UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

SISTEMAS LINEALES ASOCIADOS A UNA CADENA DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:

JORGE ENRIQUE MAYTA GUILLERMO

ASESOR:
MG. WILLIAM CARLOS ECHEGARAY CASTILLO

LIMA- PERÚ

2016

A mis padres, hermano y Lou.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, por ser aquellas personas que siempre se preocuparon por mi formación académica y como persona. Estaré eternamente agradecido con ellos por haber sacrificado muchas cosas por mi bienestar. A mi madre Juana por ser aquella persona que siempre tuvo un consejo adecuado para mejorar en mi vida personal, a mi padre Josué por ser mi primer profesor de Matemática (siempre recordaré esos veranos resolviendo los libros de Matemática). Agradezco a Dios por darme a los mejores profesores y grandes amigos que compartí en mi vida universitaria como: Romel Ullilen, Angel Valderrama, Christian Benancio, Brian Valenzuela, Daniel Quino, Jhon Kid, Andres Chulluncuy, Ronald Mas, Christian Salazar, Phamela Escudero, Muriel Estela, Jesus Cernades, David Caytuiro, Julio Yarasca, Manuel Toribio y muchos otros amigos. Agradezco a mis amigos de la PUCP como: Ivan Perez, Juan Mogollon, Ivan Suarez, Yimy Porras, y muchos otros amigos. Agradezco a los profesores de la PUCP por sus sabios consejos entre ellos: Johel Beltran, Jhonatan Farfan, Jesus Zapata también agradezco al profesor Julian Cañari por ser uno de los profesores que me incentivo y mejoró mi visión con respecto a la matemática. Agradecer a mi novia, Maritza Lourdes, por ser una de las personas que siempre estuvo apoyándome y motivándome constantemente a mejorar académica y personalmente, a su familia en especial a: Javier, Cesar, la Sra. Maura, al Sr. Zenon, la Sra. Anita y familia; a todos les tengo un gran cariño. Un agradecimiento especial al Dr. Jorge Chávez por los consejos, la paciencia y tiempo invertido en mi formación. De manera análoga al profesor William Carlos Echegaray Castillo por la orientación y sus sabios consejos para la culminación del presente trabajo.

Índice general

Resumen

En la primera parte del trabajo daremos algunos conceptos básicos del álgebra lineal y teoría de la probabilidad que emplearemos en el trabajo. Luego se presentará la teoría clásica de sistemas lineales, el objetivo de este breve resumen es para motivar la introducción de los sistemas lineales con saltos markovianos.

La parte fundamental del trabajo es analizar la estabilidad de los sistemas lineales asociados a una cadena de Markov, esta familia es conocida en la literatura especializada como sistemas lineales con saltos markovianos o discrete time markov jump linear systems(en inglés) o por sus siglas en inglés MJLS como se denota en [4]. Los sistemas lineales gobernados por una cadena de Markov son sistemas dinámicos que presentan cambios abruptos. Ejemplos de este tipo de sistemas los podemos encontrar en: sistemas de control aéreo, sistemas eléctricos, sistemas sociales, etc.

Presentamos algunas definiciones de estabilidad para el sistema MJLS, para luego presentar dos test de estabilidad, donde uno de ellos es mediante el radio espectral de una matriz que contiene la información probabilística de la cadena de Markov y el otro test es mediante una ecuación del tipo Lyapunov.

Por último veremos que estos tipos de estabilidad son equivalentes siempre y cuando el espacio de estados de la cadena de Markov es finito.

Introducción

En muchas situaciones prácticas un sistema físico opera bajo condiciones adversas como en el caso de un avión que vuela en medio de una tormenta alterando abruptamente algunos de los parámetros del modelo. Lo mismo puede suceder con un modelo económico sujeto a alteraciones por el contexto exterior muchas veces incierto. Para modelar situaciones como estas se introducen los sistemas lineales con saltos markovianos. La cadena de Markov que gobierna el sistema muda de estado aleatoriamente a medida que transcurre el tiempo de manera que cada estado de la cadena representa un modo de operar distinto del sistema. Este modelo se ha venido utilizando en diversas áreas de investigación como, por ejemplo, sistemas económicos [8], sistemas eléctricos [11], sistemas robóticos [12], sistemas de control aéreo [13], [14], [15], etc. Los sistemas lineales con saltos markovianos vienen siendo estudiados desde la década de 1970, con los trabajos de Rosenbloom [6], Belmman [7], Bhuracha [9], Kats y Krasovskii [16], Morozan [17], Krtolica [18], Kozin [19], Ji y Chizeck [1], O. Costa y Fragosa [20], Fang, Loparo y Feng. [21], entre otros.

En la actualidad estos sistemas siguen siendo estudiados en las líneas de investigación de Teoría de control y análisis estocástico.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo uno se establecerán los conceptos básicos que utilizaremos en todo el trabajo, los principales conceptos y resultados de la teoría de probabilidad y por último la teoría básica de cadenas de Markov.

En el segundo capítulo se presentará la teoría clásica de sistemas lineales clásicos y la estabilidad de ésta.

En el tercer capítulo se presentará la teoría de sistemas lineales con saltos markovianos y además ciertos operadores y matrices que nos ayudará para el análisis de la estabilidad.

En el cuarto capítulo se presentará algunas definiciones de estabilidad para el sistema lineal homogéneo y las cuales veremos que estos son equivalentes debido a que el espacio de estados es finito. Por último se presentarán dos test de estabilidad, uno mediante el radio espectral de cierta matriz y el otro mediante la ecuación del tipo Lyapunov.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. Conceptos Básicos

Recordaremos algunas definiciones y resultados fundamentales de la teoría de operadores en espacios de Banach que serán de mucha utilidad para el desarrollo del presente trabajo. En primer lugar denotemos el espacio euclidiano n-dimensional de los números reales por $\mathbb{R}^n$, el conjunto de números enteros no negativos, por $\mathbb{Z}_+$. Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos espacios de Banach, donde $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$. Por simplicidad denotamos $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ por $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Denotaremos por $\sigma(\mathcal{T})$ al espectro del operador $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y definimos el radio espectral del operador de la forma siguiente

$$\rho(\mathcal{T}) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in \sigma(\mathcal{T})\}$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Hilbert entonces el producto interno lo denotamos por $\langle \cdot ; \cdot \rangle$, para $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ denotamos el operador adjunto de $\mathcal{T}$ por $\mathcal{T}^T$. De forma estándar denotamos a los operadores $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ semidefinidos positivos de la forma siguiente $\mathcal{T} \geq 0$, para los definidos positivos lo denotaremos $\mathcal{T} > 0$. Denotamos al conjunto de matrices de orden $m \times n$ por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, es decir, si $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), a_{ij} \in \mathbb{R}$. Por simplificidad denotamos $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Denotamos a los valores propios de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la manera usual $\lambda_i(A), i = 1, \ldots, n$ y el radio espectral de A lo definimos de la forma siguiente

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i(A)|.$$

Las normas vectoriales usuales para $\mathbb{R}^n$ que vamos a usar en este trabajo son las siguientes:

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_{\text{máx}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Las normas vectoriales usuales para $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que vamos a usar en este trabajo son las siguientes:

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Teorema 1.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple la siguiente relación*

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^T A).$$

Demostración. Ver [22]. □

Teorema 1.2 (Desigualdad de Rayleigh)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, entonces se tiene la siguiente desigualdad*

$$\lambda_m \|x\|_2 \leq x^T A x \leq \lambda_M \|x\|_2,$$

donde λ_m y λ_M son el menor y mayor valor propio de A, respectivamente.

Demostración. Ver [22]. □

Teorema 1.3 (La fórmula de Gelfand)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Para cualquier norma matricial $\|\cdot\|$ se cumple:*

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Demostración. Ver [22]. □

Teorema 1.4 (Serie Neumann). *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\|A\| < 1$ entonces la matriz $I - A$ es inversible y además*

$$I - A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Demostración. Ver [22]. □

Teorema 1.5 (Descomposición de Cholesky). *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y definida positiva entonces existe una matriz no singular S tal que $A = SS^T$.*

Demostración. Ver [22]. □

Teorema 1.6 (Desigualdad de Jensen). *Sea φ una función convexa, entonces se tiene*

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)),$$

donde X es una variable aleatoria y E es la esperanza.

Demostración. Ver [3]. □

Lema 1.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $x^T Ax = 0$ entonces $A = 0$.*

Demostración. Tomando $x = e_i$ esto implica que $e_i^T Ae_i = a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por último tomando $x = e_i + e_j$ se sigue

$$\begin{aligned}(e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) &= e_i^T Ae_i + e_j^T Ae_j + e_i^T Ae_j + e_j^T Ae_i \\ &= e_i^T Ae_j + e_j^T Ae_i \\ &= 0\end{aligned}$$

y como A es simétrica esto implica que $e_i^T Ae_j = e_j^T Ae_i$ reemplazando se obtiene que $e_i^T Ae_j = a_{ij} = 0$ para todo $i,j = 1, \ldots, n; i \neq j$ lo que concluye que $A = 0$. □

Lema 1.2. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Las matrices AB y BA tienen los mismo valores propios no nulos. Además $\rho(AB) = \rho(BA)$.*

Demostración. Sea λ un valor propio no nulo de AB con su respectivo v vector propio, es decir, $ABv = \lambda v$.

Tenemos que Bv es un vector no nulo esto implica que Bv es un vector propio de la matriz BA. En efecto

$$\begin{aligned} BA(Bv) &= B(ABv) \\ &= B(\lambda v) \\ &= \lambda Bv, \end{aligned}$$

entonces AB y BA tienen los mismo valores propios no nulos, es decir, $\rho(AB) = \rho(BA)$. □

Definición 1. *La transformación traza* $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es una funcional lineal definida de la forma siguiente:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Resaltaremos algunas de las propiedades importantes de la transformación traza.

Proposición 1.1. *La transformación traza cumple las siguientes propiedades*

1. *Para todo* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, se cumple* $tr(A) = tr(A^T)$.

2. *Para todo* A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, se cumple* $tr(AB) = tr(BA)$.

3. *Para todo* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, se cumple* $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$.

4. *Sean* $A \geq 0$ *y* $B > 0$*, donde* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\left(\min_{i=1,\dots,n} \lambda_i(B) \right) tr(A) \leq tr(AB) \leq \left(\max_{i=1,\dots,n} \lambda_i(B) \right) tr(A).$$

5. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, si* $tr(A^T A) = 0$ *entonces* $A = 0$.

Demostración. La prueba está desarrollada de la forma siguiente.

1. Como la diagonal principal de la matriz A no se ve afectada al transponer se tiene que $tr(A) = tr(A^T)$.

2. De la definición de la traza de AB se sigue

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= tr(BA). \end{aligned}$$

3. Aplicando la descomposición de Jordan para A se tiene

$$\begin{aligned} tr(A) &= tr(P^{-1}J_AP) \\ &= tr(J_A) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A). \end{aligned}$$

4. Aplicando la descomposición de Jordan para A y B se tiene

$$\begin{aligned} tr(AB) &= tr(P^{-1}J_APQ^{-1}J_BQ) \\ &= tr(J_AJ_B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) \end{aligned}$$

$$\left(\min_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(B)\right)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A) \leq tr(AB) \leq \left(\max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(B)\right)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)$$

$$\left(\min_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(B)\right) tr(A) \leq tr(AB) \leq \left(\max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(B)\right) tr(A)$$

4. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se sigue

$$A^TA = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}^2 & \ldots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \ldots & \sum_{i=1}^{m} a_{in}^2 \end{bmatrix}$$

Debido a que $tr(A^TA) = 0$ entonces $A = 0$.

$\square$

La norma siguiente va ser utilizada en la proposición 1.2.

Lema 1.3. *Sea $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y definida positiva. Sea la función $\|\cdot\|_H : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ definida por*

$$\|x\|_H = \sqrt{x^T H x}.$$

Entonces esta función es una norma.

Demostración. Comprobaremos que $\|\cdot\|_H$ es una norma, debido que $H > 0$ por la descomposición de Cholesky se tiene $H = S^{-T} S^{-1}$, donde S es una matriz no singular.

Luego

$$\|x\|_H^2 = x^T H x = x^T S^{-T} S^{-1} x = \|S^{-1}x\|_2^2$$

esto implica que $\|x\|_H = \|S^{-1}x\|_2$

a) Para todo $x \neq 0, \|x\|_H = \sqrt{x^T H x} > 0$.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$, $\|\beta x\|_H = \sqrt{\beta^2 x^T H x} = |\beta| \sqrt{x^T H x} = |\beta| \|x\|_H$.

c) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_H &= \|S^{-1}(x + y)\|_2 \\ &\leq \|S^{-1}x\|_2 + \|S^{-1}y\|_2 \\ &= \|x\|_H + \|y\|_H \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2. *Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) La sucesión $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a cero, es decir, $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$.

b) El radio espectral de A es menor que uno, es decir, $\rho(A) < 1$.

c) Existe una matriz simétrica, $H > 0$ tal que $A^T H A < H$.

d) Existe una matriz no singular S tal que $\|S^{-1}AS\|_2 < 1$.

e) Existe una norma $\|\cdot\|_*$ tal que $\|A\|_* < 1$.

Demostración.

a) $\to$ *b)* Sea $\lambda \in \sigma(A)$ y $v \neq 0$ el vector propio asociado correspondiente. Se tiene $\lim_{k\to\infty} A^k v = \lim_{k\to\infty} \lambda^k v = 0$ y esto implica $|\lambda| < 1$.

b) $\to$ *c)* Como

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}},$$

donde es conocida en la literatura como "la fórmula de Gelfand", aplicándola para A y A^T se tiene que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \rho(A) = \rho(A^T) < \gamma < 1$ lo cual implica

$$\|A^k\|_2 < \gamma^k, \ \|(A^T)^k\|_2 < \gamma^k.$$

Donde la siguiente serie es convergente

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k A^k.$$

En efecto

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} (A^T)^k A^k \right\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n} \|(A^T)^k A^k\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n} \gamma^{2k}$$

la serie $\sum_{k=0}^{n} \gamma^{2k}$ es convergente entonces por el criterio de la comparación se tiene que la serie $\sum_{k=0}^{n} (A^T)^k A^k$ es convergente esto implica que existe la matriz H.

Donde H es simétrica, dado que

$$H^T = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k A^k = H$$

además es una matriz definida positiva, en efecto

$$\forall x \neq 0, x^T H x = \sum_{k=0}^{\infty} x^T (A^T)^k A^k x = \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k x\|_2 > 0$$

por último obtenemos

$$H - A^T H A = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k A^k - \sum_{k=1}^{\infty} (A^T)^k A^k = I_n > 0$$

.

