UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“DISTRIBUCIÓN DE LOS VALORES DE CIERTAS FUNCIONES ARITMÉTICAS”

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:

JULIAN ALONSO MEJIA CORDERO

ASESOR:

Dr. OSWALDO JOSÉ VELÁSQUEZ CASTAÑÓN

LIMA-PER

2016

A mi familia que siempre esta apoyándome,

en especial a mis padres Julián y Julia.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi asesor de tesis, Oswaldo Velásquez, por su apoyo académico durante mis estudios universitarios y posteriores, por haberme introducido en la bella área de la teoría analítica de números, y por su paciencia y dedicación al orientarme hasta la culminación de mi tesis.

A la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) y al Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA), instituciones en donde me desarrollé como matemático, y a mis compañeros y profesores que me acompañaron durante toda esa etapa.

A mis padres Julián y Julia, quienes siempre me apoyan con el objetivo de crecer como persona y profesional.

“Think deeply on simple things”

Arnold Ross

Índice general

Notaciones

- Los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ denotan el conjunto de números naturales, enteros no negativos, enteros, reales y complejos, respectivamente.

- Las letras s y z usualmente representaran números complejos donde $s = \sigma + i\tau$ (o a veces $s = \sigma + it$) siendo σ la parte real de s y τ la parte imaginaria de s que se denotan también como $\sigma = \Re s$ y $\tau = \Im s$.

- Dado un número real a, denotaremos por $\{\sigma > a\}$ al semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \Re s > a\}$. De manera análoga tenemos los semiplanos $\{\sigma \geq a\}$, $\{\sigma \leq a\}$ y $\{\sigma < a\}$, así como la recta $\{\sigma = a\}$.

- Dadas f y g funciones, escribiremos $f(x) = O(g(x))$ o $f(x) \ll g(x)$ para indicar que existen $M > 0$ y $a > 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para $|x| \geq a$.

- Del mismo modo, fijado ϵ, escribiremos $f = O_\epsilon(g(x))$ o $f(x) \ll_\epsilon g(x)$ para indicar que existen $M_\epsilon > 0$ y $a > 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\epsilon|g(x)|$ para $|x| \geq a$. Note que aquí M_ϵ depende de ϵ.

- Dados f y g funciones y $a \in \mathbb{C}$, por abuso de notación, escribiremos

$$f(x) = O(g(x)) \text{ cuando } x \to a$$

para indicar que existen $\epsilon > 0$ y $M > 0$ tales que $|f(x)| \leq M\big|g(x)\big|$ para $|x - a| < \epsilon$.

- Dadas f y g funciones, escribimos $f(x) = o\big(g(x)\big)$ para indicar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- Dadas f y g funciones, escribimos $f(x) \sim g(x)$ para indicar que f y g tienen prácticamente el mismo comportamiento asintótico, en el sentido que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

- Dado un número real a denotaremos por a_+ a la parte positiva de a, i.e. $a_+ = \max\{0, a\}$.

- $\log^+ : (0, +\infty) \to [1, \infty)$ denotará a la función definida por $\log^+(x) = \max\{2, \log x\}$.

- La parte entera de x es definida por $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$.

- Dado un conjunto finito A, la cantidad de elementos de A es denotada por $|A|$.

- Dado un conjunto $S \in \mathbb{R}^n$, $\chi(S) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función característica de S definida por

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Introducción

Uno de los teoremas más conocidos por los matemáticos, en especial en el área de teoría de números, es el famoso teorema de los números primos (TNP), de belleza indiscutible, que afirma que si $\pi(x)$ es la cantidad de números primos menores o iguales a x, entonces se tiene que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1$, dando a conocer algo la distribución global de los números primos: cuando x es grande, la cantidad de números primos menores que x es aproximadamente $\frac{x}{\log x}$. El primer gran paso para la prueba de este glorioso teorema fue dado por Bernhard Riemann, en su único artículo sobre este tema [R] [1], en el cual da varias ideas y asocia el comportamiento de los números primos con la famosa función zeta, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$, que apareció por primera vez como función compleja en este trabajo. Riemann sugirió que la prueba del TNP estaba basada en técnicas de variable compleja. En 1896, en trabajos independientes, Jacques Hadamard y Charles Jean de la Valle-Poussin probaron el TNP usando métodos de análisis complejo; sus pruebas estaban basadas en el argumento crucial de que la función zeta de Riemann no se anula sobre la recta $\{\sigma = 1\}$. Pruebas posteriores simplifican bastante las pruebas mediante el uso de ***teoremas tauberianos***, un concepto que provino del intento de caracterizar teoremas basados en los prototipos de los teoremas de Abel (***teoremas abelianos***) y de Tauber (teoremas tauberianos).

Teorema 0.1 (Abel, 1829). *Sea $\{a_k\}$ una sucesión de números reales o complejos, y sea*

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

la serie de potencias asociada a esta sucesión. Suponga que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge a A, o

[1] Ver [Ed] para una discusión detallada de este artículo.

equivalentemente la sucesión $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *converge a* A*. Entonces*

$$\lim_{z\to 1^-} G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = A.$$

Como podemos apreciar, el prototipo de un teorema abeliano es el de interpretar una propiedad de una sucesión, como la sumabilidad de una serie, y transformarla en una propiedad de una función asociada a esta sucesión (también conocida como la ***transformada*** de la sucesión), como la existencia de un límite de la función.

El objetivo de un teorema tauberiano es el de encontrar una recíproca de estos teoremas abelianos, usualmente imponiendo nuevas ***condiciones tauberianas***, Tauber probó que la condición $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ bastaba para obtener una recíproca del teorema 0.1:

Teorema 0.2 (Tauber,1897)**.** *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *para* $-1 < x < 1$*, y supongamos que* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$*. Si* $f(x) \to S$ *cuando* $x \to 1^-$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge y tiene suma* S*.*

De este modo, un teorema tauberiano traduce información de una función f a una propiedad en los coeficientes de esta $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge y tiene suma } S\right)$.

Una condición óptima del teorema 0.2 fue dada por Littlewood (1911), debilitando la condición tauberiana a la de $\{na_n\}$ ser acotada. Subsecuentemente, Hardy y Littlewood probaron varios de estos teoremas recíprocos, los cuales denominaron teoremas tauberianos.

Otro teorema tauberiano para series de potencias es el siguiente.

Teorema 0.3 (Frobenius, 1880)**.** *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *el cual converge para* $|x| < 1$*. La relación asintótica* $s_n = \sum_{k\leq n} a_k \sim An$ *implica que*

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sim \frac{A}{1-x} \text{ cuando } x \to 1^-.$$

Hardy y Littlewood (1914) probaron que la afirmación recíproca es válida bajo la condición tauberiana $a_n \geq 0$.

La situación es más delicada en el caso de series de Dirichlet (clásicas) [2] $f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$, las cuales son importantes en teoría de números. Si una tal serie es convergente para $x > 1$ y $s_n \sim An$, entonces

$$f^*(x) \sim \frac{A}{x-1} \text{ cuado } x \to 1^+.$$

Sin embargo, en este caso se necesita mucho más que una condición $a_n \geq 0$ para obtener una recíproca.

Aquí es deseable considerar el comportamiento de la sumatoria f^* para x complejo. Los teoremas tauberianos donde las propiedades complejas-analíticas cumplen un rol importante son llamados teoremas tauberianos ***complejos***. Un resultado de este tipo para serie de potencias es un teorema de Fatou:

Teorema 0.4 (Fatou, 1905). *Si la transformada* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *existe para* $|z| < 1$ *y es analítica alrededor de* $z = 1$*, entonces la condición* $a_n \to 0$ *implica la convergencia de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

En el caso del TNP, una demostración conocida usando un teorema tauberiano, es una dada por Edmund Landau (1908), cuya prueba se basa en que $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ no crece más rápido que cierta potencia de s cuando $|s| \to \infty$ en el semiplano $\{\sigma \geq 1\}$. Más precisamente, existe M tal que $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s} = O\left(|s|^M\right)$ en $\{\sigma \geq 1\}$. Hardy y Littlewood (1918) pudieron debilitar esta condición a una de orden exponencial, pero el verdadero salto ocurrió con el teorema de Wiener (1928) y los trabajos de su estudiante Ikehara (1931), resultando en el conocido teorema de Wiener-Ikehara (ver el capítulo 2). La prueba del teorema de los números primos aplicando el teorema de Wiener-Ikehara se basa solamente en el hecho de que la función $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s}$ se extiende continuamente en $\{\sigma \geq 1\}$, sin necesidad de acotar la función en este semiplano.

Nuestro objetivo en este trabajo es desarrollar teoremas tauberianos complejos sobre series de Dirichlet, y dar aplicaciones en teoría de números. Veremos el teorema de Wiener-Ikehara

[2]Una serie de Dirichlet es una función de la forma $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{{\lambda_n}^s}$, clásicamente se considera el caso $\lambda_n = n$, estas series son definidas y estudiadas en la sección 1.3.

cuya simplicidad hace de esta nuestra primera herramienta para estudiar el comportamiento asintótico de funciones aritméticas. Cabe resaltar que para la prueba de Wiener-Ikehara se desarrollan técnicas de análisis funcional como lo son las series y transformadas de Fourier, las cuales cumplen un papel importante en toda esta teoría. También se verá la prueba de uno de los teoremas de Landau, más precisamente el teorema hiperbólico de Landau, el cual se aplica para estimar el término de error en el teorema de los números primos, $\pi(x) - \dfrac{x}{\log x}$. Por último, analizaremos el problema de estudiar la distribución de valores de ciertas funciones aritméticas usando el método de Selberg-Delange.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Herramientas de análisis

1.1.1. Fórmulas de Abel y Euler

Definición 1.1. *Una función aritmética es una función real o compleja definida en el conjunto de los números naturales.*

EJEMPLO.- La función de Mobius $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ es la función aritmética definida como sigue:

$$\mu(1) = 1;$$

Si $n > 1$, escribimos $n = {p_1}^{a_1} \cdots {p_k}^{a_k}$. Luego

$$\begin{aligned} \mu(n) &= (-1)^k, \text{ si } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1, \\ \mu(n) &= 0, \qquad \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

Note que $\mu(n) = 0$ si y solo si n tiene un divisor cuadrado perfecto mayor que 1.

Definición 1.2. *Una función aritmética f es **multiplicativa** si*

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \textit{si} \quad \operatorname{mcd}(m, n) = 1,$$

*y **completamente multiplicativa** si*

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \textit{para todo } (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Nuestro objetivo es estimar cómo crece la suma de los primeros términos de una función aritmética. Para esto definiremos la integral de Riemann-Stieltjes, que es útil para expresar sumas discretas en integrales.

Definición 1.3. *Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado acotado y sean f y α dos funciones reales definidas en $[a,b]$. Dada una partición puntillada $P = (x,t)$ donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ con $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, definimos*

$$||P|| = \max\{x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\},$$

$$S(f,\alpha,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big).$$

Se dice que f ***es integrable en el sentido de Riemann-Stieltjes*** *con respecto a α si existe el límite*

$$\lim_{||P||\to 0} S(f,\alpha,P).$$

Formalmente, se dice que f es integrable en el sentido de Riemann-Stieltjes con respecto a α y se denotará por $f \in R(\alpha)$, si existe un L tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un δ tal que $|S(f,\alpha,P) - L| < \epsilon$, para todo P con $||P|| < \delta$. Y se denota

$$L = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

OBSERVACIÓN.- Sea $f \in R(\alpha)$ con α diferenciable en el intervalo $[a,b]$. Dada una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, por el teorema del valor medio, existen $\theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que $\alpha'(\theta_i) = \frac{\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$. Siendo $P = (x,\theta)$, tenemos que

$$S(f,\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n} f(\theta_i)\alpha'(\theta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Haciendo esto para particiones P con $||P|| \to 0$, concluimos que

$$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f(t)\alpha'(t)\mathrm{d}t.$$

Teorema 1.4 (Integración por partes)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $f \in R(\alpha)$, entonces se tiene que $\alpha \in R(f)$ y*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\,\mathrm{d}f(x).$$

Teorema 1.5 (Identidad de Abel)**.** *Para cualquier función aritmetica $a(n)$ sea*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n),$$

donde $A(x) = 0$ si $x < 1$. Si f tiene derivada continua en el intervalo $[y, x]$, donde $0 < y < x$, entonces tenemos

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

PRUEBA.- Podemos expresar la sumatoria usando la integral de Riemann- Stieltjes e integramos por partes

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \int_{y^+}^{x^+} f(t)\mathrm{d}A(t)\\ &= A(t)f(t)\Big|_{y^+}^{x^+} - \int_y^x A(t)\mathrm{d}f(t)\\ &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

■

Como caso particular de la fórmula de Abel obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.6 (Fórmula de sumación de Euler)**.** *Si f tiene derivada continua f' en el intervalo $[y, x]$, donde $0 < y < x$, entonces*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x \big(t - \lfloor t\rfloor\big)f'(t)dt + f(x)\big(\lfloor x\rfloor - x\big) - f(y)\big(\lfloor y\rfloor - y\big). \tag{1.2}$$

PRUEBA.- Basta tomar la función aritmética tal que $a(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en (1.1).

Así tenemos $A(x) = \lfloor x \rfloor$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} f(n) &= \lfloor x \rfloor f(x) - \lfloor y \rfloor f(y) - \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)dt \\
&= \lfloor x \rfloor f(x) - \lfloor y \rfloor f(y) - \int_y^x \big(t - (t - \lfloor t \rfloor)\big) f'(t)dt \\
&= \lfloor x \rfloor f(x) - \lfloor y \rfloor f(y) + \int_y^x \big(t - \lfloor t \rfloor\big) f'(t)dt - \int_y^x t f'(t)dt \\
&= \lfloor x \rfloor f(x) - \lfloor y \rfloor f(y) + \int_y^x \big(t - \lfloor t \rfloor\big) f'(t)dt - \left(x f(x) - y f(y) - \int_y^x f(t)dt\right) \\
&= \int_y^x f(t)dt + \int_y^x \big(t - \lfloor t \rfloor\big) f'(t)dt + f(x)\big(\lfloor x \rfloor - x\big) - f(y)\big(\lfloor y \rfloor - y\big).
\end{aligned}$$

■

1.2. Análisis complejo básico

La mayoría de funciones con las que vamos a tratar son funciones definidas en subconjuntos del plano complejo. Hagamos un breve resumen sobre este tema. Como referencia usamos los libros [A] y [Rudc].

1.2.1. Funciones holomorfas

Definición 1.7. *Sean $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$ los* ***discos abierto y cerrado*** *de centro a y radio r son, respectivamente*

$$D(a, r) = \{x \in \mathbb{C} / |x - a| < r\}$$

y

$$\overline{D(a, r)} = \big\{x \in \mathbb{C} / |x - a| \leq r\big\}.$$

Definición 1.8. *Sea X un subconjunto del conjunto de los números reales o complejos. El conjunto de las funciones continuas en X se denota por*

$$C(X) = \big\{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua en } X\big\}.$$

Definición 1.9. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega \cap \Omega'$. La **derivada** de f en z_0 se define, si existe, por el límite*

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

*En este caso, se dice que f es **derivable** en z_0.*

Definición 1.10 (Función holomorfa)**.** *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Decimos que una función es **holomorfa** en Ω si f es derivable en todo punto de Ω. El conjunto de funciones holomorfas en Ω se denota por*

$$H(\Omega) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa en } \Omega \big\}.$$

*Si $f \in H(\mathbb{C})$, decimos que f es una función **entera**.*

Proposición 1.11. *El conjunto de funciones holomorfas en Ω, $H(\Omega)$ es un anillo con respecto a las operaciones de suma y producto de funciones. En particular, si $f, g \in H(\Omega)$ entonces $f + g \in H(\Omega)$, $f \cdot g \in H(\Omega)$.*

1.2.2. Series de potencias y holomorfía

Teorema 1.12. *Sea $\{a_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$, y R definida por la fórmula de Hadamard*

$$R^{-1} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}.$$

La serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

converge absolutamente si $z \in D(z_0, R)$, y diverge si $z \notin \overline{D(z_0, R)}$. Además, la serie converge uniformemente para todo disco cerrado $\overline{D(z_0, r)}$ con $r < R$.

Teorema 1.13. *Con las notaciones del teorema 1.12,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es continua para $z \in D(z_0, R)$; además es diferenciable y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \qquad |z - z_0| < R.$$

1.2.3. Integración sobre arcos

Definición 1.14. *Una **curva** en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, donde $[\alpha, \beta]$ es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. El **rango** de la curva se denota por*

$$\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta]).$$

*Si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ decimos que la curva es **cerrada**.*
*La curva $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ se dice que es un **arco** si γ es continuamente diferenciable excepto quizás en un número finito de puntos $t_i \in [\alpha, \beta]$, donde existen las derivadas por la izquierda y por la derecha.*

Ahora definamos la integral sobre un arco.

Definición 1.15. *Para una función $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, definimos la integral*

$$\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \Re(g(t))\mathrm{d}t + i \int_\alpha^\beta \Im(g(t))\mathrm{d}t,$$

donde las integrales del lado derecho son integrales de Riemann de funciones reales de variable real. Si g es continua sobre $[\alpha, \beta]$, salvo un número finito de puntos $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ que pueden o no incluir α y β, donde g posee límites a izquierda y derecha, definimos

$$\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\mathrm{d}t.$$

Definición 1.16. *Para un arco $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ y $f \in C(\gamma^*)$, definimos la integral de f a lo largo de γ mediante*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Definimos también

$$\int_\gamma f(z)|\mathrm{d}z| = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

Definición 1.17. *Una **reparametrización regular** (o simplemente reparametrización) de un arco $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ es un arco $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ de la forma $\beta = \alpha \circ s$, donde $s : [c, d] \to [a, b]$ es una función continuamente derivable, tal que $s'(x) \neq 0$ para todo $x \in [c, d]$. La reparametización es **positiva** si $s'(x) > 0$ para todo $x \in [c, d]$, y **negativa** si $s'(x) < 0$ para todo $x \in [c, d]$.*

Definición 1.18. *Si $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ es una curva, la curva $-\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por $(-\alpha)(t) = \alpha(1-t)$ es una reparametrización negativa de α llamada* ***curva opuesta*** *de α.*

Definición 1.19. *Sean $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ y $\beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ son arcos tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. La* ***yuxtaposición*** *de α y β es la curva definida por $\alpha * \beta : [0,1] \to \mathbb{C}$*

$$\alpha * \beta(t) \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1), & t \geq 1/2. \end{cases}$$

Proposición 1.20. *Se cumplen:*

i) Si α es un arco, $f \in C(\alpha^*)$ y β es una reparametrización positiva de α, entonces $f \in C(\beta^*)$ y

$$\int_\alpha f(z)\mathrm{d}z = \int_\beta f(z)\mathrm{d}z.$$

ii) Si α es un arco, $f \in C(\alpha^*)$, entonces $f \in C((-\alpha)^*)$ y

$$\int_{-\alpha} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\alpha f(z)\mathrm{d}z.$$

iii) Si α y β son arcos, $f \in C(\alpha^*) \cap C(\beta^*)$ y los arcos admiten una yuxtaposición $\alpha * \beta$, entonces $f \in C((\alpha * \beta)^*)$ y

$$\int_{\alpha*\beta} f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha f(z)\mathrm{d}z + \int_\beta f(z)\mathrm{d}z.$$

Definición 1.21. *Para un arco $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, la* ***longitud de arco*** *de γ es*

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma |\mathrm{d}z| = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

Proposición 1.22. *Dados un arco $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ y $f \in C(\gamma^*)$,*

$$\left| \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \int_\gamma |f(z)||\mathrm{d}(z)|.$$

En particular

$$\left| \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \max_{z\in\gamma^*} |f(z)| \cdot \ell(\gamma).$$

Definición 1.23 (Índice)**.** *Dado un arco cerrado γ y $z \notin \gamma^*$, definimos el **índice del arco** γ **con respecto a** z mediante*

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}. \tag{1.3}$$

*Definimos el **índice del arco** γ como la función $\operatorname{ind}_\gamma : \mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{C}$, dada por (1.3).*

Si $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, (1.3) se escribe explícitamente como

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \mathrm{d}t.$$

Teorema 1.24. *Para un arco γ en $\mathbb{C}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

a) $\operatorname{ind}_\gamma \in H(\mathbb{C}\backslash\gamma^*)$.

b) $\operatorname{ind}_\gamma(\mathbb{C}\backslash\gamma^*) \subset \mathbb{Z}$.

c) En cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $\operatorname{ind}_\gamma$ toma un valor constante.

d) En la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ toma el valor 0.

