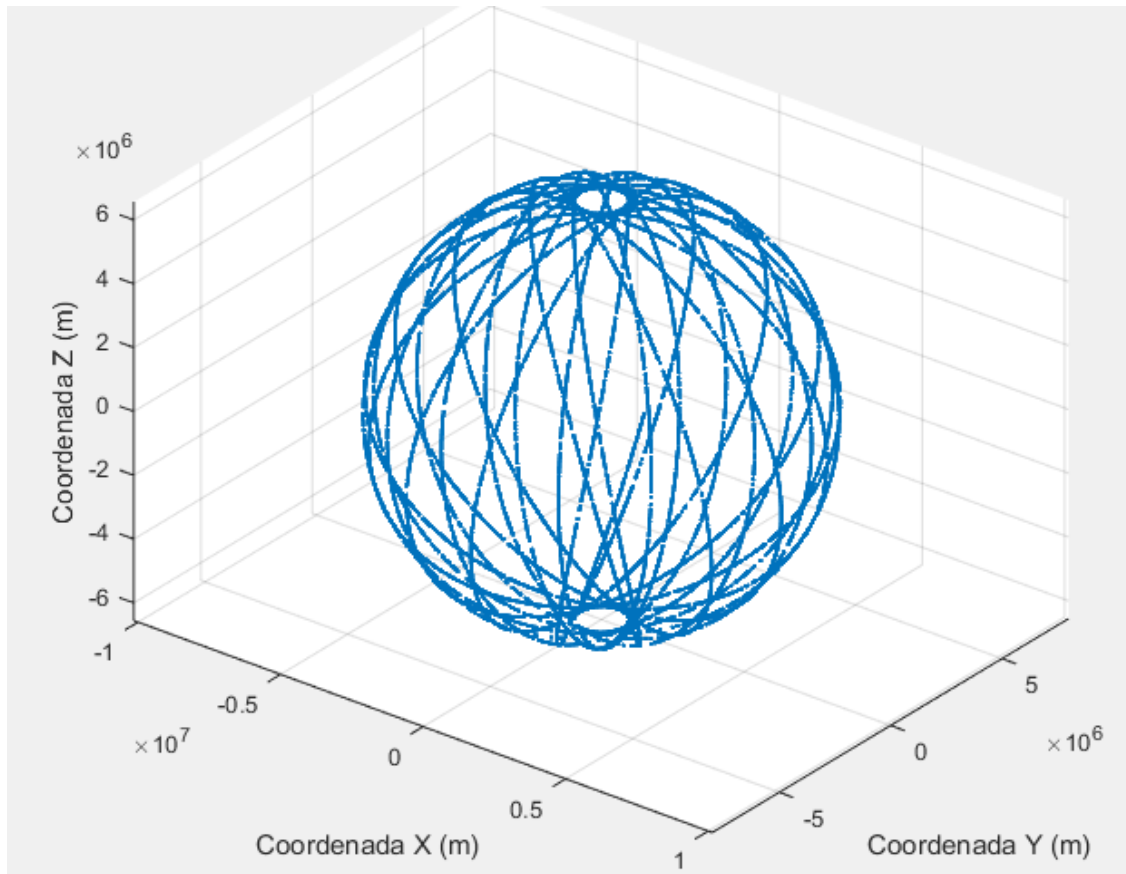


Fig. 8: Posiciones medidas por el satélite **medidor** en su recorrido de un día (01/09/2013)

Como se puede apreciar en la **Fig. 8**, a pesar de haber eliminado el 80% de datos, en un día se recogen datos de casi toda la Tierra, esto permite realizar cálculos diarios que luego nos darán idea de la variación temporal del potencial gravitatorio terrestre total. Se muestran los 17 000 datos de la posición del satélite medidor en un día, lo que da la apariencia de una trayectoria continua.

2.2 Cálculo de las familias de coeficientes

Usando el modelo de los mínimos cuadrados se escribieron los algoritmos `Coef_xx_esfericasPAR2`, `Coef_yy_esfericasPAR2`, `Coef_zz_esfericasPAR2` que calculan las familias de coeficientes J_n , C_n^m y S_n^m usando los datos numéricos $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$ respectivamente. También calculan el Coeficiente de Determinación.

Nota: Estos algoritmos usan la computación paralela *multicore* para disminuir el tiempo de cálculo computacional. Los algoritmos se muestran en el **ANEXO 1**.

Teniendo los datos numéricos separados en días, se procedió a correr estos algoritmos en MATLAB usando cada grupo de datos numéricos diarios respectivamente.

2.2.1 Cálculos Día 1

Haciendo uso de los algoritmos `Coef_xx_esfericasPAR2`, `Coef_yy_esfericasPAR2`, `Coef_zz_esfericasPAR2`, y las mediciones realizadas en el día 1 (1 de setiembre del 2013) se calcularon los coeficientes de la expansión en armónicos esféricos del potencial terrestre correspondientes a mediciones del gradiente gravitatorio según $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$ respectivamente, usando la expansión del potencial terrestre iniciada en $n = 1$ y $n = 2$.

Por limitaciones computacionales se realizaron los cálculos con 15 términos correspondientes a los Polinomios de Legendre (términos zonales) y 15 correspondientes a los Polinomios Asociados de Legendre (términos tesaerales), resultando un total de 255 coeficientes.

Los resultados fueron:

Jx	Jy	Jz	J2x	J2y	J2z
15x1 double	15x1 double	15x1 double	15x1 double	15x1 double	15x1 double
1	1	1	1	1	1
-4.5980	-6.7908	-4.9062	0	0	0
8.7656	16.5099	9.6340	-5.7584	-15.0078	-6.9548
-14.0370	-31.5540	-15.6720	15.9093	54.0324	20.0158
19.0809	49.3640	21.5374	-29.1126	-120.6912	-37.3846
-22.2476	-64.6531	-25.3182	41.4028	202.6140	53.8272
22.3669	71.7766	25.6179	-48.1719	-272.6231	-63.1468
-19.4107	-67.9239	-22.3472	46.8367	302.4518	61.7579
14.4980	54.7997	16.7619	-38.3402	-280.0556	-50.7736
-9.2507	-37.5024	-10.7325	26.3893	216.8939	35.0601
4.9772	21.5320	5.7910	-15.1347	-139.6016	-20.1556
-2.2114	-10.1757	-2.5788	7.1027	73.4968	9.4748
0.7845	3.8344	0.9166	-2.6431	-30.7337	-3.5293
-0.2099	-1.0904	-0.2456	0.7380	9.6805	0.9857
0.0380	0.2103	0.0445	-0.1388	-2.0675	-0.1852
-0.0035	-0.0209	-0.0041	0.0133	0.2279	0.0178

Fig. 9: Familia de coeficientes J_n con términos desde $n = 1$ (izquierda) y desde $n = 2$ (derecha)

CAPÍTULO II: Modelamiento del Potencial Gravitatorio y Cálculo de Coeficientes

Cx

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-0.0627	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0766	-0.0132	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0869	0.0174	-6.1918e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0857	-0.0195	6.9540e-04	-4.2155e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0718	0.0189	-6.8558e-04	3.0639e-06	-1.5677e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0502	-0.0160	5.9579e-04	-1.7542e-06	1.1296e-06	-1.4295e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0281	0.0119	-4.5610e-04	7.9684e-07	-7.2009e-07	9.3380e-08	1.5553e-09	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0114	-0.0076	3.0606e-04	-2.6921e-07	4.0391e-07	-5.3308e-08	-7.8218e-10	7.2962e-11	0	0	0	0	0	0	0
-0.0021	0.0042	-1.7850e-04	6.0339e-08	-1.9812e-07	2.6570e-08	3.8598e-10	-3.9614e-11	-4.6013e-13	0	0	0	0	0	0
-0.0012	-0.0020	8.9257e-05	-9.2159e-09	8.3998e-08	-1.1418e-08	-1.6759e-10	1.8145e-11	1.7296e-13	6.0363e-14	0	0	0	0	0
0.0014	7.7596e-04	-3.7497e-05	6.4431e-09	-3.0242e-08	4.1520e-09	6.3250e-11	-7.0501e-12	-6.2649e-14	-1.0519e-14	1.4523e-15	0	0	0	0
-7.8520e-04	-2.4361e-04	1.2814e-05	-7.1025e-09	8.9792e-09	-1.2380e-09	-1.9881e-11	2.2609e-12	1.9031e-14	2.3295e-15	-3.0922e-16	-3.2162e-17	0	0	0
2.7125e-04	5.8205e-05	-3.3751e-06	4.4152e-09	-2.0915e-09	2.8751e-10	5.0171e-12	-5.6805e-13	-4.5845e-15	-3.4185e-16	7.7364e-17	2.6767e-18	-6.4555e-19	0	0
-5.7821e-05	-9.5376e-06	6.1753e-07	-1.5739e-09	3.4688e-10	-4.7038e-11	-9.1917e-13	1.0159e-13	7.9706e-16	3.5494e-17	-1.4094e-17	-4.1237e-19	7.0258e-20	-5.9398e-21	0
5.8640e-06	8.2242e-07	-6.0305e-08	2.6992e-10	-3.1698e-11	4.2782e-12	1.0355e-13	-9.8838e-15	-8.9542e-17	3.4676e-18	1.9925e-18	-2.1676e-20	-4.9877e-21	1.8591e-22	-1.1861e-22

Cy

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.0532	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1213	0.0110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2209	-0.0160	-5.0521e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.3335	0.0199	6.1885e-04	-5.0899e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.4256	-0.0213	-6.6186e-04	4.8922e-05	-1.2010e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.4641	0.0198	6.2035e-04	-4.1330e-05	1.0136e-06	-3.4220e-08	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.4341	-0.0159	-5.0930e-04	3.0634e-05	-7.5774e-07	2.5745e-08	2.5081e-10	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.3482	0.0111	3.6485e-04	-1.9799e-05	4.9921e-07	-1.7130e-08	-1.6397e-10	-8.2306e-12	0	0	0	0	0	0	0
0.2381	-0.0066	-2.2633e-04	1.1049e-05	-2.8723e-07	9.9946e-09	9.4609e-11	4.3431e-12	-1.5708e-12	0	0	0	0	0	0
-0.1373	0.0034	1.2004e-04	-5.2444e-06	1.4240e-07	-5.0450e-09	-4.7583e-11	-1.9892e-12	7.2696e-13	1.5534e-14	0	0	0	0	0
0.0655	-0.0014	-5.3364e-05	2.0692e-06	-5.9604e-08	2.1614e-09	2.0458e-11	7.8518e-13	-2.8896e-13	-6.1576e-15	-3.1417e-17	0	0	0	0
-0.0250	4.8612e-04	1.9258e-05	-6.5481e-07	2.0417e-08	-7.6175e-10	-7.3192e-12	-2.5585e-13	9.5904e-14	2.0373e-15	1.1654e-17	-4.0280e-19	0	0	0
0.0073	-1.2626e-04	-5.3421e-06	1.5645e-07	-5.4253e-09	2.1018e-10	2.0691e-12	6.6350e-14	-2.5359e-14	-5.4045e-16	-3.0304e-18	9.9730e-20	5.0488e-21	0	0
-0.0014	2.2463e-05	1.0256e-06	-2.5133e-08	1.0128e-09	-4.1102e-11	-4.2440e-13	-1.2361e-14	4.8900e-15	1.0399e-16	7.1355e-19	-1.8509e-20	-1.0901e-21	-3.6496e-23	0
1.4833e-04	-2.0790e-06	-1.0355e-07	1.9798e-09	-1.0153e-10	4.4955e-12	5.0194e-14	1.1695e-15	-5.4543e-16	-1.2261e-17	-5.6756e-20	5.6740e-22	1.7177e-22	6.0554e-24	-1.7583e-25

