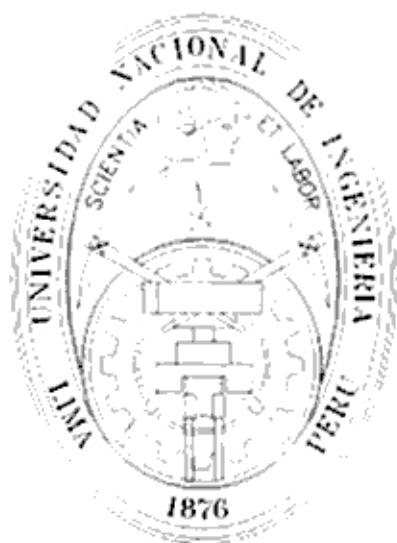


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL



PROCEDIMIENTOS DE GRADIENTE  
CONJUGADA EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de:  
**INGENIERO CIVIL**

**ROQUE ALBERTO SÁNCHEZ MEZA**

Lima - Perú  
2000

# ÍNDICE

<b><u>CAPÍTULO I: Introducción</u></b>	<b>pag.</b>
1.1 Introducción _____	1
1.2 Justificación _____	4
1.3 Objetivos _____	6
<b><u>CAPÍTULO II: Procedimientos de Gradiente Conjugada</u></b>	
2.1 Breve historia sobre los procedimientos de gradiente _____	8
2.2 Ecuaciones algebraicas lineales	
2.2.1 Métodos iterativos de gradiente _____	10
2.2.2 Procedimiento del descenso más rápido (steepest descent) _____	12
2.2.3 Procedimientos de direcciones conjugadas _____	20
2.2.4 Procedimiento de Gradiente Conjugada _____	24
2.2.5 Procedimiento de Gradiente Conjugada Precondicionada _____	29

2.3 Ecuaciones algebraicas no lineales _____	37
2.3.1 Método del descenso más rápido _____	42
2.3.2 Método de Gradiente Conjugada _____	43

### **CAPÍTULO III: Aplicaciones al análisis estructural lineal**

3.1 Introducción _____	47
3.2 Implementación de los procedimientos	
3.2.1 Introducción _____	48
3.2.2 Gradiente Conjugada _____	50
3.2.3 Gradiente Conjugada Precondicionada _____	56
3.3 Aplicación a pórticos planos	
3.3.1 Introducción _____	59
3.3.2 Resultados _____	59
3.4 Aplicación a pórticos espaciales	
3.4.1 Introducción _____	75
3.4.2 Resultados _____	78

### **CAPÍTULO IV: Extensión al análisis no lineal**

4.1 Introducción _____	82
4.2 Implementación de los procedimientos	
4.2.1 Descenso más rápido _____	84
4.2.2 Gradiente Conjugada _____	85
4.2.3 Técnicas de solución _____	91

4.3 Aplicación a reticulados planos	
4.3.1 Introducción	93
4.3.2 Resultados	95
4.4 Consideraciones relativas al análisis no lineal de medios continuos	108
<b><u>CAPÍTULO V: Conclusiones y Recomendaciones</u></b>	
5.1 Conclusiones y Recomendaciones	113
<b><u>ANEXO A: Programa Lineal de Armaduras Planas</u></b>	118
<b><u>ANEXO B: Resultados del programa no lineal de Armaduras Planas</u></b>	129
<b>Bibliografía</b>	152

---

# CAPÍTULO I

---

## INTRODUCCIÓN

### **1.1 Introducción**

1. En los procedimientos de análisis basados en rigideces, que son los más utilizados en programas de cómputo, la mayor parte del esfuerzo de aritmética se consume en la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

$$K u = f \dots (1)$$

(en el caso de un problema lineal y estático) o de ecuaciones diferenciales (por un problema no estacionario). La solución de las ecuaciones diferenciales tiene también relación con la solución de ecuaciones algebraicas. Al tratarse problemas no lineales el esfuerzo de cómputo para resolver las ecuaciones es proporcionalmente mayor. En todos los casos, el costo total del análisis se ve significativamente afectado por las técnicas empleadas en la solución de las ecuaciones de equilibrio.

En un análisis estático lineal, el tiempo para la solución de las ecuaciones de equilibrio, demanda un alto porcentaje de tiempo de cómputo. En un análisis dinámico o en un análisis no lineal, el esfuerzo de cómputo para resolver las ecuaciones es aún más importante. Por consiguiente, si se seleccionan técnicas inapropiadas para la solución de las ecuaciones de equilibrio, el costo total del análisis se ve significativamente afectado.

2. El método de Gauss y sus variantes son conocidos como métodos directos para resolver el problema matricial (1). Se ejecutan a través de un número finito de pasos y generan una solución  $x$  que sería exacta si no fuera por los errores que resultan de la aritmética imperfecta del computador. En contraste, un método iterativo da lugar a una sucesión de vectores que, idealmente, converge a la solución. En general, para obtener la sucesión mencionada se utiliza repetidamente un proceso sencillo. El cálculo se detiene cuando se cuenta con una solución aproximada con cierto grado de precisión, especificado de antemano o después de cierto número de iteraciones.
3. El análisis lineal, elástico y estático de estructuras aporticadas es poco demandante en términos relativos a las posibilidades de cómputo con las herramientas actualmente disponibles. Sin embargo, hay un creciente interés en el análisis no lineal que, con las técnicas más utilizadas, demanda muchísimas más operaciones aritméticas que un análisis lineal con un modelo de similares características. Además, se observa un uso más frecuente de técnicas de elementos finitos para el análisis de medios continuos, con modelos de miles o decenas de miles de grados de libertad, con una tendencia a utilizar modelos más refinados, "adaptivos",

que requieren la sucesiva solución de muchos grandes sistemas de ecuaciones. En este contexto, es de mucho interés el hacer más eficiente la solución de las ecuaciones.

4. Para sistemas lineales grandes, con miles de ecuaciones, los métodos iterativos pueden tener ventajas decisivas respecto de los métodos directos, en cuanto a la velocidad y requerimientos de la memoria de la computadora, ya que una proporción muy grande de los elementos de la matriz de rigidez son cero. En ocasiones, si los requerimientos sobre la precisión no son muy fuertes, bastará con un número modesto de iteraciones para obtener una solución aceptable. Para sistemas en los cuales una proporción muy grande de los elementos de  $K$  son cero, los métodos iterativos son con frecuencia muy eficientes. Otra ventaja de los métodos iterativos es que usualmente son estables y de hecho amortiguan los errores numéricos conforme el proceso se lleva a cabo.

En esta tesis se tratarán sobre dos situaciones de análisis, la primera se refiere al análisis lineal y elástico (capítulo III), en el que se supone que las deformaciones y los esfuerzos son proporcionales a las cargas aplicadas. La segunda; supone el comportamiento no lineal (capítulo IV), usando a modo de ejemplo un modelo elastico-plástico para representar las relaciones existentes entre los esfuerzos y las deformaciones unitarias.

## **1.2 Justificación**

Los procedimientos de eliminación directa, entre los cuales el más difundido es el de eliminación Gaussiana, predominan actualmente en los programas de análisis estructural. Dichos procedimientos tratan de utilizar las ventajas que ofrece la matriz de rigidez de una estructura, como son ser simétrica y ser definida positiva, para así reducir el número de operaciones y por consiguiente el tiempo de ejecución.

Los métodos de relajación como el de H. Cross, muy utilizados en el pasado, han sido desplazados por los procedimientos de eliminación directa y es así que casi no se encuentran en los programas de cómputo. Esto se debe principalmente a una desventaja fundamental: que no se puede garantizar su convergencia en las condiciones más generales.



Otros métodos iterativos, como el de gradiente conjugada que se estudia en este trabajo, han sido poco explorados en el contexto del análisis estructural. Los procedimientos de gradiente conjugada, a diferencia de los métodos de relajación, siempre convergen; sin embargo a pesar de esta facultad, el interés en el proceso de gradiente conjugada radica sobre todo en la posibilidad de una implementación eficiente en computadoras de procesamiento paralelo.

En la presente tesis se examina la aplicación de los procedimientos de gradiente conjugada tanto en el análisis estructural lineal como en el no lineal.

### **1.3 Objetivos**

Los procedimientos de gradiente conjugada han sido poco explorados dentro del análisis estructural ya que la mayoría de los programas utilizan métodos de solución directos.

La presente tesis tiene como objetivo el de implementar estos procedimientos de gradiente conjugada aprovechando las facilidades que proporcionan las computadoras actuales, tratando en lo posible de utilizar el mínimo de operaciones, puesto que un mayor número de estas conlleva a un mayor tiempo de cómputo, pero sin perder la calidad de los resultados. Lo anteriormente indicado no implica que la implementación sea difícil de realizar.

Otro objetivo, que es una consecuencia del anterior, será la comparación con alguno de los procedimientos directos más utilizados.

Por último, se estimó conveniente el explorar las ventajas que conllevaría el utilizar estos procedimientos de gradiente conjugada en el análisis no lineal. Este es un tema poco tratado en la literatura, sin embargo, los procedimientos de gradiente conjugada son comparativamente más eficientes en este caso. El material que se presenta en el capítulo IV se refiere al análisis no lineal de armaduras planas. Esto tuvo como propósito el centrar la atención sobre el procedimiento numérico en sí y no tanto en los aspectos de comportamiento no lineal de las estructuras. En la parte final del mismo capítulo se presentan algunas ideas preliminares para el análisis no lineal de medios continuos haciendo uso de técnicas de elementos finitos.

---

## CAPÍTULO II

---

### PROCEDIMIENTOS DE GRADIENTE CONJUGADA

#### 2.1 Breve historia sobre los procedimientos de gradiente

Los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales proveen una solución en la forma de un límite para una secuencia de ciertos vectores los cuales se construyen a través de un proceso uniforme y relativamente simple.

Algunos de estos métodos utilizan lo que se denomina Direcciones Conjugadas.

El primer trabajo en que se hace referencia a los métodos de gradiente lo realiza L. V. Kantorovich (en la antigua URSS) en el año 1947 en su libro *O metode naiskoreishego spuska* (en inglés *On the method of steepest descent*) e independientemente G. Temple dentro

de su libro *The general theory of relaxation methods of steepest descent applied to linear systems*.

Posteriormente aparecen los métodos de direcciones conjugadas. En el año 1952 Hestenes y Stiefel introducen un artículo titulado *Methods of conjugate gradient for solving linear systems* en el *Journal Research National Bureau of Standards* 45. Cuando Hestenes y Stiefel presentaron el método de la gradiente conjugada, éste causó gran conmoción. Sin embargo, el interés disminuyó cuando se descubrió que la propiedad de la terminación finita no era asequible en la práctica. Pero veinte años más tarde hubo un interés renovado por el método por cuanto se le consideró como un método iterativo.

La eficiencia de un proceso de gradiente conjugada depende en gran medida de cómo se "implementa" en un programa de cómputo. En esta tesis se demuestra que para el análisis lineal, con las herramientas de cómputo hoy disponibles, el proceso puede competir con los métodos de eliminación directa más utilizados. Para el análisis no lineal el procedimiento de gradiente conjugada resulta definitivamente más eficiente. El renovado interés en los métodos iterativos de este tipo se debe sin embargo a que pueden aprovechar mejor las capacidades de computadoras con procesamiento paralelo, en contraste con los más tradicionales métodos de eliminación, en los que el trabajo se realiza en un solo frente.

## **2.2 Ecuaciones Algebraicas lineales**

### **2.2.1 Métodos Iterativos de Gradiente**

Estos pueden ser considerados como métodos de minimización de algún funcional en una cierta dirección. Tal dirección de minimización se basa en el hecho que la trayectoria opuesta al gradiente del funcional en un punto dado garantiza el decremento más rápido del funcional en la vecindad de este punto. Debido a esto, ciertos métodos de gradiente se llaman métodos de descenso más rápido.

Un método de gradiente ideal sería el de construir la recta de descenso más rápido comenzando por una aproximación inicial y acercándose al punto que hace mínimo al funcional. Por ejemplo, una línea cuya dirección en cada punto es opuesta a la dirección de la gradiente del funcional en el punto. La ecuación diferencial para la línea de descenso más rápido es:

$$\frac{dX}{dt} = -\rho(t) \text{grad} F(X) \dots (1)$$

donde  $\rho(t)$  es cualquier función positiva con parámetro  $t$ . La elección de la función  $\rho(t)$  afecta solamente la parametrización de la línea de descenso más rápido.

Por ejemplo, si para resolver el sistema  $AX=b$  con una matriz  $A$  definida positiva, tomamos como el funcional la función de error, la ecuación (1) para  $\rho(t) = 1$  será:

$$\frac{dX}{dt} = b - AX \dots (2)$$

Consecuentemente la línea de descenso más rápido será determinada como la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Para una parametrización seleccionada la solución deseada del sistema algebraico se obtiene como  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$  independiente de la elección de la aproximación inicial. La solución general del sistema (2) es  $X = X^* + e^{-At} C$  donde  $X^*$  es la solución exacta del sistema  $AX=b$  y  $C$  es un vector constante arbitrario.

El primer método de gradiente en aparecer fue el método de descenso más rápido (steepest descent) propuesto por L. V. Kantorovich.

### **2.2.2 Procedimiento del descenso más rápido (steepest descent)**

En el trabajo de L. V. Kantorovich la solución del sistema de ecuaciones  $Ax=b$ , con  $A$  simétrica y definida positiva, está conectada al problema de encontrar el vector  $x$  que hace mínimo el funcional

$$H(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$$

que difiere solamente por una constante, pero desconocida con anterioridad  $(Ax^*, x^*)$ , de la función de error  $f(x) = (Ay, y)$ . Aquí,  $x^*$  es la solución exacta del sistema y coincide con el vector que hace mínimo  $H(x)$  y además  $y = x^* - x$  es el vector de error.

Puede demostrarse fácilmente que el vector  $x$  que hace mínimo el funcional  $H(x)$  será la solución del sistema de ecuaciones.

Sea  $\bar{x}$  la solución exacta de  $A\bar{x} = b$ ; luego se tiene que:

$$\begin{aligned} H(x) - H(\bar{x}) &= (Ax, x) - 2(b, x) - (A\bar{x}, \bar{x}) + 2(b, \bar{x}) \\ &= (A(x - \bar{x}), x - \bar{x}) \\ &= (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) \geq 0 \quad (A \text{ es definida-positiva}) \end{aligned}$$



es decir  $H(x) \geq H(\bar{x})$ .

La igualdad solo se da si  $x = \bar{x}$ . La solución de  $Ax = b$  es entonces equivalente a una minimización de  $H(x)$ .

Para encontrar el mínimo de la función  $H(x)$  puede procederse como se indica a continuación. Se parte de una aproximación inicial  $x_0$  (que puede ser un vector nulo). Se obtiene la dirección opuesta al gradiente del funcional  $H(x)$  (o lo que es lo mismo, a la gradiente de la función de error) en ese punto; esta dirección coincide con la dirección del residuo  $r_0 = b - Ax_0$  para la aproximación inicial escogida. Desde el punto  $x_0$  y con la dirección seleccionada se obtiene el punto  $x_1$  en el cual el funcional  $H(x)$  se vuelve mínimo.

Puede comprobarse lo anteriormente indicado de la siguiente manera. Para hacer mínimo el funcional  $H(x)$  la dirección de búsqueda debe realizarse en dirección normal a la elipsoide  $H(x_0)$ , es decir en la dirección de la gradiente ( $Y$ ), de modo que:

$$\frac{\partial H(x)}{\partial Y} = \left. \frac{d}{d\alpha} H(x_0 + \alpha Y) \right|_{\alpha=0}$$

sea máxima en valor absoluto. Luego, conocido  $H(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$ , se procede:

$$\begin{aligned}
H(x_0 + \alpha Y) &= (A(x_0 + \alpha Y), (x_0 + \alpha Y)) - 2(b, (x_0 + \alpha Y)) \\
&= (Ax_0 + \alpha AY, x_0 + \alpha Y) - 2(b, x_0 + \alpha Y) \\
&= (Ax_0, x_0) + \alpha(AY, x_0) + \alpha(Ax_0, Y) + \alpha^2(AY, Y) \\
&= (Ax_0, x_0) - 2(b, x_0) + 2\alpha(Ax_0, Y) + \alpha^2(AY, Y) - 2\alpha(b, Y)
\end{aligned}$$

pero  $H(x_0) = (Ax_0, x_0) - 2(b, x_0)$

y por lo tanto

$$H(x_0 + \alpha Y) = H(x_0) - 2\alpha(b - Ax_0, Y) + \alpha^2(AY, Y) \dots (3)$$

y considerando que  $r_0 = b - Ax_0$

se tiene

$$H(x_0 + \alpha Y) = H(x_0) - 2\alpha(r_0, Y) + \alpha^2(AY, Y)$$

$$\frac{H(x_0 + \alpha Y) - H(x_0)}{\alpha} = -2(r_0, Y) + \alpha(AY, Y)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{H(x_0 + \alpha Y) - H(x_0)}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} H(x_0 + \alpha Y) \Big|_{\alpha=0} = -2(r_0, Y)$$

esto indica que la pendiente mayor corresponde a la dirección  $r_0$ , es decir,  $Y = r_0$ .

Se puede hallar  $\alpha$ , para que  $H(x_0 + \alpha r_0)$  sea mínimo. Para esto se reescribirá la expresión (3) con  $Y = r_0$  y se derivará con respecto a  $\alpha$ , así:

$$\frac{d}{d\alpha_0} H(x_0 + \alpha_0 r_0) = -2(r_0, r_0) + 2\alpha_0 (Ar_0, r_0)$$

de donde: 
$$\alpha_0 = \frac{(r_0, r_0)}{(Ar_0, r_0)} = \frac{(r_0, r_0)}{(r_0, Ar_0)}$$

como  $A$  es definida positiva, nunca se presentará el caso  $(r_0, Ar_0) = r_0^T Ar_0 = 0$ . Finalmente:  $x_1 = x_0 + \alpha_0 r_0$ .

Luego este proceso se puede repetir en sucesivos ciclos, como se indica:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = b - A(x^{(k-1)} + \alpha_{k-1} r^{(k-1)})$$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k-1)} + \alpha_{k-1} A x^{(k-1)}$$

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} + \alpha_{k-1} A r^{(k-1)}$$

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(r_k, Ar_k)}$$

Se puede observar que para llevar a cabo este proceso es más conveniente computar los vectores  $r^{(k)}$ , especialmente para una matriz de alto orden, mediante la fórmula  $r^{(k)} = r^{(k-1)} + \alpha_{k-1} A r^{(k-1)}$ . Sin embargo, como una consecuencia de errores de redondeo, los vectores  $r^{(k)}$  así computados pueden comenzar a divergir de los residuos reales  $b - Ax_k$  después de algunos pasos del proceso. Por consiguiente se debería recalculer los vectores  $r^{(k)}$  de tiempo en tiempo mediante la fórmula  $r_k = b - Ax_k$ .

Las aproximaciones sucesivas  $x_0, x_1, x_2, \dots$  convergen a la solución del sistema  $Ax = b$  como una progresión geométrica. Se demostrará que la secuencia de valores de la función de error se aproxima a cero para  $k \rightarrow \infty$ . Se tiene que:

$$H(x_{k+1}) = H(x_k) - \frac{(r_k, r_k)^2}{(Ar_k, r_k)}$$

y además:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) - \frac{(r_k, r_k)^2}{(Ar_k, r_k)}$$

donde  $f(x)$  es la función de error descrita al inicio de este párrafo.

Por otro lado:  $f(x_k) = (A^{-1}r_k, r_k)$

por lo tanto:

$$\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} = 1 - \frac{(r_k, r_k)^2}{f(x_k)(Ar_k, r_k)}$$

y 
$$\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} = 1 - \frac{(r_k, r_k)^2}{(A^{-1}r_k, r_k)(Ar_k, r_k)}$$

se desea estimar el sustrayendo en el miembro derecho de la última ecuación.

Sean  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  los valores característicos de la matriz  $A$  y sean  $U_1, U_2, \dots, U_n$  sus correspondientes vectores

característicos, ortogonales entre ellos y normalizados de modo tal que  $(U_i, U_i)=1$  para  $i=1, \dots, n$ . Como  $A$  es definida positiva, todo  $\lambda_i > 0$ . Sea  $m \leq \lambda_1$ ,  $\lambda_n \leq M$ . Además sea:

$$r_k = c_1 U_1 + \dots + c_n U_n$$

donde no todos los  $c_i$  son iguales a cero. Luego:

$$Ar_k = c_1 \lambda_1 U_1 + \dots + c_n \lambda_n U_n$$

$$A^{-1}r_k = c_1 \lambda_1^{-1} U_1 + \dots + c_n \lambda_n^{-1} U_n$$

debido a que  $Av = \lambda v$ ,  $\lambda$  es un valor característico de  $A$  y  $v$  su correspondiente vector característico.

Además:

$$(r_k, r_k) = \sum_{i=1}^n c_i^2$$

$$(Ar_k, r_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2$$

$$(A^{-1}r_k, r_k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} c_i^2$$

y por lo tanto:

$$\frac{(r_k, r_k)^2}{(A^{-1}r_k, r_k)(Ar_k, r_k)} = \frac{(\sum_{i=1}^n c_i^2)^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} c_i^2} \dots (4)$$

Se puede probar que:

$$\frac{(r_k, r_k)^2}{(A^{-1}r_k, r_k)(Ar_k, r_k)} \geq \frac{4}{\left[ \sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right]^2}$$

donde  $m$  y  $M$  son límites, mínimo y máximo respectivamente, de los valores característicos de la matriz  $A$ , y consecuentemente:

$$\frac{f(X_{k+1})}{f(X_k)} \leq 1 - \frac{4}{\left[ \sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right]^2} = \left[ \frac{M-m}{M+m} \right]^2 < 1$$

de este modo:

$$f(X_{k+1}) \leq \left[ \frac{M-m}{M+m} \right]^2 f(X_k)$$

y por lo tanto:

$$f(X_{k+1}) \leq \left[ \frac{M-m}{M+m} \right]^{2(k+1)} f(X_0)$$

De esta manera,  $f(X_{k+1}) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y por lo tanto

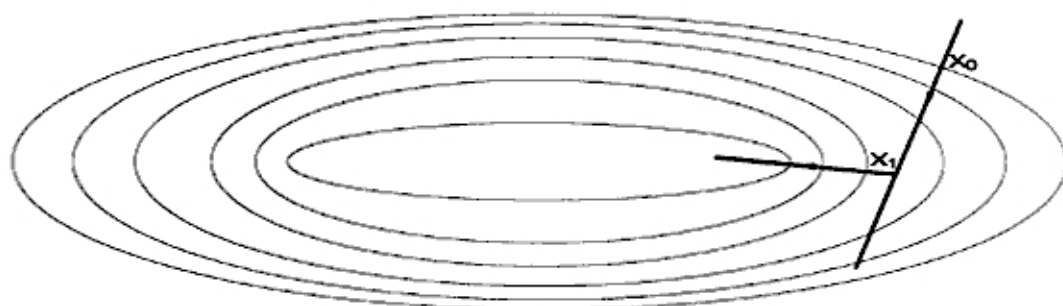
$X_{k+1} \rightarrow X^*$  donde  $X^*$  es la solución exacta del sistema  $AX=F$ .

