

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica



**Análisis del Funcionamiento Síncrono
y Asíncrono de las Máquinas
de Inducción**

T E S I S

Para Optar el Título Profesional de

INGENIERO ELECTRICISTA

VICTOR FIDEL PANDO BELTRAN

Promoción 1983 - I

Lima - Perú

1986

RESUMEN

Título : Análisis del funcionamiento síncrono y asíncrono de las máquinas de inducción

Autor : Víctor Fidel Pando Beltrán

Proyecto para optar el Título Profesional de Ingeniero Electricista

Programa : Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Universidad Nacional de Ingeniería

Ciudad : Lima

Año : 1986

Se hallan las ecuaciones de estado estable en las que se describen el funcionamiento asíncrono y síncrono de una máquina eléctrica de inducción general de $m-n$ fases. Se identifican las condiciones para funcionamiento síncrono en velocidad cero y en una velocidad específica del rotor debido a la interacción entre dos armónicos. Se concluye que todo par de armónicos pertenecientes al mismo grupo de componentes $\alpha - \beta$ produce funcionamiento síncrono e inversamente todo par de armónicos que producen funcionamiento síncrono pertenecen al mismo grupo de componentes $\alpha - \beta$. Esto también confirma que los armónicos de cada grupo de componentes $\alpha - \beta$ no son independientes. Se desarrolla la aplicación en la común máqui-

na de inducción trifásica con rotor jaula de ardilla. Se describe el procedimiento para identificar los armónicos más significativos, a partir del análisis de estado estable, los mismos que son indispensables para obtener una representación razonable con un modelo de bajo orden y su posterior análisis en estado transitorio. Se examinan los efectos de los armónicos de la FMM en estado estable de tres máquinas de inducción jaula de ardilla, que han sido expresamente diseñados para mostrar torques asíncronos y síncronos pronunciados. En la derivación de los parámetros de estas máquinas se han tomado en cuenta el efecto Skin, inclinación de las barras del rotor y la influencia de la abertura de ranura en la FMM. Se presenta tres programas de computación elaborados para resolver las ecuaciones del funcionamiento asíncrono, síncrono en una velocidad específica y síncrono en velocidad cero.

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	1
CAPITULO I: ANTECEDENTES	7
CAPITULO II: PRINCIPIOS Y BASES DEL ESTUDIO	27
CAPITULO III: ECUACIONES DE ESTADO ESTABLE DEL FUNCIONAMIENTO ASINCRONO	32
3.1 Ecuaciones de tensión	32
3.2 Ecuación de torque	41
CAPITULO IV: ECUACIONES DE ESTADO ESTABLE DEL FUNCIONAMIENTO SINCRONO	43
4.1 Funcionamiento síncrono en una veloci- dad específica	43
4.1.1 Ecuaciones de tensión	44
4.1.2 Ecuación de torque	50
4.2 Funcionamiento síncrono en velocidad cero	54
4.2.1 Ecuaciones de tensión	55
4.2.2 Ecuación de torque	60
4.3 Relación entre el funcionamiento sín- cromo y los armónicos en cada compo- nente	64

	Pág.
CAPITULO V: APLICACION DEL ANALISIS DEL FUNCIONAMIENTO ASINCRONO Y SINCRONO EN LA MAQUINA DE INDUCCION CON ROTOR JAULA DE ARDILLA EMPLEANDO TECNICAS COMPUTACIONALES	66
5.1 Cálculo de los parámetros de la máquina de inducción	66
5.1.1 Especificaciones generales	67
5.1.2 Especificaciones del estator	67
5.1.3 Especificaciones del rotor de la máquina I	71
5.1.4 Especificaciones del rotor de la máquina II	71
5.1.5 Especificaciones del rotor de la máquina III	72
5.1.6 Parámetros calculados del estator	73
5.1.7 Parámetros calculados de la máquina I	74
5.1.8 Parámetros calculados de la máquina II	74
5.1.9 Parámetros calculados de la máquina III	74
5.2 Formulación de los algoritmos de solución	75
5.2.1 Selección de armónicos significativos	75
5.2.2 Funcionamiento asíncrono	79
5.2.3 Funcionamiento síncrono	81

	Pág.
5.3 Simulación en una computadora digital	90
5.3.1 Software de solución	90
A. Diagramas de flujo	90
B. Programas	103
C. Subrutinas	101
5.3.2 Hardware requerido	116
5.4 Resultados	116
CONCLUSIONES	150
BIBLIOGRAFIA	152
ANEXOS	153

LISTA DE GRAFICOS

- Fig. 1. Curva torque-velocidad de un motor de inducción ordinario como generalmente se la dibuja.
- Fig. 2. Curva torque-velocidad en la que se muestra una depresión debido al efecto de motor inducción de un armónico.
- Fig. 3. Curva torque-velocidad en la que se muestra rugosidad, en bajas velocidades debido al efecto de motor inducción.
- Fig. 4. Curva torque-velocidad del fundamental, 7mo armónico y la composición de ambas.
- Fig. 5. Diagrama vectorial de los vectores corriente de las N barras del rotor.
- Fig. 6. Diagrama de reemplazo de las barras por bobinas.
- Fig. 7. Diagrama vectorial en la que se relaciona las corrientes de las barras reemplazadas por las corrientes de bobinas.
- Fig. 8. Distribución de la EMM debido a las corrientes en una bobina del rotor
- Fig. 9. Se muestra los N_r componentes del campo m.
- Fig. 10. Curva torque-velocidad en la que se muestra el efecto del motor síncrono.
- Fig. 11. Puntos de prueba en velocidad constante debido al efecto del motor síncrono.

- Fig. 12. Esquema del estroboscopio para verificar la constancia de velocidad debido al efecto de motor síncrono.
- Fig. 13. Representación del efecto de inclinación de las barras en la línea de longitud del torque a velocidad constante.
- Fig. 14. Representación de una máquina de inducción eléctrica general de m - n fases.
- Fig. 15. Dimensiones de una ranura del estator.
- Fig. 16. Esquema de las conexiones de los grupos de bobinas del estator.
- Fig. 17. Esquema lateral del devanado trifásico para un estator de 24 ranuras y 4 polos.
- Fig. 18. Dimensiones de una ranura del rotor de la máquina I.
- Fig. 19. Dimensiones de una ranura del rotor de la máquina II.
- Fig. 20. Dimensiones de una ranura del rotor de la máquina III.
- Fig. 21. Curva torque-velocidad de la máquina debido al armónico fundamental.
- Fig. 22. Curva torque-velocidad de la máquina debido al armónico 5.
- Fig. 23. Curva torque-velocidad de la máquina debido al armónico 7.
- Fig. 24. Curva torque-velocidad de la máquina debido al armónico 11.

- Fig. 25. Curva torque-velocidad de la máquina I debido al armónico 13.
- Fig. 26. Curva torque-velocidad de la máquina I debido a los armónicos 1-11.
- Fig. 27. Curva torque-velocidad de la máquina I debido a los armónicos 1-13.
- Fig. 28. Curva torque-velocidad de la máquina I debido a los armónicos 1-5.
- Fig. 29. Curva torque-velocidad de la máquina I debido a los armónicos 1-7.
- Fig. 30. Curva torque-velocidad total de la máquina I.
- Fig. 31. Magnitud de la corriente del estator de la máquina I.
- Fig. 32. Corriente del rotor de la máquina I debido al armónico fundamental.
- Fig. 33. Corriente del rotor de la máquina I debido al armónico 13.
- Fig. 34. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al armónico fundamental.
- Fig. 35. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al armónico 11.
- Fig. 36. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al armónico 13.
- Fig. 37. Curva torque-velocidad total de la máquina II.
- Fig. 38. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico fundamental.
- Fig. 39. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 11.

- Fig. 40. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 23.
- Fig. 41 Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 5.
- Fig. 42. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 25.
- Fig. 43. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 7.
- Fig. 44. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 13.
- Fig. 45. Curva torque-velocidad total de la máquina III.
- Fig. 46. Curva torque-velocidad de la máquina I debido al efecto de inclinación de las barras.
- Fig. 47. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al efecto de inclinación de las barras.
- Fig. 48. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al efecto de inclinación de las barras.
- Fig. 49. Curva torque-velocidad total de la máquina II sin considerar el efecto de abertura de ranura.
- Fig. 50. Curva torque-velocidad total de la máquina II considerando el efecto skin.

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Armónicos en un rotor de 28 barras.

Tabla 2: Armónicos del estator de 3 fases.

Tabla 3: Armónicos del rotor de la máquina I.

Tabla 4: Armónicos del rotor de la máquina II.

Tabla 5: Armónicos del rotor de la máquina III.

INTRODUCCION

Han pasado más de cincuenta años desde que Gabriel Kron descubrió su teoría de la máquina eléctrica generalizada y mientras en aquel entonces el interés en esto fué despertado lentamente, ahora está firmemente establecido como una herramienta analítica. El tratamiento teórico original aunque completamente desarrollado por Kron, fué dejado por él en un estado algo indigestible. Sin embargo, las interpretaciones dadas por Gibbs, Lynn, White-Woodson y muchos otros han clarificado los resultados de la teoría básica, permitiendo que ahora se pueda trasladar la atención en forma más fructífera hacia la correlación estrecha de la estructura primitiva de Kron con la estructura no ideal de las máquinas prácticas. En este contexto, se puede citar el trabajo de Jones, Carter, Barton-Dunfield y Robinson. Los tres últimos relacionados a las inductancias de las máquinas actuales y su variación con respecto a la saturación y posición del rotor, tópico que resulta pertinente desde que la teoría básica trata de una máquina lineal de entrehierro uniforme y distribución sinusoidal del bobinado.

Las varias bobinas sobre las estructuras magnéticas de una máquina eléctrica produce un campo magnético en

CAPITULO I

ANTECEDENTES

La característica torque-velocidad del motor de inducción clásico es una curva lisa generalmente mostrada como en la Fig. 1.

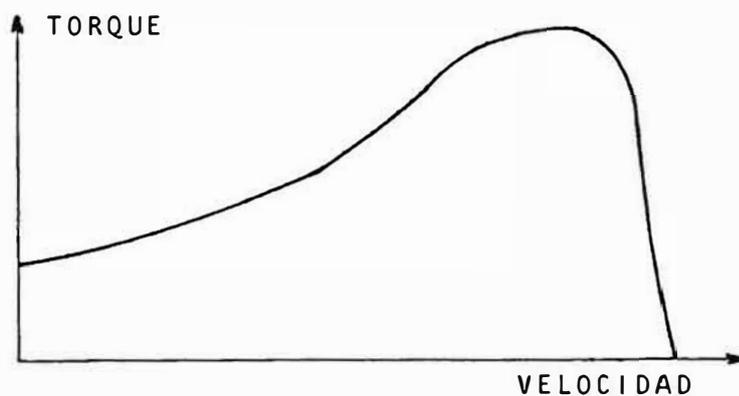


Fig. 1. Curva torque-velocidad de un motor de inducción ordinario como generalmente se la dibu
ja.

Varios investigadores han encontrado que rara vez es la curva lisa como la mostrada en la Fig. 1. En vez de éllo han encontrado curvas más parecidas a la Fig. 2.

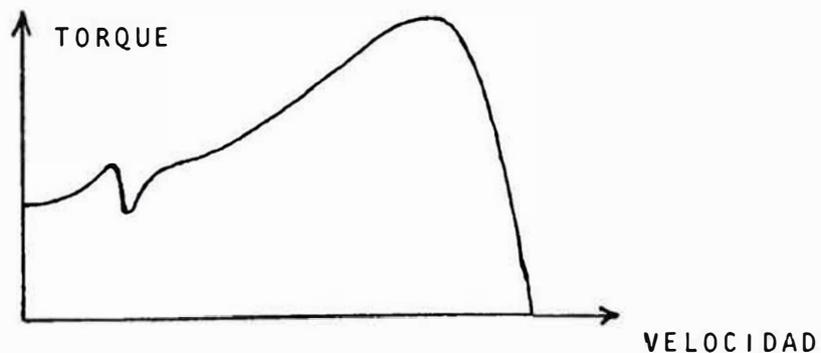


Fig. 2. Curva torque-velocidad en el que se muestra depresiones en velocidades subsíncronas.

el entrehierro de la máquina, este campo magnético se puede analizar en series de armónicos, los que son debidos principalmente a la distribución no sinusoidal de las bobinas y las variaciones de la permanencia en el entrehierro debido a las aberturas en las ranuras. Desde hace mucho tiempo los armónicos espaciales en las ondas de la fuerza magnetomotriz de las máquinas eléctricas son de gran interés para los diseñadores de máquinas eléctricas, puesto que son responsables por causar varios efectos indeseables como vibración, ruido magnético, rizados de tensión armónica, cúspides o depresiones en las curvas torque vs velocidad y pérdidas de carga. Es por esta razón que todo intento que se hace es para minimizarlos.