Cz

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-0.0068	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0200	0.1033	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0283	-0.0933	-0.0064	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0279	0.0795	0.0051	-7.4120e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0192	-0.0626	-0.0037	5.0552e-04	1.9156e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0065	0.0448	0.0025	-3.1729e-04	-1.1791e-05	1.0879e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0047	-0.0288	-0.0015	1.8064e-04	6.6594e-06	-2.9909e-08	-6.5296e-09	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0105	0.0165	8.4025e-04	-9.1969e-05	-3.4036e-06	8.9378e-10	3.1135e-09	6.2270e-10	0	0	0	0	0	0	0
0.0107	-0.0083	-4.0684e-04	4.1222e-05	1.5498e-06	5.3814e-09	-1.3393e-09	-2.6195e-10	-1.3407e-11	0	0	0	0	0	0
-0.0077	0.0036	1.7119e-04	-1.5958e-05	-6.1681e-07	-4.1731e-09	5.1189e-10	9.7459e-11	4.9497e-12	3.3523e-13	0	0	0	0	0
0.0042	-0.0013	-6.1160e-05	5.2006e-06	2.0917e-07	2.0286e-09	-1.6999e-10	-3.1354e-11	-1.5791e-12	-1.1012e-13	-3.0918e-15	0	0	0	0
-0.0018	3.8958e-04	1.7917e-05	-1.3744e-06	-5.8246e-08	-7.2000e-10	4.7440e-11	8.4409e-12	4.2150e-13	3.0400e-14	8.6553e-16	-3.8458e-17	0	0	0
5.3152e-04	-8.8282e-05	-4.0639e-06	2.7737e-07	1.2553e-08	1.8663e-10	-1.0539e-11	-1.8000e-12	-8.9297e-14	-6.6892e-15	-1.9331e-16	9.0690e-18	-8.8753e-20	0	0
-1.0585e-04	1.3633e-05	6.0428e-07	-3.8222e-08	-1.8729e-09	-3.2558e-11	1.6756e-12	2.7413e-13	1.3635e-14	1.0589e-15	3.1609e-17	-1.6220e-18	1.9864e-20	-2.1128e-21	0
1.0512e-05	-1.0747e-06	-5.3184e-08	2.7106e-09	1.4626e-10	3.0059e-12	-1.4431e-13	-2.2913e-14	-1.1721e-15	-9.4247e-17	-2.9181e-18	1.6421e-19	-1.5854e-21	4.0126e-22	-2.0233e-23

Fig. 10: Familia de coeficientes C_n^m con términos desde $n = 1$

CAPÍTULO II: Modelamiento del Potencial Gravitatorio y Cálculo de Coeficientes

Sx

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.0623	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0903	-5.8575e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1256	9.6178e-04	-6.4926e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1551	-0.0013	7.2450e-04	-2.3708e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1676	0.0016	-7.0893e-04	2.3067e-05	-1.3037e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1578	-0.0016	6.0993e-04	-1.9730e-05	9.9778e-07	-1.4484e-08	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1290	0.0014	-4.6084e-04	1.4871e-05	-6.6599e-07	8.3351e-09	-3.5776e-09	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0912	-0.0010	3.0418e-04	-9.8287e-06	3.9031e-07	-3.9531e-09	2.0544e-09	1.2831e-11	0	0	0	0	0	0	0
0.0552	6.4389e-04	-1.7381e-04	5.6482e-06	-1.9913e-07	1.4872e-09	-1.0645e-09	-6.7845e-12	-1.3369e-12	0	0	0	0	0	0
-0.0282	-3.4902e-04	8.4780e-05	-2.7839e-06	8.7197e-08	-3.9221e-10	4.8137e-10	3.1424e-12	4.5521e-13	-7.4435e-15	0	0	0	0	0
0.0119	1.5756e-04	-3.4554e-05	1.1532e-06	-3.1996e-08	3.4701e-11	-1.8665e-10	-1.2290e-12	-1.6177e-13	3.0661e-15	-7.6767e-16	0	0	0	0
-0.0040	-5.7435e-05	1.1379e-05	-3.8885e-07	9.4751e-09	2.8400e-11	6.0046e-11	4.0011e-13	4.8320e-14	-9.9919e-16	1.2017e-16	-2.0775e-17	0	0	0
0.0010	1.6025e-05	-2.8609e-06	1.0122e-07	-2.1163e-09	-1.7730e-11	-1.5293e-11	-1.0301e-13	-1.2021e-14	2.6408e-16	-2.7896e-17	1.4031e-18	-4.8363e-19	0	0
-1.7132e-04	-3.0845e-06	4.9284e-07	-1.8344e-08	3.1321e-10	5.2265e-12	2.7893e-12	1.8936e-14	2.1090e-15	-4.6663e-17	3.6238e-18	-1.0564e-19	4.5829e-20	-5.2554e-21	0
1.4589e-05	3.1279e-07	-4.3908e-08	1.7824e-09	-2.0492e-11	-7.6455e-13	-2.8951e-13	-1.9086e-15	-2.2982e-16	5.9586e-18	-8.7248e-19	-4.2649e-20	-8.2902e-21	4.9561e-22	-4.1325e-22

Sy

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.0207	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0541	-0.0115	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1089	0.0173	2.8268e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1770	-0.0220	-3.4641e-04	3.8426e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2389	0.0242	3.7187e-04	-3.7857e-05	-1.6036e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.2719	-0.0231	-3.5082e-04	3.2983e-05	1.3875e-06	5.9484e-09	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2628	0.0191	2.9059e-04	-2.5377e-05	-1.0590e-06	-4.0882e-09	1.0726e-09	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.2160	-0.0137	-2.1039e-04	1.7161e-05	7.0930e-07	2.5144e-09	-6.5235e-10	7.8648e-11	0	0	0	0	0	0	0
0.1593	0.0085	1.3210e-04	-1.0114e-05	-4.1321e-07	-1.3819e-09	3.4877e-10	-4.1045e-11	3.1838e-13	0	0	0	0	0	0
-0.0877	-0.0045	-7.1021e-05	5.1284e-06	2.0653e-07	6.7130e-10	-1.6200e-10	1.8659e-11	-1.5076e-13	-6.0288e-15	0	0	0	0	0
0.0420	0.0020	3.2053e-05	-2.1939e-06	-8.6767e-08	-2.8615e-10	6.3978e-11	-7.2583e-12	6.2239e-14	2.4306e-15	2.7425e-17	0	0	0	0
-0.0161	-6.9672e-04	-1.1768e-05	7.6799e-07	2.9665e-08	1.0385e-10	-2.0860e-11	2.3478e-12	-2.1425e-14	-8.3289e-16	-6.4680e-18	1.0811e-18	0	0	0
0.0046	1.9099e-04	3.3347e-06	-2.0891e-07	-7.8153e-09	-3.1262e-11	5.3068e-12	-6.0188e-13	6.0217e-15	2.2836e-16	9.1598e-19	-3.1202e-19	-2.0715e-20	0	0
-9.0965e-04	-3.6462e-05	-6.5723e-07	3.9991e-08	1.4283e-09	7.0547e-12	-9.6085e-13	1.1147e-13	-1.2363e-15	-4.7079e-17	8.7274e-20	6.7167e-20	4.5113e-21	9.8204e-23	0
9.1867e-05	3.7538e-06	6.9638e-08	-4.1892e-09	-1.3740e-10	-1.0708e-12	9.2895e-14	-1.1983e-14	1.6280e-16	6.2777e-18	-7.8231e-20	-9.7246e-21	-9.1825e-22	-2.4381e-23	-1.6190e-25

Sz

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-0.0035	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0133	0.0061	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0385	-0.0071	0.0013	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0663	0.0071	-7.3105e-04	-6.9843e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0875	-0.0061	2.9437e-04	5.5380e-05	-3.5498e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0945	0.0044	-2.0693e-05	-3.9406e-05	2.2724e-05	-1.0824e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0855	-0.0028	-1.0425e-04	2.4969e-05	-1.3280e-05	8.3054e-08	1.3260e-08	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0654	0.0014	1.2510e-04	-1.3968e-05	6.9879e-06	-5.2307e-08	-6.4017e-09	1.1525e-09	0	0	0	0	0	0	0
0.0423	-5.8688e-04	-9.5004e-05	6.8209e-06	-3.2613e-06	2.7705e-08	2.7678e-09	-4.6732e-10	-7.2924e-12	0	0	0	0	0	0
-0.0228	1.6905e-04	5.4870e-05	-2.8608e-06	1.3255e-06	-1.2356e-08	-1.0522e-09	1.6655e-10	2.6945e-12	-5.9156e-14	0	0	0	0	0
0.0101	-1.7775e-05	-2.4960e-05	1.0065e-06	-4.5778e-07	4.5773e-09	3.4280e-10	-5.0962e-11	-8.5672e-13	1.9764e-14	3.9907e-15	0	0	0	0
-0.0035	-1.2694e-05	8.8514e-06	-2.8633e-07	1.2962e-07	-1.3683e-09	-9.2252e-11	1.2938e-11	2.2691e-13	-5.5853e-15	-1.1304e-15	-2.3595e-17	0	0	0
9.3190e-04	8.5224e-06	-2.3382e-06	6.1996e-08	-2.8392e-08	3.1261e-10	1.9305e-11	-2.5777e-12	-4.7170e-14	1.2589e-15	2.5764e-16	5.4811e-18	-2.3140e-20	0	0
-1.6368e-04	-2.5755e-06	4.1526e-07	-9.0861e-09	4.3124e-09	-4.9031e-11	-2.8118e-12	3.6293e-13	6.8921e-15	-2.0648e-16	-4.3095e-17	-9.2005e-19	4.4632e-21	4.7502e-22	0
1.4461e-05	3.6204e-07	-3.7396e-08	6.6208e-10	-3.4404e-10	3.9537e-12	2.1437e-13	-2.7765e-14	-5.2320e-16	2.0151e-17	4.0081e-18	8.7994e-20	-1.2895e-21	-1.0690e-22	-3.8513e-23

Fig. 11: Familia de coeficientes S_n^m con términos desde $n = 1$

CAPÍTULO II: Modelamiento del Potencial Gravitatorio y Cálculo de Coeficientes

C2x														
15x15 double														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0210	-0.0069	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0511	0.0085	-0.0032	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0835	-0.0088	0.0036	9.0078e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1069	0.0079	-0.0034	-7.5476e-05	9.6386e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1130	-0.0062	0.0029	5.5828e-05	-6.9501e-06	7.5529e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1008	0.0042	-0.0021	-3.6452e-05	4.4100e-06	-4.8024e-07	-3.1986e-10	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0765	-0.0025	0.0014	2.0962e-05	-2.4526e-06	2.6820e-07	3.9106e-10	-2.2630e-10	0	0	0	0	0	0	0
0.0495	0.0013	-7.9126e-04	-1.0536e-05	1.1861e-06	-1.3032e-07	-1.7987e-10	8.7324e-11	-3.2500e-12	0	0	0	0	0	0
-0.0270	-5.5926e-04	3.8304e-04	4.5680e-06	-4.9221e-07	5.4350e-08	5.7232e-11	-3.5485e-11	7.2411e-13	-1.5052e-13	0	0	0	0	0
0.0122	2.0067e-04	-1.5532e-04	-1.6723e-06	1.7160e-07	-1.9038e-08	-7.6775e-12	1.2629e-11	-2.1708e-13	3.8831e-14	-9.0812e-15	0	0	0	0
-0.0044	-5.7736e-05	5.1035e-05	4.9942e-07	-4.8610e-08	5.4155e-09	-3.2712e-12	-3.8138e-12	5.3704e-14	-1.0872e-14	1.5020e-15	-4.2699e-17	0	0	0
0.0012	1.2667e-05	-1.2856e-05	-1.1462e-07	1.0577e-08	-1.1821e-09	2.6588e-12	9.0416e-13	-1.3238e-14	2.4229e-15	-3.1781e-16	4.2080e-18	9.1956e-18	0	0
-2.2977e-04	-1.9353e-06	2.2327e-06	1.7986e-08	-1.5876e-09	1.7766e-10	-8.6479e-13	-1.5126e-13	2.4486e-15	-4.0388e-16	4.7747e-17	-3.7926e-19	-8.8149e-19	-1.8354e-20	0
2.2378e-05	1.6404e-07	-2.0395e-07	-1.4321e-09	1.2579e-10	-1.4016e-11	1.4826e-13	1.3401e-14	-3.9449e-16	3.6389e-17	-5.6014e-18	-9.0966e-20	1.2990e-19	-5.9679e-22	1.0925e-22