$c) \to d)$ Se tiene que $H > 0$ entonces existe una matriz no singular tal que $H^{-1} = SS^T$. Entonces

$$\begin{aligned}\|S^{-1}AS\|_2^2 &= \rho\left((S^{-1}AS)^T S^{-1}AS\right)\\ &= \rho\left(S^T A^T S^{-T} S^{-1} AS\right)\\ &= \rho\left(S^T A^T HAS\right) \qquad (1.1)\end{aligned}$$

De la desigualdad $A^T HA < H$ se tiene

$$\forall z \neq 0, z^T \left(H - A^T HA\right) z > 0$$

tomando $z = Sx$ tenemos

$$\begin{aligned}z^T\left(H - A^T HA\right) z &= x^T \left(S^T HS - S^T A^T HAS\right) x\\ &= x^T \left(I_n - S^T A^T HAS\right) x\end{aligned}$$

entonces

$$\forall x \neq 0, x^T \left(I_n - S^T A^T HAS\right) x > 0$$

tomando $x = v$ donde v es un vector propio de la matriz $S^T A^T HAS$ y λ su respectivo valor propio.

$$\begin{aligned}v^T\left(I_n - S^T A^T HAS\right) v &= v^T I_n v - \lambda v^T v\\ &= \|v\|_2^2 - \lambda\|v\|_2^2\\ &= \|v\|_2^2(1-\lambda)\\ &> 0.\end{aligned}$$

entonces $\lambda < 1$ y de (1.1) se concluye.

$d) \to e)$ Existe una matriz no singular S tal que $\|S^{-1}AS\|_2 < 1$. Sea $H = S^{-T}S^{-1} > 0$ y consideremos la norma definida en el lema 1.3.

$$\|x\|_H^2 = x^T Hx = x^T S^{-T} S^{-1} x = \|S^{-1}x\|_2^2$$

Con base en la norma vectorial "H", podemos definir una norma inducida sobre el espacio de matrices, como sigue:

$$\|A\|_* = \sup_{\|x\|_H = 1} \|Ax\|_H$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|A\|_* &= \sup_{\|S^{-1}x\|_2=1} \|S^{-1}Ax\|_2 \\
&= \sup_{\|S^{-1}x\|_2=1} \|S^{-1}ASS^{-1}x\|_2 \\
&\leq \sup_{\|S^{-1}x\|_2=1} \|S^{-1}AS\|_2\|S^{-1}x\|_2 \\
&= \|S^{-1}AS\|_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|A\|_* \leq \|S^{-1}AS\|_2 < 1$.

$e) \rightarrow a)$ Podemos encontrar un γ tal que $\|A\|_* < \gamma < 1$, además se tiene que

$$0 \leq \|A^k\|_* \leq \|A\|_*^k < \gamma^k < 1$$

esto implica que $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$

□

Nuestro análisis se va concentrar en espacios de dimension finita donde las normas son equivalentes, es decir, sea dos normas $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ si existen $c_1 > 0, c_2 > 0$ tal que:

$$\forall x \in \mathcal{X}, \|x\|_\alpha \leq c_2\|x\|_\beta, \|x\|_\beta \leq c_1\|x\|_\alpha$$

Definición 2. *Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{R})$. La matriz de orden $mn \times pq$*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{np}B \end{pmatrix}.$$

es llamada producto Kronecker de A en B.

Algunas propiedades básicas y de mucha utilidad se presenta a continuación :

Proposición 1.3. *El productor Kronecker cumple las siguientes propiedades*

1. *Para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, se cumple*

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

2. *Para todo* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, se cumple*

$$\sigma(A \otimes A) = \{\lambda_i \lambda_j \mid \lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)\}$$

3. *Para todo* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, se cumple*

$$\rho(A \otimes A) = \rho(A)^2$$

4. *Para todo* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n\times s}(\mathbb{R}), D \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R})$*, se cumple*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

Demostración. La prueba está desarrollada de la forma siguiente.

1. De la definición del producto Kronecker se sigue

$$\begin{aligned}(A \otimes B)^T &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{np}B \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}B^T & \dots & a_{n1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p}B^T & \dots & a_{np}B^T \end{bmatrix} \\ &= A^T \otimes B^T\end{aligned}$$

2. Sean v_i y v_j autovectores de A, λ_i y λ_j sus respectivos autovalores.

$$\begin{aligned}(A \otimes A)vec(v_i v_j^T) &= vec(A v_i v_j^T A^T) \\ &= vec(A v_i (A v_j)^T) \\ &= vec(\lambda_i v_i \lambda_j v_j^T) \\ &= \lambda_i \lambda_j vec(v_i v_j^T).\end{aligned}$$

3. Consecuencia directa del item 2.

4. De la definición del producto Kronecker se sigue

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(C \otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \dots & c_{1s}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & \dots & c_{ns}D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{k1}BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{kp}BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{k1}BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{kp}BD \end{bmatrix} \\
&= (AC) \otimes (BD)
\end{aligned}
$$

$\square$

Definición 3. *El operador vec es una transformación lineal que convierte la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ en un vector columna, se define de la forma siguiente:*

$$vec(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{m1} \; a_{12} \dots a_{m2} \dots a_{1n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}^T .$$

Proposición 1.4. *El operador vec cumple las siguientes propiedades*

1. *Para todo $A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se cumple*

$$vec(A + B) = vec(A) + vec(B)$$

2. *Para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$, se cumple*

$$vec(\alpha A) = \alpha \ vec(A)$$

3. *Para todo A, B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple*

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B) \tag{1.2}$$

Demostración. La prueba está desarrollada de la forma siguiente.

1. De la definición del operador *vec* se sigue

$$
\begin{aligned}
vec(A + B) &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{mn} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{mn} \end{pmatrix}^T \\
&= vec(A) + vec(B)
\end{aligned}
$$

2. De la definición del operador *vec* se sigue

$$\begin{aligned} vec(\alpha A) &= \left(\begin{array}{c} \alpha a_{11} \dots \alpha a_{mn} \end{array} \right)^T \\ &= \alpha \left(\begin{array}{c} a_{11} \dots a_{mn} \end{array} \right)^T \\ &= \alpha vec(A) \end{aligned}$$

3. Sean $b_1, \dots, b_n$ las columnas de B, entonces B se puede expresar de la forma siguiente

$$B = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i^T,$$

donde e_i son elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} vec(ABC) &= vec\left(A \left(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i^T \right) C \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} vec\left(A \left(b_i e_i^T \right) C \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} vec\left(A b_i \left(e_i^T C \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} vec\left(A b_i \left(C^T e_i \right)^T \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(C^T e_i \right) \otimes \left(A b_i \right) \\ &= \left(C^T \otimes A \right) \sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes b_i) \\ &= \left(C^T \otimes A \right) \sum_{i=1}^{n} vec(b_i e_i^T) \\ &= \left(C^T \otimes A \right) vec\left(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i^T \right) \\ &= \left(C^T \otimes A \right) vec(B) \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.4. *La trasformación* $vec : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ *es continua y biyectiva. Además su inversa es continua.*

Demostración. En primer lugar probaremos la continuidad.

Sea una sucesión $(A_k) = (a_{ij}^k)$ convergente tal que $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ entonces $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k = a_{ij}$. Por otro lado

$$vec(A_k) = \begin{pmatrix} a_{11}^k \\ \vdots \\ a_{m1}^k \\ a_{12}^k \\ \vdots \\ a_{m2}^k \\ \vdots \\ a_{1n}^k \\ \vdots \\ a_{mn}^k \end{pmatrix},$$

esto implica $\lim\limits_{k\to\infty} vec(A_k) = vec(A)$. Ahora probaremos que es inyectiva, en efecto

$$vec(A) = vec(B) \to a_{ij} = b_{ij}$$

y como A,$B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ entonces $A = B$.

La sobreyectividad y que su inversa es continua, la prueba es trivial. □

1.2. El espacio vectorial $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$

A continuación definimos el conjunto que tiene como elementos vectores de N componentes donde cada componente es una matriz de orden $m \times n$. Se denotará por $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$.

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n} = \{V \mid V = (V_1, \ldots, V_N), V_i \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), i \in \{1, \ldots, N\}\}.$$

Por simplicidad denotamos $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n,n}$ por $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n}$.

Lema 1.5. *El conjunto $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$ sujeto con las operaciones siguientes es un espacio vectorial de dimension finita.*

$$\begin{aligned} &\textit{Para todo } U, V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}, \qquad && U + V = (U_1 + V_1, \ldots, U_N + V_N) \\ &\textit{Para todo } U \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}, \beta \in \mathbb{R}, \qquad && \beta.U = (\beta U_1, \ldots, \beta U_N) \end{aligned}$$

Demostración. La demostración del lema 1.5 se basa en la prueba que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimension finita. □

Lema 1.6. *El espacio vectorial* $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$ *es un espacio vectorial normado, con las siguientes normas. Sea* $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$*, se define las siguiente normas equivalentes*

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \|V_i\|_1$$

$$\|V\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T V_i)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|V\|_{\text{máx}} = \max_{1 \leq i \leq N} \|V_i\|_2$$

Demostración. La demostración del lema 1.6 se basa en la prueba que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial normado con las normas usuales. □

Lema 1.7. *El espacio vectorial* $(\|.\|, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n})$ *es un espacio de Banach, es decir, es un espacio vectorial normado completo.*

Demostración. Sea $(V_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$ una sucesión de cauchy donde $V_k = (V_1^k, \ldots, V_N^k)$, es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $J < k$,s con $\|V_k - V_s\|_{\text{máx}} < \epsilon$ esto implica

$$\|V_j^k - V_j^s\|_2 \leq \max_{1 \leq i \leq N} \|V_i^k - V_i^s\|_2 = \|V_k - V_s\|_{\text{máx}} < \epsilon$$

Debido que $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es completo entonces $\lim_{k \to \infty} V_j^k = V_j \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ esto implica que la sucesión $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente. □

Lema 1.8. *El espacio* $(\|.\|_2, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n})$ *es un espacio de Hilbert donde el producto interno inducido por la norma* $\|.\|_2$ *esta dado por:*

$$\langle V; S \rangle = \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T S_i)$$

Demostración. Notamos que $\langle V; V \rangle = \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T V_i) = \|V\|_2^2$. Sólo basta verificar que es un productor interno. En efecto:

1) Linealidad

$$
\begin{aligned}
\langle V; \alpha S + \beta W\rangle &= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T(\alpha S_i + \beta W_i)) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T S_i) + \beta \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T W_i) \\
&= \alpha\langle V; S\rangle + \beta\langle V; W\rangle
\end{aligned}
$$

2) Hermiticidad

$$
\begin{aligned}
\langle V; S\rangle &= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T S_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} tr(S_i^T V_i) \\
&= \langle S; V\rangle
\end{aligned}
$$

3) Definida positiva. Notamos la matriz $V_i^T V_i$ es simétrica y semidefinida positiva entonces los autovalores son mayores o iguales a cero. Esto implica

$$\langle V; V\rangle = \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T V_i) \geq 0$$

Además si

$$\langle V; V\rangle = \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^T V_i) = 0,$$

esto implica que $tr(V_i^T V_i) = 0$ y por el item 5 de la proposición 1.1 se concluye $V_i = 0$ entonces $V = 0$. Lo recíproco, es decir, $V = 0$ esto implica de forma directa que $\langle V; V\rangle = 0$.

□

Sea $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$, se define $V^T = (V_1^T, \ldots, V_N^T) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n,m}$.

Se dice que $V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n}$ es simétrica, si $V = V^T$.

También es conveniente definir las norma inducidas de los operadores $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n})$ con respecto a las normas anteriores

$$\|\mathcal{T}\|_1 = \sup_{\|V\|_1 \neq 0} \frac{\|\mathcal{T}(V)\|_1}{\|V\|_1}$$

$$\|\mathcal{T}\|_2 = \sup_{\|V\|_2 \neq 0} \frac{\|\mathcal{T}(V)\|_2}{\|V\|_2}$$

Definimos los conjuntos siguientes

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{nT} = \left\{ V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n}; V_i = V_i^T, i \in \{1, \ldots, N\} \right\}$$

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+} = \left\{ V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{nT}; V_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, N\} \right\}$$

Además, se denota $V \geq S$ si $V - S = (V_1 - S_1, \ldots, V_N - S_N) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}$ y $V > S$ si $V_i - S_i > 0$.

Definición 4. *El operador supvec es una transformación lineal que convierte un elemento $V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}$ en un vector columna. Se define de la forma siguiente:*

$$supvec(V) = \begin{pmatrix} vec(V_1) \\ \vdots \\ vec(V_N) \end{pmatrix}.$$

Lema 1.9. *La trasformación $supvec : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{Nmn}$ es continua y biyectiva. Además su inversa es continua.*

Demostración. La demostración del lema 1.9 se basa en que la trasformación *vec* es continua y biyectiva.

□

1.3. Teoría de Probabilidad

Definición 5. *Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de medida tal que $P(\Omega) = 1$. En este caso, se dirá que P es una medida de probabilidad y a los elementos de $\mathcal{F}$ se les llamarán eventos.*

Definición 6. *Para cada conjunto $A \in \mathcal{F}$ la función indicadora $\mathbf{1}_A$ es definida de la siguiente manera, para cada $w \in \Omega$*

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \in A \\ 0 & , \omega \notin A \end{cases}$$

Definición 7. *Sean* $A,B \in \mathcal{F}$*, donde* B *es un evento con probabilidad positiva. Se define la probabilidad condicional de* A *dado* B *por*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición 8. *Una variable aleatoria real* X *es una función medible* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, y la esperanza de* X *se define como*

$$E(X) = \int_{\Omega} XdP$$

Definición 9. *Dado* $\mathcal{G}$ *un* $\sigma -$ *subalgebra de* $\mathcal{F}$*, y* X *una variable aleatoria, se define la esperanza condicional de* X *dado* $\mathcal{G}$*, denotado por* $E(X|\mathcal{G})$*, como una variable aleatoria que cumple lo siguiente:*

i) $E(X|\mathcal{G})$ *es* $\mathcal{G}$*-medible*

ii) Para todo $A \in \mathcal{G}$*:* $\int_A XdP = \int_A E(X|\mathcal{G})dP$

Cuando $\mathcal{G} = \sigma\langle Y \rangle$*, el* σ*-algebra generado por la variable* Y*,* $E(X|\mathcal{G})$ *se reduce a* $E(X|Y)$

La esperanza condicional es una herramienta fundemental en nuestra teoría por tal motivo mencionaremos algunas propiedades de está.
Observe que si $A \in \mathcal{F}$ y $P(A) > 0$ entonces :

$$E(X|A) = \sum_{x_k \in R_X} x_k P(X = x_k|A) = \sum_{x_k \in R_X} x_k \frac{P(X = x_k, A)}{P(A)} = \frac{E(X1_A)}{P(A)}$$

Proposición 1.5. *Sean* a *y* b *dos constantes ,* g *una función medible de valor real y* X *,* Y *y* Z *son variables aleatorias. Entonces*

1) $E(aX + bY|Z) = aE(X|Z) + bE(Y|Z)$*.*

2) $E(X|Y) \geq 0$ *, si* $X \geq 0$*.*

3) $E(Xg(Y)|Y) = g(Y)E(X|Y)$*.*

4) $E(E(X|Y,Z)|Y) = E(X|Y)$*.*

5) $E(E(X|Y)) = E(X)$*.*

Demostración. La prueba está desarrollada de la forma siguiente.