Estimados teóricos para la relación de convergencia del método de descenso más rápido muestran que para un incremento en el número de condición de la matriz de coeficientes, la convergencia del método se vuelve más lenta. Pero realmente el proceso converge muy lentamente aún para número de condición no muy grandes [2].

Una interpretación geométrica del método de descenso más rápido puede ser como sigue. Considérese en un espacio  $n$ -dimensional la familia de superficies

$$f(X)=C$$

donde  $f(X)$  es la función de error. A través de la aproximación inicial  $X_0$  pasa el correspondiente elipsoide  $f(X_0)$ . En el punto  $X_0$  se construye la normal a ésta elipsoide y luego se encuentra otra elipsoide la cual es tangente a esta normal. En un espacio bidimensional se puede representar como se muestra en la Figura II.1.



**Figura II.1** Interpretación geométrica del descenso más rápido

Posteriormente, se modificará este proceso, lo que nos conducirá al método de la Gradiente Conjugada. En lo que sigue se tratará sobre el método de las direcciones conjugadas.

### **2.2.3 Procedimientos de direcciones conjugadas**

Los métodos de direcciones conjugadas para solucionar sistemas de ecuaciones lineales:  $Ax=b$ , son métodos en los cuales la solución  $x$  se representa como una combinación lineal de ' $n$ ' vectores linealmente independientes. Estos vectores se determinan, por lo general, dentro del proceso de solución de uno en uno. La terminología 'direcciones conjugadas' se origina del hecho que las direcciones de vectores ortogonales en un cierto espacio  $n$ -dimensional son conjugadas con respecto a la superficie de segundo orden, así:

$$(R x, x) = \text{constante}.$$

Los métodos de direcciones conjugadas están dentro del siguiente esquema general:

Sea  $R=CAB$  una matriz definida positiva. Además, sea  $R$  un sistema ortogonal con vectores  $p_0, p_1, \dots, p_n$  (vectores de direcciones conjugadas).

Se buscará la solución del sistema de ecuaciones en la forma:



$$\bar{x} = x_0 + B \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \dots (4)$$

donde  $\bar{x}$  es la solución exacta y  $x_0$  es la aproximación inicial, generalmente escogida arbitrariamente. Usualmente se toma  $x_0 = \mathbf{0}$ .

Reemplazando (4) en el sistema dado y multiplicando por  $A$ , se obtiene:

$$AB \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = b - Ax_0 = r_0$$

ahora, se multiplica esta última ecuación por  $C$ , y se consigue:

$$CAB \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = Cr_0$$

$$R \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = Cr_0$$

desarrollando:

$$R(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_i p_i + \dots + \alpha_n p_n) = Cr_0$$

multiplicando por  $p_i^T$ , y utilizando la propiedad de ortogonalidad entre los vectores  $p$ , tenemos:

$$\alpha_i = \frac{(C r_0, p_i)}{(R p_i, p_i)}$$

La expresión (4) también se puede escribir como:

$$\bar{x} = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i B p_i$$

Los vectores  $B p_1, B p_2, \dots, B p_n$  son ortogonales y pertenecen al sistema definido por la matriz  $R_1 = B^{T^{-1}} R B^{-1}$  la cual es definida positiva. En efecto:

$$(R_1 B p_i, B p_j) = p_i^T B^T R_1^T B p_j = (B^T R_1 B p_i, p_j) \dots (5)$$

pero  $R_1 = B^{T^{-1}} R B^{-1} \Rightarrow R = B^T R_1 B$

luego reemplazando en (5):

$$(R p_i, p_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

La solución en la forma presentada por la expresión (4) se puede expresar como el último elemento en una secuencia de vectores  $x_0, x_1, \dots, x_n$  así:

$$x_i = x_0 + \sum_{j=1}^i \alpha_j B p_j = x_{i-1} + \alpha_i B p_i$$

y los vectores  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son considerados como aproximaciones sucesivas a la solución. Los correspondientes

sucesivos residuos  $r_0, r_1, \dots, r_n$  se relacionan uno a otro mediante la fórmula:

$$r_i = r_{i-1} - \alpha_i AB p_i$$

que proviene de:

$$r_i = b - Ax_i = b - A(x_{i-1} + \alpha_i Bp_i)$$

$$r_i = b - Ax_{i-1} - \alpha_i ABp_i$$

$$r_i = r_{i-1} - \alpha_i ABp_i$$

Como se puede observar, para construir la  $i$ -ésima aproximación  $x_i$  no es necesario conocer el total del sistema de direcciones conjugadas, puesto que se determinan mediante los  $i$  primeros vectores del sistema.

Los métodos de direcciones conjugadas poseen características que van en desmedro de éstas. En el caso que un sistema de vectores sufren el proceso de ortogonalización generalizado está lejos de ser ortogonal con respecto al sistema elegido, una importante pérdida de exactitud puede ocurrir al llevar a cabo el proceso de ortogonalización. Esta situación puede ser corregida mediante una preortogonalización [1].

## 2.2.4 Procedimiento de gradiente conjugada

En el método de gradiente conjugada  $R=A$ ,  $A$  es una matriz definida positiva,  $B=C=I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, y  $R_I=A$ . Los vectores ortogonales  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  se construyen teóricamente mediante la  $A$ -ortogonalización de los residuos  $r_0, r_1, \dots, r_n$  de las aproximaciones sucesivas  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  y éstas a su vez son determinadas por las fórmulas del método de direcciones conjugadas, tal como seguidamente se desarrollan:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 p_0$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 p_1$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$$

⋮

$$x^{(n)} = \bar{x} = x^{(n-1)} + \alpha_{n-1} p_{n-1}$$

o alternativamente

$$x^{(i)} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j p_j \dots (6)$$

Los residuos se consiguen realizando las siguientes operaciones:

$$r_i = b - Ax^{(i)} = A\bar{x} - Ax^{(i)} = A(\bar{x} - x^{(i)}) \dots (7)$$

de la relación (6):

$$\bar{x} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j p_j \dots (8)$$

reemplazando (8) y (6), en (7):

$$r_i = A(x^{(0)} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j p_j) - x^{(0)} - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j p_j$$

$$r_i = A\left(\sum_{j=i}^{n-1} \alpha_j p_j\right) = \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_j A p_j$$

premultiplicando esta última expresión por  $p_k^T$ :

$$p_k^T r_i = \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_j p_k^T A p_j \begin{cases} = 0 & \text{si } k < i \\ = \alpha_j p_k^T A p_j & \text{si } k \geq i \end{cases}$$

de donde, suponiendo que los vectores  $p_j$  son conocidos, los coeficientes  $\alpha_j$  pueden determinarse de las relaciones de ortogonalidad

$$\alpha_i = \frac{(r_i, p_i)}{(p_i, A p_i)} = \frac{p_i^T r_i}{p_i^T A r_i}$$

y además:  $r_i = r_{i-1} - \alpha_{i-1} A p_{i-1}$

El sistema de vectores que realizan el proceso de ortogonalización no se da de antemano, pero se construye

conforme se van obteniendo los vectores de direcciones conjugadas y sus correspondientes aproximaciones sucesivas. Se observa que el nombre del método se conecta con el hecho que el residuo  $r_i$  es el gradiente de la función de error obtenida en el punto  $x_i$ .

El proceso de construir aproximaciones sucesivas se interrumpe cuando un residuo  $r_k$  alcanza el valor cero, esto es, cuando la última aproximación coincide con la solución exacta del problema.

Continuando con las fórmulas del método de la gradiente conjugada, suponiendo que se conocen los vectores  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  y  $r_0, r_1, \dots, r_n$ ,

el siguiente vector  $p_{i+1}$  se construirá mediante la fórmula:

$$p_{i+1} = r_i - \beta_i p_i$$

donde:

$$\beta_i = \frac{(r_i, A p_i)}{(p_i, A p_i)}$$

Para demostrar esta relación solo basta probar que el vector  $p_{i+1}$  será  $A$ -ortogonal a los vectores  $p_1, p_2, \dots, p_i$ , así:

$$\begin{aligned}
 (p_{i+1}, A p_i) &= (r_i - \beta_i p_i, A p_i) \\
 &= (r_i, A p_i) - \beta_i (p_i, A p_i) \\
 &= (r_i, A p_i) - \frac{(r_i, A p_i)}{(p_i, A p_i)} (p_i, A p_i) = 0
 \end{aligned}$$

Los coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  pueden obtenerse, a través de las fórmulas:

$$\alpha_i = \frac{(p_i, r_i)}{(p_i, A p_i)} = \frac{(r_i, r_i)}{(p_i, A p_i)}$$

$$\beta_i = \frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)}$$

Realmente, para aplicar este método, se debería determinar mediante la fórmula:

$$\alpha_i = \frac{(r_i, r_i)}{(p_i, A p_i)}$$

usando la fórmula:

$$\alpha_i = \frac{(p_i, r_i)}{(p_i, A p_i)}$$

para control.

La fórmula:

$$\alpha_i = \frac{(r_0, p_i)}{(p_i, A p_i)}$$

es sensible a errores de redondeo y no es conveniente aplicarla.

El método de gradiente conjugada puede resumirse en los siguientes pasos:

Dada una aproximación arbitraria  $x_0$ , se determina:

$$r_0 = p_0 = b - Ax_0$$

Para:  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

$$q_k = A p_k$$

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, q_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k$$

$$\beta_k = \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)}$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$



## 2.2.5 Procedimiento de gradiente conjugada

### precondicionada

Se desea resolver el sistema:  $Ax=b$  donde  $A$  es simétrica y definida positiva, con una variante del método de gradiente conjugada. Sería importante precondicionar este sistema para obtener uno que estuviese mejor condicionado que el original, es decir que posibilite una convergencia más rápida. Con esto se formaría un nuevo sistema de la forma:

$$\hat{A}\hat{x}=\hat{b} \quad (\text{sistema precondicionado})$$

donde:

$$\hat{A}=S^TAS$$

$$\hat{x}=S^{-1}x$$

$$\hat{b}=S^Tb$$

de tal modo que  $\kappa(\hat{A})<\kappa(A)$ . Como consecuencia de esto, el método iterativo que se utiliza para resolver el sistema precondicionado puede que converja más rápido [2] que como lo haría con el sistema original.

El número de condición de la matriz  $A$  se obtiene de la siguiente manera:

Suponiendo que se perturba el vector  $b$  para obtener el vector  $\tilde{b}$

y además se cumple que  $Ax=b$  y  $A\tilde{x}=\tilde{b}$  entonces:

$$\begin{aligned}\|x - \tilde{x}\| &= \|A^{-1}b - A^{-1}\tilde{b}\| = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|b - \tilde{b}\|\end{aligned}$$

para obtener luego la perturbación relativa se reescribirá la expresión anterior usando  $\|Ax\| = \|b\|$ , así:

$$\begin{aligned}\|x - \tilde{x}\| &\leq \|A^{-1}\| \|b - \tilde{b}\| = \|A^{-1}\| \|Ax\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \\ &\leq \|A^{-1}\| \|A\| \|x\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

esto nos indica que el error relativo en  $x$  no es mayor que  $\kappa(A)$  veces el error relativo en  $b$ , donde

$$\kappa(A) \equiv \|A\| \|A^{-1}\|$$

El número  $\kappa(A)$  se llama número de condición de la matriz  $A$ . Su valor depende de la norma vectorial seleccionada al iniciar el análisis. Se observa que si el número de condición es pequeño, entonces pequeñas perturbaciones en  $b$  conducen a pequeñas perturbaciones en  $x$ . La desigualdad  $\kappa(A) \geq 1$  siempre se cumple.

Una matriz con un número de condición grande se dice que está mal condicionada. Para una matriz  $A$  mal condicionada habrá casos en los que la solución de un sistema  $Ax=b$  será muy sensible frente a pequeños cambios en el vector  $b$ . Dicho de otro modo, para lograr una cierta precisión en la determinación de  $x$ , requerimos una precisión significativamente mayor de  $b$ . Si el número de condición de  $A$  es de tamaño moderado se dice que la matriz está bien condicionada.

En vez de tomar una matriz arbitraria  $S$ , se supondrá que la matriz de descomposición  $Q$  simétrica y definida positiva se puede factorizar de modo que

$$Q^{-1} = SS^T$$

$S$  matriz no singular

$Q$  matriz de descomposición simétrica y positiva.

Luego se reescribirá el algoritmo del procedimiento de gradiente conjugada utilizando las expresiones anteriores.

El algoritmo de gradiente conjugada se puede escribir para el sistema preconditionado como sigue:

$$\hat{r}_0 = \hat{p}_0 = \hat{b} - \hat{A}_0 \hat{x}_0$$

para:  $k=0,1,2,\dots,n-1$

$$\hat{q}_k = A\hat{p}_k$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}{(\hat{p}_k, \hat{q}_k)}$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \hat{\alpha}_k \hat{p}_k$$

$$\hat{r}_{k+1} = \hat{r}_k - \hat{\alpha}_k \hat{q}_k$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{(\hat{r}_{k+1}, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}$$

$$\hat{p}_{k+1} = \hat{r}_{k+1} + \hat{\beta}_k \hat{p}_k$$

luego se reescriben los términos anteriores usando los originales de gradiente conjugada:

$$\hat{x}_k = S^{-1} x_k$$

$$\hat{p}_k = S^{-1} p_k$$

para el vector residuo:

$$\hat{r}_k = \hat{b} - \hat{A}\hat{x}_k = S^T b - S^T A S S^{-1} x_k = S^T b - S^T A x_k$$

$$\tilde{r}_k = S^T r_k$$

Determinación de  $\hat{\alpha}_k$  :

Se conoce además que  $\hat{r}_k = S^T r_k$ ,  $\hat{p}_k = S^{-1} p_k$  y

$$\hat{A} = S^T A S :$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}{(\hat{p}_k, \hat{A}\hat{p}_k)} = \frac{(S^T r_k, S^T r_k)}{(S^{-1} p_k, S^T A S S^{-1} p_k)}$$

además  $Q^{-1} = S S^T$  :

$$\hat{\alpha}_k = \frac{r_k^T S S^T r_k}{p_k^T (S^{-1})^T S^T p_k} = \frac{r_k^T Q^{-1} r_k}{p_k^T A p_k} = \frac{(Q^{-1} r_k, r_k)}{(p_k, A p_k)}$$

luego se reemplaza:  $\tilde{r}_k = Q^{-1} r_k$   $q_k = A p_k$

obteniéndose:

$$\hat{\alpha}_k = \frac{(\tilde{r}_k, r_k)}{(p_k, q_k)}$$

Determinación de  $x_{k+1}$  :

Se conoce que:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \hat{\alpha}_k \hat{p}_k$$

y además que  $\hat{x} = S^{-1} x$  y  $\hat{p}_k = S^{-1} p_k$ , reemplazando:

$$S^{-1}x_{k+1} = S^{-1}x_k + \hat{\alpha}_k S^{-1}p_k$$

eliminando  $S^{-1}$ , se obtiene:

$$x_{k+1} = x_k + \hat{\alpha}_k p_k$$

Determinación de  $r_{k+1}$ :

$$\hat{r}_{k+1} = \hat{r}_k - \hat{\alpha}_k \hat{A} \hat{p}_k$$

pero  $\hat{r}_k = S^T r_k$ ,  $\hat{p}_k = S^{-1} p_k$  y  $\hat{A} = S^T A S$ :

$$S^T r_{k+1} = S^T r_k - \hat{\alpha}_k S^T A S S^{-1} p_k$$

premultiplicando por  $S^T$

$$r_{k+1} = r_k - \hat{\alpha}_k A p_k = r_k - \hat{\alpha}_k q_k$$

Determinación de  $\hat{\beta}_k$ :

se conoce que: 
$$\hat{\beta}_k = \frac{(\hat{r}_{k+1}, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}$$

también  $\hat{r}_k = S^T r_k$  y  $Q^{-1} = S S^T$ :

$$\hat{\beta}_k = \frac{(S^T r_{k+1}, S^T r_{k+1})}{(S^T r_k, S^T r_k)} = \frac{r_{k+1}^T S S^T r_{k+1}}{r_k^T S S^T r_k}$$

y que  $\tilde{r}_k = Q^{-1}r_k$ :

$$\hat{\beta}_k = \frac{(Q^{-1}r_{k+1}, r_{k+1})}{(Q^{-1}r_k, r_k)} = \frac{(\tilde{r}_{k+1}, r_{k+1})}{(\tilde{r}_k, r_k)}$$

Determinación de  $p_{k+1}$  :

se entiende que:

$$\hat{p}_{k+1} = \hat{r}_{k+1} + \hat{\beta}_k \hat{p}_k$$

y que  $\hat{p}_k = S^{-1}p_k$  y  $\hat{r}_k = S^T r_k$ :

$$S^{-1}p_{k+1} = S^T r_{k+1} + \hat{\beta}_k S^{-1}p_k$$

premultiplicando por  $S$  la expresión anterior se obtiene:

$$p_{k+1} = SS^T r_{k+1} + \hat{\beta}_k p_k$$

y además  $Q^{-1} = SS^T$

$$p_{k+1} = Q^{-1}r_{k+1} + \hat{\beta}_k p_k$$

también  $\tilde{r}_k = Q^{-1}r_k$ :

$$p_{k+1} = \tilde{r}_{k+1} + \hat{\beta}_k p_k$$

Luego, se escribirá el algoritmo del procedimiento de gradiente conjugada preconditionada, utilizando términos del sistema original:

$$r_0 = p_0 = b - A_0 x_0$$

$$\tilde{r}_0 = Q^{-1} r_0$$

para:  $k=0, 1, \dots, n$

$$q_k = A p_k$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{(\tilde{r}_k, r_k)}{(p_k, q_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \hat{\alpha}_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \hat{\alpha}_k q_k$$

$$\tilde{r}_{k+1} = Q^{-1} r_{k+1}$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{(\tilde{r}_{k+1}, r_{k+1})}{(\tilde{r}_k, r_k)}$$

$$p_{k+1} = \tilde{r}_{k+1} + \hat{\beta}_k p_k$$



## 2.3 Ecuaciones Algebraicas no lineales

Aunque, los sistemas de ecuaciones no lineales se han encontrado en problemas de análisis estructural durante mucho tiempo, no existe un método general para obtener soluciones exactas. Así pues, con la ayuda de algunos métodos numéricos iterativos será posible el obtener soluciones dentro de un margen predeterminado de exactitud.

El problema se puede expresar concisamente mediante un sistema de  $n$  ecuaciones independientes no lineales de la forma:

$$\begin{array}{l} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad \dots(1) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \end{array}$$

se requiere encontrar los valores de  $X$  que satisfacen las ecuaciones antes descritas, donde  $X$  es un vector independiente de  $n$  valores desconocidos:

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$$

En análisis estructural, los valores de  $X$  serán habitualmente desplazamientos de los nudos y las ecuaciones (1) representarán las relaciones globales de rigidez.

Se usará la notación:

$$f(X) = \{f_i(X)\}$$

para representar un sistema de ecuaciones no lineales, donde  $f$  será un vector de  $n \times 1$  vectores de ecuaciones. Así, las ecuaciones (1) pueden ser expresadas de esta manera:

$$f(X) = 0 \dots (2)$$

Una representación alterna del problema se puede obtener considerando la norma:

$$F(X) = \|f(X)\|^2 = f^T(X) f(X) = f_1^2(X) + \dots + f_n^2(X)$$

o bien:

$$F(X) = \sum_{i=1}^n f_i^2(X)$$

Si  $X$  y  $f_i(X)$  son reales, se tiene que para cualquier  $X$ ,  $F(X) \geq 0$ .

Esta expresión se vuelve una igualdad solamente si cada  $f_i(X) = 0$ , lo que ocurre solamente si  $X$  satisface (2).

Por lo expuesto, el problema de solucionar las ecuaciones no lineales (2) es equivalente al problema de encontrar los valores de  $X$  para los cuales la función  $F(X)$  es un mínimo.

Una función de la forma  $f(X) = C$ , donde  $C$  es una constante, describe una superficie. Así, las ecuaciones (1) producen una colección de  $n$  superficies y su intersección será el punto  $X^*$  la cual es la solución del sistema de ecuaciones. Pero, inicialmente el punto  $X^*$ , que es la solución exacta, se desconoce. La solución de las ecuaciones (1) corresponde a puntos en los que  $F(X)$  tiene un valor mínimo relativo. Ahora bien, la proporción en la cual  $F(X)$  cambia del punto  $X$  en la dirección de un vector unitario  $N$  está dada por la derivada direccional  $g \cdot N$ , donde  $g$  es la gradiente de  $F(X)$ :

$$g = \nabla F = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\}$$

La ecuación de una curva se da por ecuaciones paramétricas de la forma  $X = X(\lambda)$ , y los vectores  $dX(\lambda)/d\lambda$  son tangentes a la curva. Así, sobre una superficie  $F(X) = C$ , la relación de cambio de  $F(X)$  a lo

largo de una curva sobre la superficie es  $dF/d\lambda = 0 = g \cdot dX/d\lambda$ . De esto se obtiene que  $g$  es normal a la superficie.

Varios esquemas numéricos de solución usados para resolver ecuaciones no lineales comienzan con un estimado inicial  $X_0$  de la solución, llamado 'punto de prueba'. Se usa luego algún proceso para obtener una secuencia de valores, al término del cual, se converge a la solución del sistema de ecuaciones.