C2y														
15x15 double														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0069	-6.8507e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0370	0.0040	0.0046	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1048	-0.0095	-0.0055	-1.9797e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.2049	0.0159	0.0058	1.0796e-05	3.8547e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.3054	-0.0210	-0.0053	-1.7548e-06	-3.6678e-06	-1.8502e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.3637	0.0227	0.0042	-4.5333e-06	3.0298e-06	1.4011e-07	-7.8676e-09	0	0	0	0	0	0	0	0
0.3535	-0.0204	-0.0029	7.0389e-06	-2.1710e-06	-9.4467e-08	4.7164e-09	-1.6879e-11	0	0	0	0	0	0	0
-0.2826	0.0153	0.0017	-6.4845e-06	1.3423e-06	5.6203e-08	-2.4869e-09	1.8604e-11	1.8099e-12	0	0	0	0	0	0
0.1852	-0.0095	-8.8009e-04	4.4626e-06	-7.0858e-07	-2.9105e-08	1.1374e-09	-1.3450e-11	-6.0676e-13	2.3952e-13	0	0	0	0	0
-0.0981	0.0049	3.7002e-04	-2.4008e-06	3.1368e-07	1.2855e-08	-4.4231e-10	7.3867e-12	1.3521e-13	-9.5157e-14	5.9384e-16	0	0	0	0
0.0407	-0.0020	-1.2490e-04	1.0041e-06	-1.1305e-07	-4.6914e-09	1.4158e-10	-3.1421e-12	-5.3129e-15	3.1516e-14	-2.0956e-16	1.1255e-17	0	0	0
-0.0126	6.0453e-04	3.1916e-05	-3.1323e-07	3.1507e-08	1.3427e-09	-3.5312e-11	1.0148e-12	-1.0557e-14	-8.3021e-15	6.0240e-17	-3.0245e-18	-1.3719e-19	0	0
0.0026	-1.2587e-04	-5.5142e-06	6.5919e-08	-6.1428e-09	-2.7238e-10	6.1806e-12	-2.2698e-13	4.6825e-15	1.5905e-15	-1.2719e-17	6.3808e-19	2.6163e-20	-1.1099e-21	0
-2.6504e-04	1.3577e-05	4.8585e-07	-7.1582e-09	6.4812e-10	3.0024e-11	-5.7113e-13	2.7363e-14	-8.2192e-16	-1.7329e-16	1.8971e-18	-6.5837e-20	-6.6260e-21	3.1292e-22	-6.7495e-25

C2z														
15x15 double														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0201	-0.0428	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0551	0.0508	-0.0153	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0967	-0.0529	0.0134	-0.0012	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1301	0.0485	-0.0109	8.2254e-04	-1.2495e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1428	-0.0392	0.0081	-5.0753e-04	7.5139e-05	-7.4429e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1314	0.0279	-0.0054	2.8467e-04	-4.1420e-05	3.0088e-07	7.5044e-09	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1023	-0.0173	0.0032	-1.4301e-04	2.0643e-05	-1.0155e-07	-2.4910e-09	-9.7337e-11	0	0	0	0	0	0	0
0.0676	0.0093	-0.0017	6.3296e-05	-9.1576e-06	2.6550e-08	5.9225e-10	5.6829e-11	-5.0816e-12	0	0	0	0	0	0
-0.0376	-0.0043	7.5923e-04	-2.4182e-05	3.5466e-06	-4.2959e-09	-4.6109e-11	-2.7658e-11	1.6941e-12	3.7901e-13	0	0	0	0	0
0.0173	0.0016	-2.8923e-04	7.7600e-06	-1.1688e-06	-1.6698e-10	-4.0864e-11	1.1213e-11	-4.7205e-13	-1.1748e-13	6.6868e-15	0	0	0	0
-0.0064	-4.9777e-04	8.9658e-05	-2.0097e-06	3.1586e-07	3.6628e-10	2.5244e-11	-3.6833e-12	1.0399e-13	3.0381e-14	-1.7912e-15	-7.9040e-17	0	0	0
0.0018	1.1615e-04	-2.1342e-05	3.9394e-07	-6.5953e-08	-1.2013e-10	-8.1276e-12	9.3885e-13	-1.6707e-14	-6.1928e-15	3.8145e-16	1.8593e-17	2.7484e-19	0	0
-3.3871e-04	-1.8483e-05	3.4967e-06	-5.1890e-08	9.5242e-09	1.9772e-11	1.5886e-12	-1.6654e-13	1.7507e-15	9.0290e-16	-5.6769e-17	-3.1553e-18	-5.9019e-20	-7.5306e-21	0
3.3381e-05	1.5250e-06	-2.9883e-07	3.4137e-09	-7.1937e-10	-1.3134e-12	-1.5189e-13	1.5954e-14	-9.0498e-17	-7.2174e-17	4.7532e-18	2.8260e-19	1.2149e-20	7.7295e-22	6.4654e-23

Fig. 12: Familia de coeficientes C_n^m con términos desde $n = 2$

CAPÍTULO II: Modelamiento del Potencial Gravitatorio y Cálculo de Coeficientes

S2x

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0420	0.0232	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0750	-0.0326	0.0031	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0931	0.0388	-0.0034	-2.1138e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0917	-0.0396	0.0033	1.8164e-04	-7.7087e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0736	0.0351	-0.0028	-1.3739e-04	5.1551e-07	4.3579e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0476	-0.0269	0.0020	9.1867e-05	-2.9331e-07	-2.8858e-07	1.2275e-08	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0238	0.0178	-0.0013	-5.4176e-05	1.3635e-07	1.6424e-07	-6.9564e-09	1.1681e-10	0	0	0	0	0	0	0
0.0081	-0.0101	7.3485e-04	2.7969e-05	-4.7390e-08	-8.1319e-08	3.4448e-09	-7.6957e-11	-5.1433e-12	0	0	0	0	0	0
-7.5618e-04	0.0048	-3.4866e-04	-1.2474e-05	8.4771e-09	3.4600e-08	-1.4693e-09	3.6658e-11	1.6950e-12	2.1146e-13	0	0	0	0	0
-0.0012	-0.0019	1.3789e-04	4.7071e-06	2.7144e-09	-1.2430e-08	5.2889e-10	-1.4680e-11	-6.1029e-13	-4.1082e-14	1.3085e-15	0	0	0	0
9.0359e-04	5.9937e-04	-4.3942e-05	-1.4538e-06	-3.1502e-09	3.6518e-09	-1.5519e-10	4.7809e-12	1.9046e-13	1.0410e-14	-1.2408e-17	2.8494e-16	0	0	0
-3.6515e-04	-1.4227e-04	1.0662e-05	3.4779e-07	1.4719e-09	-8.3315e-10	3.5122e-11	-1.2362e-12	-4.9411e-14	-1.9778e-15	-2.4187e-17	-2.9753e-17	-2.1114e-18	0	0
8.7017e-05	2.2752e-05	-1.7677e-06	-5.7985e-08	-4.0750e-10	1.3318e-10	-5.4985e-12	2.2816e-13	9.2543e-15	3.3590e-16	1.1999e-17	3.9573e-18	2.0678e-19	-1.3855e-21	0
-9.9068e-06	-1.8498e-06	1.5228e-07	5.1736e-09	5.9073e-11	-1.1623e-11	4.5598e-13	-2.5144e-14	-1.0442e-15	-2.2230e-17	-1.6734e-18	-7.6552e-20	-3.1354e-20	4.7218e-22	9.5150e-22

S2y

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1108	-0.1573	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.3792	0.2526	0.0160	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.8064	-0.3450	-0.0196	-4.1123e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.2921	0.4058	0.0209	4.0758e-04	4.0583e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.6629	-0.4135	-0.0195	-3.5649e-04	-3.4731e-05	-1.4914e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.7676	0.3655	0.0159	2.7481e-04	2.6250e-05	1.0162e-07	-1.2708e-08	0	0	0	0	0	0	0	0
1.5704	-0.2795	-0.0113	-1.8579e-04	-1.7429e-05	-6.1477e-08	7.1608e-09	-9.1380e-10	0	0	0	0	0	0	0
-1.1682	0.1836	0.0069	1.0923e-04	1.0074e-05	3.2776e-08	-3.5038e-09	4.6855e-10	-8.6296e-12	0	0	0	0	0	0
0.7231	-0.1024	-0.0036	-5.5113e-05	-4.9998e-06	-1.5214e-08	1.4637e-09	-2.0841e-10	3.8656e-12	-2.7422e-14	0	0	0	0	0
-0.3665	0.0475	0.0016	2.3386e-05	2.0868e-06	6.0275e-09	-5.0823e-10	7.8816e-11	-1.4766e-12	1.1383e-14	-5.3658e-16	0	0	0	0
0.1477	-0.0177	-5.6726e-04	-8.0827e-06	-7.0924e-07	-1.9750e-09	1.4025e-10	-2.4561e-11	4.6772e-13	-3.9337e-15	1.7242e-16	4.9654e-18	0	0	0
-0.0449	0.0050	1.5497e-04	2.1553e-06	1.8590e-07	5.0750e-10	-2.8352e-11	5.9814e-12	-1.1646e-13	1.0904e-15	-4.1735e-17	-1.4330e-18	-2.5578e-20	0	0
0.0093	-9.8032e-04	-2.9241e-05	-3.9909e-07	-3.3855e-08	-9.2064e-11	3.5000e-12	-1.0259e-12	2.0841e-14	-2.1728e-16	7.6984e-18	3.1750e-19	5.7177e-21	-1.4801e-22	0
-9.9002e-04	9.9265e-05	2.9030e-06	3.9102e-08	3.2787e-09	8.8312e-12	-1.4146e-13	9.4309e-14	-2.1108e-15	2.3856e-17	-3.8989e-19	-4.5823e-20	-8.4028e-22	2.1596e-23	5.5946e-24

S2z

15x15 double

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0371	-0.1727	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0711	0.1628	-0.0097	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0900	-0.1432	0.0067	9.9274e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0876	0.1151	-0.0042	-6.3694e-04	-1.1767e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0672	-0.0836	0.0022	3.7794e-04	7.3578e-05	-3.0892e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0394	0.0543	-9.8421e-04	-2.0463e-04	-4.2035e-05	1.6278e-06	3.8001e-08	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0155	-0.0313	3.1858e-04	9.9656e-05	2.1633e-05	-7.8004e-07	-1.9085e-08	4.4466e-10	0	0	0	0	0	0	0
0.0013	0.0159	-4.3132e-05	-4.2945e-05	-9.8736e-06	3.3520e-07	8.5725e-09	-1.7784e-10	4.6884e-11	0	0	0	0	0	0
0.0036	-0.0069	-2.9432e-05	1.6051e-05	3.9211e-06	-1.2685e-07	-3.3806e-09	6.2347e-11	-1.6747e-11	-2.5735e-13	0	0	0	0	0
-0.0034	0.0026	2.7404e-05	-5.0681e-06	-1.3209e-06	4.1245e-08	1.1415e-09	-1.8711e-11	5.1285e-12	7.7238e-14	1.9648e-15	0	0	0	0
0.0018	-7.7390e-04	-1.2818e-05	1.3021e-06	3.6376e-07	-1.1113e-08	-3.1814e-10	4.6424e-12	-1.2975e-12	-1.8910e-14	-4.8871e-16	1.2608e-16	0	0	0
-6.1973e-04	1.8033e-04	3.9312e-06	-2.5656e-07	-7.7139e-08	2.3412e-09	6.9012e-11	-9.0091e-13	2.5617e-13	3.5149e-15	9.1195e-17	-2.9285e-17	-8.8253e-19	0	0
1.3516e-04	-2.9158e-05	-7.6661e-07	3.4763e-08	1.1262e-08	-3.4588e-10	-1.0442e-11	1.2350e-13	-3.5382e-14	-4.2736e-16	-1.0009e-17	4.8948e-18	1.6880e-19	-4.2909e-22	0
-1.4430e-05	2.4943e-06	7.4660e-08	-2.4684e-09	-8.5256e-10	2.7240e-11	8.3496e-13	-9.3811e-15	2.6161e-15	2.0954e-17	2.3216e-19	-4.5710e-19	-2.2451e-20	1.6581e-22	9.8372e-23

Fig. 13: Familia de coeficientes S_n^m con términos desde $n = 2$

Donde los coeficientes de determinación, que califican la bondad del cálculo, son:

Usando	Desde $n = 1$	Desde $n = 2$
$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$	99.93%	98.05%
$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$	99.91%	86.37%
$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$	99.96%	99.03%

Tabla 4: Comparación de coeficientes de correlación

Tal como se puede notar en los resultados mostrados desde la **Fig. 9** hasta la **Fig. 13**, independientemente de las mediciones que se usen para el procesamiento, los valores que toman las constantes J_1 , C_1^1 y S_1^1 no son cero tal como se asume en la expansión que se inicia en $n = 2$.