En el análisis de las máquinas eléctricas de inducción es de gran interés los torques que se presentan ya que definen características de operación de la máquina y tienen influencia directa en el funcionamiento y rendimiento de la misma.

En una máquina de inducción además del torque debido a las componentes fundamentales de los bobinados del estator y el rotor se pueden identificar los torques asíncronos y síncronos debido a los armónicos de la fuerza magnetomotriz.

Frecuentemente estos estudios fueron experimentales acompañados por algunas explicaciones cualitativas de los resultados tal como el efectuado por Dreese. En la mayo

ría de estos primeros estudios se usó la teoría de campo giratorio. Un ejemplo, en la derivación de las ecuaciones de estado estable para la máquina de inducción es el realizado por Alger. Aunque el circuito equivalente propuesto por Alger no incluye el funcionamiento síncrono, no existe método alguno para calcular el torque y corrientes para esta forma de operación. A excepción del trabajo desarrollado por el Dr. Bravo en el que deduce la ecuación de torque electromagnético para máquinas de devanados primarios asimétricos; es decir, considerando toda clase de asimetrías eléctricas y magnético-estatóricas; y las condiciones de velocidad del rotor para que se produzca torque cuando los armónicos del estator y rotor son diferentes. Esta ecuación se deduce en base al método de la conservación de la energía y de los trabajos virtuales. La formulación matemática de una máquina de inducción conteniendo armónicos espaciales usando el método de circuito acoplado, el cual ha sido aplicado satisfactoriamente en el análisis de las máquinas de inducción, y la derivación de los parámetros de circuitos se puede encontrar en el trabajo realizado por Barton - Dunfield.

En conclusión, una revisión en la literatura técnica sobre el análisis de máquinas de inducción conteniendo armónicos espaciales muestra que se han tomado en cuenta una amplia variedad de métodos cada una con alguna limitación propia. Además, no está claro que la in -

teracción de armónicos en la máquina esté bien entendido ni existe un tratamiento completo y coherente sobre el análisis del funcionamiento asíncrono y síncrono que pueda aplicarse al caso general.

Como el objetivo del presente trabajo es la deducción de las ecuaciones de estado estable que describen el funcionamiento asíncrono y síncrono de una máquina eléctrica de inducción general de m - n fases, es necesario definir el torque asíncrono y síncrono que se presentan en dichos funcionamientos.

El torque asíncrono debido a los armónicos tiene el mismo carácter que el torque fundamental es por esta razón que se le domina así. Las fuerzas magnetomotrices giratorias producen flujos armónicos giratorios análogo a la fuerza magnetomotriz fundamental que produce un flujo giratorio. Debido a que el rotor devanado tiene un número fijo de polos es menos sensible a los flujos armónicos, en el caso del rotor jaula, éste ajusta su número de polos a los del flujo giratorios y reacciona a cada flujo armónico igual que a la onda fundamental; de decir, produce una característica completa torque vs velocidad consistente en las tres zonas de funcionamiento (freno-motor-generador). Como la velocidad síncrona es diferente para los diferentes armónicos, se puede pensar que la máquina de inducción resulta ser una composición de máquinas de inducción todas sobre el mismo eje produciendo cada una de ellas una característica completa, torque vs

velocidad, que al sumar sus efectos producen las depresiones (dip). Estas depresiones pueden ser lo suficientemente grandes como para que el torque electromagnético resultante sea menor o igual al torque de carga en cuyo caso la máquina de inducción no podrá alcanzar su velocidad plena.

En resumen, el torque asíncrono es el resultado del acoplamiento en cualquier velocidad del rotor de un armónico del estator y un armónico del rotor que se produce por el mismo armónico del estator. Estos torques asíncronos son similares en naturaleza al torque asíncrono fundamental y las depresiones que se encuentran en las curvas torque vs velocidad se deben a la suma de efectos de los torques asíncronos.

El torque síncrono en una máquina de inducción es el resultado del acoplamiento de un armónico del estator y un armónico del rotor que es generado por otro armónico del estator. Y se presenta en la curva torque vs velocidad en la forma de cúspide. Esta cúspide se produce en valores específicos de velocidad del rotor o en reposo. De forma análoga al torque asíncrono, se puede pensar en la máquina de inducción enlazada con infinitas máquinas síncronas todas sobre el mismo eje, girando en una velocidad específica del rotor o en reposo, que al sumar sus efectos producen las cúspides (cusp); porque el torque síncrono se debe a una serie infinita de pares armónicos del estator y rotor donde el armónico del ro-

tor consigue su excitación de otro armónico del estator en vez de una fuente continua y además cuando ambos armónicos están enlazados con velocidad relativa cero, es precisamente por esto que se le ha bautizado como torque síncrono. En oposición al torque asíncrono que es una función de valor único con respecto a la velocidad, el torque síncrono es una función de valor múltiple.

Todavía investigaciones más cuidadosas revelan que las curvas son de hecho muy rugosas cerca a la velocidad cero y la Fig. 3 representa más aproximadamente el verdadero diagrama de funcionamiento.

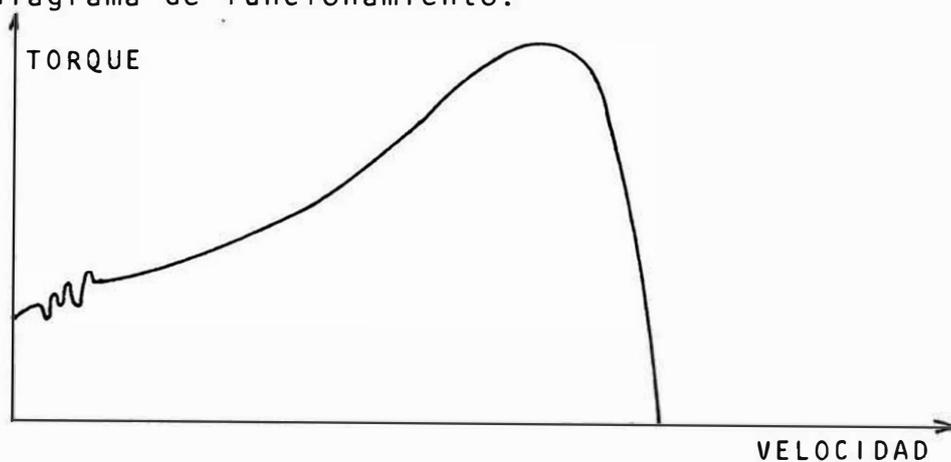


Fig. 3. Curva torque-velocidad en el que se muestra rugosidades encontradas generalmente en bajas velocidades.

Las explicaciones más admitibles anticipadas para estas rugosidades de las curvas se atribuyen a la presencia de armónicos en la onda de flujo de la máquina. Por ejemplo, considere una máquina que tiene un prominente 7mo armónico en su onda de flujo. Este armónico, si es debido al bobinado del estator estará girando en la misma dirección que la fundamental. Por consiguiente, este fenómeno se aclara al considerar que el motor realmente es una composición de dos motores, uno de los cuales tiene a funcionar en la velocidad normal y el otro a $1/7$ de la velocidad normal. Esto puede mostrarse en la Fig. 4.

Esta es una explicación admisible y sin duda la presencia de los armónicos producirá efectos como los mos-

trados en esta figura. Esto también sirve para explicar la rugosidad de las curvas en las velocidades bajas a causa de la presencia de los armónicos de alto orden. A este efecto se le denominó, "efecto del motor de inducción" de los armónicos.

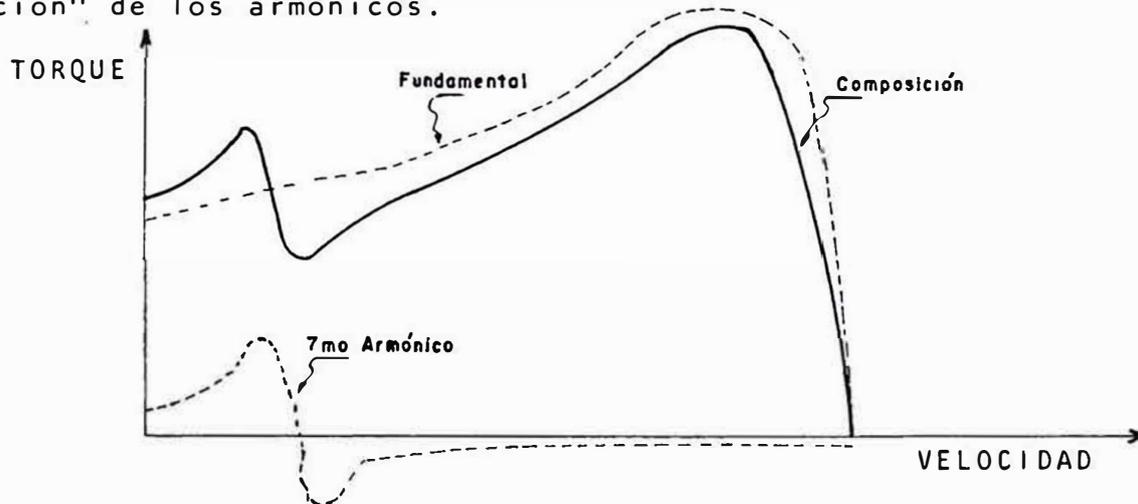


Fig. 4. Curva torque-velocidad del motor fundamental, del 7mo armónico y de la composición de ambos.

En todas las curvas mostradas anteriormente el torque es una función de valor único de la velocidad, pero en algunos casos el torque no es una función de valor único y ninguna de las curvas mostradas anteriormente representa el verdadero estado de funcionamiento.

El trabajo empezó en un motor de inducción jaula de ardilla, con las siguientes características: 3 fases, 4 polos, 28 barras en el rotor y 24 ranuras en el estator. El motor mostró una tendencia a desarrollar torque cero a $1/7$ de la velocidad fundamental. La primera conclusión a que se arribó fue que se debía al "efecto del motor de inducción" del 7mo armónico del estator. Tomando en cuenta ésto, fué confrontada la sensatez de esta suposición

por medio del cálculo matemático de la magnitud del 7mo. armónico en este motor en particular usando los métodos de Fourier. Puesto que estos métodos son bien conocidos se darán únicamente los resultados.

Se encuentra que la magnitud de las fuerzas magnetomotrices está expresado por la siguiente relación:

$$FMM = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\nu} K_{d\nu} K_{p\nu}$$

donde:

ν : armónico

$K_{d\nu}$: factor de distribución del armónico

$K_{p\nu}$: factor de paso del armónico

Para el caso ideal en el que $K_{d\nu} = 1, K_{p\nu} = 1$; las magnitudes relativas de las fuerzas magnetomotrices del fundamental y 7mo. armónico son:

Fundamental	7mo. armónico
1	$1/7 = 0.143$

Para el caso de bobinado de 2 ranuras por polo y fase se $K_{d1} = 0.9659, K_{d7} = 0.2588$; las magnitudes relativas de las fuerzas magnetomotrices del fundamental y 7mo. armónico son:

Fundamental	7mo. armónico
1	0.038

Para el caso de bobinado de paso recortado a 150 grados eléctricos $K_{d1} = K_{p1} = 0.9659, K_{d7} = K_{p7} = 0.2588$;

las magnitudes relativas de la fuerza magnetomotriz tal como existía en el estator, son:

Fundamental	7mo. armónico
1	0.010

Como resultado de este cálculo, no parecía razonable asumir que un 7mo. armónico con 1% de la magnitud fundamental y girando a $1/7$ de la velocidad fundamental pudiera producir suficiente torque por efecto del motor de inducción como para vencer al torque fundamental a $1/7$ de la velocidad fundamental.

