UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

INTRODUCCION A LA MEJOR APROXIMACION UNIFORME POR ESPACIOS DE CHEBYSHEV

INFORME DE SUFICIENCIA
PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMATICA

PABLO JAVIER GALARRETA ACHAHUANCO

LIMA-PERU
2003

Este trabajo está dedicado a mi familia, quienes gracias a su aliento, paciencia y consideraciones, me impulsan a seguir adelante.

Agradecimientos

Quisiera agradecer por este trabajo a mi Profesor Asesor Alessandri Canchoa Quispe, quien gracias a sus conocimientos y sugerencias respecto al tema que me tocó elaborar, supo guiarme de manera adecuada hasta la finalización del mismo.

Además, aprovecho la ocasión para hacer llegar mi reconocimiento a todas aquellas personas que en algún momento me brindaron su apoyo para la elaboración de este trabajo. Les estoy muy agradecido.

Indice

Resumen

Este trabajo suministra condiciones básicas en la teoría de la mejor aproximación uniforme en espacios lineales reales normados, referentes a la existencia, unicidad y caracterización de las mejores aproximaciones, la investigación de las propiedades de continuidad de la proyección métrica para calcular las mejores aproximaciones uniformes, dedicando nuestra atención principal a los espacios de Chebyshev, así como se muestra el algoritmo de Remez para el cálculo de la mejor aproximación uniforme desde espacios de Chebyshev.

Introducción

La interpolación es un método relativamente simple para aproximar una función dada por funciones de un espacio de dimensión finita, en particular por espacios de polinomios.

De otro lado, es natural investigar aquellas funciones de un espacio de dimensión finita las cuales son las mejores aproximaciones de una función con respecto a una norma dada.

Empezamos con algunos hechos elementales sobre mejor aproximación en espacios lineales reales normados. Luego consideraremos mejor aproximación por espacios de Chebyshev en la norma uniforme. En particular, nosotros damos resultados sobre caracterización, unicidad y unicidad fuerte de las mejores aproximaciones uniformes. Finalmente, describimos un algoritmo para calcular tales aproximaciones.

Capítulo 1

Mejores Aproximaciones Uniformes

1.1 Mejor Aproximación en Espacios Lineales Normados

Nosotros damos algunos hechos elementales sobre existencia, unicidad y continuidad concerniente a la mejor aproximación en espacios lineales normados.

El problema de la mejor aproximación puede ser establecido como sigue.

Definición 1.1 *Sea G un subconjunto no vacío de un espacio lineal real normado E, y sea un elemento $f \in E$ dado. El* ***problema de la mejor aproximación*** *es determinar un elemento $g_f \in G$ tal que*

$$\|f - g_f\| = \inf_{g \in G} \|f - g\|. \tag{1.1}$$

Tal elemento es llamado una ***mejor aproximación*** *de f desde G, y*

$$d(f, G) = \inf_{g \in G} \|f - g\|, \tag{1.2}$$

es llamada la ***desviación minimal*** *de f desde G. El conjunto de las mejores aproximaciones de f desde G es denotado por $P_G(f)$ y la aplicación conjunto-valuada* *resultante $P_G : E \to POW(G)$ es llamada la* **proyección métrica** *sobre G, donde $POW(G)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de G.*

Observación 1.1 *Ejemplos clásicos de problemas de mejor aproximación corresponden a $E = C[a,b]$, G es un subespacio de polinomios o un subespacio de splines (en este trabajo no serán estudiados los splines) y la norma es una L_p-norma, donde $1 \leq p \leq \infty$.*

Los problemas básicos en la teoría de la mejor aproximación son la existencia, unicidad y caracterización de las mejores aproximaciones, la investigación de las propiedades de continuidad de la proyección métrica y el desarrollo de métodos eficientes para calcular las mejores aproximaciones. Un problema adicional es investigar la importancia de la aproximación de ciertas clases de funciones, en particular de polinomios y splines.

Primero mostraremos que las mejores aproximaciones desde espacios de dimensión finita siempre existen.

Teorema 1.1 *Sea G un subespacio de dimensión finita de un espacio lineal real normado E. Entonces para cualquier $f \in E$, existe una mejor aproximación desde G.*

Prueba. Sea $f \in E$ arbitrario. Entonces por definición de ínfimo, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un $g_n \in G$ tal que

$$d(f,G) \leq \|f - g_n\| < d(f,G) + \frac{1}{n}.$$

De esta manera hemos construido una sucesión (g_n) en G tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = d(f,G),$$

pero esto implica que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\|f - g_n\| - d(f,G)| < 1 \text{ para } n > n_0,$$

luego tenemos que $\|f - g_n\| < d(f,G) + 1$ siempre que $n > n_0$, por lo tanto

$$\|g_n\| \leq \|f - g_n\| + \|f\| < d(f,G) + 1 + \|f\| \text{ para } n > n_0.$$

Sea $K = \max\{d(f,G) + 1 + \|f\|, \|g_1\|, \ldots, \|g_{n_0}\|\}$, entonces $K > 0$ y $\|g_n\| \leq K$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto (g_n) es una sucesión acotada en G, y como G es de dimensión finita, tenemos que existe una subsucesión (g_{k_n}) de (g_n) y existe un $g_f \in G$ tal que $\lim_{n\to\infty} g_{k_n} = g_f$. Luego

$$\|f - g_f\| = \left\|f - \lim_{n\to\infty} g_{k_n}\right\| = \lim_{n\to\infty} \|f - g_{k_n}\| = d(f,G),$$

es decir $g_f \in P_G(f)$. Esto prueba el teorema 1.1. ∎

Ejemplo 1.1 *La dimensión finita de G es fundamental en el teorema 1.1. En efecto, si G es el conjunto de todos los polinomios sobre $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, considerado como subespacio de $C\left[0,\frac{1}{2}\right]$, se tiene que $\dim(G) = \infty$. Sea $f : \left[0,\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, tal que $f(t) = (1-t)^{-1}$ para todo $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ definimos $h_n : \left[0,\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, tal que*

$$h_n(t) = 1 + t + \ldots + t^n,$$

para todo $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$. Evidentemente para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in G$. Ahora sea un $\varepsilon > 0$ cualquiera y $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$. Luego

$$\begin{aligned} |f(t) - h_n(t)| &= \left|\frac{1}{1-t} - (1 + t + \ldots + t^n)\right| = \left|\frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right| \\ &= \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ahora bien, $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ si $n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$. Luego si $N \in \mathbb{N}$ y $N > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$, para cualquier $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

$$|f(t) - h_n(t)| < \varepsilon \textit{ siempre que } n > N.$$

Luego se tiene que

$$\|f - h_n\|_\infty < \varepsilon \textit{ siempre que } n > N,$$

(ver definición de la norma uniforme en el ejemplo 1.3) y de aquí $d(f,G)=0$. Sin embargo, desde que f no es un polinomio, observamos que no existe $g \in G$ tal que

$$d(f,G)=\|f-g\|_{\infty}=0.$$

El siguiente resultado muestra que las mejores aproximaciones desde un subespacio de dimensión finita de un espacio estrictamente convexo son siempre únicas.

Definición 1.2 *Un espacio lineal real normado E es llamado* ***estrictamente convexo*** *si para cualesquiera f_1, $f_2 \in E$ con $f_1 \neq f_2$ y $\|f_1\|=\|f_2\|=1$, se cumple que $\left\|\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right\|<1$.*

Teorema 1.2 *Sea G un subespacio de dimensión finita de un espacio estrictamente convexo E. Entonces para cada $f \in E$, existe una única mejor aproximación desde G.*

Prueba. Sea $f \in E$ arbitrario. Desde que G es de dimensión finita, por el teorema anterior existe un elemento $g_f \in P_G(f)$. Mostraremos que $P_G(f)=\{g_f\}$. Primero mostramos que $P_G(f)$ es convexo. Sean g_1, $g_2 \in P_G(f)$ y $a \in [0,1]$ dados. Entonces

$$\begin{aligned}\|f-(ag_1+(1-a)\,g_2)\| &= \|a\,(f-g_1)+(1-a)(f-g_2)\| \\ &\leq a\,\|f-g_1\|+(1-a)\,\|f-g_2\| \\ &= ad\,(f,G)+(1-a)d(f,G) \\ &= d\,(f,G)\,.\end{aligned}$$

Desde que $ag_1+(1-a)\,g_2 \in G$, esto muestra que $ag_1+(1-a)\,g_2 \in P_G(f)$. Supongamos ahora que $g \in P_G(f)$. Entonces $\frac{1}{2}(g_f+g) \in P_G(f)$, lo cual implica que

$$\left\|\tfrac{1}{2}\left\{(f-g_f)+(f-g)\right\}\right\|=\left\|f-\tfrac{1}{2}(g_f+g)\right\|=d(f,G).$$

Ahora, $d(f,G)=0$ o $d(f,G)>0$. Si $d(f,G)=0$, entonces $\|f-g_f\|=\|f-g\|=0$, lo cual implica que $f-g_f=f-g=0$, entonces $g=f=g_f$. Si $d(f,G)>0$, sean

$$f_1=\frac{1}{d(f,G)}\,(f-g_f)\ \text{ y } f_2=\frac{1}{d(f,G)}\,(f-g)\,,$$

entonces $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ y $\left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\| = 1$, pero E es estrictamente convexo, luego se tiene que $f_1 = f_2$, lo cual implica que $f - g_f = f - g$, es decir $g = g_f$. Esto muestra que $P_G(f) = \{g_f\}$ y prueba el teorema 1.2. ■

Ejemplo 1.2 *Si E es un espacio prehilbertiano, entonces E es un espacio estrictamente convexo. En efecto, sean f_1, $f_2 \in E$ con $f_1 \neq f_2$ y $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$, por la igualdad del paralelogramo, tenemos*

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|^2 &= -\|f_1 - f_2\|^2 + 2(\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2) \\ &< 0 + 2(1+1) = 4,\end{aligned}$$

por lo tanto, $\left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\| < 1$.

Ejemplo 1.3 *Sea el espacio $C[a,b]$ dotado con la norma uniforme o L_∞-**norma***

$$\|h\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |h(t)|, \qquad h \in C[a,b].$$

Definimos $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ para $i = 1,2$ tal que

$$f_1(t) = 1, \qquad f_2(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

para cada $t \in [a,b]$. Claramente, f_1, $f_2 \in C[a,b]$ y $f_1 \neq f_2$. También tenemos que $\|f_1\|_\infty = \|f_2\|_\infty = 1$, y

$$\|f_1 + f_2\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \left|1 + \frac{t-a}{b-a}\right| = 2.$$

Esto muestra que $C[a,b]$ dotado con la norma uniforme no es estrictamente convexo.