1.2.4. Teoria local de Cauchy

Teorema 1.25 (Teorema de Cauchy para un abierto convexo)**.** *Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{C}$ y $f \in C(\Omega) \cap H\big(\Omega\backslash\{p\}\big)$, $p \in \Omega$. Entonces existe $F \in H(\Omega)$ tal que $f = F'$. En particular, $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ para todo arco cerrrado γ en Ω.*

El siguiente resultado es una recíproca del teorema de Cauchy anterior. Este resultado sirve para conocer la holomorfía de ciertas funciones.

Teorema 1.26 (Morera)**.** *Sea $f \in C(\Omega)$, Ω abierto tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0, \text{ para todo triángulo } \Delta \subset \Omega.$$

Entonces $f \in H(\Omega)$.

Teorema 1.27 (Fórmula de Cauchy para un abierto convexo)**.** *Sea Ω un abierto convexo , γ un arco cerrado en Ω y $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega\backslash\gamma^*$, entonces*

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi.$$

Teorema 1.28. *Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, y $f \in H(\Omega)$. Entonces f se puede representar localmente por una serie de potencias, de la siguiente manera: si $z_0 \in \Omega$ y para algún $r > 0$, $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in D(a, r). \tag{1.4}$$

donde los coeficientes c_n estan dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi, \quad n \geq 0.$$

Teorema 1.29. *Con las condiciones de la fórmula integral de Cauchy*

$$f^{(k)}(p) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(p) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - p)^{k+1}} \mathrm{d}\xi.$$

Corolario 1.30. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto conexo, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $f^{(k)}(z_0) = 0$, para todo $k \geq 0$, entonces $f(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$.*

Corolario 1.31. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y conexo, $f, g \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$, para todo $k \geq 0$, entonces $f(z) = g(z)$, para todo $z \in \Omega$.*

1.2.5. Teorema homológico de Cauchy

Definición 1.32 (Cadena, ciclo)**.** *Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ arcos en el plano $\mathbb{C}$.*

Para toda $f \in C(\gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*)$ definimos funcionales lineales

$$\overline{\gamma}_i(f) = \int_{\gamma_i} f(z) \mathrm{d}z.$$

La suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z) \mathrm{d}z$ se define como $\displaystyle\int_\Gamma f(z) \mathrm{d}z$, donde Γ es la suma formal de los arcos γ_i

$$\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n.$$

Estas sumas formales se denominan ***cadenas*** *y si los $\gamma_i's$ son cerrados se denominan* ***ciclos****. También definimos Γ^* como $\gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$.*

Definición 1.33 (Suma de cadenas, ciclo opuesto)**.** *Sea $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_n$ un ciclo.*

La cadena ***opuesta*** *de la cadena Γ es la cadena $-\Gamma$ definida por*

$$-\Gamma = (-\gamma_1) \dot{+} (-\gamma_2) \dot{+} \cdots \dot{+} (-\gamma_n),$$

donde los $-\gamma_i$ *son los opuestos de los arcos* $\gamma_i, i = 1, \ldots, n$. *Observamos que* $(-\Gamma)^* = \Gamma^*$. *Por otro lado, si* $\Delta = \delta_1 \dot{+} \delta_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \delta_m$ *es otra cadena, definimos la* ***suma*** *de las cadenas* $\Gamma + \Delta$ *como la cadena*

$$\Gamma + \Delta = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n \dot{+} \delta_1 \dot{+} \delta_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \delta_m.$$

Observamos que $(\Gamma + \Delta)^* = \Gamma^* \cup \Delta^*$. *Denotamos además* $\Gamma - \Delta = \Gamma + (-\Delta)$. *Evidentemente la cadena opuesta de un ciclo es un ciclo, y la suma de dos ciclos es también un ciclo.*

Proposición 1.34. *Se cumplen:*

i) Si Γ *es una cadena y* $f \in C(\Gamma^*)$*,entonces*

$$\int_{-\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z.$$

ii) Si Γ *y* Δ *son cadenas y* $f \in C(\Gamma^* \cup \Delta^*)$*, entonces*

$$\int_{\Gamma+\Delta} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Delta} f(z)\mathrm{d}z.$$

Definición 1.35 (Índice de un ciclo)**.** *Si* $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$ *es un ciclo, entonces definimos el índice de el ciclo* Γ *como*

$$\mathrm{ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}_{\gamma_i}(\alpha).$$

Teorema 1.36 (Teorema de Cauchy para ciclos)**.** *Sea* $f \in H(\Omega)$*,* Ω *abierto en* $\mathbb{C}$ *y* Γ *un ciclo en* Ω *que satisface*

$$\mathrm{ind}_\Gamma(\alpha) = 0, \text{ para todo } \alpha \notin \Omega.$$

Entonces

$$f(z) \cdot \mathrm{ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega, \text{ para todo } \omega \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

1.2.6. Teorema homotópico de Cauchy

Definición 1.37. *Sean* γ_0 *,* γ_1 *curvas cerradas en un espacio topológico* X*, ambas parametrizadas por el intervalo* $I = [0, 1]$. *Diremos que* γ_0 *y* γ_1 *son* ***homotópicas en*** X *(o simplemente homotópicas) si existe una aplicación continua, llamada* ***homotopía*** $H : I \times I \to X$ *tal que* *i)* $H(s,0) = \gamma_0(s)$*, para todo* $s \in I$*;*

ii) $H(s,1) = \gamma_1(s)$*, para todo* $s \in I$*;*

iii) $H(0,t) = H(1,t)$*, para todo* $t \in I$*.*

OBSERVACIÓN.- Dada una homotopía H como la de arriba, tenemos que para cada $s \in [0,1]$,

$$\gamma_t(s) = H(s,t),$$

define una curva en X. Esta familia infinita de curvas representa las deformaciones sucesivas que sufre la curva γ_0 para convertirse en γ_1 .

NOTA.- La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de curvas cerradas en X. Denotamos $\gamma_0 \sim \gamma_1$ para indicar que las curvas cerradas γ_0 y γ_1 son homotópicas.

Definición 1.38. *Si* γ_0 *es homotópica a una aplicación constante* γ_1*, se dice que* γ_0 *es **homotópicamente nula**.*

Teorema 1.39. *Si* γ_0 *y* γ_1 *son arcos cerrados homotópicos en una región* Ω *y si* $\alpha \notin \Omega$ *, entonces*

$$\mathrm{ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{ind}_{\gamma_0}(\alpha).$$

Corolario 1.40. *Si* Ω *es una región simplemente conexa y* Γ *un ciclo en* Ω*, entonces*

$$\mathrm{ind}_\Gamma(\alpha) = 0, \text{ para todo } \alpha \notin \Omega.$$

1.2.7. Singularidades

Definición 1.41. *Si* $z_0 \in \Omega$ *y* $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$*, decimos que* f *tiene una singularidad aislada en* z_0*. Decimos que la singularidad es **removible** o **evitable** si existe* $g \in H(\Omega)$ *tal que* $g|_{\Omega\setminus\{z_0\}} = f$*.*

Teorema 1.42. *Si* $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ *y* f *está acotada en*

$$D'(z_0,r) = \big\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r\big\},$$

para algún $r > 0$*, entonces* f *tiene una singularidad removible en* z_0*.*

Teorema 1.43. *Si $z_0 \in \Omega$ y $f \in H\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$, entonces uno y solo uno de los siguientes casos debe ocurrir:*

i) f tiene una singularidad removible en z_0.

ii) Existe $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\} \subset \mathbb{C}$, $n \geq 1$, con $c_m \neq 0$, tal que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - z_0)^k},$$

tiene una singularidad removible en z_0.

iii) Si $r > 0$ y $D(z_0; r) \subset \Omega$, entonces

$$\overline{f(D'(z_0; r))} = \mathbb{C}.$$

Definición 1.44 (Polo y singularidad esencial)**.** *Sea $z_0 \in \Omega$ y $f \in H\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$. Siguiendo las notaciones y casos del teorema 1.43 :*

*a) En el caso ii), se dice que f tiene un **polo de orden** m **en** z_0 y c_1 se denomina el **residuo de** f **en** z_0 y se le denota por $\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z))$, y*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - z_0)^k},$$

*es la **parte principal de** f **en** z_0.*

*En el caso cuando $m = 1$, decimos que el polo es **simple**.*

*b) En el caso iii), se dice que f tiene una **singularidad esencial** en z_0.*

OBSERVACIÓN.- Se puede clasificar el tipo de singularidad en función solo del comportamiento del módulo de la función alrededor de la singularidad:

a) Si $|f(z)|$ está acotada cuando $z \to a$, la función posee una singularidad removible en a.

b) Si $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to a$, la función posee un polo en a.

c) Si $|f(z)|$ aproxima cualquier valor real ≥ 0 cuando $z \to a$ (o simplemente si es que no se da uno de los casos anteriores), la función posee una singularidad esencial en a.

1.2.8. Series de Laurent

Teorema 1.45 (Serie de Laurent)**.** *Consideremos f holomorfa en el anillo*

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\right\},$$

donde $0 \leq r < R < \infty$*, entonces existe una sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *tal que, para* $z \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^n} \mathrm{d}\xi \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R.$$

OBSERVACIÓN.- Como en el caso de los polos, sea $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}/0 < |z - z_0| < R\right\}$. Si $a_{-n} \neq 0$ para infinitos n's, entonces f tiene una singularidad esencial en z_0 y a_{-1} se denomina el **residuo de** f **en** z_0 y se escribe

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

se denomina la **parte principal** de f en z_0. Esto completa la clasificación de singularidades en función de la serie de Laurent de f:

i) Si $a_n = 0$ para todo $n < 0$, f posee una singularidad removible en z_0;

ii) si $a_n = 0$ para todo $n < m$, para algún $m < 0$ con $a_m \neq 0$, f posee un polo de orden $|m|$ en z_0;

iii) si $a_n \neq 0$ para infinitos valores de $n < 0$, f posee una singularidad esencial en z_0.

Lema 1.46. *Sea* $f \in H(\Omega)$ *y* g *meromorfa en* Ω *con polo de orden* m *en* $s = s_0$ *y con serie de Laurent alrededor de* s_0 *definida por* $g(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(s - s_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n = \sum_{k=-m}^{\infty} a_n (s - s_0)^k$*, entonces*

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}(f(s)g(s)) = \sum_{i=1}^{k} a_{-i} \frac{f^{(i-1)}(s_0)}{(i-1)!}.$$

PRUEBA.- Como f es holomorfa en s_0, en serie de potencias

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (s - s_0)^k,$$

donde $b_k = f^{(k)}(s_0)/k!$, multiplicando con la serie de Laurent de g, tenemos que

$$f(s)g(s) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (s - s_0)^n,$$

con $c_n = \displaystyle\sum_{m+p=n} a_m b_p$, en particular

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}(f(s)g(s)) = c_{-1} = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} b_{k-1} = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} \frac{f^{(k-1)}(s_0)}{(k-1)!}.$$

■

1.2.9. Funciones meromorfas y cálculo de residuos

Definición 1.47 (Función meromorfa). *Si Ω es abierto, decimos que f es una función* ***meromorfa en*** *Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que*

a) A no tiene punto límite en Ω.

b) $f \in H(\Omega \setminus A)$.

c) f tiene un polo en cada punto de A.

El conjunto A se denomina ***conjunto de polos*** *de f y se denota $A = P(f)$. El conjunto de funciones meromorfas sobre Ω se denota por*

$$M(\Omega) = \{f : f \text{ es meromorfa en } \Omega\}.$$

Si $f \in M(\mathbb{C})$, decimos simplemente que f es meromorfa.

Teorema 1.48. *Si $Q(z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ es la parte principal de f en a, entonces $f - Q$ tiene una singularidad removible en a y*

$$c_1 = \operatorname*{Res}_{z=a}(f(z)) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-a)^m f(z)].$$

Corolario 1.49. *Si f posee un polo simple en a, entonces*

$$\operatorname*{Res}_{z=a}(f(z)) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z).$$

Teorema 1.50 (Teorema del residuo)**.** *Sea f una función meromorfa en Ω y A el conjunto de los polos de f. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus A$ tal que*

$$\mathrm{ind}_\Gamma = 0, \text{ para todo } \alpha \notin \Omega,$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{a \in A} \operatorname*{Res}_{z=a}(f(z))\, \mathrm{ind}_\Gamma(a).$$

OBSERVACIÓN.- La suma que aparece en el enunciado del teorema es finita.

1.3. Series de Dirichlet

En 1737 Euler probó el teorema de Euclides de la existencia de infinitos números primos mostrando que la serie $\sum p^{-1}$, extendida sobre todos los primos, diverge.
Él dedujo esto del hecho que la función zeta $\zeta(s)$, dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{1.5}$$

para $s > 1$ real, tiende a ∞ cuando $s \to 1$. En 1837 Dirichlet probó su conocido teorema de primos en una progresión aritmética estudiando la serie

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{1.6}$$

donde χ es un caracter de Dirichlet y $s > 1$.
Las series en (1.5) y (1.6) son ejemplos de series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \tag{1.7}$$

donde $f(n)$ es una función aritmética. Estas son llamadas ***series de Dirichlet*** con coeficientes $f(n)$. Ellas constituyen una de las más útiles herramientas en teoría analítica de números.

1.3.1. El semiplano de convergencia absoluta de una serie de Dirichlet

Primero note que si $\sigma \geq a$ se tiene $|n^s| = n^\sigma \geq n^a$, entonces

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \frac{|f(n)|}{n^a}.$$

Por tanto, si una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge absolutamente para $s = a + bi$ luego, por el test de comparación, este convergerá para todo s con $\sigma \geq a$.

Esta observación implica el siguiente teorema.

Teorema 1.51. *Suponga que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f(n)n^{-s}\right|$ *no converge para todo* s *o diverge para todo* s. *Luego existe un numero real* σ_a, *llamado la* ***abscisa de convergencia absoluta*** *de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f(n)n^{-s}\right|$ *, tal que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ *converge absolutamente si* $\sigma > \sigma_a$ *pero no converge absolutamente si* $\sigma < \sigma_a$.

PRUEBA.- Sea D el conjunto de todos los $\sigma \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f(n)n^{-s}\right|$ diverge. D es no vacío ya que la serie no converge para todo s. Entonces D tiene un supremo el cual llamamos σ_a. Si $\sigma < \sigma_a$ entonces $\sigma \in D$, pues caso contrario σ sería una cota superior para D menor que el supremo. Si $\sigma > \sigma_a$, entonces $\sigma \notin D$ ya que σ_a es una cota superior de D. Esto prueba el teorema. ■

NOTA.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}|$ converge en todo punto, definimos $\sigma_a = -\infty$ y si la serie no converge en ningún punto definimos $\sigma_a = +\infty$.

1.3.2. La función definida por una serie de Dirichlet

Asuma que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge absolutamente para $\sigma > \sigma_a$ y sea

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \tag{1.8}$$

definida para $\sigma > \sigma_a$.

Lema 1.52. *Si $N \geq 1$ y $\sigma \geq c > \sigma_a$ se tiene*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-c}.$$

PRUEBA.- Tenemos

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|\, n^{-\sigma} = \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|\, n^{-c} n^{-(\sigma-c)} \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)| n^{-c}.$$

■

El siguiente teorema describe el comportamiento de $F(s)$ cuando $\sigma \to +\infty$.

Teorema 1.53. *Si $F(s)$ es dado por (1.8), entonces*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} F(\sigma + it) = f(1).$$

uniformemente para $-\infty < t < +\infty$.

PRUEBA.- Ya que $F(s) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)n^{-s}$ resta probar que el segundo término tiende a 0 cuando $\sigma \to +\infty$. Escoja $c > \sigma_a$. Luego para $\sigma \geq c$ el lema 1.52 implica

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq 2^{-\sigma-c} \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|\, n^{-c} = \frac{A}{2^{\sigma}},$$

donde A es independiente de σ y t. Como $\lim_{\sigma \to \infty} A/2^{\sigma} = 0$, esto prueba el teorema. ■

Ahora probaremos que todos los coeficientes de la serie son únicamente determinados por los valores de la serie de Dirichlet.

Teorema 1.54 (Unicidad)**.** *Dadas dos series de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad y \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

ambas absolutamente convergentes para $\sigma > \sigma_a$. Si $F(s) = G(s)$ para cada s en una secuencia infinita $\{s_k\}$ tal que $\sigma_k \to +\infty$ cuando $k \to \infty$, entonces $f(n) = g(n)$ para todo n.

PRUEBA.- Sea $h(n) = f(n) - g(n)$ y $H(s) = F(s) - G(s)$, de la hipótesis tenemos que $H(s_k) = 0$ para cada k. Queremos probar que $h(n) = 0$ para todo n. Por reducción al absurdo, supongamos que $h(n) \neq 0$ para algún n. Sea N el menor entero para el cual $h(N) \neq 0$. Luego

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Entonces

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Haciendo $s = s_k$ tenemos $H(s_k) = 0$ entonces

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n) n^{s_k}.$$

Escogemos k tal que $\sigma_k > c$, donde $c > \sigma_a$. Luego el lema 1.52 implica

$$|h(N)| \leq N^{\sigma_k} (N+1)^{-(\sigma_k - c)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)| n^{-c} = \left(\frac{N}{N+1} \right)^{\sigma_k} A.$$

donde A es independiente de k. Haciendo $k \to \infty$ se tiene que $(N/(N+1))^{\sigma_k} \to 0$ y entonces $h(N) = 0$, una contradicción. ■

El teorema de unicidad implica la existencia de un semiplano en el cual la serie de Dirichlet no se anula (a menos que la serie sea la nula).

Teorema 1.55. *Sea $F(s) = \sum f(n) n^{-s}$ y asuma que $F(s) \neq 0$ para algún s con $\sigma > \sigma_a$. Entonces, existe un semiplano $\sigma > c \geq \sigma_a$ en el cual $F(s)$ nunca es cero.*

PRUEBA.- Asuma que tal plano no existe. Luego, para cada $k = 1, 2, \ldots$ existe un punto s_k con $\text{Re}(s_k) = \sigma_k > k$ tal que $F(s_k) = 0$. Ya que $\sigma_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ el teorema de unicidad muestra que $f(n) = 0$ para todo n, contradiciendo la hipótesis que $F(s) \neq 0$ para algún s. ■

1.3.3. Multiplicación de series de Dirichlet

El siguiente teorema relaciona productos de series de Dirichlet con la convolución de Dirichlet de sus coeficientes.