Por consiguiente, la atención fué dirigida hacia el análisis matemático de los armónicos del rotor.

Para ello considerar un rotor jaula de ardilla de N barras las que están energizadas por un campo giratorio sinusoidal de P polos. Las corriente en las barras por lo tanto estarán desfasadas en P (π/N) radianes y el diagrama vectorial de corrientes será como se muestra en la Fig. 5, en la que I_1 , I_2 e I_3 designan las corrientes en las barras 1, 2 y 3 respectivamente.

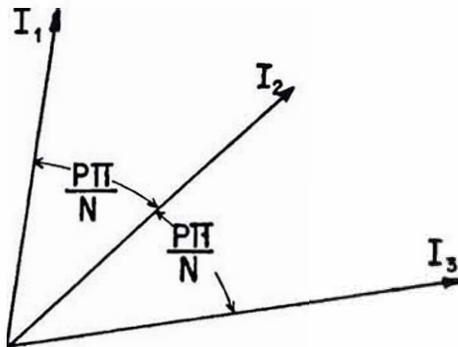


Fig. 5. Diagramas vectorial de corrientes de las N barras.

Por propósitos de análisis se reemplaza el sistema de barras por N bobinas de una sola vuelta espaciadas con un paso de ranura del rotor. Donde las corrientes en las bobinas son i_1 , i_2 e i_3 respectivamente tal como se muestra en la Fig. 6

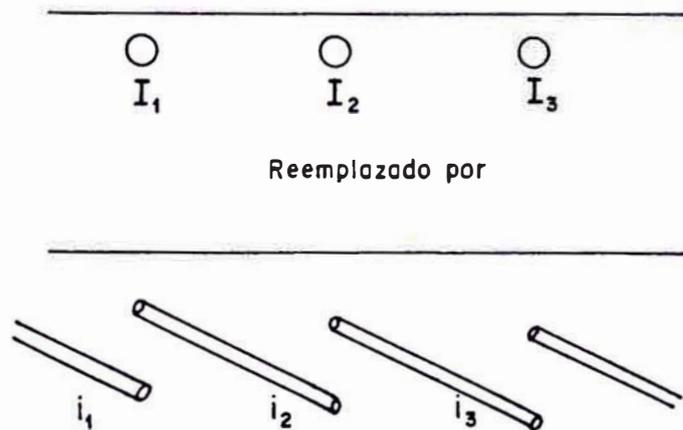


Fig. 6. Se muestra el reemplazo de las barras del rotor por las bobinas.

Las relaciones vectoriales que se establecen entre las barras y bobinas se muestran en la fig. 7.

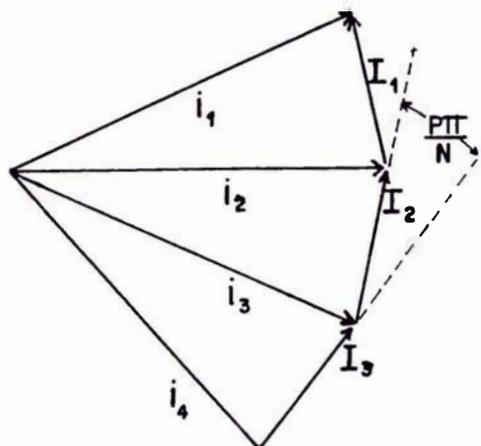


Fig. 7. Diagrama vectorial que establece la relación entre el sistema de barras y bobinas

Se puede ver que las N barras que tienen corrientes de magnitud I y desfasadas en $P(\pi/N)$ radianes pue

den reemplazarse por un rotor de N bobinas de una vuelta con corrientes de magnitud i y desfasadas en $P (\pi/N)$ radianes; dado que:

$$I = 2 i \operatorname{Sen} \left(\frac{P \pi}{2 N} \right)$$

Ahora es necesario determinar las ondas de fuerza magnetomotriz de este sistema de N bobinas separadas en el espacio por $(2\pi/N)$ radianes y con corrientes desfasadas en $(P \pi/N)$ radianes en el tiempo.

Primero se encontrará la fuerza magnetomotriz de una de estas bobinas. La forma de onda de la fuerza magnetomotriz en una bobina debido a una corriente instantánea i se muestra en la Fig. 8.

Esta forma de onda se puede expresar como series trigonométricas:

$$H = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \theta + b_2 \cos 2\theta + \dots + b_m \cos m\theta + \dots$$

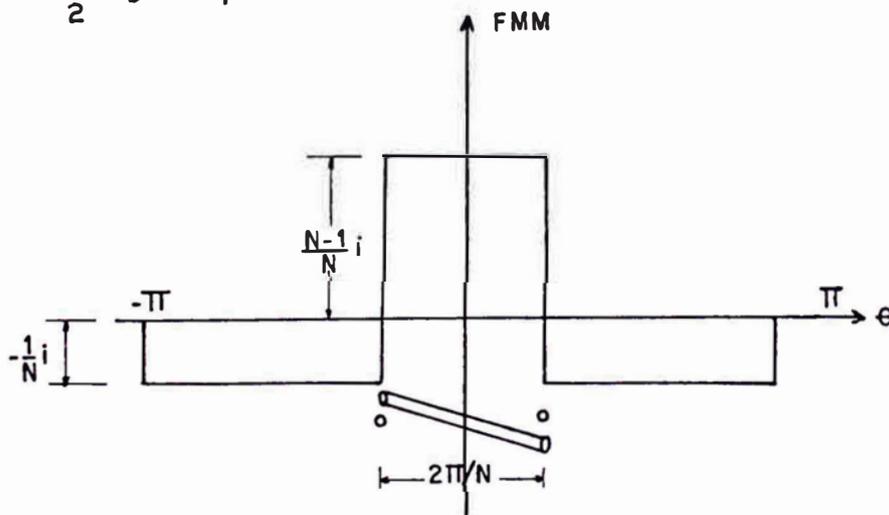


Fig. 8. Distribución de la fuerza magnetomotriz debido a las corrientes en una bobina del rotor.

Por tratarse de una función par y simétrica con res

pecto al tiempo, la función contiene sólo términos cose-
no y además el término constante b_0 es cero. Siendo m a
cualquier entero positivo y a partir del método de Fourier:

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{N}} \left(\frac{N-1}{N} i \cos m\theta \right) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi} \left(-\frac{1}{N} i \cos m\theta \right) d\theta$$

De donde:

$$b_m = \frac{2i}{m\pi} \operatorname{Sen} \left(\frac{m\pi}{N} \right)$$

Si la fuerza magnetomotriz de la bobina 1 se denota
como H_1 , en la cual la corriente i es el valor instantá-
neo de i_1 ; es decir:

$$i = \sqrt{2} i_1 \cos \omega t \quad (\text{aquí } i_1 \text{ es la magnitud solamente})$$

$$H_1 = \sum b_m \cos m\theta$$

$$H_1 = \sum \frac{2\sqrt{2} i_1}{m\pi} \operatorname{Sen} \left(\frac{m\pi}{N} \right) \cos m\theta \cos \omega t$$

$$H_1 = \sum \frac{2\sqrt{2} i_1}{m\pi} \operatorname{Sen} \left(\frac{m\pi}{N} \right) \left[\frac{1}{2} \cos(m\theta - \omega t) + \frac{1}{2} \cos(m\theta + \omega t) \right]$$

De modo que cada bobina produce ondas viajeras en
uno y otro sentido puesto que las expresiones del tipo:
 $\cos(m\theta - \omega t)$ representan ondas viajeras de $2m$ polos.

Las ondas del tipo $\cos(m\theta - \omega t)$ se denominan gira-
torias hacia adelante y las del tipo $\cos(m\theta + \omega t)$ se de-
nominan giratorias hacia atrás. De igual manera, la on-
da de fuerza magnetomotriz de la segunda y subsiguientes
bobinas serán:

$$H_2 = \sum \frac{2\sqrt{2} i_2}{m\pi} \text{Sen}\left(\frac{m\pi}{N}\right) \left[\frac{1}{2} \text{Cos}\left(m\theta - \omega t + \frac{2\pi}{N} m - p \frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{2} \text{Cos}\left(m\theta + \omega t + \frac{2\pi}{N} + p \frac{\pi}{N}\right) \right]$$

$$H_3 = \sum \frac{2\sqrt{2} i_3}{m\pi} \text{Sen}\left(\frac{m\pi}{N}\right) \left[\frac{1}{2} \text{Cos}\left(m\theta - \omega t + \frac{4\pi}{N} m - 2p \frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{2} \text{Cos}\left(m\theta + \omega t + \frac{4\pi}{N} m + 2p \frac{\pi}{N}\right) \right]$$

Considerando que las bobinas están separadas en $2\pi/N$ radianes con corrientes desfasadas en $p\pi/N$ radianes

Para obtener el campo resultante se superpone las fuerzas magnetomotrices desde H_1 hasta H_N . de modo que el campo giratorio de $2m$ polos consiste de N campos superpuestos de igual magnitud ya que:

$$i_1 = i_2 = i_4 = \dots = i_n$$

Los N campos giratorios hacia adelante de igual magnitud están desfasadas en:

$$\left(\frac{2\pi m}{N} - p \frac{\pi}{N}\right) \text{ radianes}$$

El ángulo total para los N campos vectoriales es:

$$N \left(\frac{2\pi m}{N} - p \frac{\pi}{N}\right) = 2\pi m - p\pi$$

Como m siempre es un entero y p siempre es un número par, los vectores siempre están extendidos a través de un número entero de revoluciones completas y la suma por lo tanto es cero con una excepción.

Esta excepción es cuando:

$$\frac{2\pi m}{N} - p \frac{\pi}{N} = 2k\pi$$

donde K es cualquier entero positivo o negativo incluyendo el cero. De donde la fuerza magnetomotriz giratoria de $2m$ polos se producen por el rotor si:

$$2m = 2KN + p \quad (A)$$

De forma análoga la fuerza magnetomotriz hacia atrás forman vectores cuyos campos están separados por:

$$\left(\frac{2\pi m}{N} + p \frac{\pi}{N} \right) \quad \text{radianes}$$

y de igual forma, después de la superposición todos estos campos giratorios hacia atrás desaparecen excepto aquellos para los cuales:

$$2m = 2KN - p \quad (B)$$

La magnitud del armónico del rotor de $2m$ polos es:

$$H_m = N \left(\frac{2\sqrt{2}i}{m\pi} \text{Sen} \left(\frac{m\pi}{N} \right) \left[\frac{1}{2} \text{Cos}(m\theta - \omega t) + \frac{1}{2} \text{Cos}(m\theta + \omega t) \right] \right) \quad (C)$$

dado que en el resultado aparecen solamente los campos que están en fase en las N componentes.

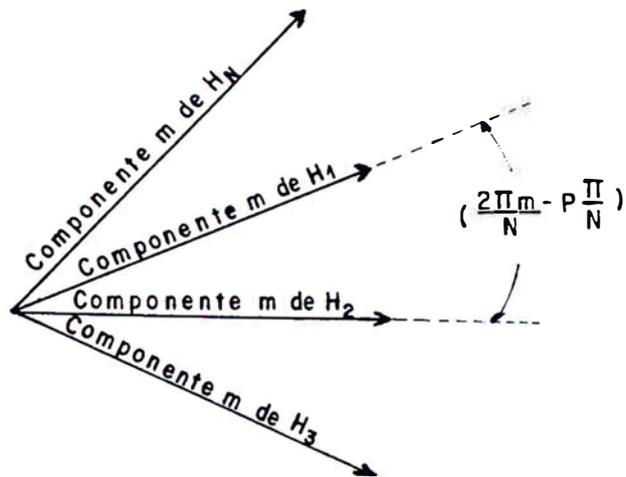


Fig. 9. Representación de los N componentes del campo m.