Los métodos numéricos que se consideran pueden ser divididos en 2 categorías: métodos secuenciales y métodos no secuenciales. En los métodos secuenciales, una secuencia de soluciones aproximadas es generada mediante un número fijo de operaciones. En los métodos no secuenciales, los puntos se escogen aleatoriamente. En los métodos secuenciales, el primer punto se elige arbitrariamente y un valor corregido se obtiene mediante formulas repetitivas de la forma:

$$X^{r+1} = X^r + \lambda^r D^r \dots (3)$$

Aquí  $X^r$  es el valor estimado de la solución en el  $r$ -ésimo paso del proceso, llamada la  $r$ -ésima iteración, y  $\lambda^r D^r$  es la corrección,  $D^r$  es un vector  $n$ -dimensional que determina la dirección de la corrección y  $\lambda^r$  un escalar que gobierna la magnitud de la corrección. De la expresión (3) es claro que  $X$  progresa hacia la solución a través de líneas rectas que conectan sucesivos puntos de prueba. Otras expresiones más elaboradas como cuadráticas, cúbicas o extrapolaciones de más alto orden se pueden obtener adicionando a la expresión (3) términos que contengan los puntos de prueba  $X^{r-1}, X^{r-2}, \dots$

Ciertos esquemas iterativos usados para determinar un mínimo de la función  $F(X)=f^T(X)f(X)$  se refieren a 'métodos de descenso'; si  $F(X^{r+1})\leq F(X^r)$ , entonces se desciende de un punto de prueba  $X_0$  a un punto  $X^*$  para el cual  $F(X^*)=0$  o  $F(X)$  se minimiza. Los más importantes 'métodos de descenso' se clasifican como 'métodos de gradiente' debido a que estos involucran alguna medida de la gradiente de  $F(X)$  como un indicador de la dirección hacia el mínimo. Los 'métodos de búsqueda secuencial', por otro lado, no desarrollan el cómputo de gradientes, por el contrario, estos métodos están estructurados para buscar valores de  $X$  que minimizan  $F(X)$  entre un número de puntos de prueba y luego, descartar puntos y generar nuevos. De esta manera, cada nueva búsqueda necesita desarrollar solamente los 'puntos de prueba' que están más cercanos al mínimo que los anteriores. A estos métodos se pueden adicionar algunos métodos iterativos generales que se basan en un ataque directo al sistema no lineal (1), o de sucesivas linealizaciones del mismo. Estos incluyen el poderoso método de Newton-Raphson y continúan métodos tales como el de la carga incremental.

Usando la expresión (3) como punto inicial, se desarrollarán métodos secuenciales diseñados para minimizar  $F(X)=f^T(X)f(X)$ . Estos métodos difieren en la elección de  $\lambda'$  y  $D'$ ; algunos son propiamente clasificados como métodos de descenso [ $F(X^{r+1})\leq F(X^r)$ ], mientras que otros involucran gradientes (o 'gradientes conjugadas') de  $F(X)$ . Puesto que la mayor parte de estas técnicas usan alguna aproximación de  $g$ , estos son generalmente estimados como métodos de gradiente.

### 2.3.1 Método de descenso más rápido

La dirección de máxima reducción de incremento de  $F(X)$  en el punto  $X$  será en la dirección de la gradiente  $g(X)$ . Consecuentemente  $-g(X)$  es la dirección de máximo descenso. De la relación (3),  $D' = -g(X')$  y el valor de  $\lambda'$  se obtendrá como sigue:

Se desarrollará el término  $F(X' + \lambda' D')$  mediante una expansión en series de Taylor

$$F(X' + \lambda' D') = F(X') + \lambda' \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(X')}{\partial X_i} D'_i + \frac{1}{2} (\lambda')^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F(X')}{\partial X_i \partial X_j} D'_i D'_j + \dots$$

Los valores  $\frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_i \partial X_j}$  son componentes de una matriz

simétrica, cuadrada y de orden  $n$ ,  $H$  llamada la matriz Hessiana

de  $F(X)$ :  $H_{ij} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_i \partial X_j}$ , que dentro del análisis estructural viene a

ser la Matriz de Rigideces tangente conocida, y además

$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F(X')}{\partial X_i} D'_i = g' \cdot D'$ , donde  $g' = \nabla F(X')$  es la gradiente de  $F(X)$

en  $X'$ . Así, se tomarán los términos hasta de segundo orden:

$$F(X' + \lambda' D') = F(X') + \lambda' g' \cdot D' + \frac{1}{2} (\lambda')^2 D'^T H D'$$

luego:

$$\frac{\partial F(X^r + \lambda D^r)}{\partial \lambda} = 0 = g^r \cdot D^r + \lambda D^{rT} H D^r$$

$$\lambda = -\frac{g^r \cdot D^r}{D^{rT} H D^r}$$

Así, para cada  $r$ , el vector  $X^{r+1} - X^r$  esta en la dirección del más rápido decremento en  $F(X)$ .

Según Oden [5], la solución existe y es convergente aún si  $F(X)$  es cuadrática, con derivadas continuas hasta de segundo orden y si la matriz Hessiana es definida positiva. Oden también menciona la posibilidad de que  $F(X)$  no sea cuadrática, indicando que el proceso puede aún converger hacia la solución.

### **2.3.2 Métodos de gradiente conjugada**

Los así llamados métodos de gradiente conjugada minimizan funciones cuadráticas de  $n$  variables en  $p$  iteraciones, donde  $p \leq n$ . Para demostrar estas ideas, se reescribirá la función  $H(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$  desarrollada en el acápite 2.2.2, pero utilizando otra notación:

$$F(X) = F_0 + \frac{1}{2}(X - X^*)^T H (X - X^*)$$

donde  $X^*$  es el punto en el cual  $F(X)$  es mínimo. Luego:

$$g(X) = \nabla F = H (X - X^*)$$

Como se indicó anteriormente  $X^{r+1} = X^r + \lambda^r D^r$ . Se supondrá que las direcciones sucesivas de los vectores  $D^0, D^1, \dots, D^n$  son linealmente independientes y además que  $\sigma^r = \lambda^r D^r$ . Entonces:

$$\begin{aligned} X^r &= X^{r-1} + \sigma^{r-1} \\ &= X^{r-2} + \sigma^{r-2} + \sigma^{r-1} \\ &= X^{r-q} + \sigma^{r-q} + \sigma^{r-q+1} + \dots + \sigma^{r-1} \end{aligned}$$

o, para la  $n$ -ésima iteración:

$$X^n = X^{r+1} + \sum_{q=r+1}^{n-1} \sigma^q$$

Así:

$$g^n = H(X^n - X^*) = H X^{r+1} + H \sum_{q=r+1}^{n-1} \sigma^q - H X^*$$

y debido a que  $HX^* = 0$  y  $HX^{r+1} = g^{r+1}$ , se obtiene:

$$g^n = g^{r+1} + \sum_{q=r+1}^{n-1} \lambda^q H D^q$$

Multiplicando la expresión anterior por  $D^r$ :

$$g^{n^T} D^r = g^{(r+1)^T} D^r + \sum_{q=r+1}^{n-1} \lambda^q D^{q^T} H D^r$$



Puesto que los vectores  $D^0, D^1, \dots, D^{n-1}$  son  $H$ -normales ( $D^q{}^T H D^r = 0, q \neq r$ ) la expresión resulta:

$$g^{nT} D^r = 0$$

para todo  $r$ . Como los vectores  $D^0, D^1, \dots, D^{n-1}$  son linealmente independientes entonces  $g^n = 0$ .

Por lo tanto:  $H (X^n - X^*) = g^n = 0$  y ya que  $H$  es definida positiva,  $X^n = X^*$ .

En conclusión, el mínimo se encuentra después de  $n$  iteraciones o antes si, en cualquier ciclo, el valor de  $\lambda^n$  resulta cero. El requerimiento básico del método de gradiente conjugada se puede satisfacer de diferentes maneras, una de ellas es:

$$D^{r+1} = -g^{r+1} + \beta^r D^r$$

donde  $\beta^r$  se selecciona de modo tal que se consiga la  $H$ -normalidad esto es:

$$D^{r+1T} H D^r = -g^{r+1T} H D^r + \beta^r D^{rT} H D^r = 0$$

entonces:

$$\beta^r = \frac{g^{r+1T} H D^r}{D^{rT} H D^r}$$

Los vectores  $D^f$  obtenidos de esta manera son linealmente independientes y  $H$ -normales.

Según Oden [5],  $F(X)$  no es siempre una función cuadrática, como se supuso para el presente desarrollo, por lo que la matriz hessiana  $H$  (matriz de rigidez en la mayor parte de los procedimientos de análisis estructural), debe ser determinada para cada ciclo. Indica también Oden [5], que las conclusiones obtenidas concernientes a la convergencia en  $n$  iteraciones no son estrictamente válidas, pero a pesar de esto, se espera una convergencia relativamente rápida.

---

# CAPÍTULO III

---

## APLICACIONES AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL LINEAL

### **3.1 Introducción**

Se elaboraron programas en lenguaje C implementando el procedimiento de gradiente conjugada y gradiente conjugada precondicionada para pórticos planos (2 dimensiones) y espaciales (3 dimensiones). Según el algoritmo que se presentará en el acápite 3.2, el proceso debería interrumpirse cuando el error es menor que un valor preestablecido. Pero, se ha podido encontrar que otra condición detendría el proceso algunos ciclos antes. Ésta trata sobre la convergencia de la Energía Potencial del sistema, es decir, el procedimiento se daría por terminado al alcanzarse un cierto error relativo en términos de la Energía Potencial. Por supuesto, este error relativo está bajo decisión del usuario. Se podrá advertir, dentro de los ejemplos presentados, que los valores de desplazamientos en los nudos y fuerzas en los elementos tienen errores mucho menores que los habitualmente considerados aceptables para resultados de ingeniería.

## **3.2 Implementación de los procedimientos**

### **3.2.1 Introducción**

Los procedimientos de análisis de estructuras hiperestáticas pueden clasificarse en dos grandes grupos: Los métodos de Flexibilidad (o fuerzas) desarrollados a mediados del siglo XIX, en los que las incógnitas son fuerzas redundantes, y los métodos de Rigideces (desplazamientos) propuestos desde inicios del siglo XX, estos últimos son los que predominan en los programas de cómputo. En la presente tesis se tratará del Método de Rigideces. Este tiene como objetivo inicial el obtener los desplazamientos de ciertos puntos, llamados nudos, que en su caso más general presentan 3 componentes de traslación y 3 componentes de giro para luego determinar las fuerzas internas en los extremos de los elementos de una estructura. Una estructura se define por su geometría y por propiedades físicas tales como  $E$  (módulo de elasticidad),  $A$  (área) e  $I$  (momento de

inercia) de sus elementos. Los desplazamientos se determinan mediante la solución de un sistema de ecuaciones:

$$K u = f \dots (1)$$

Donde: En este caso se ha preferido denominar  $K$  a la matriz de coeficientes que en este caso representa la matriz de rigidez de la estructura. Es una matriz cuadrada y simétrica de orden  $n$  ( $n$  número de grados de libertad no restringidos),  $u$  el vector desplazamientos de los nudos y  $f$  el vector de fuerzas. Un alto porcentaje del trabajo en el método matricial de rigidez está dirigido al ensamblaje de la matriz de rigidez  $K$  de la estructura. La parte restante del método tiene que ver con la solución de las ecuaciones simultáneas. La matriz de rigidez  $K$  de la estructura en la ecuación (1) se forma por la contribución de las matrices de rigidez de cada elemento individual que conforma la estructura. El procedimiento matricial para ensamblarla se puede encontrar en cualquier texto que se refiera al Análisis Estructural con matrices.

El método de solución de ecuaciones más usado en los programas de cómputo, es el de eliminación Gaussiana. Su implementación se realiza usando las propiedades de simetría y definición positiva de la matriz de rigidez  $K$ . Uno de los problemas principales en la programación de este método es el uso eficiente de la memoria en la computadora.

Los algoritmos iterativos presentados aquí, de gradiente conjugada y gradiente conjugada preconditionada, presentan ventajas con respecto a esos tradicionales, además de que su implementación en un programa de cómputo es muy simple.

### 3.2.2 Gradiente Conjugada

Para poder explicar con mayor claridad la implementación del procedimiento de gradiente conjugada, es necesario recordar su algoritmo:

Dado  $u_0$ , se determina  $r_0 = p_0 = f - Ku_0$

Para:  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

$$q_k = K p_k \quad \dots (2)$$

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, q_k)} \quad \dots (3)$$

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k \quad \dots (4)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k \quad \dots (5)$$

$$\text{si } (r^T r) < \epsilon \Rightarrow \text{terminar proceso} \quad \dots (6)$$

$$\beta_k = \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)} \quad \dots (7)$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k \quad \dots (8)$$

donde  $u$  es el vector de desplazamientos,  $r$  es el vector de residuos y  $p$  el vector de búsqueda.

En el método de gradiente conjugada las direcciones de búsqueda  $p$  se eligen de una en una en el proceso iterativo y forma un sistema  $K$ -ortogonal.

El primer paso es calcular un cierto error permisible (tolerancia), el cual servirá para detener el ciclo de iteraciones.

La tolerancia se obtiene como:

$$\sqrt{(r^T r)} \leq \delta \sqrt{(f^T f)}$$

donde  $r$  es el vector columna indicado en el paso (5),  $f$  el vector de fuerzas indicado en (1) y  $\delta$  un error menor que la unidad que servirá para medir la precisión deseada. En el listado del presente programa el valor de  $\delta$  es igual a  $10^{-6}$ .

Luego, se escoge un vector inicial de aproximación  $u_0$ , que generalmente es igual a  $0$ .

El siguiente paso será obtener los valores de las fuerzas en los elementos, debido a los desplazamientos prescritos indicados en los grados de libertad restringidos. Estas fuerzas serán restadas de las iniciales impuestas al sistema. Si los desplazamientos descritos fuesen iguales a cero,  $u_0=p_0=0$  y  $r_0=f$ . Luego se ingresa al ciclo de iteración.

El paso (2), en el que se obtiene un vector  $q$  como producto de la matriz de rigidez y el vector  $p$ , es el que demanda la mayor parte de las operaciones. Si se obtuviera este producto usando la matriz de rigidez de la estructura totalmente ensamblada, los requerimientos de memoria serían similares a

los de la eliminación gaussiana y el tiempo de cómputo sería por lo general mucho mayor que el de ese proceso, en otras palabras, no sería conveniente la situación del método de eliminación por aquel de gradiente conjugada.

El número de operaciones se reduce muy significativamente al evaluar  $q$  como un ensamblaje de resultados obtenidos para cada elemento por separado, es decir, multiplicando las relativamente pequeñas matrices de rigidez de los elementos por el correspondiente subconjunto de  $p$ . El ensamblaje de las contribuciones de cada elemento se hace sobre la base de "códigos de ensamble" que establecen la correspondencia entre los grados de libertad de la estructura.

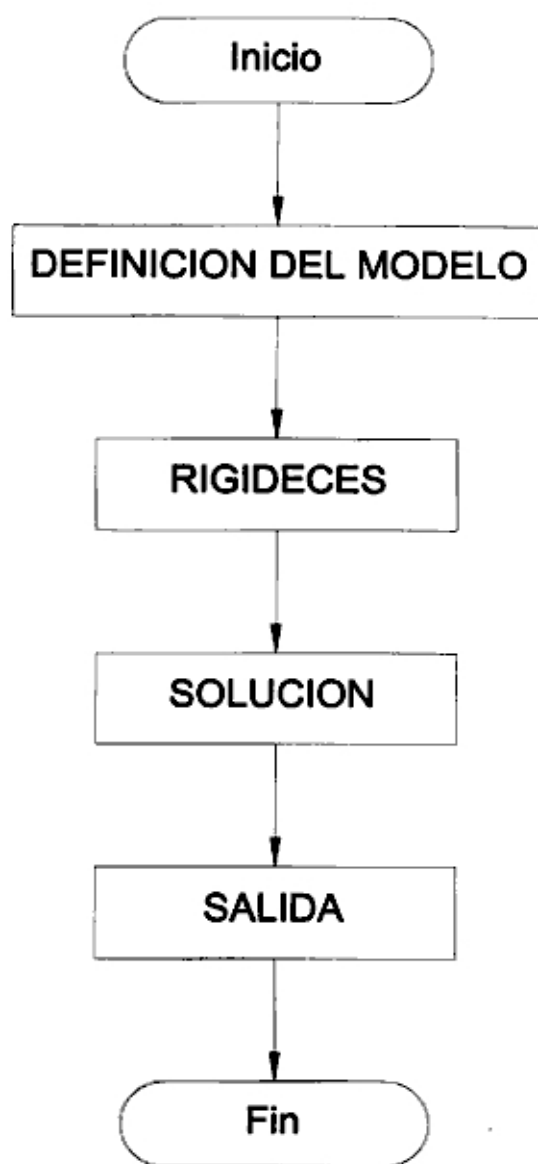
En el paso (3) se calcula el valor de  $\alpha$ , que viene a ser un escalar que multiplica al vector  $p$  para obtener, en el paso (4), el valor corregido de  $u$  y en el paso (5); el nuevo vector  $r$ . Debe notarse que este vector residuo va decreciendo debido a las continuas sustracciones, indicador que manifiesta que el error tiende a desaparecer conforme se realizan las iteraciones. Solamente se computan los elementos pertenecientes a los grados de libertad no restringidos de los vectores  $u$  y  $r$ .

Lo siguiente es verificar si se ha producido la convergencia; cosa que se consigue usando la tolerancia calculada inicialmente.



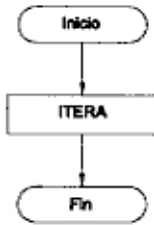
Luego, el vector  $p$  se produce en el paso (8) usando los residuos formados en el paso (5) y el escalar  $\beta$ . Cabe indicar que los vectores  $p$  así formados son mutuamente  $K$ -ortogonales.

La ejecución del algoritmo en una computadora requiere lugar de almacenamiento solamente para cuatro vectores como son  $u$ ,  $r$ ,  $p$  y  $q$  además no se necesitan conservar en memoria los vectores previos, de modo que cada uno de estos se actualiza en el transcurso del procedimiento. El trabajo en cada iteración es muy modesto. Su implementación en un programa cómputo es sencilla. Para una mejor comprensión de la implementación se presentará el diagrama de flujo del programa que usa el procedimiento de gradiente conjugada:

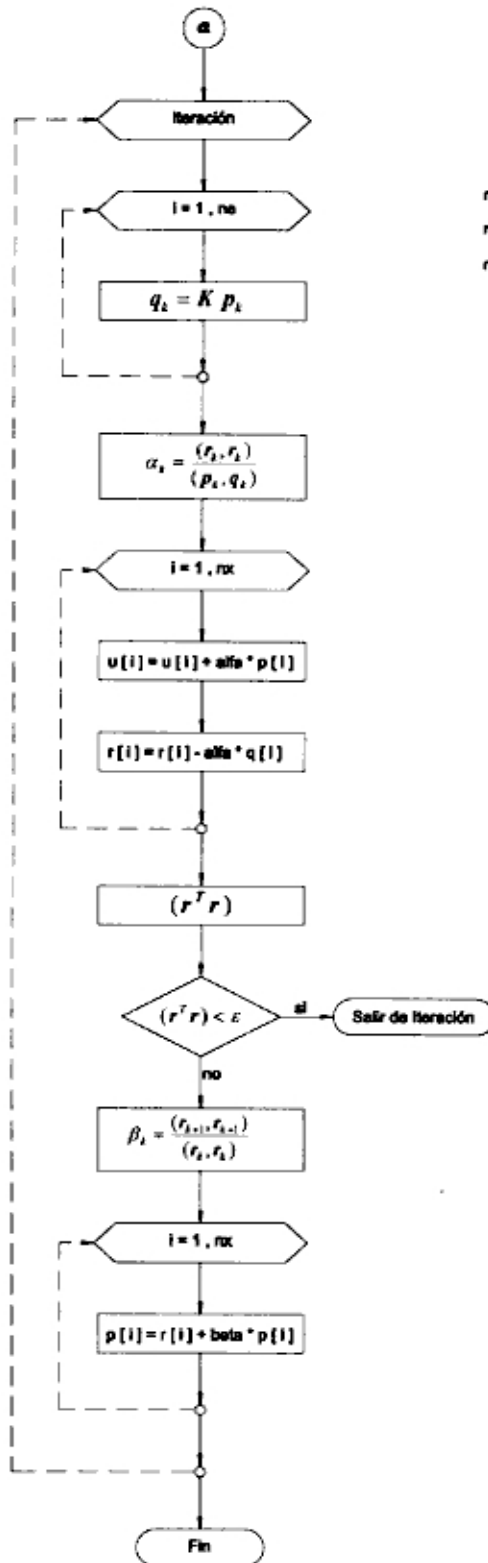
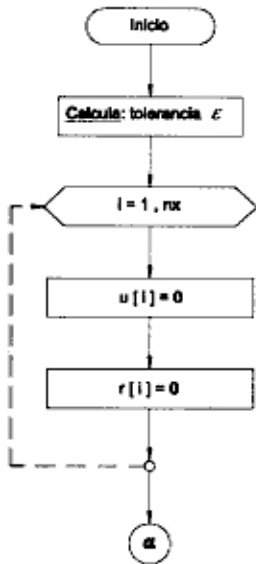


## PROGRAMA PRINCIPAL

**SOLUCION**

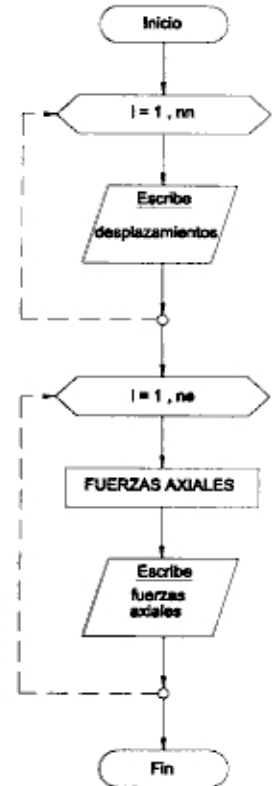


**ITERA**



$n_x$  → Número de grados de libertad no restringidos  
 $n_e$  → Número de elementos de la estructura  
 $n_n$  → Número de nudos de la estructura

**SALIDA**



### 3.2.3 Gradiente Conjugada Precondicionada

Para este caso nuevamente se escribirá el algoritmo de la gradiente conjugada precondicionada.

$$r_0 = p_0 = f - Ku_0 \quad \dots (9)$$

$$\tilde{r}_0 = Q^{-1}r_0 \quad \dots (10)$$

para:  $i=0,1,\dots,n$

$$q_k = K p_k \quad \dots (11)$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{(\tilde{r}_k, r_k)}{(p_k, q_k)} \quad \dots (12)$$

$$x_{k+1} = x_k + \hat{\alpha}_k p_k \quad \dots (13)$$

$$r_{k+1} = r_k - \hat{\alpha}_k q_k \quad \dots (14)$$

$$\tilde{r}_{k+1} = Q^{-1}r_{k+1} \quad \dots (15)$$

$$\text{si } (\tilde{r}_{k+1}^T r_{k+1}) < \varepsilon_1 \quad \text{y} \quad (r_{k+1}^T r_{k+1}) < \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \text{terminar proceso} \quad \dots (16)$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{(\tilde{r}_{k+1}, r_{k+1})}{(\tilde{r}_k, r_k)} \quad \dots (17)$$

$$p_{k+1} = \tilde{r}_{k+1} + \hat{\beta}_k p_k \quad \dots (18)$$

El algoritmo de la gradiente conjugada precondicionada es muy similar al de gradiente conjugada sin precondicionar y por consiguiente su implementación solamente tendrá algunas variantes que se explicarán aquí.