1) Partiendo de la definición de esperanza condicional

$$
\begin{aligned}
E(aX + bY|Z = z) &= \frac{E((aX + bY)1_{\{Z=z\}})}{P(Z = z)} \\
&= a\frac{E(X1_{\{Z=z\}})}{P(Z = z)} + b\frac{E(Y1_{\{Z=z\}})}{P(Z = z)} \\
&= aE(X|Z = z) + bE(Y|Z = z).
\end{aligned}
$$

2) Partiendo de la definición de esperanza condicional

$$
\begin{aligned}
E(X|Y = y) &= \frac{E(X1_{\{Y=y\}})}{P(Y = y)} \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

3) Partiendo de la definición de esperanza condicional

$$
\begin{aligned}
E(Xg(Y)|Y = y) &= \frac{E(Xg(Y)1_{\{Y=y\}})}{P(Y = y)} \\
&= \frac{E(Xg(y)1_{\{Y=y\}})}{P(Y = y)} \\
&= g(y)\frac{E(X1_{\{Y=y\}})}{P(Y = y)} \\
&= g(y)E(X|Y = y).
\end{aligned}
$$

4) Partiendo de la definición de esperanza condicional

$$
E(X|Y = y, Z = z) = \sum_{x\in R_X} x\frac{P(X = x, Y = y, Z = z)}{P(Y = y, Z = z)},
$$

por otro lado

$$
\begin{aligned}
E(E(X|Y,Z)|Y=y) &= \sum_{z\in R_Z} E(X|Y=y,Z=z)\frac{P(Y=y,Z=z)}{P(Y=y)}\\
&= \sum_{z\in R_Z}\left(\sum_{x\in R_X} x\frac{P(X=x,Y=y,Z=z)}{P(Y=y,Z=z)}\right)\frac{P(Y=y,Z=z)}{P(Y=y)}\\
&= \sum_{z\in R_Z}\left(\sum_{x\in R_X} x\frac{P(X=x,Y=y,Z=z)}{P(Y=y)}\right)\\
&= \sum_{x\in R_X} x\frac{\left(\sum_{z\in R_Z} P(X=x,Y=y,Z=z)\right)}{P(Y=y)}\\
&= \sum_{x\in R_X} x\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}\\
&= E(X|Y=y).
\end{aligned}
$$

5) Partiendo de la definición de esperanza condicional

$$
\begin{aligned}
E(E(X|Y)) &= \sum_{y\in R_Y} E(X|Y=y)P(Y=y)\\
&= \sum_{y\in R_Y}\left(\sum_{x\in R_X} x\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}\right)P(Y=y)\\
&= \sum_{x\in R_X} xP(X=x)\\
&= E(X).
\end{aligned}
$$

□

1.4. Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso estocástico que satisface la propiedad Markoviana, es decir, si se conoce la historia del proceso hasta el instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir, en probabilidad, su estado futuro.

En este capítulo presentamos los aspectos teoricos básicos sobre cadenas de Markov en tiempo discreto que son necesarios conocer para el desarrollo de nuestro trabajo.

En este caso asumimos que el proceso toma valores en un conjunto finito S_θ llamado espacio de estados:

$$S_\theta = \{1, 2, \ldots, N, N \in \mathbb{N}\}$$

Caso Discreto

Sea $\theta(k)$ una cadena de Markov en tiempo discreto con una matriz de transición de probabilidad $\Pi(k) = [p_{ij}(k)] \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, donde $p_{ij}(k)$ es la probabilidad de transición del estado i al estado j en el instante k, esto es,

$$p_{ij}(k) = P(\theta(k+1) = j|\theta(k) = i),\ i,j \in S_\theta,$$

donde $p_{ij}(k) \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(k) = 1$. La distribución de probabilidad de $\theta(0)$, llamada distribución inicial, la denotamos por $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$, donde $\pi_i = P(\theta(0) = i)$.

Observe que

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1.$$

El vector de distribución de probabilidad en el instante k de la cadena de Markov se define por

$$\pi(k) = (\pi_1(k), \ldots, \pi_N(k))$$

donde

$$\pi_i(k) = P(\theta(k) = i)\ y\ \sum_{i=1}^{N} \pi_i(k) = 1.$$

Denotaremos la matriz Π^n como aquella matriz que tiene entradas como probabilidad de transición del estado i al estado j en n pasos, esto es, $\Pi(k)^n = [p_{ij}^{(n)}(k)]$, donde

$$p_{ij}^{(n)}(k) = P(\theta(n) = j|\theta(0) = i),\ i,j \in S_\theta.$$

En nuestro trabajo consideraremos que la cadena de Markov es homogénea, es decir, las probabilidades de transición no depende de k, por lo que $p_{ij}(k) = p_{ij}.\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

De la homogeneidad se sigue que

$$\pi(k) = \pi\Pi^k,$$

lo que siginifica que dados la distribución inicial y la matriz de transición de probabilidad el proceso queda completamente determinado, en términos probabilísticos.

Capítulo 2

Sistemas Lineales en tiempo discreto

En este capítulo se revisan brevemente algunos aspectos básicos de la teoría de los sistemas dinámicos de control clásicos, es decir, de aquellos sistemas lineales de control que no están sujetos a saltos. Nuestro objetivo es que este breve resumen sirva para motivar la introducción de los sistemas lineales con saltos markovianos.

2.1. Sistema Lineal

Muchos fenómenos dinámicos de la física, la biología, la ingeniería, la economía, etc, pueden ser modelados bajo la forma del sistema dinámico en tiempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz que almacena los parámetros del modelo. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado. El modelo (2.1) configura lo que en la literatura se conoce como sistema (clásico) de control lineal. El vector $x_0 = x(k_0)$ denota este estado y es llamado estado inicial del sistema, donde k_0 es el momento inicial. Por la linealidad del modelo, usualmente se considera $k_0 = 0$, por lo que se escribe $x(0) = x_0 = x(k_0)$.

Definición 10. *Una sucesión* $\{z(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{R}^n$ *es solución de* (2.1) *si satisface*

$$\begin{cases} z(k+1) = Az(k) \\ z(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Observación 2.1. *Para cada estado inicial* x_0 *la solución de* (2.1) *está dada por*

$$x(k) = A^k x_0. \tag{2.2}$$

A $x(k)$ *se le llama también la trayectoria del sistema. Cuando se quiere especificar el estado inicial, la trayectoria suele escribirse como* $x(k; x_0)$*. Observe que la trayectoria* (2.2) *depende claramente del estado inicial del sistema. Está parte es conocida como la parte no forzada que es enteramente debida a las condiciones iniciales del fenómeno.*

Ejemplo 1. *Sea el sistema*

$$\begin{cases} x(k+1) = 2x(k) + y(k) \\ y(k+1) = 2y(k) \\ x(0) = 0, \ y(0) = 1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $z(k) = [x(k) \quad y(k)]^T$ *entonces el sistema se puede reescribir de la forma siguiente*

$$\begin{cases} z(k+1) = Az(k) \\ z(0) = [0 \ 1]^T \end{cases}$$

donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *entonces* $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$ *y de* (2.2) *se obtiene*

$$x(k) = k2^{k-1}, \ y(k) = 2^k$$

2.2. Estabilidad

La estabilidad es un requerimiento fundamental en el diseño de todo sistema. Un sistema no estable puede salirse de control, alterarse y perder sus características esenciales, o simplemente no ser de utilidad práctica. En esta sección se define y estudia el concepto de estabilidad para sistemas lineales clásicos. Las nociones de estabilidad más conocidas que pueden ser relacionadas al sistema (2.1) son la BIBO estabilidad y la estabilidad de Lyapunov.

La BIBO estabilidad esta relacionada al sistema siguiente

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

donde $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ es la variable de control o también llamada señal de entrada, e $y(k) \in \mathbb{R}$ se conoce como la señal de salida. Si lo que se desea es estudiar la relación entre la señal de entrada y la señal de salida, entonces la BIBO estabilidad es la noción adecuada. BIBO son las siglas en inglés de la expresión *bounded input bounded output*, es decir, el interés es ver si la respuesta del sistema será acotada cuando se aplique una señal de entrada acotada. Si el sistema siempre responde de esta manera, él será BIBO estable. En este caso la parte no forzada de la trayectoria no juega ningún rol en el análisis de la estabilidad.

Por otro lado, si solo es de interés la estructura interna del sistema, esto es, si no se considera la señal de entrada, es decir $u(k) = 0$ como en el sistema (2.1) entonces la noción apropiada de estabilidad es la de Lyapunov. Se dice que la trayectoria $x(k; x_0)$ es estable o marginalmente estable (en el sentido de Lyapunov) si cualquier otra trayectoria que partiendo suficientemente cerca de ésta permanecerá por siempre cerca de ella. Formalmente se tiene

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 / \ \left\|x_0^{'} - x_0\right\| < \delta \Rightarrow \left\|x(k; x_0^{'}) - x(k; x_0)\right\| < \epsilon, \quad k > k_0 \in \mathbb{Z}_+.$$

La trayectoria $x(k)$ puede ser entendida como un modo de operar del sistema. Suelen ser de interés los modos de operación en equilibrio.

Definición 11. *Se dice que $x_e \in \mathbb{R}^n$ es punto de equilibrio para el sistema* (2.1) *si*

$$Ax_e = x_e.$$

Observación 2.2. *Notamos lo siguiente*

$$Ax_e = x_e \rightarrow (I - A)x_e = 0$$

Si la matriz $I - A$ es no singular entonces se tiene un único punto de equilibrio $x_e = 0$. Caso contrario tiene infinitos puntos de equilibrio un caso particular $x_e = 0$. En general $x_e \neq 0$, pero en este caso, por medio de un cambio de variable, éste punto puede transformarse en un punto nulo, por lo que solo $x_e = 0$ es considerado en el análisis. Un punto de equilibrio no solo puede mostrar estabilidad, sino también un comportamiento atractor, es decir, las trayectorias que parten cerca del equilibrio no solo permanecerán por siempre cerca de él, como se requiere en la estabilidad marginal, sino además el acercamiento es asintótico.

De ahora en adelante cuando se mencione que el sistema es estable o asintóticamente estable estaremos haciendo referencia a que el sistema es estable o asintóticamente estable en el punto de equilibrio $x_e = 0$. A continuación definimos la estabilidad del punto de equilibrio $x_e = 0$.

Definición 12. *Consideremos el sistema* (2.1)

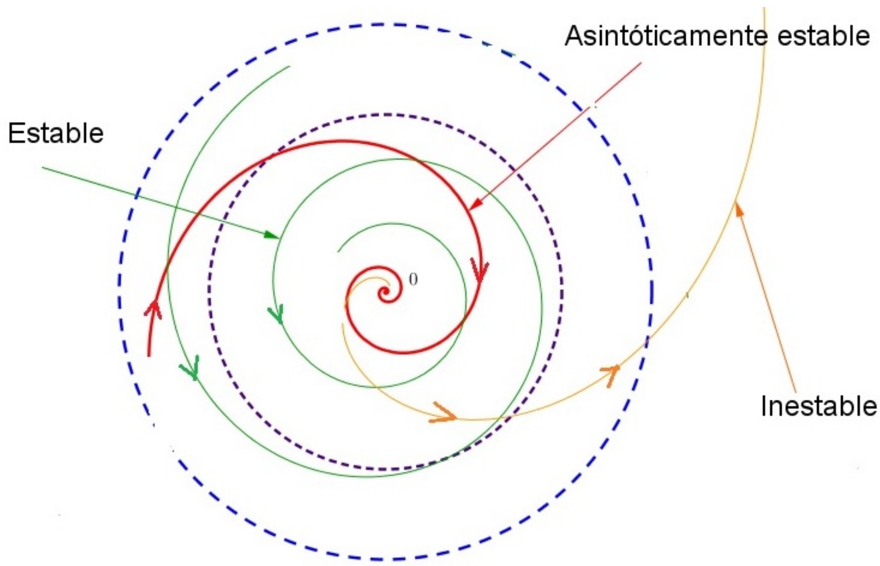
a) El punto de equilibrio $x_e = 0$ es estable si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 / \ \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(k)\| < \epsilon, \ k > k_0 \in \mathbb{Z}_+.$$

b) El punto de equilibrio $x_e = 0$ es asintóticamente estable si es estable y además

$$\exists \ \eta > 0 \ / \ \|x(0)\| < \eta \ \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x(k) = 0.$$

La figura siguiente muestra estos conceptos.



El teorema 2.1 caracteriza la estabilidad asintótica de Lyapunov mediante el radio espectral de la matriz A.

Teorema 2.1 ([10])**.** *Consideremos el sistema* (2.1)*. Si el punto de equilibrio $x_e = 0$ es asintóticamente estable si y solo si $\rho(A) < 1$.*

Demostración. Asumamos que el sistema (2.1) es asintóticamente estable, por (2.2) se tiene

$$\lim_{k \to \infty} A^k x(0) = 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

por la proposición 1.2 implica que $\rho(A) < 1$.

Ahora supongamos que $\rho(A) < 1$ por la proposición 1.2 existe una norma tal que $\|A\|_\star < 1$, de (2.2) se sigue

$$0 \leq \|x(k)\|_H = \|A^k x(0)\|_H \leq \|A\|_\star^k \|x(0)\|_H$$

entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = 0$. □

El siguiente ejemplo muestra un sistema que no es estable ni asíntoticamente estable.

Ejemplo 2. *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene que $\rho(A) = 1$ y calculando la trayectoria solución del sistema (2.1) se obtiene

$$x(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, x(k) = \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notamos que la solución no es acotada, esto implica que no es estable ni asintóticamente estable.

El siguiente ejemplo muestra un sistema es estable pero no asinstóticamente estable.

Ejemplo 3. *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene que $\rho(A) = 1$ y calculando la trayectoria solución del sistema (2.1) se obtiene

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, x(3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x(4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notamos que la solución es acotada esto implica que es estable pero no es asintóticamente estable.

El siguiente ejemplo muestra un sistema asintóticamente estable y por ende estable.

Ejemplo 4. *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene que $\rho(A) < 1$ *y calculando la trayectoria solución del sistema* (2.1) *se obtiene*

$$x(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{4^k} \end{bmatrix}$$

Notamos que la solución es convergente, esto implica que el sistema es asintóticamente estable.

El teorema 2.2 proporciona una caracterización algebraica de la estabilidad asintótica.

Teorema 2.2 ([10])**.** *El sistema* (2.1) *es asintóticamente estable si y solo si para toda matriz simétrica definida positiva* W*, existe una única matriz simétrica definida positiva* M *tal que*

$$M - A^T MA = W. \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) *es conocida como ecuación de Lyapunov.*

Demostración. Asumamos que se cumple la ecuación (2.3). Sea λ un autovalor de A con su respectivo autovector $v \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} v^T W v &= v^T (M - A^T MA)v \\ &= v^T Mv - v^T A^T MAv \\ &= v^T Mv - (Av)^T MAv \\ &= v^T Mv - (\lambda v)^T M\lambda v \\ &= v^T Mv(1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

Sabemos que M y W son matrices simétricas y definidas positivas , es decir, $v^T Wv > 0$ y $v^T Mv > 0$. Luego $1 - \lambda^2 > 0$ entonces $|\lambda| < 1$. Por lo tanto $\rho(A) < 1$ por el teorema 2.1 se tiene que el sistema (2.1) es asintóticamente estable.

Asumamos que el sistema (2.1) es asintóticamente estable, por el teorema 2.1 se tiene $\rho(A) < 1$. Sea $W > 0$ entonces definimos la siguiente matriz

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k W A^k. \tag{2.4}$$

En primer lugar garantizemos la existencia de la matriz M esto implica asegurar que la serie es convergente.