Considerando nuevamente el rotor de 28 ranuras, se puede elaborar una tabla en la que se muestra el número de polos armónicos de las fuerzas magnetomotrices tanto del estator como del rotor. Para el caso presente de 3 fases, 4 polos, p puede ser 4, 20, 28, 44, 52, etc. para los armónicos fundamental, quinto, séptimo, onceavo y treceavo respectivamente. Y sustituyendo varios valores para K, en las fórmulas A y B, se pueden encontrar los diferentes polos armónicos del rotor. Estos se muestran en la Tabla I.

ARM.	1		5		7		11		13		17	
P	4		20		28		44		52		68	
	AD	AT	AD.	AT	AD.	AT.	AD.	AT.	AD.	AT	AD.	AT
	4	52	20	36	28	28	44	12	52	4	68	44
	60	108	76	92	84	84	100	68	108	60	124	100
	116	164	132	148	140	140	156	114	164	116	180	156

ARM = ARMONICO
P = POLOS DEL ESTATOR
AD. = ADELANTE
AT. = ATRAS

Tabla I. Armónicos para un rotor de 28 ranuras.

De la tabla se puede advertir que el campo del estator de 4 polos actuando sobre las 28 ranuras del rotor produce un armónico giratorio de 52 polos del tipo hacia atrás. Está también presente en el estator un treceavo armónico giratorio del tipo hacia adelante de 52 polos. Naturalmente, surge la pregunta para saber como reaccionan uno sobre el otro estos campos independientes de 52 polos.

Fué solo un paso el considerar el campo del rotor de 52 polos como el campo giratorio de una máquina síncrona que consigue su excitación del flujo fundamental del estator en vez de una fuente de tensión continua.

El siguiente paso natural fué encontrar a qué velocidad del rotor estos campos de 52 polos tenían velocidad relativa cero, ésto es, a qué velocidad estos campos interaccionantes de 52 polos están enlazados. La ecuación C muestra que el campo de $2m$ polos gira a una velocidad angular relativa (w/m) con respecto al rotor. Donde: $w = 2 \pi$ (frecuencia del rotor).

Ahora (w/m) será positivo o negativo de acuerdo con que el campo $2m$ está girando hacia adelante o hacia atrás con respecto al rotor.

Para encontrar la velocidad del rotor en la que los campos de 52 polos se entrelazarán, el procedimiento es:

Hagamos que S sea la velocidad síncrona del flujo

fundamental de 4 polos del estator relativo al estator y n la velocidad del rotor relativo al estator. Luego:

$S/13$: velocidad del armónico de 52 polos del estator relativo al estator

$S-n$: velocidad del flujo fundamental del estator relativo al rotor, también representa la velocidad del flujo fundamental del rotor relativo al rotor.

$-(S-n)/13$: velocidad del armónico de 52 polos del rotor relativo al rotor.

$-\frac{(S-n)}{13} + n$: velocidad del armónico de 52 polos del rotor relativo al estator

Ahora si igualamos las velocidades de los campos de 52 polos:

$$\frac{S}{13} = -\frac{(S-n)}{13} + n$$

$$\frac{n}{S} = \frac{1}{7}$$

Los dos armónicos treceavos se enlazan a $1/7$ de la velocidad, lo que concuerda con el efecto observado en el rotor de 28 ranuras, 4 polos. Como este efecto difiere de las explicaciones publicadas anteriormente se le denominará un "efecto de motor síncrono" sobre la operación normal de un motor de inducción.

Con este nuevo resultado, se decidió deducir la curva torque-velocidad del motor cuidadosamente con un dinamómetro. La velocidad fué leída con un tacómetro con una precisión de 5 revoluciones por minuto.

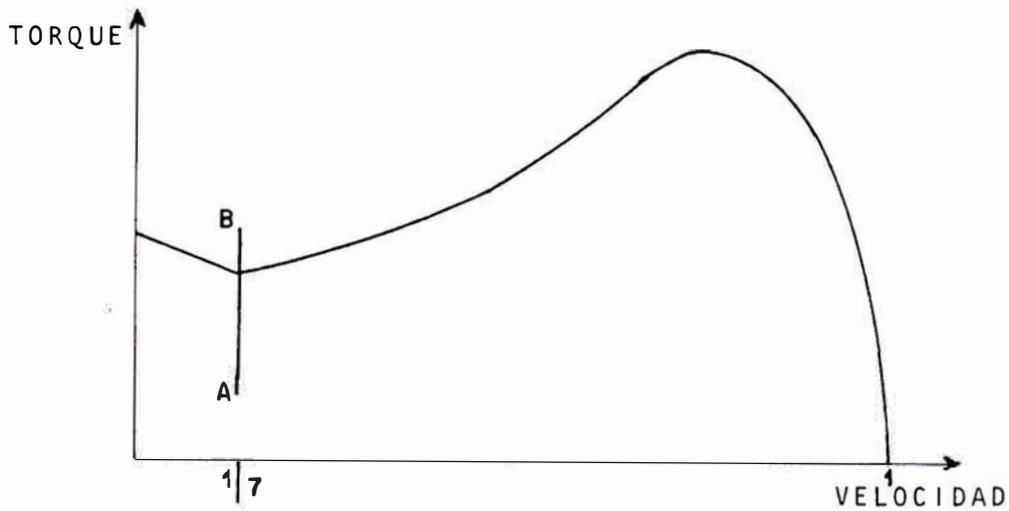


Fig. 10. Curva torque-velocidad debido al efecto del motor síncrono.

Dentro de los límites de precisión del tacómetro existía un efecto de motor síncrono. En la Fig. 11 se muestran algunos puntos representativos en la vecindad de 1/7 de la velocidad (257 RPM).

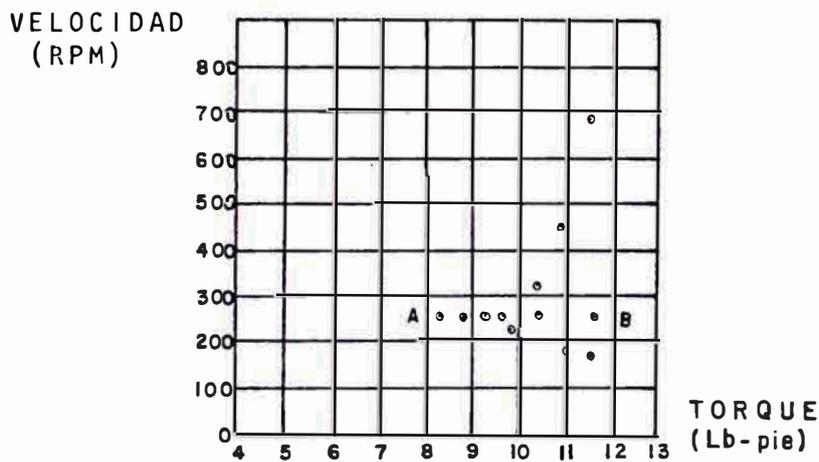


Fig. 11. Puntos de prueba a velocidad constante debido al efecto del motor síncrono.

Donde aparece que es posible variar el torque en un 32 por ciento a 257 RPM sin cambiar la velocidad. Para tener una certeza del resultado obtenido, al eje del mo-

tor se le adoptó un disco estroboscópico con 7 marcas espaciadas a igual distancia alrededor de una circunferencia. Esto se veía a través de otro disco con una ranura girando como para dar 1800 exposiciones por minuto.

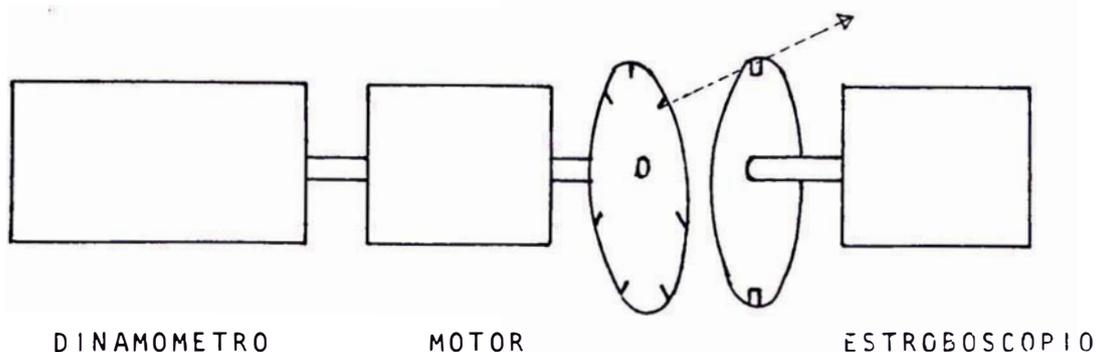


Fig. 12. Estroboscopio instalado para comprobar la constancia de la velocidad con el efecto del motor síncrono.

Con el estroboscopio la porción aplanada de la curva torque-velocidad se verificó que es absolutamente aplanada. El motor funcionaba como un motor síncrono superpuesto al de un motor de inducción. El único efecto en la imagen estacionaria del disco de 7 puntos era que en cuanto la carga variaba, se observó un ligero cambio en el ángulo de acoplamiento, como en un motor síncrono. A medida que el torque se aproximaba a los puntos A y B de la Fig. 10, el rotor vibraba erráticamente y luego perdía sincronismo. De esta forma se estableció definitivamente la prueba de la existencia del efecto del motor síncrono.

Una prueba total en el trabajo matemático demostró que no solamente eran los armónicos treceavos enlazados

sino una serie infinita de armónicos estaban enlazados a 1/7 de la velocidad. Para demostrar esto se parte de las fórmulas A y B. Un breve examen revela que la expresión:

$$2m = 2KN + p$$

cubrirá las ecuaciones A y B; si además se estipula que valores negativos de m denota rotación negativa. Es necesario, sin embargo que esta nueva convención satisfaga la ecuación C. Vemos que la ecuación C se satisface desde que el término en Seno no cambia por un cambio en el signo de m . El único cambio es en la dirección de rotación como se puede verificar en el término Coseno.

Sea C el armónico del estator el cual está actuando sobre el rotor. Si C es negativo esto indica que gira en sentido contrario. Ahora:

$$2m = 2KN + Cp$$

Si C_1 es cualquier otro armónico del rotor con el cual $2m$ enlaza, entonces:

$$2m = \pm C_1 p$$
$$\pm C_1 p = 2KN + Cp$$

$$\pm C_1 - C = \frac{2KN}{p}$$

Si cualquier par de armónicos del estator pueden satisfacer la ecuación D existirán armónicos del estator y rotor con el mismo número de polos. Otra condición necesaria para que se produzca el efecto del motor síncrono

es que las velocidades relativas de los campos equipolares del estator y rotor sea cero.

S/C : velocidad de C relativa al estator

$S/C-n$: velocidad de C relativa al rotor

Ahora, si $2m = 2KN + C_p$, la velocidad de $2m$ relativa al rotor es:

$$\left(\frac{S}{C} - n\right) \frac{C_p}{2m} = \left(\frac{S}{C} - n\right) \frac{C_p}{2KN + C_p}$$

$(S/C_1)-n$: velocidad de C_1 relativa al rotor.

Igualando estas velocidades:

$$\frac{S}{C_1} - n = \left(\frac{S}{C} - n\right) \frac{C_p}{2KN + C_p}$$

$$\frac{S}{C_1} - n = \left(\frac{S}{C} - n\right) \frac{C_p}{\pm C_1 p} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{S}{C_1} - n = \frac{S - nC}{\pm C_1}$$

Usando el signo (+):

$$-n = -n \frac{C}{C_1}$$

De donde $C=C_1$. Esto da el efecto de motor de inducción. Usando el signo (-):

$$2 \frac{S}{C_1} = n \left(-\frac{C}{C_1} + 1 \right)$$

$$\frac{n}{S} = \frac{2}{C + C_1} \quad (E)$$

Esto da el efecto de motor síncrono y por lo tanto:

$$C + C_1 = - \frac{2KN}{P} \quad (F)$$

Si los armónicos del estator satisfacen F existirá

un efecto de motor síncrono a una velocidad dada por E . Habrá tantos efectos de motor síncrono a la misma velocidad como pares de valores C y C_1 satisfagan F . El número es infinito. Como un ejemplo, para el caso que consideramos aquí. Los pares de valores ya tomados en cuenta fueron:

$$C = 1 \text{ y } C_1 = 13$$

Otros pares son:

C	13	19	25	31	37	... etc.
C_1	1	-5	-11	-17	-23	... etc.