Este hecho se ve reflejado en la **Tabla 4** que muestra valores del coeficiente de determinación mayores cuando se toman todos los términos de la expansión, es decir, desde $n = 1$ (más notoriamente para el caso de $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$). Nótese que con cualquier grupo de datos $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ ó $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$, ya sea desde $n = 1$ o desde $n = 2$ es posible determinar los coeficientes, obteniéndose así 6 familias de dichos coeficientes.

También notamos que los resultados vistos desde la **Fig. 9** hasta la **Fig. 13** son una serie de números que, al usarlos como constantes de la expansión de una función, y evaluando el coeficiente de determinación de cada uno de ellos, resultan valores aceptables. Con este criterio cualquiera de las 6 familias de constantes serían buenas candidatas a elegir en la forma analítica del potencial gravitatorio.

Un criterio físico para determinar cuáles de estos resultados es el mejor (o los mejores) es calcular el valor que toma el campo gravitatorio en algún punto de la superficie terrestre, ya que éste es un valor conocido. Por ejemplo el valor medio del campo gravitatorio en el ecuador terrestre es $9.796 \frac{m}{s^2}$ (II)

Para esto es necesario hallar previamente la función que describe el campo gravitatorio, de la ecuación (2) tenemos la expresión del potencial gravitatorio $U(r, \theta, \varphi)$, entonces:

$$\vec{G}(r, \theta, \varphi) = -\vec{\nabla}U(r, \theta, \varphi) \quad \dots (9)$$

Donde

\vec{G} : Campo gravitatorio

$\vec{\nabla}$: Operador gradiente en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Se escribió un algoritmo (mostrado en el **ANEXO 1**) en MATLAB `Grad_U_Tierra` para calcular el módulo de \vec{G} en un punto determinado por (r, θ, φ) . Este algoritmo tiene como datos de entrada los coeficientes J_n, C_n^m, S_n^m y el punto donde deseamos sea calculado el módulo de \vec{G} . El hecho que el valor del módulo de \vec{G} sea calculado dependiendo de los valores de los coeficientes J_n, C_n^m, S_n^m nos permitirá evaluar cuál de las 6 posibilidades es la mejor.

Elegiremos un punto sobre la línea ecuatorial terrestre para calcular $|\vec{G}|$ este es:

$$r = 6378.1 \text{ km} , \quad \theta = \pi/2 , \quad \varphi = 0$$

Usando	Desde $n = 1$	Desde $n = 2$
$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$	$8.6669 \frac{m}{s^2}$	$5.9589 \frac{m}{s^2}$
$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$	$9.8366 \frac{m}{s^2}$	$9.8750 \frac{m}{s^2}$
$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$	$8.8975 \frac{m}{s^2}$	$6.6245 \frac{m}{s^2}$

Tabla 5: Comparación del módulo de \vec{G} en un punto del ecuador terrestre

En la **Tabla 5** podemos apreciar que los valores obtenidos con los datos $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ son los que más se aproximan al valor medio $9.796 \frac{m}{s^2}$, sin embargo el valor hallado con términos desde $n = 1$ es aún más próximo además que el coeficiente de determinación resulta 99,91% respecto al 86.37% del cálculo desde $n = 2$.

Por las razones mencionadas, elegimos a la familia de coeficientes J_n, C_n^m, S_n^m calculados con las mediciones de $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ y con términos desde $n = 1$ como los coeficientes que forman la expansión en serie del potencial gravitatorio terrestre.

Esto muestra que, a comparación de la manera estándar de usar el modelo (desde $n = 2$) funciona mejor con los términos completos, es decir, desde $n = 1$.

2.3 Dependencia temporal de los coeficientes

En el punto anterior vimos cómo hallar la familia de coeficientes J_n, C_n^m, S_n^m correspondientes a la expansión del potencial gravitatorio (255 coeficientes en total) usando datos de mediciones de 1 día. Este procedimiento lo repetimos con los datos de cada uno de los 48 días de mediciones con los que contamos, acumulando esta vez por conveniencia los resultados de los coeficientes en vectores columna de 255 elementos.

La cantidad de datos diarios es del orden de 17000, sin embargo, el día 48 (18 de octubre del 2013) por tratarse del último día de mediciones al que tenemos acceso, sólo contamos con 9207 mediciones, esto es el 54% de datos del día promedio. Este hecho hizo que los resultados de los cálculos del día 48 sean atípicos, razón por la cual no tomaremos en cuenta este día. En adelante consideraremos sólo los 47 días de medición completos.

De los 47 días se obtuvieron 47 vectores columna de 255 elementos conteniendo los coeficientes de la expansión del potencial gravitatorio diarios. Estos 47 vectores columna se acumularon en una matriz de 255x47, donde cada una de sus 255 filas representa la variación temporal diaria de un coeficiente.

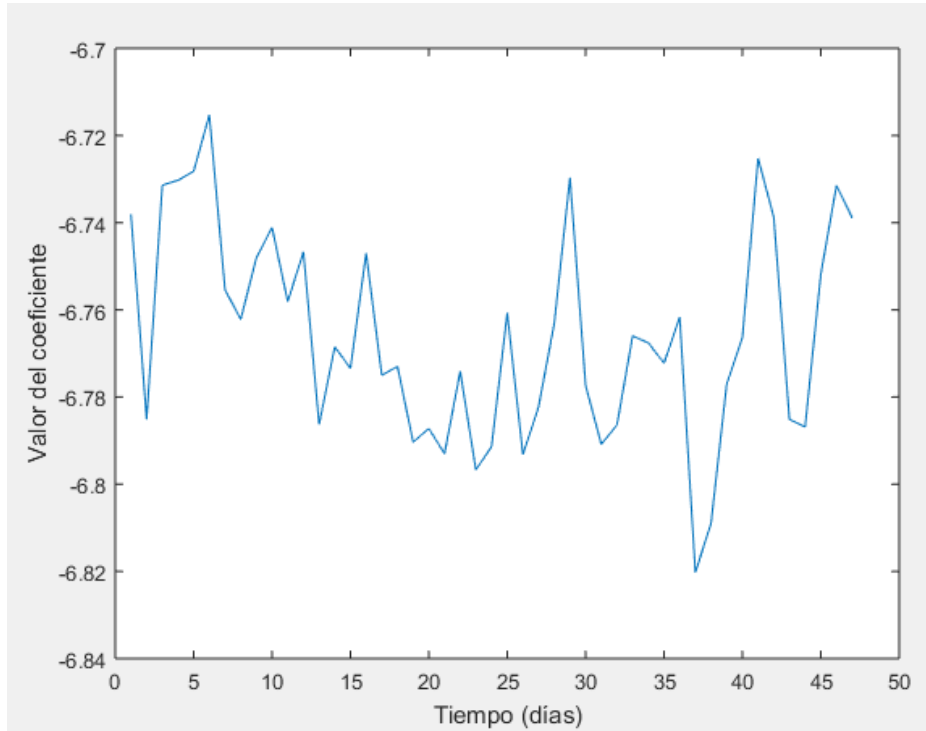


Fig. 14: Variación temporal del coeficiente J_1

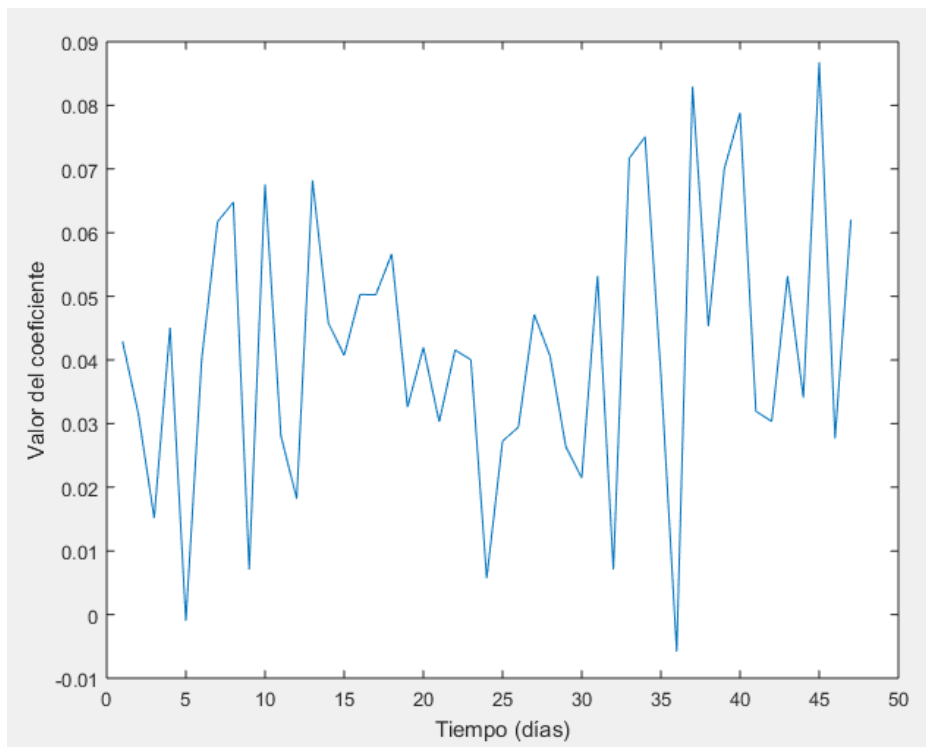


Fig. 15: Variación temporal del coeficiente C_1^1

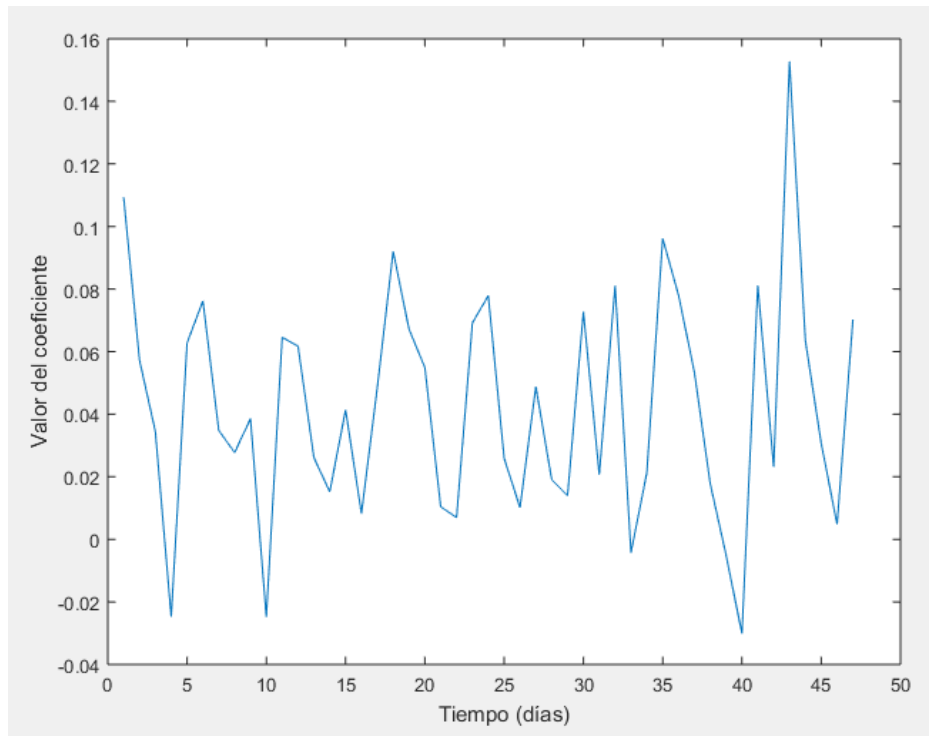


Fig. 16: Variación temporal del coeficiente S_1^1

El comportamiento de la variación temporal de los 255 coeficientes es similar a los mostrados en la **Fig. 14**, **Fig. 15** y **Fig. 16**. Ahora queremos una expresión analítica dependiente del tiempo que describa la variación temporal de cada uno de los coeficientes.