Ejemplo 1.4 *Sea el espacio $C[a,b]$ dotado con la L_1-**norma***

$$\|h\|_1 = \int_a^b |h(t)|\, dt, \qquad h \in C[a,b].$$

Definimos $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ para $i = 1,2$ tal que

$$f_1(t) = \frac{1}{b-a}, \qquad f_2(t) = \frac{2(t-a)}{(b-a)^2}$$

para cada $t \in [a,b]$. *Claramente,* $f_1,\ f_2 \in C[a,b]$ *y* $f_1 \neq f_2$. *También tenemos que* $\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = 1$, *y*

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_a^b \left| \frac{1}{b-a} + \frac{2(t-a)}{(b-a)^2} \right| dt = 2.$$

Esto muestra que $C[a,b]$ *dotado con la* L_1-***norma*** *no es estrictamente convexo.*

Ejemplo 1.5 *Sea* $p > 1$ *y consideremos el espacio* $C[a,b]$ *dotado con la* L_p-***norma***

$$\|h\|_p = \left(\int_a^b |h(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \qquad h \in C[a,b].$$

Demostraremos que $C[a,b]$ *dotado con la* L_p-***norma****, es estrictamente convexo. Para esto usaremos las siguientes propiedades:*

(i) *Para cualquier* $p > 1$ *y cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$, *con* $x \neq y$, *se cumple*

$$|x+y|^p < 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).$$

(ii) *Sean* $f, g \in C[a,b]$ *tal que* $f(t) \leq g(t)$ *para cada* $t \in [a,b]$. *Si existe* $t_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(t_0) < g(t_0)$, *entonces*

$$\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt.$$

Ahora sean $f_1,\ f_2 \in C[a,b]$ *con* $f_1 \neq f_2$ *y* $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1$. *Como* $f_1 \neq f_2$, *se tiene que existe* $t_0 \in [a,b]$, *tal que* $f_1(t_0) \neq f_2(t_0)$, *luego usando* (i), *tenemos*

$$|f_1(t_0) + f_2(t_0)|^p < 2^{p-1}(|f_1(t_0)|^p + |f_2(t_0)|^p). \tag{1.3}$$

También por (i) *se tiene que*

$$|f_1(t) + f_2(t)|^p \leq 2^{p-1}(|f_1(t)|^p + |f_2(t)|^p), \tag{1.4}$$

para cada $t \in [a,b]$. *De las desigualdades (1.3) y (1.4) y de* (ii) *concluimos que*

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_1(t) + f_2(t)|^p \, dt &< 2^{p-1}\left(\int_a^b |f_1(t)|^p \, dt + \int_a^b |f_2(t)|^p \, dt\right) \\ &= 2^{p-1}(1+1) = 2^p, \end{aligned}$$

de aquí tenemos que $\|f_1 + f_2\|_p < 2$. *Esto muestra que* $C[a,b]$ *dotado con la* L_p-***norma*** *donde* $p > 1$, *es estrictamente convexo.*

Observación 1.2 *Por la tanto, se sigue del teorema 1.2 que si G es un subespacio de dimensión finita de $C[a,b]$, entonces las mejores aproximaciones con respecto a una L_p-norma, $1 < p < \infty$, son siempre únicas. Sin embargo, el problema de unicidad de las mejores aproximaciones con respecto a la L_1-norma o L_∞-norma necesita investigaciones adicionales.*

Concluimos esta sección con un resultado de continuidad de la proyección métrica.

Teorema 1.3 *Sea G un subespacio de dimensión finita de un espacio lineal real normado E con la propiedad de que cada función en E tiene una única mejor aproximación desde G. Entonces la proyección métrica $P_G : E \to G$ es continua.*

Prueba. La prueba se divide en tres partes. Primero mostramos que para cualesquiera $f_1, f_2 \in E$, se tiene que $|d(f_1, G) - d(f_2, G)| \leq \|f_1 - f_2\|$. Veamos, sean $f_1, f_2 \in E$ dados, luego

$$d(f_1, G) \leq \|f_1 - g\| \leq \|f_1 - f_2\| + \|f_2 - g\| \text{ para cada } g \in G,$$

es decir

$$d(f_1, G) - \|f_1 - f_2\| \leq \|f_2 - g\| \text{ para cada } g \in G,$$

lo cual implica que

$$d(f_1, G) - \|f_1 - f_2\| \leq d(f_2, G),$$

con lo cual concluimos que

$$d(f_1, G) - d(f_2, G) \leq \|f_1 - f_2\|.$$

De manera análoga $d(f_2, G) - d(f_1, G) \leq \|f_1 - f_2\|$, por lo tanto

$$|d(f_1, G) - d(f_2, G)| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Lo segundo que mostraremos es que la función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(f) = d(f, G)$ para cualquier $f \in E$, es continua. Veamos, sean $f \in E$ y $\epsilon > 0$ dados, y sea $\delta = \epsilon$, luego $h \in E, \|h - f\| < \delta \Rightarrow |\varphi(h) - \varphi(f)| = |d(h, G) - d(f, G)| \leq \|h - f\| < \delta = \epsilon$, por lo tanto $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es continua. Estamos listos para probar que la proyección métrica $P_G : E \to G$ es continua. Supongamos lo contrario, es decir supongamos que exista $f_0 \in E$ tal que P_G no es continua en f_0, luego existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un $f_n \in E$ con $\|f_n - f_0\| < \frac{1}{n}$ y $\|P_G(f_n) - P_G(f_0)\| \geq \epsilon_0$. De esta manera, hemos construido una sucesión (f_n) en E tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$. Ahora la función φ definida anteriormente es continua, luego la sucesión $(\varphi(f_n))$ converge a $\varphi(f_0)$. Por otro lado

$$\|P_G(f_n)\| \leq \|P_G(f_n) - f_n\| + \|f_n\| = d(f_n, G) + \|f_n\| = \varphi(f_n) + \|f_n\|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $(P_G(f_n))$ es acotada puesto que las sucesiones $(\varphi(f_n))$ y (f_n) son acotadas por ser convergentes. Desde que G es un subespacio de dimensión finita y $(P_G(f_n))$ es una sucesión acotada en G, tenemos que existe una subsucesión $(P_G(f_{k_n}))$ de $(P_G(f_n))$ tal que $\lim_{n\to\infty} P_G(f_{k_n}) = g_0$, donde $g_0 \in G$. Evidentemente $g_0 \neq P_G(f_0)$, ya que si $g_0 = P_G(f_0)$, tendríamos que $\|P_G(f_{k_n}) - g_0\| \geq \epsilon_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implicaría que $0 \geq \epsilon_0$, lo cual es absurdo ya que $\epsilon_0 > 0$. Ahora

$$\begin{aligned}
\|f_0 - g_0\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} f_{k_n} - \lim_{n\to\infty} P_G(f_{k_n}) \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|f_{k_n} - P_G(f_{k_n})\| = \lim_{n\to\infty} d(f_{k_n}, G) \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi(f_{k_n}) = \varphi(f_0) = d(f_0, G).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, g_0 y $P_G(f_0)$ son dos distintas mejores aproximaciones de f desde G, lo cual contradice la unicidad de las mejores aproximaciones. Esto prueba el teorema 1.3. ■

1.2 Caracterización de las Mejores Aproximaciones Uniformes

En esta sección proporcionamos caracterizaciones de las mejores aproximaciones uniformes. En particular, es mostrado que las mejores aproximaciones uniformes desde espacios de Chebyshev pueden ser caracterizadas por propiedades de alternación.

Empezamos con la definición de las mejores aproximaciones uniformes.

Definición 1.3 *Para cada función $h \in C[a,b]$, la* ***norma uniforme*** *o* L_∞***-norma*** *es definida por*

$$\|h\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |h(t)| . \tag{1.5}$$

Las mejores aproximaciones con respecto a esta norma son llamadas las ***mejores aproximaciones uniformes****.*

En los resultados siguentes la notación siguiente es usada. El conjunto de *puntos extremos* de una función $h \in C[a,b]$ es definida por

$$E(h) = \{t \in [a,b] \,/\, |h(t)| = \|h\|_\infty\} .$$

Es sencillo probar que $E(h)$ es compacto. A continuación damos una caracterización de las mejores aproximaciones uniformes debido a Kolmogorov.

Teorema 1.4 *Sean G un subespacio de $C[a,b]$, $f \in C[a,b]$ y $g_f \in G$. Las siguientes expresiones son equivalentes:*

(i) La función g_f es una mejor aproximación uniforme de f desde G.

(ii) Para cada función $g \in G$,

$$\min_{t\in E(f-g_f)} (f(t) - g_f(t))g(t) \leq 0. \tag{1.6}$$

Prueba. $(ii) \Rightarrow (i)$. Usaremos la siguiente propiedad:

Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \leq 0. \tag{1.7}$$

Supongamos que se cumple (ii) y sea $g \in G$ dado. Como G es un subespacio de $C[a,b]$ con g, $g_f \in G$, entonces $g - g_f \in G$, luego por hipótesis

$$\min_{t\in E(f-g_f)} (f(t) - g_f(t))(g(t) - g_f(t)) \leq 0.$$

Pero $E(f-g_f)$ es compacto, entonces existe $t_0 \in E(f-g_f)$ tal que

$$(f(t_0)-g_f(t_0))(g(t_0)-g_f(t_0)) \leq 0. \tag{1.8}$$

La propiedad dada en (1.7) y (1.8) y nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_\infty \geq |f(t_0)-g(t_0)| &= |(f(t_0)-g_f(t_0))-(g(t_0)-g_f(t_0))| \\
&= |f(t_0)-g_f(t_0)| + |g(t_0)-g_f(t_0)| \\
&= \|f-g_f\|_\infty + |g(t_0)-g_f(t_0)| \geq \|f-g_f\|_\infty,
\end{aligned}$$

para cada $g \in G$, y como $g_f \in G$, se concluye que

$$\|f-g_f\|_\infty = d(f,G),$$

luego se cumple (i).

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que (ii) no se cumple, es decir existe una función $g_1 \in G$ tal que

$$\alpha = \min_{t \in E(f-g_f)} (f(t)-g_f(t))g_1(t) > 0.$$

Luego, para cada $t \in E(f-g_f)$,

$$(f(t)-g_f(t))g_1(t) > \frac{\alpha}{2}. \tag{1.9}$$

Desde que $(f-g_f)g_1 \in C[a,b]$, esto y (1.9) implican que para cada $t \in E(f-g_f)$ existe un intervalo abierto I_t con $t \in I_t$ tal que para cada $s \in [a,b] \cap I_t$,

$$(f(s)-g_f(s))g_1(s) > \frac{\alpha}{2}. \tag{1.10}$$

Ahora, es claro que $E(f-g_f) \subset I = \bigcup_{t \in E(f-g_f)} I_t$ con I abierto, luego $[a,b] \setminus I$ es cerrado, y como $[a,b] \setminus I$ es acotado, entonces $[a,b] \setminus I$ es compacto, luego existe $\max_{t \in [a,b] \setminus I} |f(t)-g_f(t)|$, y se tiene

$$\max_{t \in [a,b] \setminus I} |f(t)-g_f(t)| < \|f-g_f\|_\infty. \tag{1.11}$$

Debe observarse que en (1.11) se obtiene la desigualdad estricta, y no puede darse la igualdad ya que si este fuera el caso, existiría $t_0 \in [a,b] \setminus I$ tal que

$$|f(t_0) - g_f(t_0)| = \|f - g_f\|_\infty ,$$

lo que implicaría que $t_0 \in E(f - g_f) \subset I$, es decir $t_0 \in I$, pero esto es absurdo ya que $t_0 \notin I$. Definimos

$$\beta = \|f - g_f\|_\infty - \max_{t\in[a,b]\setminus I} |f(t) - g_f(t)| > 0, \tag{1.12}$$

$$\lambda = \min \left\{ \frac{\alpha}{2\|g_1\|_\infty^2}, \frac{\beta}{2\|g_1\|_\infty} \right\} > 0, \tag{1.13}$$

y

$$g_2 = g_f + \lambda g_1. \tag{1.14}$$

Luego por (1.10), (1.13) y (1.14) tenemos que para todo $t \in [a,b] \cap I$,

$$\begin{aligned}
(f(t) - g_2(t))^2 &= (f(t) - g_f(t) - \lambda g_1(t))^2 \\
&= (f(t) - g_f(t))^2 - 2\lambda(f(t) - g_f(t))g_1(t) + \lambda^2 g_1^2(t) \\
&< \|f - g_f\|_\infty^2 - \lambda\alpha + \lambda^2 \|g_1\|_\infty^2 \leq \|f - g_f\|_\infty^2 - \lambda\alpha + \lambda^2 \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right) \\
&= \|f - g_f\|_\infty^2 - \frac{\lambda\alpha}{2} < \|f - g_f\|_\infty^2 .
\end{aligned}$$

Luego se ha probado que para todo $t \in [a,b] \cap I$,

$$|f(t) - g_2(t)| < \|f - g_f\|_\infty . \tag{1.15}$$

Además, por (1.12), (1.13) y (1.14) tenemos para todo $t \in [a,b] \setminus I$,

$$\begin{aligned}
|f(t) - g_2(t)| &= |f(t) - g_f(t) - \lambda g_1(t)| \leq |f(t) - g_f(t)| + \lambda |g_1(t)| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]\setminus I} |f(t) - g_f(t)| + \lambda \|g_1\|_\infty \leq \|f - g_f\|_\infty - \beta + \lambda \left(\frac{\beta}{2\lambda}\right) \\
&= \|f - g_f\|_\infty - \frac{\beta}{2} < \|f - g_f\|_\infty .
\end{aligned}$$

Luego se ha probado que para todo $t \in [a,b] \setminus I$,

$$|f(t) - g_2(t)| < \|f - g_f\|_\infty . \tag{1.16}$$

De (1.15) y (1.16) concluimos que

$$\|f - g_2\|_\infty < \|f - g_f\|_\infty ,$$

donde $g_2 \in G$, y por lo tanto, g_f no es mejor aproximación uniforme de f. Esto prueba el teorema 1.4. ∎

La condición (1.6) es llamado el *criterio de Kolmogorov* y representa un criterio general para las mejores aproximaciones uniformes desde subespacios arbitrarios de $C[a,b]$. Si consideramos la clase especial de espacios de Chebyshev, entonces usando el teorema 1.4, obtenemos una caracterización de las mejores aproximaciones uniformes en términos de puntos extremos alternantes del error (Teorema 1.8) la cual es la base del algoritmo descrito en el capítulo 2.