En efecto, como $\rho(A) < 1$ por la proposición 1.2 existe una norma tal que $\|A\|_\star < 1$.

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} (A^T)^k W A^k \right\|_\star \leq \sum_{k=0}^{n} \left\| A^T \right\|_\star^k \|W\|_\star \|A\|_\star^k .$$

Debido que $\|A\|_\star < 1$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\| A^T \right\|_\star^k \|W\|_\star \|A\|_\star^k$ es convergente por el criterio de comparación implica que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (A^T)^k W A^k$ es convergente.

Ahora probaremos que M es simétrica. En efecto

$$\begin{aligned}
M^T &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k W A^k \right)^T \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k W^T A^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k W A^k \\
&= M
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que $M > 0$, sea $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
x^T M x &= x^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k W A^k \right) x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x^T (A^k)^T W A^k x \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (A^k x)^T W A^k x \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(x^T W x + \sum_{k=1}^{n} (A^k x)^T W A^k x \right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Ahora comprobemos que M cumple la ecuación (2.3). En efecto

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k W A^k = W + \sum_{k=1}^{\infty} (A^T)^k W A^k. \tag{2.5}$$

Por otro lado

$$A^T M A = A^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k W A^k \right) A = \sum_{k=1}^{\infty} (A^T)^k W A^k \tag{2.6}$$

De (2.5) y (2.6) se obtiene

$$M = W + A^T M A.$$

Por último comprobemos que M es único. En efecto de (2.3) se sigue

$$\begin{aligned} vec(W) &= vec(M - A^T M A) \\ &= vec(M) - (A^T \otimes A^T)vec(M) \\ &= (I - A^T \otimes A^T)vec(M) \end{aligned}$$

$$vec(W) = (I - A^T \otimes A^T)vec(M). \tag{2.7}$$

Por el item 3 de la proposición 1.3 se tiene $\rho(A^T \otimes A^T) = \rho(A)^2 < 1$. Luego por la proposición 1.2 existe una norma tal que $\|A^T \otimes A^T\|_\star < 1$ esto implica por el teorema 1.4 $I - A^T \otimes A^T$ es inversible. Por último de (2.7) se tiene que para cualquier W existe un único M tal que

$$M = vec^{-1}\left((I - A^T \otimes A^T)^{-1} vec(W)\right) \tag{2.8}$$

$\square$

Observación 2.3. *En la demostración del teorema 2.2 se define la matriz M en* (2.4) *el cual tiene su explicación, la cual detallamos porque se asume esa forma. De* (2.8) *y debido a la serie de Neumann se sigue*

$$\begin{aligned} M &= vec^{-1}\left((I - A^T \otimes A^T)^{-1} vec(W)\right) \\ &= vec^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^T \otimes A^T)^k vec(W)\right) \\ &= vec^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^T \otimes (A^k)^T vec(W)\right) \\ &= vec^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} vec\left\{(A^k)^T W A^k\right\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^T W A^k \end{aligned}$$

Teorema 2.3 ([10])**.** *Consideremos el sistema* (2.1)*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) El sistema (2.1) *es asintóticamente estable.*

b) El radio espectral de A es menor que uno, $\rho(A) < 1$.

c) Para toda matriz simétrica definida positiva definida W, existe una única matriz simétrica definida positiva M tal que

$$M - A^T M A = W$$

d) Existe una matriz simétrica definida positiva M tal que

$$M - A^T M A > 0$$

Demostración. Por los teoremas 2.1 y 2.2 tenemos que $a), b)$ y $c)$ son equivalentes. Vemos que $c)$ implica $d)$ se prueba de forma directa. Entonces nos concentraremos en demostrar que $d)$ implica $b)$. Sea λ un autovalor de A con su respectivo autovector $v \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} v^T(M - A^T M A)v &= v^T M v - v^T A^T M A v \\ &= v^T M v - (Av)^T M A v \\ &= v^T M v - (\lambda v)^T M \lambda v \\ &= v^T M v (1 - \lambda^2) \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Debido que $M > 0$ esto implica que $1 - \lambda^2 > 0$ lo que concluye $\rho(A) < 1$.

Ejemplo 5. *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $\rho(A) = 3.3028$ entonces el sistema (2.1) no es asintóticamente estable. Esto se puede comprobar mediante la ecuación de Lyapunov. De (2.7) y tomando un $W > 0$ se obtiene

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 0 \end{bmatrix},$$

donde observamos que M es simétrico pero no es definido positivo.

Ejemplo 6. *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $\rho(A) = 0.5$ *entonces el sistema* (2.1) *es asintóticamente estable. Esto se puede comprobar mediante la ecuación de Lyapunov. De* (2.7) *y tomando un* $W > 0$ *se obtiene un* M *tal que*

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 2.6667 & 2.6667 \\ 2.6667 & 5.3333 \end{bmatrix},$$

donde observamos que M *es simétrico y definido positivo.*

Capítulo 3

Sistemas lineales con saltos markovianos

Una diversidad de procesos pueden ser modelados por el sistema (2.1), éste no resulta útil en la modelización de fenómenos en los que por diversas circunstancias los parámetros cambian abrupta o aleatoriamente. En efecto, en muchas situaciones prácticas el sistema opera bajo condiciones adversas como en el caso de un avión que vuela en medio de una tormenta recibiendo fuertes descargas eléctricas. Lo mismo puede suceder con un modelo económico sujeto a alteraciones adversas debido al contexto exterior muchas veces incierto o una central térmica solar sujeta a cambios de temperatura por las condiciones atmosféricas. A veces la alteración de los parámetros también es causada por fallas internas del sistema, por la interconexión de los componentes o la antigüedad de estos. Para modelar esta situación se introducen los sistemas dinámicos con saltos markovianos. Este modelo se ha venido utilizando desde la década de los 70 en diversas áreas de investigación como, por ejemplo, sistemas económicos [8], sistemas eléctricos [11], sistemas robóticos [12], sistemas de control aéreo [13], [14], [15], etc. La cadena de Markov asociada al sistema muda de estado aleatoriamente a medida que transcurre el tiempo. Cada estado de la cadena representa un modo de operar distinto del sistema. De esta manera, en lugar de un único sistema dinámico, se tienen en realidad muchos sistemas cambiando aleatoriamente y modelando todos ellos un mismo fenómeno. El modelo matemático resultante es un sistema dinámico estocástico conocido en la literatura como sistemas lineales con saltos markovianos o por sus siglas en inglés, MJLS (ver p.ej. [4], [5]).

En vista que el fenómeno bajo estudio se torna aleatorio comenzamos el análisis introduciendo un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra y P es la medida de probabilidad. La cadena de Markov es denotada por $\theta(k)$ y su espacio de estado por $S_\theta = \{1, \ldots, N; N \in \mathbb{N}\}$, consideramos la cadena de Markov homogénea.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

donde para todo $i \in S_\theta$, $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$. Vamos a asumir que las condiciones iniciales $x(0)$ y $\theta(0)$ son independientes, además $x(0)$ es de segundo momento finito, es decir, $E(\|x(0)\|^2) < \infty$.

El sistema (3.1) se le conoce como sistema no forzado. Buena parte de los resultados de esta tesis están referidos al sistema (3.1), también llamado en la literatura sistema homógeneo.

Definición 13. *Se dice que el proceso estocástico $x(k) = \{x(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ es solución de* (3.1) *si para toda realización ω de $\theta(k)$, la ecuación* (3.1) *es satisfecha puntualmente, esto es,*

$$x(k+1, \omega; x(0)) = A_{\theta(k,\omega)}x(k, \omega; 0), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

A la solución $x(k)$ del sistema (3.1) *se le llama también trayectoria solución.*

Observación 3.1. *Para cada condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ dada, la solución de* (3.1) *puede ser obtenida de forma recursiva como sigue:*

$$\begin{aligned} x(1) &= A_{\theta(0)}x(0) \\ x(2) &= A_{\theta(1)}x(1) \\ &= A_{\theta(1)}A_{\theta(0)}x(0) \end{aligned}$$

procediendo de este modo por inducción se obtiene

$$x(k) = \prod_{\ell=0}^{k-1} A_{\theta(k-1-\ell)}x(0). \tag{3.2}$$

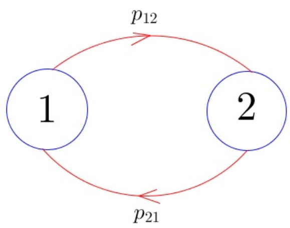
Ejemplo 7. *Sean las matrices asociadas al sistema* (3.1)*, para este caso $N = 2$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

la matriz de transición de probabilidad y vector de distribución inicial:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi = [0.5 \;\; 0.5].$$

Esto quiere decir que las única realizaciones de la cadena de Markov son $\omega_1 = \{2,1,2,\dots\}$ *y* $\omega_2 = \{1,2,1,\dots\}$. *Como se representa en la siguiente figura*



Se obtienen las trayectorias del sistema, para $x(0) = [1\ 1]^T$

$$x(k)(\omega_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 52 \\ 28 \end{bmatrix} \cdots \right\}.$$

$$x(k)(\omega_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 64 \\ 28 \end{bmatrix} \cdots \right\}.$$

El siguiente lema se usa frecuentemente en la literatura al momento de hacer derivaciones con esperanzas condicionadas. Esencialmente se prueba que la variable aleatoria $E\{1_{\{\theta(k+1)=j\}}|x(k),\theta(k)\}$ definida en términos de $x(k)$ y $\theta(k)$, solo depende de $\theta(k)$.

Para presentar el resultado, tengamos en cuenta la notación siguiente:

$$P(\theta(k+1) = j|\theta(k)) = p_{\theta(k)j},$$

donde para cada j fijo en S_θ, $p_{\theta(k)j}$ es una variable aleatoria cuyos valores son $p_{ij}, \;\; i \in S_\theta$.

Lema 3.1 ([25]). *Sea* $x(k)$ *la trayectoria solución de* (3.1) *con* $x(0) = x_0$. *Entonces*

$$E\left(1_{\{\theta(k+1)=j\}}|x(k),\theta(k)\right) = p_{\theta(k)j}$$

Demostración. Para los valores específicos $x(k) = x_k$ y $\theta(k) = i_k$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&E(1_{\{\theta(k+1)=j\}}|x(k) = x_k, \theta(k) = i_k) \\
&= \sum_{z_i \in \{0,1\}} z_i P(1_{\{\theta(k+1)=j\}} = z_i | x(k) = x_k, \theta(k) = i_k) \\
&= \sum_{z_i \in \{0,1\}} z_i \frac{P(1_{\{\theta(k+1)=j\}} = z_i, x(k) = x_k, \theta(k) = i_k)}{P(x(k) = x_k, \theta(k) = i_k)} \\
&= \frac{P(\theta(k+1) = j, x(k) = x_k, \theta(k) = i_k)}{P(x(k) = x_k, \theta(k) = i_k)} \\
&= \frac{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{k-1}=1}^{L} P(\theta(k+1) = j, \theta(k) = i_k, \theta(k-1) = i_{k-1}, \ldots, \theta(0) = i_0, x(0) = x_0)}{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{k-1}=1}^{L} P(\theta(k) = i_k, \theta(k-1) = i_{k-1}, \ldots, \theta(0) = i_0, x(0) = x_0)}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Como $x(0)$ y $\theta(0)$ son independientes entonces sus correspondientes sigmas álgebras generadas son independientes. Además como $\sigma(\{\theta(k+1), \theta(k), \ldots, \theta(0)\}) \subset \sigma(\{\theta(0)\})$ entonces $\sigma(\{\theta(k+1), \theta(k), \ldots, \theta(0)\})$ y $\sigma(\{x(0)\})$ son independientes. Luego cada evento $\{\theta(k+1) = j, \theta(k) = i_k, \theta(k-1) = i_{k-1}, \ldots, \theta(0) = i_0\}$ que pertenece a $\sigma(\{\theta(k+1), \theta(k), \ldots, \theta(0)\})$ y el evento $\{x(0) = x_0\}$ que pertenece a $\sigma(\{x(0)\})$, son independientes. Por esto y la propiedad markoviana, (3.3) se reduce a

$$
\begin{aligned}
E(1_{\{\boldsymbol{\theta}(k+1)=j\}}|x(k) = x_k, \theta(k) = i_k) &= \frac{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{k-1}=1}^{L} p_{i_k j} p_{i_{k-1} i_k} \ldots p_{i_0 i_1} P(\theta(0) = i_0)}{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{k-1}=1}^{L} p_{i_{k-1} i_k} \ldots p_{i_0 i_1} P(\theta(0) = i_0)} \\
&= p_{i_k j}
\end{aligned}
$$

lo que concluye la demostración. $\square$

3.1. Notaciones Principales

En esta sección presentamos ciertas notaciones las cuales serán utilizadas más adelante, las notaciones siguientes son fundamentales para analizar la estabilidad del sistema (3.1).

Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $i \in S_\theta$

$$Q_i(k) = E(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{3.4}$$

$$Q(k) = (Q_1(k), \ldots, Q_N(k)) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \tag{3.5}$$

$$\mathbb{Q}(k) = E(x(k)x(k)^T) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{3.6}$$

Notamos que las matrices presentadas en (3.4) y (3.6) son matrices semidefinidas positivas, esto implica que $Q(k) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}$. Además que $\mathbb{Q}(k)$ pueden ser expresado como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(k) &= E(x(k)x(k)^T) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{N} x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} E\left(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} Q_i(k)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

La notación $Q_i(k)$ definida en (3.4), puede expresarse de forma recursiva como se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 ([4])**.** *Sea el sistema* (3.1)*. Para cada* $k \in \mathbb{Z}_+, j \in S_\theta$ *se cumple*

$$Q_j(k+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_i Q_i(k) A_i^T \tag{3.8}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Q_j(k+1) &= E(x(k+1)x(k+1)^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}}) \\
&= E(A_{\theta(k)} x(k)x(k)^T A_{\theta(k)}^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}}) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{N} A_i 1_{\{\theta(k)=i\}} x(k)x(k)^T A_i^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} A_i E(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k)=i\}}) A_i^T,
\end{aligned}$$

condicionado a $\{x(k), \theta(k)\}$ y aplicando el item 5 de la proposición 1.5 obtenemos:

$$\begin{aligned} Q_j(k+1) &= \sum_{i=1}^{N} A_i E(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k)=i\}}) A_i^T \\ &= \sum_{i=1}^{N} A_i E\left(E(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k)=i\}} | x(k), \theta(k))\right) A_i^T, \end{aligned}$$

debido a que $x(k)1_{\{\theta(k)=i\}}$ es medible con respecto a $\{x(k),\theta(k)\}$ y aplicando el item 3 de la proposición 1.5 obtenemos:

$$Q_j(k+1) = \sum_{i=1}^{N} A_i E\left(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}} E\left(1_{\{\theta(k+1)=j\}} \middle| x(k), \theta(k)\right)\right) A_i^T,$$

debido al lema 3.1 obtenemos:

$$\begin{aligned} Q_j(k+1) &= \sum_{i=1}^{N} A_i E\left(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}} p_{ij}\right) A_i^T \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_i E\left(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}}\right) A_i^T \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_i Q_i(k) A_i^T \end{aligned}$$

□

El siguiente lema será últil en la demostración del lema 3.4.