Teorema 1.56. *Dadas dos funciones $F(s)$ y $G(s)$ representadas por series de Dirichlet,*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \ \textit{para} \ \sigma > a$$

y

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \ \textit{para} \ \sigma > b.$$

Luego, en el semiplano donde ambas series convergen absolutamente, tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \tag{1.9}$$

*donde $h = f * g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, la **convolución de Dirichlet** de f y g, definida por*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Recíprocamente, si $F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) n^{-s}$ para todo s en una sucesión $\{s_k\}$ con $\sigma_k = \mathrm{Re}(s_k) \to +\infty$ cuando $k \to \infty$, entonces $\alpha = f * g$.

PRUEBA.- Para cualquier s para el cual ambas series convergen absolutamente se tiene que

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} g(m) m^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(n) g(m) (mn)^{-s},$$

ya que por la convergencia absoluta podemos multiplicar estas series y reordenar los términos de cualquier modo sin alterar la suma. Juntemos aquellos términos para los cuales mn es constante, digamos $mn = k$. Los posibles valores de k son $1, 2, \ldots$, entonces

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k} f(n) g(m) \right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k) k^{-s},$$

donde $h(k) = \sum_{mn=k} f(n) g(m) = (f * g)(k)$. Esto prueba la primera proposición, y la segunda se sigue del teorema de unicidad. ■

1.3.4. Productos de Euler

El siguiente teorema, descubierto por Euler en el año 1737, es a veces llamado la versión analítica del teorema fundamental de la aritmética.

Teorema 1.57. *Sea f una función aritmética multiplicativa tal que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *es absolutamente convergente. Luego la suma de la serie puede ser expresada como un producto infinito absolutamente convergente,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \left\{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots \right\}. \tag{1.10}$$

sobre todos los primos. Si f es completamente multiplicativo, el producto se simplifica y se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(p)}. \tag{1.11}$$

NOTA.- En cada caso, el producto es llamado el ***producto de Euler*** de la serie.

PRUEBA.- Considere el producto infinito

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \left\{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots \right\}.$$

sobre todos los números primos $p \leq x$. Siendo este el producto de un número finito de series absolutamente convergentes, se pueden multiplicar las series y reordenar los términos de cualquier modo sin alterar su suma. Un término es de la forma

$$f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r})$$

ya que f es multiplicativa. Por el teorema fundamental de la aritmética podemos escribir

$$P(x) = \sum_{n \in A} f(n),$$

donde A consiste de aquellos n teniendo todos sus factores primos $\leq x$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n \in B} f(n),$$

donde B es el conjunto de los n teniendo por lo menos un factor primo $> x$. Entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) \right| \leq \sum_{n \in B} |f(n)| \leq \sum_{n > x} |f(n)|.$$

Cuando $x \to \infty$ la última suma en la derecha tiende a 0 ya que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ es convergente. Luego $P(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ cuando $x \to \infty$.
Ahora, un producto infinito de la forma $\prod(1+a_n)$ converge absolutamente siempre y cuando la serie correspondiente $\sum_n a_n$ converja absolutamente. En este caso se tiene

$$\sum_{p\leq x} \left| f(p) + f(p^2) + \cdots \right| \leq \sum_{p\leq x} \left(|f(p)| + |f(p^2)| + \cdots \right) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|.$$

Como todas las sumas parciales son acotadas, la serie de términos positivos

$$\sum_{p} \left| f(p) + f(p^2) + \cdots \right|,$$

converge, y esto implica la convergencia absoluta de el producto en (1.10). Finalmente, cuando f es completamente multiplicativa, se tiene $f(p^n) = \big(f(p)\big)^n$ y cada serie en la derecha de (1.10) es una serie geométrica convergente con suma $\big(1 - f(p)\big)^{-1}$. ■

Aplicando el teorema anterior a una serie de Dirichlet absolutamente convergente se obtiene lo siguiente.

Teorema 1.58. *Asuma que* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ *converge absolutamente para* $\sigma > \sigma_a$. *Si* f *es multiplicativa, se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} \left\{ 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right\}, \tag{1.12}$$

para $\sigma > \sigma_a$, *y si* f *es completamente multiplicativa se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}},$$

para $\sigma > \sigma_a$.

1.3.5. El semiplano de convergencia de una serie de Dirichlet

Una serie de Dirichlet no está definida en todo el plano complejo, puesto que hay valores complejos para los cuales dicha serie no converge. Vamos a ver que una serie de Dirichlet tiene como región de convergencia un semiplano.

Lema 1.59. *Sea* $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *y asuma que la serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s_0}$ *tiene sumas parciales acotadas, digamos*

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n)n^{-s_0} \right| \leq M,$$

para todo $x \geq 1$. *Luego para cada* s *con* $\sigma > \sigma_0$ *se tiene*

$$\left| \sum_{a<n\leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right). \tag{1.13}$$

PRUEBA.- Sea $a(n) = f(n)n^{-s_0}$ y sea $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$. Luego $f(n)n^{-s} = a(n)n^{s_0-s}$ y aplicamos la identidad de Abel (1.1), con $f(x) = x^{s_0-s}$, para obtener

$$\sum_{a<n\leq b} f(n)n^{-s} = A(b)b^{s_0-s} - A(a)a^{s_0-s} + (s - s_0) \int_a^b A(t)t^{s_0-s-1}\mathrm{d}t.$$

Como $|A(x)| \leq M$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{a<n\leq b} f(n)n^{-s} \right| &\leq Mb^{\sigma_0-\sigma} + Ma^{\sigma_0-\sigma} + (\sigma - \sigma_0)M \int_a^b t^{\sigma_0-\sigma-1}\mathrm{d}t \\
&\leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} + |s - s_0|M \left| \frac{b^{\sigma_0-\sigma} - a^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma_0 - \sigma} \right| \\
&\leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right).
\end{aligned}$$

■

Ahora probemos que en efecto la región de convergencia de una serie de Dirichlet es un semiplano.

Teorema 1.60. *Si la serie* $\sum f(n)n^{-s}$ *converge para* $s = \sigma_0 + it_0$ *entonces esta también converge para todo* s *con* $\sigma > \sigma_0$. *Si la serie diverge para* $s = \sigma_0 + it_0$, *entonces esta diverge para todo* s *con* $\sigma < \sigma_0$.

PRUEBA.- La segunda proposición se sigue de la primera. Para probar la primera proposición, escoja cualquier s con $\sigma > \sigma_0$. El lema 1.59 muestra que

$$\left| \sum_{a<n\leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq Ka^{\sigma_0-\sigma},$$

donde K es independiente de a. Ya que $a^{\sigma_0-\sigma} \to 0$ cuando $a \to +\infty$, el criterio de Cauchy muestra que $\sum_n f(n)n^{-s}$ converge. ■

Teorema 1.61. *Si la serie* $\sum_n f(n)n^{-s}$ *no converge en todo punto o diverge en todo punto, existe un numero real* σ_c*, llamado la* ***abscisa de convergencia*** *de la serie* $\sum_n f(n)n^{-s}$ *, tal que la serie converge para todo* s *en el semiplano* $\sigma > \sigma_c$ *y diverge para todo* s *en el semiplano* $\sigma < \sigma_c$*.*

PRUEBA.- La prueba es análoga a la del teorema 1.51, tomando σ_c la menor cota superior de todos los σ tal que $\sum_n f(n)n^{-s}$ diverge. ■

NOTA.- Si la serie converge en todo punto definimos $\sigma_c = -\infty$, y si esta no converge en ningún punto definimos $\sigma_c = +\infty$.

Ya que la convergencia absoluta implica convergencia, siempre se tiene $\sigma_a \geq \sigma_c$. Si $\sigma_a > \sigma_c$ existe una franja infinita $\sigma_c < \sigma < \sigma_a$ en el cual la serie converge condicionalmente. El siguiente teorema muestra que el ancho de esta franja no excede de 1.

Teorema 1.62. *Para cualquier serie de Dirichlet con* σ_c *finito se tiene*

$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1.$$

PRUEBA.- Basta con probar que si $\sum f(n)n^{-s_0}$ converge para algún s_0 luego este converge absolutamente para todo s con $\sigma > \sigma_0+1$. Sea A una cota superior para los números $\left|f(n)n^{-s_0}\right|$. Luego

$$\left|\frac{f(n)}{n^{-s}}\right| = \left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| \left|\frac{1}{n^{s-s_0}}\right| \leq \frac{A}{n^{\sigma-\sigma_0}},$$

de donde $\sum |f(n)n^{-s}|$ converge por comparación con $\sum n^{\sigma_0-\sigma}$. ■

Las propiedades de convergencia de las series de Dirichlet pueden ser comparadas con aquellas de las series de potencias. Toda serie de potencias tiene un disco de convergencia, mientras que toda serie de Dirichlet tiene un semiplano de convergencia. Para series de potencias, el interior del disco de convergencia es también el dominio de convergencia absoluta. Para series de Dirichlet el dominio de convergencia absoluta puede ser un subconjunto propio del dominio de convergencia. Una serie de potencias representa una función analítica dentro de su disco de convergencia. Se probará que una serie de Dirichlet representa una función analítica dentro de su semiplano de convergencia.

1.3.6. Propiedades analíticas de las series de Dirichlet

Las propiedades analíticas de las series de Dirichlet serán deducidas del siguiente teorema general de la teoría de funciones complejas.

Lema 1.63. *Sea $\{f_n\}$ una secuencia de funciones analíticas en un subconjunto abierto S del plano, y asuma que $\{f_n\}$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto de S a una función límite f. Entonces f es analítica en S y la secuencia de derivadas $\{f_n'\}$converge uniformemente en todo subconjunto compacto de S a la derivada f'.*

PRUEBA.- Ya que f_n es analítica en S tenemos de la formula de integral de Cauchy

$$f_n(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_n(z)}{z-a}\mathrm{d}z,$$

donde D es cualquier disco compacto en S, ∂D es su borde orientado positivamente, y a es cualquier punto interior de D.

$$\left|\int_{\partial D}\frac{f_n(z)}{z-a}\mathrm{d}z - \int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right| \le \int_{\partial D}\frac{|f_n(z)-f(z)|}{|z-a|}\mathrm{d}z \le 2\pi \max_{z\in\partial D}\{|f_n(z)-f(z)|\}.$$

A causa de la convergencia uniforme en ∂D, haciendo $n\to\infty$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial D}\frac{f_n(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

Por lo que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz,$$

lo cual implica que f es analítica dentro de D. Para las derivadas se tiene

$$f_n'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_n'(z)}{(z-a)^2}dz \quad \text{y} \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz,$$

de donde se sigue fácilmente que $f_n'(a) \to f'(a)$ uniformemente en todo subconjunto compacto de S cuando $n \to \infty$. ■

Para aplicar el lema a series de Dirichlet primero probamos que estas convergen uniformemente en cada subconjunto compacto del semiplano de convergencia.

Teorema 1.64. *Una serie de Dirichlet* $\sum_n f(n)n^{-s}$ *converge uniformemente en cada subconjunto compacto dentro del interior del semiplano de convergencia* $\sigma > \sigma_c$*.*

PRUEBA.- Basta con mostrar que $\sum_n f(n)n^{-s}$ converge uniformemente en cada rectángulo compacto $R = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ con $\alpha > \sigma_c$. Para hacer esto, usamos la estimación obtenida en el lema 1.59

$$\left|\sum_{a<n\leq b} f(n)n^{-s}\right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma}\left(1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\right), \tag{1.14}$$

donde $s_0 = \sigma_0 + it_0$ es cualquier punto en el semiplano $\sigma > \sigma_c$ y s es cualquier punto con $\sigma > \sigma_0$. Escogemos $s_0 = \sigma_0$ donde $\sigma_c < \sigma_0 < \alpha$, luego si $s \in R$, tenemos que $\sigma - \sigma_0 \geq \alpha - \sigma_0$ y $|s_0 - s| < C$, donde C es una constante dependiendo de s_0 y R pero no de s. Luego (1.14) implica que

$$\left|\sum_{a<n\leq b} f(n)n^{-s}\right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma}\left(1 + \frac{C}{\alpha-\sigma_0}\right) = Ba^{\sigma_0-\alpha},$$

donde B es independiente de s. Como $a^{\sigma_0-\alpha} \to 0$ cuando $a \to +\infty$, se satisface la condición de convergencia uniforme de Cauchy . ■

Teorema 1.65. *La función suma* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ *de una serie de Dirichlet es analítica en su semiplano de convergencia* $\sigma > \sigma_c$*, y su derivada* $F'(s)$ *es representada en este semiplano por la serie de Dirichlet*

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\log(n)}{n^s} \tag{1.15}$$

obtenida por diferenciación término por término.

PRUEBA.- Aplicamos el teorema 1.64 y el lema 1.63 a la secuencia de sumas parciales $f_m(s) = \sum_{i=1}^{m} f(n)n^{-s}$. ■

NOTA.- La serie derivada en (1.15) tiene la misma abscisa de convergencia y la misma abscisa de convergencia absoluta, de la serie $F(s)$.

1.4. Transformadas de Fourier y aproximaciones de la identidad

En esta sección daremos resultados de aproximación de funciones y teoría de transformadas de Fourier que serán útiles en los siguientes capítulos. Los resultados se pueden encontrar en [Ste][Cap. 1] y [Fol][Cap. 7].

En esta sección usaremos las siguientes notaciones:

- El espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ se denota por

$$C(\mathbb{R}^n) = \big\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \text{ es continua } \big\}.$$

- El espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ que tienden a cero en el infinito se denota por

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \big\{ f \in C(\mathbb{R}^n), \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \big\}.$$

- Para un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

- Dada una función $f \in C(\mathbb{R}^n)$ y un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$, definimos $\partial^\alpha(f)$ como la derivada parcial (si existe)

$$\partial^\alpha(f) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$$

  y decimos que $\partial^\alpha(f)$ es una derivada parcial de orden $|\alpha|$.

- El espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ tales que todas sus derivadas de orden menor o igual a k existen y son continuas, se denota por

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \big\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \partial^\alpha(f) \text{ es continua cuando } |\alpha| \leq k \big\}.$$

Cuando $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, decimos que f es de *clase* C^k.

- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos el ***soporte*** de f como el conjunto

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\big\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\big\}}.$$

- El espacio de funciones en $\mathbb{R}^n$ de clase C^k con soporte compacto se denota por

$$C_c^k(\mathbb{R}^n) = \big\{f \in C^k(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\big\}.$$

- Dado $1 \leq p < \infty$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos $||f||_p$ como

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

- Definimos el espacio de funciones L^p

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \big\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, ||f||_p < \infty\big\}.$$

$||\cdot||_p$ define una norma en este espacio, por lo que también denotamos $||f||_{L^p} = ||f||_p$.

- Definimos el ***supremo esencial*** de un conjunto $A \in \mathbb{R}$ como

$$\operatorname{ess\,sup}(A) = \operatorname{ínf}\big\{x \leq \infty, a \leq x \text{ en casi todo punto de } A\big\}.$$

- Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$. Definimos el espacio

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, ||f||_\infty < \infty\}.$$

$||\cdot||_\infty$ define una norma en este espacio, por lo que también denotamos $||f||_{L^\infty} = ||f||_\infty$.

- El espacio de funciones que son ***localmente*** L^p se denota por

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \big\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \chi_K.f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ para cualquier } K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto}\big\}$$

donde χ_K es la función característica de K.

1.4.1. Aproximaciones de la identidad

Sean f y g dos funciones medibles en $\mathbb{R}^n$. **La *convolución*** de f y g es la función $f * g$, definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y.$$

Directamente de la definición podemos inferir las siguientes propiedades básicas.

Proposición 1.66. *Asumiendo que las integrales en cuestión existan, tenemos:*

(i) El operador de convolución es bilineal y simétrico.

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(iii) Para $\omega \in \mathbb{R}^n$ *tenemos* $\tau_\omega(f * g) = (\tau_\omega f) * g = f * (\tau_\omega g)$, *donde* $\tau_\omega f(x) := f(x - \omega)$.

(iv) Si A *es la clausura del conjunto* $\{x + y; x \in \operatorname{supp} f, y \in \operatorname{supp} g\}$, *entonces*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset A.$$

Tal vez el hecho más interesante de este operador de convolución es su carácter regularizante, i.e. Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g,$$

para todo multi-índice α con $|\alpha| < k$. En ese caso la convolución de dos funciones tiene por lo menos la regularidad de la más regular.

Sea Φ una función en $\mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ Escribimos

$$\Phi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Observe que si $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

para cada $\epsilon > 0$. Cuando $\epsilon \to 0$, la masa de Φ_ϵ se vuelve más concentrada en el origen, de modo que, heurísticamente, Φ_ϵ está convergiendo a un múltiplo de la delta de Dirac. Ese es esencialmente el contexto de los próximos dos resultados.

Teorema 1.67 (Aproximaciones de la identidad-convergencia L^p)**.** *Sea $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\mathrm{d}x = A$. Entonces valen las siguientes propiedades:*

(i) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ entonces $f * \Phi_\epsilon \to Af$ en la norma L^p, cuando $\epsilon \to 0$.

(ii) Si f es acotada y uniformemente continua, entonces $f * \Phi_\epsilon \to Af$ uniformemente cuando $\epsilon \to 0$.

(iii) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y f es continua en un abierto U, entonces $f * \Phi_\epsilon \to Af$ uniformemente en subconjuntos compactos de U, cuando $\epsilon \to 0$

Teorema 1.68 (Aproximaciones de la identidad-convergencia puntual)**.** *Sea $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = A$. Defina el menor **mayorante radial** de Φ como $\Psi(x) = \operatorname{ess\,sup}_{|y|\geq|x|} |\Phi(y)|$ y suponga que $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, tenemos*

$$\lim_{\epsilon \to 0} f * \Phi_\epsilon(x) = Af(x)$$

para todo x en el conjunto de Lebesgue de f (en particular para casi todo punto).

1.4.2. La transformada de Fourier

El concepto de transformada de Fourier, nominada en homenaje al matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier, es motivado por dos ideas centrales en análisis, la idea de expresar funciones periódicas como superposición de ondas básicas (senos y cosenos), que está relacionada con las llamadas series de Fourier y la concepción de un operador que transforma diferenciación en multiplicación por polinomios, una herramienta de extrema utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales.

De este modo, para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos su ***transformada de Fourier*** $\hat{f}$ por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nuestra primera proposición colecciona una serie de propiedades básicas de la transformada de Fourier. En particular, observe su relación con el operador convolución y su carácter especial de transformar diferenciación en multiplicación por polinomios.

Proposición 1.69. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

(i) $||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$.

(ii) $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-2\pi i \xi . y}\hat{f}(\xi)$ *y* $\tau_\eta(\hat{f}) = \hat{h}$ *donde* $h(x) = e^{2\pi i \eta . x} f(x)$.

(iii) Si T es una transformación lineal invertible en $\mathbb{R}^n$ y $S = (T^*)^{-1}$ es la inversa de su traspuesta, entonces $\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-1}\hat{f} \circ S$. En particular, si T es una rotación, tenemos $\widehat{f \circ T}(\xi) = \hat{f} \circ T$; y si $Tx = t^{-1}x \, (t > 0)$, entonces $\widehat{f \circ T}(\xi) = t^n \hat{f}(t\xi)$.