Así vemos que existe una serie infinita de números de polos enlazados. Los miembros de estas series son: 4, 20, 44, 56, 68, ..., etc. polos y todos ellos enlazados sincrónicamente a $1/7$ de la velocidad.

Este descubrimiento origina un cambio de punto de vista en vez de considerar la operación de un motor síncrono superpuesto al motor normal de inducción, ahora es necesario considerar el efecto como debido a una serie de motores síncronos superpuestos al motor normal de inducción, teniendo todos estos motores la misma velocidad síncrona. Se puede mejorar la comprensión de este fenómeno al considerar un motor de inducción y un número infinito de motores síncronos conectados al mismo eje.

Hasta este punto los experimentos realizados han si

do con el uso de un rotor de barras inclinadas. A continuación se trató con varios rotores de diferentes inclinaciones y se encontró que la longitud de la porción síncrona de las curvas torque-velocidad eran muy sensitivas con respecto a la inclinación de las barras. Por consiguiente, se decidió experimentar con un rotor construido de manera que la desviación de las barras pudiera variarse, para establecer definitivamente si el efecto de motor síncrono era debido a un par de armónicos o a una pluralidad de pares.

Esto se puede demostrar por una pequeña consideración de la naturaleza de la inclinación. Si un rotor fuera desviado a través de un paso completo de dos polos no habría tensión generada en la varilla y como consecuencia el rotor actuaría como si no hubiera ningún bobinado para ese paso particular de polo. De manera análoga se puede eliminar cualquier armónico particular por el simple expediente de inclinar la barra del rotor a través de dos (o cualquier múltiplo de dos) polos de ese armónico. Suponga, por ejemplo, que el rotor fuera inclinado para eliminar el treceavo armónico. Es obvio que en esta condición ningún torque pueda ser ejercido entre los dos campos, porque no pueden entrelazarse.

Así con el rotor con inclinación variable, solamente era necesario dibujar la longitud de la porción síncrona A-B de la curva torque-velocidad vs inclinación.

CAPITULO II

PRINCIPIOS Y BASES DEL ESTUDIO

Aquí, desde el punto de vista de circuito acoplado, se hallan las ecuaciones de tensión y torque para operación de estado estable, sinusoidal y balanceado de una máquina eléctrica de inducción. Esto significa que:

- estado estable, es decir:

$$\theta_r = \omega_r t + \theta_0$$

con $\omega_r = \text{constante}$.

- balanceada, es decir que en magnitud:

$$i_1^s = \dots = i_i^s = \dots = i_m^s$$

$$V_1^s = \dots = V_i^s = \dots = V_m^s$$

$$i_1^r = \dots = i_k^r = \dots = i_n^r$$

- sinusoidal, es decir:

$$V_i^s = \sqrt{2} V^s \cos(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})$$

$$i_i^s = \sqrt{2} I^s \cos(\omega t + \phi^s - (i-1) \frac{2\pi}{m})$$

$$i_k^r = \sum \sqrt{2} I_v^r \cos((\omega - \nu P \omega_r) t + \phi_v^r - (k-1) \nu P \frac{2\pi}{n})$$

Se asume que la máquina se alimenta desde una fuente ideal de tensión balanceada. Además se considera una

máquina general de $m-n$ fases con las siguientes suposiciones:

1. Saturación despreciable
2. Entrehierro uniforme
3. m fases estatóricas idénticas y uniformemente distribuidas
4. n fases rotóricas (barras o bobinados) idénticos y uniformemente distribuidas.

Para mantener cierto tratamiento generalizado se considerará una máquina de inducción de jaula de ardilla, con m fases en el estator y n barras en el rotor. Como no es necesario introducir el concepto de período básico, P y n son los números originales de pares de polo y de barras de rotor respectivamente.

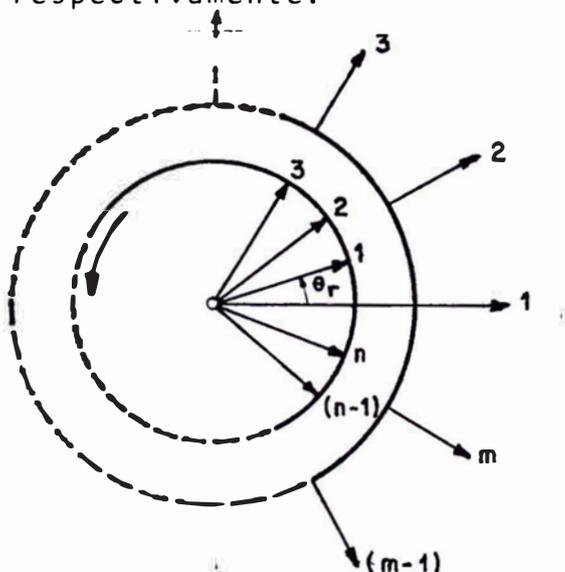


Fig. 14. Representación de una máquina eléctrica de inducción de $m-n$ fases

Las ecuaciones de tensión para las m fases del estator y los n circuitos o fases del rotor son:

$$[V^s] = (R^s + p[L^s]) [I^s] + p[L^{sr}] [I^r]$$

$$[V^r] = p[L^{sr}]^t [I^s] + ([R^r] + p[L^r]) [I^r]$$

La expresión del torque para una máquina de entrehierro uniforme es:

$$T_e = [I^s]^t \frac{\partial}{\partial \theta_r} [L^{sr}] [I^r]$$

Y las expresiones de equilibrio eléctrico para una fase del estator y rotor son:

$$V_i^s = (R^s + p \sum_{i=1}^m L_i^s) i_i^s + p \sum_{k=1}^n L_{ik}^{sr} i_k^r \quad (1)$$

$$0 = p \sum_{i=1}^m L_{ik}^{sr} i_i^s + (\sum_{k=1}^n R_k + p \sum_{k=1}^n L_k^r) i_k^r \quad (2)$$

$$T_e = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n i_i^s \frac{\partial L_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} i_k^r \quad (3)$$

Del trabajo desarrollado por Moreno, en la que hay una explicación de la transformación polifásica a $\alpha - \beta - 0$ y el Anexo correspondiente a la deducción de las expresiones de inductancia se encuentra que:

$$\sum_{i=1}^m L_i^s = L_\nu^{\alpha\beta s} = L_1^s + \frac{m}{2} \mu_0 \frac{r_l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{p}\right)^2 \left(\frac{K_\nu}{\nu}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^n R_k^r = R_\nu^{\alpha\beta r} = 2R_a + 4R_b \text{Sen}^2\left(\nu \frac{p\pi}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n L_k^r = L_\nu^{\alpha\beta r} = \left(2L_a + 4L_b \text{Sen}^2\left(\nu \frac{p\pi}{n}\right)\right) + \frac{n}{2} \mu_0 \frac{r_l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{N}{p^2} \frac{\text{Sen}^2\left(\nu \frac{p\pi}{n}\right)}{\nu^2}$$

$$L_{ik}^{sr} = L_{ki}^{rs} = \sum_{\nu} L_\nu^{sr} \text{Cos } \nu P \theta$$

$$L_\nu^{sr} = \mu_0 \frac{r_l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{N}{p^2} \frac{K_\nu}{\nu^2} \text{Sen}\left(\nu \frac{p\pi}{n}\right)$$

$$\nu P \theta = \nu P \omega_r t + \nu P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) \nu P \frac{2\pi}{n}$$

El tratamiento que se dará en la deducción de las expresiones se basará en la teoría de los números complejos; se ha comprobado a través de muchos textos matemáticos que la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales y la teoría de las operaciones con las matrices se generaliza sin restricciones al caso en que se permite el uso de los números complejos, más conocido dentro del campo de la ingeniería eléctrica como fasores y más específicamente en la notación desarrollada por el genial matemático Euler a través de su ecuación. Sea:

$$\alpha = a + j b$$

$$\alpha = r \cos \phi + j (r \operatorname{Sen} \phi)$$

Ecuación de Euler:

$$\alpha = r e^{j \phi}$$

De donde las formas fasoriales de las tensiones sinusoidales del estator v_i^s , corrientes del estator i_i^s , y corrientes del rotor i_k^r son:

$$\begin{aligned} v_i^s &= \sqrt{2} v^s \cos(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m}) \\ v_i^s &= \operatorname{Re}(\sqrt{2} v^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) \\ v_i^s &= \operatorname{Re}(\sqrt{2} \tilde{v}^s e^{j\omega t} e^{-j(i-1) \frac{2\pi}{m}}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} i_i^s &= \sqrt{2} I^s \cos(\omega t + \phi^s - (i-1) \frac{2\pi}{m}) \\ i_i^s &= \operatorname{Re}(\sqrt{2} I^s e^{j\phi^s} e^{j\omega t} e^{-j(i-1) \frac{2\pi}{m}}) \\ i_i^s &= \operatorname{Re}(\sqrt{2} \tilde{I}^s e^{j\omega t} e^{-j(i-1) \frac{2\pi}{m}}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} i_k^r &= \sum_{\nu} \sqrt{2} I_{\nu}^r \cos((\omega - \nu P \omega_r) t + \phi_{\nu}^r - (k-1) \nu P \frac{2\pi}{n}) \\ i_k^r &= \sum_{\nu} \operatorname{Re}(\sqrt{2} I_{\nu}^r e^{j\phi_{\nu}^r} e^{j(\omega - \nu P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu P \frac{2\pi}{n}}) \\ i_k^r &= \sum_{\nu} \operatorname{Re}(\sqrt{2} \tilde{I}_{\nu}^r e^{j(\omega - \nu P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu P \frac{2\pi}{n}}) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\tilde{V}^s &= V^s e^{j0} \\ \tilde{I}^s &= I^s e^{j\phi^s} \\ \tilde{I}_\nu^r &= I_\nu^r e^{j\phi_\nu^r}\end{aligned}$$

- ω : frecuencia de alimentación del estator
- ω_r : velocidad del rotor

Las corrientes del estator inducen tensiones de orden ν , donde:

$$\nu = km \pm 1 > 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

o alternativamente

$$\nu = km + 1 \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \quad (8)$$

Estas dos últimas expresiones son equivalentes. La expresión (8) produce armónicos de valor negativo, de las cuales se pueden indicar que producen campos giratorios negativos. Se observa que las tensiones armónicas de orden $\nu = k \frac{n}{p}$ ($k = 1, 2 \dots$) no existen ya que L_ν^{sr} es igual a cero para este orden de armónico.

CAPITULO III

ECUACIONES DE ESTADO ESTABLE DEL FUNCIONAMIENTO ASINCRONO

3.1 Ecuaciones de tensión

Las ecuaciones de tensión fasorial de estado estable para una máquina eléctrica de inducción de m fases en el estator y n circuitos o fases del rotor se obtienen empleando las ecuaciones (4), (5) y (6) y reemplazándolas en las ecuaciones (1) y (2).