Lema 3.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple la siguiente relación*

$$tr(A) \leq n\|A\|_1 \tag{3.9}$$

Demostración. Debido a la definición de la traza se sigue

$$\begin{aligned} tr(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \\ &\leq n\|A\|_1 \end{aligned}$$

□

Lema 3.3. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$ se cumple la siguiente relación*

$$\|vv^T\|_1 \leq n\|v\|_2^2 \tag{3.10}$$

Demostración. Debido a la definición de la norma matricial, sea $v = [v_1 \dots v_n]^T$ se sigue

$$\begin{aligned}
\|vv^T\|_1 &= \sum_{i,j=1}^{n} |v_i v_j| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{|v_i|^2 + |v_j|^2}{2} \\
&= n\|v\|_2^2
\end{aligned}$$

□

La siguiente desigualdad va ser de gran utilidad en la sección de estabilidad.

Lema 3.4. *Sea $x(k)$ la solución del sistema* (3.1)*. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ se cumplen las siguientes desigualdades*

$$\frac{E(\|x(k)\|_2^2)}{n} \leq \|Q(k)\|_1 \tag{3.11}$$

$$\|Q(k)\|_1 \leq nE(\|x(k)\|_2^2), \tag{3.12}$$

donde $Q(k)$ está definido en (3.5)*.*

Demostración. Primero probemos una desigualdad

$$\begin{aligned}
E(\|x(k)\|_2^2) &= E\left(\sum_{i=1}^{N} \|x(k)\|_2^2 1_{\{\theta(k)=i\}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} E(\|x(k)\|_2^2 1_{\{\theta(k)=i\}}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} E(tr(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}})) \\
&= \sum_{i=1}^{N} tr(E(x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}})) \\
&= \sum_{i=1}^{N} tr(Q_i(k)) \\
&= tr\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i(k)\right)
\end{aligned}$$

por (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned} E(\|x(k)\|_2^2) &\leq n \left\| \sum_{i=1}^{N} Q_i(k) \right\|_1 \\ &\leq n \sum_{i=1}^{N} \|Q_i(k)\|_1 \\ &= n\|Q(k)\|_1 \end{aligned}$$

Ahora probemos la otra desigualdad, por la desigualdad de Jensen se sigue

$$\begin{aligned} \|Q(k)\|_1 &= \sum_{i=1}^{N} \|Q_i(k)\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \|E(x(k)x^T(k)1_{\{\theta(k)=i\}})\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} E(\|x(k)x^T(k)\|_1 1_{\{\theta(k)=i\}}) \end{aligned}$$

de (3.10) se sigue

$$\begin{aligned} \|Q(k)\|_1 &\leq n \sum_{i=1}^{N} E\left(\|x(k)\|_2^2 1_{\{\theta(k)=i\}}\right) \\ &= nE\left(\|x(k)\|_2^2\right) \end{aligned}$$

□

3.2. Operadores Principales

En esta sección presentamos operadores principales que son fundamentales para analizar la estabilidad del sistema (3.1).

$$\mathcal{L}(.) = (\mathcal{L}_1(.), \ldots, \mathcal{L}_N(.)) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n) \tag{3.13}$$

$$\mathcal{T}(.) = (\mathcal{T}_1(.), \ldots, \mathcal{T}_N(.)) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n) \tag{3.14}$$

$$\mathcal{J}(.) = (\mathcal{J}_1(.), \ldots, \mathcal{J}_N(.)) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n) \tag{3.15}$$

$$\mathcal{V}(.) = (\mathcal{V}_1(.), \ldots, \mathcal{V}_N(.)) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n) \tag{3.16}$$

Para cada $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}, i,j \in S_\theta$ tenemos

$$\mathcal{T}_j(V) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_i V_i A_i^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{L}_i(V) = A_i^T \left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} V_j \right) A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{V}_j(V) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_j V_i A_j^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{J}_i(V) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_j^T V_j A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Teorema 3.2 ([4])**.** *Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, se cumple:*

$$Q(k+1) = \mathcal{T}(Q(k)) \tag{3.17}$$

y además

$$Q(k) = \mathcal{T}^k(Q(0)) \tag{3.18}$$

donde $Q(k)$ está definido en (3.5) *y $\mathcal{T}$ en* (3.14).

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(Q(k)) &= (\mathcal{T}_1(Q(k)), \ldots, \mathcal{T}_N(Q(k))) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} p_{i1} A_i Q_i(k) A_i^T, \ldots, \sum_{i=1}^{N} p_{iN} A_i Q_i(k) A_i^T \right) \\
&= (Q_1(k+1), \ldots, Q_N(k+1)) \\
&= Q(k+1),
\end{aligned}$$

y por inducción se comprueba (3.18). □

Lema 3.5. *Para todo $V \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, se cumple las siguientes relaciones*

$$\mathcal{T}(V)^T = \mathcal{T}(V^T)$$
$$\mathcal{L}(V)^T = \mathcal{L}(V^T)$$
$$\mathcal{V}(V)^T = \mathcal{V}(V^T)$$
$$\mathcal{J}(V)^T = \mathcal{J}(V^T)$$

Demostración. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(V)^T &= (\mathcal{T}_1(V)^T, \ldots, \mathcal{T}_N(V)^T) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} p_{i1} A_i V_i^T A_i^T, \ldots, \sum_{i=1}^{N} p_{iN} A_i V_i^T A_i^T \right) \\
&= (\mathcal{T}_1(V^T), \ldots, \mathcal{T}_N(V^T)) \\
&= \mathcal{T}(V^T)
\end{aligned}
$$

De forma análoga se cumple para $\mathcal{L}, \mathcal{V}, \mathcal{J}$.

□

Proposición 3.1 ([4])**.** *Los operadores definidos en* (3.13)-(3.16)*, cumplen las siguientes relaciones:*

$$
\mathcal{T} = \mathcal{L}^T, \mathcal{V} = \mathcal{J}^T
$$

Demostración. Sean $S, V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{T}(V), S \rangle &= \sum_{j=1}^{N} tr\left(\mathcal{T}_j(V)^T S_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} tr\left(\mathcal{T}_j(V^T) S_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} tr\left(\left(\sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_i V_i^T A_i^T\right) S_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} p_{ij} tr\left(\left(A_i V_i^T A_i^T\right) S_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} tr\left(V_i^T A_i^T \left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} S_j\right) A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} tr\left(V_i^T \mathcal{L}_i(S)\right) \\
&= \langle V, \mathcal{L}(S) \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{V}(V), S\rangle &= \sum_{j=1}^{N} tr\left(\mathcal{V}_j(V)^T S_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} tr\left(\mathcal{V}_j(V^T) S_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} tr\left(\left(\sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_j V_i^T A_j^T\right) S_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} p_{ij} tr\left(\left(A_j V_i^T A_j^T\right) S_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} tr\left(V_i^T \left(\sum_{j=1}^{N} A_j^T p_{ij} S_j A_j\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} tr\left(V_i^T \mathcal{J}_i(S)\right) \\
&= \langle V, \mathcal{J}(S)\rangle
\end{aligned}
$$

$\square$

3.3. Matrices Principales

En esta sección presentamos las matrices que serán fundamentales para analizar la estabilidad del sistema (3.1) mediante el radio espectral de está y que están ligados a los operadores principales. Denotamos una matriz diagonal por bloques por $diag[M_i]$, donde $M_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), i \in \mathbb{N}$, definido de la forma siguiente:

$$
diag[M_i] = \begin{bmatrix} M_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M_N \end{bmatrix}
$$

Presentamos además unas matrices auxiliares

$$
\mathcal{C} = (\Pi^T \otimes I_{n^2}) \in \mathcal{M}_{Nn^2}(\mathbb{R})
$$
$$
\mathcal{N} = diag[A_i \otimes A_i] \in \mathcal{M}_{Nn^2}(\mathbb{R})
$$

Las matrices fundamentales que utilizaremos para analizar la estabilidad del sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 =& \mathcal{C}\mathcal{N} \\
\mathcal{A}_2 =& \mathcal{N}^T\mathcal{C}^T \\
\mathcal{A}_3 =& \mathcal{N}\mathcal{C} \\
\mathcal{A}_4 =& \mathcal{C}^T\mathcal{N}^T
\end{aligned}$$

La siguiente proposición nos da una relación entre los operadores principales y matrices fundamentales.

Proposición 3.2. *Para cada $V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ se tiene*

$$\begin{aligned}
supvec(\mathcal{T}(V)) &= \mathcal{A}_1 supvec(V) \\
supvec(\mathcal{L}(V)) &= \mathcal{A}_2 supvec(V) \\
supvec(\mathcal{V}(V)) &= \mathcal{A}_3 supvec(V) \\
supvec(\mathcal{J}(V)) &= \mathcal{A}_4 supvec(V)
\end{aligned}$$

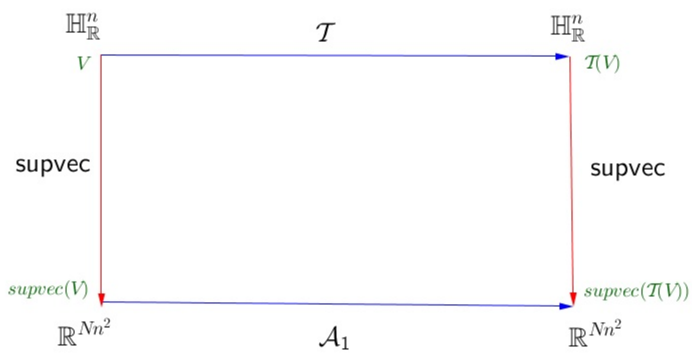
Demostración. Sea $V = (V_1, \ldots, V_N)$.

$$\begin{aligned}
supvec(\mathcal{T}(V)) &= \begin{bmatrix} vec(\mathcal{T}_1(V)) \\ \vdots \\ vec(\mathcal{T}_N(V)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} vec\left(\sum_{i=1}^{N} p_{i1} A_i V_i A_i^\intercal\right) \\ \vdots \\ vec\left(\sum_{i=1}^{N} p_{iN} A_i V_i A_i^\intercal\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} p_{i1} A_i \otimes A_i vec(V_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} p_{iN} A_i \otimes A_i vec(V_i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} p_{11}A_1 \otimes A_1 & \dots & p_{N1}A_N \otimes A_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}A_1 \otimes A_1 & \dots & p_{NN}A_N \otimes A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} vec(V_1) \\ \vdots \\ vec(V_N) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_{11}I_n & \dots & p_{N1}I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}I_n & \dots & p_{NN}I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \otimes A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_N \otimes A_N \end{bmatrix} supvec(V) \\
&= \left(\begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix} \otimes I_n \right) diag[A_i \otimes A_i] supvec(V) \\
&= \left(\Pi^T \otimes I_n\right) diag[A_i \otimes A_i] supvec(V) \\
&= \mathcal{A}_1 supvec(V),
\end{aligned}
$$

de forma análoga se cumple para $\mathcal{L}, \mathcal{V}, \mathcal{J}$. $\square$

Observación 3.2. *De la proposición 3.2 se observa el siguiente esquema*



Notamos que $\mathcal{A}_1$ es la representación matricial de $\mathcal{T}$. Debido a que supvec es un homeomofirmos esto implica que

$$\rho(\mathcal{A}_1) = \rho(\mathcal{T}), \rho(\mathcal{A}_2) = \rho(\mathcal{L}), \rho(\mathcal{A}_3) = \rho(\mathcal{V}), \rho(\mathcal{A}_4) = \rho(\mathcal{J})$$

Además se tiene que $\mathcal{A}_1^T = \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3^T = \mathcal{A}_4$ entonces

$$\rho(\mathcal{A}_1) = \rho(\mathcal{A}_2) \ y \ \rho(\mathcal{A}_3) = \rho(\mathcal{A}_4).$$

Por el lema 1.2 implica

$$\rho(\mathcal{A}_1) = \rho(\mathcal{A}_2) = \rho(\mathcal{A}_3) = \rho(\mathcal{A}_4)$$

En resumen se concluye

$$\rho(\mathcal{A}_1) = \rho(\mathcal{A}_2) = \rho(\mathcal{A}_3) = \rho(\mathcal{A}_4) = \rho(\mathcal{T}) = \rho(\mathcal{L}) = \rho(\mathcal{V}) = \rho(\mathcal{J})$$

Por otro lado de la proposición 3.2 y (3.17) *se obtiene*

$$\begin{aligned} supvec(Q(k+1)) &= supvec(\mathcal{T}(Q(k))) \\ &= \mathcal{A}_1 supvec(Q(k)), \end{aligned} \tag{3.19}$$

y por inducción implica

$$supvec(Q(k)) = \mathcal{A}_1^k supvec(Q(0)) \tag{3.20}$$

Capítulo 4

Estabilidad

El análisis de estabilidad de sistemas lineales con saltos markovianos por una cadena de Markov se remonta a la década de los 70 con Rosenbloom [6] . Desde entonces la teoría a desarrollado abundantes resultantes de gran importancia teoríca y práctica, como se mostro en la introducción de este trabajo. La naturaleza estocástica de un sistema con saltos markovianos induce a considerar varios tipos de estabilidad en este sentido. A continuación presentamos las definiciones de estabilidad para el sistema (3.1) dadas en la literatura [2], [5].

Definición 14. *Se dice que el sistema* (3.1) *es*

a) Estable en media cuadrática (EMC) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0)$ *se tiene*

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{Q}(k) = 0,$$

donde $\mathbb{Q}(k)$ *está definido en* (3.6).

b) Estocásticamente estable (EE) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0)$ *se tiene*

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left(\|x(k)\|_2^2\right) < \infty$$

c) Exponencialmente estable (EXE) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0)$ *existen constantes* $0 < \alpha < 1 \leq \beta$ *tal que para todo* $k \in \mathbb{Z}_+$ *se tiene*

$$E\left(\|x(k)\|_2^2\right) \leq \beta\alpha^k E\left(\|x(0)\|_2^2\right),$$

donde α *y* β *son independientes de* $x(0)$ *y* $\theta(0)$ *.*

d) Casi seguramente estable (CSE) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\theta(0)$ se tiene

$$P\left(\lim_{k\to\infty} \|x(k)\|_2 = 0\right) = 1$$

4.1. Test de estabilidad mediante el radio espectral de $\mathcal{A}_1$

En esta sección analizamos la estabilidad de (3.1) en términos del radio espectral de la matriz $\mathcal{A}_1$. El resultado que se presenta constituye un test fácilmente implementable, por ejemplo, en MATLAB, con el que se puede determinar la estabilidad del sistema.

Lema 4.1 ([25])**.** *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $\theta(0)$ se cumple*

$$\lim_{k\to+\infty} Q(k) = 0. \tag{4.1}$$

Demostración.
Asumamos que el sistema es EMC. De la desigualdad

$$\|Q_i(k)\| = \left\|E\left(x(k)x^T(k)1_{\{\theta(k)=i\}}\right)\right\| \leq \left\|E\left(x(k)x^T(k)\right)\right\| = \|\mathbb{Q}(k)\|$$

se sigue que $\lim_{k\to+\infty} Q_i(k) = 0$ y esto implica inmediatamente (4.1).