(iv) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

(v) Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, entonces $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha \hat{f} = [(-2i\pi x)^\alpha f]^\wedge$

vi Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, y $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k-1$, entonces $\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

El próximo resultado nos da una caracterización (parcial) importante del conjunto imagen de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.70 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Pasamos a investigar ahora el problema inverso: como obtener f a partir de su transformada de Fourier $\hat{f}$. Definimos para eso la ***transformada de Fourier inversa*** (denotada por $\check{}$) de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x . \xi} f(x) \mathrm{d}x.$$

Teorema 1.71 (Fórmula de inversión)**.** *Si f y $\check{f}$ están en $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x . \xi} \check{f}(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Capítulo 2

Teorema tauberiano de Wiener-Ikehara

El teorema tauberiano de Wiener-Ikehara es un teorema dado por Ikehara en 1931 que se sigue de un teorema tauberiano de Wiener. La simplicidad de las condiciones necesarias hacen del teorema la primera herramienta en el estudio del crecimiento de funciones aritméticas.

2.1. EL teorema de Wiener-Ikehara

Lema 2.1. *Sea* $A : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *no decreciente tal que*

$$\int_0^\infty e^{-\sigma y} A(y)\, \mathrm{d}y < \infty,$$

para todo $\sigma > 1$. *Entonces la función*

$$s \mapsto \int_0^\infty e^{-sy} A(y)\, \mathrm{d}y = w(s)$$

es analítica en la región $\mathrm{Re}(s) > 1$.

PRUEBA.- Esto viene del teorema 1.26 (Morera) pues, si consideramos un triángulo compacto Δ en la región $\mathrm{Re}(s) > 1$, entonces existe $\sigma_0 > 1$ tal que $\mathrm{Re}(z) > \sigma_0$ para todo $z \in \Delta$. Luego

$$\int_{\partial\Delta} \int_0^\infty |e^{-sy} A(y)|\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s \leq \ell(\partial\Delta) \int_0^\infty e^{-\sigma_0 y} A(y)\, \mathrm{d}y < \infty,$$

por tanto por el teorema de Fubini [Fol][Teo 2.37] podemos cambiar las integrales, y usando que $e^{-sy}A(y)$ es analítica en la variable s para y fijo, por el teorema de Cauchy (1.25), tenemos:

$$\int_{\partial\Delta}\int_0^\infty e^{-sy}A(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty\int_{\partial\Delta} e^{-sy}A(y)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty 0\,\mathrm{d}y = 0.$$

Por lo que concluimos que $s \mapsto \displaystyle\int_0^\infty e^{-sy}A(y)\,\mathrm{d}y = w(s)$ es analítica. ■

Veamos el ejemplo particular cuando $A(y) = e^y$, en este caso

$$s \mapsto \int_0^\infty e^{-sy}e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{s-1}.$$

El enunciado del teorema de Wiener-Ikehara es lo recíproco, viendo que si la función $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sy}A(y)\,\mathrm{d}y$ es próxima a $\dfrac{1}{s-1}$, entonces $A(y)$ es próxima a e^y.

Teorema 2.2 (Wiener-Ikehara)**.** *Sea* $A : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *no decreciente tal que*

$$\int_0^\infty e^{-\sigma y}A(y)\,\mathrm{d}y < \infty$$

para todo $\sigma > 1$ *y suponga que*

$$s \mapsto w(s) - \frac{1}{s-1}$$

se extiende continuamente a $\{\sigma \geq 1\}$*, donde* $w(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sy}A(y)\mathrm{d}y$*. Entonces*

$$\lim_{y\to\infty} A(y)e^{-y} = 1.$$

PRUEBA.- Sea

$$M(s) = w(s) - \frac{1}{s-1} = \int_0^\infty e^{-sy}(A(y) - e^y)\,\mathrm{d}y.$$

Defina para $\sigma > 1$,

$$m_\sigma(y) = \begin{cases} e^{-\sigma y}\big(A(y) - e^y\big) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Note que $m_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$ para $\sigma > 1$. Además

$$\begin{aligned}\widehat{m_\sigma}(t) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i t y} m_\sigma(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty e^{-2\pi i t y}e^{-\sigma y}(A(y) - e^y)\,\mathrm{d}y = M(\sigma + 2\pi i t).\end{aligned}$$

Así, teniendo $\widehat{m_\sigma}(t) = M(\sigma + 2\pi i t)$.

Supongamos que vale la inversión de Fourier; tendríamos

$$m_\sigma(y) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma + 2\pi i t) e^{2\pi i t y} \mathrm{d}t,$$

y si pudieramos tomar límite de $\sigma \to 1$,

$$m_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} M(1 + 2\pi i t) e^{2\pi i t y} \, \mathrm{d}t.$$

Por el lema de Riemann-Lebesgue, $\lim_{y \to \infty} m_1(y) \to 0$ y tendríamos que $e^{-y}(A(y) - e^y) \to 0$, i.e. $A(y)e^{-y} \to 1$ cuando $y \to \infty$, y tendríamos resuelto nuestro problema. Ahora bien, no podemos usar la inversión de Fourier, puesto que no sabemos si $\widehat{m_\sigma} \in L^1$. Cuando nos enfrentamos con estos problemas en análisis, la mayoría de veces la técnica para saltar el obstáculo es aproximar por objetos (funciones) regulares donde podemos aplicar nuestros resultados (teoremas) conocidos y luego pasar al límite, para obtener lo deseado. En esta ocasión usaremos técnicas de aproximaciones por la identidad.

Consideramos el ***núcleo de Fejer*** $k(x)$, definido por

$$k(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2,$$

con transformada de Fourier $\hat{k}(t) = \big(1 - |t|\big)_+$. Entonces

$$k_\delta(x) = \delta k(\delta x),$$

$$\widehat{k_\delta}(t) = \hat{k}(t/\delta) = \big(1 - \delta^{-1}|t|\big)_+.$$

Considere $m_\sigma * k_\delta \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{m_\sigma * k_\delta} &= \widehat{m_\sigma}(t)\widehat{k_\delta}(t) \\ &= M(\sigma + 2\pi i t) \left(1 - \frac{t}{|\delta|} \right)_+ . \end{aligned}$$

Al ser $\widehat{m_\sigma * k_\delta}$ continua de soporte compacto, la inversión de Fourier vale

$$m_\sigma * k_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma + 2\pi i t) \left(1 - \frac{|t|}{\delta} \right)_+ e^{2\pi i t x} \, \mathrm{d}t.$$

Como $m_\sigma * k_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} m_\sigma(y) k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} m_\sigma(y) k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y$, tenemos

$$\int_0^{\infty} m_\sigma(y) k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma + 2\pi i t) \left(1 - \frac{|t|}{\delta}\right)_+ e^{2\pi i t x}\,\mathrm{d}t.$$

Tomando límite cuando $\sigma \to 1^+$, por el teorema de la convergencia dominada [Fol, Teo 2.24], el lado derecho queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(1 + 2\pi i t) \left(1 - \frac{|t|}{\delta}\right)_+ e^{2\pi i t x}\,\mathrm{d}t.$$

El lado izquierdo es $\int_0^{\infty} e^{-\sigma y} A(y) k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{\infty} e^{-\sigma y} e^{y} k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y$. Tomando límite cuando $\sigma \to 1^+$, usando el teorema de la convergencia monótona [Fol, Teo 2.14], el lado izquierdo queda

$$\int_0^{\infty} e^{-y} A(y) k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{\infty} k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Luego

$$\int_0^{\infty} \big(e^{-y} A(y) - 1\big) k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} M(1 + 2\pi i t) \left(1 - \frac{|t|}{\delta}\right)_+ e^{2\pi i t x}\,\mathrm{d}t,$$

y como $t \mapsto M(1 - 2\pi i t)\left(1 - \frac{|t|}{\delta}\right)_+ \in L^1(\mathbb{R})$, por el lema de Riemann-Lebesgue

$$\int_0^{\infty} (e^{-y} A(y) - 1) k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y \to 0, \text{ cuando } x \to \infty. \tag{2.1}$$

Sea $0 < \epsilon < 1$ y asuma que δ es suficientemente grande para que

$$1 - \epsilon < \int_{-\sqrt{\delta}}^{\sqrt{\delta}} k(y)\,\mathrm{d}y < 1.$$

Haciendo $y = \delta z$ y recordando que $k_\delta(z) = \delta k(\delta z)$

$$1 - \epsilon < \int_{-1/\sqrt{\delta}}^{1/\sqrt{\delta}} k_\delta(z)\,\mathrm{d}z < 1,$$

y para $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$1 - \epsilon \le \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y \le 1. \tag{2.2}$$

Usamos la condición de que A es no decreciente y elegimos x grande, λ pequeño ($x > \lambda$) para tener que

$$e^{-x-\lambda} A(x-\lambda) \le e^{-y} A(y) \le e^{-x+\lambda} A(x+\lambda). \tag{2.3}$$

Usando (2.2) y (2.3), tenemos que

$$(1-\epsilon)[e^{-x-\lambda}A(x-\lambda)] \leq \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} e^{-y}A(y)k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y \leq e^{-x+\lambda}A(x+\lambda). \tag{2.4}$$

De la primera desigualdad (el lado izquierdo) de (2.4) tenemos que

$$(1-\epsilon)[e^{-x-\lambda}A(x-\lambda)] \leq \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} e^{-y}A(y)k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y \leq \int_0^\infty e^{-y}A(y)k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.5}$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \lim\limits_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} k_\delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} k_\delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$, de (2.1) obtenemos que

$$\int_0^\infty (e^{-y}A(y))k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y \to 1, \text{ cuando } x\to\infty.$$

Fijando δ y tomando $\limsup\limits_{x\to\infty}$ en (2.5), tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty}(1-\epsilon)(e^{-x-\lambda}A(x-\lambda)) &\leq 1\\
\limsup_{x\to\infty}(e^{-x+\lambda}A(x-\lambda)) &\leq e^{2\lambda}/(1-\epsilon)\\
\limsup_{x\to\infty}(e^{-x}A(x)) &\leq e^{2\lambda}/(1-\epsilon).
\end{aligned}$$

Teniendo así que $\limsup\limits_{x\to\infty}(e^{-x}A(x)) \leq e^{2\lambda}/(1-\epsilon)$, como esto se cumple para cualquier ϵ y δ, haciendo $\delta\to\infty$ ($\lambda\to 0$), $\epsilon\to 0$

$$\limsup_{x\to\infty}(e^{-x}A(x)) \leq 1.$$

En particular, también tenemos que existe $c > 0$ tal que $e^{-x}A(x) \leq c$, usando la segunda desigualdad de la ecuación (2.4)

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to\infty} e^{-x+\lambda}A(x+\lambda) &\geq \liminf_{x\to\infty}\int_{x-\lambda}^{x+\lambda} e^{-y}A(y)k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y\\
&= \liminf_{x\to\infty}\left(\int_0^\infty - \int_0^{x-\lambda} - \int_{x+\lambda}^\infty\right)\\
&= 1 - \limsup_{x\to\infty}\int_0^{x-\lambda} e^{-y}A(y)k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y\\
&\quad - \limsup_{x\to\infty}\int_{x+\lambda}^{\infty} e^{-y}A(y)k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y\\
&\geq 1 - c\left(\int_0^{x-\lambda} + \int_{x+\lambda}^\infty\right)k_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y\\
&\geq 1 - c\epsilon.
\end{aligned}$$

Análogamente al primer caso, tenemos que $\liminf_{x\to\infty} e^{-x}A(x) \geq (1-c\epsilon)e^{-2\lambda}$. Como esto ocurre para cualquier $\epsilon \in (0,1)$ y cualquier δ suficientemente grande, podemos hacer $\epsilon \to 0$, $\delta \to \infty$ ($\lambda \to 0$), obteniendo que $\liminf_{x\to\infty} e^{-x}A(x) \geq 1$. Concluimos que $\lim_{x\to\infty} e^{-x}A(x) = 1$. ■

2.2. Aplicaciones del teorema de Wiener-Ikehara

Mostramos una aplicación inmediata del teorema de Wiener-Ikehara al estudio de las series de Dirichlet.

Sean $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Consideremos la serie de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{{\lambda_n}^s},$$

con $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y con abscisa de convergencia $\sigma_c = 1$. Supongamos que $F(s)$ se extiende meromórficamente a una región abierta conteniendo $\{\sigma \geq 1\}$ con un único polo en $s = 1$ con residuo r. Definamos $B : [0,\infty) \to [0,\infty)$ como $B(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$. Usando la integral de Riemann-Stieltjes y la integración por partes, podemos expresar nuestra serie de Dirichlet como

$$\begin{aligned} F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{{\lambda_n}^s} &= \int_{1^-}^{\infty} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}B(x) \\ &= \left.\frac{B(x)}{x^s}\right|_{1^-}^{\infty} + s\int_1^{\infty} B(x)x^{-s-1}\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Vemos que cuando $\sigma > 1$, $\lim_{x\to\infty} |B(x)/x^s| = 0$. En efecto, sea $\sigma = 1+2\epsilon$ y considere $\sigma_0 = 1+\epsilon$. Por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{{\lambda_n}^{\sigma_0}}$ existe y converge a un valor digamos L, luego tenemos que

$$\frac{B(x)}{x^\sigma} = \frac{\sum_{\lambda_n \leq x} a_n}{x^\sigma} = \left(\sum_{\lambda_n \leq x} \frac{a_n}{x^{\sigma_0}}\right) x^{-\epsilon} \leq \left(\sum_{\lambda_n \leq x} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}\right) x^{-\epsilon} \leq Lx^{-\epsilon}.$$

Tomando límite cuando $x \to \infty$ se tiene lo deseado. De este modo $\left.\frac{B(x)}{x^s}\right|_{1^-}^{\infty} = 0$ y la integración por partes en (2.6) nos deja

$$F(s) = s \int_1^{\infty} B(x) x^{-s-1}\,\mathrm{d}x, \text{ para } \sigma > 1.$$

Hacemos el cambio $x = e^t$:

$$\frac{F(s)}{rs} = \int_0^{\infty} \frac{B(e^t)}{r} e^{-st}\,\mathrm{d}t, \text{ para } \sigma > 1.$$

Definiendo $A(t) = \frac{B(e^t)}{r}$ y $G(s) = \frac{F(s)}{rs}$, tenemos que A es no decreciente, y al tener $F(s)$ una continuación meromorfa a una región Ω conteniendo $\{\sigma \geq 1\}$ con un único polo en $s = 1$ con residuo r, entonces $G(s)$ tendrá continuación meromorfa en la región $\Omega \setminus \{0\}$ conteniendo $\{\sigma \geq 1\}$ con un único polo en $s = 1$ con residuo 1, de modo que $G(s) - \frac{1}{s-1}$ tendrá extensión continua en $\{\sigma \geq 1\}$, cumpliéndose así las hipótesis del teorema de Wiener-Ikehara. Concluimos que $\lim_{t\to\infty} \frac{B(e^t)}{r} e^{-t} = 1$, i.e. $\lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x} = r$, obteniendo el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sean*$1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ *con* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Si la serie de Dirichlet* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$, $a_n \geq 0$ *tiene abscisa de convergencia* $\sigma_c = 1$ *y admite continuación meromorfa a un conjunto abierto conteniendo* $\{\sigma \geq 1\}$ *con un único polo simple en* $s = 1$ *con residuo* r*, entonces*

$$A(x) \sim rx,$$

donde $A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$.

Podemos obtener una prueba del teorema de los números primos usando el teorema anterior, para $a_n = \Lambda(n)$, $\lambda_n = n$, donde Λ es la función de von Mangoldt, definida por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Del hecho conocido que $\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ para $\sigma > 1$, y que la función ζ se extiende de manera analítica a todo el plano complejo, sin polos ni ceros en la recta $\{\sigma = 1\}$, a excepción del polo simple $s = 1$ [Apo, Sec. 13.5] (lo cual implica que $\dfrac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tiene un único polo simple en $s = 1$), tenemos del teorema 2.3 que

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x. \tag{2.7}$$

La función ψ aquí definida es llamada la ***función ψ de Chebyshev***, o ***segunda función de Chebyshev***. Ahora veamos que en efecto esta última ecuación implica el teorema de los números primos. Para ello veamos una proposición simple que nos permitirá intercambiar el estudio de la función Λ por el de la función $\log$ sobre los primos.

Proposición 2.4. *Definimos la función ϑ como $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$. Entonces, se cumple que*

$$\vartheta(x) \sim x.$$

PRUEBA.- Vemos que

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \Lambda(x) = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p = \vartheta(x) + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p$$

y tenemos que $\displaystyle\sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p = \sum_{p \leq x^{1/2}} \left(\left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor - 1 \right) \log p \leq \sum_{p \leq x^{1/2}} \log x \leq x^{1/2} \log x.$

Por tanto $\vartheta(x) \sim x$ viene del hecho que $\psi(x) \sim x$. ■

Para finalizar, note que

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_{2^-}^{x^+} \frac{1}{\log t} \, \mathrm{d}\vartheta(t) = \left. \frac{\vartheta(t)}{\log t} \right|_{2^-}^{x^+} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} \, \mathrm{d}t,$$

obteniendo que

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} \, \mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

Como $\vartheta(x) \sim x$, en particular tenemos que $\vartheta(x) \leq Cx$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, para alguna constante universal C. Luego

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} \, \mathrm{d}t &\leq C \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2} \, \mathrm{d}t \\
&\leq C \left(\int_2^{x^{1/2}} \frac{1}{(\log t)^2} \, \mathrm{d}t + \int_{x^{1/2}}^x \frac{1}{(\log t)^2} \, \mathrm{d}t \right) \\
&\leq \frac{1}{(\log 2)^2} x^{1/2} + x \frac{1}{(\log(x^{1/2}))^2} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2} \right).
\end{aligned}$$

Reemplazando esto último en (2.8) y multiplicando por el factor $\frac{\log x}{x}$, se tiene que

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + O\left(\frac{1}{\log x}\right),\ x \geq 2. \tag{2.9}$$

Tomando límite cuando $x \to \infty$, y sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$, tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.5 (Teorema de los números primos)**.**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

De este modo, vimos que el teorema tauberiano de Wiener-Ikehara tiene como aplicación directa el teorema de los números primos, esto es, la descripción del comportamiento de la cantidad o de la densidad de los números primos. Claramente del teorema de los números primos, tenemos en particular que $\frac{\pi(x)}{x} = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$, $x \geq 2$, por lo que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$, que significa que los primos tienen una "densidad" nula sobre los naturales.

Podemos obtener otras aplicaciones del teorema de Wiener-Ikehara, consideremos por ejemplo que queremos estimar la densidad de los valores de una función aritmética, digamos de la función φ de Euler. Sea $a(n) = \#\{m : \varphi(m) = n\}$ y denotando $A(x) = \sum\limits_{m\leq x} a(m)$, queremos estimar $\frac{A(x)}{x}$. Veremos cómo el teorema de Wiener-Ikehara sirve para responder parcialmente esta pregunta.