Para hallar las expresiones analíticas que describan estas variaciones temporales usaremos una serie de Fourier unidimensional para cada uno de los 255 coeficientes.

Se escribió el algoritmo `CalculateAll_FourierExp1D_mod` en MATLAB que, a partir de la matriz de 255×47 conteniendo la variación en 47 días de los 255 coeficientes, calcula la serie de Fourier de todas estas variaciones temporales. Calcula también el coeficiente de correlación de la serie de Fourier.

El algoritmo se muestra en el **ANEXO 1**.

A continuación, se muestran las series de Fourier de los coeficientes mostrados en las **Fig. 14**, **Fig. 15** y **Fig. 16**.

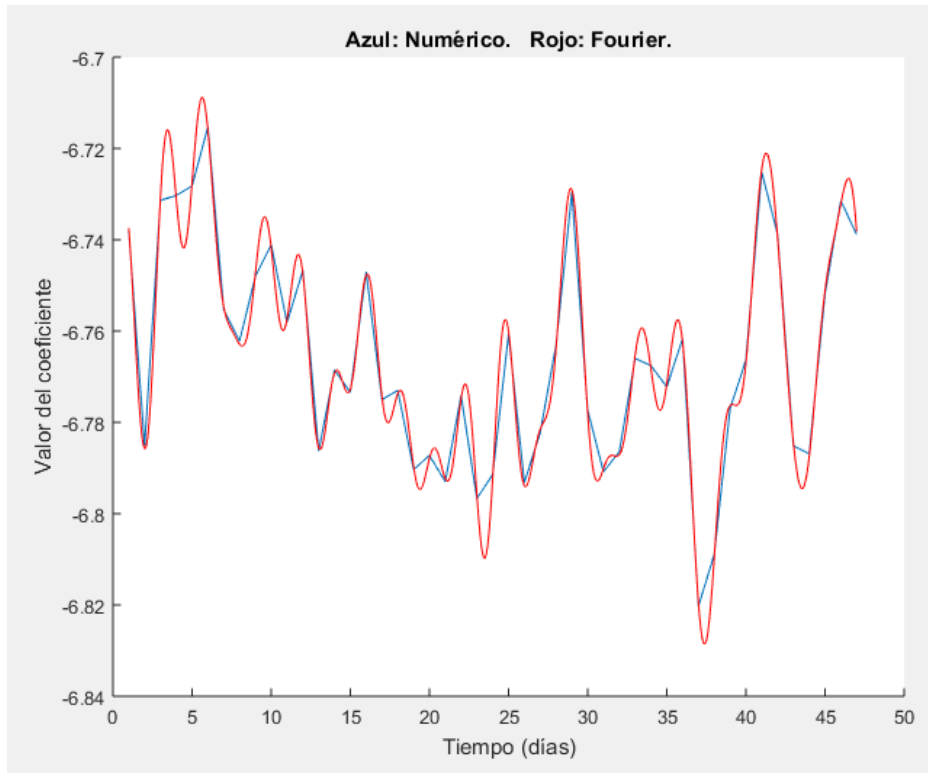


Fig. 17: Serie de Fourier de la variación temporal del coeficiente J_1 con $R^2 = 99.92\%$

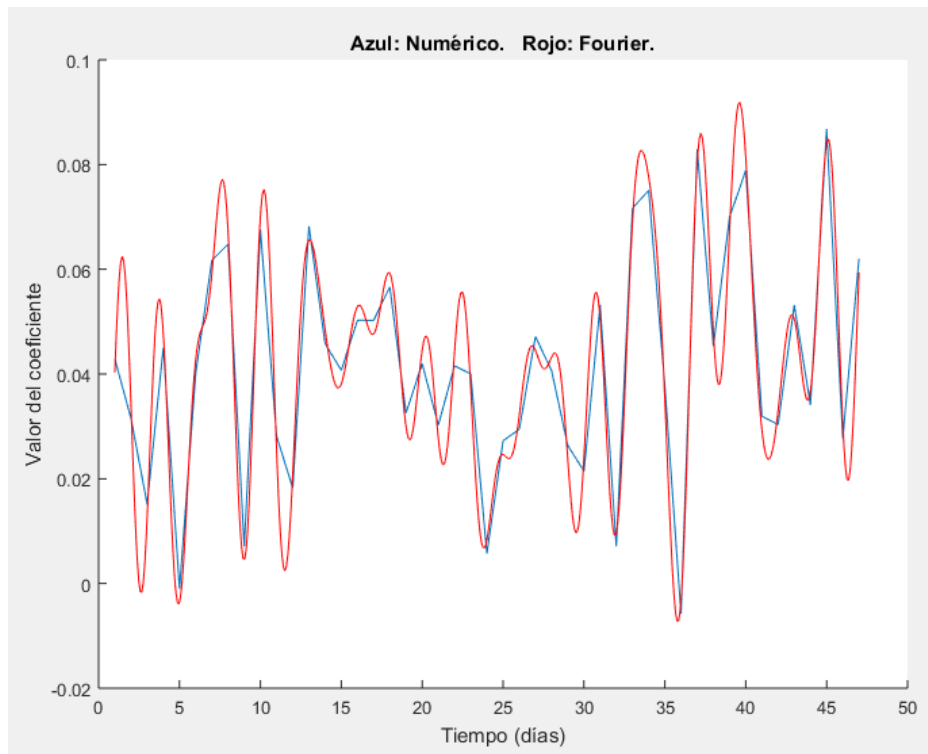


Fig. 18: Serie de Fourier de la variación temporal del coeficiente C_1^1 con $R^2 = 98.49\%$

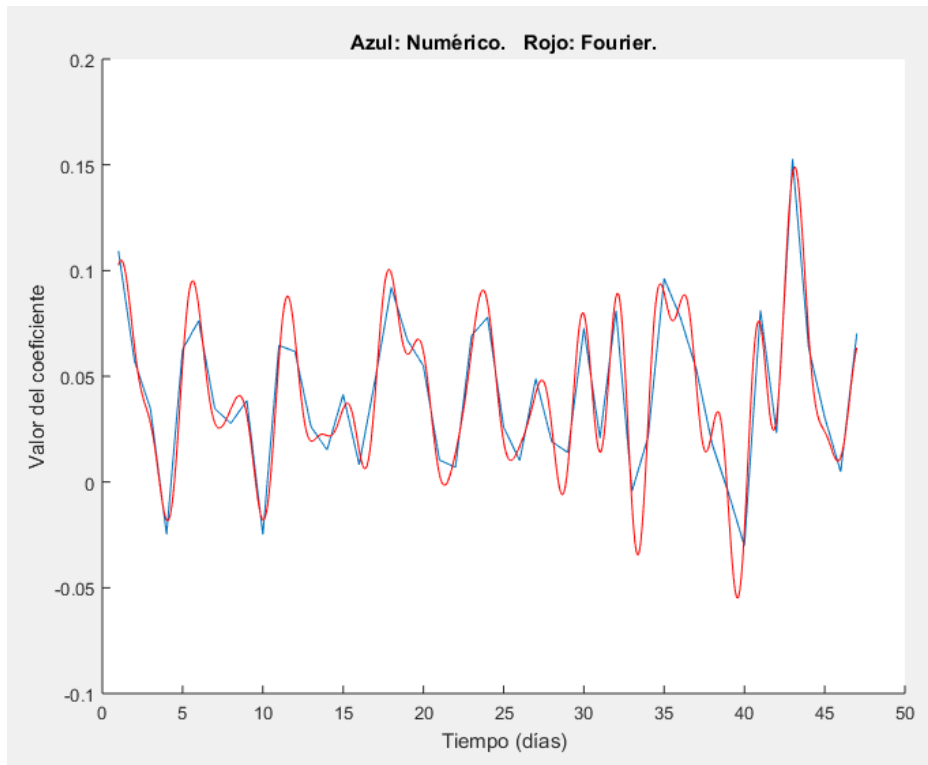


Fig. 19: Serie de Fourier de la variación temporal del coeficiente S_1^1 con $R^2 = 96.95\%$

Nota: Se usó la forma compleja de la serie de Fourier. Luego de varios ensayos se determinó que la cantidad óptima de términos en las series de Fourier es 22. Los gráficos mostrados en las **Fig. 17**, **Fig. 18** y **Fig. 19** son series de Fourier con 22 términos. Todas las series de Fourier con las que se trabajará en adelante serán con 22 términos.

De este modo hemos transformado 47 días de resultados de 255 coeficientes J_n, C_n^m, S_n^m en 255 funciones $J_n(t), C_n^m(t), S_n^m(t)$.

Luego, podemos reescribir la expresión (2) así:

$$U(r, \theta, \varphi, t) = -\frac{GM}{r} + \sum_{n=1}^{N_z} \frac{J_n(t) P_n^0(\sin \theta)}{r^{n+1}} + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \frac{P_n^m(\sin \theta) (C_n^m(t) \cos m\varphi + S_n^m(t) \sin m\varphi)}{r^{n+1}} \quad \dots (10)$$

Ahora tenemos una expresión analítica dependiente de la posición y del tiempo que determina el potencial gravitatorio causado por los cuerpos celestes del sistema solar en los alrededores de la Tierra.

CAPÍTULO III:

Construcción de Superficies Equipotenciales Gravitatorias

La expresión (10) permite hallar el valor del potencial gravitatorio en un punto P determinado por $[r, \theta, \varphi]$ en el instante t_0 , esto es $U(r, \theta, \varphi, t) = U_{P,t_0} = U_0$

Teniendo en cuenta esto, podemos buscar otros puntos del espacio (diferentes de P) que, en el mismo instante de tiempo t_0 , tomen el mismo valor de potencial U_0 . Esta colección de puntos serían **puntos equipotenciales** U_0 en el instante t_0 . Si la cantidad de puntos es lo suficientemente grande, podemos hablar de una **superficie equipotencial**.

Queremos encontrar una superficie equipotencial gravitatoria cuyo valor del potencial sea el correspondiente a un punto de la superficie terrestre, para ello primero debemos calcular el valor del potencial en dicho punto.

Usando la expresión (10) y todos los resultados de coeficientes calculados previamente, escribimos el algoritmo `U_TierraTime` en MATLAB que calcule el valor del potencial gravitatorio en un punto P determinado por $[r, \theta, \varphi]$ en el instante t . El algoritmo se muestra en el **ANEXO 1**.

Elegimos el punto $r = 6378.1 \text{ km}$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, $t = 1 \text{ día}$. Escribimos en MATLAB:

```
>> U0 = U_TierraTime(C_All,m_vec,b_vec,6378100,pi/2,0,1)
```

De esta manera almacenamos el valor del potencial gravitatorio en la variable U_0 , ahora debemos buscar los demás puntos espaciales que tengan este mismo valor de potencial gravitatorio.

Aprovechando que el potencial, tal como se muestra en la expresión (2), está escrito en coordenadas esféricas, construimos un dominio con n_θ valores de θ ($0 < \theta < \pi$) y m_φ valores de φ ($0 < \varphi < 2\pi$) obteniendo así un “mallado angular” de $n_\theta \times m_\varphi$.

Luego para cada par θ, φ buscamos el valor del radio r de tal que:

$$U(r, \theta, \varphi, t) = U_0$$

Este procedimiento lo repetimos con todos los puntos del mallado angular para un mismo instante de tiempo, entonces tendremos una colección de puntos equipotenciales.