Desarrollando la ecuación del estator:

$$\operatorname{Re}(\sqrt{2} \tilde{v}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) = (R^s + pL_v^{\alpha\beta s}) \operatorname{Re}(\sqrt{2} \tilde{i}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) + p \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(\sum_{\nu} L_{\nu}^{sr} e^{j\nu p \theta}) \operatorname{Re}(\sum_{\nu} \tilde{i}_{\nu}^r e^{j(\omega - \nu p \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu p \frac{2\pi}{n}})$$

Efectuando el cambio del dominio de tiempo al dominio de frecuencia, el operador p para la ecuación del estator resulta ser $p = j\omega$; reemplazando:

$$\operatorname{Re}(\tilde{v}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) = (R^s + j\omega L_v^{\alpha\beta s}) \operatorname{Re}(\tilde{i}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) + j\omega \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(\sum_{\nu} L_{\nu}^{sr} e^{j\nu p \theta}) \operatorname{Re}(\sum_{\nu} \tilde{i}_{\nu}^r e^{j(\omega - \nu p \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu p \frac{2\pi}{n}})$$

Tomando los armónicos comunes y haciendo uso de la propiedad A1.2, en el segundo término:

$$\operatorname{Re}(\tilde{v}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) = (R^s + j\omega L_v^{\alpha\beta s}) \operatorname{Re}(\tilde{i}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) + j\omega \sum_{\nu} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(L_{\nu}^{sr} \tilde{i}_{\nu}^r (\sum_{k=1}^n e^{j(2\nu p \omega_r t + \nu p \theta_0 - (i-1)\frac{2\pi}{m} + 2(k-1)\nu p \frac{2\pi}{n} - \omega t)}) + \sum_{k=1}^n e^{j(\nu p \theta_0 + \omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

Como el último término es independiente de k, tenemos:

$$\text{Re}(\tilde{V}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) = (R^s + j\omega L_\nu^{\alpha\beta s}) \text{Re}(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) + \sum_\nu j\omega \frac{n}{2} L_\nu^{sr} \text{Re}(\tilde{I}_\nu^r e^{j\nu P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

Retirando el operador Re a toda la ecuación y simplificando:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_\nu^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + \sum j\omega \frac{n}{2} L_\nu^{sr} \tilde{I}_\nu^r e^{j\nu P \theta_0} \quad (9)$$

Desarrollando la ecuación del rotor para el armónico de orden v:

$$0 = (R_\nu^{\alpha\beta r} + p L_\nu^{\alpha\beta r}) \text{Re}(\sqrt{2} \tilde{I}_\nu^r e^{j(\omega - \nu P \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu P \frac{2\pi}{n}}) + p \sum_{i=1}^m \text{Re}(L_\nu^{sr} e^{j\nu P \theta_0}) \text{Re}(\sqrt{2} \tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

El operador p para la ecuación del rotor resulta ser:

$$p = j\omega^r = j(\omega - \nu P \omega_r); \text{ reemplazando:}$$

$$0 = (R_\nu^{\alpha\beta r} + j(\omega - \nu P \omega_r) L_\nu^{\alpha\beta r}) \text{Re}(\tilde{I}_\nu^r e^{j(\omega - \nu P \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu P \frac{2\pi}{n}}) + j(\omega - \nu P \omega_r) \sum_{i=1}^m \text{Re}(L_\nu^{sr} e^{j\nu P \theta_0}) \text{Re}(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

Haciendo uso de la propiedad A1.2:

$$0 = (R_\nu^{\alpha\beta r} + j(\omega - \nu P \omega_r) L_\nu^{\alpha\beta r}) \text{Re}(\tilde{I}_\nu^r e^{j(\omega - \nu P \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu P \frac{2\pi}{n}}) + j(\omega - \nu P \omega_r) \frac{1}{2} \text{Re}(L_\nu^{sr} \tilde{I}^s (\sum_{i=1}^m e^{j(\nu P \omega_r t + \nu P \theta_0 - 2(i-1)\frac{2\pi}{m} + (k-1)\nu P \frac{2\pi}{n} + \omega t)}) + \sum_{i=1}^m e^{j(\nu P \omega_r t + \nu P \theta_0 + (k-1)\nu P \frac{2\pi}{n} - \omega t)})$$

Como el último término es independiente de i , y haciendo uso de la propiedad A1.6, tenemos:

$$0 = (R_{\nu}^{\alpha\beta r} + j(\omega - \nu P \omega_r) L_{\nu}^{\alpha\beta r}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu}^r e^{j((\omega - \nu P \omega_r)t - (k-1)\nu P \frac{2\pi}{n})}) + j(\omega - \nu P \omega_r) \frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu}^{sr} \tilde{I}^s e^{-j\nu P \theta_0} e^{j((\omega - \nu P \omega_r)t - (k-1)\nu P \frac{2\pi}{n})})$$

Retirando el operador Re y simplificando:

$$0 = (R_{\nu}^{\alpha\beta r} + j(\omega - \nu P \omega_r) L_{\nu}^{\alpha\beta r}) \tilde{I}_{\nu}^r + j(\omega - \nu P \omega_r) \frac{m}{2} L_{\nu}^{sr} \tilde{I}^s e^{-j\nu P \theta_0} \quad (10)$$

donde θ_0 es el ángulo arbitrario entre los ejes de la primera fase del estator y el primer circuito del rotor en $t=0$. Debido a que los parámetros equivalentes monofásicos de las ecuaciones (9) y (10) son los mismos que los parámetros dados en [3], están representados por los correspondientes parámetros $\alpha\beta$ para evitar la introducción de un nuevo grupo de notaciones. Definiendo el deslizamiento (por unidad) para el ν -ésimo armónico y las corrientes armónicas desfasadas del rotor como:

$$S_{\nu} = \frac{\omega^r}{\omega} = \frac{\omega - \nu P \omega_r}{\omega} = 1 - \nu P \frac{\omega_r}{\omega} \quad (11)$$

$$\tilde{I}_{\nu}^{r'} = \tilde{I}_{\nu}^r e^{j\nu P \theta_0} \quad (12)$$

y empleando la ecuación (12) en la ecuación (9), se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + \sum_{\nu} j\omega \frac{m}{2} L_{\nu}^{sr} \tilde{I}_{\nu}^{r'} \quad (13)$$

dividiendo (10) entre S_{ν} y multiplicando por $e^{j\nu P \theta_0}$ en ambos miembros, se tiene:

$$0 = \left(\frac{R_{\nu}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu}} + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu}^r e^{j\nu P \theta_0} + j\omega \frac{m}{2} L_{\nu}^{sr} \tilde{I}^s$$

empleando la ecuación (12):

$$0 = \left(\frac{R_v^{\alpha\beta r}}{S_v} + j \omega L_v^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_v^r + j \omega \frac{m}{2} L_v^{sr} \tilde{I}^s \quad (14)$$

Para poder referir las corrientes del rotor al estator previamente se hace necesario considerar lo siguiente:

La tensión aplicada es sinusoidal y alterna a la frecuencia f_1 por lo tanto:

$$f_1 = P \frac{n_1}{60}$$

El rotor que gira a n_2 (RPM) corresponde a una frecuencia f_2 , tal que $f_2 = P \frac{n_2}{60}$ se está deslizando con respecto al campo giratorio a la frecuencia $f_s = f_1 - f_2 = S f_1$; donde:

$$S = \frac{f_1 - f_2}{f_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

El efecto del campo magnético que gira a velocidad de sincronismo es el mismo que si cada fase estuviese enlazada por un flujo fijo de magnitud ϕ y alterno a la frecuencia de línea f_1 . Si el rotor gira, el efecto es el mismo que si cada fase del secundario estuviese enlazada por un flujo fijo ϕ y alterno a la frecuencia de deslizamiento $S f_1$.

Para condiciones de reposo la f.e.m. en el primario y secundario será:

$$E_1 = 4.44 K_{d1} K_{P1} N_1 f_1 \phi$$

$$E_2 = 4.44 K_{d2} K_{P2} N_2 f_1 \phi$$

En condiciones de funcionamiento, cumple que:

$$s E_2 = 4.44 K_{d_2} K_{p_2} N_2 s \dot{\phi}$$

donde:

K_{d_1} , K_{d_2} : factores de distribución

K_{p_1} , K_{p_2} : factores de paso

N_1 , N_2 : espiras en serie por fase

ϕ : flujo por polo en webers.

Cada f.e.m. se retrasa 90 grados eléctricos con respecto a ϕ y como el devanado secundario es cerrado, entonces se produce una corriente.

$$I_2 = \frac{s E_2}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}} = \frac{E_2}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + X_2^2}}$$

Y las fuerzas magnetomotrices del primario y del secundario expresada en ampere-vuelta por polo son:

$$FMM_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} K_{d_1} K_{p_1} m_1 N_{p_1} I_1 = N_1' I_1$$

$$FMM_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} K_{d_2} K_{p_2} m_2 N_{p_2} I_2 = N_2' I_2$$

donde:

N_{p_1} , N_{p_2} : número de espiras por polo y por fase

A raíz de ésto, es evidente la analogía que existe con el transformador fijo. De lo que se deduce que en condiciones de carga es necesario que:

$$N_1' I_1 + N_2' I_2 = N_1' I_0$$

y dividiendo entre N_1' .

$$I_1 + \frac{N_2'}{N_1'} I_2 = I_0$$

donde:

I_0 : corriente magnetizante en vacío (Amperes/fase)

Las magnitudes del primario y del secundario, tales como f.e.m.s., corrientes, resistencias y reactancias están íntimamente relacionadas, por lo que resulta posible expresar las magnitudes del secundario en función del primario o viceversa de la misma forma que se hace en el transformador.

Así, en reposo la razón de la f.e.m. del primario al secundario es:

$$a = \frac{E_1}{E_2} = \frac{K_{d1} K_{p1} N_1}{K_{d2} K_{p2} N_2}$$

Por lo tanto, las f.e.m. de los secundarios reducidas a valores equivalentes en reposo, si se multiplican por esta relación, resultarán expresadas a términos equivalentes de los primarios.

La relación de transformación de corrientes que convierte la verdadera corriente del secundario por fase en la equivalente corriente del primario es:

$$\frac{N_2'}{N_1'} = \frac{m_2 K_{d2} K_{p2} N_{p2}}{m_1 K_{d1} K_{p1} N_{p1}} = \frac{m_2 K_{d2} K_{p2} N_2}{m_1 K_{d1} K_{p1} N_1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{a}$$

Y el factor por el que hay que multiplicar la resistencia, reactancia e impedancia del secundario para expresarlas en términos equivalentes del primario es:

$$\frac{m_1}{m_2} a^2$$

De la aplicación al caso de un rotor jaula de ardilla se obtiene:

$$a = \frac{K_v N}{\text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})}$$

$$\frac{N_2'}{N_1'} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{n \text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})}{m K_v N}$$

Por lo que:

$$\tilde{I}_\nu^{1r} = \frac{n \text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})}{m K_v N} \tilde{I}_\nu^{r'} \quad (15)$$

Colocando la ecuación (13) en función de \tilde{I}_ν^{1r} , se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_\nu^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + \sum_\nu j\omega \frac{n}{2} L_\nu^{sr} \left(\frac{m K_v N}{n \text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})} \tilde{I}_\nu^{1r} \right)$$

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_\nu^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + \sum_\nu j\omega \left(\frac{m}{2} \frac{K_v N}{\text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})} L_\nu^{sr} \right) \tilde{I}_\nu^{1r}$$

sumando y restando $\sum_\nu j\omega L_\nu^m \tilde{I}^s$ y agrupando:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega (L_\nu^{\alpha\beta s} - \sum_\nu L_\nu^m)) \tilde{I}^s + \sum_\nu j\omega L_\nu^m (\tilde{I}^s + \tilde{I}_\nu^{1r})$$

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_1^s) \tilde{I}^s + \sum_\nu j\omega L_\nu^m (\tilde{I}^s + \tilde{I}_\nu^{1r}) \quad (16)$$

Multiplicando en ambos miembros de la ecuación (14) por el factor de transformación a y colocándola en función de \tilde{I}_ν^{1r} , se tiene:

$$0 = \left(\frac{K_v N}{\text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})} \frac{R_\nu^{\alpha\beta r}}{S_\nu} + j\omega \frac{K_v N}{\text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})} L_\nu^{\alpha\beta r} \right) \frac{m K_v N}{n \text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})} \tilde{I}_\nu^{1r}$$

$$+ j\omega \left(\frac{m}{2} \frac{K_v N}{\text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})} L_\nu^{sr} \right) \tilde{I}^s$$