Primero estimemos $a(n)$ (ni siquiera vimos que este número era finito), sea m tal que $\varphi(m) = n$, si $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ con $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ es la descomposición como producto de primos de m, es fácil ver que

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{\varphi(m)} = \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2}{p_2 - 1}\right)\cdots\left(\frac{p_k}{p_k - 1}\right) \leq p_k \leq n + 1$$

debido a que $\frac{p_{r-1}}{p_r - 1} \leq 1$ y que $p_k - 1 | n$ (por lo cual $p_k - 1 \leq n$). Tenemos que $m \leq n(n+1)$, y por ende, aunque sea una cota muy débil, tenemos que $a(n) \leq n(n+1)$. Teniendo esto, podemos definir

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

de momento para $\sigma > 3$, donde es absolutamente convergente, por lo que podemos reordenar los términos y tener

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)^s}.$$

Pero, como φ es multiplicativa podemos expresar

$$\begin{aligned} F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{\varphi(p)^s} + \frac{1}{\varphi(p^2)^s} + \frac{1}{\varphi(p^3)^s} + \dots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} + \frac{1}{(p-1)^s p^s} + \frac{1}{(p-1)^s p^{2s}} + \dots\right). \end{aligned}$$

La última productoria converge para $\sigma > 1$, así que de hecho todas las sumatorias en la igualdad convergen para $\sigma > 1$ también. De hecho los factores en la última productoria son del tipo

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{(p-1)^s} + \frac{1}{(p-1)^s p^s} + \frac{1}{(p-1)^s p^{2s}} + \dots &= 1 + \frac{p^s}{(p-1)^s (p^s - 1)} \\ &= \frac{p^s}{p^s - 1}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right). \end{aligned}$$

Obteniendo que

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \zeta(s)G(s), \quad \sigma > 1,$$

donde $G(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right)$ es una función holomorfa para $\sigma > 0$, puesto que $\sum_p \left(\frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right)$ es absolutamente convergente en partes compactas de $\{\sigma > 0\}$. Así, tenemos que $F(s)$ admite extensión analítica definida por $\zeta(s)G(s)$ a la región $\{\sigma > 0\}$ con un único polo en $s = 1$ con residuo igual a $G(1)$, aplicando el teorema 2.3, tenemos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x} = G(1).$$

El cálculo de $G(1)$ es inmediato:

$$G(1) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = \prod_p \left(\frac{p^6 - 1}{p^6} \frac{p^2}{p^2 - 1} \frac{p^3}{p^3 - 1}\right) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

Teorema 2.6. *Se cumple que*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\#\{m : \varphi(m) \leq x\}}{x} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

Capítulo 3

El teorema tauberiano de Landau

En este capítulo enunciaremos y probaremos la versión hiperbólica de un teorema tauberiano de Landau, usando de referencia la tesis doctoral de Mathieu Roux [Roux, Cap. 13]. La ventaja de este teorema es que solo requiere de una extensión meromorfa a una región hiperbólica, la cual es una región pequeña, de modo que nos permite trabajar con funciones cuyas localizaciones de ceros o polos no se conocen del todo, como la función zeta de Riemann. Se dará una pequeña modificación al enunciado del teorema tauberiano hiperbólico de Landau y con esta estimaremos el término de error en el teorema de los números primos, $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$.

3.1. El teorema tauberiano hiperbólico de Landau

Primero establezcamos hipótesis antes de enunciar el teorema tauberiano hiperbólico de Landau.

Definición 3.1 (Hipótesis(H_-)). *Sea (a_n) una sucesión de elementos de $\mathbb{C}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, una función par con $\lim_{\tau\to\infty} \varphi(\tau) = 0$ y φ decreciente en $\mathbb{R}_+$. Definimos la* ***zona hiperbólica***

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varphi) = \big\{ s = (\sigma, \tau) \in \mathbb{C} : \sigma_a - \varphi(\tau) \leq \sigma \leq \sigma_a \big\}.$$

Sea $\alpha \geq 0$ y $B : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función creciente.

Decimos que la sucesión $\{a_n\}$ verifica las hipótesis (H_-) con los parámetros

$$\big(\sigma_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A, \varphi, \alpha, B\big)$$

siempre y cuando :

1. *La abscisa de convergencia absoluta de $Z(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ es σ_a con $\sigma_a > 0$.*
2. *La aplicación $s \mapsto Z(s)$ se extiende meromórficamente a $\mathcal{U}$ con un número finito de polos, y denotamos $s_0, s_1, \dots, s_r$ los polos de $\frac{Z(s)}{s}$ tales que para $0 \leq i \leq r, \sigma_i = \sigma_a$. Denotamos además por m_j al orden de s_j como polo de $\frac{Z(s)}{s}$.*
3. *Para $\epsilon > 0, Z(s) \ll_\epsilon 1 + |\tau|^{A(\sigma_a - \sigma)+\epsilon}$, para $s \in \mathcal{U}$, con τ suficientemente grande en valor absoluto.*
4. *$\sum_{n\geq 1} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma - \sigma_a)^{-\alpha}$, uniformemente en $\sigma_a < \sigma \leq \sigma_a + 1$.*
5. *Para $n \geq 1$, $|a_n| \leq B(n)$.*

Ahora enunciemos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.2 (Teorema tauberiano hiperbólico de Landau)**.** *Supongamos que la sucesión (a_n) verifica las hipótesis (H_-) con los parámetros*

$$\big(\sigma_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A, \varphi, \alpha, B\big),$$

donde $\sigma_a \geq 1$ y B es una función acotada. Entonces, para todo $j = 0, \dots, r$,

$$Q_j(x) = e^{-s_j x} \operatorname*{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right)$$

es un polinomio de grado $m_j - 1$, donde m_j es el orden de s_j como polo de $\frac{Z(s)}{s}$, y además para todo $\epsilon > 0$

- *Suponiendo que existe $\beta > 0$ tal que $\varphi(T) \gg \frac{1}{T^\beta}$ y $\alpha < \frac{1}{\beta}$:*

$$N(t) = \sum_{n\leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r} t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a} (\ln t)^{\alpha - \frac{1}{\beta} + \epsilon} \right).$$

- *Suponiendo que existe $\beta > 0$ tal que $\varphi(T) \gg \frac{1}{(\ln T)^\beta}$, entonces existe $M > 0$ tal que*

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r} t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a} \exp\left(-(M \ln t)^{\frac{1}{1+\beta}} (1-\epsilon) \right) \right).$$

3.2. Previos a la demostración

3.2.1. Fórmula de Perron

La ***función de Heaviside*** $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ se define por:

$$h(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } a = 1, \\ 0, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Tenemos el siguiente lema.

Lema 3.3. *Si $c > 0$, nos referiremos a $\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ como el valor principal de la integral impropia $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT}$. Luego, si a es cualquier número real positivo, se tiene*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a^z \, \frac{\mathrm{d}z}{z} = h(a).$$

Mas aún, tenemos

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z} \right| \leq \frac{a^c}{\pi T \log\left(\frac{1}{a}\right)} \quad \text{si } 0 < a < 1, \tag{3.1}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z} - 1 \right| \leq \frac{a^c}{\pi T \log a} \quad \text{si } a > 1, \tag{3.2}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{c}{\pi T} \quad \text{si } a = 1. \tag{3.3}$$

PRUEBA.- Suponga primero que $0 < a < 1$ y considere el contorno rectangular R_1 formado por los vértices $c - iT, b - iT, b + iT, c + iT$, con $b > c$. Ya que a^z/z es analítica en el interior de este rectángulo R_1, tenemos $\displaystyle\int_{R_1} \frac{a^z}{z} \mathrm{d}z = 0$. Entonces escribimos la integral de $\dfrac{a^z}{z}$ como

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{a^z}{z} \mathrm{d}z = \left(\int_{b+iT}^{c+iT} + \int_{b-iT}^{b+iT} + \int_{c-iT}^{c+iT} \right) \frac{a^z}{z} \mathrm{d}z,$$

y luego

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \le \int_c^b \frac{a^x}{T}\mathrm{d}x + \frac{2Ta^b}{b} + \int_c^b \frac{a^x}{T}\mathrm{d}x$$
$$\le \frac{2}{T}\int_c^\infty a^x \mathrm{d}x + \frac{2Ta^b}{b} = \frac{2}{T}\left(\frac{-a^c}{\log a}\right) + \frac{2Ta^b}{b}.$$

Hacemos $b \to \infty$. Luego $a^b \to 0$, de donde

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \le \frac{2a^c}{T\log\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Esto prueba (3.1) .

Si $a > 1$, usamos el contorno rectangular formado por los vértices $-b - iT$, $c - iT$, $c + iT$, $-b + iT$. Aquí $b > c > 0$ y $T > c$. Ahora a^z/z tiene un polo de orden 1 en $z = 0$ con residuo 1 ya que

$$a^z = e^{z\log a} = 1 + z\log a + O(|z|^2) \text{ cuando } z \to 0.$$

Por consiguiente

$$2\pi i = \left(\int_{c-iT}^{c+iT} + \int_{c+iT}^{-b+iT} + \int_{-b+iT}^{-b-iT} + \int_{-b-iT}^{c-iT}\right) a^z \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z} - 1 = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-b+iT}^{c+iT} + \int_{-b-iT}^{-b+iT} + \int_{c-iT}^{-b-iT}\right) a^z \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Ahora estimamos las integrales de la derecha. Tenemos

$$\left|\int_{-b+iT}^{c+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \le \int_{-b}^c \frac{a^x}{T}\mathrm{d}x \le \int_{-\infty}^c a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{T}\frac{a^c}{\log a},$$
$$\left|\int_{-b-iT}^{-b+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \le 2T\frac{a^{-b}}{b},$$
$$\left|\int_{c-iT}^{-b-iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \le \int_{-b}^c \frac{a^x}{T}\mathrm{d}x \le \frac{1}{T}\frac{a^c}{\log a}.$$

Haciendo $b \to \infty$, la segunda integral tiende a 0, obteniendo (3.2).

Cuando $a = 1$, podemos analizar la integral directamente. Tenemos

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{-T}^T \frac{i}{c+iy}\mathrm{d}y = \int_{-T}^T \frac{y}{c^2+y^2}\mathrm{d}y + ic\int_{-T}^T \frac{\mathrm{d}y}{c^2+y^2}$$
$$= 2ic\int_0^T \frac{\mathrm{d}y}{c^2+y^2},$$

donde la primera integral $\int_{-T}^{T} \frac{y}{c^2+y^2}\mathrm{d}y$ del segundo miembro se anula, pues el integrando es una función impar. Luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{c}{\pi}\int_0^T \frac{\mathrm{d}y}{c^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{T}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{c}{T}.$$

Como $\arctan(c/T) < c/T$, esto prueba (3.3), y la prueba del lema 3.3 está completa (haciendo $T \to \infty$). ■

Teorema 3.4 (Fórmula de Perron). *Sea* $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/\lambda_n{}^s$ *una serie de Dirichlet absolutamente convergente para* $\sigma > \sigma_a$*, de modo que* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión de números reales tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$*; sea* $c > 0$*,* $x > 0$ *arbitrario. Luego si* $\sigma > \sigma_a - c$ *tenemos:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(s+z)\frac{x^z}{z}\mathrm{d}z = \sum_{\lambda_n \leq x}{}^{*} \frac{a_n}{\lambda_n{}^s},$$

donde $\sum^*$ *significa que el último termino en la suma está multiplicado por* $1/2$ *cuando* $x = \lambda_n$*.*

NOTA.- Denotaremos a $N(x) = \sum_{\lambda_n \leq x}{}^{*} \frac{a_n}{\lambda_n{}^s}$.

PRUEBA.- En la integral, c es la parte real de z, luego la serie $Z(s+z)$ es absoluta y uniformemente convergente en subconjuntos compactos de el semiplano $\sigma + c > \sigma_a$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{c-iT}^{c+iT} Z(s+z)\frac{x^z}{z}\mathrm{d}z &= \int_{c-iT}^{c+iT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n{}^{s+z}}\frac{x^z}{z}\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n{}^s}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)^z \frac{\mathrm{d}z}{z} \\
&= \sum_{\lambda_n < x} \frac{a_n}{\lambda_n{}^s}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z} + \sum_{\lambda_n > x} \frac{a_n}{\lambda_n{}^s}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z} \\
&\quad +' \frac{a_m}{x^s}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\mathrm{d}z}{z},
\end{aligned}$$

Indicando el símbolo $+'$ que el último término aparece solo si x es algún λ_m.

En la suma finita $\sum_{\lambda_n<x}$ podemos pasar el límite $T \to \infty$ término a término, y la integral es $2\pi i$ por el lema 3.3 $\left(\text{aquí } a = \frac{x}{\lambda_n}, a > 1\right)$. El último término (si este aparece) resulta $\pi i a_m {\lambda_m}^{-s}$, y el teorema estaría probado si mostramos que

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{n>x} \frac{a_n}{{\lambda_n}^s} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{\lambda_n}\right)^z \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0. \tag{3.4}$$

Sabemos que $\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+\infty} (x/\lambda_n)^z (\mathrm{d}z/z) = 0$ si $\lambda_n > x$, pero para probar (3.4) debemos estimar la velocidad con la cual $\displaystyle\int_{c-iT}^{c+iT}$ tiende a cero. Del lema 3.3 tenemos el estimado

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leq \frac{2}{T} \frac{a^c}{\left(\log \frac{1}{a}\right)} \text{ para } 0 < a < 1.$$

Aquí $a = x/\lambda_n$, con $\lambda_n > x$. Entonces $1/a = \lambda_n/x \geq \lambda_N/x > 1$, donde N es el menor entero tal que $\lambda_N > x$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\lambda_n>x} \frac{a_n}{{\lambda_n}^s} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{\lambda_n}\right)^z \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| &\leq \sum_{\lambda_n>x} \frac{|a_n|}{{\lambda_n}^\sigma} \frac{2}{T} \frac{\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)^c}{\log\ \left(\frac{\lambda_n}{x}\right)} \\ &\leq \frac{2}{T} \frac{x^c}{\log\ \left(\frac{\lambda_N}{x}\right)} \sum_{\lambda_n>x} \frac{|a_n|}{{\lambda_n}^{\sigma+c}} \to 0 \text{ cuando } T \to \infty.\end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula de Perron. ■

NOTA.- Si $c > \sigma_a$, la fórmula de Perron es válida para $s = 0$ y obtenemos la siguiente representación integral de las sumas parciales de los coeficientes:

Corolario 3.5. *Si $c > \sigma_a$, tenemos que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(z) \frac{x^z}{z} \mathrm{d}z = {\sum_{\lambda_n\leq x}}^* a_n = N_0(x).$$

3.2.2. Fórmula de Perron efectiva

Teorema 3.6 (Primera fórmula de Perron efectiva)**.** *Para $c > \text{máx}(0, \sigma_a)$, $T \geq 1$ y $x \geq 1$, tenemos que*

$$N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} Z(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left(x^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{{\lambda_n}^c (1 + T|\log(x/\lambda_n)|)}\right). \tag{3.5}$$

PRUEBA.- Del lema 3.3, y de las ecuaciones (3.1) y (3.2) tenemos que

$$\left|h(y) - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| \leq \frac{1}{\pi T|\log\ y|}y^c,$$

luego para y tal que $T|\log y| > 1$ tenemos que

$$\left|h(y) - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| \leq \frac{1}{\pi T|\log\ y|}y^c \leq \frac{y^c}{1+T|\log y|}.$$

Supongamos ahora que $T|\log y| \leq 1$:

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s = y^c \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\mathrm{d}s}{s} + y^c \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{(y^i\tau - 1)}{s}\mathrm{d}s.$$

Por un lado, del lema 3.3, ecuación (3.3)

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \leq \frac{c}{\pi T} + \frac{1}{2},$$

y por otro lado, como tenemos que $|e^{it} - 1| \leq |t|$ para $|t| < \pi/2$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^{i\tau} - 1}{s}\mathrm{d}s\right| &= \left|\int_{-T}^{T} \frac{y^{i\tau} - 1}{s}\mathrm{d}\tau\right| \\ &\leq \int_{-T}^{T} \left|\frac{(\tau\log y)}{s}\right| \mathrm{d}\tau \\ &\leq 2T|\log y| \leq 2,\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| &\leq \left(\frac{c}{\pi T} + \frac{1}{2} + 2\right) y^c = \left(\frac{c}{\pi T} + \frac{5}{2}\right) \frac{(1+T|\log y|)y^c}{1+T|\log y|} \\ &\leq 2\left(\frac{c}{\pi T} + \frac{5}{2}\right) \frac{y^c}{1+T|\log y|}.\end{aligned}$$

Luego, si $y < 1$, tenemos que $h(y) = 0$ y entonces, en este caso

$$\left|h(y) - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{c}{\pi T} + \frac{5}{2}\right) \frac{y^c}{1+T|\log y|},$$

mientras si $y > 1$, tenemos $h(y) = 1$ y entonces

$$\begin{aligned}\left|h(y) - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| &\leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{c}{\pi T} + \frac{5}{2}\right) \frac{y^c}{1+T|\log y|} + 1 \\ &\leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{c}{\pi T} + \frac{5}{2}\right) \frac{y^c}{1+T|\log y|} + \frac{y^c|T\log y|}{|T\log y|} \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{c}{\pi T} + \frac{5}{2}\right) + 1\right) \frac{y^c}{1+T|\log y|}.\end{aligned}$$

Obtenemos así una cota uniforme $M = \text{máx}\left\{\frac{1}{\pi}\left(\frac{c}{\pi T}+\frac{5}{2}\right)+1\,,\,1\right\}$ de modo que

$$\left|h(y)-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| \leq M\left(\frac{y^c}{1+T|\log y|}\right).$$

Haciendo $y = x/\lambda_n$ y sumando sobre todos los $n \geq 1$ (después de una multiplicación por a_n) obtenemos la fórmula establecida. ∎

Corolario 3.7 (Segunda fórmula de Perron efectiva)**.** *Sea $Z(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ una serie de Dirichlet de abscisa de convergencia absoluta finita σ_a.*

Supongamos que existe un número real $\alpha \geq 0$ tal que :

$$\sum_{n\geq 1}|a_n|n^{-\sigma} \ll (\sigma-\sigma_a)^{-\alpha} \textit{ uniformemente en } \sigma_a < \sigma \leq \sigma_a + 1,$$

y una función $B:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ no decreciente, satisfaciendo para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| \leq B(n).$$

Entonces para $t \geq 2$, $T \geq 2$, $\sigma \leq \sigma_a$, $c = \sigma_a - \sigma + \frac{1}{\ln t}$:

$$\sum_{n\leq t}\frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}Z(s+\omega)t^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} + O\left(t^{\sigma_a-\sigma}\frac{(\ln t)^{\alpha}}{T} + \frac{B(2t)}{t^{\sigma}}\left(1+t\frac{\log T}{T}\right)\right) \tag{3.6}$$

En particular, cuando $s = 0$, para $t \geq 2$, $T \geq 2$, $\sigma_a \geq 0$, $c = \sigma_a + \frac{1}{\ln t}$:

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}Z(\omega)t^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} + O\left(t^{\sigma_a}\frac{(\ln t)^{\alpha}}{T} + B(2t)\left(1+t\frac{\ln T}{T}\right)\right)$$

PRUEBA.- Aplicamos la fórmula (3.5) a la serie $F(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-\omega}$ con $b_n = a_n n^{-s}$. Notando que $F(\omega) = Z(s+\omega)$, tenemos que

$$\sum_{n\leq x}a_n n^{-s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}Z(s+\omega)x^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} + O\left(x^c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n n^{-s}|}{n^c\big(1+T|\log(x/n)|\big)}\right).$$

Cuando n no pertenece a $[\frac{1}{2}x, 2x]$ tenemos que $\big|\log(x/n)\big| > \log 2$, entonces

$$x^c\frac{|a_n n^{-s}|}{n^c(1+T|\log(x/n)|)} \leq \frac{x^c}{T\log 2}\frac{|a_n|}{n^{c+\sigma}}.$$

Luego, la contribución en la suma de estos términos es

$$\ll x^c T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-c-\sigma} \ll x^{\sigma_a - \sigma} T^{-1} (\log x)^{\alpha}.$$