Se escribió el algoritmo `Equipot` en MATLAB (mostrado en el **ANEXO 1**) que realiza esta labor de búsqueda de puntos equipotenciales, haciendo un mallado angular de 80 valores en θ y 80 en φ , sumando un total de 6400 puntos en el mallado angular, y en cada uno de ellos se calcula el radio r correspondiente que hace que el potencial tome el valor U_0 .

Luego esta colección de 6400 puntos espaciales se graficaron en 3 dimensiones, resultado una *superficie equipotencial* cuyo valor de potencial corresponde a la superficie terrestre en el instante $t = 1$ día.

Finalmente, si esto lo hacemos para distintos instantes de tiempo, es posible apreciar cómo varía con el tiempo esta superficie equipotencial (superficie “vibrante”). Para tal fin se escribió en MATLAB el algoritmo `Equipots` que, usando el previo algoritmo `Equipot`, calcula muchas superficies equipotenciales a lo largo del tiempo.

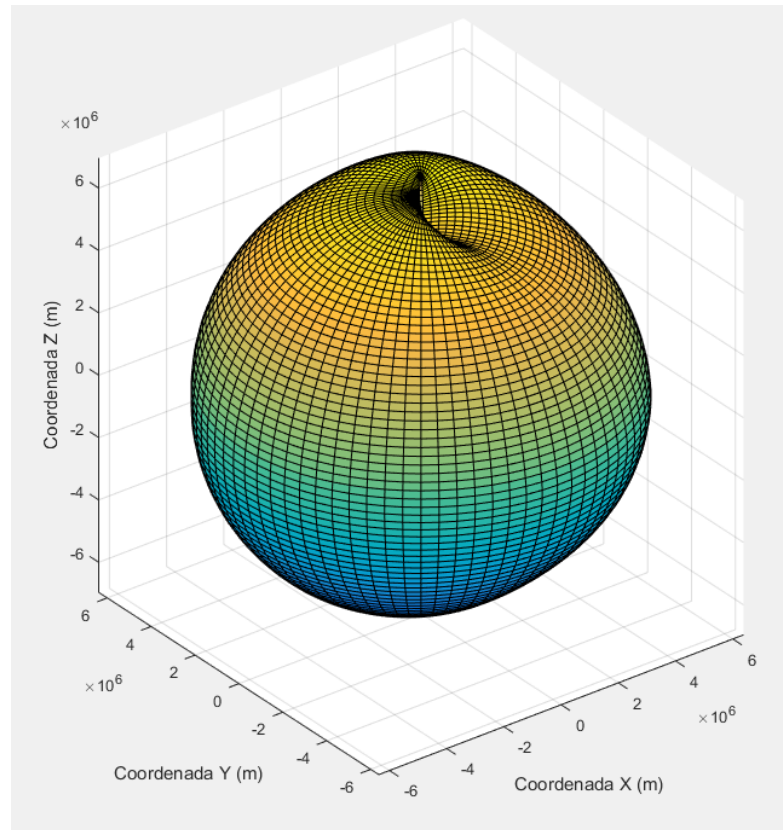


Fig. 20: Superficie equipotencial terrestre para el día $t = 1.0000$

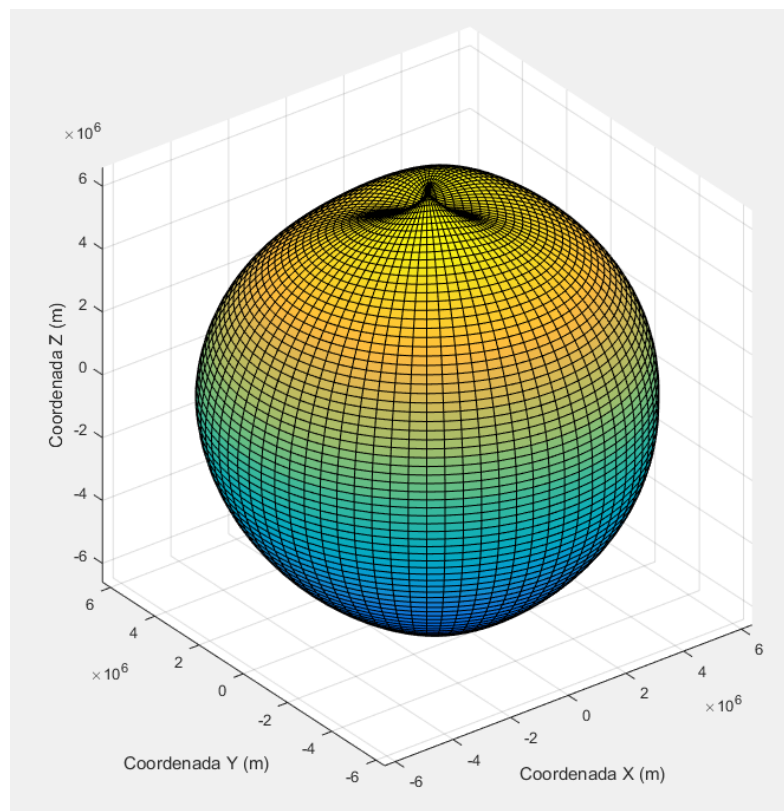


Fig. 21: Superficie equipotencial terrestre para el día $t = 9.8283$

OBSERVACIONES FINALES Y LIMITACIONES COMPUTACIONALES

Cuando se tiene una función con parámetros numéricos a determinar mediante un método de regresión, como el método de los mínimos cuadrados, el Coeficiente de Determinación es un parámetro que permite evaluar la bondad de la aproximación resultado, sin embargo, en este caso por tratarse de una función formada por serie de polinomios (de Legendre y armónicos esféricos), también es de crucial importancia el grado de los polinomios utilizados en la expansión.

Nuestros cálculos fueron realizados utilizando polinomios asociados de Legendre de grado 15, que, entre los términos zonales (correspondientes a los Polinomios de Legendre) y tesaerales (correspondientes a los Polinomios Asociados de Legendre) resultan un total de 255 coeficientes. Este número de coeficientes, asociados al grado de los polinomios utilizados, es muy pobre comparado incluso con modelos antiguos. El modelo EGM96 (*Earth Gravitational Model 1996*) usa $N_z = N_t = 360$ (polinomios de grado 360) resultando 130 317 coeficientes, modelos más actuales usan incluso grados mayores con una cantidad de coeficientes superior. El modelo EGM96 fue el resultado de una colaboración entre la *National Imagery and Mapping Agency* (NIMA), *NASA Goddard Space Flight Center* (GSFC) y la Universidad Estatal de Ohio. Estas instituciones cuentan con muchos recursos computacionales disponibles para realizar sus cálculos y obtener modelos mucho más robustos.

En nuestro caso, para procesar un día de mediciones (habiendo reducido el número de datos al 20%) con un modelo de grado $N_z = N_t = 15$ (255 coeficientes) y usando computación *multicore* en una PC con un procesador de 8 núcleos, el tiempo de cálculo computacional fue aproximadamente 2 días. Con este mismo poder computacional, si quisiéramos calcular el modelo EGM96 con grado 360, nos tomaría 1424 años de tiempo de cálculo computacional.

Una consecuencia de contar con un modelo de grado bajo, es que en los dominios espaciales donde el modelo ($N_z = N_t = 15$) del potencial gravitatorio es deficiente, al tomar la gradiente de este potencial, los errores crecen. Esto hace aún más deficiente el cálculo del Campo

Gravitatorio, necesario para poder determinar las trayectorias correctas de los satélites GNSS.

Por fortuna, pero a su vez en contra del tiempo, se consiguió el apoyo por parte de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) en el uso de la **grid Legión**. Esta consiste en un grupo de 300 computadoras trabajando en paralelo, cada PC aporta 4 núcleos de procesamiento, haciendo un total de 1200 núcleos para trabajo paralelo.

Desde el 8 de abril de 2016 se encuentran haciendo las pruebas preliminares para el inicio del procesamiento de datos en la **grid Legión**. Los resultados ya no podrán ser incluidos en este trabajo.

Por otra parte, para alcanzar la calidad de un trabajo como el realizado para lograr el modelo EGM96, aun usando la **grid Legión** el tiempo de cálculo sería de unos 9 años. Sin embargo, con 1 año de trabajo se alcanzarían niveles considerablemente buenos.

En este trabajo se ha podido apreciar que existe una dependencia temporal del potencial gravitatorio total alrededor de la Tierra, tal dependencia implica variaciones significativas incluso diarias, teniendo mayor incidencia mientras más cerca nos encontremos de la Tierra. Actualmente, los satélites de los GNSS para afrontar las variaciones temporales utilizan modelos estacionarios (independientes del tiempo) que válidos por periodos de hasta dos semanas, sin embargo, las variaciones temporales del potencial gravitatorio son permanentes. Un modelo del potencial gravitatorio dependiente del tiempo resuelve este problema.

Por otra parte, se puede calcular en función del tiempo las superficies equipotenciales (mínima y máxima) donde se encuentre “encerrada” la trayectoria natural del satélite GNSS. Dichas superficies servirán como guías para el control de las trayectorias desde Tierra. Nótese que, debido a que las “guías” cambian con el tiempo, es posible realizar un seguimiento y control en tiempo real de cada satélite GNSS y, en caso de algún desvío de la trayectoria natural, se puede corregir inmediatamente desde Tierra siendo esta una corrección (en caso de haberla) bastante pequeña y “fácil” de resolver, permitiendo ahorro energético y de recursos humanos y económicos.

A pesar que el modelo desarrollado con $N_z = N_t = 15$ es muy pobre, nos ha permitido entender y construir el proceso adecuado para aplicar cuando se disponga de mayor capacidad computacional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- I. Wikipedia. Geopotential Model. https://en.wikipedia.org/wiki/Geopotential_model
- II. Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación - España. Intensidad del Campo Gravitatorio.
http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/wikididactica/index.php/Intensidad_del_campo_gravitatorio
- III. European Space Agency. *GOCE LIB PRODUCTS USER HANDBOOK*. GOCE PDGS Team. 2006.
- IV. European Space Agency. *GOCE Standards*. European GOCE Gravity Consortium. 2014.
- V. European Space Agency. *GOCE Level 2 Product Data Handbook*. European GOCE Gravity Consortium. 2010.
- VI. H. G. Valqui. *Apuntes de Mecánica Clásica*. Universidad Nacional de Ingeniería.

ANEXO 1

Códigos MATLAB

Coefficiente de Determinación

Denotado por ρ^2 , es usado en el contexto de modelos de regresión. El coeficiente determina la calidad del modelo para replicar los resultados. El valor máximo de este es 1, que indicaría un modelo “perfecto”.

A la diferencia entre el valor del dato numérico y el valor predicho por el modelo la llamamos residuo, la media cuadrática de los residuos es la varianza residual σ_r^2 y, denotando por σ^2 a la varianza de un grupo de datos, entonces:

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma^2}$$

De donde se puede notar que, si las diferencias entre los valores predichos por el modelo y los datos numéricos correspondientes son cero, también $\sigma_r^2 = 0$ entonces $\rho^2 = 1$.