Ahora si $\lim_{k\to+\infty} Q(k) = 0$ entonces $\lim_{k\to+\infty} Q_i(k) = 0$ y por (3.7) se concluye que el sistema (3.1) es EMC. □

El teorema 4.1 provee una herramienta de fácil implementación computacional para analizar si el sistema (3.1) es EMC mediante el radio espectral de la matriz $\mathcal{A}_1$. El resultado es completamente análogo al establecido en el teorema 2.1.

Teorema 4.1 ([25])**.** *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si $\rho(\mathcal{A}_1) < 1$.*

Demostración. Si el sistema es EMC, entonces por el lema 4.1 se tiene $\lim_{k\to+\infty} Q(k) = 0$. Como $x(0)$ y $\theta(0)$ son arbitrarios y teniendo en cuenta que

$$Q_i(0) = E\left\{x(0)x^T(0)\right\} E\left\{1_{\{\theta(0)=i\}}\right\} = E\left\{x(0)x^T(0)\right\}\pi_i,$$

entonces siempre es posible obtener $Q(0)$ con componentes no nulas. Entonces por (3.18) se deduce que $\rho(\mathcal{T}) < 1$ entonces $\rho(\mathcal{A}_1) < 1$.

Si $\rho(\mathcal{A}_1) < 1$ entonces $\rho(\mathcal{T}) < 1$. Tomando límite a ambos lados de (3.18) y por la proposición 1.2 se tiene $\lim_{k\to+\infty} Q(k) = 0$. De aquí, por el lema 4.1, se concluye que el sistema es EMC. □

4.1.1. Ejemplos

En esta sección se proporcionan diferentes ejemplos que ilustran los resultados presentados en las secciones previas. En particular se analiza la estabilidad del sistema estocástico en relación con la estabilidad de los subsistemas que lo conforman.

Ejemplo 8. *Consideramos el sistema escalar con 2 modos, $a_1 = 0.7$ y $a_2 = 1.2$, y matriz de transición de probabilidad*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix},$$

En este caso la matriz $\mathcal{A}_1$ es :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.2940 & 1.1520 \\ 0.1960 & 0.2880 \end{bmatrix}$$

y dado que $\rho(\mathcal{A}_1) = 0.7662 < 1$ entonces el sistema es EMC. Notemos que el modo a_1 es estable, mientras que el modo a_2 es inestable.

Ejemplo 9. *En este ejemplo se muestra un sistema con todos sus modos estables, sin embargo, el sistema no es EMC.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

En este caso la matriz $\mathcal{A}_1$ es:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14.4 & 0.108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 & 1.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 & 1.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.225 & 19.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.252 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 3.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 3.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.025 & 44.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notamos que todos los modos son estables, pero como $\rho(\mathcal{A}_1) = 5.7811 > 1$ el sistema no es EMC.

Ejemplo 10. *En este ejemplo se muestra un sistema con todos sus modos inestables, sin embargo, el sistema es EMC.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.85 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Claramente los modos del sistema son inestables. La matriz $\mathcal{A}_1$ es:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.45 & -0.6 & -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 \\ 1.8 & -2.4 & -2.4 & 3.2 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Como $\rho(\mathcal{A}_1) = 0{,}6 < 1$ el sistema es EMC.

Los ejemplos presentados permiten concluir que no hay relación entre la estabilidad de los modos y la estabilidad del sistema visto como un todo.

4.2. Test de estabilidad mediante la ecuación de Lyapunov

En esta sección se presenta una caracterización algebraica para la estabilidad estocástica del sistema (3.1) mediante un conjunto de ecuaciones de tipo Lyapunov. Observe que cuando el espacio de estados se reduce al conjunto unitario $S_\theta = \{1\}$ la ecuación (4.2) se convierte en la ecuación de Lyapunov para sistemas lineales sin saltos. La ecuación de Lyapunov que proponemos para el sistema (3.1) es de la forma siguiente:

$$M_i - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_i^T M_j A_i = W_i, \quad i,j \in S_\theta, \tag{4.2}$$

en esta ecuación todas las matrices están definidas en el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sea $M_{\theta(k)}$ una matriz simétrica definida positiva y definamos una función de Lyapunov apropiada, como sigue:

$$V(x(k),\theta(k)) = x^T(k)M_{\theta(k)}x(k). \tag{4.3}$$

Observe que $V(\cdot,\cdot)$ es una función positivo definida. Enseguida se muestra que esta función es decreciente.

Lema 4.2 ([25])**.** *Sea* $x(k)$ *la trayectoria solución del sistema* (3.1) *y supongamos que dado el conjunto* $\{W_i;\ i \in S_\theta\}$ *de matrices simétricas definidas positivas existe un conjunto de matrices simétricas* $\{M_i;\ i \in S_\theta\}$ *definidas positivas que satisfacen* (4.2)*. Entonces*

$$E\{V(x(k+1),\theta(k+1)) - V(x(k),\theta(k))\} = -E\left\{x^T(k)W_{\theta(k)}x(k)\right\}. \tag{4.4}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&E\{V(x(k+1),\theta(k+1)) - V(x(k),\theta(k))\}\\
&= E\{x^T(k+1)M_{\theta(k+1)}x(k+1) - x^T(k)M_{\theta(k)}x(k)\}\\
&= E\left\{x^T(k)A^T_{\theta(k)}M_{\theta(k+1)}A_{\theta(k)}x(k) - x^T(k)M_{\theta(k)}x(k)\right\}\\
&= E\left\{\sum_{i,j=1}^{N} x^T(k)A_i^T M_j A_i x(k)1_{\{\theta(k+1)=j\}}1_{\{\theta(k)=i\}} - \sum_{i=1}^{N} x^T(k)M_i 1_{\{\theta(k)=i\}}x(k)\right\}\\
&= E\left\{E\left\{\sum_{i,j=1}^{N} x^T(k)A_i^T M_j A_i x(k)1_{\{\theta(k+1)=j\}}1_{\{\theta(k)=i\}} - \sum_{i=1}^{N} x^T(k)M_i 1_{\{\theta(k)=i\}}x(k)\middle| x(k),\theta(k)\right\}\right\}
\end{aligned}$$

Debido que $x^T(k)x(k)1_{\{\theta(k)=i\}}$ es medible con respecto a $\{x(k),\theta(k)\}$ la igualdad de arriba se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&E\{V(x(k+1),\theta(k+1)) - V(x(k),\theta(k))\}\\
&= E\left\{\sum_{i,j=1}^{N} x^T(k)A_i^T M_j A_i x(k)1_{\{\theta(k)=i\}}E\left\{1_{\{\theta(k+1)=j\}}|x(k),\theta(k)\right\} - \sum_{i=1}^{N} x^T(k)M_i 1_{\{\theta(k)=i\}}x(k)\right\}
\end{aligned}$$

De aquí, por el lema 3.1 se sigue:

$$\begin{aligned}
&E\{V(x(k+1),\theta(k+1)) - V(x(k),\theta(k))\}\\
&= E\left\{\sum_{i,j=1}^{N} x^T(k)A_i^T M_j A_i x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}} p_{\theta(k)j} - \sum_{i=1}^{N} x^T(k) M_i 1_{\{\theta(k)=i\}} x(k)\right\}\\
&= E\left\{\sum_{i,j=1}^{N} x^T(k)A_i^T M_j A_i x(k) p_{ij} - \sum_{i=1}^{N} x^T(k) M_i 1_{\{\boldsymbol{\theta}(k)=i\}} x(k)\right\}\\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{N} x^T(k)\left\{\sum_{j=1}^{N} A_i^T M_j A_i p_{ij} - M_i\right\} 1_{\{\theta(k)=i\}} x(k)\right\}\\
&= E\left\{-x^T(k)\sum_{i=1}^{N} W_i 1_{\{\theta(k)=i\}} x(k)\right\}\\
&= -E\left\{x^T(k) W_{\theta(k)} x(k)\right\}
\end{aligned}$$

□

El resultado anterior implica inmediatamente la ecuación (4.5).

Corolario 4.1 ([25])**.** *Bajo las hipótesis del lema 4.2 se sigue que*

$$\frac{E\{V(x(k+1),\theta(k+1)) - V(x(k),\theta(k))\}}{E\{V(x(k),\theta(k))\}} = -\frac{E\left\{x^T(k)W_{\theta(k)}x(k)\right\}}{E\left\{x^T(k)M_{\theta(k)}x(k)\right\}}, \quad x(k) \neq 0 \qquad (4.5)$$

Esta igualdad será utilizada en la demostración del resultado principal de la presente sección. Para presentar el siguiente lema, recordemos que la desigualdad de Rayleigh se aplica para matrices simétricas, si las matrices son definidas positivas entonces los valores propios son estrictamente positivos.

Lema 4.3 ([25])**.** *La función de Lyapunov $V(.;.)$ definida en* (4.3) *es decreciente exponencialmente en media, es decir, existe $0 < \alpha < 1$, tal que*

$$E\{V(x(k),\theta(k))\} \leq \alpha^k E\{V(x(0),\theta(0))\}, \qquad (4.6)$$

Demostración. Para $x(k) = 0$ la desigualdad es trivial.

Ahora para el caso $x(k) \neq 0$, aplicando la desigualdad de Rayleigh a $W_{\theta(k)}$ y $M_{\theta(k)}$ definimos

$$\mu = \min_{\theta(k)\in S_\theta} \{\lambda_{min}\{W_{\theta(k)}\}\}$$

Debido que $W_{\theta(k)}$ es una matriz definita positiva entonces $\mu > 0$ y además

$$\mu\|x(k)\|_2^2 \leq \lambda_{min}\{W_{\theta(k)}\}\|x(k)\|_2^2 \leq x^T(k)W_{\theta(k)}x(k) \tag{4.7}$$

y

$$\delta = \max_{\theta(k)\in S_\theta}\{\lambda_{max}\{M_{\theta(k)}\}\}$$

Debido que $M_{\theta(k)}$ es una matriz definida positiva entonces $\delta > 0$ y además

$$x^T(k)M_{\theta(k)}x(k) \leq \lambda_{max}\{M_{\theta(k)}\}\|x(k)\|_2^2 \leq \delta\|x(k)\|_2^2 \tag{4.8}$$

De (4.7) y (4.8) se obtiene

$$\mu E\{\|x(k)\|_2^2\} \leq E\left\{x^T(k)W_{\theta(k)}x(k)\right\} \tag{4.9}$$

y

$$E\left\{x^T(k)M_{\theta(k)}x(k)\right\} \leq \delta E\{\|x(k)\|_2^2\}. \tag{4.10}$$

De (4.9) y (4.10) implica

$$\frac{\mu E\{\|x(k)\|_2^2\}}{\delta E\{\|x(k)\|_2^2\}} \leq \frac{E\{x^T(k)W_{\theta(k)}x(k)\}}{E\{x^T(k)M_{\theta(k)}x(k)\}},$$

$$\frac{\mu}{\delta} \leq \frac{E\{x^T(k)W_{\theta(k)}x(k)\}}{E\{x^T(k)M_{\theta(k)}x(k)\}}.$$

Ahora definimos

$$\alpha = 1 - \frac{\mu}{\delta} < 1 \tag{4.11}$$

la desigualdad de arriba se puede escribir como sigue

$$-\frac{E\{x^T(k)W_{\theta(k)}x(k)\}}{E\{x^T(k)M_{\theta(k)}x(k)\}} \leq -\frac{\mu}{\delta} = \alpha - 1 \tag{4.12}$$

De (4.5) y (4.12) se sigue

$$0 < \frac{E\{V(x(k+1);\theta(k+1))\}}{E\{V(x(k);\theta(k))\}} \leq \alpha,$$

esto implica

$$E\{V(x(k+1);\theta(k+1))\} \leq \alpha E\{V(x(k);\theta(k))\}$$

y de aquí, el resultado se concluye por inducción. $\square$

Teorema 4.2 ([2]). *El sistema* (3.1) *es EE si y solo si para cualquier conjunto de matrices simétricas* $\{W_i; i \in S_\theta\}$ *definidas positivas existe un conjunto de matrices simétricas* $\{M_i; i \in S_\theta\}$ *definidas positivas que satisfacen* (4.2).

Demostración. Asumamos que se cumple (4.2) y consideremos la función de Lyapunov definida en (4.4). Si $x(k_0) = 0$ para algún $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, debido a la recurrencia de (3.1) tendremos que $x(k) = 0$ para todo $k \geq k_0$ y por lo tanto la estabilidad estocástica de (3.1) es trivial. Asumamos, pues, que $x(k) \neq 0, \forall\ k \in \mathbb{Z}_+$ entonces de (4.6) se sigue:

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{k=0}^{n} V(x(k),\theta(k))\right\} &\leq (1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n)E\{V(x(0),\theta(0))\} \\ &= \left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}\right)E\{V(x(0),\theta(0))\} \\ &= \left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}\right)E\{x^T(0)M_{\theta(0)}x(0)\} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ahora definamos

$$\beta = \min_{\theta(k)\in S_\theta}\{\lambda_{\text{mín}}\{M_{\theta(k)}\}\}$$

Como $M_{\boldsymbol{\theta}(k)}$ es una matriz definida positiva entonces $\beta > 0$ implica

$$\beta x^T(k)x(k) \leq \lambda_{\text{mín}}\{M_{\theta(k)}\}x^T(k)x(k) \leq x^T(k)M_{\theta(k)}x(k) \tag{4.14}$$

De (4.13) y (4.14) se sigue

$$E\left\{\sum_{k=0}^{n} x^T(k)x(k)\right\} \leq \left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\beta(\alpha-1)}\right)E\{x^T(0)M_{\theta(0)}x(0)\}$$

Como $0 < \alpha < 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\sum_{k=0}^{n} x^T(k)x(k)\right\} \leq \left(\frac{1}{c(1-\alpha)}\right)E\{x^T(0)M_{\theta(0)}x(0)\} < \infty$$

lo que prueba que el sistema (3.1) es EE.

Ahora asumamos que el sistema (3.1) es EE y para comenzar definamos la matriz D_k^l, como sigue:

$$D_k^l = \prod_{s=k}^{l} A_{\theta(l-s+k+1)} \tag{4.15}$$

Con base en D_k^l definamos ahora la sucesión de matrices aleatorias $\{M(n-k,\theta(k)) : 0 \leq k \leq n\}$ de la siguiente forma :

$$
\begin{aligned}
M(n-k,\theta(k)) =& W_{\theta(k)} + A_{\theta(k)}^T E\left\{ W_{\theta(k+1)} \middle| x(k), \theta(k) \right\} A_{\theta(k)} \\
&+ \sum_{l=k}^{n-2} A_{\theta(k)}^T E\left\{ \left(D_k^l\right)^T W_{\theta(l+2)} \left(D_k^l\right) \middle| x(k), \theta(k) \right\} A_{\theta(k)}
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Observe que debido a que $W_{\theta(l)}$ es simétrica y definida positiva entonces $M(n-k,\theta(k))$ es también simétrica y definida positiva.