Cuando $\frac{1}{2}x \le n \le 2x$, escribimos $n = N + h$ donde N es el entero más cercano a x (por lo que $|N - x| \le 1/2$); luego

- Si $x \le n \le 2x$, entonces $0 \le \frac{n-x}{x} \le 1$. Usando que $\log(1+a) \ge \frac{a}{2}$ cuando $0 \le a \le 1$, tenemos que
$$\log\left(\frac{n}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{n-x}{x}\right) \ge \frac{n-x}{2x}.$$
Por desigualdad triangular, tenemos que $n - x \ge |n - N| - |x - N| \ge |h| - 1/2$.
Si $N \ne n$, entonces $|h| \ge 1$ y por tanto $n - x \ge |h| - \frac{1}{2} \ge \frac{|h|}{2}$. Si $n = N$, entonces $h = 0$, por lo que también se cumple que $n - x \ge \frac{|h|}{2}$. Concluimos que
$$\log\left(\frac{n}{x}\right) \ge \frac{|h|}{4x}.$$

- Si $\frac{x}{2} \le n \le x$, entonces $0 \le \frac{x-n}{n} \le 1$. Usando que $\log(1+a) \ge \frac{a}{2}$ cuando $0 \le a \le 1$, tenemos que
$$\log\left(\frac{x}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{x-n}{n}\right) \ge \frac{x-n}{2n} \ge \frac{x-n}{2x}.$$
Por desigualdad triangular, tenemos que $x - n \ge |N - n| - |N - x| \ge |h| - 1/2$.
Si $N \ne n$, entonces $|h| \ge 1$ y por tanto $x - n \ge |h| - \frac{1}{2} \ge \frac{|h|}{2}$. Si $n = N$, entonces $h = 0$, por lo que también se cumple que $x - n \ge \frac{|h|}{2}$. Concluimos que
$$\log\left(\frac{x}{n}\right) \ge \frac{|h|}{4x}.$$

Así tenemos $\big|\log(x/n)\big| \gg \frac{|h|}{x}$. Con esto estimamos la contribución de la suma restante:

$$\begin{aligned} x^{-\sigma} \sum_{x/2 \le n \le 2x} \frac{|a_n|}{1 + T|\log(x/n)|} &\ll \frac{B(2x)}{x^{\sigma}} \sum_{0 \le h \le x+1} \frac{1}{1 + Th/x} \\ &\ll \frac{B(2x)}{x^{\sigma}} \left\{ 1 + \sum_{1 \le h \le x/T} 1 + \sum_{x/T < h \le x+1} \frac{x}{Th} \right\} \\ &\ll \frac{B(2x)}{x^{\sigma}} \left\{ 1 + x \frac{\log T}{T} \right\}, \end{aligned}$$

donde esta última estimación se deduce de la fórmula de Abel. ■

Antes de empezar con la prueba del teorema hiperbólico de Landau, veamos que los Q_j definidos son efectivamente polinomios. Ahora enunciemos la primera parte del teorema hiperbólico de Landau.

Teorema 3.8. *Sea $Z(s)$ una función meromorfa, de modo que $\dfrac{Z(s)}{s}$ tiene polo $s = s_j$ de orden $m = m_j$. Definimos*

$$Q_j(x) = e^{-s_j x} \operatorname*{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right).$$

Luego Q_j es un polinomio de grado $m_j - 1$.

PRUEBA.- Aplicamos el lema 1.46 para $f(s) = e^{sx}$ y $g(s) = \dfrac{Z(s)}{s}$, ya que $f^{(k)}(s) = x^k e^{sx}$, tenemos que

$$\operatorname*{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right) = \sum_{k=1}^{m_j} a_{-k} \frac{x^{k-1} e^{s_j x}}{(k-1)!}.$$

Luego

$$e^{-s_j x} \operatorname*{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right) = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{-k}}{(k-1)!} x^{k-1}$$

es un polinomio de grado $m_j - 1$. ■

3.3. Prueba del teorema hiperbólico de Landau

Para probar el teorema hiperbólico de Landau, vamos a hacer uso de la fórmula de Perron efectiva para tener el siguiente estimado.

Lema 3.9. *Con las notaciones del teorema 3.2, tenemos que*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r} \operatorname*{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) =& N(t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a} \frac{(\ln t)^\alpha}{T} + B(2t) \left(1 + t \frac{\ln T}{T} \right) \right) \\ &+ O_\epsilon \left(t^{\sigma_a - \varphi(T)} T^\epsilon \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

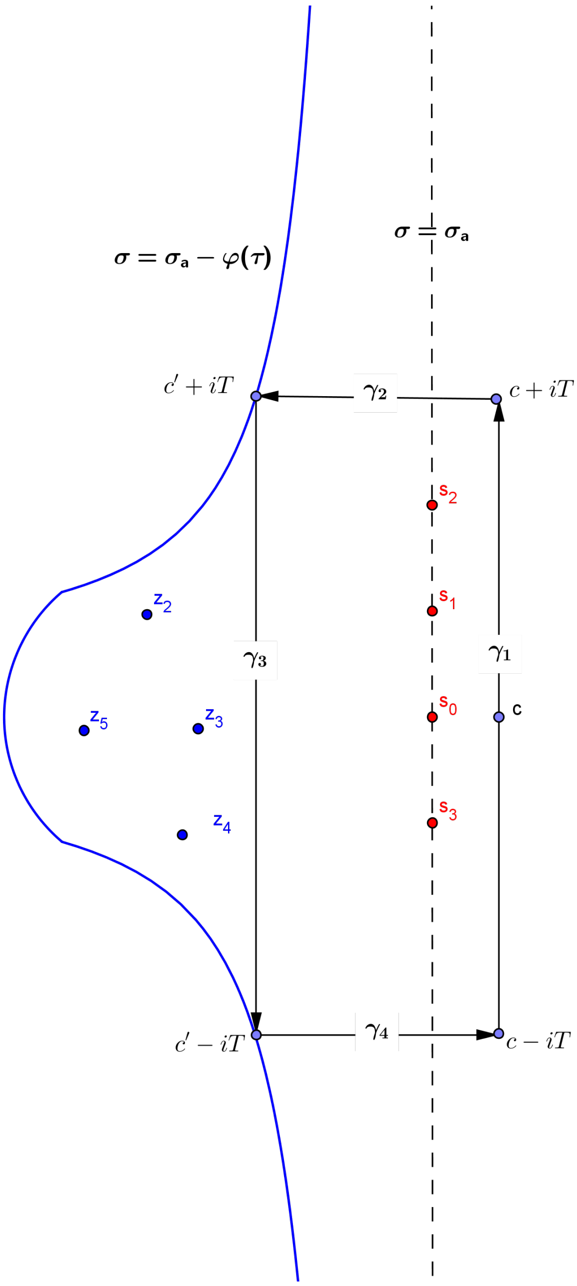

Figura 3.1: Contorno de integración para el teorema hiperbólico de Landau

PRUEBA.- Consideremos el contorno rectangular de vértices $c - iT, c + iT, c' + iT, c' - iT$ como se muestra en la figura 3.1, donde $c = \sigma_a + \dfrac{1}{\ln t}$, $c' = \sigma_a - \varphi(T)$ y apliquemos el teorema de residuos a la función $s \mapsto \dfrac{Z(s)}{s} t^s$.

Tenemos así

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \frac{Z(s)}{s} t^s \mathrm{d}s\right) = \sum_{j=0}^{r} \operatorname*{Res}_{s=s_j}\left(\frac{Z(s)}{s} t^s\right).$$

Analizando el camino γ_2 tenemos por el punto 3 de la hipótesis (H_-) que

$$\begin{aligned}\left|\frac{Z(s)}{s} t^s\right| = \frac{|Z(s)| t^s}{|s|} &\leq \frac{|Z(s)| t^\sigma}{|\tau|} \\ &\ll_\epsilon \frac{1 + T^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon}}{T} t^\sigma \\ &\ll_\epsilon \left(T^{-1} + T^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon - 1}\right) t^\sigma.\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, entonces $A(\sigma_a - \sigma) \leq A(\varphi(T)) \leq \dfrac{1}{2} - \epsilon$, para T suficientemente grande. Por lo que

$$T^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon - 1} \ll T^{-1/2},$$

y entonces

$$\frac{Z(s)}{s} t^s \ll_\epsilon T^{-1/2} t^\sigma \text{ , para } T \text{ suficientemente grande.}$$

Luego

$$\int_{\gamma_2} \frac{Z(s)}{s} t^s ds \ll_\epsilon \int_{c'}^{c} \frac{t^\sigma}{\sqrt{T}} d\sigma \ll_\epsilon \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{t^{\sigma_a}}{\ln t}.$$

Análogamente, obtenemos que

$$\int_{\gamma_4} \frac{Z(s)}{s} t^s ds \ll_\epsilon \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{t^{\sigma_a}}{\ln t}.$$

Para el análisis sobre γ_1 usamos la fórmula de Perron efectiva:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{Z(s)}{s} t^s \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{Z(s)}{s} t^s \mathrm{d}s = N(t) + O\left(t^{\sigma_a} \frac{(\ln t)^\alpha}{T} + B(2t)\left(1 + t \frac{\ln T}{T}\right)\right).$$

Por último estimamos la integral sobre γ_3, usando de nuevo $((H_{-})3.)$, y ya que φ es par, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{Z(s)}{s}t^s\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_a-\varphi(T)+iT}^{\sigma_a-\varphi(T)-iT}\frac{Z(s)}{s}t^s\mathrm{d}s\\ &\ll_\epsilon t^{\sigma_a-\varphi(T)}\int_{-T}^{T}\frac{(1+|\tau|)^{A\varphi(\tau)+\epsilon/2}}{|s|}\mathrm{d}\tau\\ &\ll_\epsilon t^{\sigma_a-\varphi(T)}\int_{0}^{T}\frac{(1+|\tau|)^{A\varphi(\tau)+\epsilon/2}}{|\tau|}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$, existe $T_0>1$, tal que $A\varphi(T_0)<\epsilon/2$ y se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^T\frac{(1+|\tau|)^{A\varphi(\tau)+\epsilon/2}}{|\tau|}\mathrm{d}\tau &= \int_0^{T_0}\frac{(1+|\tau|)^{A\varphi(\tau)+\epsilon/2}}{|\tau|}\mathrm{d}\tau+\int_{T_0}^{T}\frac{(1+|\tau|)^{A\varphi(\tau)+\epsilon/2}}{|\tau|}\mathrm{d}\tau\\ &\ll_\epsilon 1+\int_{T_0}^{T}(1+|\tau|)^{\epsilon-1}\mathrm{d}\tau\\ &\ll_\epsilon T^\epsilon.\end{aligned}$$

Combinando las estimaciones sobre cada γ_i obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r}\operatorname*{Res}_{s=s_j}\left(\frac{Z(s)}{s}t^s\right) =&N(t)+O\left(t^{\sigma_a}\frac{(\ln t)^\alpha}{T}+B(2t)\left(1+t\frac{\ln T}{T}\right)\right)+O_\epsilon\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{t^{\sigma_a}}{\ln t}\right)\\ &+O_\epsilon\left(t^{\sigma_a-\varphi(T)}T^\epsilon\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r}\operatorname*{Res}_{s=s_j}\left(\frac{Z(s)}{s}t^s\right) =&N(t)+O_\epsilon\left(t^{\sigma_a}\frac{(\ln t)^\alpha}{T}+B(2t)\left(1+t\frac{\ln T}{T}\right)\right)\\ &+O_\epsilon\left(t^{\sigma_a-\varphi(T)}T^\epsilon\right).\end{aligned}$$

■

3.3.1. Prueba del primer punto del teorema hiperbólico de Landau

Para probar el primer punto del teorema, vemos que si $\varphi(T)\gg\frac{1}{T^\beta}$, entonces existe $M>0$ tal que para T suficientemente grande tenemos $\varphi(T)\geq\frac{M}{T^\beta}$. Definamos T implícitamente por:

$$T^\beta\ln T=\frac{M\ln t}{1+\epsilon}.$$

De aquí obtenemos los siguientes resultados:

1. $\dfrac{\ln t}{\ln T} \ll_\epsilon T^\beta$.

2. $\ln t \ll_\epsilon T^\beta \ln T \ll_{\epsilon_1} T^{\beta+\epsilon_1}$, de aquí haciendo ϵ_1 tal que $\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\beta+\epsilon_1} = \epsilon$, tenemos sucesivamente, que

$$\begin{aligned}
\ln t &\ll_{\epsilon_1} T^{\beta+\epsilon_1} \\
\ln t &\ll_\epsilon T^{\beta+\epsilon_1} \\
(\ln t)^{-\frac{1}{\beta+\epsilon_1}} &\gg_\epsilon T^{-1} \\
(\ln t)^{-\frac{1}{\beta}+\epsilon} &\gg_\epsilon T^{-1},
\end{aligned}$$

obteniendo que $\dfrac{1}{T} \ll_\epsilon (\ln t)^{-\frac{1}{\beta}+\epsilon}$.

3. Multiplicando por $t^{\sigma_a}(\ln t)^\alpha$

$$t^{\sigma_a}\frac{(\ln t)^\alpha}{T} \ll_\epsilon t^{\sigma_a}(\ln t)^{\alpha-\frac{1}{\beta}+\epsilon}. \tag{3.8}$$

4. Como teníamos que B estaba acotada, entonces $B(2t) \ll 1$.

5. Usando la estimación en 2, vemos que

$$t\frac{\ln t}{T^{\beta+1}} = t\ln t\left(\frac{1}{T}\right)^{\beta+1} \ll_{\epsilon_1} t\ln t\left(\ln t^{-\frac{1}{\beta}+\epsilon_1}\right)^{\beta+1} \ll_{\epsilon_1} t(\ln t)^{-\frac{1}{\beta}}(\ln t)^{\epsilon_1(\beta+1)}$$

y haciendo ϵ_1 tal que $\epsilon = \epsilon_1(\beta+1)$, obtenemos $t\dfrac{\ln t}{T^{\beta+1}} \ll_\epsilon t(\ln t)^{-\frac{1}{\beta}+\epsilon}$.

Entonces, dado que $\sigma_a \geq 1$

$$B(2t)\frac{t\ln T}{T} \ll t\frac{\ln t}{T^{\beta+1}} \ll_\epsilon t(\ln t)^{-\frac{1}{\beta}+\epsilon} \ll_\epsilon t^{\sigma_a}(\ln t)^{\alpha-\frac{1}{\beta}+\epsilon}. \tag{3.9}$$

6. Para la última estimación vemos que

$$\begin{aligned}
t^{\sigma_a-\varphi(T)}T^\epsilon &\leq t^{\sigma_a}\exp\left(\frac{-M\ln t}{T^\beta}\right)T^\epsilon = t^{\sigma_a}\exp\left(\frac{-M\ln t}{T^\beta}\right)\exp(\epsilon\ln T) \\
&\leq t^{\sigma_a}\exp\left(\frac{-M\ln t}{T^\beta} + \epsilon\ln T\right) \\
&\leq t^{\sigma_a}\exp\left(-\ln T(1+\epsilon) + \epsilon\ln T\right) \\
&\leq \frac{t^{\sigma_a}}{T}
\end{aligned}$$

y entonces

$$t^{\sigma_a - \varphi(T)} T^{\epsilon} \ll_{\epsilon} t^{\sigma_a} (\ln t)^{-\frac{1}{\beta}+\epsilon} \ll_{\epsilon} t^{\sigma_a} (\ln t)^{\alpha - \frac{1}{\beta}+\epsilon}. \tag{3.10}$$

Combinando todas las estimaciones (3.8), (3.9), (3.10) y reemplazando en la ecuación (3.7) , obtenemos el primer punto

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r} t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_{\epsilon}\left(t^{\sigma_a} (\ln t)^{\alpha - \frac{1}{\beta}+\epsilon}\right).$$

3.3.2. Prueba del segundo punto del teorema hiperbólico de Landau

Para la segunda parte, vemos que si $\varphi(T) \gg \frac{1}{(\ln T)^{\beta}}$, entonces existe $M > 0$ tal que para T suficientemente grande tenemos $\varphi(T) \geq \frac{M}{(\ln T)^{\beta}}$. Definamos en este caso a T como

$$T = \exp\left(\left(\frac{M \ln t}{1+\epsilon}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\right).$$

1. $\dfrac{1}{T} = \exp\left(-(M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} \dfrac{1}{(1+\epsilon)^{\frac{1}{\beta+1}}}\right)$ pero al ser $\beta > 0$, tenemos $\frac{1}{\beta+1} < 1$, de donde $(1+\epsilon)^{\frac{1}{\beta+1}} < 1+\epsilon$, y entonces $\frac{1}{(1+\epsilon)^{\frac{1}{\beta+1}}} > \frac{1}{1+\epsilon} > 1-\epsilon$, en particular $\frac{1}{(1+\epsilon)^{\frac{1}{\beta+1}}} > 1-\epsilon+\epsilon_1$, para ϵ_1 suficientemente pequeño. Obtenemos así que

$$\frac{1}{T} \ll_{\epsilon} \exp\left(-(M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1-\epsilon+\epsilon_1)\right). \tag{3.11}$$

2. $\ln T \ll (\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}$.

3. Usando (3.11) tenemos que

$$\frac{t^{\sigma_a} (\ln t)^{\alpha}}{T} \ll t^{\sigma_a} \exp\left(-(M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1-\epsilon+\epsilon_1) + \alpha \ln \ln t\right),$$

pero como $\alpha \ln \ln t \leq (M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} \epsilon_1$ para t suficientemente grande

$$\frac{t^{\sigma_a} (\ln t)^{\alpha}}{T} \ll t^{\sigma_a} \exp\left(-(M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1-\epsilon)\right). \tag{3.12}$$

4. Dado que B esta acotado, $B(2t) \ll 1$.

5. Ahora estimamos

$$B(2t)t\frac{\ln T}{T} \ll_\epsilon t(\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} \exp\Big(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon+\epsilon_1)\Big)$$
$$\ll_\epsilon t\exp\left(\frac{1}{\beta+1}\ln\ln t-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon+\epsilon_1)\right).$$

Como $\frac{1}{\beta+1}\ln\ln t \leq (M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}\epsilon_1$, para t suficientemente grande, tenemos

$$B(2t)t\frac{\ln T}{T} \ll_\epsilon t\exp\Big(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon)\Big).$$

Como $\sigma_a \geq 1$, entonces

$$B(2t)t\frac{\ln T}{T} \ll_\epsilon t^{\sigma_a}\exp\Big(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon)\Big). \tag{3.13}$$

6. Para la estimación de $t^{\sigma_a-\varphi(T)}T^\epsilon$, vemos que

$$\begin{aligned} t^{\sigma_a-\varphi(T)}T^\epsilon &\leq t^{\sigma_a}\exp\left(-\frac{M\ln t}{(\ln T)^\beta}\right)T^\epsilon \\ &= t^{\sigma_a}\exp(-(1+\epsilon)\ln T+\epsilon\ln T) \\ &= \frac{t^{\sigma_a}}{T} \end{aligned}$$

y entonces usando una estimación dada en (3.11), tenemos que

$$t^{\sigma_a-\varphi(T)}T^\epsilon \ll_\epsilon t^{\sigma_a}\exp\Big(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon)\Big). \tag{3.14}$$

Juntando las estimaciones (3.12), (3.13), (3.14) y reemplazándolas en (3.7), obtenemos

$$N(t)=\sum_{n\leq t}a_n=\sum_{j=0}^{r}t^{s_j}Q_j(\ln t)+O_\epsilon\left(t^{\sigma_a}\exp\Big(-(M\ln t)^{\frac{1}{1+\beta}}(1-\epsilon)\Big)\right).$$

■

OBSERVACIÓN.- En la prueba del segundo punto (en la hipótesis que existe β tal que $\varphi(T) \gg \frac{1}{(\ln T)^\beta}$), podemos debilitar la la hipótesis que B sea acotada por la hipótesis que $B(x) \ll \log(x)^\delta$, para algún $\delta > 0$, y luego podemos estimar $B(2t)t\frac{\ln T}{T}$ del siguiente modo:

$$B(2t)t\frac{\ln T}{T} \ll_\epsilon \big(\ln(2t)\big)^\delta t(\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}\exp\Big(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon+\epsilon_1)\Big)$$
$$\ll_\epsilon t\exp\left(\delta\ln\ln(2t)+\frac{1}{\beta+1}\ln\ln t(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon+\epsilon_1)\right).$$

Como $\delta \ln\ln(2t) + \frac{1}{\beta+1}\ln\ln t \leq (M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}\epsilon_1$ para t suficientemente grande, tenemos $B(2t)t\frac{\ln T}{T} \ll_\epsilon t\exp\left(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon)\right)$ y como $\sigma_a \geq 1$, entonces

$$B(2t)t\frac{\ln T}{T} \ll_\epsilon t^{\sigma_a}\exp\left(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon)\right). \tag{3.15}$$

Así tenemos que se sigue cumpliendo la estimación de (3.13), y por lo tanto la prueba asumiendo $B(x) \ll (\log x)^\delta$ se sigue del mismo modo (salvo la nueva estimación (3.15) a la que se llegó de otro modo). Este razonamiento se resume en la siguiente variante del teorema 3.2.