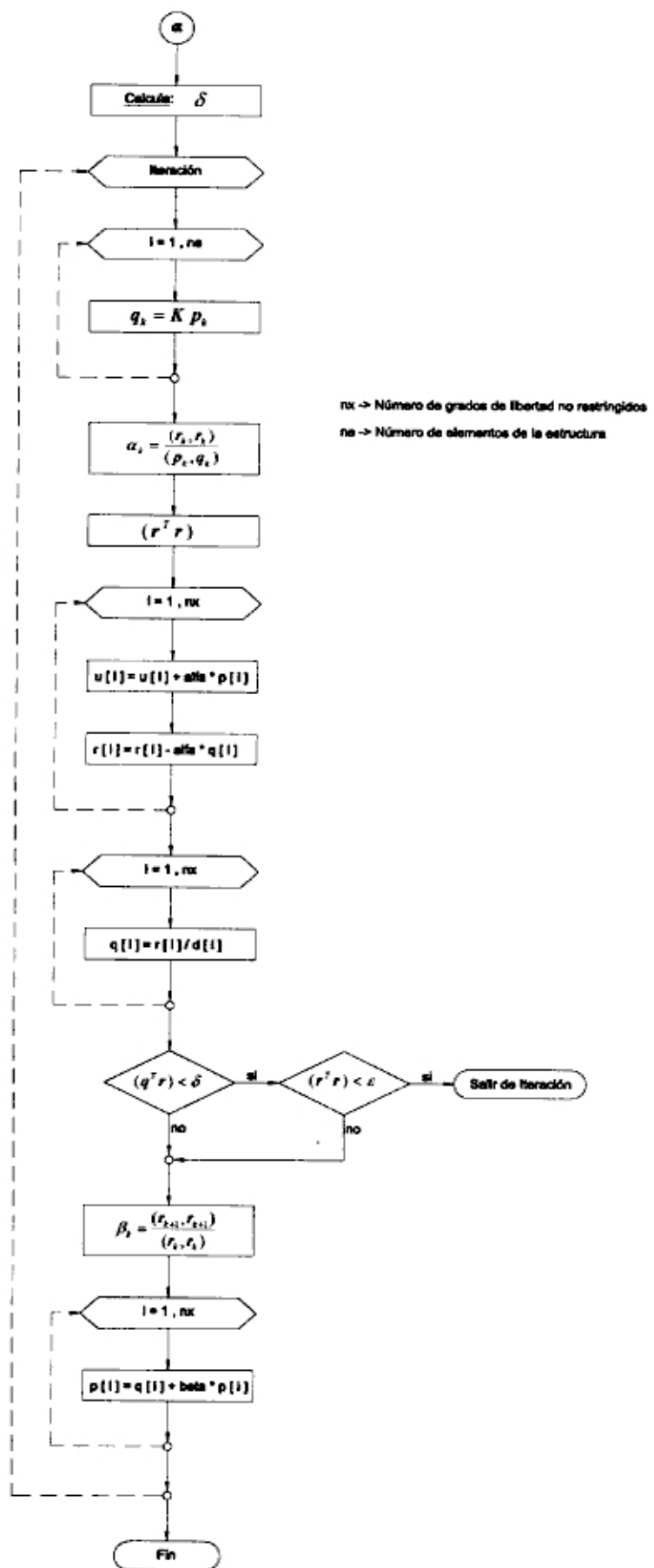
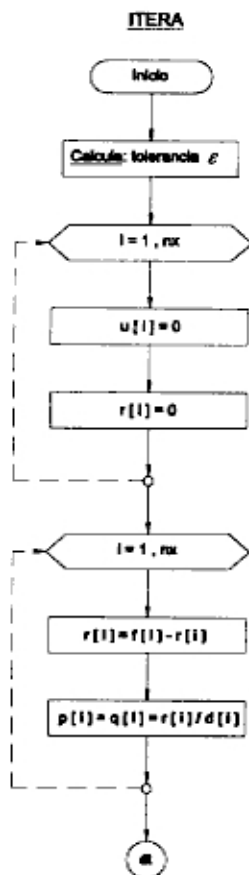
Una de las pocas diferencias se presenta con la matriz de descomposición  $Q$ , que debe ser seleccionada de modo que el sistema indicado en los pasos (10) y (15) sea fácil de resolver. Si  $Q$  es una matriz diagonal, esta condición se cumple sin más, aún cuando algunos otros preconditionadores, más elaborados podrían conducir a una convergencia más rápida. En la medida

en que  $Q^j$  resulta ser una mejor aproximación de  $K$ , el sistema preconditionado se vuelve mejor condicionado y la convergencia del método iterativo se da en menos pasos. Dentro del programa, el vector  $Q$  es utilizado dos veces, la primera fuera del ciclo de iteración, al momento de ingresar un valor inicial al vector  $u$ , y la segunda dentro del ciclo. Se puede observar que el vector  $q$  se optimiza utilizándolo como el nuevo vector  $u$  al momento de realizar el preconditionamiento.

Cabe observar también la diferencia en el cálculo del vector  $p$ , cambio que se debe al mismo procedimiento de gradiente conjugada preconditionada. Para mayores detalles revisar las ecuaciones algebraicas del método.

La convergencia se logra en el momento que el paso (16) se cumple. Existen 2 valores de tolerancia como son  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  esto se debe a que el proceso iterativo se puede interrumpir, ya sea antes o después de lo que debería hacerlo, cuando  $(\tilde{r}^T r)$  alcance la precisión especificada. Por consiguiente, se debe realizar como control una evaluación adicional dada por  $(r^T r)$ , una vez que el criterio anterior indique que sí hay convergencia.

A continuación se presenta el diagrama de flujo del procedimiento de gradiente conjugada preconditionada que, como se ha indicado anteriormente, no presenta cambios muy radicales respecto al de gradiente conjugada:



### **3.3 Aplicación a pórticos planos**

#### **3.3.1 Introducción**

Se confeccionaron 32 ejemplos de pórticos planos con diversas relaciones de rigidez entre vigas y columnas. En la Tabla III.1 se muestra los casos asignados a los ejemplos según sus características y en la Figura III.1 su representación física.

El propósito de emplear varias relaciones de inercia, radica en el hecho de observar el comportamiento de los procedimientos de gradiente conjugada y gradiente conjugada precondicionada con estas variantes.

#### **3.3.2 Resultados**

Los ejemplos indicados en el punto anterior se probaron en los programas de gradiente conjugada y gradiente conjugada

precondicionada. Cada uno de ellos presenta una variante en la condición de interrumpir el proceso, el primero usa el error del vector de residuo y el otro la energía potencial del sistema.

La Tabla III.2, muestra los resultados en tiempo (milisegundos) para las diversas variedades de pórticos planos y los grados de libertad correspondiente pertenecientes a los ejemplos. Dentro de esta tabla se muestra la comparación entre los procedimientos de gradiente conjugada, gradiente conjugada preconditionada y el método de eliminación gaussiana (representado por el programa PF). En esta tabla, la condición para interrumpir el procedimiento es el error del vector residuo.

La Tabla III.3 muestra el número de grados de libertad y el número de iteraciones usados, también para los ejemplos indicados. Aquí nuevamente el error del vector residuo es el que se consideró como medida para decidir cuando detener el proceso.

La Tabla III.4 presenta la variante de Energía Potencial, para la interrupción del algoritmo, se reproducen los tiempos en milisegundos que demandan los ejemplos para gradiente conjugada y gradiente conjugada preconditionada.

Por último, la Tabla III.5 muestra el número de iteraciones necesarias para llegar a la precisión deseada. Aquí nuevamente se usó la Energía Potencial del sistema para cortar el proceso.



Las Tablas III.2 y III.4 en la que se transcriben los tiempos se expresan en milisegundos (ms), debido a que en algunos ejemplos los tiempos de ejecución eran tan pequeños que éstas eran prácticamente cero.

Todos los análisis se realizaron para una precisión de  $10^{-6}$ , en el caso de usar la medida de error con el vector residuo; y  $10^{-7}$  para el error en la Energía Potencial.

Cabe anotar algunos puntos saltantes acerca de estas tablas, como por ejemplo: en la Tabla III.2 se puede observar que en algunos casos, los tiempos son menores para el programa PF comparados con los de GC (gradiente conjugada) y GCP (gradiente conjugada preconditionada); pero, conforme el número de grados de libertad va en aumento, los tiempos sufren un cambio, son mucho menores tanto para GC como para GCP. Además se puede reparar en que los tiempos de ejecución entre GC y GCP varían dependiendo del problema tratado. Para la Tabla III.3 donde se indican los ciclos de iteración utilizados, estos son menores que el tamaño de tendría la matriz de rigidez del sistema, es decir se cumple lo establecido por la parte teórica, referencia [2]. Para la Tabla III.4, ya se hace uso del criterio de la Energía Potencial del sistema y como se puede ver, su aplicación refleja que los tiempos comparados con los de GC y GCP casi son los mismos y en algunos casos mayores. Al revisar todas las tablas, se observa que aunque el número de iteraciones es menor para los programas que usan E.P. GC y E.P. GCP, los tiempos utilizados no cumplen tal proporción.

El Gráfico III.1 muestra las curvas de tendencia, número de grados de libertad vs. tiempo, que producen el programa PF, y los programas que utilizan como solución el método GC, GCP, E.P. GC y E.P. GCP. Aquí se puede contemplar mejor las diferencias existentes entre los diversos métodos. Nótese como el programa PF produce tiempos mucho mayores cuando se incrementan los grados de libertad, su tendencia es a formar una curva cúbica, mientras que los otros procedimientos producen una curva parabólica.

La Tabla III.6 y III.7 presenta dos ejemplos de los utilizados hasta ahora, donde se muestran, en valores, la convergencia de la Energía Potencial del sistema tanto para el procedimiento de GC y el de GCP. Los Gráficos III.2 y III.3 presentan estos mismos resultados mediante un gráfico. Es importante señalar, que para estos ejemplos, si se utilizase como medida el vector residuo, el número de iteraciones sería:

Caso	Número de iteraciones			
	Vector Residuo		Energía Potencial	
	GC	GCP	GC (E.P.)	GCP (E.P.)
1p4x10	128	78	116	77
4p4x10	129	88	118	73

La tabla precedente ratifica que el número de iteraciones disminuye al usar el método de Energía Potencial en lugar del método del vector residuo.

**TABLA III.1** Casos de pórticos planos a analizar

Caso	Número de Vanos	Número de Niveles	Relación de Rigideces Viga / Columna
1p1x1	1	1	1
2p1x1	1	1	2
4p1x1	1	1	4
8p1x1	1	1	8
1p4x1	4	1	1
2p4x1	4	1	2
4p4x1	4	1	4
8p4x1	4	1	8
1p1x3	1	3	1
2p1x3	1	3	2
4p1x3	1	3	4
8p1x3	1	3	8
1p4x3	4	3	1
2p4x3	4	3	2
4p4x3	4	3	4
8p4x3	4	3	8
1p1x7	1	7	1
2p1x7	1	7	2
4p1x7	1	7	4
8p1x7	1	7	8
1p4x7	4	7	1
2p4x7	4	7	2
4p4x7	4	7	4
8p4x7	4	7	8
1p1x10	1	10	1
2p1x10	1	10	2
4p1x10	1	10	4
8p1x10	1	10	8
1p4x10	4	10	1
2p4x10	4	10	2
4p4x10	4	10	4
8p4x10	4	10	8

**Figura III.1 Esquemas de pórticos bidimensionales analizados**

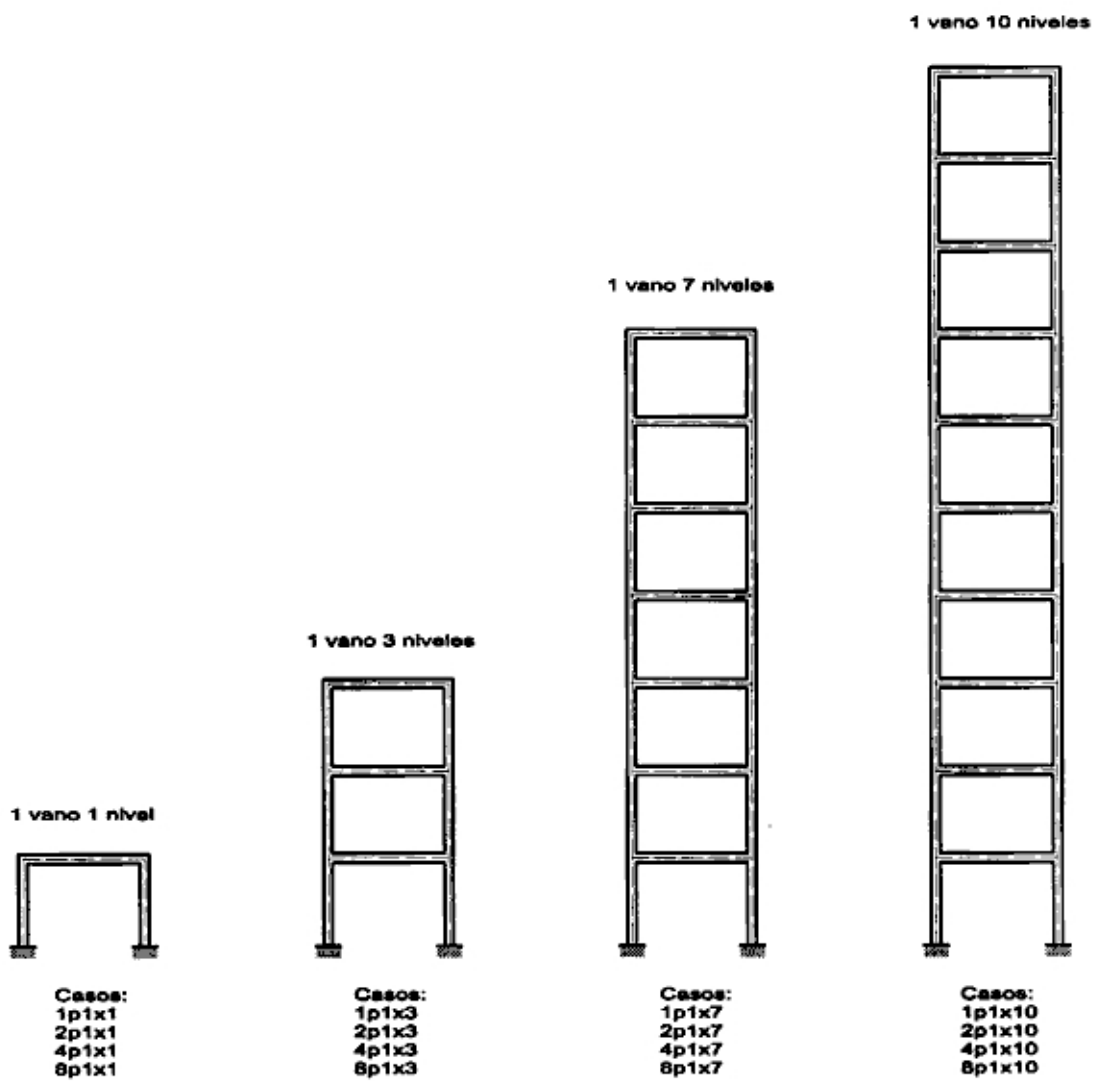
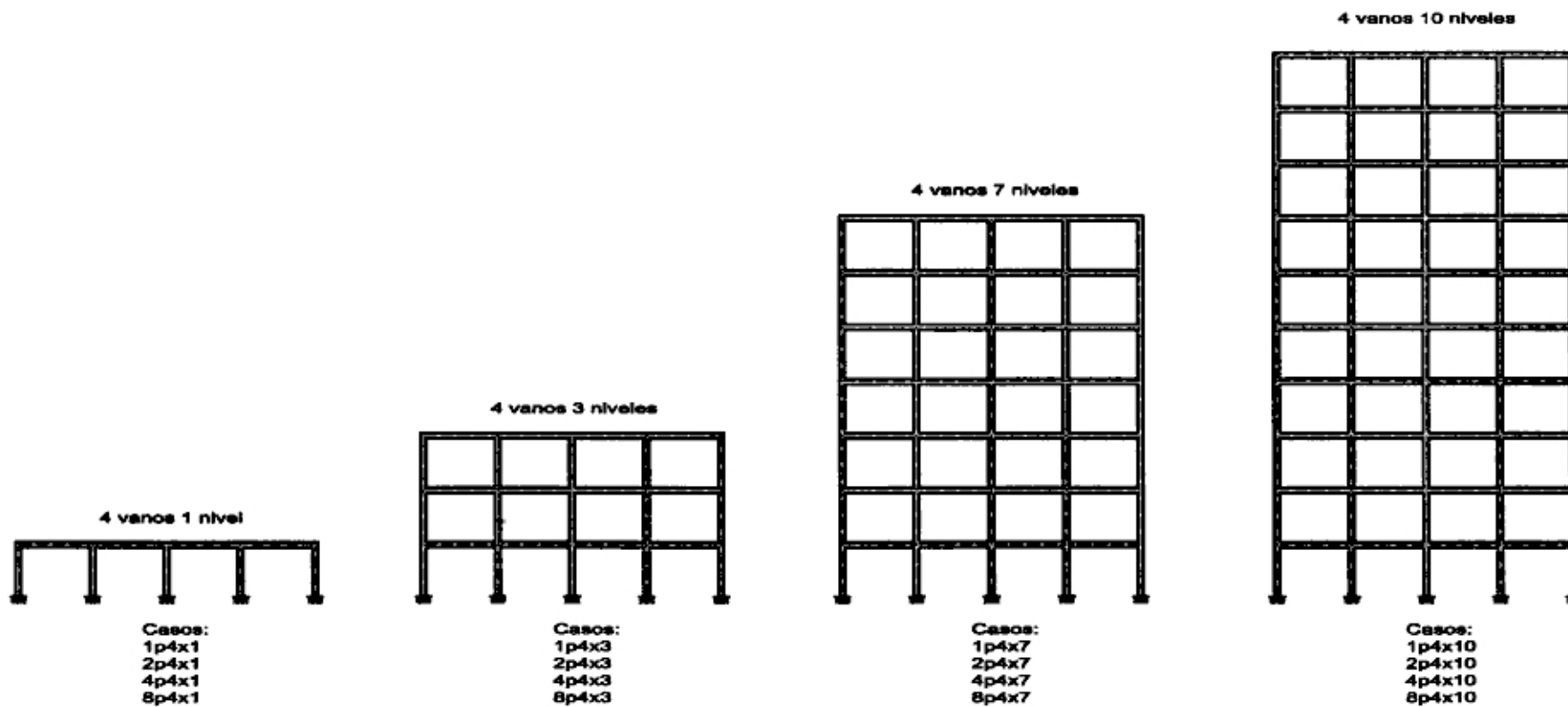


Figura III.1 Esquemas de pórticos bidimensionales analizados (cont.)