En lo siguiente damos algunas definiciones y teoremas sobre espacios de Chebyshev, cuyas pruebas pueden ser encontradas en el libro **Approximation by Spline Functions**, por Günther Nürnberger.

Sean $t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$ y $g_1, \ldots, g_n \in C[a,b]$, denotaremos por $D\begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix}$ al determinante dado por

$$D\begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_1(t_1) & \ldots & g_n(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(t_n) & \ldots & g_n(t_n) \end{vmatrix} .$$

Definición 1.4 *Un subespacio G de $C[a,b]$ tal que* $\dim(G) = n$, *es llamado un subespacio de Chebyshev o subespacio de Haar si existe una base $\{g_1, \ldots, g_n\}$ de G tal que*

$$D\begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} > 0$$

para todos los puntos $t_1 < \cdots < t_n$ en $[a,b]$

Teorema 1.5 *Sea G un subespacio de $C[a,b]$ tal que $\dim(G) = n \in \mathbb{N}$, las siguientes expresiones son equivalentes:*

(i) Para todas las funciones $f \in C[a,b]$ y todos los puntos $t_1 < \cdots < t_n$ en $[a,b]$ existe una única función $g \in G$ tal que

$$g(t_i) = f(t_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(ii) G es un subespacio de Chebyshev.

Teorema 1.6 *Sea G un subespacio de $C[a,b]$ tal que $\dim(G) = n \in \mathbb{N}$, las siguientes expresiones son equivalentes:*

(i) G es un subespacio de Chebyshev.

(ii) Ninguna función no nula de G tiene por lo menos n ceros distintos en $[a,b]$.

(iii) Para todos los puntos $a = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_{n-1} \leq t_n = b$, existe una función $g \in G$ tal que

$$\begin{aligned} g(t) &= 0, \quad t \in \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \\ g(t) &\neq 0, \quad t \notin \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \\ (-1)^i g(t) &> 0, \quad t \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6 *El prototipo de un subespacio de Chebyshev de $C[a,b]$ es*

$$P_n = \{p : [a,b] \to \mathbb{R}: \;\; p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

el subespacio de los polinomios de grado a lo más n. Es bien conocido que $\dim(P_n) = n+1$ y cada polinomio no nulo en P_n tiene a lo más n ceros distintos en $[a,b]$, luego por el teorema 1.6, P_n es un subespacio de Chebyshev de $C[a,b]$.

Ejemplo 1.7 *Sea $[a,b]$ un subintervalo de $[-\pi, \pi\rangle$. Llamamos*

$$\begin{aligned} Q_n = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}: \;\; & f(t) = a_0 + \textstyle\sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jt) + b_j \operatorname{sen}(jt)), \\ & a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

el espacio de los polinomios trigonométricos de grado n. Cada función $f \in Q_n$ puede ser escrita como

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \left((a_j - ib_j)\, e^{ijt} + (a_j + ib_j) e^{-ijt} \right).$$

Haciendo $z = e^{it}$, obtenemos $f(t) = z^{-n} p(z)$, donde p es un polinomio de grado a lo más $2n$ con coeficientes complejos. Desde que cada polinomio $p \neq 0$ tiene a lo más $2n$ ceros distintos, la función f tiene a lo más $2n$ ceros distintos en $[a, b]$. Además $\dim(Q_n) = 2n + 1$, por lo tanto, se sigue del teorema 1.6 que Q_n es un subespacio de Chebyshev de $C[a, b]$.

Corolario 1.1 *Sea G un subespacio de $C[a, b]$ tal que $\dim(G) = n \in \mathbb{N}$. Luego para todo entero $m \in \{1, \ldots, n\}$ y todos los puntos $a = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_{m-1} \leq t_m = b$, existe una función no nula $g \in G$ tal que*

$$(-1)^i g(t) \geq 0, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ahora estamos listos para dar un resultado de unicidad de Haar.

Teorema 1.7 *Sea G un subespacio de Chebyshev de $C[a, b]$. Entonces para cualquier función $f \in C[a, b]$, existe una única mejor aproximación uniforme desde G.*

Prueba. Supongamos que G es un subespacio de Chebyshev de $C[a, b]$ tal que $\dim(G) = n \in \mathbb{N}$ y sea $f \in C[a, b]$ dado. Es obvio que si $f \in G$, entonces f tiene una única mejor aproximación desde G dada por f. Ahora, si $f \notin G$, por el teorema 1.1 existe una mejor aproximación uniforme $g_f \in G$. Nosotros primero mostramos que $E(f - g_f)$ contiene al menos $n + 1$ puntos distintos. Supongamos lo contrario, es decir que $E(f - g_f) = \{t_1, \ldots, t_p\}$ con $p \leq n$. Sean los puntos $t_{p+1}, \ldots, t_n$ en $[a, b]$ tal que los puntos $t_1, \ldots, t_n$ son distintos. Desde que G es un subespacio de Chebyshev, por el teorema 1.5 existe una función $g \in G$ tal que

$$g(t_i) = f(t_i) - g_f(t_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Por otro lado, siendo $f \neq g_f$, tenemos

$$|f(t_i) - g_f(t_i)| = \|f - g_f\|_\infty > 0, \qquad i = 1, \dots, p.$$

Entonces para todo $t \in E(f - g_f)$, tenemos

$$(f(t) - g_f(t))g(t) = (f(t) - g_f(t))^2 > 0.$$

Por lo tanto, por el criterio de Kolmogorov, la función g_f no es mejor aproximación uniforme de f, lo cual es una contradicción. Supongamos ahora que $g_1, g_2 \in P_G(f)$, desde que $P_G(f)$ es convexo, tenemos que $g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in P_G(f)$. Así, existen $n+1$ puntos distintos $t_1, \dots, t_{n+1}$ en $E(f - g)$, luego

$$|f(t_i) - g(t_i)| = \|f - g\|_\infty = d(f, G), \qquad i = 1, \dots, n+1,$$

es decir

$$|(f(t_i) - g_1(t_i)) + (f(t_i) - g_2(t_i))| = 2d(f, G), \qquad i = 1, \dots, n+1. \tag{1.17}$$

También

$$|f(t_i) - g_j(t_i)| \leq \|f - g_j\|_\infty = d(f, G), \qquad i = 1, \dots, n+1, \quad j = 1, 2. \tag{1.18}$$

De (1.17) y (1.18), tenemos que

$$f(t_i) - g_1(t_i) = f(t_i) - g_2(t_i), \qquad i = 1, \dots, n+1,$$

lo cual es equivalente a

$$g_1(t_i) - g_2(t_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, n+1,$$

es decir $g_1 - g_2$ es un elemento de G con $n+1$ ceros distintos, con G subespacio de Chebyshev y $\dim(G) = n$, lo cual implica que $g_1 - g_2 = 0$. Esto prueba el teorema 1.7. ■

La idea de puntos extremos alternantes juega un rol importante en la descripción de las mejores aproximaciones.

Definición 1.5 *Llamamos a los puntos* $t_1 < \cdots < t_p$ *en* $[a,b]$ ***puntos extremos alternantes*** *de una función* $h \in C[a,b]$ *si existe un signo* $\sigma \in \{-1,1\}$ *tal que*

$$\sigma (-1)^i h(t_i) = \|h\|_\infty , \qquad i = 1, \ldots , p. \tag{1.19}$$

El siguiente resultado, debido a Chebyshev, muestra que las mejores aproximaciones uniformes desde espacios de Chebyshev son caracterizadas por propiedades de alternación del error.

Teorema 1.8 *Sean* G *un subespacio de Chebyshev de* $C[a,b]$ *con* $\dim(G) = n \in \mathbb{N}$, $f \in C[a,b]$ *y* $g_f \in G$. *Las siguientes expresiones son equivalentes:*

(i) La función g_f *es una mejor aproximación uniforme de* f *desde* G.

(ii) El error $f - g_f$ *tiene al menos* $n+1$ *puntos extremos alternantes en* $[a,b]$.

Prueba. Sea G un subespacio de Chebyshev $C[a,b]$ con $\dim(G) = n \in \mathbb{N}$.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que se cumple (ii), es decir existen puntos

$$a \leq t_1 < \cdots < t_{n+1} \leq b$$

y un signo $\sigma \in \{-1,1\}$ tal que

$$\sigma (-1)^i (f(t_i) - g_f(t_i)) = \|f - g_f\|_\infty , \qquad i = 1, \ldots , n+1. \tag{1.20}$$

Además, supongamos que (i) no se cumple, es decir existe una función $g \in G$ tal que

$$\|f - g\|_\infty < \|f - g_f\|_\infty .$$

Entonces se sigue de (1.20) que

$$\begin{aligned} \sigma (-1)^i (f(t_i) - g(t_i)) &\leq \|f - g\|_\infty < \|f - g_f\|_\infty \\ &= \sigma (-1)^i (f(t_i) - g_f(t_i)) , \qquad i = 1, \ldots , n+1, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sigma (-1)^i (g_f(t_i) - g(t_i)) < 0, \qquad i = 1, \ldots , n+1.$$

Por lo tanto, la función no nula $\sigma(g_f - g) \in G$ tiene al menos n ceros distintos en $[a,b]$, lo cual contradice el teorema 1.6.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que se cumple (i). Es obvio que si $f \in G$, entonces $f - g_f = 0$ tiene más de $n+1$ puntos extremos alternantes. Ahora, si $f \in C[a,b] \setminus G$, demostraremos que $f - g_f$ tiene al menos $n+1$ puntos extremos alternantes en $[a,b]$. Supongamos lo contrario, luego se tiene que $f - g_f$ tiene a lo más n puntos extremos alternantes. Nosotros escogemos un número maximal de puntos extremos alternantes $t_1 < \cdots < t_r$ de $f - g_f$. Entonces se tiene que $r \leq n$. Asumiremos que $f(t_1) - g_f(t_1) = \|f - g_f\|_\infty$. (El otro caso sigue análogamente). Así, existen puntos

$$a = u_0 < u_1 < \cdots < u_{r-1} < u_r = b$$

y un número real $c > 0$ tal que

$$u_i \in [t_i, t_{i+1}), \qquad i = 1, \ldots, r-1,$$

y

$$(-1)^{i+1}(f(t) - g_f(t)) \leq \|f - g_f\|_\infty - c, \quad t \in [u_i, u_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