Sumando y restando $j\omega L_\nu^m \tilde{I}_\nu^{1r}$ y agrupando:

$$0 = \left(\frac{m}{n} \frac{K_v^2 N^2}{\text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})} \frac{R_\nu^{\alpha\beta r}}{S_\nu} + j\omega \left(\frac{m}{n} \frac{K_v^2 N^2}{\text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})} L_\nu^{\alpha\beta r} - L_\nu^m \right) \right) \tilde{I}_\nu^{1r}$$

$$+ j\omega L_\nu^m (\tilde{I}^s + \tilde{I}_\nu^{1r})$$

finalmente:

$$0 = \left(\frac{R_v^{ir}}{S_v} + j\omega L_{1v}^{ir} \right) \tilde{I}_v^{ir} + j\omega L_v^m (\tilde{I}^s + \tilde{I}_v^{ir}) \quad (17)$$

donde L_v^m , la inductancia magnetizante del ν -ésimo armónico (estator) está dada por:

$$L_v^m = \frac{m}{2} \frac{K_v N}{\text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})} L_v^{sr} \quad (18)$$

además:

$$L_1^s = L_v^{\alpha\beta s} - \sum_{\nu} L_v^m \quad (18.1)$$

la resistencia del rotor de jaula referido al estator es:

$$R_v^{ir} = \frac{m K_v^2 N^2}{n \text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})} R_v^{\alpha\beta r} \quad (19)$$

sustituyendo para $R_v^{\alpha\beta r} = 2(R_a + 2R_b \text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n}))$

$$R_v^{ir} = \frac{4m K_v^2 N^2}{n} \left(R_b + \frac{R_a}{2 \text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})} \right)$$

Similarmente, la inductancia de dispersión del rotor referida al estator es:

$$L_{1v}^{ir} = \frac{m K_v^2 N^2}{n \text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})} L_v^{\alpha\beta r} - L_v^m$$

sustituyendo $L_v^{\alpha\beta r}$ por

$$L_v^{\alpha\beta r} = 2(L_a + 2L_b \text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})) + \frac{n \text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})}{m K_v^2 N^2} L_v^m \sum_K \left(\frac{\nu}{K \frac{n}{P} + \nu} \right)^2$$

$$K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$L_{1v}^{ir} = \frac{4m K_v^2 N^2}{n} \left(L_b + \frac{L_a}{2 \text{Sen}^2(\nu P \frac{\pi}{n})} \right) + L_v^m \sum_{K \neq 0} \frac{\nu^2}{(K \frac{n}{P} + \nu)^2} \quad (21)$$

$$K = \pm 1, \pm 2, \dots$$

La expresión (19) para la resistencia del rotor, R_y^{1r} es aplicable al caso cuando el rotor tiene un número no entero de barras por par de polos del estator y es similar al usado en los métodos de diseño convencional [2,4]. La expresión aproximada de R_y^{1r} dada en [4] puede ser inexacta cuando se aplica a los armónicos. La inductancia de dispersión del rotor dada por los métodos de diseño convencional es el mismo que el primer término de la ecuación (21). El segundo término de la ecuación (21), la cual es de la naturaleza conocida como inductancia de dispersión diferencial, ha sido tomada en cuenta de manera distinta al de la mayoría de cálculos de diseño convencional. La dispersión diferencial del rotor es un componente principal de la dispersión del rotor especialmente para los armónicos.

En el armónico fundamental el segundo término aunque pequeño no es despreciable. Por consiguiente, no parece ser una buena aproximación despreciar la dispersión diferencial del rotor de jaula. Tanto el torque asíncrono como el síncrono producidos por los armónicos están afectadas por las reactancias de dispersión, especialmente la dispersión diferencial. En el pasado ha habido muchas controversias sobre la dispersión diferencial, algunos de los conceptos [2,4,5,6,7], podrían ser apropiados para el armónico fundamental, aunque frecuentemente no son adecuadas cuando se aplican a los armónicos de mayor orden. El método que se usa aquí para eva-

lvar las inductancias del rotor elimina las ambigüedades asociadas con la interpretación de la inductancia diferencial.

3.2 Ecuación de torque

Considerando la ecuación (3) se tiene:

$$T_e = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n i_i^s \frac{\partial L_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} i_k^r$$

donde:

$$i_i^s = \text{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

haciendo uso de la propiedad A1.8

$$i_i^s = \text{Re} \left(\sqrt{2} (\tilde{I}^s)^* e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} = - \sum_{\nu} \nu P L_{\nu}^{sr} \text{Im} \left(e^{j\nu P \theta} \right)$$

haciendo uso de la propiedad A1.4

$$\frac{\partial L_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} = \sum_{\nu} \nu P L_{\nu}^{sr} \text{Re} \left(j e^{j\nu P \theta} \right)$$

$$i_k^r = \sum_{\nu} \text{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{I}_{\nu}^r e^{j((\omega - \nu P \omega_r)t - (k-1) \nu P \frac{2\pi}{n})} \right)$$

reemplazando:

$$T_e = 2P \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \left(\text{Re} \left((\tilde{I}^s)^* e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right) \left(\text{Re} \left(\sum_{\nu} \nu L_{\nu}^{sr} j e^{j\nu P \theta} \right) \right) \left(\text{Re} \left(\sum_{\nu} \tilde{I}_{\nu}^r e^{j((\omega - \nu P \omega_r)t - (k-1) \nu P \frac{2\pi}{n})} \right) \right)$$

haciendo uso de la propiedad A1.2 y tomando los armónicos

comunes:

$$T_e = 2P \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \left(\text{Re} \left((\tilde{I}^s)^* e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right) \left(\sum_{\nu} \frac{1}{2} \text{Re} \left(j \nu L_{\nu}^{sr} \tilde{I}_{\nu}^r \left(e^{j(2\nu P \omega_r t + \nu P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} - \omega t + 2(k-1) \nu P \frac{2\pi}{n})} \right) + e^{j(\nu P \theta_0 + \omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right)$$

$$T_e = P \sum_{\nu} \sum_{i=1}^m \left(\operatorname{Re} \left((\tilde{I}^s)^* e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(j \nu L_{\nu}^{sr} \tilde{I}_{\nu}^{r'} e^{j\nu P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right)$$

como es independiente de k, se tiene:

$$T_e = P n \sum_{\nu} \sum_{i=1}^m \left(\operatorname{Re} \left((\tilde{I}^s)^* e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right. \\ \left. \operatorname{Re} \left(j \nu L_{\nu}^{sr} \tilde{I}_{\nu}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right)$$

haciendo uso de la propiedad A1.2:

$$T_e = \frac{P n}{2} \sum_{\nu} \nu L_{\nu}^{sr} \operatorname{Re} \left(j \tilde{I}_{\nu}^{r'} (\tilde{I}^s)^* \left(\sum_{i=1}^m 1 + \sum_{i=1}^m e^{j2(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right)$$

finalmente:

$$T_e = P m \frac{n}{2} \sum_{\nu} \nu L_{\nu}^{sr} \operatorname{Re} \left(j \tilde{I}_{\nu}^{r'} (\tilde{I}^s)^* \right) \quad (22)$$

o también en términos de corrientes referidas del rotor, considerando que:

$$\tilde{I}_{\nu}^{r'} = \frac{n}{m} \frac{\operatorname{Sen} \left(\nu P \frac{\pi}{n} \right)}{K_{\nu} N} \tilde{I}_{\nu}^{r'}$$

$$L_{\nu}^m = \frac{m}{2} \frac{K_{\nu} N}{\operatorname{Sen} \left(\nu P \frac{\pi}{n} \right)} L_{\nu}^{sr}$$

reemplazando:

$$T_e = P m \frac{n}{2} \sum_{\nu} \nu L_{\nu}^{sr} \operatorname{Re} \left(j \frac{m}{n} \frac{K_{\nu} N}{\operatorname{Sen} \left(\nu P \frac{\pi}{n} \right)} \tilde{I}_{\nu}^{r'} (\tilde{I}^s)^* \right)$$

$$T_e = P m \sum_{\nu} \nu \left(\frac{m}{2} \frac{K_{\nu} N}{\operatorname{Sen} \left(\nu P \frac{\pi}{n} \right)} L_{\nu}^{sr} \right) \operatorname{Re} \left(j \tilde{I}_{\nu}^{r'} (\tilde{I}^s)^* \right)$$

finalmente:

$$T_e = P m \sum_{\nu} \nu L_{\nu}^m \operatorname{Re} \left(j \tilde{I}_{\nu}^{r'} (\tilde{I}^s)^* \right) \quad (23)$$

CAPITULO IV

ECUACIONES DE ESTADO ESTABLE DEL FUNCIONAMIENTO SINCRONO

4.1 Funcionamiento síncrono en una velocidad específica

Después de una sustitución de las corrientes del rotor y estator en la ecuación de torque (3) y simplificando se pueden separar los términos relacionados al funcionamiento síncrono. La condición para que estos términos sean diferentes de cero corresponde a la condición para el caso de funcionamiento síncrono.

Para simplificar el cálculo, se considera dos armónicos interaccionantes de órdenes ν_1 y ν_2 las cuales satisfacen la ecuación (8).

$$\begin{aligned} \nu_1 &= K_1 m + 1 \\ \nu_2 &= K_2 m + 1 \end{aligned} \quad \text{con } \nu_1 \neq \nu_2 \quad (24)$$

La velocidad específica en la cual ocurre el funcionamiento síncrono es simplemente la velocidad en la cual un torque en régimen estable constante se desarrolla por la interacción de la corriente del estator, con un armónico de corriente del rotor con orden de armónico diferente al del estator. El torque en régimen estable no es cero en la velocidad:

$$\omega_r = \frac{2\omega}{P(\nu_1 + \nu_2)} \quad (25)$$

Si:

$$P(\nu_1 + \nu_2) = Hn \quad (26)$$

donde H es cualquier entero positivo o negativo excluyendo el cero. La condición (26) se puede expresar en términos del número de fases del rotor y estator por sustitución de los valores de ν_1 y ν_2 dadas por la ecuación (24) en la ecuación (26).

$$\begin{aligned} P(k_1 m + 1 + k_2 m + 1) &= Hn \\ P(k_1 + k_2)m + 2P &= Hn \\ Hn - P(k_1 + k_2)m &= 2P \end{aligned} \quad (27)$$

De la misma manera, la velocidad en la que ocurre el funcionamiento síncrono se puede expresar como:

$$\omega_r = \frac{2\omega}{Hn} \quad (28)$$

Se puede concluir que existe una serie infinita de armónicos sincronizados a la velocidad del rotor dados por la ecuación (28). Este resultado es consistente e incluye como un caso especial, la condición para la existencia del torque síncrono hallada en la referencia [1] usando la teoría de campo giratorio.