**TABLA III.2** Tiempo requerido en milisegundos (ms) para el análisis de pórticos planos utilizando los métodos de Gradiente Conjugada (GC), Gradiente Conjugada Precondicionada (GCP) y Eliminación Gaussiana (PF) con error relativo ( $1 \times 10^{-6}$ ) en la norma del residuo

Pórtico Plano caso	Número de grados de libertad	Ancho de semibanda	Tiempo (ms)		
			GC	GCP	PF
1p1x1	6	6	0.22	0.33	0.17
2p1x1	6	6	0.11	0.06	0.17
4p1x1	6	6	0.00	0.11	0.17
8p1x1	6	6	0.22	0.11	0.17
1p1x3	18	9	0.60	0.66	0.82
2p1x3	18	9	0.61	0.50	0.83
4p1x3	18	9	0.43	0.71	0.82
8p1x3	18	9	0.49	0.66	0.77
1p4x1	24	9	0.66	0.66	0.44
2p4x1	24	9	0.66	0.38	0.49
4p4x1	24	9	0.55	0.44	0.50
8p4x1	24	9	0.39	0.66	0.50
1p1x7	42	9	0.80	1.27	2.20
2p1x7	42	9	1.04	1.15	2.14
4p1x7	42	9	1.10	1.37	2.14
8p1x7	42	9	0.77	1.32	2.19
1p4x3	54	15	1.15	0.82	3.41
2p4x3	54	15	0.72	1.37	3.29
4p4x3	54	15	1.10	1.37	3.40
8p4x3	54	15	1.21	0.99	3.41
1p1x10	60	9	1.82	2.53	3.18
2p1x10	60	9	1.81	2.86	3.24
4p1x10	60	9	1.88	2.58	3.24
8p1x10	60	9	1.75	2.96	3.30
1p4x7	114	18	7.09	6.37	15.21
2p4x7	114	18	6.42	6.05	14.67
4p4x7	114	18	6.70	6.53	14.94
8p4x7	114	18	6.70	7.58	15.21
1p4x10	159	18	12.63	11.10	22.80
2p4x10	159	18	11.80	11.26	22.30
4p4x10	159	18	12.36	12.31	22.57
8p4x10	159	18	11.20	12.30	22.96

**TABLA III.3**

Número de iteraciones requeridas para el análisis de pórticos planos utilizando los métodos de Gradiente Conjugada (GC) y Gradiente Conjugada Precondicionada (GCP) con error relativo ( $1 \times 10^{-6}$ ) en la norma del residuo

Pórtico Plano caso	Número de grados de libertad	Número de iteraciones	
		GC	GCP
1p1x1	6	3	4
2p1x1	6	3	4
4p1x1	6	3	4
8p1x1	6	3	4
1p1x3	18	9	10
2p1x3	18	9	10
4p1x3	18	9	10
8p1x3	18	9	10
1p4x1	24	8	9
2p4x1	24	8	9
4p4x1	24	8	9
8p4x1	24	8	9
1p1x7	42	28	26
2p1x7	42	28	27
4p1x7	42	26	28
8p1x7	42	26	29
1p4x3	54	28	23
2p4x3	54	28	24
4p4x3	54	29	24
8p4x3	54	28	24
1p1x10	60	46	45
2p1x10	60	45	44
4p1x10	60	44	44
8p1x10	60	46	44
1p4x7	114	84	51
2p4x7	114	86	53
4p4x7	114	82	54
8p4x7	114	78	54
1p4x10	159	128	78
2p4x10	159	127	82
4p4x10	159	129	88
8p4x10	159	122	94

**TABLA III.4**

Tiempo requerido en milisegundos (ms) para el análisis de pórticos planos utilizando los métodos de Gradiente Conjugada (GC) y Gradiente Conjugada Precondicionada (GCP) con error relativo en la Energía Potencial menor a  $1 \times 10^{-7}$

Pórtico Plano caso	Número de grados de libertad	Tiempo (ms)	
		GC	GCP
1p1x1	6	0.39	0.11
2p1x1	6	0.11	0.33
4p1x1	6	0.50	0.22
8p1x1	6	0.22	0.33
1p1x3	18	0.60	0.55
2p1x3	18	0.28	0.11
4p1x3	18	0.44	0.71
8p1x3	18	0.55	0.66
1p4x1	24	0.60	0.60
2p4x1	24	0.38	0.22
4p4x1	24	0.66	0.39
8p4x1	24	0.38	0.66
1p1x7	42	1.27	1.15
2p1x7	42	1.21	0.93
4p1x7	42	1.21	1.15
8p1x7	42	0.99	0.77
1p4x3	54	1.26	1.15
2p4x3	54	1.26	1.21
4p4x3	54	0.98	1.27
8p4x3	54	1.27	1.15
1p1x10	60	2.25	2.14
2p1x10	60	2.05	2.03
4p1x10	60	1.65	1.98
8p1x10	60	1.93	2.31
1p4x7	114	7.58	6.42
2p4x7	114	6.86	5.61
4p4x7	114	7.58	6.21
8p4x7	114	8.45	6.75
1p4x10	159	13.40	10.38
2p4x10	159	13.67	9.78
4p4x10	159	14.50	10.87
8p4x10	159	12.97	10.54

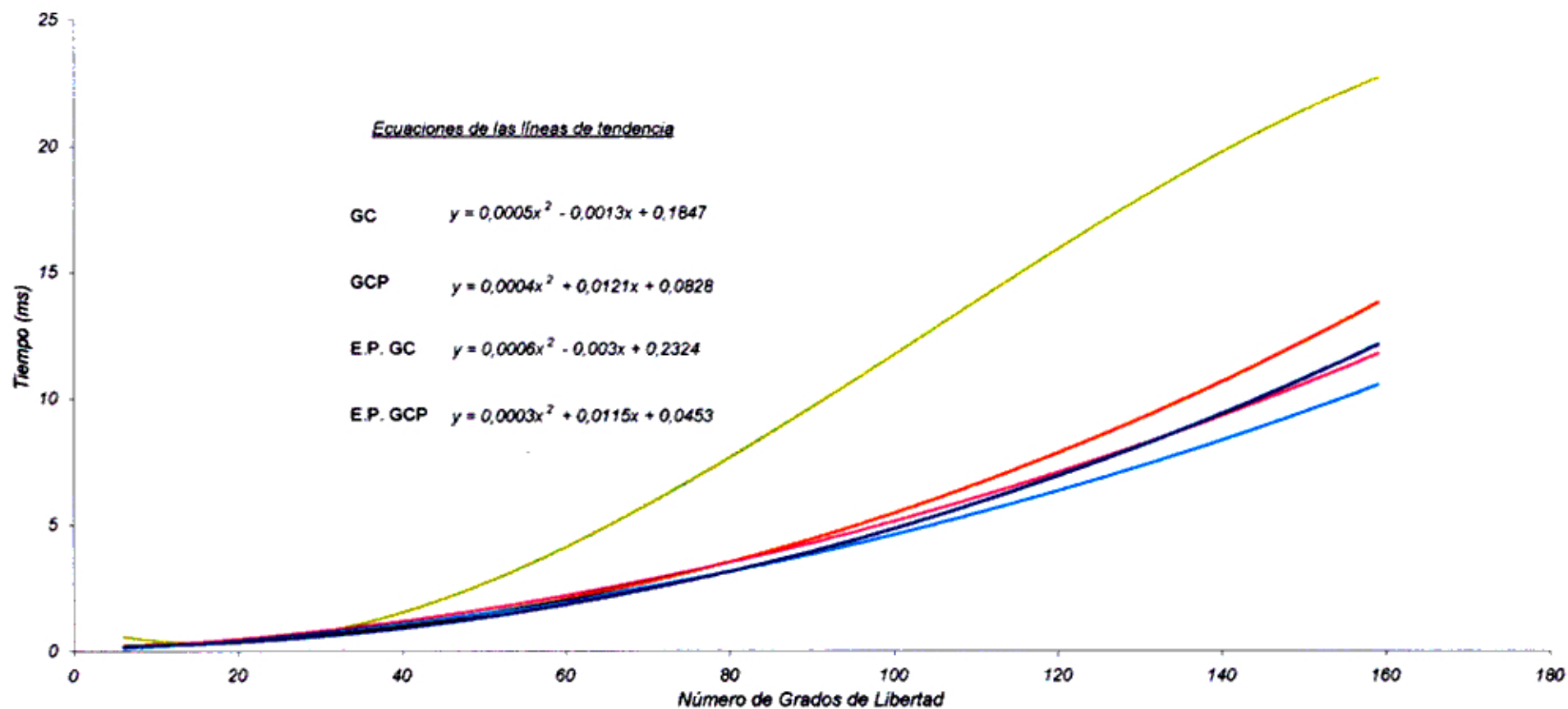


**TABLA III.5** Número de iteraciones requeridas para el análisis de pórticos planos utilizando los métodos de Gradiente Conjugada (GC) y Gradiente Conjugada Precondicionada (GCP) con error relativo en la Energía Potencial menor a  $1 \times 10^{-7}$

Pórtico Plano caso	Número de grados de libertad	Número de iteraciones	
		GC	GCP
1p1x1	6	3	4
2p1x1	6	3	4
4p1x1	6	3	4
8p1x1	6	3	4
1p1x3	18	9	10
2p1x3	18	9	10
4p1x3	18	9	10
8p1x3	18	9	10
1p4x1	24	8	7
2p4x1	24	8	7
4p4x1	24	8	7
8p4x1	24	8	7
1p1x7	42	27	23
2p1x7	42	27	23
4p1x7	42	26	23
8p1x7	42	25	24
1p4x3	54	23	21
2p4x3	54	24	21
4p4x3	54	26	22
8p4x3	54	27	23
1p1x10	60	43	38
2p1x10	60	43	38
4p1x10	60	40	40
8p1x10	60	38	42
1p4x7	114	72	49
2p4x7	114	73	50
4p4x7	114	76	52
8p4x7	114	72	52
1p4x10	159	110	70
2p4x10	159	116	71
4p4x10	159	118	73
8p4x10	159	114	77

### GRAFICO III.1 Número de Grados de Libertad vs. Tiempo

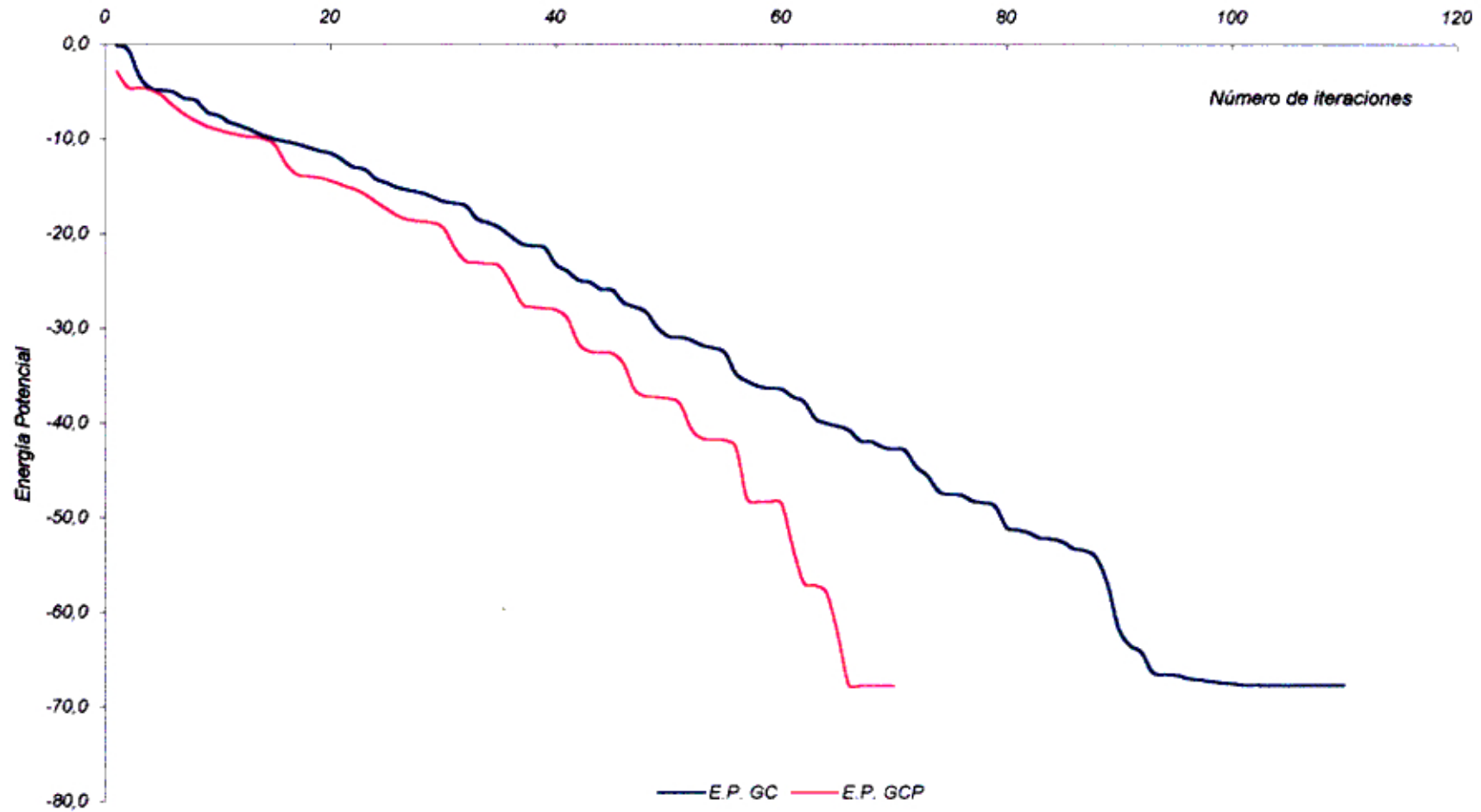
— PF — E.P. GC — E.P. GCP — GCP — GC



**TABLA III.6** Convergencia de la Energía Potencial del sistema para el caso 1p4x10 utilizando los métodos de Gradiente Conjugada (GC) y Gradiente Conjugada Precondicionada (GCP) con error relativo en la Energía Potencial menor a  $1 \times 10^{-7}$

iteración	E.P. GC	E.P. GCP	iteración	E.P. GC	E.P. GCP
1	-0.1351	-2.8811	56	-34.7772	-42.5172
2	-0.5255	-4.5405	57	-35.5477	-48.0151
3	-3.3709	-4.6199	58	-36.0910	-48.2366
4	-4.6669	-4.8096	59	-36.2885	-48.2691
5	-4.8314	-5.4338	60	-36.3710	-48.4341
6	-5.0148	-6.4636	61	-37.1930	-53.0842
7	-5.6836	-7.3847	62	-37.7217	-56.8806
8	-5.9025	-8.1036	63	-39.4648	-57.1245
9	-7.1485	-8.6573	64	-40.0152	-57.8677
10	-7.5370	-9.0430	65	-40.2997	-62.1472
11	-8.2224	-9.3963	66	-40.7399	-67.5714
12	-8.6166	-9.6379	67	-41.8209	-67.6745
13	-9.1235	-9.7668	68	-41.9326	-67.6752
14	-9.6229	-9.9462	69	-42.4995	-67.6752
15	-9.9972	-10.5971	70	-42.7047	-67.6752
16	-10.2290	-12.6198	71	-42.8272	
17	-10.5471	-13.7532	72	-44.5310	
18	-10.8648	-13.9248	73	-45.5223	
19	-11.2781	-14.0971	74	-47.1607	
20	-11.4980	-14.4191	75	-47.4622	
21	-12.1904	-14.8635	76	-47.5317	
22	-12.9218	-15.2246	77	-48.1612	
23	-13.1552	-15.8263	78	-48.3539	
24	-14.1899	-16.6271	79	-48.6994	
25	-14.5879	-17.3895	80	-50.9313	
26	-15.1553	-18.1726	81	-51.2137	
27	-15.4380	-18.5237	82	-51.5125	
28	-15.6870	-18.6642	83	-52.0869	
29	-16.0821	-18.8256	84	-52.1518	
30	-16.5601	-19.4028	85	-52.4556	
31	-16.7563	-21.5228	86	-53.1639	
32	-17.0617	-22.8794	87	-53.3989	
33	-18.4573	-23.0251	88	-54.1282	
34	-18.8266	-23.1380	89	-56.8974	
35	-19.3443	-23.4195	90	-61.6467	
36	-20.2742	-25.2357	91	-63.3581	
37	-21.0908	-27.4233	92	-64.0974	
38	-21.2593	-27.7522	93	-66.2133	
39	-21.4785	-27.8383	94	-66.4786	
40	-23.2167	-28.0353	95	-66.5463	
41	-23.9160	-28.8775	96	-66.8594	
42	-24.8515	-31.5298	97	-67.0000	
43	-25.0926	-32.4272	98	-67.2335	
44	-25.8007	-32.5215	99	-67.3415	
45	-25.9158	-32.6133	100	-67.4703	
46	-27.2539	-33.7310	101	-67.6198	
47	-27.6711	-36.5266	102	-67.6607	
48	-28.2790	-37.1404	103	-67.6682	
49	-29.9121	-37.2265	104	-67.6708	
50	-30.8013	-37.3692	105	-67.6748	
51	-30.9164	-37.8931	106	-67.6750	
52	-31.1632	-40.5542	107	-67.6751	
53	-31.7777	-41.5950	108	-67.6752	
54	-32.0601	-41.7105	109	-67.6752	
55	-32.5179	-41.7869	110	-67.6752	

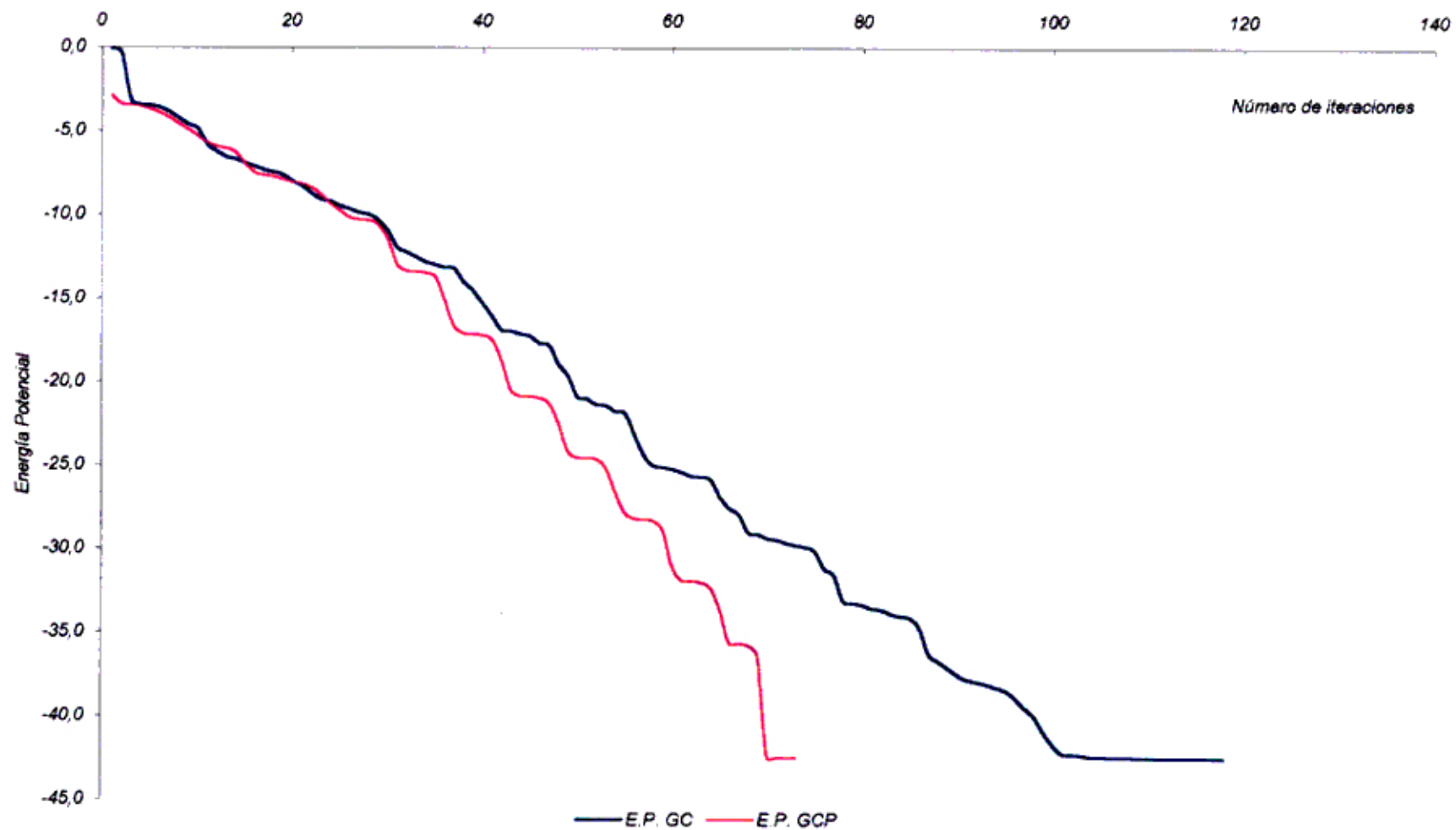
**GRAFICO III.2** Número de Iteraciones vs. Energía Potencial  
Pórtico Plano caso 1px4x10



**TABLA III.7** Convergencia de la Energía Potencial del sistema para el caso 4p4x10 utilizando los métodos de Gradiente Conjugada (GC) y Gradiente Conjugada Precondicionada (GCP) con error relativo en la Energía Potencial menor a  $1 \times 10^{-7}$

iteración	E.P. GC	E.P. GCP	iteración	E.P. GC	E.P. GCP
1	-0.0690	-2.8806	60	-25.1682	-31.0187
2	-0.2852	-3.3724	61	-25.3742	-31.8643
3	-3.0931	-3.4229	62	-25.6028	-31.8993
4	-3.4120	-3.4939	63	-25.6666	-32.0044
5	-3.4534	-3.6545	64	-25.7799	-32.3046
6	-3.5858	-3.9163	65	-26.8445	-33.6532
7	-3.8380	-4.1690	66	-27.5023	-35.5857
8	-4.2125	-4.5552	67	-27.8676	-35.6654
9	-4.5673	-4.9065	68	-28.9770	-35.7653
10	-4.8527	-5.2784	69	-29.0693	-36.3914
11	-5.7585	-5.6596	70	-29.3281	-42.4158
12	-6.1949	-5.9018	71	-29.4412	-42.4711
13	-6.5148	-6.0300	72	-29.6038	-42.4711
14	-6.6727	-6.2704	73	-29.7566	-42.4711
15	-6.9002	-6.9236	74	-29.8638	
16	-7.0836	-7.4670	75	-30.0930	
17	-7.3040	-7.6179	76	-31.1305	
18	-7.4295	-7.6925	77	-31.5574	
19	-7.5873	-7.8627	78	-33.0675	
20	-7.9784	-8.0373	79	-33.2313	
21	-8.2316	-8.1730	80	-33.3313	
22	-8.7208	-8.3697	81	-33.5603	
23	-9.0554	-8.7863	82	-33.6181	
24	-9.1865	-9.3039	83	-33.8633	
25	-9.4521	-9.7345	84	-34.0050	
26	-9.6337	-10.1507	85	-34.1126	
27	-9.8388	-10.2659	86	-34.7137	
28	-9.9462	-10.3308	87	-36.2394	
29	-10.2648	-10.5500	88	-36.7094	
30	-10.9114	-11.4049	89	-37.1007	
31	-11.9242	-12.9376	90	-37.5173	
32	-12.2100	-13.3215	91	-37.7982	
33	-12.4887	-13.3847	92	-37.9433	
34	-12.8262	-13.4487	93	-38.0737	
35	-12.9704	-13.6961	94	-38.2630	
36	-13.1486	-15.0586	95	-38.4454	
37	-13.1876	-16.6339	96	-38.8392	
38	-13.9898	-17.0694	97	-39.4572	
39	-14.5130	-17.1162	98	-39.9315	
40	-15.2764	-17.1796	99	-40.8525	
41	-16.0532	-17.4800	100	-41.6600	
42	-16.8571	-18.6838	101	-42.2107	
43	-16.9240	-20.4639	102	-42.2541	
44	-17.1100	-20.8098	103	-42.3052	
45	-17.2338	-20.8522	104	-42.4102	
46	-17.6621	-20.9281	105	-42.4159	
47	-17.7992	-21.2667	106	-42.4199	
48	-18.8785	-22.4212	107	-42.4290	
49	-19.6043	-24.1235	108	-42.4317	
50	-20.8811	-24.4707	109	-42.4485	
51	-20.9621	-24.5248	110	-42.4587	
52	-21.3151	-24.5889	111	-42.4669	
53	-21.3726	-25.1436	112	-42.4696	
54	-21.7109	-26.5503	113	-42.4706	
55	-21.8287	-27.8024	114	-42.4710	
56	-23.1254	-28.1514	115	-42.4711	
57	-24.3128	-28.1872	116	-42.4711	
58	-24.9705	-28.2755	117	-42.4711	
59	-25.0719	-28.8783	118	-42.4711	

**GRAFICO III.3** Número de Iteraciones vs. Energía Potencial  
Pórtico Plano caso 4px4x10



## **3.4 Aplicación a pórticos espaciales**

### **3.4.1 Introducción**

Se prepararon 8 ejemplos de pórticos tridimensionales con iguales rigideces entre vigas y columnas, debido a que los resultados para pórticos planos muestran que las razones de rigidez entre columnas y vigas no influyen en el número de iteraciones requerido para alcanzar una precisión preestablecida. En la siguiente tabla se muestran los casos asignados a los ejemplos según sus características.