Desde que $r \leq n$, por el Corolario 1.1 existe una función no nula $g \in G$ tal que

$$(-1)^{i+1} g(t) \geq 0, \quad t \in [u_i, u_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

Sea $g_1 = -g$, entonces $g_1 \in G$ es una función no nula y

$$(-1)^i g_1(t) \geq 0, \quad t \in [u_i, u_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

Ahora consideremos $\lambda > 0$ tal que $\lambda \|g_1\|_\infty \leq c$. Entonces, tenemos para todo $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ y para todo $t \in [u_i, u_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} -\|f - g_f\|_\infty &\leq (-1)^{i+1}(f(t) - g_f(t)) \\ &\leq (-1)^{i+1}(f(t) - g_f(t)) - (-1)^{i+1}\lambda g_1(t) \\ &\leq \|f - g_f\|_\infty - c + \lambda \|g_1\|_\infty \\ &\leq \|f - g_f\|_\infty . \end{aligned}$$

Esto implica que para todo $t \in [a, b]$,

$$|f(t) - (g_f(t) + \lambda g_1(t))| \leq \|f - g_f\|_\infty ,$$

es decir

$$\|f - (g_f + \lambda g_1)\|_\infty \leq \|f - g_f\|_\infty .$$

Por lo tanto, las funciones distintas g_f y $g_f + \lambda g_1$ son mejores aproximaciones uniformes de f, lo cual contradice el teorema 1.7. Esto prueba el teorema 1.8. ■

Ejemplo 1.8 *El teorema justamente probado es muy importante para la determinación numérica de las mejores aproximaciones uniformes. Por ejemplo, si deseamos aproximar la función definida por* $f(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t$ *por un polinomio de grado menor o igual a* 1, $g(t) = a_0 + a_1 t$ *sobre* $[0, 1]$, *es decir, en este caso* $G = \operatorname{span}\{1, t\}$, *entonces la función error* $f - g$ *debe alternar al menos tres veces.*

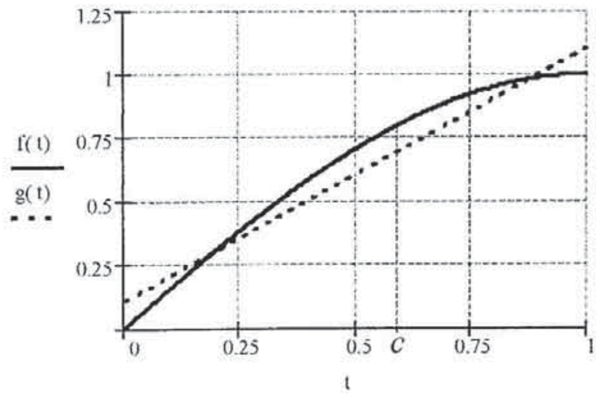

figura 1

De la figura 1, *podemos afirmar que los puntos de alternación son* 0, c *y* 1, *donde* c *es desconocido. Sea* $\epsilon = \|f - g\|_\infty$. *Entonces*

$$\begin{aligned} f(0) - g(0) &= -\epsilon \\ f(c) - g(c) &= \epsilon \\ f(1) - g(1) &= -\epsilon. \end{aligned}$$

Desde que $f(t) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi t$ *y* $g(t) = a_0 + a_1 t$*, tenemos las siguientes ecuaciones*

$$\begin{aligned} a_0 &= \epsilon \\ a_0 + ca_1 &= \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi c - \epsilon \\ a_0 + a_1 &= 1 + \epsilon. \end{aligned}$$

Si conocemos c, podemos determinar a_0*,* a_1 *y* ϵ*. En c, el error es máximo. Así* $f'(c) - g'(c) = 0$*, de aquí* $(\pi/2)\cos\frac{1}{2}\pi c = a_1$*. Desde que* $a_1 = 1$*, obtenemos* $c = (2/\pi)\arccos(2/\pi) = 0.56066418$ *y luego*

$$\epsilon = a_0 = \frac{1}{2}(-c + \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi c) = 0.10525683.$$

Capítulo 2

Unicidad Fuerte de las Mejores Aproximaciones Uniformes

2.1 Unicidad Global y Unicidad Fuerte de las Mejores Aproximaciones Uniformes

Se muestra que los espacios de Chebyshev son exactamente aquellos espacios para los cuales las mejores aproximaciones uniformes son siempre únicas e incluso únicas fuertemente. Para demostrar esto, necesitamos una caracterización de las mejores aproximaciones uniformes únicas fuertemente. Además daremos fórmulas para calcular la constante de unicidad fuerte.

Primero introducimos la idea de las mejores aproximaciones únicas fuertemente, las cuales juegan un rol importante en el cálculo de las mejores aproximaciones.

Definición 2.1 *Sea G un subespacio de $C[a,b]$. Una función $g_f \in G$ es llamada una mejor aproximación uniforme única fuertemente de $f \in C[a,b]$ si existe una constante $K_f > 0$ tal que para todo $g \in G$,*

$$\|f-g\|_\infty \geq \|f-g_f\|_\infty + K_f \|g-g_f\|_\infty . \tag{2.1}$$

La constante de unicidad fuerte $K(f)$ de f es definida como el máximo de tales números K_f.

Ahora discutimos la relación entre las mejores aproximaciones uniformes únicas y únicas fuertemente.

Observación 2.1 *Obviamente, cada mejor aproximación única fuertemente es una única mejor aproximación. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.*

Consideremos el subespacio $G = \text{span}\{g_1\}$ de $C[-1,1]$, donde $g_1(t) = t$. Sea la función $f_0 \in C[-1,1]$ definida por $f_0(t) = 1 - |t|$. Entonces las funciones g_1 y 0 son mejores aproximaciones uniformes de f_0 desde G. Sin embargo, si modificamos f_0 en una vecindad pequeña arbitraria de $t = 0$ tal que para la función resultante tenemos $f \in C[-1,1]$, $\|f\|_\infty = 1$ y $f'(0) = 0$, entonces $g_f = 0$ es una única, pero no una mejor aproximación uniforme única fuertemente de f desde G. Pero, desde que f_0 y f coinciden excepto en una vecindad pequeña de $t = 0$ y

$$\|f - g_1\|_\infty \approx \|f - g_f\|_\infty,$$

en la práctica consideraríamos ambos g_f y g_1 como las mejores aproximaciones uniformes de f desde G.

Además, este ejemplo muestra que aunque una función $g_f \in G$ es una única mejor aproximación uniforme de una función dada f, no podemos concluir que, si para algún $g_1 \in G$, $\|f - g_1\|_\infty - \|f - g_f\|_\infty$ es pequeño, entonces también $\|g_1 - g_f\|_\infty$ es pequeño. Esto, sin embargo, es cierto si $g_f \in G$ es una mejor aproximación única fuertemente de f, desde que para todo $g \in G$,

$$\|g - g_f\|_\infty \leq \frac{1}{K_f}\left(\|f - g\|_\infty - \|f - g_f\|_\infty\right). \tag{2.2}$$

Las observaciones anteriores muestran que en la práctica solamente las mejores aproximaciones únicas fuertemente pueden ser consideradas como únicas mejores aproximaciones.

Ahora examinaremos la relación entre la unicidad fuerte y la Lipschitz-continuidad de la proyección métrica.

Definición 2.2 *Sea G un subconjunto de $C[a,b]$ y sea $f \in C[a,b]$ tal que f tiene una única mejor aproximación uniforme $g_f \in G$. La proyección métrica*

$$P_G : C[a,b] \to POW(G)$$

es llamada Lipschitz-continua en f si existe una constante $L_f > 0$ tal que para todo $\tilde{f} \in C[a,b]$ y todo $g_{\tilde{f}} \in P_G(\tilde{f})$,

$$\left\|g_f - g_{\tilde{f}}\right\|_\infty \leq L_f \left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty \tag{2.3}$$

Teorema 2.1 *Sean G un subconjunto de $C[a,b]$ y $f \in C[a,b]$. Si f tiene una mejor aproximación uniforme única fuertemente desde G, entonces la proyección métrica $P_G : C[a,b] \to POW(G)$ es Lipschitz-continua en f.*

Prueba. Sea $f \in C[a,b]$ tal que f tenga una única mejor aproximación uniforme $g_f \in G$, es decir existe una constante $K_f > 0$ tal que para todo $g \in G$,

$$\|f - g\|_\infty \geq \|f - g_f\|_\infty + K_f \|g - g_f\|_\infty .$$

Entonces para todo $\tilde{f} \in C[a,b]$ y todo $g_{\tilde{f}} \in P_G(\tilde{f})$, tenemos

$$\begin{aligned}
K_f \left\|g_f - g_{\tilde{f}}\right\|_\infty &\leq \left\|f - g_{\tilde{f}}\right\|_\infty - \|f - g_f\|_\infty \\
&\leq \left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty + \left\|\tilde{f} - g_{\tilde{f}}\right\|_\infty - \|f - g_f\|_\infty \\
&= \left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty + d(\tilde{f}, G) - \|f - g_f\|_\infty \\
&\leq \left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty + \left\|\tilde{f} - g_f\right\|_\infty - \|f - g_f\|_\infty \\
&\leq \left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty + \left\|(\tilde{f} - g_f) - (f - g_f)\right\|_\infty = 2\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Luego $L_f = \dfrac{2}{K_f}$ es la constante deseada. Esto prueba el teorema 2.1. ∎

El siguiente resultado muestra que las mejores aproximaciones uniformes únicas fuertemente pueden ser caracterizadas en términos del criterio fuerte de Kolmogorov.

Teorema 2.2 *Sean G un subespacio de dimensión finita de $C[a,b]$, $f \in C[a,b] \setminus G$ y $g_f \in G$. Las siguientes expresiones son equivalentes:*

(i) La función $g_f \in G$ es una mejor aproximación uniforme única fuertemente de f desde G.

(ii) Para cada función no nula $g \in G$,

$$\min_{t\in E(f-g_f)} (f(t) - g_f(t))\, g(t) < 0. \tag{2.4}$$

(iii) Existe una constante $K_f > 0$ tal que para cualquier función $g \in G$,

$$\min_{t\in E(f-g_f)} (f(t) - g_f(t))\, g(t) \leq -K_f \|f - g_f\|_\infty \|g\|_\infty . \tag{2.5}$$

Prueba. $(iii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que (iii) se cumple y sea la función $g \in G$ dada. Por (iii) existe un punto $t \in E(f - g_f)$ tal que

$$(f(t) - g_f(t))\,(g(t) - g_f(t)) \leq -K_f \|f - g_f\|_\infty \|g - g_f\|_\infty .$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\infty &\geq |f(t) - g(t)| = |(f(t) - g_f(t)) - (g(t) - g_f(t))| \\ &= |f(t) - g_f(t)| + |g(t) - g_f(t)| \\ &\geq \|f - g_f\|_\infty + K_f \frac{\|f - g_f\|_\infty}{|f(t) - g_f(t)|} \|g - g_f\|_\infty \\ &= \|f - g_f\|_\infty + K_f \|g - g_f\|_\infty . \end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que (iii) no se cumple, es decir existe una función $g_1 \in G$ tal que para todo $t \in E(f - g_f)$,

$$(f(t) - g_f(t))\, g_1(t) > -K_f \|f - g_f\|_\infty \|g_1\|_\infty .$$

Desde que $E(f - g_f)$ es compacto, existe una vecindad abierta U de $E(f - g_f)$ tal que para todo $t \in U$,

$$(f(t) - g_f(t))\, g_1(t) > -K_f \|f - g_f\|_\infty \|g_1\|_\infty ,$$

y

$$|f(t) - g_f(t)| \geq \frac{1}{2} \|f - g_f\|_\infty . \tag{2.6}$$

Es más, podemos escoger U suficientemente pequeño tal que para todo $t \in U$ con $(f(t) - g_f(t))\, g_1(t) < 0$,

$$|g_1(t)| < K_f \|g_1\|_\infty . \tag{2.7}$$

Desde que $[a,b] \setminus U$ es compacto, existe un número real $c > 0$ tal que para todo $t \in [a,b] \setminus U$,

$$|f(t) - g_f(t)| \leq \|f - g_f\|_\infty - c. \tag{2.8}$$

Multiplicando g_1 con un factor positivo apropiado, podemos asumir que

$$\|g_1\|_\infty \leq \min\left\{c, \frac{1}{2}\|f - g_f\|_\infty\right\}. \tag{2.9}$$