A partir de (4.16) la sucesión escalar

$$
\begin{aligned}
x^T(k)M(n-k,\theta(k))x(k) =& x^T(k)W_{\theta(k)}x(k) + x^T(k)A_{\theta(k)}^T E\left\{ W_{\theta(k+1)} \middle| x(k), \theta(k) \right\} A_{\theta(k)}x(k) \\
&+ \sum_{l=k}^{n-2} x^T(k)A_{\theta(k)}^T E\left\{ \left(D_k^l\right)^T W_{\theta(l+2)} \left(D_k^l\right) \middle| x(k), \theta(k) \right\} A_{\theta(k)}x(k)
\end{aligned}
$$

se puede escribir de la siguiente forma:

$$
x^T(k)M(n-k,\theta(k))x(k) = E\left\{ \sum_{l=k}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l) \middle| x(k), \theta(k) \right\} \tag{4.17}
$$

Para $x(k) = x_k$ y $\theta(k) = i$, de (4.17) se sigue que

$$
x_k^T M(n-k,i)x_k = E\left\{ \sum_{l=k}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l) \middle| x(k) = x_k, \theta(k) = i \right\} \tag{4.18}
$$

lo que implica de inmediato que la sucesión es creciente puesto que $W_{\theta(l)}$ es positivo definida para todo $\theta(l) \in S_\theta$. Veamos enseguida que la sucesión también es acotada. Esto se sigue de la estabilidad estocástica del sistema. En efecto, por la desigualdad de Rayleigh tenemos:

$$
x^T(k)W_{\theta(k)}x(k) \leq \lambda_{\text{máx}}\{W_{\theta(k)}\}x^T(k)x(k) \leq \gamma x^T(k)x(k), \tag{4.19}
$$

donde γ está definido por

$$
\gamma = \max_{\theta(k)\in S_\theta} \{\lambda_{max}(W_{\theta(k)})\}.
$$

Luego sustituyendo (4.19) en (4.17) tenemos

$$\begin{aligned}
x_k^T M(n-k,i)x_k &= E\left\{\sum_{l=k}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l)\bigg| x(k)=x_k,\theta(k)=i\right\}\\
&\leq \gamma E\left\{\sum_{l=k}^{n} x^T(l)x(l)\bigg| x(k)=x_k,\theta(k)=i\right\}\\
&\leq \gamma\frac{E\left\{\sum_{l=k}^{n} x^T(l)x(l)1_{\{x(k)=x_k,\theta(k)=i\}}\right\}}{P(x(k)=x_k,\theta(k)=i)}\\
&\leq \gamma\frac{E\left\{\sum_{l=k}^{n} x^T(l)x(l)\right\}}{P(x(k)=x_k,\theta(k)=i)}
\end{aligned}$$

Dado que el sistema es EE esta desigualdad implica que la sucesión de lado izquierdo es acotada superiormente. Lo anterior prueba que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^T M(n-k,i)x_k$ existe para todo $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Sea $M(n-k,i) = [m(n-k,i)_{jr}]$. Tomando $x_k = e_j$ entonces existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} e_j^T M(n-k,i)e_j = \lim_{n\to\infty} m(n-k,i)_{jj} = m(i)_{jj} \tag{4.20}$$

De otro lado, tomando $x_k = e_i + e_j$ se sigue

$$\begin{aligned}
(e_j+e_r)^T M(n-k,i)(e_j+e_r) &= e_j^T M(n-k,i)e_j + e_r^T M(n-k,i)e_r\\
&\quad + e_j^T M(n-k,i)e_r + e_r^T M(n-k,i)e_j
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Como $M(n-k,i)$ es simétrica entonces $e_j^T M(n-k,i)e_r = e_r^T M(n-k,i)e_j$. El límite de la izquierda de (4.21) existe y por (4.20) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} e_j^T M(n-k,i)e_r = \lim_{n\to\infty} m(n-k,i)_{jr} = m(i)_{jr} \tag{4.22}$$

De (4.20) y (4.22) se concluye

$$\lim_{n\to\infty} M(n-k,i) = M_i, \tag{4.23}$$

donde $M_i = [m(i)_{jr}]$.

De (4.17) y del item 4 de la proposición 1.5, se sigue:

$$
\begin{aligned}
&E\left\{x^T(0)M(n,\theta(0))x(0) - x^T(1)M(n-1,\theta(1))x(1)\middle|x(0),\theta(0)\right\}\\
&= E\left\{E\left\{\sum_{l=0}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l)\middle|x(0),\theta(0)\right\}\middle|x(0),\theta(0)\right\}\\
&- E\left\{E\left\{\sum_{l=1}^{n} x^T(l)W_{\boldsymbol{\theta}(l)}x(l)\middle|x(1),\theta(1)\right\}\middle|x(0),\theta(0)\right\}\\
&= E\left\{\sum_{l=0}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l)\middle|x(0),\theta(0)\right\}\\
&- E\left\{E\left\{\sum_{l=1}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l)\middle|x(0),\theta(0),x(1),\theta(1)\right\}\middle|x(0),\theta(0)\right\}\\
&= E\left\{\sum_{l=0}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l)\middle|x(0),\theta(0)\right\}\\
&- E\left\{\sum_{l=1}^{n} x^T(l)W_{\theta(l)}x(l)\middle|x(0),\theta(0)\right\} = x^T(0)W_{\theta(0)}x(0)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
&E\{x^T(0)M(n,\theta(0))x(0) - x^T(1)M(n-1,\theta(1))x(1)|x(0),\theta(0)\}\\
&= \; x^T(0)M(n,\theta(0))x(0) - E\{x^T(1)M(n-1,\theta(1))x(1)|x(0),\theta(0)\}\\
&= x^T(0)M(n,\theta(0))x(0) - E\{x^T(0)A_{\theta(0)}^T M(n-1,\theta(1))A_{\theta(0)}x(0)|x(0),\theta(0)\}\\
&= x^T(0)M(n,\theta(0))x(0) - x^T(0)A_{\theta(0)}^T E\{M(n-1,\theta(1))|x(0),\theta(0)\}A_{\theta(0)}x(0)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

De (4.24) y (4.25) para $\theta(0) = i$ y $x(0) = x_0$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
x_0^T W_i x_0 &= x_0^T M(n,i)x_0 - x_0^T A_i^T E\{M(n-1,\theta(1))|x(0) = x_0, \theta(0) = i\}A_i x_0\\
&= x_0^T M(n,i)x_0\\
&- \sum_{j=1}^{N} x_0^T A_i^T E\{1_{\{\theta(1)=j\}} M(n-1,j)|x(0) = x_0, \theta(0) = i\}A_i x_0\\
&= x_0^T M(n,i)x_0\\
&- \sum_{j=1}^{N} x_0^T A_i^T M(n-1,j) E\{1_{\{\theta(1)=j\}}|x(0) = x_0, \theta(0) = i\}A_i x_0\\
&= x_0^T M(n,i)x_0\\
&- \sum_{j=1}^{N} x_0^T A_i^T M(n-1,j)p_{ij}A_i x_0
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Como (4.26) es válido para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y por el lema 1.1 se tiene:

$$M(n,i) - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_i^T M(n-1,j) A_i = W_i. \tag{4.27}$$

Finalmente, tomando límite a ambos lados de (4.27) cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$M_i - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_i^T M_j A_i = W_i$$

□

Observación 4.1. *La ecuación* (4.2) *se puede reescribir de la forma siguiente. Aplicando el operador vec a* (4.2) *se obtiene*

$$vec(W_i) = vec(M_i) - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(A_i^T \otimes A_i^T) vec(M_j).$$

Esto es equivalente a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(W_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(W_N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(M_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(M_N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} A_1^T \otimes A_1^T & \dots & p_{1N} A_N^T \otimes A_N^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} A_1^T \otimes A_1^T & \dots & p_{NN} A_N^T \otimes A_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(M_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(M_N) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(M_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(M_N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} I_n & \dots & p_{1N} I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} I_n & \dots & p_{NN} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T \otimes A_1^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_N^T \otimes A_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(M_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(M_N) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(M_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(M_N) \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix} \otimes I_n \right) \begin{bmatrix} A_1^T \otimes A_1^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_N^T \otimes A_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(M_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(M_N) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Definiendo

$$W = (W_1, \dots, W_N) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}, W > 0$$

$$M = (M_1, \dots, M_N) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}, M > 0$$

la última ecuación se puede expresar

$$\begin{aligned}
supvec(W) &= supvec(M) - (\Pi \otimes I_n)\, diag[A_i^T \otimes A_i^T] supvec(M) \\
&= supvec(M) - \mathcal{C}^T \mathcal{N}^T supvec(M) \\
&= supvec(M) - \mathcal{A}_3 supvec(M) \\
&= supvec(M) - supvec(\mathcal{V}(M)) \\
&= supvec(M - \mathcal{V}(M))
\end{aligned}$$

Esto implica que la ecuación (4.2) *es equivalente a para cualquier* $W \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}, W > 0$ *existe un único* $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}, M > 0$ *tal que*

$$W = M - \mathcal{V}(M).$$

Por otro lado notamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
supvec(W) &= supvec(M) - \mathcal{A}_3 supvec(M) \\
&= (I - \mathcal{A}_3) supvec(M) \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Si el sistema (3.1) *es EMC por el teorema 4.1 entonces* $\rho(\mathcal{A}_3) < 1$ *esto implica que la matriz* $I - \mathcal{A}_3$ *es inversible. De* (4.28) *se obtiene*

$$M = supvec^{-1}\left((I - \mathcal{A}_3)^{-1} supvec(W)\right) \qquad (4.29)$$

En la siguiente sección se proporcionan diferentes ejemplos que ilustran los resultados presentados en las sección previa.

4.2.1. Ejemplos

El siguiente ejemplo es un sistema que no es EE, el cual comprobaremos mediante la ecuación del tipo Lyapunov.

Ejemplo 11. *Sean*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

considerando W_1 *y* W_2 *matrices simétricas definidas postivas*

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

de (4.29) *se obtiene*

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1.0483 & -3.7348 \\ -3.7348 & -3.2006 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.3065 & -0.7108 \\ -0.7108 & -1.0593 \end{bmatrix},$$

donde notamos que M_1 *y* M_2 *son matrices simétricas pero no son defnidas positivas.*

El siguiente ejemplo es un sistema que es EE, el cual comprobaremos mediante la ecuación del tipo Lyapunov.

Ejemplo 12. *Sean*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

considerando W_1 *y* W_2 *matrices simétricas definidas postivas*

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

de (4.29) *se obtiene*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 5.0111 & 0.0604 \\ 0.0604 & 2.0534 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 7.0223 & 1.2175 \\ 1.2175 & 2.0492 \end{bmatrix},$$

donde notamos que M_1 *y* M_2 *son matrices simétricas y además son defnidas positivas.*

4.3. Equivalencia entre las diferentes nociones de estabilidad

En esta sección se establecen la relaciones entre los diferentes tipos de estabilidad introducidos en la sección anterior. Se prueba que bajo la condición de ser S_θ un espacio de estados finito, las nociones de estabilidad (a)-(c) son equivalentes y todas esta implican la estabilidad (d), no siendo necesariamente cierto lo contrario (ver [4, Ejem. 3.17,Pag.39]). Así pues, la estabilidad CSE es más débil que las demás. Comencemos por el lema siguiente:

Lema 4.4 ([25]). *Para la matriz $R_i(k)$, definida por*

$$R_i(k) = \sum_{l=0}^{k} Q_i(l) = \sum_{l=0}^{k} E\left(x(l)x^T(l)1_{\{\theta(l)=i\}}\right), \quad i \in S_\theta$$

se cumple:

$$\sum_{i=1}^{N} tr(R_i(k)) = \sum_{l=0}^{k} E\left(\|x(l)\|_2^2\right) \tag{4.30}$$

Demostración. La prueba se sigue directamente de la definición de $R_i(k)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} tr(R_i(k)) &= \sum_{i=1}^{N} tr\left(\sum_{l=0}^{k} E\left(x(l)x^T(l)1_{\{\theta(l)=i\}}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{k} E\left(tr(x(l)x^T(l)1_{\{\theta(l)=i\}})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{k} E\left(\|x(l)\|_2^2 1_{\{\theta(l)=i\}}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k} E\left(\sum_{i=1}^{N} \|x(l)\|_2^2 1_{\{\theta(l)=i\}}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k} E\left(\|x(l)\|_2^2\right)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3 ([25]). *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si es EE.*

Demostración.

Si el sistema (3.1) es EMC. De (3.19) se sigue que

$$(I - \mathcal{A}_1)\, supvec(Q(k)) = \mathcal{A}_1 \left(supvec(Q(k-1)) - supvec(Q(k))\right), \ k \in \mathbb{N}.$$

por la propiedad telescópica se obtiene

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A}_1)\left(\sum_{l=1}^{k} supvec(Q(l))\right) = \mathcal{A}_1(supvec(Q(0)) - supvec(Q(k)))$$

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A}_1)\left(\sum_{l=1}^{k} supvec(Q(l))\right) = supvec(Q(1)) - \mathcal{A}_1 supvec(Q(k))$$

Puesto que el sistema es EMC entonces $\rho(\mathcal{A}) < 1$ lo que implica que la matriz $\mathcal{I} - \mathcal{A}_1$ es inversible. Por consiguiente,

$$\sum_{l=1}^{k} supvec(Q(l)) = (I - \mathcal{A}_1)^{-1}(supvec(Q(1)) - \mathcal{A}_1 supvec(Q(k)))$$

y por el lema 4.1, tomando límite a ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k} supvec(Q(l)) = (\mathcal{I} - \mathcal{A}_1)^{-1} supvec(Q(1))$$

Así pues la serie de vectores $\sum_{l=0}^{k} supvec(Q(l))$ converge lo que implica que la serie de las componentes también converge. Entonces existen $T_i \in \mathbb{R}^{n^2}$, $i \in S_\theta$, tal que

$$T_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \mathrm{vec}(Q_i(l))$$

y tomando en cuenta que el operador vec es continuo, entonces

$$T_i = \mathrm{vec}\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} Q_i(l) \right)$$

De aquí y por la definición de $R_i(k)$ se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} R_i(k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} Q_i(l) = \mathrm{vec}^{-1}(T_i) \tag{4.31}$$

Finalmente, por (4.30)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} E\left(\|x(l)\|_2^2\right) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} tr\left(R_i(k)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} tr\left(\lim_{k\to\infty} R_i(k)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} tr(\mathrm{vec}^{-1}(T_i)) < \infty \end{aligned}$$

lo que prueba que (3.1) es EE.

Si el sistema es EE, $\sum_{k=0}^{\infty} E\left(\|x(k)\|_2^2\right) < \infty$ esto implica que $\lim_{k\to\infty} E\left(\|x(k)\|_2^2\right) = 0$. La estabilidad EMC se comprueba por (3.12). $\square$

Para establecer la equivalencia entre la EMC y EXE, teorema 4.4, será de utilidad la desigualdad (4.32).