Tipo de Pórtico	# de vanos en X	# de vanos en Y	Niveles	# de gdl
1x1x1	1	1	1	24
1x1x3	1	1	3	72
1x1x7	1	1	7	168
1x1x10	1	1	10	240
4x4x1	4	4	1	150
4x4x3	4	4	3	450
4x4x7	4	4	7	1050
4x4x10	4	4	10	1500

Figura III.2 Esquemas de pórticos tridimensionales analizados

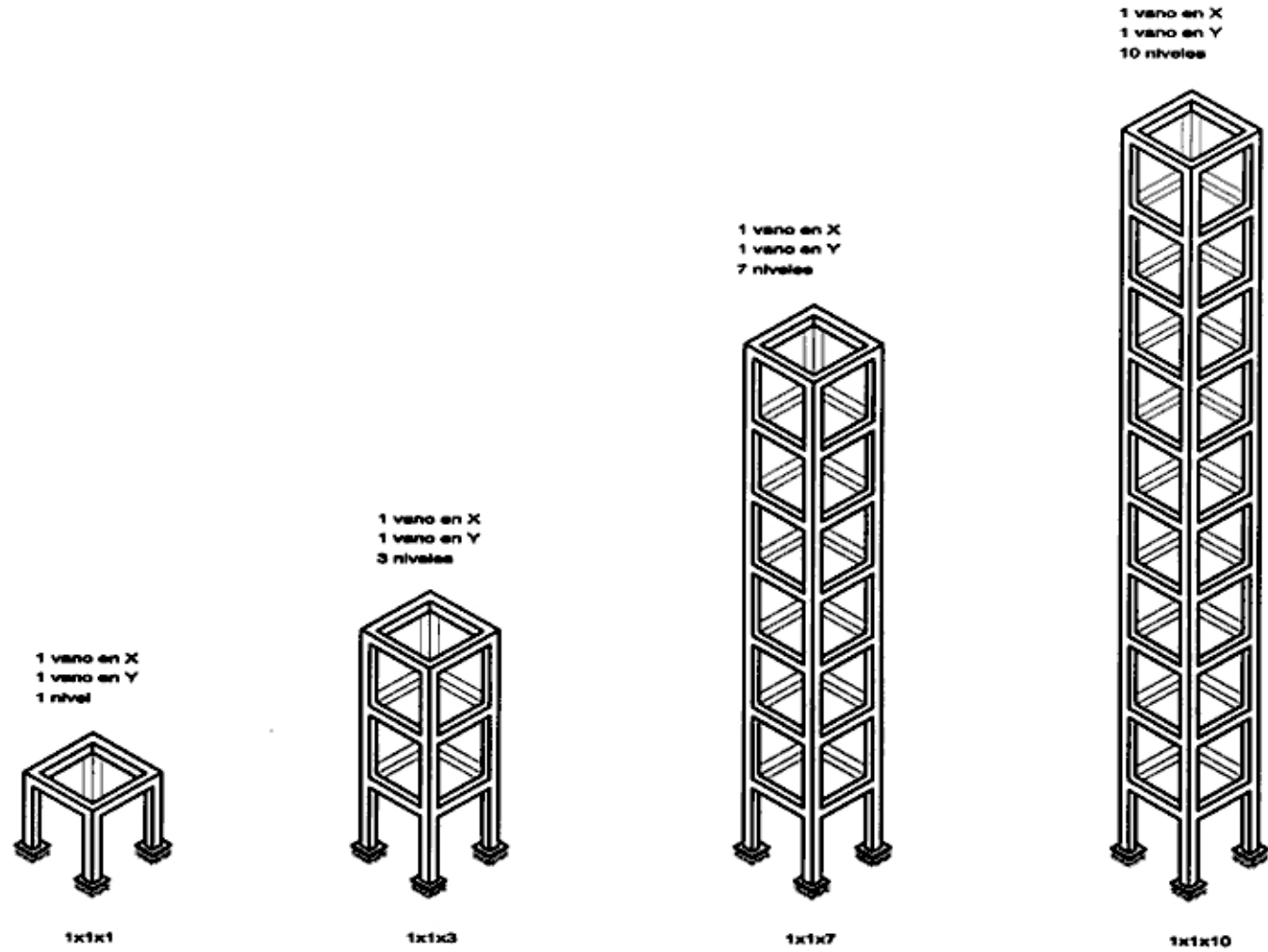
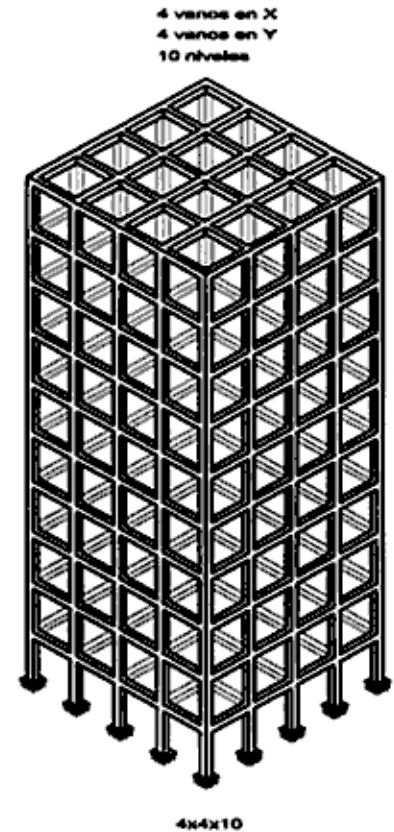
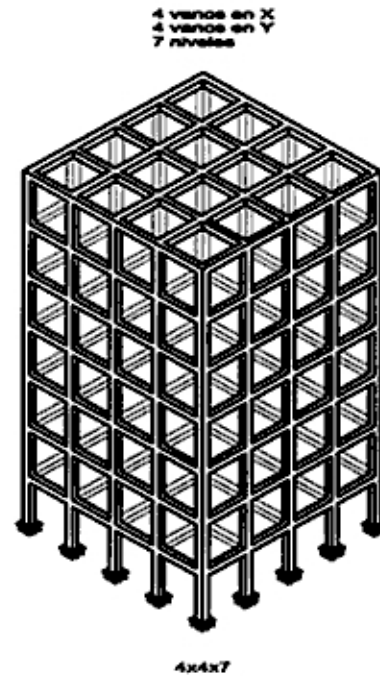
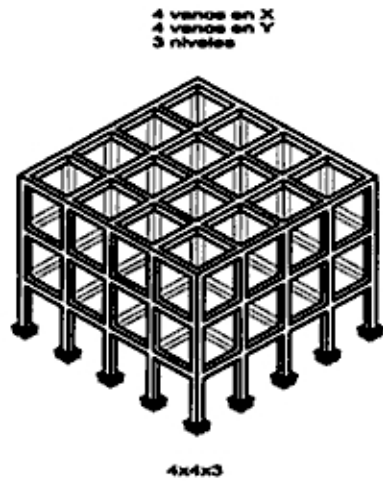
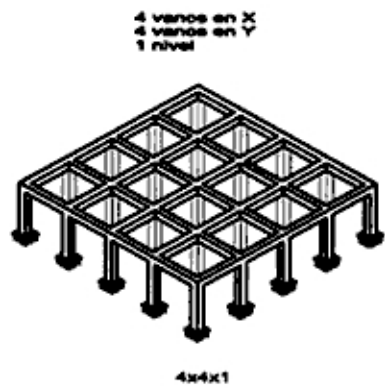




Figura III.2 Esquemas de pórticos tridimensionales analizados (cont.)



El propósito de este análisis tridimensional radica en el hecho de exigir al método a niveles de mayor requerimiento. Para este caso tridimensional, tanto las vigas como las columnas tendrán las mismas dimensiones y por lo tanto sus inercias serán iguales.

### **3.4.2 Resultados**

Antes de realizar el análisis de los pórticos tridimensionales usando G.C. se hizo una pequeña prueba entre utilizar solamente G.C. o usar G.C. E.P. Para lo cual se pusieron a prueba los ejemplos antes indicados y se encontró que los resultados muestran la ventaja de usar el método de la gradiente conjugada, como se puede apreciar en las Tablas III.8 y III.9. En la primera de ellas, se indica el número de iteraciones requerido para llegar a la convergencia con una cierta precisión determinada con anterioridad. En dicha Tabla III.8, el número de iteraciones es considerablemente menor al número de grados de libertad, como indicaba la teoría. Dentro de la misma tabla se indica qué porcentaje de iteraciones se necesitó en comparación con el orden que tendría la matriz de rigidez general para cada pórtico. Además, se puede notar que el número de iteraciones es menor, en algunos casos, para G.C. E.P. En la Tabla III.9 se resumen los tiempos, en milisegundos, necesarios en cada uno de los ejemplos, usando los programas: G.C., C.G. E.P. y SFE (programa de análisis de pórticos tridimensional que utiliza el método de Eliminación Gaussiana). Para este caso existe una variación, los tiempos son menores para G.C. comparados con G.C. E.P., lo que nos indica que el programa que utiliza el algoritmo de G.C. es el más efectivo en estos casos. Ahora bien,

**TABLA III.8** Número de iteraciones requerido para el análisis de pórticos tridimensionales

	# de g.d.l.	# iteraciones G.C.	%	# iteraciones G.C. E.P.	%
1x1x1	24	3	12.50%	3	12.50%
1x1x3	72	9	12.50%	9	12.50%
1x1x7	168	28	16.67%	27	16.07%
1x1x10	240	46	19.17%	44	18.33%
4x4x1	150	8	5.33%	8	5.33%
4x4x3	450	26	5.78%	23	5.11%
4x4x7	1050	74	7.05%	67	6.38%
4x4x10	1500	108	7.20%	101	6.73%

G.C.: programa con el procedimiento de Gradiente Conjugada

G.C. E.P.: programa con el procedimiento de Gradiente Conjugada usando variación de Energía Potencial

**TABLA III.9** Tiempo requerido en milisegundos (ms) para el análisis de pórticos tridimensionales

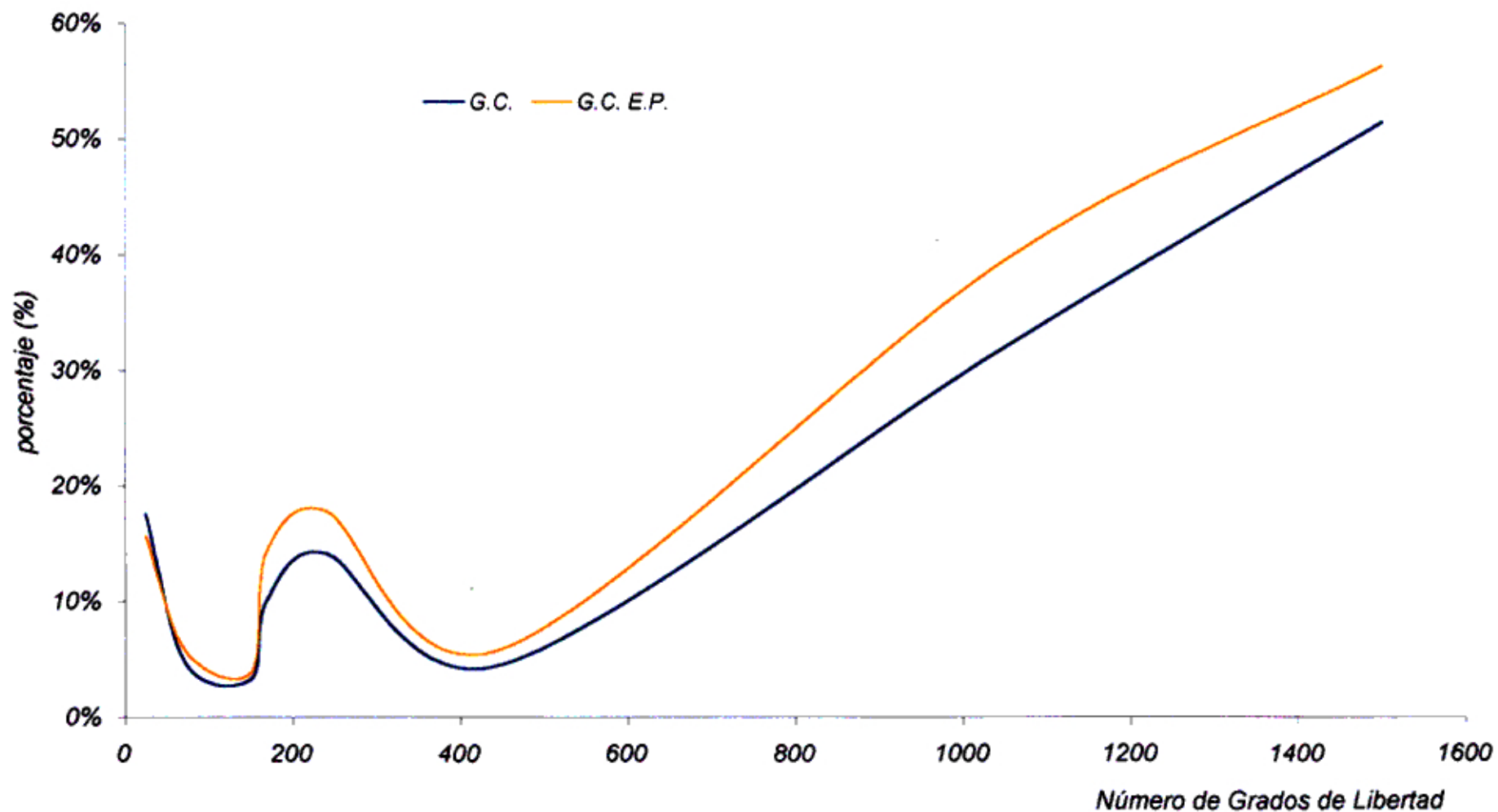
	SFE	G.C.	%	G.C. E.P.	%
1x1x1	3.13	0.55	17.57%	0.49	15.65%
1x1x3	20.98	0.98	4.67%	1.2	5.72%
1x1x7	56.19	5.65	10.06%	8.07	14.36%
1x1x10	83.21	11.81	14.19%	14.83	17.82%
4x4x1	63.06	2.09	3.31%	2.47	3.92%
4x4x3	318.19	14.61	4.59%	18.95	5.96%
4x4x7	289.07	92.38	31.96%	114.2	39.51%
4x4x10	426.99	219.43	51.39%	240.19	56.25%

SFE: programa de análisis tridimensional con solución de ecuaciones por Eliminación Gaussiana

G.C.: programa con el procedimiento de Gradiente Conjugada

G.C. E.P.: programa con el procedimiento de Gradiente Conjugada usando variación de Energía Potencial

**GRAFICO III.4** Número de grados de libertad vs. Porcentaje de error



entre la comparación de los resultados de G.C. con el programa SFE, las diferencias saltan a la vista, los valores de tiempo para G.C. son mucho menores que para el programa SFE. Además, se expresa una columna de porcentaje de tiempo utilizado, tomando como base el alcanzado por el programa SFE.

Hasta el momento no se ha realizado ningún comentario acerca de la posibilidad de tener varios sistemas de carga aplicados a una misma estructura. Con el método de eliminación Gaussiana, si se tuviesen varios sistemas de carga (léase varios sistemas de ecuaciones) con la misma matriz de rigidez  $K$

$$K u_1=f_1 \quad K u_2=f_2 \quad \dots \quad K u_n=f_n$$

pueden tratarse simultáneamente, dicho en otras palabras, el trabajo computacional en la matriz  $K$ , que se factoriza en dos matrices triangulares ( $LU$ ), se realiza solo una vez. Por el contrario, en el método de gradiente conjugada las operaciones deben ser repetidas íntegramente. Cada sistema de carga arroja un vector de desplazamientos que no puede ser utilizado, en la mayor parte de los casos, como el vector inicial para comenzar un nuevo proceso.

---

# CAPÍTULO IV

---

## EXTENSIÓN AL ANÁLISIS NO LINEAL

### **4.1 Introducción**

Quizás la aplicación más promisoría de los procedimientos de gradiente conjugada está en el campo del análisis no lineal. La tendencia es a realizar análisis cada vez más elaborados y que reflejen un comportamiento de los elementos más cercano a la realidad, lo que con frecuencia implica considerar un comportamiento no lineal.

Es preciso mencionar un punto muy importante en el análisis no lineal: mientras que en los problemas lineales la solución es siempre única, ya no ocurre lo mismo en muchas situaciones no lineales. Así, si se obtiene una solución puede ser que ésta no sea necesariamente la solución buscada. Una correcta interpretación física de la naturaleza del problema y, normalmente, la utilización de procedimientos incrementales en pasos pequeños son esenciales para obtener resultados que tengan sentido físico. Además, estos procedimientos

incrementales son útiles para evitar un excesivo número de iteraciones y ciertamente para seguir el camino físicamente correcto.

En el presente capítulo se expondrán los resultados obtenidos en un reticulado plano y la comprobación de estos mediante un programa de tipo lineal realizando superposiciones de los resultados.

## **4.2 Implementación de los procedimientos**

### **4.2.1 Descenso más rápido**

Se escribirá el algoritmo del procedimiento de descenso más rápido:

Dado  $u_0$ , se determina  $r_0 = p_0 = f - Ku_0$

Para:  $k=0,1,2, \dots, n-1$

$$r_k = f - Ku_k \quad \dots (1)$$

$$\text{si } (r^T r) < \varepsilon \Rightarrow \text{terminar proceso} \quad \dots (2)$$

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(r_k, Ku_k)} \quad \dots (3)$$

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k r_k \quad \dots (4)$$

Este es un método muy sencillo de implementar. El vector de desplazamiento (4) se corrige en la dirección del vector residuo (1) multiplicado por un escalar  $\alpha$  (3). Pero, la matriz  $K$  no permanece constante a través del proceso sino que va cambiando, admitiendo que en cada iteración el



comportamiento sea lineal, debiéndose tomar en las multiplicaciones la matriz de rigidez tangente de la estructura  $K$  correspondiente a las características materiales del comienzo de cada paso o el final del anterior.

La particularidad de este procedimiento radica en la valoración del vector residuo, que es la manera correcta de hallarlo sin acumular errores de redondeo, ya que si fuese de manera distinta se introducirían fuentes de error.

Este método rara vez se usa debido a su lentitud [2] pero según Oden [5], maneras distintas de computar  $\alpha$  pueden conducir a una secuencia de convergencia más rápida.

#### 4.2.2 Gradiente conjugada

Se resumirán los pasos del algoritmo de gradiente conjugada expresados en el acápite 2.3.2:

Dado  $u_0$ , se determina  $r_0 = p_0 = f - Ku_0$

Para:  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

$$q_k = K p_k \quad \dots (5)$$

$$\alpha_k = \frac{(r_k, p_k)}{(p_k, q_k)} \quad \dots (6)$$

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k \quad \dots (7)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k \quad \dots (8)$$

$$\text{si } (r_k^T r_k) < \varepsilon \Rightarrow \text{terminar proceso} \quad \dots (9)$$

$$\beta_k = \frac{(r_{k+1}, Kp_{k+1})}{(p_k, Kp_k)} \quad \dots (10)$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} - \beta_k p_k \quad \dots (11)$$

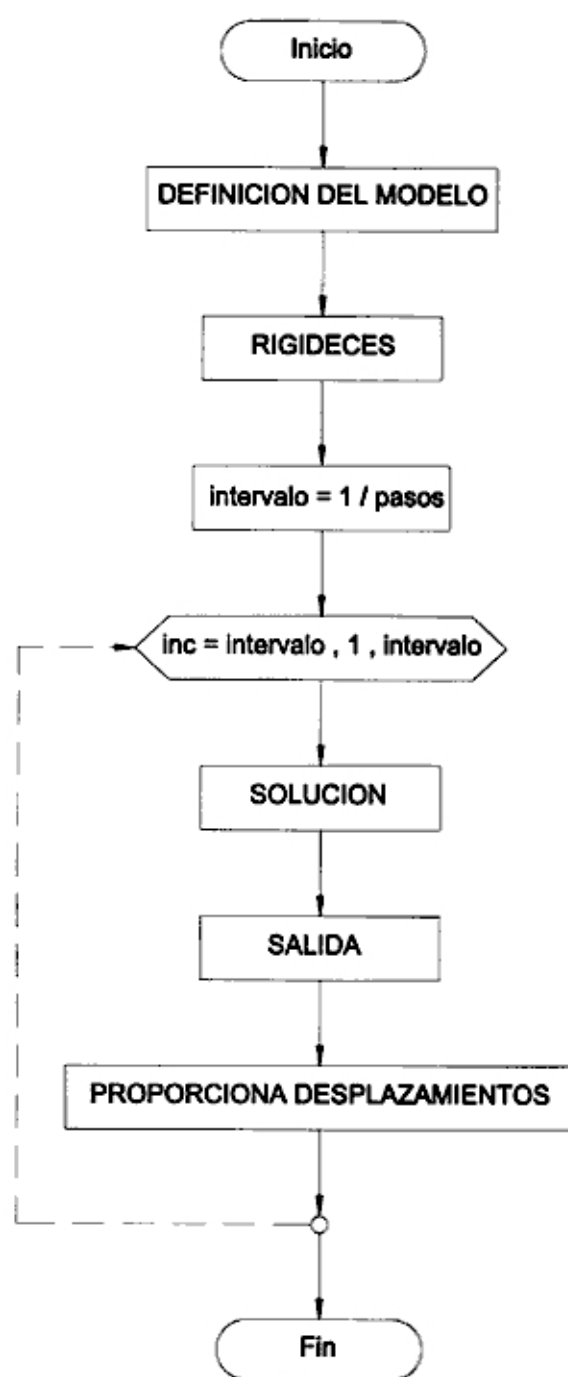
Este procedimiento difiere del expresado en el acápite 3.2.2 solo en la manera de computar  $\alpha$  y  $\beta$ , pero esta diferencia no es fondo sino de forma. Al revisar el punto 2.2.4, se puede observar que existen diversas maneras de obtener los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , pero todas ellas producen un mismo resultado.

El que en esta oportunidad se utilice con mayor frecuencia la matriz de rigidez tangente  $K$  dentro de las multiplicaciones, es debido a que ésta cambia continuamente durante el intervalo de análisis, lo que no significa que el proceso sea lento o que el número de operaciones se incremente, sino que si no se tomase el valor de  $K$  para cada iteración, los errores numéricos se incrementarían.