Definiendo $g_2 = g_f + g_1$. Entonces por (2.8) y (2.9) tenemos para todo $t \in [a,b] \setminus U$,

$$\begin{aligned} |f(t) - g_2(t)| &= |(f(t) - g_f(t)) - g_1(t)| \\ &\leq \|f - g_f\|_\infty - c + \|g_1\|_\infty \leq \|f - g_f\|_\infty . \end{aligned}$$

Además, por (2.6) y (2.7) tenemos que para todo $t \in U$ con $(f(t) - g_f(t))\, g_1(t) < 0$,

$$\begin{aligned} |f(t) - g_2(t)| &= |(f(t) - g_f(t)) - g_1(t)| \\ &= |f(t) - g_f(t)| + |g_1(t)| < \|f - g_f\|_\infty + K_f \|g_1\|_\infty \\ &= \|f - g_f\|_\infty + K_f \|g_2 - g_f\|_\infty . \end{aligned}$$

Finalmente, por (2.6) y (2.9) se tiene para todo $t \in U$ con $(f(t) - g_f(t))\, g_1(t) \geq 0$,

$$\begin{aligned} |f(t) - g_2(t)| &= |(f(t) - g_f(t)) - g_1(t)| \\ &= |f(t) - g_f(t)| - |g_1(t)| \leq \|f - g_f\|_\infty . \end{aligned}$$

Esto muestra que

$$\|f - g_2\|_\infty < \|f - g_f\|_\infty + K_f \|g_2 - g_f\|_\infty ,$$

es decir no se cumple (i).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que se cumple (ii). Sea la función

$$F : \{g \in G : \|g\|_\infty = 1\} \to \mathbb{R},$$

definida por

$$F(g) = \min_{t \in E(f-g_f)} \frac{(f(t) - g_f(t))}{\|f - g_f\|_\infty} g(t).$$

Desde que G es dimensión finita, el conjunto $\{g \in G : \|g\|_\infty = 1\}$ es compacto. Por lo tanto, desde que se cumple (ii), tenemos que

$$F(g) < 0 \text{ para todo } g \in \{g \in G : \|g\|_\infty = 1\},$$

entonces existe $K_f > 0$ tal que $F(\frac{g}{\|g\|_\infty}) \leq -K_f$ para toda función no nula $g \in G$, lo cual muestra que se cumple (iii). Desde que la implicación $(iii) \Rightarrow (ii)$ es obvia, la prueba del teorema 2.2 está completa. ∎

El siguiente resultado es una caracterización de aquellos espacios de dimensión finita para los cuales las mejores aproximaciones uniformes son siempre únicas, respectivamente, únicas fuertemente.

Teorema 2.3 *Para un subespacio de dimensión finita G de $C[a, b]$, las siguientes expresiones son equivalentes:*

(i) Para cada función $f \in C[a, b]$, existe una única mejor aproximación uniforme desde G.

(ii) Para cada función $f \in C[a, b]$, existe una mejor aproximación uniforme única fuertemente desde G.

(iii) G es un subespacio de Chebyshev.

Prueba. La implicación $(ii) \Rightarrow (i)$ es obvia.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que se cumple (iii) y sea $f \in C[a, b]$ dado. Por el teorema 1.7 existe una única mejor aproximación uniforme $g_f \in G$ de f. Además por el teorema 1.8 existen puntos

$$a \leq t_1 < \cdots < t_{n+1} \leq b$$

y un signo $\sigma \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\sigma(-1)^i (f(t_i) - g_f(t_i)) = \|f - g_f\|_\infty, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Asumiremos que *(ii)* no se cumple. Entonces por el teorema 2.2 existe una función no nula $g_1 \in G$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (f(t_i) - g_f(t_i))\, g_1(t_i) \\ &= \sigma(-1)^i \|f - g_f\|_\infty\, g_1(t_i), \quad i = 1, \ldots, n+1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Desde que por el teorema 1.6, la función $g_1 \in G$ tiene a lo más $n-1$ ceros distintos, existe un entero $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $g_1(t_j) \neq 0$. Además, por el teorema 1.5 existe una función $g_2 \in G$ tal que

$$\sigma(-1)^i g_2(t_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, n+1, \quad i \neq j. \tag{2.11}$$

Desde que $\sigma(-1)^j g_1(t_j) > 0$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sigma(-1)^j (g_1(t_j) + \varepsilon g_2(t_j)) > 0.$$

Además, se sigue de (2.10) y (2.11) que

$$\sigma(-1)^i (g_1(t_i) + \varepsilon g_2(t_i)) > 0, \quad i = 1, \ldots, n+1, \quad i \neq j.$$

Por lo tanto, la función $g_1 + \varepsilon g_2$ en G tiene al menos n ceros distintos, lo cual contradice el teorema 1.6.

(i) $\Rightarrow$ *(iii)*. Supongamos que *(iii)* no se cumple. Sea $\{g_1, \ldots, g_n\}$ una base de G. Entonces existen puntos $t_1 < \cdots < t_n$ tal que

$$D\begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

Por lo tanto, las filas de la matriz correspondiente son linealmente dependientes. Esto implica que existen números reales $a_1, \ldots, a_n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \neq 0$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g\left(t_i\right) = 0 \quad \text{para todo } g \in G. \tag{2.13}$$

Además, se sigue de (2.12) que existe una función $g_0 \in G$ con $\|g_0\|_\infty = 1$ tal que

$$g_0(t_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ahora definimos para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} h\left(t_i\right) &= 1, \qquad \text{si } a_i = 0, \text{ y} \\ h\left(t_i\right) &= \operatorname{sgn} a_i, \text{ si } a_i \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces h puede ser extendido a $[a, b]$ tal que $h \in C[a, b]$ y $\|h\|_\infty = 1$. Sea la función $f \in C[a, b]$ definida por

$$f(t) = h(t)(1 - |g_0(t)|) \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Desde que $\|f\|_\infty = 1$, se sigue que $d(f, G) \leq 1$. Supongamos que $d(f, G) < 1$. Entonces existe una función $g \in G$ tal que

$$|f(t_i) - g(t_i)| < 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ con $a_i \neq 0$ dado. Entonces $|(\operatorname{sgn} a_i) - g(t_i)| < 1$ lo cual implica que $(\operatorname{sgn} a_i)\, g(t_i) > 0$. Así se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g\left(t_i\right) > 0,$$

lo cual contradice (2.13). Esto muestra que $0 \in P_G(f)$. Además, para todo $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |f(t) - g_0(t)| &\leq |h(t)(1 - |g_0(t)|)| + |g_0(t)| \\ &\leq 1 - |g_0(t)| + g_0(t) = 1. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\|f - g_0\|_\infty = 1$ lo cual implica que $g_0 \in P_G(f)$. Por lo tanto, la declaración (i) no es cierta. Esto prueba el teorema 2.3. ■

En lo siguiente derivamos fórmulas para calcular la constante de unicidad fuerte (ver definición 2.1). Observamos que las constantes de unicidad fuerte pueden ser usadas para obtener estimaciones del error en el cálculo de las mejores aproximaciones uniformes (ver observación 2.2).

A fin de establecer el resultado, usamos la siguiente notación. Para una función dada $f \in C[a,b]$, definimos la *función signo* de f por

$$\operatorname{sgn} f(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } f(t) < 0 \\ 0, & \text{si } f(t) = 0 \\ 1, & \text{si } f(t) > 0 \end{cases}$$

para todo $t \in [a,b]$.

Lema 2.1 *Sea G un subespacio de dimensión finita de $C[a,b]$, y sea $g_f \in G$ una mejor aproximación uniforme única fuertemente de $f \in C[a,b] \backslash G$. Luego*

$$\begin{aligned} K(f) &= \min_{\substack{g\in G \\ \|g\|_\infty = 1}} \max_{t\in E(f-g_f)} \operatorname{sgn}(f(t) - g_f(t))g(t) \\ &= \min\left\{1/\|g\|_\infty : g \in G, \operatorname{sgn}(f(t) - g_f(t))\, g(t) \leq 1 \text{ para todo } t \in E(f-g_f)\right\}. \end{aligned}$$

Prueba. Denotamos el primer (respectivamente el segundo) mínimo por m_1 (respectivamente m_2). Por la prueba del teorema 2.2 las constantes $K_f > 0$ las cuales aparecen en la condición (i) y (iii) del teorema 2.2 son las mismas. Desde que la condición (2.5) es equivalente a

$$\max_{t\in E(f-g_f)} (f(t) - g_f(t))\, g(t) \geq K_f \|f - g_f\|_\infty \|g\|_\infty$$

para todo $g \in G$, se sigue que $K(f) = m_1$. Mostraremos que $m_1 = m_2$. Sea una función no nula $g \in G$ con

$$\operatorname{sgn}(f(t) - g_f(t))\, g(t) \leq 1$$

para todo $t \in E(f - g_f)$ dado. Nosotros definimos $g_1 = g/\|g\|_\infty$. Luego tenemos que $\|g_1\|_\infty = 1$ y

$$m_1 \leq \max_{t\in E(f-g_f)} \operatorname{sgn}(f(t) - g_f(t))\, g_1(t) \leq 1/\|g_1\|_\infty .$$

Esto muestra que $m_1 \leq m_2$.

Por otro lado, sea $g \in G$ con $\|g\|_\infty = 1$ dado. Definimos

$$M = \max_{t \in E(f-g_f)} \operatorname{sgn}(f(t) - g_f(t))\, g(t)$$

y $g_2 = (1/M)\, g$. Entonces tenemos

$$\operatorname{sgn}(f(t) - g_f(t))\, g(t) \leq 1$$

para todo $t \in E(f - g_f)$ y por consiguiente, $M = 1/\|g_2\|_\infty \geq m_2$. Esto muestra que $m_1 \geq m_2$ y prueba el lema 2.1. ■

El siguiente resultado, muestra que para espacios de Chebyshev G, las constantes de unicidad fuerte pueden ser calculadas por la norma de las funciones de interpolación desde G.