Teorema 3.10 (Teorema tauberiano hiperbólico de Landau, segunda versión)**.** *Supongamos que la sucesión (a_n) verifica las hipótesis (H_-) con los parámetros*

$$\big(\sigma_a, \{(s_0, m_0, (s_1, m_1), \ldots, (s_r, m_r))\}, A, \varphi, \alpha, B\big),$$

donde $\sigma_a \geq 1$ y $B(x) \ll \log(x)^\delta$ para algún $\delta > 0$. Entonces para todo $j = 0, \ldots, r$,

$$Q_j(x) = e^{-s_j x}\operatorname*{Res}_{s=s_j}\left(\frac{Z(s)}{s}e^{sx}\right)$$

es un polinomio de grado $m_j - 1$, donde m_j es el orden de s_j como polo de $\dfrac{Z(s)}{s}$. Y además para todo $\epsilon > 0$: Suponiendo que existe $\beta > 0$ tal que $\varphi(T) \gg \frac{1}{(\ln T)^\beta}$, entonces existe $M > 0$ tal que

$$N(t) = \sum_{n\leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r} t^{s_j}Q_j(\ln t) + O_\epsilon\left(-(M\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}(1-\epsilon)\right).$$

3.3.3. Una aplicación del teorema hiperbólico de Landau

El teorema de los números primos

Podemos aplicar el teorema previo para la serie de Dirichlet

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

donde $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es la función de von Mangoldt. Veamos que $Z(s)$ cumple con todas las hipótesis del teorema 3.10:

- $Z(s)$ tiene como abscisa de convergencia (absoluta) $\sigma_a = 1$, teniendo un polo en $\sigma_a = 1$.

- $\zeta(s)$ no tiene ceros en la recta $\{\sigma = 1\}$ y además existen C_1, C_2 constantes tales que $|\zeta(s)| \geq C_1(\log|\tau|)^{-7}$ en la región $\{|\tau| \geq 2, \sigma \geq 1 - C_2(\log|\tau|)^{-9}\}$[Ten, p. 168]. Por tanto $Z(s) = \dfrac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tiene extensión meromorfa en una región $\{\sigma \geq 1 - \varphi(\tau)\}$ con único polo en $s = 1$, donde $\varphi(\tau) = C_2(\log|\tau|)^{-9}$ para τ suficientemente grande.

- $\zeta'(s) \ll \log(|\tau|)^2$ en la región $\{|\tau| \geq 2, \sigma \geq 1 - C_2(\log|\tau|)^{-9}\}$ [Ten, p. 147], por lo que $|Z(s)| = \left|\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \ll \dfrac{(\log|\tau|)^2}{C_1 \log|\tau|^{-7}} \ll (\log|\tau|)^9$ para $|\tau|$ suficientemente grande. En particular, como $(\log|\tau|)^9 \leq |\tau|^\epsilon$ para $|\tau|$ suficientemente grande, tenemos $Z(s) \ll_\epsilon 1 + |\tau|^\epsilon$, para $|\tau|$ grande.

- $n \mapsto \log(n)$ es creciente y $\Lambda(n) \leq \log(n)$.

- $\dfrac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo 1, por lo que

$$\lim_{s\to 1} \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}(s-1) = 1;$$

  en particular $\lim\limits_{\sigma\to 1^+} \dfrac{-\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}(\sigma - 1) = 1$, por lo que existe $\delta \in (0,1)$ tal que $\left|\dfrac{-\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}(\sigma - 1)\right| \leq 2$ cuando $1 < \sigma < 1 + \delta$. Además, como $[1+\delta, 2]$ es compacto, existe una constante C_0 tal que $\left|\dfrac{-\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}(\sigma-1)\right| \leq C_0$ cuando $1 + \delta \leq \sigma \leq 2$. Denotando $C = \max\{C_0, 2\}$, tenemos $\left|\dfrac{-\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}(\sigma-1)\right| \leq C_0$ cuando $1 < \sigma \leq 2$, esto es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \ll (\sigma-1)^{-1}$ uniformemente en $1 < \sigma \leq 2$.

- $\varphi(\tau) \gg \dfrac{1}{(\log|\tau|)^9}$.

De este modo, hemos verificado las hipótesis del teorema 3.10 con los parámetros $\big(\sigma_a = 1, (s_0, m_0) = (1,1), A = 0, \varphi, \alpha = 1, B(n) = \log(n)\big)$ y con $\beta = 9$, de lo cual obtenemos que existe M tal que

$$\sum_{n\leq t} \Lambda(n) = t + O_\epsilon\Big(t \exp\big(-(M\ln t)^{\frac{1}{10}}(1-\epsilon)\big)\Big),$$

es decir, existe c tal que

$$\psi(t) = t + O\Big(t\exp\big(-c(\ln t)^{\frac{1}{10}}\big)\Big). \tag{3.16}$$

Como ya habíamos visto antes, en la proposición 2.4 y en la ecuación (2.9), se tenía que

$$\vartheta(x) = \psi(x) + O(x^{1/2} \log x),$$
$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

de donde

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O(x^{1/2}) + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

y reemplazando usando la ecuación (3.16), nos da

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x} \exp\big(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\big)\right).$$

Capítulo 4

El teorema de Bateman y el método de Selberg-Delange

4.1. Estudio de la distribución de los valores de la función φ de Euler

En el capítulo 2 habíamos introducido la función aritmética $a(n) = \#\{m : \varphi(m) = n\}$, y estimamos mediante el teorema de Wiener-Ikehara

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n) \sim \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} x.$$

Ahora queremos estimar el término de error $A(x) - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} x$ al igual como lo hicimos con el término de error $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$. Sin embargo, esta función aritmética $a(n)$ no nos permite usar el teorema tauberiano hiperbólico de Landau, pues este $a(n)$ no es mayorado por alguna función $b(n)$ creciente, pero al mismo tiempo cumpla que $b(n) \ll (\log(n))^{\epsilon}$, y aunque hagamos uso de la fórmula de Perron efectiva no obtendremos la estimación deseada. Aquí se va mostrar un método para poder llegar a nuestro cometido, de manera indirecta, analizando $\displaystyle\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$. Haremos uso de la siguiente variante de la fórmula de Perron:

Lema 4.1. *Sea* $Z(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^s$ *una serie de Dirichlet con abscisa de convergencia absoluta*

σ_a. *Siendo* $B(x) = \sum_{n\leq x} b_n$ *, entonces para* $c > \text{máx}\{0, \sigma_a\}$ *se tiene que*

$$\int_0^x B(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s.$$

Definiendo $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, habíamos visto que $F(s) = \zeta(s)G(s)$, donde $G(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right)$ es una función holomorfa en $\{\sigma > 0\}$. Primero verificaremos esta última afirmación y estimaremos $G(s)$ en cierta región hiperbólica.

Lema 4.2. *Para* $s \in \mathbb{C}$ *con* $\sigma > 0$*,*

$$\left|\frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right| \leq \text{mín}\left\{\frac{2}{(p-1)^\sigma}, \frac{|s|}{(p-1)^{\sigma+1}}\right\}. \tag{4.1}$$

En particular $G(s)$ *es holomorfa en* $\{\sigma > 0\}$. *Además*

$$|G(s)| \ll (1 + \log|\tau|)^A \text{ en la región } \left\{\sigma \geq 1 - \frac{1}{\log^+|\tau|}\right\} \tag{4.2}$$

para alguna constante $A > 0$. *En particular,* $|G(s)| \ll_\delta (1 + |\tau|)^{1-\delta}$ *para cualquier* $0 < \delta < 1$.

PRUEBA.- Para la primera parte, solo note que

$$\left|\frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right| \leq \left|\frac{1}{(p-1)^s}\right| + \left|\frac{1}{p^s}\right| = \frac{1}{(p-1)^\sigma} + \frac{1}{p^\sigma} \leq \frac{2}{(p-1)^\sigma},$$

$$\left|\frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right| = \left|\int_{p-1}^{p} \frac{s\mathrm{d}x}{x^{s+1}}\right| = |s|\left|\int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}}\right| \leq |s|\frac{1}{(p-1)^{\sigma+1}}.$$

Para cada s con $\sigma > 0$, existe una bola compacta $\overline{B(s, \sigma/2)}$ en la cual

$$\sum_p \left|\frac{1}{(p-1)^z} - \frac{1}{p^z}\right| \leq \sum_p \frac{(|s| + \sigma/2)}{(p-1)^{\frac{\sigma}{2}+1}} \leq (|s| + \sigma/2)\zeta(1 + \frac{\sigma}{2}),$$

para todo $z \in \overline{B(s, \sigma/2)}$, lo cual implica que la productoria $\prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right)$ es normalmente convergente y por tanto define una función holomorfa en $\{\sigma > 0\}$.

Para la segunda parte, como $|G(s)| = |F(s)|\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq F(2)\zeta(2)$ para $\sigma > 2$, tenemos que $|G(s)| \ll 1$ en $\{\sigma > 2\}$.

Por tanto basta analizar en la región $\left\{1-\frac{1}{\log^+|\tau|}\leq\sigma\leq 2\right\}$. Usando que $1+x\leq e^x$ podemos estimar $G(s)$ del siguiente modo:

$$|G(s)|\leq\prod_p\left(1+\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|\right)\leq\exp\left(\sum_p\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|\right). \tag{4.3}$$

Ahora para estimar $\sum_p\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|$, siendo $s=\sigma+i\tau$ partimos la suma

$$\sum_p\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|=\sum_{p\leq|\tau|}\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|+\sum_{p>|\tau|}\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|.$$

Para estimar el primer sumando, hacemos uso de la estimación del teorema del número primo, $\pi(x)=O(\frac{x}{\log x})$:

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq|\tau|}\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|&\leq\sum_{p\leq|\tau|}\frac{2}{(p-1)^\sigma}\leq\sum_{p<|\tau|}\frac{2(p-1)^{\frac{1}{\log|\tau|}}}{p-1}\\&\leq 2\sum_{p\leq|\tau|}\frac{\exp\left(\frac{\log(p-1)}{\log|\tau|}\right)}{p-1}\\&\leq 2\sum_{p\leq|\tau|}\frac{1+O\left(\frac{\log(p-1)}{\log|\tau|}\right)}{p-1}\\&\ll\sum_{p\leq|\tau|}\frac{1}{p}=\int_{2^-}^{|\tau|}\frac{1}{x}\mathrm{d}(\pi(x))\\&\ll\frac{\pi(|\tau|)}{|\tau|}+\int_2^{|\tau|}\frac{\pi(x)}{x^2}\mathrm{d}x\\&\ll\int_2^{|\tau|}\frac{1}{x\log x}\mathrm{d}x\ll\log\log|\tau|.\end{aligned}$$

Estimamos el segundo sumando:

$$\begin{aligned}\sum_{p>|\tau|}\left|\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right|&\leq\sum_{p>|\tau|}\frac{|s|}{(p-1)^{\sigma+1}}\\&=O\left(\sum_{p>|\tau|}\frac{|\tau|}{(p-1)^{\sigma+1}}\right)\\&=O\left(|\tau|\sum_{p>|\tau|}\frac{1}{(p-1)^{2-\frac{1}{\log|\tau|}}}\right).\end{aligned}$$

El último sumando lo podemos estimar por integración por partes y nuevamente usando el teorema del número primo:

$$\begin{aligned}
\sum_{p>|\tau|} \frac{1}{(p-1)^{2-\frac{1}{\log|\tau|}}} &= \int_{|\tau|}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^{2-\frac{1}{\log|\tau|}}} \mathrm{d}(\pi(x)) \\
&= \frac{\pi(|\tau|)}{(|\tau|-1)^{2-\frac{1}{\log|\tau|}}} + \left(2-\frac{1}{\log|\tau|}\right) \int_{|\tau|}^{\infty} \frac{\pi(x)}{(x-1)^{3-\frac{1}{\log\tau}}} \mathrm{d}x \\
&\ll \frac{1}{|\tau|\log|\tau|} + \int_{|\tau|}^{\infty} \frac{1}{x^{2-\frac{1}{\log|\tau|}} \log x} \mathrm{d}x \\
&\ll \frac{1}{|\tau|\log|\tau|},
\end{aligned}$$

Uniformemente cuando $\sigma \geq 1-\frac{1}{\log|\tau|}, |\tau| \geq 3$. Por tanto

$$\sum_{p>|\tau|} \left| \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s} \right| = O\left(\frac{1}{\log|\tau|}\right).$$

Uniendo las dos partes, tenemos que existe una constante A tal que

$$H(s) = \sum_{p} \left| \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s} \right| \leq A(\log\log|\tau|),$$

para todo s en la región $\{\sigma \geq 1-\frac{1}{\log|\tau|}, |\tau| \geq 3\}$. Esto implica que

$$|G(s)| = \exp(H(s)) = O\left((1+\log|\tau|)^A\right), \text{ en la región } \left\{\sigma \geq 1-\frac{1}{\log^+|\tau|}\right\}.$$

■

Finalizado este lema, proseguimos con la demostración del teorema de Bateman. Para esto, estimaremos primero la integral $\displaystyle\int_0^x A(t)$.

Lema 4.3.

$$\int_0^x A(t)\mathrm{d}t = \frac{G(1)}{2}x^2 + O\big(x^2\exp(-c_2\sqrt{\log x})\big), \tag{4.4}$$

para alguna constante $c_2 > 0$.

PRUEBA.- Dado $r > 0$ suficientemente pequeño, existen $M, c_1 > 0$, con $c_1 < 1$ tal que [1]

$$0 < |\zeta(s)| \leq M(1+\log|\tau|) \text{ en la región } \{\sigma > \sigma(\tau) = 1 - c_1/\log^+|\tau|, |s-1| > r\}.$$

[1] Ver [Apo, Teo 13.4]

Usando el lema 4.1, obtenemos que

$$\int_0^x A(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s, \tag{4.5}$$

donde $\kappa = 1 + \frac{1}{\log x}$.

Tomemos un $T > 1$ del que luego detallaremos su valor,

$$\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s = \int_{\kappa+iT}^{\kappa+i\infty} + \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa-iT} + \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s.$$

Como $F(s) = G(s)\zeta(s)$, entonces

$$F(s) \ll (1+|\tau|)^{1-\delta}(M\log|\tau|) \ll (1+\tau)^{1-\delta/2}$$

en $\{\sigma > \sigma(\tau) = 1 - c_1/\log^+|\tau|, |s-1| > r\}$. Luego,

$$\int_{\kappa+iT}^{\kappa+i\infty} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s \ll \int_T^\infty |\tau|^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{x^\kappa}{(\tau)^2}\mathrm{d}\tau \ll_\delta xT^{-\delta/2}. \tag{4.6}$$

Análogamente

$$\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa-iT} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s \ll xT^{-\delta/2}. \tag{4.7}$$

Para estimar lo que nos falta, usamos el teorema de residuos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s = \operatorname*{Res}_{s=1}\left(F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT}^{\sigma(T)-iT} + \int_{\sigma(T)+iT}^{\kappa+iT} + \int_{\sigma(T)-iT}^{\sigma(T)+iT}\left(F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\right)\mathrm{d}s.$$

Analicemos cada uno de los sumandos del miembro derecho de esta última ecuación:

- $\operatorname*{Res}_{s=1}\dfrac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} = \dfrac{G(1)}{2}x^2.$
- $\displaystyle\int_{\sigma(T)+iT}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s \ll \int_{\sigma(T)}^{\kappa} T^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{x^{\sigma+1}}{T^2}d\sigma \ll T^{-\delta/2-1}\frac{x^{\kappa+1}}{\log x} \ll \frac{x^2}{T^{1+\delta/2}\log x}.$
  Del mismo modo, $\displaystyle\int_{\sigma(T)-iT}^{\kappa-iT} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s \ll \frac{x^2}{T^{1+\delta/2}\log x}.$
- Usando el contorno de la figura 4.1

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)-iT}^{\sigma(T)+iT} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s &= \int_{\gamma_3} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s \\ &\ll \int_0^T (1+|\tau|)^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{x^{\sigma(T)+1}}{(1+|\tau|)^2}\mathrm{d}\tau \\ &\le x^{1+\sigma(T)}\int_0^\infty (1+|\tau|)^{-\delta/2-1} \ll x^{1+\sigma(T)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Tomando $T = \exp(\sqrt{\frac{c_1}{\delta}\log x})$, y reemplazando todas las estimaciones (4.6), (4.7) y (4.8) en (4.5), tendremos que para algún c_2

$$\int_0^x A(t)\mathrm{d}t = \frac{G(1)}{2}x^2 + O\big(x^2\exp(-c_2\sqrt{\log x})\big)$$

■

Ahora obtengamos información de $A(t)$ a partir de la información de $\displaystyle\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ que ya tenemos.