Al realizar la implementación del procedimiento de gradiente conjugada en un programa, de la manera presentada en este capítulo, se observó que los valores de desplazamiento, y como consecuencia las fuerzas en los elementos, no eran los correctos.

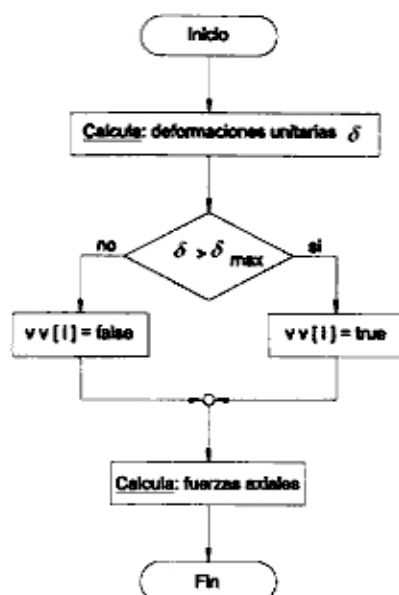
Según Oden [5] las ecuaciones presentadas son correctas. Pero se encontró que al computar el vector  $r$  (residuo) se incluyen errores de redondeo, por lo que se procedió a reemplazar el paso (8) con la fórmula del procedimiento de descenso más rápido del paso (1). Con este cambio, el procedimiento alcanzó los valores de desplazamiento y fuerzas esperados.

Para un mejor entendimiento de la implementación se mostrará el diagrama de flujo en las páginas siguientes.

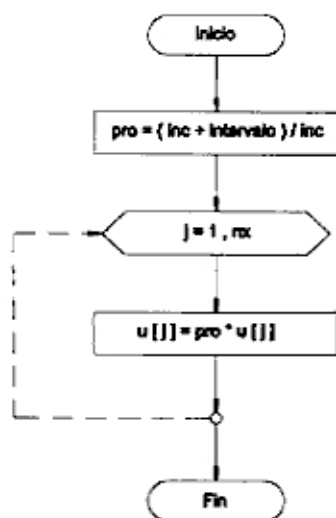


**PROGRAMA PRINCIPAL**

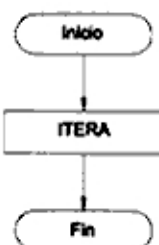
### FUERZAS AXIALES



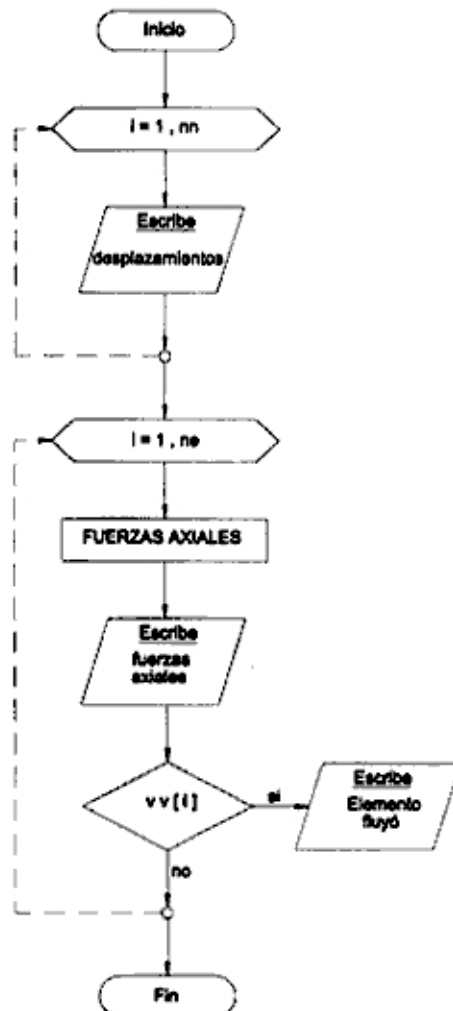
### PROPORCIONA DESPLAZAMIENTOS



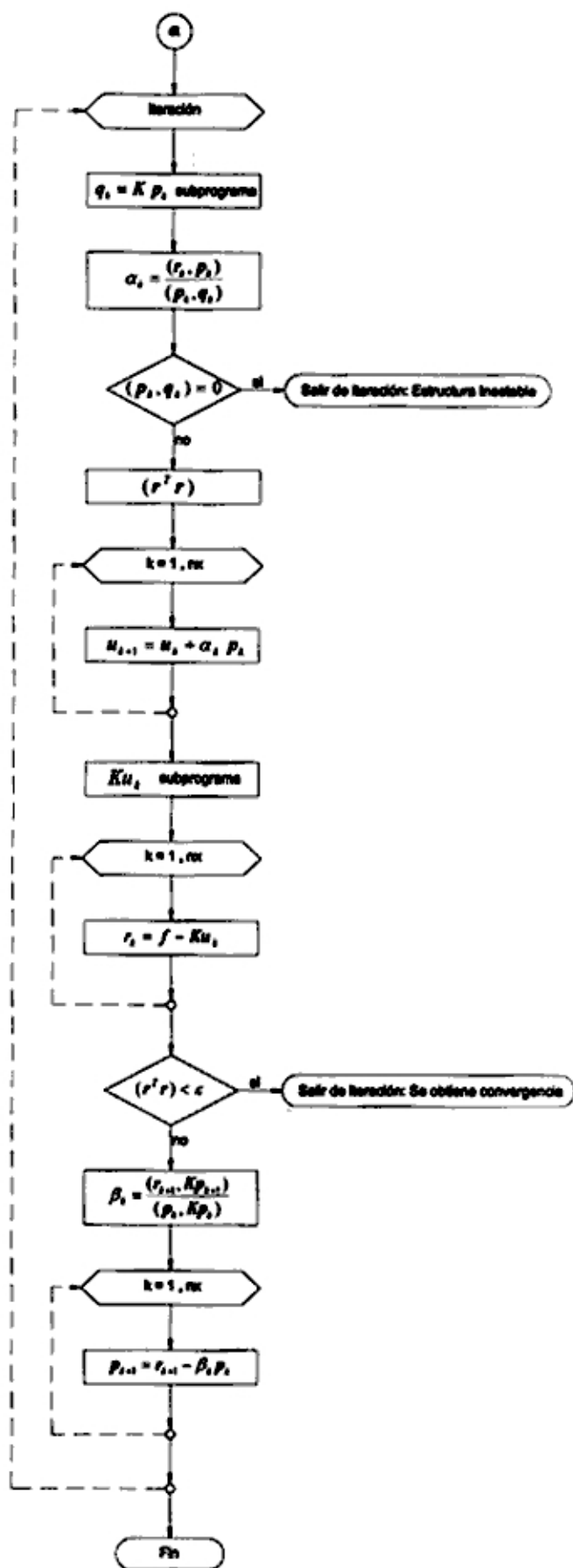
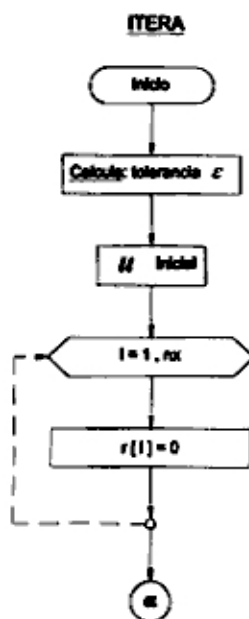
### SOLUCION



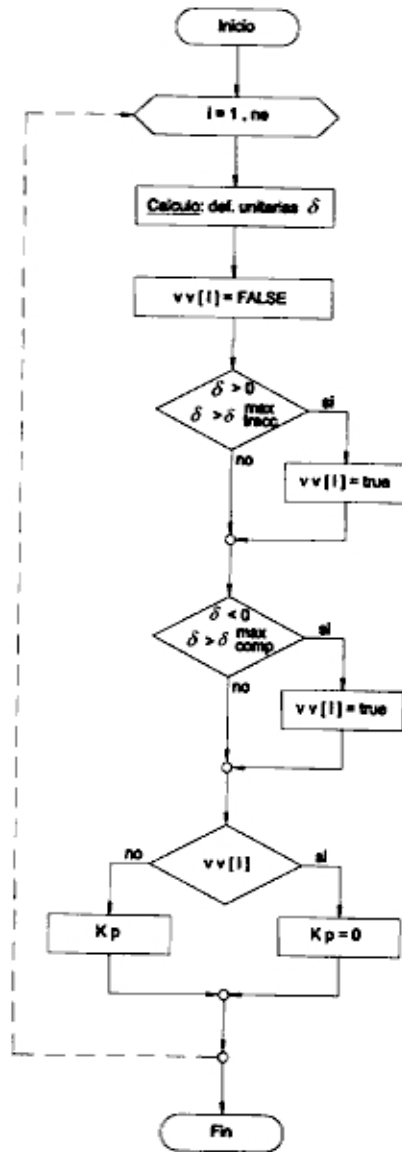
### SALIDA



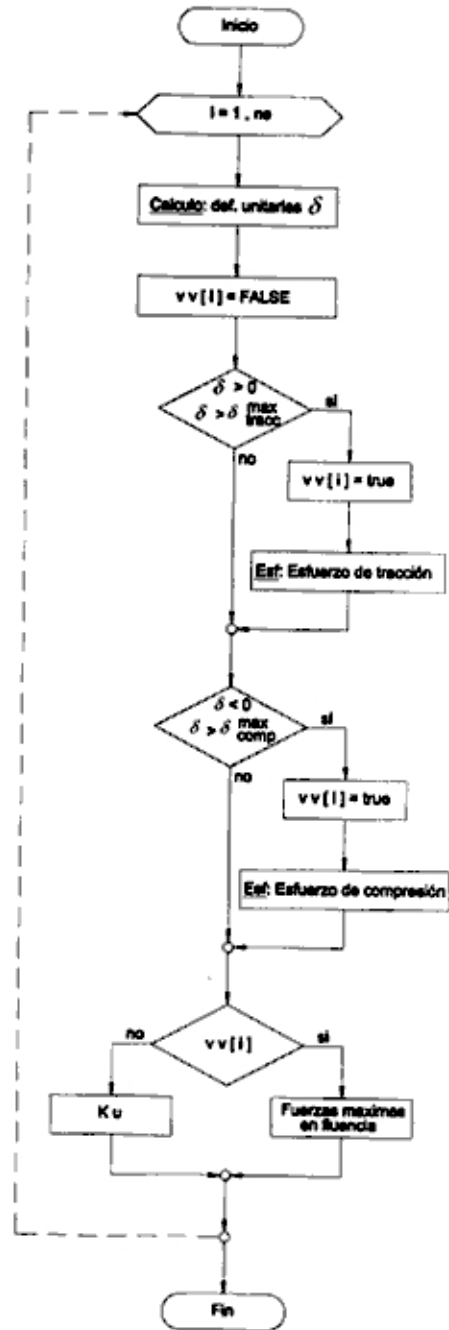
$nr$  → Número de grados de libertad no restringidos  
 $ne$  → Número de elementos de la estructura  
 $nn$  → Número de nudos de la estructura



$q_i = K p_i$  subprograma



$K u_i$  subprograma



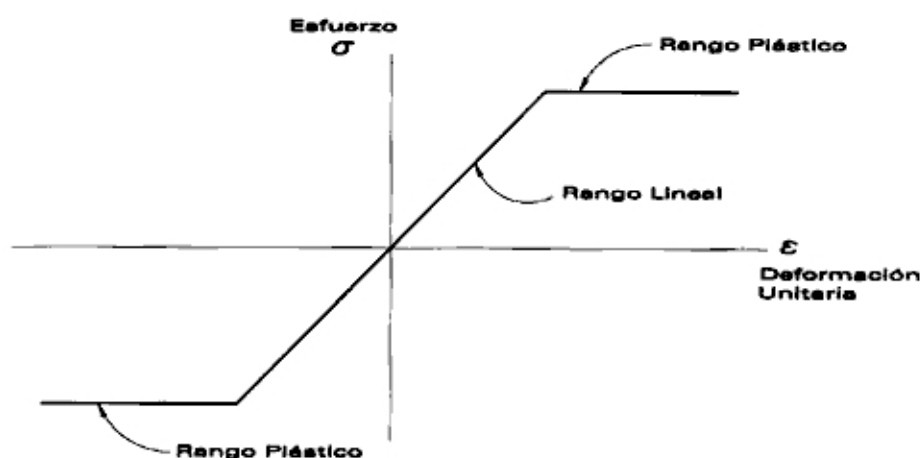
### **4.2.3 Técnicas de solución**

Se investigaron dos técnicas de solución:

1. Esta técnica de solución se basa en la división de la carga total en  $n$  partes iguales (aunque no necesariamente tienen que serlo) y en su aplicación paso a paso; esto es, una tras otra, hasta que su suma alcance la totalidad de aquella. Mediante el supuesto numérico de que la matriz de rigidez de la estructura es constante en el transcurso de una primera etapa, se determina el vector de desplazamientos; aunque esto no implica que el equilibrio estático sea satisfecho, cabe indicar aquí que el vector inicial de desplazamientos siempre será cero. La diferencia entre la carga total y la carga real que correspondería al vector de desplazamientos hallado es la carga a equilibrar en la segunda etapa de la iteración. Luego la nueva matriz de rigidez de la estructura es constante dentro del segundo intervalo de desplazamientos y que su valor es el que corresponde a las características elásticas y geométricas del inicio de dicha segunda etapa o final de la primera. Y así, sucesivamente, hasta que tienda a ser nula la carga a equilibrar en cuyo caso, prácticamente, coinciden los resultados numéricos con los reales de comportamiento de la estructura.
2. El procedimiento de gradiente conjugada permite ingresar un valor inicial de desplazamiento. Esta facultad puede ser aprovechada del siguiente modo. Los desplazamientos obtenidos en el paso ' $j-1$ ' se escalan mediante algún factor y así lograr los valores de desplazamiento inicial del paso ' $j$ '. Resumiendo, la carga total es dividida en un intervalo dado,

para cada valor de carga se obtiene un valor de desplazamiento, que luego es usado, escalado convenientemente, en el siguiente sistema de carga.

El modelo utilizado para los análisis aquí presentados es el elasto-plástico, cuya curva característica se muestra en la Figura IV.1, donde el eje de las abscisas corresponde a la deformación unitaria en el elemento; y el eje de las ordenadas indica el esfuerzo. Esta aproximación elasto-plástica de la curva real de esfuerzo-deformación unitaria se realiza de modo tal que las áreas bajo las dos curvas sean las mismas para un valor seleccionado de máximo desplazamiento. Con la misma facilidad se pueden utilizar modelos multilineales u otros más elaborados.



**Figura IV.1** Modelo Elasto-Plástico utilizado para los análisis



## **4.3 Aplicación a reticulados planos**

### **4.3.1 Introducción**

Para probar el funcionamiento del procedimiento de gradiente conjugada, se procedió a analizar una armadura semejante, en forma y en longitud, al puente Cincinnati, de cuatro apoyos y tres vanos, el primero y el tercero de 138m., el central de 222m. Se procedió al diseño y a obtener las propiedades de cada uno de los elementos en total 279, con una cantidad de nudos de 140. La Figura IV.2 muestra las dimensiones de la armadura analizada; la Figura IV.3, los nudos y elementos correspondientes; y por último, la Figura IV.4, el tipo de elementos utilizado en cada elemento de acuerdo a su longitud. Ninguno de estos gráficos se encuentra a escala.

Se confeccionaron 23 distintos tipos de curvas elasto-plásticas (esfuerzo - deformación unitaria) mostradas en la Figura IV.5.

Se ha encontrado que el procedimiento de gradiente conjugada tiene dos maneras distintas de terminar el proceso, una de ellas ya fue presentada en el acápite 4.2.2. paso (9), y la otra es que el procedimiento se detiene porque el valor de  $\alpha$  en el paso (6), del mismo acápite, se vuelve muy grande, y esto sucede cuando el factor  $(p_k, q_k)$  llega a ser muy pequeño es decir cercano a cero; resultando con esto que la estructura se vuelva inestable, siendo esto el punto en que todo el procedimiento se detiene e indica en que porcentaje de la carga aplicada la estructura sufre el colapso.

Como se indicó en el acápite 4.2.3, se trataron de realizar dos técnicas de solución. Según los estudios realizados con programas hechos con esta modalidad, se reveló que la técnica tipo 1 no responde a las expectativas esperadas de desplazamientos y fuerzas, y además este procedimiento se detiene antes de lo que debería. Aplicando la técnica tipo 2, el método de gradiente conjugada se adapta mejor y produce resultados muy precisos, debido a que se usan los valores finales de desplazamiento de un paso anterior, lo que también reduce los errores de redondeo que se tendrían con la técnica tipo 1 en donde se parte siempre con una aproximación inicial igual a 0. Es por ello que en la presente tesis, no se presentarán los resultados producidos por los métodos de steepest descent, ni el de gradiente conjugada tipo 1.

Para comprobar la confiabilidad del método se realizó el mismo reticulado plano en forma "manual" utilizando un programa que analiza armaduras planas en el rango elástico

(PT) y "eliminando", en cada proceso, los elementos que ya hayan pandeado o llegado al esfuerzo de fluencia de la manera siguiente: los valores producidos en el primer proceso del programa son afectados por un factor el cual indicará el primer elemento en fluir, es decir cual llega a igualar a la fuerza de tracción o de compresión máximas. En el siguiente ciclo del proceso, dentro de la base de datos, el elemento que haya fluido tendrá un área cero, y nuevamente obtendremos unos resultados; que también se afectarán por una factor, pero que ya no influirá sobre aquel que ya fluyó; y así se continúa sucesivamente hasta que la estructura se vuelva inestable. Durante todo este proceso, continuamente se realiza la suma de las fuerzas que adquiere cada elemento. En definitiva, el análisis de comportamiento no lineal se reduce a la concatenación de los resultados obtenidos en el análisis de una serie de comportamientos lineales.

### **4.3.2 Resultados**

La Tabla IV.1 muestra los resultados "manuales" realizados usando el programa PT (Análisis de Armaduras Planas en el rango elástico). Aquí también se indican los factores y la secuencia de los elementos que van fluyendo.

La base de datos indica cargas puntuales de 10t (en la dirección del eje -y) en cada uno de los siguientes nudos: 2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50 y 51. Esta distribución se realizó teniendo en cuenta que las cargas no sean simétricas.

Como ya se indicó en el acápite anterior, se presentarán solo los resultados del procedimiento de gradiente conjugada tipo 2. Ver Anexo B.

Se usó el reticulado plano, en el programa no-lineal, aplicando en los mismos nudos indicados anteriormente, pero en esta ocasión, la carga aplicada es de 100t, para de esta manera obtener el porcentaje en el cual se detiene. El programa acepta el número de divisiones de las cargas actuantes y luego las incrementa de acuerdo a lo indicado en la base de datos. Para este caso, el número de divisiones fue de 100. El programa usado empleó un error de  $10^{-10}$  para el cálculo de los desplazamientos. De los resultados solo se mostrarán algunas partes, cuando algún elemento alcanza la fluencia sea en compresión o tracción.

Como se podrá observar en la Tabla IV.1, forma manual, la suma de los factores divididos entre 10, (carga impuesta sobre la armadura) proporciona el porcentaje de la carga que se espera obtener con el uso del programa de gradiente conjugada no-lineal tipo 2 (gcnl-t2). Cabe explicar aquí, que en la tabla mencionada se indican la presencia de 3 procesos. En el primero de ellos se ejecutó el programa lineal elástico con cargas en los nudos antes indicados, afectándose a los resultados de las fuerzas en los elementos por un factor que se encuentra al final de dicha tabla, consiguiendo con esto, el primero de los elementos en fluir y que ya no será tomado en cuenta para el segundo proceso. Para este segundo proceso, nuevamente se le impone el mismo sistema de cargas que en el primero y se

obtiene el segundo elemento que fluye. Este proceso continúa hasta que la estructura sea inestable.

El programa gcnl-t2 se detiene en un 0.500 (50%) de la carga impuesta, mientras que con el método manual se logra un 0.502586 (aproximadamente un 50.26%). Ahora bien, el programa gcnl-t2 se detuvo en un 50% porque no podía llegar al 51% (mayor que el 50.26% de la forma manual).

Se pueden comparar las fuerzas en los elementos tanto en la parte manual como los obtenidos mediante el programa, notándose que las diferencias son mínimas. El orden en que los elementos comienzan a fluir siguen, en ambas, la misma secuencia, lo que nos indica que el programa está dentro de los márgenes correctos. Ver Anexo B.