Teorema 2.4 *Sea G un subespacio de Chebyshev de $C[a,b]$ tal que* $\dim(G) = n$, *y sea $g_f \in G$ una mejor aproximación uniforme única fuertemente de $f \in C[a,b] \backslash G$ tal que $E(f - g_f) = \{t_1, \ldots, t_{n+1}\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, sea $g_j \in G$ la función únicamente determinada tal que*

$$g_j(t_i) = \operatorname{sgn}(f(t_i) - g_f(t_i)), \quad i = 1, \ldots, n+1, \quad i \neq j.$$

Entonces tenemos

$$K(f) = \min\left\{1/\|g_j\|_\infty : j = 1, \ldots, n+1\right\}.$$

Prueba. Por simplicidad haremos

$$E = E(f - g_f) \text{ y } \sigma = \operatorname{sgn}(f - g_f).$$

Por el lema 2.1, existe un $g_0 \in G$ tal que $\sigma(t) g_0(t) \leq 1$ para todo $t \in E$ y $K(f) = 1/\|g_0\|_\infty$. Escogemos un punto extremo t_0 de g_0. Además, definimos $A = \{t \in E : g_0(t) = \sigma(t)\}$ y tenemos que mostrar que A contiene exactamente n puntos. Para hacer esto primero mostramos que no existe un $g \in G$ tal que

$$\sigma(t) g(t) < 0, \qquad t \in A, \tag{2.14}$$

y

$$\operatorname{sgn} g_0(t_0)g(t_0) > 0. \tag{2.15}$$

Supongamos lo contrario, es decir que exista una función $g \in G$ que cumpla lo anterior. Para todo $\varepsilon > 0$ definimos $g_\varepsilon = g_0 + \varepsilon g$. Entonces por (2.15) tenemos

$$\|g_\varepsilon\|_\infty \geq |g_\varepsilon(t_0)| = |g_0(t_0)| + \varepsilon\, |g(t_0)| > \|g_0\|_\infty . \tag{2.16}$$

Por (2.14) existe una vecindad U de A tal que para todo $t \in U$,

$$\sigma(t)g(t) < 0, \qquad t \in U.$$

Entonces para todo $t \in E \cap U$,

$$\sigma(t)g_\varepsilon(t) \leq 1 + \varepsilon\sigma(t)g(t) < 1.$$

Además, existe un número real $c > 0$ tal que

$$\sigma(t)g_0(t) \leq 1 - c, \qquad t \in E\backslash U.$$

Entonces para todo $t \in E\backslash U$,

$$\sigma(t)g_\varepsilon(t) \leq 1 - c + \varepsilon\, \|g\|_\infty \leq 1,$$

si ε es suficientemente pequeño. Por lo tanto, por (2.16) y el lema 2.1

$$K(f) \leq 1/\, \|g_\varepsilon\|_\infty < 1/\, \|g_0\|_\infty = K(f),$$

lo cual es una contradicción. Esto muestra que (2.14) y (2.15) se cumplen.

Ahora mostraremos que A contiene al menos n puntos. Supongamos lo contrario, es decir $A = \{u_1, \ldots, u_m\}$, donde $m < n$. Si es necesario, agregamos los puntos $u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}$. Desde que G es un espacio de Chebyshev con $\dim(G) = n$, existe un $\tilde{g} \in G$ con

$$\tilde{g}(u_i) = -\sigma(u_i), \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

y

$$\tilde{g}(t_0) = \operatorname{sgn} g_0(t_0),$$

lo cual contradice (2.14) y (2.15).

Si A contiene $n+1$ puntos, entonces por la suposición $A = E$ y por la definición de A,

$$(f(t) - g_f(t))\, g_0(t) > 0, \qquad t \in E.$$

se sigue del teorema 1.4 que g_f no es una mejor aproximación uniforme de f, lo cual es una contradicción. Esto prueba el teorema 2.4. ∎

Observamos que si como en el teorema 2.4 el conjunto $E(f - g_f)$ contiene exactamente $n+1$ puntos, entonces por el teorema 1.8 estos puntos son puntos extremos alternantes de $f - g_f$.

En lo siguiente mostraremos que las funciones f con $f^{(n+1)}(t) \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$ tienen mejores aproximaciones uniformes g_f desde P_n con esta propiedad.

Para hacer esto, usamos el siguiente resultado.

Lema 2.2 *Sea una función $f \in C^{n+1}[a,b]$ con $f^{(n+1)}(t) \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$. Entonces el espacio* $\operatorname{span}\{P_n \cup \{f\}\}$ *es un subespacio de Chebyshev de $C[a,b]$ con dimensión $n+2$.*

Prueba. Sea $H = \operatorname{span}\{P_n \cup \{f\}\}$. Supongamos ahora que H no es un espacio de Chebyshev. Entonces por el teorema 1.6 existe una función no nula $h \in H$ con al menos $n+2$ ceros distintos. Además se sigue del teorema de Rolle que

$$h' \in \operatorname{span}\{P_n \cup \{f'\}\}$$

tiene al menos $n+1$ ceros. Consideramos derivadas adicionales de h' y finalmente obtenemos que $h^{(n+1)} \in \operatorname{span}\left\{f^{(n+1)}\right\}$ tiene al menos un cero lo cual es una contradicción. Esto prueba el lema 2.2. ∎

Teorema 2.5 *Sea una función* $f \in C^{n+1}[a,b]$ *con* $f^{(n+1)}(t) \neq 0$ *para todo* $t \in (a,b)$, *y sea* $g_f \in P_n$ *la mejor aproximación uniforme de* f. *Entonces el error* $f - g_f$ *tiene exactamente* $n+2$ *puntos extremos alternantes*

$$a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} < t_{n+2} = b$$

tal que $f'(a) - g'_f(a) \neq 0$ *y* $f'(b) - g'_f(b) \neq 0$.

Prueba. Por el teorema 1.8 el error $f - g_f$ tiene al menos $n+2$ puntos extremos alternantes. Entonces se sigue que $f - g_f$ tiene exactamente $n+2$ puntos extremos alternantes; de lo contrario $f - g_f$ tiene al menos $n+2$ ceros lo cual por el teorema 1.6 es una contradicción al lema 2.2. Supongamos ahora que $f'(a) - g'_f(a) = 0$. (El otro caso sigue análogamente) Entonces $f' - g'_f$ tiene $n+1$ ceros en $t_1, \ldots, t_{n+1}$. Como en la prueba del lema 2.2 se sigue que $f^{(n+1)} = f^{(n+1)} - g_f^{(n+1)}$ tiene al menos un cero, lo cual es una contradicción. Esto prueba el teorema 2.5. ■

Por ejemplo, las funciones

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^t &&, \ t \in [a,b], \\ f_2(t) &= \sqrt{t} &&, \ t \in [0,b], \\ f_3(t) &= \cos t &&, \ t \in [0,\pi], \\ f_4(t) &= \sin t &&, \ t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \end{aligned}$$

satisfacen las suposiciones del lema 2.2 y del teorema 2.5 para todo n.

Unicamente en casos muy raros las mejores aproximaciones son conocidas explícitamente. Una situación excepcional es la aproximación de la función $f(t) = t^{n+1}$ por polinomios de grado n. Antes de probar este resultado enunciaremos el siguiente lema cuya prueba puede ser encontrada en el libro **Approximation by Spline Functions**, por Günther Nürnberger.

Lema 2.3 *Sea el polinomio de Chebyshev de grado* n, $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t)$$

para todo $t \in [-1,1]$, *entonces se cumplen:*

(i) La función T_n es un polinomio de grado n con $\|T_n\|_\infty = 1$.

(ii) $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ y

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad t \in [-1,1], \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

(iii) Los ceros de T_{n+1} son

$$t_i = \cos\left\{\frac{2(n+1-i)+1}{2(n+1)}\pi\right\}, \qquad i = 1, \ldots, n+1. \tag{2.18}$$

(iv)

$$T_{n+1}(u_i) = (-1)^{n+2-i}\|T_{n+1}\|_\infty, \tag{2.19}$$

donde

$$u_i = \cos\left\{\frac{n+2-i}{n+1}\pi\right\}, \qquad i = 1, \ldots, n+2. \tag{2.20}$$

Teorema 2.6 *La mejor aproximación uniforme de $f(t) = t^{n+1}$ desde P_n sobre $[-1,1]$ es el polinomio*

$$t^{n+1} - \frac{1}{2^n}T_{n+1}(t),$$

donde T_{n+1} es el polinomio de Chebyshev de grado $n+1$.

Prueba. Sea

$$g_f(t) = t^{n+1} - \frac{1}{2^n}T_{n+1}(t)$$

para todo $t \in [-1,1]$. Por el lema 2.3 *(ii)*, el coeficiente de t^{n+1} del polinomio T_{n+1} es 2^n. Por lo tanto, nosotros tenemos que $g_f \in P_n$. Además se sigue del lema 2.3 que

$$\begin{aligned}(-1)^{n+2-i}(f(u_i) - g_f(u_i)) &= (-1)^{n+2-i}\frac{1}{2^n}T_{n+1}(u_i)\\ &= \left\|\frac{1}{2^n}T_{n+1}\right\|_\infty = \|f - g_f\|_\infty, \quad i = 1, \ldots, n+2,\end{aligned}$$

donde $u_1, \ldots, u_{n+2}$ son los puntos en la expresión *(iv)* del lema 2.3. Entonces por el teorema 1.8 el polinomio $g_f \in P_n$ es una mejor aproximación uniforme de f. Esto prueba el teorema 2.6. ■

2.2 Algoritmo

Uno de los problemas fundamentales en la Teoría de la Aproximación es el desarrollo de algoritmos eficientes para el cálculo de las mejores aproximaciones. En esta sección describimos un método iterativo para las mejores aproximaciones uniformes desde espacios de Chebyshev las cuales se remontan a Remez.

Sean $G = \operatorname{span}\{h_1, \dots, h_n\}$ un subespacio de Chebyshev de $C[a,b]$ tal que $\dim(G) = n$ y una función $f \in C[a,b] \backslash G$ dado.

La idea de Remez es iterativamente calcular una sucesión de funciones (g_k) en G que converja a una función $g_f \in G$ con la propiedad de que existan puntos $a \leq t_1 < \cdots < t_{n+1} \leq b$ y un signo $\sigma \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\sigma (-1)^i (f(t_i) - g_f(t_i)) = \|f - g_f\|_\infty, \qquad i = 1, \dots, n+1.$$

Se sigue del teorema 1.8 que g_f es una mejor aproximación uniforme de f desde G.

En lo siguiente describimos esta aproximación.

Descripción del Algoritmo

En el primer paso del algoritmo escogemos un conjunto de puntos

$$M_1 = \left\{ t_1^{(1)}, \dots, t_{n+1}^{(1)} \right\}$$

tal que

$$a \leq t_1^{(1)} < \cdots < t_{n+1}^{(1)} \leq b.$$

Luego determinamos la única función $g_1 \in G$ y el único número real $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$(-1)^i \left(f(t_i^{(1)}) - g_1(t_i^{(1)}) \right) = \lambda_1, \qquad i = 1, \dots, n+1. \tag{2.21}$$

Como será mostrado después, este sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución $a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, \lambda_1$, donde $g_1 = \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} h_i$. Para $k \geq 1$ procedemos por inducción como sigue. Determinamos un punto $t_k \in [a,b]$ tal que

$$|\lambda_k| < |f(t_k) - g_k(t_k)| = \|f - g_k\|_\infty, \tag{2.22}$$

donde debe observarse que puede darse el caso de que $|\lambda_k| = |f(t_k) - g_k(t_k)|$ y en ese caso terminaríamos de iterar ya que $f - g_k$ tendría $n+1$ puntos extremos alternantes, lo cual implicaría que g_k sea la mejor aproximación uniforme de f, de manera que supondremos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple (2.22). Luego reemplazamos un punto de

$$M_k = \left\{t_1^{(k)}, \ldots, t_{n+1}^{(k)}\right\},$$

donde

$$a \leq t_1^{(k)} < \cdots < t_{n+1}^{(k)} \leq b,$$

tal que un nuevo conjunto

$$M_{k+1} = \left\{t_1^{(k+1)}, \ldots, t_{n+1}^{(k+1)}\right\},$$

donde

$$a \leq t_1^{(k+1)} < \cdots < t_{n+1}^{(k+1)} \leq b,$$

es obtenido. En lo siguiente describimos cual punto de M_k será reemplazado por t_k.

Regla de Intercambio

Definimos $t_0^{(k)} = -\infty$ y $t_{n+2}^{(k)} = \infty$. Entonces existe un índice $j \in \{0, \ldots, n+1\}$ tal que $t_j^{(k)} < t_k < t_{j+1}^{(k)}$.