CÁLCULO DE COEFICIENTES J_n , C_n^m y S_n^m DESDE $n = 1$ Y DESDE $n = 2$

(el algoritmo mostrado usa los datos $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ pero es análogo para $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$)

```
function [J,C,S,Mxx,Y,Uxx,p2,J2,C2,S2,Mxx2,Y2,Uxx2,p22] = Coef_xx_esfericasPAR2(M,Nz,Nt)
R=M(:,2); TH=M(:,3); PH=M(:,4); Gxx=M(:,5); dGxx=M(:,8);
% G : Constante de gravitacion universal (SI)
% Mt: Masa de la Tierra (Kg)
% Rt: Radio de la Tierra (Kg)
N = length(Gxx); Mxx(Nz+Nt*(Nt+1),Nz+Nt*(Nt+1)) = 0; Y(Nz+Nt*(Nt+1)) = 0; dY(Nz+Nt*(Nt+1)) = 0;

for k = 1:Nz
    Y(k) = Sum_Y_dy_Jxx(N,Gxx,dGxx,R,TH,k);
    for n = 1:Nz
        if k<=n
            Mxx(k,n) = Sum_Mxx_Jxx_Jxx(N,R,TH,k,n);
            Mxx(n,k) = Mxx(k,n);
        end
    end
    for n = 1:Nt
        for m = 1:n
            if k<=(Nz+(n-1)*n/2+m)
                Mxx(k,Nz+(n-1)*n/2+m) = Sum_Mxx_Axx_Jxx(N,R,TH,PH,k,n,m);
                Mxx(Nz+(n-1)*n/2+m,k) = Mxx(k,Nz+(n-1)*n/2+m);
            end
        end
    end
    for n = 1:Nt
        for m = 1:n
            if k<=(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m)
                Mxx(k,Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m) = Sum_Mxx_Bxx_Jxx(N,R,TH,PH,k,n,m);
                Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m,k) = Mxx(k,Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m);
            end
        end
    end
end

for k = 1:Nt
    for i = 1:k
        Y(Nz+(k-1)*k/2+i) = Sum_Y_dy_Axx(N,Gxx,dGxx,R,TH,PH,k,i);
        for n = 1:Nz
            if (Nz+(k-1)*k/2+i)<=n
                Mxx(Nz+(k-1)*k/2+i,n) = Sum_Mxx_Jxx_Axx(N,R,TH,PH,k,i,n);
            end
        end
    end
end
```

**CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES GRAVITATORIAS PARA SATÉLITES
DEL SISTEMA GLOBAL DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS)**

```

                Mxx(n, Nz+(k-1)*k/2+i) = Mxx(Nz+(k-1)*k/2+i, n);
            end
        end
        for n = 1:Nt
            for m = 1:n
                if (Nz+(k-1)*k/2+i) <= (Nz+(n-1)*n/2+m)
                    Mxx(Nz+(k-1)*k/2+i, Nz+(n-1)*n/2+m) =
Sum_Mxx_Axx_Axx(N, R, TH, PH, k, i, n, m);
                    Mxx(Nz+(n-1)*n/2+m, Nz+(k-1)*k/2+i) = Mxx(Nz+(k-1)*k/2+i, Nz+(n-
1)*n/2+m);
                end
            end
        end
        for n = 1:Nt
            for m = 1:n
                if (Nz+(k-1)*k/2+i) <= (Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m)
                    Mxx(Nz+(k-1)*k/2+i, Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m) =
Sum_Mxx_Bxx_Axx(N, R, TH, PH, k, i, n, m);
                    Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m, Nz+(k-1)*k/2+i) = Mxx(Nz+(k-
1)*k/2+i, Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m);
                end
            end
        end
    end
end
for k = 1:Nt
    for i = 1:k
        Y(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i) = Sum_Y_dy_Bxx(N, Gxx, dGxx, R, TH, PH, k, i);
        for n = 1:Nz
            if (Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i) <= n
                Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i, n) = Sum_Mxx_Jxx_Bxx(N, R, TH, PH, k, i, n);
                Mxx(n, Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i) = Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-
1)*k/2+i, n);
            end
        end
        for n = 1:Nt
            for m = 1:n
                if (Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i) <= (Nz+(n-1)*n/2+m)
                    Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i, Nz+(n-1)*n/2+m) =
Sum_Mxx_Axx_Bxx(N, R, TH, PH, k, i, n, m);
                    Mxx(Nz+(n-1)*n/2+m, Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i) = Mxx(Nz+(Nt-
1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i, Nz+(n-1)*n/2+m);
                end
            end
        end
        for n = 1:Nt
            for m = 1:n
                if (Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i) <= (Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m)
                    Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i, Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m) =
Sum_Mxx_Bxx_Bxx(N, R, TH, PH, k, i, n, m);
                    Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m, Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i) =
Mxx(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(k-1)*k/2+i, Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m);
                end
            end
        end
    end
end
end

Y = Y(:);
% La matriz Mxx debe ser SYMetrica y DEFInida POSitiva
opts.SYM = true; opts.POSDEF = true;
X = linsolve(Mxx, Y, opts);

parfor n = 1:Nz
    J(n) = X(n);
end
J = J(:);
for n = 1:Nt
    parfor m = 1:n
        C(n, m) = X(Nz+(n-1)*n/2+m);
        S(n, m) = X(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m);
    end
end
end
end

```

**CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES GRAVITATORIAS PARA SATÉLITES
DEL SISTEMA GLOBAL DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS)**

```

[Uxx,p2]=CoefDet_xx(R,TH,PH,Gxx,J,C,S);
Mxx2=Mxx;
Mxx2(1,:)=0;           Mxx2(:,1)=0;           Mxx2(1,1)=Mxx(1,1);
Mxx2(Nz+1,:)=0;       Mxx2(:,Nz+1)=0;       Mxx2(Nz+1,Nz+1)=Mxx(Nz+1,Nz+1);
Mxx2(Nz+Nt*(Nt+1)/2+1,:)=0; Mxx2(:,Nz+Nt*(Nt+1)/2+1)=0;
Mxx2(Nz+Nt*(Nt+1)/2+1,Nz+Nt*(Nt+1)/2+1)=Mxx(Nz+Nt*(Nt+1)/2+1,Nz+Nt*(Nt+1)/2+1);
Y2=Y; Y2(1)=0; Y2(Nz+1)=0; Y2(Nz+Nt*(Nt+1)/2+1)=0;

% La matriz Mxx debe ser SYMetrica y DEFInida POSitiva
X2 = linsolve(Mxx2,Y2,opts);

parfor n = 1:Nz
    J2(n) = X2(n);
end
J2 = J2(:);
for n = 1:Nt
    parfor m = 1:n
        C2(n,m) = X2(Nz+(n-1)*n/2+m);
        S2(n,m) = X2(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m);
    end
end

[Uxx2,p22]=CoefDet_xx(R,TH,PH,Gxx,J2,C2,S2);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function Y_k=Sum_Y_dy_Jxx(N,Gxx,dGxx,R,TH,k)

parfor l = 1:N
    Y_vec(l) = (Gxx(l)-GMxx(R(l)))*Jxx(k,R(l),TH(l));
end

Y_k = sum(Y_vec);
end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Jxx_Jxx(N,R,TH,k,n)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Jxx(n,R(l),TH(l))*Jxx(k,R(l),TH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Axx_Jxx(N,R,TH,PH,k,n,m)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Axx(n,m,R(l),TH(l),PH(l))*Jxx(k,R(l),TH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Bxx_Jxx(N,R,TH,PH,k,n,m)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Bxx(n,m,R(l),TH(l),PH(l))*Jxx(k,R(l),TH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Y_k_i=Sum_Y_dy_Axx(N,Gxx,dGxx,R,TH,PH,k,i)

parfor l = 1:N
    Y_vec(l) = (Gxx(l)-GMxx(R(l)))*Axx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Y_k_i = sum(Y_vec);

end

```

CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES GRAVITATORIAS PARA SATÉLITES DEL SISTEMA GLOBAL DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS)

```

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Jxx_Axx(N,R,TH,PH,k,i,n)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Jxx(n,R(l),TH(l))*Axx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Axx_Axx(N,R,TH,PH,k,i,n,m)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Axx(n,m,R(l),TH(l),PH(l))*Axx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Bxx_Axx(N,R,TH,PH,k,i,n,m)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Bxx(n,m,R(l),TH(l),PH(l))*Axx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Y_k_i=Sum_Y_dy_Bxx(N,Gxx,dGxx,R,TH,PH,k,i)

parfor l = 1:N
    Y_vec(l) = (Gxx(l)-GMxx(R(l)))*Bxx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Y_k_i = sum(Y_vec);

end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Jxx_Bxx(N,R,TH,PH,k,i,n)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Jxx(n,R(l),TH(l))*Bxx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Axx_Bxx(N,R,TH,PH,k,i,n,m)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Axx(n,m,R(l),TH(l),PH(l))*Bxx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function Mxx_k_n=Sum_Mxx_Bxx_Bxx(N,R,TH,PH,k,i,n,m)

parfor l = 1:N
    Mxx_k_n_vec(l) = Bxx(n,m,R(l),TH(l),PH(l))*Bxx(k,i,R(l),TH(l),PH(l));
end
Mxx_k_n = sum(Mxx_k_n_vec);

end

function LR = GMxx(r)

G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24;
LR = (1/r)*(G*Mt/r^2);

end

```

**CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES GRAVITATORIAS PARA SATÉLITES
DEL SISTEMA GLOBAL DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS)**

```

function LR = Jxx(n,r,th)
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000;
LR = (-1/r)^2*(1/2*G*Mt*(n+1)*r^(-1-n)*Rt^n*sec(th)^2*((-3-
n+(1+n)*cos(2*th))*AsLePo(n,0,sin(th))-2*(2+n)*(AsLePo(n+2,0,sin(th))-
2*AsLePo(n+1,0,sin(th))*sin(th)))+(1/r)*(G*Mt*(1+n)*r^(-2-n)*Rt^n*AsLePo(n,0,sin(th)));

end

function LR = Axx(n,m,r,th,ph)
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000;
LR = (-1/r)^2*(1/2*G*Mt*r^(-1-n)*Rt^n*cos(m*ph)*sec(th)^2*((1+n)*(-3-
n+(1+n)*cos(2*th))*AsLePo(n,m,sin(th))+2*(-1+m-n)*((2-m+n)*AsLePo(2+n,m,sin(th))-
2*(2+n)*AsLePo(1+n,m,sin(th))*sin(th)))+(1/r)*(G*Mt*(1+n)*r^(-2-
n)*Rt^n*cos(m*ph)*AsLePo(n,m,sin(th)));

end

function LR = Bxx(n,m,r,th,ph)
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000;
LR = (-1/r)^2*(1/2*G*Mt*r^(-1-n)*Rt^n*sec(th)^2*sin(m*ph)*((1+n)*(-3-
n+(1+n)*cos(2*th))*AsLePo(n,m,sin(th))+2*(-1+m-n)*((2-m+n)*AsLePo(2+n,m,sin(th))-
2*(2+n)*AsLePo(1+n,m,sin(th))*sin(th)))+(1/r)*(G*Mt*(1+n)*r^(-2-
n)*Rt^n*AsLePo(n,m,sin(th))*sin(m*ph));

end

function [Uxx,p2]=CoefDet_xx(R,TH,PH,Gxx,J,C,S)
% p^2 = 1 - Sig_r^2/Sig^2
% Sig_r : Varianza residual, Media cuadrática de los residuos
% Sig : Varianza
% p^2 : Coeficiente de Determinación
% N : Número de datos experimentales
% mGxx : Media aritmética de Gxx
N = length(Gxx); mGxx = mean(Gxx);

parfor i=1:N
    Uxx(i) = Dxx(J,C,S,R(i),TH(i),PH(i));
    Sig_r2_vec(i) = (Gxx(i)-Uxx(i))^2;
    Sig2_vec(i) = Gxx(i)^2;
end

Sig_r2 = mean(Sig_r2_vec); Sig2 = mean(Sig2_vec)-mGxx^2;
p2 = 1-Sig_r2/Sig2; Uxx = Uxx(:);

end

function Uxx = Dxx(J,C,S,r,th,ph)
Uxx = (-1/r)^2*DD_U_th(J,C,S,r,th,ph)+(1/r)*D_U_r(J,C,S,r,th,ph);

end

function LR = DD_U_th(J,C,S,r,th,ph)
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000;
Nz = length(J); Nt = length(C(:,1));

parfor n = 1:Nz
    LR1(n) = 1/2*G*J(n)*Mt*(n+1)*r^(-1-n)*Rt^n*sec(th)^2*((-3-
n+(1+n)*cos(2*th))*AsLePo(n,0,sin(th))-2*(2+n)*(AsLePo(n+2,0,sin(th))-
2*AsLePo(n+1,0,sin(th))*sin(th)));
end
for n = 1:Nt
    parfor m = 1:n
        LR2(n,m) = 1/2*G*Mt*r^(-1-
n)*Rt^n*sec(th)^2*(C(n,m)*cos(m*ph)+S(n,m)*sin(m*ph))*((1+n)*(-3-
n+(1+n)*cos(2*th))*AsLePo(n,m,sin(th))+2*(-1+m-n)*((2-m+n)*AsLePo(2+n,m,sin(th))-
2*(2+n)*AsLePo(1+n,m,sin(th))*sin(th)));
    end
end
end