Figura IV.2 PUENTE CIMENTADO

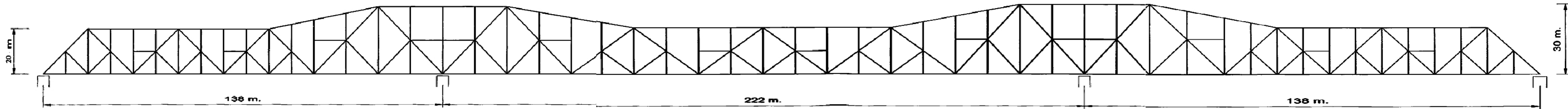
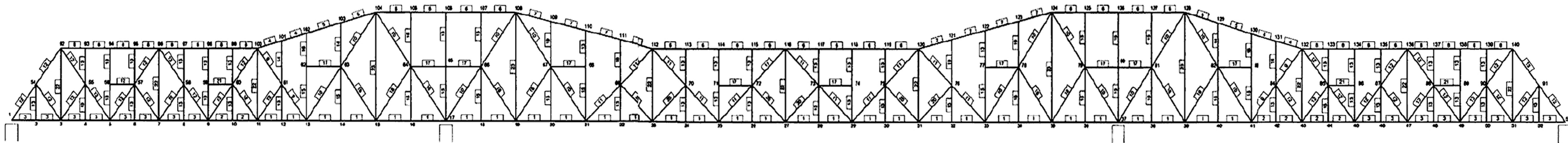


Figura IV.4 PUNTE CINCINNATI (TIPOS DE ELEMENTOS)



Seccion A-A

$$\begin{aligned}A &= 0.093 \text{ m}^2 \\I_x &= 0.0047545 \text{ m}^4 \\I_y &= 0.0062866 \text{ m}^4 \\r &= 0.2261941 \text{ m}\end{aligned}$$

Seccion B-B

$$\begin{aligned}A &= 0.0513 \text{ m}^2 \\I_x &= 0.0023064 \text{ m}^4 \\I_y &= 0.0034714 \text{ m}^4 \\r &= 0.2121391 \text{ m}\end{aligned}$$

Seccion C-C

$$\begin{aligned}A &= 0.124 \text{ m}^2 \\I_x &= 0.0131451 \text{ m}^4 \\I_y &= 0.009566 \text{ m}^4 \\r &= 0.2780548 \text{ m}\end{aligned}$$

Seccion D-D

$$\begin{aligned}A &= 0.066 \text{ m}^2 \\I_x &= 0.0052841 \text{ m}^4 \\I_y &= 0.0049907 \text{ m}^4 \\r &= 0.274466 \text{ m}\end{aligned}$$

Seccion E-E

$$\begin{aligned}A &= 0.06 \text{ m}^2 \\I_x &= 0.0031354 \text{ m}^4 \\I_y &= 0.0023498 \text{ m}^4 \\r &= 0.1971829 \text{ m}\end{aligned}$$

Seccion F-F

$$\begin{aligned}A &= 0.038 \text{ m}^2 \\I_x &= 0.0013537 \text{ m}^4 \\I_y &= 0.0009522 \text{ m}^4 \\r &= 0.1589999 \text{ m}\end{aligned}$$

Seccion G-G

$$\begin{aligned}A &= 0.051 \text{ m}^2 \\I_x &= 0.0028362 \text{ m}^4 \\I_y &= 0.0028362 \text{ m}^4 \\r &= 0.2358 \text{ m}\end{aligned}$$

TIPOS DE SECCIONES



Figura IV.5 Modelos elasto-plásticos utilizados

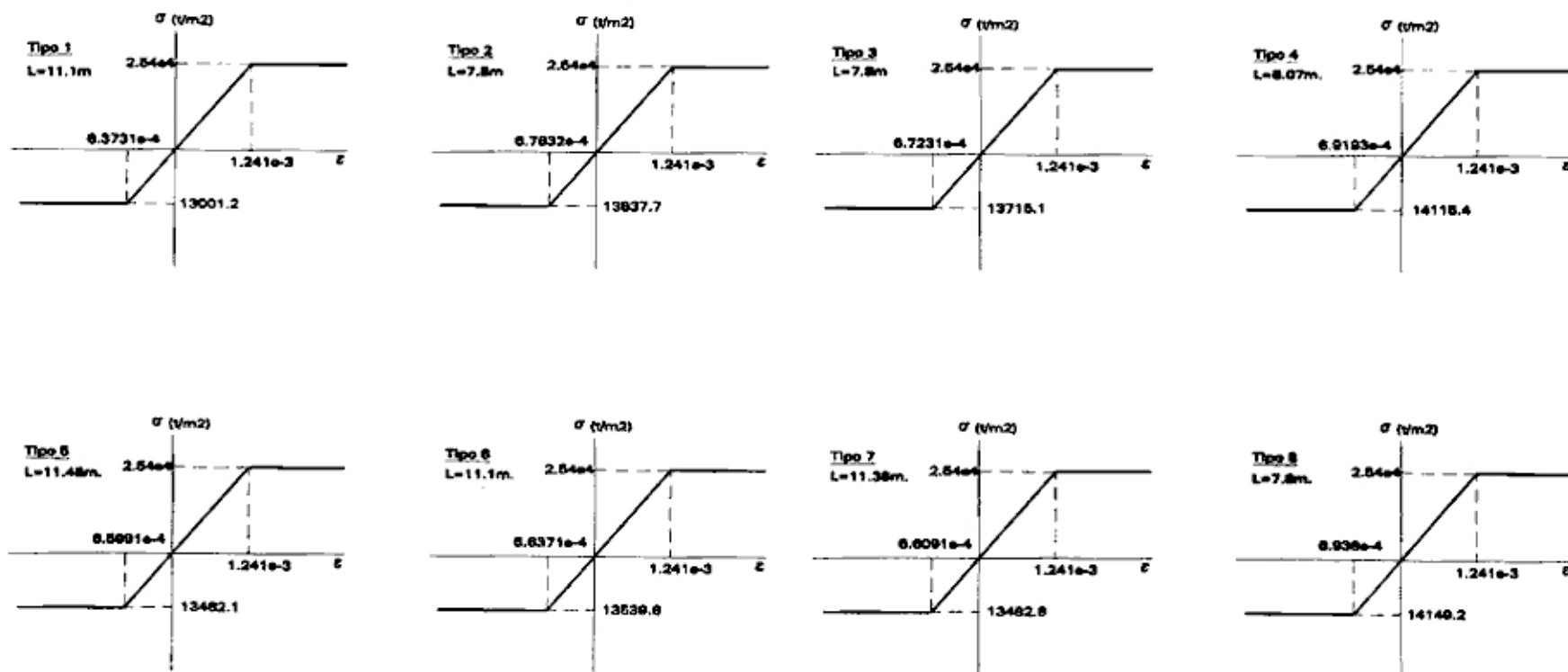


Figura IV.5 Modelos elasto-plásticos utilizados (continuación)

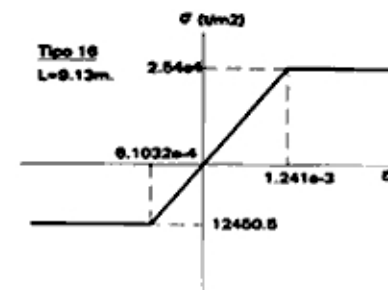
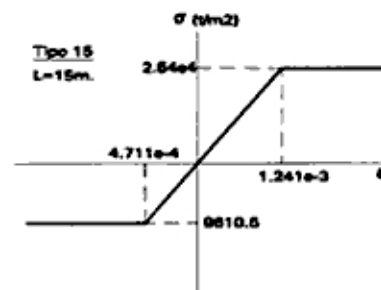
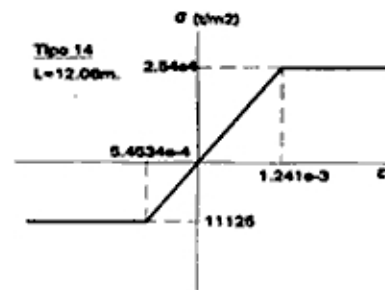
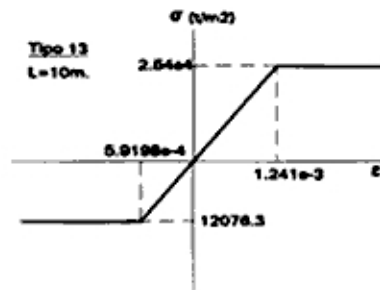
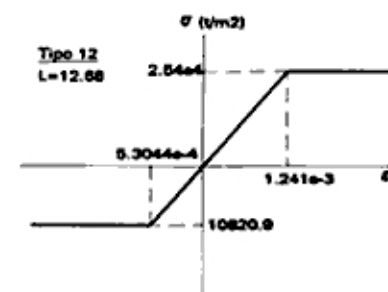
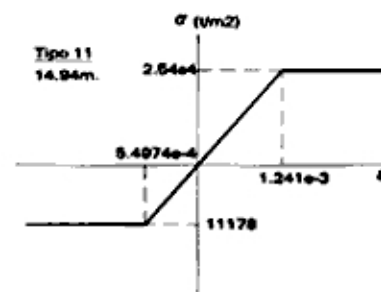
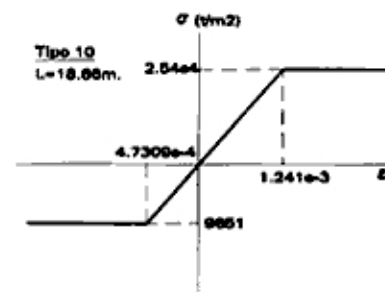
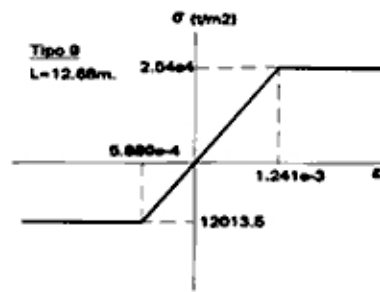
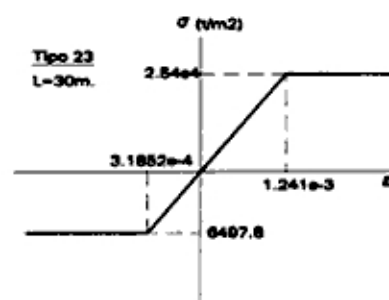
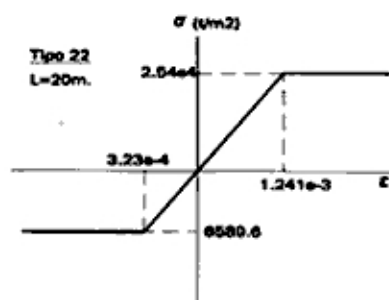
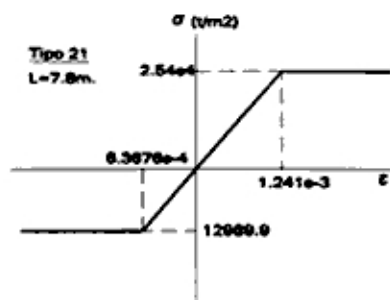
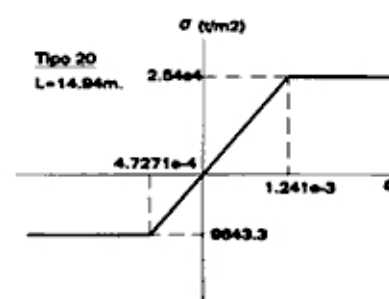
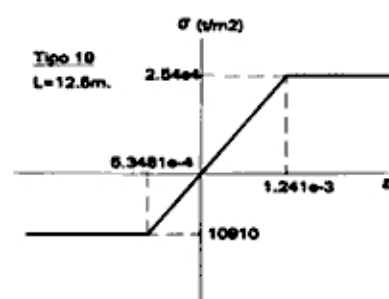
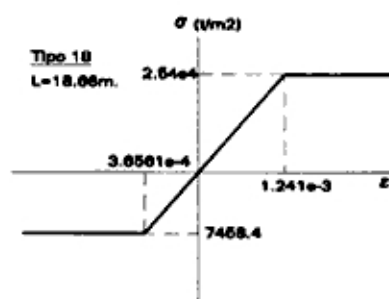
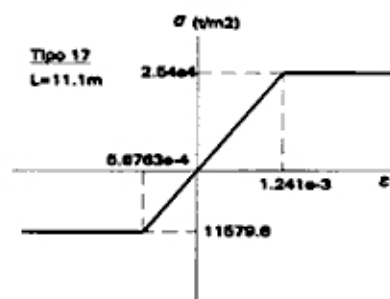


Figura IV.5 Modelos elasto-plásticos utilizados (continuación)









## **4.4 Consideraciones relativas al análisis no lineal de medios continuos**

Los procedimientos antes expuestos para el análisis no lineal de estructuras de barras pueden fácilmente extenderse al análisis con modelos de elementos finitos bi o tridimensionales. El análisis se realiza siempre en forma incremental, requiriéndose iterar en cada etapa para reducir los errores en las ecuaciones de equilibrio. En el procedimiento propuesto, se realizan estas iteraciones simultáneamente con las propias del procedimiento de gradiente para la solución de las ecuaciones.

La formulación más comúnmente empleada en elementos finitos se basa en aproximaciones para las componentes de desplazamiento,  $u$ . Las aproximaciones son usualmente interpolaciones polinómicas de los correspondientes valores nodales,  $a$ , mediante expresiones de la forma  $u = N a$ . Las componentes de deformación pueden obtenerse

derivando apropiadamente las expresiones precedentes:  $\varepsilon = Du = DNa = Ba$ . En este caso  $D$  denota una matriz de operadores de derivación. Con excepción de los elementos finitos más simples,  $B$  es también una función de coordenadas. En lo que sigue se ignoran las no linealidades geométricas y, como consecuencia, la matriz  $B$  resulta independiente del estado de deformación. Por otro lado, los esfuerzos son una función de las deformaciones. Si se supusiera un comportamiento lineal, podría escribirse:  $\sigma = E\varepsilon = EBa$ . Al sustituir las expresiones precedentes en las ecuaciones de equilibrio, se observa que éstas no son satisfechas idénticamente en los bordes entre elementos, ya que la hipótesis inicial  $u = Na$  es en general sólo una aproximación. Para determinar los valores nodales  $a$  que hacen mínimos los errores (en las ecuaciones de equilibrio) o residuos, el criterio más empleado es el de Galerkin. Alternativamente, podría utilizarse el principio de trabajos virtuales o el funcional de energía potencial, obteniéndose en todos los casos un sistema de ecuaciones de la forma  $Ku = f$ , en el que las matrices  $K$  y  $f$  resultan:

$$K = \int_{Vol} B^T EB dVol$$

$$f = \int_{Vol} N^T b dVol + \int_{S_r} N^T T dS$$

En estas expresiones,  $b$  denota fuerzas de cuerpo por unidad de volumen y  $T$  fuerzas de superficie, por unidad de área.

El análisis no lineal se realiza como superposición de una serie de análisis lineales, correspondientes a otros tantos incrementos de



carga. Así, suponiendo que se haya obtenido la solución para la etapa  $n$ , para la siguiente etapa,  $n+1$ , se tiene:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_n$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma_n$$

donde:

$$\Delta u_n = N \Delta a_n$$

$$\Delta \varepsilon_n = B \Delta a_n$$

$$\Delta \sigma_n = EB \Delta a_n$$

Los incrementos de desplazamiento se obtienen mediante:

$$K \Delta a_n = f_{n+1} - \int_{Vol} B^T \sigma_n dVol$$

Debe anotarse que la matriz de rigidez es función del estado de deformación y es por lo tanto variable. Como aproximación puede trabajarse con la matriz tangente inicial o, alternativamente, con la matriz tangente al inicio del incremento de carga actual. En cualquier caso, las condiciones al finalizar el incremento de carga son diferentes que al inicio, de lo que resultan errores adicionales en las condiciones de equilibrio. El segundo miembro en la expresión precedente corresponde justamente a las fuerzas desequilibradas. Los errores son tanto menos importantes cuanto más pequeño sea el incremento de carga. En cualquier caso, para corregir los errores es necesario iterar. Las iteraciones pueden sin embargo realizarse en forma simultánea con las requeridas para la solución del sistema de ecuaciones.

Por ejemplo, el proceso propuesto a continuación es una variante del método de gradiente máxima. Para cada nuevo incremento de carga:

- a. Escalar los desplazamientos previamente obtenidos, considerando la razón entre la norma euclidiana del vector de cargas después del incremento y la correspondiente norma antes del incremento.
- b. Determinar los incrementos de deformación  $\Delta \varepsilon = B \Delta a$  y los correspondientes incrementos de esfuerzo, para estimar las fuerzas desequilibradas "iniciales". Como al evaluar los residuos en el caso lineal, las fuerzas desequilibradas deben evaluarse restando de las fuerzas externas las fuerzas en equilibrio con los esfuerzos internos en cada elemento por separado. En el caso lineal esto era necesario sólo por razones de eficiencia en el cómputo; pero en el caso no lineal se justifica además por la forma de las expresiones empleadas.
- c. Siendo  $r$  las fuerzas desequilibradas, es decir, el vector residuo, se requeriría determinar el producto  $Kr$ . Aún cuando pueda evaluarse la matriz  $K$  tangente para cada elemento, es más eficiente determinar una aproximación secante. Así, considerando una fracción pequeña de  $r$ , que en lo que sigue se denomina  $e$ , puede obtenerse  $Ke$  a partir de los esfuerzos ya conocidos al inicio del intervalo y de aquellos calculados para los desplazamientos nodales  $a+e$ . Considerando los incrementos de deformaciones unitarias  $Be$  se calculan estos esfuerzos,  $\bar{\sigma}$ , y entonces:

$$Ke = \int_{Vol} B^T (\bar{\sigma} - \sigma) dVol$$

y siendo  $\alpha = \frac{e^T e}{e^T (Ke)}$  se tiene:

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n = a_n + \alpha r_n$$

- d. Con los desplazamiento nodales corregidos, se actualizan las deformaciones unitarias y se calculan los correspondientes esfuerzos. A partir de éstos se obtienen las fuerzas desequilibradas, repitiéndose el paso anterior. Como en otros casos, la iteración puede concluirse cuando la norma de la matriz de fuerzas desequilibradas no excede una tolerancia establecida como un porcentaje de la norma de la matriz de fuerzas totales.

---

# CAPÍTULO V

---

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### **5.1 Conclusiones y Recomendaciones**

1. Se comprueba que para un análisis lineal el número de iteraciones es menor que el tamaño de la matriz de rigidez de la estructura, ver Tabla III.3, lo que la teoría del método de la gradiente conjugada indicaba.
2. En el análisis de pórticos planos, los valores de tiempo para el programa PT (método de Eliminación Gaussiana), son menores que aquellos que utilizan cualquier variante de gradiente conjugada, pero conforme aumenta el número de grados de libertad, la diferencia, en tiempo, se hace notable a favor de los métodos de gradiente conjugada, tal como lo ilustra el Gráfico III.1.

3. La conclusión 2 nos lleva a suponer que los procedimientos tradicionales de eliminación gaussiana no son muy efectivos para los casos de muchos grados de libertad no restringidos.
4. La variante ofrecida, es decir el método de gradiente conjugada preconditionada, produce una disminución en el número de iteraciones, con respecto al de gradiente conjugada. Observar la Tabla III.3.
5. Pero a pesar de la conclusión 4, el tiempo empleado para realizar algún análisis es muy parecido entre el método de la gradiente conjugada y el de gradiente conjugada preconditionada. Ver Gráfico III.1.
6. Como se puede observar en la Tabla III.2 las relaciones de rigidez entre viga y columna no influyen dentro de los resultados que se obtienen al utilizar procedimientos de gradiente conjugada o gradiente conjugada preconditionada.
7. Una variante utilizada, para interrumpir la ejecución del programa es el criterio de Energía Potencial, este detiene el proceso antes que el vector residuo alcance la tolerancia, produciendo de esta manera un número de iteraciones menor, como se puede observar en la Tabla III.5.
8. Se puede apreciar en el Gráfico III.1 y la Tabla III.4, que existen diferencias más notorias entre los tiempos de ejecución de G.C. E.P. y G.C.P. E.P., que entre los casos de gradiente conjugada y gradiente conjugada preconditionada.

9. En los ejemplos de análisis tridimensional de pórticos se prefirió utilizar el procedimiento de gradiente conjugada al que usaba la variante de Energía Potencial, como se puede contemplar en las Tablas III.8 y III.9. En la Tabla III.8 se distingue la diferencia en número de iteraciones entre G.C. y G.C. E.P., favoreciendo al último de ellos. A pesar de ello, en la Tabla III.9 se puede advertir todo lo contrario, cuando se observa el tiempo utilizado por G.C. y G.C. E.P., se aprecia que el mejor procedimiento a recurrir es G.C.
10. En las Tablas III.8 y III.9 se advierten unas columnas de porcentajes, cuya finalidad es mostrar las diferencias existentes a favor de los procedimientos de gradiente.
11. En el análisis tridimensional, ver Tabla III.9, las comparaciones de tiempo entre los programas SFE (análisis tridimensional de pórticos utilizando el método de Eliminación Gaussiana) y los métodos: gradiente conjugada con energía potencial (G.C. E.P.) y gradiente conjugada G.C., son sustancialmente diferentes lo que nos ratifica que los procedimientos de gradiente conjugada produce los mismos resultados y además en un tiempo mucho menor. En todos los casos analizados los porcentajes de tiempo utilizados por los algoritmos de gradiente están muy por debajo del usado por el programa SFE.
12. Los ejemplos tridimensionales no hicieron mas que confirmar lo que ya se había avisado en los ejemplos bidimensionales, es decir que el procedimiento empleado en

la presente tesis lleva a tiempos de cómputo más efectivos y rápidos, pero sin descuidar la precisión de los cálculos.

13. A pesar de lo expuesto por el Gráfico III.1, en que el mejor de todos los procedimientos sería, en teoría, el de G.C.P. E.P., no fue utilizado en el análisis tridimensional, ya que la manera de implementar este procedimiento era demasiado difícil en lo que se refiere a la programación.

14. El análisis no lineal solamente se basó en estructuras tipo armaduras, debido a que se deseaba centrar la atención sobre el comportamiento del procedimiento de gradiente conjugada en si y no tanto en los aspectos de comportamiento no lineal.

15. Según la referencia [5], para el análisis no lineal se debería utilizar el procedimiento descrito en acápite 4.2.2 correspondiente, pero este no producía los resultados esperados tanto en desplazamientos como en fuerzas, así que se tuvo que cambiar la forma de obtener los residuos usando la fórmula "primitiva" es decir  $r_k = f - Ku_k$ , lo que causó el efecto deseado, es decir, los desplazamientos y fuerzas eran ya los correctos.

16. Los resultados de estos análisis no lineales usando el programa gcnl-t2, ver Anexo B, son muy similares a los obtenidos mediante el procedimiento "manual", ver Tabla IV.1, lo que comprueba nuevamente la factibilidad para su implementación.

17. Todos los programas elaborados, ya sea para pórticos bidimensionales y tridimensionales, lineales y no lineales, utilizan casi los mismos pasos indicados en acápites anteriores y su implementación se realiza de una manera muy sencilla. Por otra parte, aunque no es la más importante, reduce el almacenaje en memoria de enormes matrices como la de la matriz de rigidez.

18. Estos estudios reflejan la posibilidad de usar procedimientos de gradiente, en lo que se refiere al análisis de estructuras tanto al suponer comportamiento lineal como no lineal. Como, se podrá avisorar, una posibilidad es la de utilizarlos en el análisis de estructuras modeladas con elementos finitos, tanto en los estados lineal y no lineal.



## **Bibliografía**

1. D.K. FADDEEV AND V.N. FADDEEVA, *Computational Methods of Linear Algebra*. W. H. Freeman and Company, USA, 1963.
2. D. KINCAID, W. CHENEY, *Análisis Numérico*, Addison-Wesley Iberoamericana, USA, 1994.
3. K. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc, USA, 1976.
4. G. DAHLQUIST, Å. BJÖRCK, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Inc, USA, 1974.
5. J. T. ODEN, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill Book Company, USA, 1972.
6. O. C. ZIENKIEWICZ - R. L. TAYLOR, *El Método de los Elementos Finitos Vol. 2*, MacGraw-Hill Book Company, USA, 1995.
7. J. FORNÓNS-GARCÍA, *El Método de los Elementos Finitos en la Ingeniería de Estructuras*, Universidad Politécnica de Barcelona, España, 1982.