Lema 4.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\rho(A) < 1$ entonces existen $\beta \geq 1$ y $0 < \gamma < 1$ tal que*

$$\|A^k\|_1 \leq \beta\gamma^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{4.32}$$

Demostración. Aplicamos el teorema de la forma canónica de Jordan para A entonces existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, tal que $A = PJP^{-1}$ y esto implica $A^k = PJ^kP^{-1}, k \in \mathbb{Z}_+$. Sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ los autovalores de A, la matriz J^k es de la forma siguiente:

$$J^k = \begin{bmatrix} J^k_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J^k_{m_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J^k_{m_{s-1}}(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J^k_{m_s}(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

donde los bloques de Jordan $J^k_{m_i}(\lambda_i)$ son de la forma siguiente:

$$J^k_{m_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \cdots & \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{m_i-2}\lambda_i^{k-m_i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Sea $\gamma = \rho(A) < 1$. Notamos que

$$\begin{aligned} \|J^k\|_1 &= \sum_{i=1}^{m_s} \left(\sum_{j=k-m_i+1}^{k} a_{i,j}|\lambda_i|^j \right), \quad a_{i,j} \in \mathbb{N} \\ &\leq \sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{k-j}, \quad b_j \in \mathbb{N},\, m = \text{máx}\{m_s\} \\ &= \gamma^k \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j} \right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Se tiene que $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j} \geq 1$, se define $\beta = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j} \right) \|P\|_1\|P^{-1}\|_1 \geq 1$.

De (4.33) se sigue

$$\begin{aligned}\|A^k\|_1 &= \|PJ^kP^{-1}\|_1 \\ &\leq \|P\|_1\|P^{-1}\|_1\|J^k\|_1 \\ &\leq \|P\|_1\|P^{-1}\|_1\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j}\right)\gamma^k \\ &= \beta\gamma^k\end{aligned}$$

□

Consideremos

$$\|supvec\|_1 = \sup_{\|V\|\neq 0}\frac{\|supvec(V)\|_1}{\|V\|_1}$$

$$\|supvec^{-1}\|_1 = \sup_{\|v\|\neq 0}\frac{\|supvec^{-1}(v)\|_1}{\|v\|_1}$$

Estamos preparados para presentar la equivalencia entre EMC y EXE.

Teorema 4.4 ([25]). *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si es EXE.*

Demostración. Si el sistema es EMC entonces $\rho(\mathcal{A}_1) < 1$, por el lema 4.5 se tiene que para algún $\beta \geq 1$ y $0 < \gamma < 1$ tenemos que

$$\|\mathcal{A}_1^k\|_1 \leq \beta\gamma^k, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+$$

Por (3.11) y (3.20) se sigue

$$\begin{aligned}E\left(\|x(k)\|_2^2\right) &\leq n\|Q(k)\|_1 \\ &= n\|supvec^{-1}(\mathcal{A}_1^k supvec(Q(0)))\|_1 \\ &\leq n\|supvec^{-1}\|_1\|\mathcal{A}_1^k\|_1\|supvec\|_1\|Q(0)\|_1\end{aligned}$$

Además por (3.12)

$$\begin{aligned}E\left(\|x(k)\|_2^2\right) &\leq \beta n^2\|supvec^{-1}\|_1\|supvec\|_1\gamma^k\|E(\|x(0)\|_2^2) \\ &= \overline{\beta}\gamma^k E(\|x(0)\|_2^2)\end{aligned}$$

donde $\overline{\beta} = \beta n^2\|supvec^{-1}\|_1\|supvec\|_1 \geq 1$. Por otro lado, de la definición se sigue directamente que la EXE implica la EMC. □

Teorema 4.5 ([25]). *Si el sistema* (3.1) *es EMC entonces es CSE.*

Demostración. Del teorema anterior si el sistema es EMC entonces él es EXE, es decir, existen constantes $0 < \alpha < 1 \leq \beta$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ se tiene

$$E\left(\|x(k)\|_2^2\right) \leq \beta\alpha^k E\left(\|x(0)\|_2^2\right),$$

Esta desigualdad implica

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left(\|x(k)\|_2^2\right) \leq \frac{\beta}{1-\alpha} E\left(\|x(0)\|_2^2\right) \tag{4.34}$$

aplicando la desigualdad de Markov se sigue

$$P\left(\|x(k)\| \geq \epsilon\right) \leq \frac{E\left(\|x(k)\|_2^2\right)}{\epsilon^2} \tag{4.35}$$

De (4.34) y (4.35) se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(\|x(k)\| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\|x(k)\|_2^2\right) \leq \frac{\beta}{\epsilon^2(1-\alpha)} E\left(\|x(0)\|_2^2\right) \tag{4.36}$$

Definiendo la sucesión de eventos

$$A_k = \{\|\boldsymbol{x}(k)\|_2 \geq \epsilon\}$$

se sigue de (4.36) y del lema de Borel-Cantelli que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Tomando complemento en esta igualdad se obtiene

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) = 1;$$

de donde

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \|x(k)\|_2 = 0\right) = 1.$$

$\square$

Recordemos el teorema de Lyapunov para el siguiente sistema

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{4.37}$$

Teorema 4.6. *Si ϕ es una función de Lyapunov para el sistema* (4.37) *y*

$$\phi(f(x(k))) - \phi(x(k)) < 0, \forall x \neq 0.$$

entonces el sistema (4.37) *es asintóticamente estable.*

Demostración. Por ser ϕ una función de Lyapunov se tiene $\phi(x(k)) > 0$ y además $\phi(x(k+1)) < \phi(x(k))$, esto quiere decir que la sucesión $\phi(x(k))$ es decreciente y acotada inferiormente entonces es convergente. Por la continuidad de ϕ se sigue

$$\lim_{k\to+\infty} \phi(x(k)) = L$$
$$\phi\left(\lim_{k\to+\infty} x(k)\right) = L.$$

entonces existe un $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{k\to+\infty} x(k) = x^*$. □

Lema 4.6 ([4]). *Sean $S, V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}$ y además S,$V > 0$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$c_0(S)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right) \leq \langle V, S\rangle \leq c_1(S)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right),$$

donde $c_0(S) = \min_{1\leq j\leq N}\left(\min_{1\leq i\leq n}\lambda_i(S_j)\right) > 0,\ c_1(S) = \max_{1\leq j\leq N}\left(\max_{1\leq i\leq n}\lambda_i(S_j)\right) > 0.$

Demostración. Por el item 3 de la proposición 1.1 se sigue

$$\left(\min_{1\leq i\leq n}\lambda_i(S_j)\right)tr(V_j) \leq tr(S_jV_j) \leq \left(\max_{1\leq i\leq n}\lambda_i(S_j)\right)tr(V_j)$$
$$c_0(S)tr(V_j) \leq tr(S_jV_j) \leq c_1(S)tr(V_j)$$
$$c_0(S)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right) \leq tr(S_jV_j) \leq c_1(S)\left(\sum_{1=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right)$$
$$c_0(S)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{N} tr(S_jV_j) \leq c_1(S)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right)$$
$$c_0(S)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right) \leq \langle V, S\rangle \leq c_1(S)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(V_j)\right)$$

□

Teorema 4.7 ([4]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El sistema* (3.1) *es EMC*

2. El radio espectral de la matriz $\mathcal{A}_1$ *es menor que uno, es decir,* $\rho(\mathcal{A}_1) < 1$.

3. Para todo $S \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}$,$S > 0$, *existe un único* $V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}, V > 0$ *tal que*

$$V - \mathcal{T}(V) = S. \tag{4.38}$$

4. Para algún $V \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}, V > 0$, *se tiene*

$$V - \mathcal{T}(V) > 0. \tag{4.39}$$

5. El sistema (3.1) *es EXE.*

6. El sistema (3.1) *es EE.*

El resultado es similar si reemplazamos $\mathcal{T}$ *en* (4.38) *y* (4.39) *por* $\mathcal{L}$,$\mathcal{V}$ *o* $\mathcal{J}$. *La expresión* (4.38) *nos da una ecuación, la cual es llamada* ***ecuación de Lyapunov*** *y en la expresión* (4.39) *nos da una inecuación, la cual es llamada* ***inecuación de Lyapunov****.*

Demostración. Por los teoremas 4.3 y 4.4 tenemos que 1), 5) y 6) son equivalentes. Por el teorema 4.1 se tiene que 1) y 2) son equivalentes y por el teorema 4.2 se tiene que 3) y 6) son equivalentes. Vemos que 3) implica 4) se prueba de forma directa. Entonces nos concentraremos en demostrar que 4) implica 2).

Consideremos el sistema homogéneo

$$Y(k+1) = \mathcal{L}(Y(k)),\ Y(0) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}, \tag{4.40}$$

donde $Y(k) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}$. Sea la función Φ: $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+} \to \mathbb{R}$ donde se define

$$\Phi(Y) \triangleq \langle V, Y \rangle,\ \ Y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}.$$

Comprobaremos que la función Φ es una función de Lyapunov.

I) $\Phi(0) = \langle V^T, 0 \rangle = 0$

II) La función es continua Φ.

En efecto, sea $(Y^n) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} Y^n = Y$

$$\begin{aligned} \Phi(Y_n) &= \langle V, Y_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i, Y_i^n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Phi(Y_n) &= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i,Y_i)\\
&= \langle V,Y\rangle\\
&= \Phi(Y).
\end{aligned}
$$

III) $\forall Y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+}$, $Y \neq 0\,(Y > 0)$ se tiene que $\Phi(Y) > 0$.

En efecto como $Y > 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
\Phi(Y) &\triangleq \langle V,Y\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i,Y_i)\\
&= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^{\frac{1}{2}}V_i^{\frac{1}{2}}Y_i)\\
&= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^{\frac{1}{2}}Y_iV_i^{\frac{1}{2}})\\
&> 0
\end{aligned}
$$

IV) $\Phi(Y(k+1)) - \Phi(Y(k)) < 0$. En efecto por el lema 4.6 se tiene

$$
c_0(V)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Y_j)\right) \leq \Phi(Y) \leq c_1(V)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Y_j)\right)
$$

por $V - \mathcal{T}(V) = S$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Phi(Y(k+1)) - \Phi(Y(k)) &= \langle V, Y(k+1)\rangle - \langle V,Y(k)\rangle\\
&= \langle V,\mathcal{L}(Y(k))\rangle - \langle V,Y(k)\rangle\\
&= \langle \mathcal{T}(V), Y(k)\rangle - \langle V,Y(k)\rangle\\
&= \langle \mathcal{T}(V) - V,Y(k)\rangle\\
&= -\langle S,Y(k)\rangle\\
&\leq -c_0(S)\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Y_j(k))\right)\\
&< 0
\end{aligned}
$$

Tenemos que Φ es una función de Lyapunov y por el teorema 4.6 para el sistema (4.40) tenemos que es asintóticamente estable esto implica que $\rho(\mathcal{L}) = \rho(\mathcal{A}_1) < 1$.

□

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo son las siguientes:

- Los resultados fundamentales de la teoría clásica de sistemas lineales sin saltos pueden ser extendidos para el estudio de los sistemas lineales con saltos markovianos en particular, la ecuación de Lyapunov y test de estabilidad, mediante el radio espectral. A pesar de la dificultad técnica que ofrece los sistemas con saltos markovianos, es decir, la aleatoriedad, etc.

- Probamos que los distintos tipos de estabilidad para los sistemas lineales con saltos markovianos expuestos en este trabajo son equivalentes y estos implican la estabilidad casi segura. Esto cumple teniendo en cuenta que el espacio de estados de la cadena de Markov es finita.

- En el caso de sistemas lineales sin saltos se presenta una ecuación de Lyapunov, para el caso de sistemas lineales con saltos markovianos se presentan 4 ecuaciones del tipo Lyapunov.

- Se analiza la estabilidad de los sistemas lineales con saltos markovianos mediante el radio espectral de cierta matriz que contiene toda la información probabílistica de la cadena de Markov y además los paramétros del sistema.

Bibliografía

[1] Yuandong Ji. Chizeck Howard. *Jump Linear Quadratic Gaussian Control: Steady-state Solution and Testable Conditions*, Control-Theory and Advanced Technology, vol. 6 No.3, 1990 pp. 289-319.

[2] Feng Xiangbo. Loparo Kenneth. & Yuandong Ji. Chizeck Howard. *Stochastic Stability properties of Jump Linear Systems*,IEEE Transactions on Automatic Control, vol 37 No.1, 1992 pp. 38-53.

[3] Athreya, Krishna B. *Measure theory and probability theory* Springer, New York, 2010

[4] Costa, Oswaldo Luiz do Valle. *Discrete-time Markov jump linear systems* Springer, London, 2005

[5] Fang, Y. *Stability analysis of linear control systems with uncertain parameters* . Ph.D. Dissertation, Deparment of Systems, Control, and Industrial Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland, OH. Springer, London, 1998.

[6] Rosenbloom, A. Analysis of linear systems with randomly time-varying parameters, *IRE Convention Record* (1955) pp.106.

[7] Bellman, R. Limit theorems for non-commutative operators, *Duke Math*, Vol 21 (1954) pp.491-500.

[8] D.G. Luemberger and A.Arbel . *Singular Dynamic Leontief systems*, Econometrica, vol 45 No.4, 1977 pp.991-995.

[9] Bharucha, B. ,*On the stability of randomly varying systems* . Ph.D. Dissertation, Dept. of Elect. Eng. , Univ. of Calif. , Berkeley, 1961.

[10] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory Design*, Oxford University Press No.3, 1999.

[11] R.W. Newcomb *The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits*, , IEEE Trans. Autom. Control, vol CAS-28 No.1, 1981 pp.62-71.

[12] J. Mills and A. Goldemberg. *Force and Position Control of Manipulator During Constrained Motion Tasks* IEEE Trans. Automat. Control, vol 5, No 1, pp. 30-46 1989.

[13] B. L. Stevens and F.L. Lewis . *Aircraft Modeling, Dynamics and Control*, New York, Wiley 1991.

[14] H. Zhang, W. S. Gray, and O. R. González. *Markov Jump-Linear Performance Models for Recoverable Flight Control Computers*, , IEEE Southeastern Symposium on System Theory, 2004 pp.408-412.

[15] R. Wang, W. S. Gray, O. R. González, and J. R. Chávez-Fuentes, *Tracking Performance of Recoverable Distributed Flight Control Systems Subject to High Intensity Radiated Fields*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol 49, No.1, 2013 pp. 521-542.

[16] I. kats and N. Krasovskii. *On the stability of systems with random parameters*, Jounal of Mathematical Systems, Estimation , and Control, vol 24 No.5, 1960 pp.809-823.

[17] T. Morozan. *Stabilization of some stochastic discrete-time control systems*, Stoch. Anal. Appl, vol 1 No.1, 1983 pp.89-116.

[18] R. Krtolica. *Stability of linear feedback systems with random communication delays*, Proc. 1991 ACC Boston 1991.

[19] F. Kozin. *A survey of stability of stochastic systems* , Automatica, vol 5 No.1, Boston, 1969 pp.95-112.

[20] O. Costa y M. Fragosa. *Stability Results for Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumping Parameters* Journal of Mathematical Analysis and Applications 1993.

[21] FANG. LOPARO. FENG. *Stability of discrete time jump linear systems* Journal of Mathematical Analysis and Applications 1993.

[22] R. HORN AND C. JOHNSON *Matrix Analysis* Cambridge University, New York, 2007.

[23] D. G. LUENBERGER. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models e Applications*, John Wiley e Sons, 1979.

[24] I.OJEDA Y J. GAGO *Métodos matemáticos para estadística* 2008.

[25] MAYTA G. JORGE. *Regularidad y Estabilidad de Sistemas Lineales con Saltos Markovianos en Tiempo Discreto*. Tesis M.S, Dpto. Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú 2015.