Lema 4.4. *Si* $0 \le h \le x/2$*, entonces tenemos que*

$$\int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t = \frac{G(1)}{2}\big(2xh + h^2\big) + O\big(x^2\exp(-c_2\sqrt{\log x})\big). \tag{4.9}$$

PRUEBA.- Como $0 \le h \le x/2$, entonces $(x+h)^2 = O(x^2)$, usando esto y (4.4) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{x+h} A(t)\mathrm{d}t - \int_0^x A(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{G(1)}{2}\big((x+h)^2 - x^2\big) + O\big((x+h)^2\exp(-c_2\sqrt{\log x})\big) \\ &= \frac{G(1)}{2}\big(2xh + h^2\big) + O\big(x^2\exp(-c_2\sqrt{\log x})\big).\end{aligned}$$

■

Lema 4.5. *Si* $0 \le h \le x/3$*, tenemos que*

$$\int_x^{x+h} \big(A(t) - A(x)\big)\mathrm{d}t = G(1)h^2 + O\big(x^2 e^{-c_2\sqrt{\log x}}\big). \tag{4.10}$$

PRUEBA.-

$$0 \le \int_x^{x+h} \big(A(t) - A(x)\big)\mathrm{d}t \le \int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t - \int_{x-h}^{x} A(t)\mathrm{d}t. \tag{4.11}$$

Como $h \le x/3$, entonces $h \le (x-h)/2$. Hacemos uso de (4.9) para obtener que

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t - \int_{x-h}^{x} A(t)\mathrm{d}t &= \frac{G(1)}{2}\big(2hx + h^2 - 2h(x-h) - h^2\big) + O\big(x^2 e^{-c_2\sqrt{\log x}}\big) \\ &= G(1)h^2 + O\big(x^2 e^{-c_2\sqrt{\log x}}\big).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Reemplazando esto último en (4.11), se obtiene el resultado. ■

Para finalizar, note que

$$hA(x) = \int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} (A(t) - A(x))\mathrm{d}t, \tag{4.13}$$

Reemplazando (4.9) y (4.10) en (4.13), tenemos que

$$A(x) = G(1)x + \frac{3}{2}G(1)h + O\left(\frac{x^2}{h}e^{-c_2\sqrt{\log x}}\right). \tag{4.14}$$

Eligiendo $h = xe^{-(c_2/2)\sqrt{\log x}}$ y como ya sabemos que $G(1) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.6 (Bateman). *Existe una constante positiva $c > 0$ tal que para todo $x \geq 1$*

$$\left|\{n : \varphi(n) \leq x\}\right| = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right).$$

Esta prueba del teorema se basó en el método de Selberg-Delange, un método que permite estimar $B(x) = \sum_{n\leq x} b_n$, cuando la serie de Dirichlet asociada $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^s$ se puede expresar de la forma $F(s) = G(s,z)\zeta(s)^z$ para algún $z \in \mathbb{C}$ y $s \mapsto G(s,z)$ holomorfa en una región hiperbólica. En este caso, al ser $z = 1$, la función ζ es meromorfa en una región hiperbólica, lo cual permitió aplicar el terorema de residuos. En el caso general, cuando $z \notin \mathbb{Z}$, se debe evitar la semirecta $]-\infty, 1]$ usando un contorno de Hankel.

OBSERVACIÓN.- En realidad, bajo estos argumentos, tenemos un teorema más general que puede ser usado para estimar la distribución de los valores de otras funciones aritméticas.

Teorema 4.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de numeros reales y sea $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ su serie de Dirichlet asociada. Si $F(s) = G(s)\zeta(s)$ donde $G(s)$ define una función holomorfa en una región del tipo $\left\{\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log^+ |\tau|}\right\}$, $c_1 > 0$ y cumpliendo $G(s) \ll_\delta (1 + |\tau|)^{1-\delta}$ en esta región, para algún $\delta > 0$. Entonces existe $c > 0$ tal que*

$$\sum_{n\leq x} a_n = G(1)x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

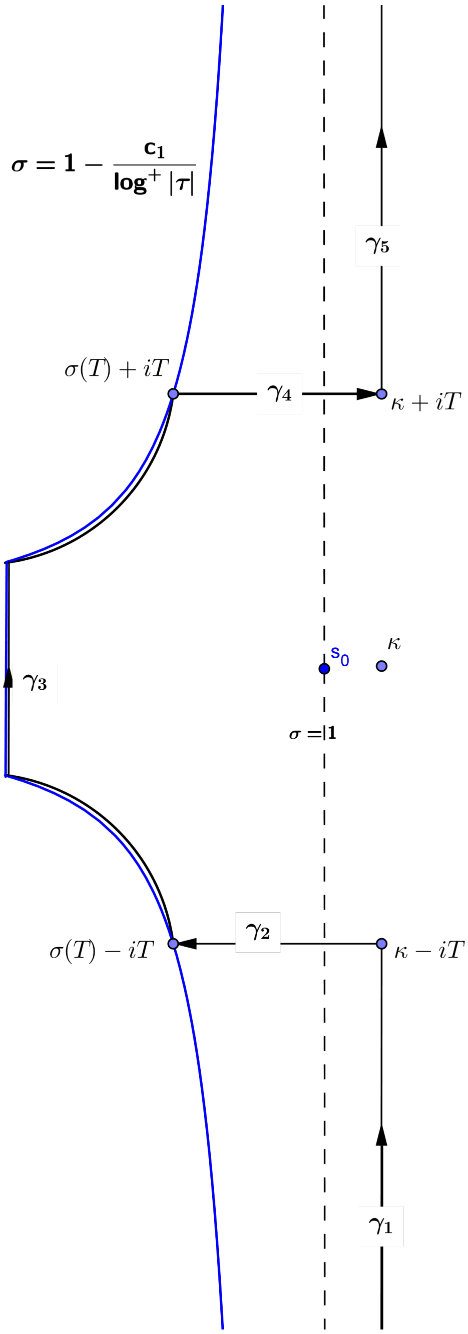

Figura 4.1: Contorno de integración para la prueba del teorema de Bateman

4.2. Estudio de la distribución de los valores en una familia de funciones multiplicativas

Usando el teorema 4.7, podemos estimar la distribución de los valores de otra función aritmética multiplicativa, la función suma de divisores $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$. Para esto, vamos a extender el estudio ya hecho sobre la función indicatriz de Euler φ, a una familia de funciones multiplicativas.

Teorema 4.8. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ multiplicativa con $f(p^k) = p^k \left(1 - \frac{\lambda}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$, donde λ es una constante distinta de 0. Entonces $F_1(s) = \sum \dfrac{1}{f(n)^s}$ es una serie de Dirichlet que se puede expresar como $F_1(s) = \zeta(s)G_1(s)$, donde $G_1(s)$ es holomorfa en $\{\sigma > 0\}$ y cumple que $G_1(s) \ll_\delta (1 + |\tau|)^{1-\delta}$ en la región $\left\{\sigma \geq 1 - \frac{1}{\log^+ |\tau|}\right\}$.*

Para la prueba de este teorema necesitaremos unos lemas previos.

Lema 4.9. *Para $N \in \mathbb{N}_0$ definimos la función $L_N : \mathbb{C} \times (-1, \infty) \to \mathbb{C}$ por*

$$L_N(s; x) := (1 + x)^{-s} - \sum_{k=0}^{N} \binom{-s}{k} x^k.$$

Entonces, para cualquier $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < \delta \leq \gamma$, tenemos que

$$|L_N(\sigma + i\tau; x)| \ll_{\delta,\gamma,N,\sigma} (1 + |\tau|)^{N+1} |x|^{N+1}$$

uniformemente en $x \in [\delta, \gamma]$ y $\tau \in \mathbb{R}$.

PRUEBA.- Sea $f(x) = (1 + x)^{-s}$, vemos que usando la fórmula de Taylor de orden N,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N + R_N(x).$$

Con un cálculo simple tenemos que

$$(1 + x)^{-s} = 1 + -sx + \binom{-s}{2}x^2 + \cdots \binom{-s}{N}x^N + R_N(x).$$

Donde $R_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f^{(N+1)}(t)}{N!}(x-t)^N \mathrm{d}t$.

$$
\begin{aligned}
|R_N(x)| &\leq \left| \int_0^x \frac{|f^{(N+1)}(t)|}{N!} |x-t|^N \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \binom{-s}{N+1}(N+1) \right| \left| \int_0^x (t+1)^{-\sigma-N} |x-t|^N \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \binom{-\sigma - i\tau}{N+1}(N+1) \right| |x|^{N+1} \cdot \max_{t\in[\min\{0,\delta\},\gamma]} \left\{ (t+1)^{-\sigma-N} \right\} \\
&\ll_{N,\sigma,\delta,\gamma} (1+|\tau|)^{N+1} |x|^{N+1}.
\end{aligned}
$$

■

Ahora bien, note que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{f(n)^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{f(p)^s} + \frac{1}{f(p^2)^s} + \cdots \right) \\
&= \zeta(s) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \left(1 + \frac{1}{f(p)^s} + \frac{1}{f(p^2)^s} + \cdots \right) \\
&= \zeta(s) \prod_p \left(1 + \beta(p;s) + \beta(p^2;s) + \beta(p^3;s) + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

donde $\beta(p^k;s) = f(p^k)^{-s} - p^{-s} f(p^{k-1})^{-s}$. Note que podemos expresar

$$
\beta(p^k;s) = f(p^k)^{-s} - p^{-ks} + p^{-s} \left(p^{-(k-1)s} - f(p^{k-1})^{-s} \right). \tag{4.15}
$$

En lo siguiente, fijamos $\epsilon \in (0,2)$.

Lema 4.10. *Tenemos que*

$$
\sum_{k=1}^{\infty} |\beta(p^k;s)| \ll \frac{|s|}{p^{\sigma+1}}, \text{ en la región } \{\epsilon \leq \sigma \leq 2\}.
$$

PRUEBA.-

$$
\begin{aligned}
|f(p^k)^{-s} - p^{-ks}| &= \left| p^{-ks} \left(1 - \frac{\lambda}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right)^{-ks} - p^{-ks} \right| \\
&= p^{-k\sigma} \left| \left(1 - \frac{\lambda}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right)^{-ks} - 1 \right|.
\end{aligned}
$$

Aplicando el lema 4.9 con $N = 0$, $x = -\frac{\lambda}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \ll \frac{1}{p}$, obtenemos que

$$|f(p^k)^{-s} - p^{-ks}| \ll \frac{1 + k|\tau|}{p^{k\sigma+1}}. \tag{4.16}$$

Reemplazando (4.16) en (4.15), obtenemos que

$$|\beta(p^k; s)| \ll \frac{1 + k|\tau|}{p^{k\sigma+1}} + \frac{1 + (k-1)|\tau|}{p^{k\sigma+1}} \ll \frac{1 + k|\tau|}{p^{k\sigma+1}}.$$

Concluimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\beta(p^k; s)| \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + k|\tau|}{p^{k\sigma+1}} = \frac{1}{p(p^\sigma - 1)} + \frac{1}{p^{\sigma+1}} \frac{p^{2\sigma}}{(p^\sigma - 1)^2} |\tau|.$$
$$\ll \frac{|s|}{p^{\sigma+1}},$$

en $\{\epsilon \leq \sigma \leq 2\}$. ■

Lema 4.11. *Tenemos que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\beta(p^k; s)| \ll \frac{1}{p^\sigma} \text{ en } \{\epsilon \leq \sigma \leq 2\}.$$

PRUEBA.- Como $f(p^k) = p^k \left(1 - \frac{\lambda}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$, en particular $f(p^k) \gg p^k$. Por desigualdad triangular,

$$|\beta(p^k; s)| \leq |f(p^k)^{-s}| + |p^{-s} f(p^{k-1})^{-s}| \ll p^{-k\sigma} + p^{-\sigma} p^{-\sigma(k-1)} \ll p^{-k\sigma}.$$

Por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\beta(p^k; s)| \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}} = \frac{1}{p^\sigma - 1} \ll \frac{1}{p^\sigma},$$

en $\{\epsilon \leq \sigma \leq 2\}$. ■

4.2.1. Prueba del teorema 4.8 y estudio de la distribución de los valores de la función σ_1

Prueba del teorema 4.8

Fijado $\epsilon > 0$, el lema 4.10 implica en particular que

$$\sum_p \left|\sum_{k=1}^{\infty} \beta(p^k; s)\right| \ll \sum_p \frac{|s|}{p^{\sigma+1}} \text{ en } \{\epsilon \leq \sigma \leq 2\}.$$

Se tiene que para cada s con $\sigma > \epsilon$, existe una bola compacta $\overline{B(s,\delta)} \subset \{\sigma > \epsilon\}$, en la cual

$$\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} |\beta(p^k; z)| \ll \sum_p \frac{(|s| + \delta)}{p^{\epsilon+1}} \ll (|s| + \delta)\zeta(1+\epsilon),$$

para todo $z \in \overline{B(s,\delta)}$. Concluimos que la productoria $G_1(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta(p^k; s)\right)$ es normalmente convergente y por tanto define una función holomorfa en $\{\sigma > \epsilon\}$. Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, concluimos que $G_1(s)$ es holomorfa en $\{\sigma > 0\}$.

Por otra parte, los lemas 4.10 y 4.11 implican que

$$\left|\sum_k \beta(p^k; s)\right| \ll \left(\text{mín}\left\{\frac{2}{p^{\sigma}}, \frac{|s|}{p^{\sigma+1}}\right\}\right),$$

en la región $\{\sigma > \epsilon\}$. Tenemos así las mismas estimaciones que en el caso de la función φ de Euler (4.1), salvo multiplicación por una constante que depende de ϵ, pero esto permite proseguir del mismo modo que en el caso anterior, obteniendo para todo $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$

$$|G_1(s)| = O_{\epsilon}(1 + \log|\tau|)^{B_{\epsilon}},$$

en $\{\sigma > 1 - \frac{1}{\log^+|\tau|}\}$. En particular, $|G_1(s)| \ll_{\delta} (1 + |\tau|)^{1-\delta}$ en $\{\sigma > 1 - \frac{1}{\log^+|\tau|}\}$, probando así el teorema 4.8. ■

Estudio de la distribución de los valores de la función σ_1

Aplicando el teorema 4.8 al teorema 4.7, obtenemos el siguiente

Teorema 4.12. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ multiplicativa con $f(p^k) = p^k\left(1 - \frac{\lambda}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$, donde λ es una constante no nula. Entonces, siendo $a_n = \left|\{m; f(m) = n\}\right|$, tenemos que*

$$F_1(s) = \sum_n \frac{1}{f(n)^s} = \sum_n \frac{a_n}{n^s},$$

es una serie de Dirichlet que se puede expresar como $F_1(s) = \zeta(s)G_1(s)$, donde $G(s)$ es holomorfa en $\{\sigma > 0\}$ y existe $c > 0$ tal que

$$\sum_{n \leq x} a_n = G_1(1)x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Note que al ser $\varphi(p^k) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, el teorema 4.12, es una generalización del teorema de Bateman.

Como

$$\sigma_1(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} = p^k\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} - \frac{1}{p^{k+1} - p^k}\right),$$

donde $\dfrac{1}{p(p-1)} - \dfrac{1}{p^{k+1} - p^k} = O\left(\dfrac{1}{p^2}\right)$, el teorema 4.12 puede ser aplicado a la función suma de divisores σ_1. Obtenemos que

$$\left|\{n : \sigma_1(n) \leq x\}\right| = G_1(1)x + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}), \tag{4.17}$$

para cierto c_1, donde $G_1(s) = \prod_p \left(1 - \dfrac{1}{p^s} + \dfrac{1}{(p+1)^s} - \dfrac{1}{(p^2+p)^s} + \dfrac{1}{(p^2+p+1)^s} - \cdots\right)$.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos desarrollado técnicas para estudiar el comportamiento asintótico de ciertas funciones aritméticas mediante teoremas tauberianos que traducen propiedades de la serie de Dirichlet asociada a dicha función, en propiedades de crecimiento de la función aritmética. El resultado más sencillo fue el teorema de Wiener-Ikehara cuyo único requisito es la existencia de una extensión continua apenas en la frontera de la región de convergencia absoluta de la serie de Dirichlet. Este fue nuestro primer resultado, del cual pudimos deducir el teorema de los números primos

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

y también pudimos dar nuestra primera estimación del crecimiento de los valores de la función indicatriz de Euler,

$$\big|\{n : \varphi(n) \leq x\}\big| \sim \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x.$$

Luego, nos enfocamos en estimar nuestros términos de error en los dos casos anteriores mostrados. Introdujimos el teorema tauberiano de Landau en su versión hiperbólica y debilitamos una condición para poderla aplicar y obtener el siguiente estimado usando propiedades de la función zeta de Riemann

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\exp\big(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\big)\right),$$

para cierto $c > 0$. Se intentó usar el mismo teorema de Landau para poder estimar el término de error de $\big|\{n : \varphi(n) \leq x\}\big| - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x$, pero la función aritmética $a(n) = \big|\{m : \varphi(m) = n\}\big|$

no pudo ser mayorada por una función del orden $(\log x)^{\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$. Para resolver esto, usamos un método de "promediado", el de Selberg-Delange, para poder llegar al siguiente resultado dado por Bateman:

$$\left|\{n : \varphi(n) \leq x\}\right| = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

para cierto $c > 0$.

Se logró extender el resultado de Bateman a una familia de funciones multiplicativas, lo cual permitió el estudio de la distribución de los valores de la función suma de divisores σ_1, teniendo el siguiente estimado.

$$\left|\{n : \sigma_1(n) \leq x\}\right| = G_1(1)x + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}),$$

para cierto c_1, donde $G_1(s) = \displaystyle\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p+1)^s} - \frac{1}{(p^2+p)^s} + \frac{1}{(p^2+p+1)^s} - \cdots\right)$.

Todos estos teoremas tauberianos estudiados fueron teoremas tauberianos complejos, en el sentido que se basaron en propiedades analíticas como el estudio de las singularidades mediante el teorema de residuos, extensiones analíticas y meromorfas, propiedades de ***crecimiento moderado*** en dichas extensiones, etc.

Es interesante como el problema discreto de estimar la cantidad de elementos de un conjunto, puede llegar a pasar por el plano complejo para llegar a una respuesta. Más aún, problemas discretos que dependen de más de una variable, como por ejemplo el problema de contar el número de distancias distintas en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$, esto es, encontrar cotas inferiores de $A(r) = |\Delta(S) \cap B(0,r)|$, donde $\Delta(S) = \left\{||x-y||, (x,y) \in S^2\right\}$, pueden ser estudiados desde el punto de vista de un teorema tauberiano complejo ***multivariable*** mediante ***series de Dirichlet multivariables*** de la forma $F(s_1, s_2) = \displaystyle\sum_{(n_1,n_2)} \frac{f(n_1,n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}$.

Por ejemplo, definir series de Dirichlet del tipo $F(s_1, s_2) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in S^2} \frac{||x-y||^2}{||x||^{s_1}||y||^{s_2}}$, puede servir para el problema de conteo anterior cuando S cumple ciertas propiedades de autosimilitud [EL].

Bibliografía

[Apo] TOM M.APOSTOL, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1976.

[Rem] REINHOLD REMMERT, *Theory of Complex Functions*, Graduate Texts in Mathematics 122, Springer, New York, 1990.

[Roux] MATHIEU ROUX, These doctoral, *Theorié de l'information, series de Dirichlet, et analyse d'algorithmes*, Université de Caen Basse-Normandie, 2011.

[Rudc] WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[Rudf] WALTER RUDIN. *Functional Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.

[Ten] GÉRALD TENENBAUM, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge studies in advanced mathematics: 46, 1995.

[Del] HUBERT DELANGE, *Généralisation du théoreme de Ikehara*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 71 (3), 213-242, 1954.

[BaTe] M. BALAZARD & G. TENENBAUM, *Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler*, Compositio Mathematica 110 (1998), 239-250.

[Fol] G. B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and sons Inc.,1999.

[R] BERNHARD RIEMANN, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

[Ed] H.M.EDWARDS, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications,Inc., Mineola, New York, 1974.

[A] L. V. AHLFORS, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978.

[Ste] E. M. STEIN & G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, 1973.

[Kor] J. KOREVAAR, *A century of complex tauberian theory*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 39, Number 4, p. 475-531, 2002.

[EL] D. ESSOUABRI & B. LICHTIN, *Zeta functions of discrete self-similar sets*, Adv. Math., 232, p. 142-187, 2013.