```

CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES GRAVITATORIAS PARA SATÉLITES DEL SISTEMA GLOBAL DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS)

```
LR = sum(LR1)+sum(sum(LR2));

end

function LR = D_U_r(J,C,S,r,th,ph)

G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000;
Nz = length(J); Nt = length(C(:,1));

parfor n = 1:Nz
    LR1(n) = G*J(n)*Mt*(1+n)*r^(-2-n)*Rt^n*AsLePo(n,0,sin(th));
end
for n = 1:Nt
    parfor m = 1:n
        LR2(n,m) = G*Mt*(1+n)*r^(-2-
n)*Rt^n*AsLePo(n,m,sin(th))*(C(n,m)*cos(m*ph)+S(n,m)*sin(m*ph));
    end
end

LR = G*Mt/r^2+sum(LR1)+sum(sum(LR2));
end

function p=AsLePo(n,m,x)
P = legendre(n,x);
p = P(m+1);
end
```

CÁLCULO DEL VALOR DEL MÓDULO DEL GRADIENTE DEL POTENCIAL GRAVITATORIO

```
function g = Grad_U_Tierra(J,C,S,r,th,ph)

G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000; Nz = length(J); Nt = length(C(:,1));
% g: Modulo del Gradiente de U en coordenadas esfericas
DrU = G*Mt/r^2; DthU = 0; DphU = 0;

for n = 1:Nz
    DrU = DrU + J(n)*G*Mt*Rt^n*(n+1)*AsLePo(n,0,sin(th))/r^(n+2);
    DthU = DthU + J(n)*G*Mt*Rt^n*(n+1)*sec(th)*(AsLePo(n+1,0,sin(th))-
AsLePo(n,0,sin(th))*sin(th))/r^(n+1);
end

for n = 1:Nt
    for m = 1:n
        DrU = DrU +
G*Mt*Rt^n*(n+1)*AsLePo(n,m,sin(th))*(C(n,m)*cos(m*ph)+S(n,n)*sin(m*ph))/r^(n+2);
        DthU = DthU + G*Mt*Rt^n*sec(th)*(C(n,m)*cos(m*ph)+S(n,n)*sin(m*ph))*((1-
m+n)*AsLePo(n+1,m,sin(th))-(n+1)*AsLePo(n,m,sin(th))*sin(th))/r^(n+1);
        DphU = DphU -
G*Mt*Rt^n*m*AsLePo(n,m,sin(th))*(C(n,m)*cos(m*ph)+S(n,n)*sin(m*ph))/r^(n+1);
    end
end

g = sqrt( DrU^2 + (1/r*DthU)^2 + (1/(r*sin(th))*DphU)^2 );
end

function p=AsLePo(n,m,x)
P = legendre(n,x);
p = P(m+1);
end
```

CÁLCULO DE TODAS LAS SERIES DE FOURIER DE LAS VARIACIONES DIARIAS DE LOS COEFICIENTES

```
function [C_All,m_vec,b_vec,r2_vec]=CalculateAll_FourierExp1D_mod(X,T,M)

% Calcula la serie de Fourier que aproxima la variacion diaria de los coef
n = length(X(:,1));
for j =1:n
    [C_All(j,:),m_vec(j),b_vec(j),r2_vec(j)] = FourierExp1D_mod2(X(j,:),T,M);
end
m_vec = m_vec(:); b_vec = b_vec(:); r2_vec = r2_vec(:);
r2_min = min(r2_vec)
r2_max = max(r2_vec)

end

function [C,m,b,r2] = FourierExp1D_mod2(Y,X,M)

n = length(X); T = X(n)-X(1); w = 2*pi/T; dx = X(2)-X(1);

% CALCULO DE LA RECTA A RESTAR
m = (Y(n)-Y(1))/(X(n)-X(1)); b = Y(1)-m*X(1);
% y = m*x + b
for j = 1:n
    Y(j) = Y(j) - (m*X(j)+b);
end

% CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

for p = 1:(2*M+1)
    C_Sum_inf = 0; C_Sum_sup = 0;
    for j = 1:(n-1)
        C_Sum_inf = C_Sum_inf + Y(j)*exp(-1i*(p-M-1)*w*X(j))*dx;
        C_Sum_sup = C_Sum_sup + Y(j+1)*exp(-1i*(p-M-1)*w*X(j+1))*dx;
    end
    C(p) = (1/T)*(C_Sum_inf+C_Sum_sup)/2; % Coeficiente de Fourier
end

% CALCULO DE Y DE FOURIER: F_Y

for j = 1:n
    Y_Fourier_Sum = 0;
    for p = 1:(2*M+1)
        Y_Fourier_Sum = Y_Fourier_Sum + C(p)*exp(1i*(p-M-1)*w*X(j));
    end
    F_Y(j) = real(Y_Fourier_Sum);
    F_Yi(j) = imag(Y_Fourier_Sum);
end

% CALCULO DEL COEFICIENTE DE CORRELACION NO LINEAL

% Ymean: Promedio de los valores de Y
Ymean = mean(Y);

% SSE: Suma de los errores al cuadrado
% SST: Suma de las desviaciones de la media al cuadrado
SSE = 0; SST = 0;
for j = 1:n
    SSE = SSE + (Y(j)-F_Y(j))^2;
    SST = SST + (Y(j)-Ymean)^2;
end

% r: Coeficiente de correlacion no lineal
r2 = 1-SSE/SST;

end
```


CÁLCULO DEL POTENCIAL GRAVITATORIO EN UN PUNTO E INSTANTE DADO

```
function U = U_TierraTime(C_All,m_vec,b_vec,r,th,ph,t)

[J,C,S] = Calculate_Xtime(C_All,m_vec,b_vec,t);
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000; Nz = length(J); Nt = length(C(:,1));
U = -G*Mt/r;
for n = 1:Nz
    U = U - J(n)*G*Mt*Rt^n*AsLePo(n,0,sin(th))/r^(n+1);
end
for n = 1:Nt
    for m = 1:n
        U = U - G*Mt*Rt^n*(C(n,m)*cos(m*ph)+S(n,n)*sin(m*ph))*AsLePo(n,m,sin(th))/r^(n+1);
    end
end
end

function p=AsLePo(n,m,x)
P = legendre(n,x);
p = P(m+1);
end

function [Jt,Ct,St] = Calculate_Xtime(C_All,m_vec,b_vec,t)

% Calcula el valor de los coef en cada instante t (dias)
T = 46; w = 2*pi/T; % T: Periodo (en dias)
M = (length(C_All(1,:))-1)/2;
for j = 1:length(C_All(:,1))
    X_Fourier = 0;
    for p = 1:(2*M+1)
        X_Fourier = X_Fourier + C_All(j,p)*exp(1i*(p-M-1)*w*t);
    end
    Xt(j) = real(X_Fourier) + ( m_vec(j)*t + b_vec(j) );
end
Xt = Xt(:); Nz = 15; Nt = 15;
for n = 1:Nz
    Jt(n) = Xt(n);
end
Jt = Jt(:);
for n = 1:Nt
    for m = 1:n
        Ct(n,m) = Xt(Nz+(n-1)*n/2+m);
        St(n,m) = Xt(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m);
    end
end
end
end
```

CÁLCULO DE PUNTOS QUE FORMAN LA SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL

```
function [XsMax,YsMax,ZsMax] = EquiPot(J,C,S,Nth,Nph,V)
global G Mt Rt Nz Nt
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000; Nz = length(J); Nt = length(C(:,1));
Th = linspace(0.5*pi/180,179.5*pi/180,Nth); Ph = linspace(0,2*pi,Nph); l=1;
syms rx
for k = 1:Nth
    for j = 1:Nph
        R = vpasolve(U_Tierra(J,C,S,rx,Th(k),Ph(j)) == V,rx,[0 Inf]);
        l=l+1;
        rMax = max(double(R));
% Meq: Acumula las coordenadas esfericas y cartesianas de la equipotencial
        XsMax(j,k) = rMax*sin(Th(k))*cos(Ph(j));    YsMax(j,k) = rMax*sin(Th(k))*sin(Ph(j));
        ZsMax(j,k) = rMax*cos(Th(k));
    end
end
end
```

CÁLCULO DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES A LO LARGO DEL TIEMPO, DENTRO DE LOS 47 DÍAS DE DATOS

```
function SurfMax = Equipots(C_All,m_vec,b_vec,Nth,Nph,n)

t = linspace(1,47,n);
for j=1:n
    [Jt,Ct,St] = Calculate_Xtime(C_All,m_vec,b_vec,t(j));
    V0 = U_TierraTime(C_All,m_vec,b_vec,6378100,pi/2,0,t(j));
    [SurfMax{j,1},SurfMax{j,2},SurfMax{j,3}] = Equipot(Jt,Ct,St,Nth,Nph,V0);
end

end

function [Jt,Ct,St] = Calculate_Xtime(C_All,m_vec,b_vec,t)

% Calcula el valor de los coef en cada instante t (dias)
T = 46; w = 2*pi/T; % T: Periodo (en dias)
M = (length(C_All(1,:))-1)/2;

for j = 1:length(C_All(:,1))
    X_Fourier = 0;
    for p = 1:(2*M+1)
        X_Fourier = X_Fourier + C_All(j,p)*exp(1i*(p-M-1)*w*t);
    end
    Xt(j) = real(X_Fourier) + ( m_vec(j)*t + b_vec(j) );
end

Xt = Xt(:); Nz = 15; Nt = 15;

for n = 1:Nz
    Jt(n) = Xt(n);
end

Jt = Jt(:);

for n = 1:Nt
    for m = 1:n
        Ct(n,m) = Xt(Nz+(n-1)*n/2+m);
        St(n,m) = Xt(Nz+(Nt-1)*Nt/2+Nt+(n-1)*n/2+m);
    end
end

end

function U = U_TierraTime(C_All,m_vec,b_vec,r,th,ph,t)

[J,C,S] = Calculate_Xtime(C_All,m_vec,b_vec,t);
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000; Nz = length(J); Nt = length(C(:,1));
U = -G*Mt/r;

for n = 1:Nz
    U = U - J(n)*G*Mt*Rt^n*AsLePo(n,0,sin(th))/r^(n+1);
end

for n = 1:Nt
    for m = 1:n
        U = U - G*Mt*Rt^n*(C(n,m)*cos(m*ph)+S(n,n)*sin(m*ph))*AsLePo(n,m,sin(th))/r^(n+1);
    end
end

end

function p=AsLePo(n,m,x)

P = legendre(n,x);
p = P(m+1);

end
```

*CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES GRAVITATORIAS PARA SATÉLITES
DEL SISTEMA GLOBAL DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS)*

```
function [XsMax, YsMax, ZsMax] = Equipot(J, C, S, Nth, Nph, V)

global G Mt Rt Nz Nt
G = 6.67384*10^(-11); Mt = 5.9736*10^24; Rt = 6371000; Nz = length(J); Nt = length(C(:,1));
Th = linspace(0.5*pi/180, 179.5*pi/180, Nth); Ph = linspace(0, 2*pi, Nph); l=1;
syms rx
for k = 1:Nth
    for j = 1:Nph
        R = vpasolve(U_Tierra(J, C, S, rx, Th(k), Ph(j)) == V, rx, [0 Inf]);
        l=l+1;
        rMax = max(double(R));
    % Meq: Acumula las coordenadas esfericas y cartesianas de la equipotencial
        XsMax(j, k) = rMax*sin(Th(k))*cos(Ph(j));    YsMax(j, k) = rMax*sin(Th(k))*sin(Ph(j));
        ZsMax(j, k) = rMax*cos(Th(k));
    end
end

end

function U = U_Tierra(J, C, S, r, th, ph)

global G Mt Rt Nz Nt
U = -G*Mt/r;
for n = 1:Nz
    U = U - J(n)*G*Mt*Rt^n*AsLePo(n, 0, sin(th))/r^(n+1);
end
for n = 1:Nt
    for m = 1:n
        U = U - G*Mt*Rt^n*(C(n, m)*cos(m*ph)+S(n, n)*sin(m*ph))*AsLePo(n, m, sin(th))/r^(n+1);
    end
end

end

end
```