Caso1. $j \in \{1, \ldots, n\}$

Si $\operatorname{sgn}(f(t_j^{(k)}) - g_k(t_j^{(k)})) = \operatorname{sgn}(f(t_k) - g_k(t_k))$ (en caso contrario, tendriamos $\operatorname{sgn}(f(t_{j+1}^{(k)}) - g_k(t_{j+1}^{(k)})) = \operatorname{sgn}(f(t_k) - g_k(t_k))$), entonces reemplazamos $t_j^{(k)}$ (en el segundo caso reemplazamos $t_{j+1}^{(k)}$) por t_k.

Caso 2. $j = 0$

Si $\operatorname{sgn}(f(t_1^{(k)}) - g_k(t_1^{(k)})) = \operatorname{sgn}(f(t_k) - g_k(t_k))$, entonces reemplazamos $t_1^{(k)}$ por t_k. En caso contrario, reemplazamos $t_{n+1}^{(k)}$ por t_k.

Caso 3. $j = n+1$

Si $\operatorname{sgn}(f(t_{n+1}^{(k)}) - g_k(t_{n+1}^{(k)})) = \operatorname{sgn}(f(t_k) - g_k(t_k))$, entonces reemplazamos $t_{n+1}^{(k)}$ por t_k. En caso contrario, reemplazamos $t_1^{(k)}$ por t_k.

Al reemplazar un punto de M_k por t_k de acuerdo a la regla anterior, obtenemos un nuevo conjunto

$$M_{k+1} = \left\{t_1^{(k+1)}, \dots, t_{n+1}^{(k+1)}\right\}.$$

Luego determinamos la única función $g_{k+1} \in G$ y el único número real $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$(-1)^i \left(f(t_i^{(k+1)}) - g_{k+1}(t_i^{(k+1)})\right) = \lambda_{k+1}, \qquad i = 1, \dots, n+1, \tag{2.23}$$

y procedemos por inducción.

De esta manera obtenemos una sucesión (g_k) en G y una sucesión (λ_k) en $\mathbb{R}$. Ahora mostraremos que (g_k) converge a la única mejor aproximación uniforme g_f de f desde G, y que $(|\lambda_k|)$ es una sucesión creciente y converge a la desviación minimal $d(f, G)$.

Primero consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$(-1)^i \left(f(t_i^{(k)}) - g_k(t_i^{(k)})\right) = \lambda_k, \qquad i = 1, \dots, n+1. \tag{2.24}$$

Si hacemos $g_k = \sum_{j=1}^n a_j^{(k)} h_j$, entonces (2.24) es equivalente a

$$\sum_{j=1}^n a_j^{(k)} h_j \left(t_i^{(k)}\right) + (-1)^i \lambda_k = f(t_i^{(k)}), \qquad i = 1, \dots, n+1. \tag{2.25}$$

Este es un sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas $a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}$ y λ_k. Denotamos el determinante correspondiente por

$$D(M_k) = \begin{vmatrix} h_1(t_1^{(k)}) & \dots & h_n(t_1^{(k)}) & (-1)^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_1(t_{n+1}^{(k)}) & \dots & h_n(t_{n+1}^{(k)}) & (-1)^{n+1} \end{vmatrix}.$$

El primer resultado muestra que el sistema (2.25) tiene una solución única, y que la sucesión $(|\lambda_k|)$ es creciente y acotada superiormente por $d(f, G)$.

Lema 2.4 *Para todo $k = 1, 2, \ldots$ las propiedades siguientes se cumplen:*

(i) $D(M_k) \neq 0$.

(ii) *Existe un signo $\sigma_k \in \{-1, 1\}$ tal que*

$$\operatorname{sgn}(f(t_i^{(k+1)}) - g_k(t_i^{(k+1)})) = \sigma_k \operatorname{sgn}(f(t_i^{(k)}) - g_k(t_i^{(k)})), \qquad i = 1, \ldots, n+1.$$

(iii) $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}| \leq d(f, G)$.

Prueba. (i). Expandiendo $D(M_k)$ a lo largo de la última columna, obtenemos $D(M_k) \neq 0$, desde que G es un espacio de Chebyshev.

(ii). Esta propiedad sigue de la regla de intercambio.

(iii). Para todo $k = 1, 2, \ldots$ nosotros hacemos

$$D_i^{(k)} = D\begin{pmatrix} h_1, & \ldots & , h_n \\ t_1^{(k)}, \ldots, t_{i-1}^{(k)}, & t_{i+1}^{(k)}, \ldots & , t_{n+1}^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Desde que G es un espacio de Chebyshev, para cualquier base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de G se cumple una de las siguientes posibilidades: Para cada $t_1 < \cdots < t_n$ en $[a, b]$, se tiene que

$$D\begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} > 0,$$

o para cada $t_1 < \cdots < t_n$ en $[a, b]$, se tiene que

$$D\begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} < 0.$$

Luego en cualquiera de los casos se tiene que

$$|D(M_k)| = \sum_{i=1}^{n+1} \left| D_i^{(k)} \right|. \tag{2.27}$$

Además, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i D_i^{(k)} g(t_i^{(k)}) = 0 \tag{2.28}$$

para todo $g \in G$. Esta propiedad sigue del hecho que

$$\begin{vmatrix} h_1(t_1^{(k)}) & \dots & h_n(t_1^{(k)}) & g(t_1^{(k)}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_1(t_{n+1}^{(k)}) & \dots & h_n(t_{n+1}^{(k)}) & g(t_{n+1}^{(k)}) \end{vmatrix} = 0$$

para todo $g \in G$. Luego se sigue de (ii), (2.25), y (2.28) que existe un signo $\sigma \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \sigma \frac{1}{D(M_{k+1})} \sum_{i=1}^{n+1} D_i^{(k+1)} (-1)^i f(t_i^{(k+1)}) \\ &= \sigma \frac{1}{D(M_{k+1})} \sum_{i=1}^{n+1} D_i^{(k+1)} (-1)^i (f(t_i^{(k+1)}) - g_k(t_i^{(k+1)})) \\ &= \sigma \frac{1}{D(M_{k+1})} \sum_{i=1}^{n+1} D_i^{(k+1)} \sigma_k \operatorname{sgn}(\lambda_k) \left| f(t_i^{(k+1)}) - g_k(t_i^{(k+1)}) \right| . \end{aligned}$$

Entonces se sigue de (2.27) que

$$\begin{aligned} |\lambda_{k+1}| &= \frac{1}{|D(M_{k+1})|} \sum_{i=1}^{n+1} \left| D_i^{(k+1)} \right| \left| f(t_i^{(k+1)}) - g_k(t_i^{(k+1)}) \right| \\ &= |\lambda_k| + \frac{1}{|D(M_{k+1})|} \sum_{i=1}^{n+1} \left| D_i^{(k+1)} \right| \left(\left| f(t_i^{(k+1)}) - g_k(t_i^{(k+1)}) \right| - |\lambda_k| \right). \end{aligned}$$

Además, se sigue de (2.22) que

$$|\lambda_{k+1}| > |\lambda_k| .$$

También, usando (2.27), obtenemos que

$$\begin{aligned} |\lambda_{k+1}| &= \left| \sigma \frac{1}{D(M_{k+1})} \sum_{i=1}^{n+1} D_i^{(k+1)} (-1)^i (f(t_i^{(k+1)}) - g_k(t_i^{(k+1)})) \right| \\ &\leq \frac{1}{|D(M_{k+1})|} \sum_{i=1}^{n+1} \left| D_i^{(k+1)} \right| \|f - g_f\|_\infty = \|f - g_f\|_\infty = d(f, G), \end{aligned}$$

donde $g_f \in G$ es la mejor aproximación uniforme de f. Esto prueba el lema 2.4. ■

El siguiente resultado, debido a Remez, muestra que la sucesión (g_k) construída en el algoritmo converge a la mejor aproximación uniforme de f desde G y que $(|\lambda_k|)$ converge a $d(f, G)$.

Teorema 2.7 *Las siguientes expresiones se cumplen:*

(i) $\lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = d(f, G)$.

(ii) $\lim_{k\to\infty} \|g_k - g_f\|_\infty = 0$, *donde* $g_f \in G$ *es la mejor aproximación uniforme de* f.

Prueba. Mostraremos que existe una constante $L > 0$ tal que para todo k,

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| \geq L\left(\|f - g_k\|_\infty - |\lambda_k|\right). \tag{2.29}$$

Supongamos por el momento que (2.29) se cumple. Por el lema 2.4 *(iii)*, la sucesión $(|\lambda_k|)$ es creciente y acotada por $d(f, G)$. Por lo tanto, esta sucesión converge. Además se sigue de (2.29) que para todo k,

$$(d(f, G) - |\lambda_k|) \leq \frac{1}{L}(|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k|)$$

y, desde que $\lim_{k\to\infty}(|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k|) = 0$ obtenemos que $\lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = d(f, G)$. Esto prueba (i). Además, se sigue de (2.29) que para todo k,

$$d(f, G) \leq \|f - g_k\|_\infty \leq |\lambda_k| + \frac{1}{L}(|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k|) \leq d(f, G) + \frac{1}{L}(|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k|).$$

Esto implica que

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_\infty = d(f, G).$$

Por el teorema 2.3 existe una constante $K_f > 0$ tal que para todo k,

$$\|f - g_k\|_\infty - \|f - g_f\|_\infty \geq K_f \|g_k - g_f\|_\infty$$

lo cual implica que

$$\|f - g_k\|_\infty - d(f, G) \geq K_f \|g_k - g_f\|_\infty.$$

Esto prueba (ii).

Así, resta probar (2.29). Primero mostramos que existe una constante $M > 0$ tal que para todo k y todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\left|t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}\right| \geq M. \tag{2.30}$$

Supóngase que (2.30) no se cumple. Entonces recurriendo a una subsucesión, podemos asumir que existen puntos

$$a \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1} \leq b,$$

donde al menos dos de esos puntos son iguales, tal que

$$\lim_{k \to \infty} t_i^{(k)} = t_i, \qquad i = 1, \ldots, n+1. \tag{2.31}$$

Entonces por el teorema 1.5 existe una única función $g \in G$ tal que

$$(-1)^i (f(t_i) - g(t_i)) = \lambda = 0, \qquad i = 1, \ldots, n+1. \tag{2.32}$$

Además, usando argumentos de continuidad, se sigue de (2.24), (2.31) y (2.32) que existe un k suficientemente grande tal que $|\lambda_k| < |\lambda_1|$ lo cual es una contradicción a la propiedad (*iii*) en el lema 2.4. Esto prueba (2.30).

Ahora mostramos que existe una constante $L > 0$ tal que para todo k y todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$,

$$\frac{\left|D_i^{(k)}\right|}{|D(M_k)|} \geq L. \tag{2.33}$$

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ dado. Entonces por el teorema 1.5, para todo k existe una única función $\tilde{g}_k \in G$ tal que

$$\tilde{g}_k(t_j^{(k)}) = f(t_j^{(k)}), \qquad j \neq i, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Usando argumentos de continuidad, se sigue de (2.30) que existe una constante $L_i > 0$ tal que para todo k,

$$\|f - \tilde{g}_k\|_\infty \leq L_i.$$

Además, se sigue de la prueba del lema 2.4 que

$$\begin{aligned} |\lambda_1| < |\lambda_k| &= \frac{1}{|D(M_k)|} \sum_{j=1}^{n+1} \left|D_j^{(k)}\right| \left|f(t_j^{(k)}) - \tilde{g}_k(t_j^{(k)})\right| \\ &= \frac{\left|D_i^{(k)}\right|}{|D(M_k)|} \left|f(t_i^{(k)}) - \tilde{g}_k(t_i^{(k)})\right| \leq \frac{\left|D_i^{(k)}\right|}{|D(M_k)|} L_i. \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos que

$$\frac{\left|D_i^{(k)}\right|}{|D(M_k)|} \geq \frac{|\lambda_1|}{L_i}.$$

Esto muestra que

$$L = \min_{i=1,\dots,n+1} \frac{|\lambda_1|}{L_i} > 0$$

es la constante deseada en (2.33). Finalmente, se sigue de (2.33) y la prueba del lema 2.4 que

$$\begin{aligned} |\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| &= \frac{1}{|D(M_{k+1})|} \sum_{i=1}^{n+1} \left|D_i^{(k+1)}\right| \left(\left| f(t_i^{(k+1)}) - g_k(t_i^{(k+1)}) \right| - |\lambda_k| \right) \\ &\geq L(\|f - g_k\|_\infty - |\lambda_k|). \end{aligned}$$

Esto prueba (2.29) y el teorema 2.7. ∎

Ejemplo 2.1 *Consideremos el espacio $C[0,1]$, su subespacio P_1 sobre $[0,1]$ y la función $f \in C[0,1]$ tal que $f(t) = t^2$ para todo $t \in [0,1]$. Es fácil darse cuenta que la función $g_f \in P_1$ tal que $g_f(t) = t - \frac{1}{8}$ para todo $t \in [0,1]$, es la mejor aproximación uniforme de f ya que los puntos $t_1 = 0 < t_2 = \frac{1}{2} < t_3 = 1$ son puntos extremos alternantes de $f - g_f$ y $\dim(P_1) = 2$. Determinaremos a g_f usando el algoritmo de Remez. Con $M_1 = \left\{ t_1^{(1)} = 0, t_2^{(1)} = \frac{1}{3}, t_3^{(1)} = 1 \right\}$, y la base $\{h_1, h_2\}$ de P_1 sobre $[0,1]$, donde $h_1(t) = 1, h_2(t) = t$ para todo $t \in [0,1]$, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{pmatrix} h_1(t_1^{(1)}) & h_2(t_1^{(1)}) & -1 \\ h_1(t_2^{(1)}) & h_2(t_2^{(1)}) & 1 \\ h_1(t_3^{(1)}) & h_2(t_3^{(1)}) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1^{(1)}) \\ f(t_2^{(1)}) \\ f(t_3^{(1)}) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix},$$

cuya solución viene dada por $a_1^{(1)} = -\frac{1}{9}, a_2^{(1)} = 1, \lambda_1 = -\frac{1}{9}$. *Luego* $g_1(t) = -\frac{1}{9} + t$ *para todo* $t \in [0,1]$. *Ahora* $\|f - g_1\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \left|t^2 + \frac{1}{9} - t\right| = \frac{5}{36} > |\lambda_1|$, *luego* $t_1 = \frac{1}{2}$. *Como* $t_2^{(1)} < t_1 < t_3^{(1)}$ *y* $\operatorname{sgn}(f(t_2^{(1)}) - g_1(t_2^{(1)})) = \operatorname{sgn}(f(t_1) - g_1(t_1))$, *entonces reemplazamos* $t_2^{(1)}$ *por* t_1, *luego* $M_2 = \left\{t_1^{(2)} = 0, t_2^{(2)} = \frac{1}{2}, t_3^{(2)} = 1\right\}$. *Resolvemos ahora el sistema*

$$\begin{pmatrix} h_1(t_1^{(2)}) & h_2(t_1^{(2)}) & -1 \\ h_1(t_2^{(2)}) & h_2(t_2^{(2)}) & 1 \\ h_1(t_3^{(2)}) & h_2(t_3^{(2)}) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1^{(2)}) \\ f(t_2^{(2)}) \\ f(t_3^{(2)}) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix},$$

cuya solución viene dada por $a_1^{(2)} = -\frac{1}{8}, a_2^{(2)} = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{8}$. *Luego* $g_2(t) = -\frac{1}{8} + t$ *para todo* $t \in [0,1]$. *Ahora* $\|f - g_2\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \left|t^2 + \frac{1}{8} - t\right| = \frac{1}{8} = |\lambda_2|$, *entonces* g_2 *es la mejor aproximación uniforme de* f.

Observación 2.2 *(Estimación del error). Es fácil verificar que para todo* $k = 1, 2, \ldots$ *las siguientes estimaciones se cumplen:*

(i) $\|f - g_k\|_\infty - \|f - g_f\|_\infty \leq \|f - g_k\|_\infty - |\lambda_k|$.

(ii) $\|g_k - g_f\|_\infty \leq \frac{1}{K(f)}(\|f - g_k\|_\infty - |\lambda_k|)$, *donde* $g_f \in G$ *es la mejor aproximación uniforme de* f *y* $K(f) > 0$ *es la constante de unicidad fuerte de* f.

Desde que los valores $\|f - g_k\|_\infty$ y $|\lambda_k|$ son calculados durante el algoritmo (y también la constante de unicidad fuerte $K(f)$ puede ser calculada (compare Teorema 2.4)), paramos el algoritmo, si $\|f - g_k\|_\infty - |\lambda_k| \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es la exactitud deseada.

2.3 La importancia de la Aproximación Polinomial

A fin de decidir cual conjunto de funciones debería ser usada para aproximar una función dada eficientemente, es necesario investigar la importancia de la aproximación de cierta clase de funciones. Aquí brevemente discutimos que tan bien las funciones pueden ser aproximadas por la clase de los polinomios. Observaremos que las funciones analíticas pueden ser aproximadas eficientemente por polinomios. Sin embargo, esto no es el caso para las funciones no suaves. Desde que este tema es tratado en detalle en muchos libros sobre Teoría de la Aproximación, solamente daremos algunos resultados típicos sin prueba.

Antes de dar las estimaciones sobre el error óptimo en las mejores aproximaciones uniformes por polinomios, nosotros necesitamos algunas notaciones.

El *módulo de continuidad* de una función $h \in C[a,b]$ es definida por

$$w(h;\delta) = \sup\left\{|h(t_1) - h(t_2)| : t_1, t_2 \in [a,b], |t_1 - t_2| \leq \delta\right\},$$

donde $\delta > 0$ es un número real positivo.

Observamos, que para cada función $h \in C^1[a,b]$ tenemos

$$w(h;\delta) \leq \delta \left\|h'\right\|_\infty.$$

La desviación minimal de una función $f \in C[a,b]$ desde un espacio de polinomios P_m en la norma uniforme es denotada por

$$d_\infty(f, P_m) = \inf_{p \in P_m} \|f - p\|_\infty.$$

En lo siguiente damos algunos resultados sobre la importancia de la aproximación polinomial. Las pruebas de estos teoremas pueden ser encontradas en muchos libros sobre la Teoría de la Aproximación.

El primer teorema sobre funciones las cuales son diferenciables hasta un cierto orden es debido a Jackson [1930].

Teorema 2.8 *Sean los enteros $m \geq 1$ y $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. Entonces existe una constante $K > 0$ (dependiente solamente de j) tal que para cualquier función $f \in C^j[a,b]$, tenemos que*

$$d_\infty(f, P_m) \leq K\left(\frac{b-a}{m}\right)^j w\left(f^{(j)}; \frac{b-a}{2(m-j)}\right). \tag{2.34}$$

En particular, si $f \in C^{j+1}[a,b]$, entonces

$$w\left(f^{(j)}; \frac{b-a}{2(m-j)}\right) \leq \frac{b-a}{2(m-j)} \left\|f^{(j+1)}\right\|_\infty. \tag{2.35}$$

En lo siguiente, damos un resultado sobre funciones infinitamente diferenciables la cual también es debido a Jackson [1930].

Teorema 2.9 *Si $f \in C^\infty[a,b]$, entonces para todo $p \in (0, \infty)$,*

$$\lim_{m\to\infty} m^p d_\infty(f, P_m) = 0. \tag{2.36}$$

El siguiente resultado, debido a Berstein [1926], trata con funciones analíticas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ las cuales son de valor real sobre $[a,b]$. Aquí $\mathbb{C}$ denota el conjunto de números complejos.

Teorema 2.10 *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función analítica tal que $f(t) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in [a,b]$, entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{d_\infty(f, P_m)} = 0. \tag{2.37}$$

Observación 2.3 *Se sigue de (2.36) y (2.37) que las funciones analíticas pueden ser aproximadas eficientemente por polinomios.*

Sin embargo, la estimación (2.34) en el teorema 2.8 muestra que, si $f \in C^r[a,b] \backslash C^{r+1}[a,b]$ y r es pequeño, entonces $d_\infty(f, P_m)$ puede converger lentamente a cero cuando m tiende al infinito. Un ejemplo típico es la función $f(t) = \sqrt{t}$ sobre $[0,2]$. Se sigue de (2.34) que

$$d_\infty(f, P_m) \leq Kw\left(f; \frac{1}{m}\right) = K\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

De hecho, resultados numéricos actualmente muestran que en este caso la disminución del error $d_\infty(f, P_m)$ es extremadamente lenta cuando m se incrementa.

De otro lado, la estimación (2.34) muestra que el error $d_\infty(f, P_m)$ es pequeño si el valor $\frac{b-a}{m}$ es pequeño. Por lo tanto, para obtener las mejores aproximaciones nosotros podemos dividir el intervalo dado $[a, b]$ en varios subintervalos y trabajar con polinomios sobre estos intervalos más pequeños. Esta es la principal motivación para el uso de polinomios por partes o splines como funciones de aproximación.

Conclusiones

En este trabajo se han mostrado aspectos básicos acerca de la teoría de la mejor aproximación uniforme, así como se han visto propiedades importantes acerca de los espacios de Chebyshev en relación a esta teoría, espacios en los cuales la mejor aproximación es única, se ha mostrado este trabajo no usando espacios Pre-Hilbert,y se ha visto la importancia que tiene la unicidad fuerte de la mejor aproximación uniforme.

La demostración de la convergencia del Algoritmo de Remez se ha basado en el uso de la teoría de la unicidad fuerte de la mejor aproximación uniforme, razón por la cual la importancia de la teoría de la unicidad fuerte de la mejor aproximación uniforme.

La teoría de la mejor aproximación uniforme por espacios de Chebyshev es muy amplia, lo que se ha pretendido con este trabajo es mostrar los aspectos básicos de esta teoría sin entrar al aspecto estrictamente topológico, sin embargo se hace necesario señalar que muchos de los teoremas probados aquí son válidos si reemplazamos el intervalo $[a, b]$ por un espacio de Hausdorff compacto arbitrario (respectivamente espacio métrico) con pruebas parecidas (por ejemplo teoremas 1.4, 2.2, 2.3, 2.4 resultan ciertas).

Bibliografía

[1] Cheney, E. W., Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill Book Company,1964.

[2] Jackson, D., The Theory of Approximation, AMS Vol. XI, 1930.

[3] Kincaid, David y Ward Cheney, Análisis Numérico, Addison Wesley Iberoamericana, 1994.

[4] Kreyszig, Erwin, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1978.

[5] Nürbenger, Günther, Approximation by Spline Functions, Springer Verlag, 1989.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Facultad de Ciencias

ACTA DE SUSTENTACIÓN DEL INFORME DE SUFICIENCIA PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Nombre: GALARRETA ACHAHUANCO, PABLO JAVIER

Título:

INTRODUCCION A LA MEJOR APROXIMACION UNIFORME POR ESPACIOS DE CHEBYSHEV

Miembros del Jurado:

Decano o su representante:

FELIX ESCALANTE (firma)

Profesor Asesor:

ALESSANDRI CANCHOA Q. (firma)

Profesor Especialista:

WILLIAM C. ECHEGARAY C. (firma)

Luego de sustentado el Informe de Suficiencia y absueltas las preguntas, el Jurado otorgó el calificativo de:

APROBADO CON EXCELENCIA

tal como consta en el Libro de Actas N° 208-408, Folio N° 339

Dado en la ciudad de Lima en la fecha: 15/01/03 a horas: 17h00

Decano

Director de la Escuela Profesional