4.1.1 Ecuaciones de tensión

Considerando la condición (25) y reemplazando las corrientes del rotor y el estator en la ecuación (1) se tiene:

$$V_i^s = (R^s + P L_{\nu}^{\alpha\beta s}) i_i^s + P \sum_{k=1}^n L_{ik}^{sr} i_k^r$$

donde:

$$v_i^s = \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{v}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$i_i^s = \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{i}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$i_k^r = \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \left(\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}} + \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}} \right) \right)$$

$$L_{ik}^{sr} = \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} + L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta} \right)$$

$$\nu_1 P \theta = \nu_1 P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}$$

$$\nu_2 P \theta = \nu_2 P \omega_r t + \nu_2 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}$$

$$p = j\omega$$

reemplazando:

$$\operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{v}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{i}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$+ j\omega \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} + L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \left(\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}} \right) \right)$$

definiendo:

$$(\alpha) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

$$(\beta) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

$$(\gamma) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

$$(\delta) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

desarrollando (α) , aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r \left(\sum_{k=1}^n e^{j(2\nu_1 P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 + 2(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n} + \omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^n e^{j(\nu_1 P \theta_0 + \omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \quad))$$

como el último término es independiente de k , se tiene:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j\nu_1 P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

de forma análoga se desarrolla (β), obteniéndose:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

desarrollando (γ), aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r \left(\sum_{k=1}^n e^{j((\nu_1 - \nu_2) P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 + \omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1)(\nu_1 - \nu_2) \frac{P 2\pi}{n} + \phi_{\nu_2}^r)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^n e^{j((\nu_1 + \nu_2) P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1)(\nu_1 + \nu_2) \frac{P 2\pi}{n} - \omega t - \phi_{\nu_2}^r)} \right) \right)$$

reemplazando las ecuaciones (26) y (28) en el segundo

término:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r \sum_{k=1}^n e^{j(Hn \left(\frac{2\omega}{Hn} \right) t + \nu_1 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) Hn \frac{2\pi}{n} - \omega t - \phi_{\nu_2}^r)} \right)$$

donde $(K-1) 2\pi$ representa siempre un número completo

de revoluciones por lo que se reduce a:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r e^{j(\nu_1 P \theta_0 + \omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m} - \phi_{\nu_2}^r)} \right) \\ \frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r e^{j(-\phi_{\nu_2}^r + \nu_1 P \theta_0)} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

de forma análoga se desarrolla (δ), obteniéndose:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{sr} I_{\nu_1}^r e^{j(-\phi_{\nu_1}^r + \nu_2 P \theta_0)} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

reemplazando (α), (β), (γ) y (δ); retirando el operador Re y simplificando:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} \\ + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r e^{j(-\phi_{\nu_2}^r + \nu_1 P \theta_0)} + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_2}^{sr} I_{\nu_1}^r e^{j(-\phi_{\nu_1}^r + \nu_2 P \theta_0)} \quad (29)$$

Desarrollando la ecuación del rotor para el armónico ν_1 :

$$0 = (R_{\nu_1}^{\alpha\beta r} + p L_{\nu_1}^{\alpha\beta r}) i_k^r + p \sum_{i=1}^m L_{ik}^{sr} i_i^s$$

donde:

$$i_k^r = \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

$$i_i^s = \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$L_{ik}^{sr} = L_{ki}^{rs} = \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{rs} e^{j\nu_1 P \theta} + L_{\nu_2}^{rs} e^{j\nu_2 P \theta} \right)$$

$$\nu_1 P \theta = \nu_1 P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}$$

$$\nu_2 P \theta = \nu_2 P \omega_r t + \nu_2 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}$$

$$s_{\nu_1} = \frac{\omega - \nu_1 P \omega_r}{\omega} \quad ; \text{ lo que es lo mismo que: } \omega - \nu_1 P \omega_r = s_{\nu_1} \omega$$

$$p = j\omega^r = j(\omega - \nu_1 P \omega_r) = j s_{\nu_1} \omega$$

reemplazando:

$$0 = (R_{\nu_1}^{\alpha\beta r} + j s_{\nu_1} \omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r}) \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}} \right) + j \sum_{i=1}^m s_{\nu_1} \omega \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{rs} e^{j\nu_1 P \theta} + L_{\nu_2}^{rs} e^{j\nu_2 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

definiendo:

$$(\alpha) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{rs} e^{j\nu_1 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$(\beta) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{rs} e^{j\nu_2 P \theta} \right) \operatorname{Re} \left(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

desarrollando (α) , aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{rs} \tilde{I}^s \left(\sum_{i=1}^m \left(e^{j(\omega t - 2(i-1) \frac{2\pi}{m} + \nu_1 P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 + (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})} + e^{j(\omega t - \nu_1 P \omega_r t - \nu_1 P \theta_0 - (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})} \right) \right) \right)$$

como el último término es independiente de i , se tiene:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{rs} \tilde{I}^s e^{-j\nu_1 P \theta_0} e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}}$$

desarrollando (β), aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s (\sum_{i=1}^m e^{j(\omega t - 2(i-1) \frac{2\pi}{m} + \nu_2 P \omega_r t + \nu_2 P \theta_0 + (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n} + \phi^s)} + \sum_{i=1}^m e^{j(-\omega t + \nu_2 P \omega_r t + \nu_2 P \theta_0 + (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n} - \phi^s)})$$

como el último término es independiente de i , se tiene:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(-\omega t + \nu_2 P \omega_r t + \nu_2 P \theta_0 + (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n} - \phi^s)})$$

sumando y restando ($\nu_1 P \omega_r t + (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}$) en el término exponencial:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(-\omega t + (\nu_1 + \nu_2) P \omega_r t + \nu_2 P \theta_0 + (k-1)(\nu_1 + \nu_2) P \frac{2\pi}{n} - \phi^s - \nu_1 P \omega_r t - (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})}$$

reemplazando las ecuaciones (26) y (28) y simplificando:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(-\omega t + 2\omega t + \nu_2 P \theta_0 + (k-1)2H\pi - \phi^s - \nu_1 P \omega_r t - (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})}$$

donde $(k-1)2H\pi$ representa siempre un número completo de revoluciones por lo que se reduce a:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(\nu_2 P \theta_0 - \phi^s)} e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}})$$

reemplazando (α) y (β); retirando el operador Re y simplificando:

$$0 = (R_{\nu_1}^{\alpha\beta r} + j S_{\nu_1} \omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r}) \tilde{I}_{\nu_1}^r + j S_{\nu_1} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_1}^{rs} \tilde{I}^s e^{-j\nu_1 P \theta_0} + j S_{\nu_1} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(-\phi^s + \nu_2 P \theta_0)} \quad (30)$$

De forma análoga desarrollando para el armónico ν_2 , se obtiene:

$$0 = (R_{\nu_2}^{\alpha\beta r} + j s_{\nu_2} \omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r}) \tilde{I}_{\nu_2}^r + j s_{\nu_2} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_2}^{rs} \tilde{I}^s e^{-j\nu_2 p \theta_0} + j s_{\nu_2} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_1}^{rs} I^s e^{j(-\phi^s + \nu_1 p \theta_0)} \quad (31)$$

Definiendo las corrientes armónicas desfasadas del

rotor como:

$$\tilde{I}_{\nu_1}^{r'} = \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 p \theta_0}$$

$$\tilde{I}_{\nu_2}^{r'} = \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j\nu_2 p \theta_0}$$

reemplazando en (29), se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r e^{j(-\phi_{\nu_2}^r + \nu_1 p \theta_0)} + L_{\nu_2}^{sr} I_{\nu_1}^r e^{j(-\phi_{\nu_1}^r + \nu_2 p \theta_0)})$$

si hacemos:

$$(\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^* = I_{\nu_1}^r e^{-j(\phi_{\nu_1}^r + \nu_1 p \theta_0)}$$

$$(\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* = I_{\nu_2}^r e^{-j(\phi_{\nu_2}^r + \nu_2 p \theta_0)}$$

reemplazando, se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* e^{j(\nu_1 + \nu_2) p \theta_0} + L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^* e^{j(\nu_1 + \nu_2) p \theta_0})$$

factorizando, finalmente se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* + L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^*) e^{j(\nu_1 + \nu_2) p \theta_0} \quad (32)$$

Dividiendo (30) entre s_{ν_1} :

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{s_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_1}^r + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{rs} \tilde{I}^s e^{-j\nu_1 p \theta_0} + L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(-\phi^s + \nu_2 p \theta_0)})$$

reconociendo que $(\tilde{\mathbf{I}}^s)^* = \mathbf{I}^s e^{-j\theta^s}$ y multiplicando a ambos miembros por $e^{j\nu_1 P \theta_0}$, se tiene:

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{\mathbf{I}}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 P \theta_0} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{rs} \tilde{\mathbf{I}}^s + L_{\nu_2}^{rs} (\tilde{\mathbf{I}}^s)^* e^{j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0})$$

finalmente:

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{\mathbf{I}}_{\nu_1}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{rs} \tilde{\mathbf{I}}^s + L_{\nu_2}^{rs} (\tilde{\mathbf{I}}^s)^* e^{j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0}) \quad (33)$$

De forma análoga para el armónico ν_2 , se obtiene:

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} + j\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{\mathbf{I}}_{\nu_2}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_2}^{rs} \tilde{\mathbf{I}}^s + L_{\nu_1}^{rs} (\tilde{\mathbf{I}}^s)^* e^{j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0}) \quad (34)$$

4.1.2 Ecuación de torque

Considerando la ecuación (3) se tiene:

$$T_e = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n i_i^s \frac{\partial h_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} i_k^r$$

donde:

$$i_i^s = \text{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{\mathbf{I}}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right)$$

$$\frac{\partial h_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} = \text{Re} \left(P j \left(\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} + \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta} \right) \right)$$

$$\nu_1 P \theta = \nu_1 P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}$$

$$\nu_2 P \theta = \nu_2 P \omega_r t + \nu_2 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + (k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}$$

$$i_k^r = \text{Re} \left(\sqrt{2} \tilde{\mathbf{I}}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}} + \sqrt{2} \tilde{\mathbf{I}}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

reemplazando:

$$T_e = 2P \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \text{Re} \left(\tilde{\mathbf{I}}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \text{Re} \left(j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} + j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta} \right)$$

$$\text{Re} \left(\tilde{\mathbf{I}}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}} + \tilde{\mathbf{I}}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

definiendo:

$$(\alpha) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j \nu_1 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}})$$

$$(\beta) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j \nu_2 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}})$$

$$(\gamma) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j \nu_1 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}})$$

$$(\delta) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j \nu_2 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}})$$

desarrollando (α) y aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r (\sum_{k=1}^n e^{j(2\nu_1 P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + 2(k-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n} - \omega t)} + \sum_{k=1}^n e^{j(\nu_1 P \theta_0 + \omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}))$$

como el último término es independiente de k , se tiene:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j \nu_1 P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

de forma análoga se desarrolla (β) , obteniéndose:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} (j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

desarrollando (γ) y aplicando la propiedad A1.5:

$$- \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j \nu_1 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}})$$

aplicando la propiedad A1.7:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{-j \nu_1 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n}})$$

aplicando la propiedad A1.3:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r (\sum_{k=1}^n e^{j(-(\nu_1 - \nu_2) P \omega_r t - \nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - (k-1)(\nu_1 - \nu_2) P \frac{2\pi}{n} - \omega t)}))$$

$$+ \sum_{k=1}^n e^{j(-(\nu_1 + \nu_2) P \omega_r t - \nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - (K-1)(\nu_1 + \nu_2) P \frac{2\pi}{n} + \omega t)} \quad))$$

reemplazando las ecuaciones (26) y (28), se tiene:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} \sum_{k=1}^n e^{j(-Hn(\frac{2\omega}{Hn})t - \nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - (K-1)Hn \frac{2\pi}{n} + \omega t)} \right),$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} \sum_{k=1}^n e^{j(-\omega t + (i-1) \frac{2\pi}{m} - \nu_1 P \theta_0 - (K-1) 2H\pi)} \right),$$

donde $(K-1) 2H\pi$ representa siempre un número completo de revoluciones por lo que se reduce a:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Im} \left(\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(-\omega t + (i-1) \frac{2\pi}{m} - \nu_1 P \theta_0)} \right),$$

sumando y restando $\nu_2 P \theta_0$ en el término exponencial:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Im} \left(\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j\nu_2 P \theta_0} e^{-j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} e^{-j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0} \right),$$

$$\frac{n}{2} \operatorname{Im} \left(\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{-j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} e^{-j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0} \right),$$

aplicando la propiedad A1.4:

$$-\frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{-j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} e^{-j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0} \right),$$

de forma análoga se desarrolla (ξ) obteniéndose:

$$-\frac{n}{2} \operatorname{Re} \left(j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{-j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} e^{-j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0} \right)$$

reemplazando (α), (β), (γ) y (ξ):

$$T_e = Pn \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right) \\ \left(\operatorname{Re} \left(j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} + j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \right. \right. \\ \left. \left. - j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{-j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} e^{-j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0} \right. \right. \\ \left. \left. - j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{-j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} e^{-j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0} \right) \right)$$

definiendo:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) &= \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \\
 (\beta) &= \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re}(j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \\
 (\gamma) &= - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \\
 (\delta) &= - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re}(j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})
 \end{aligned}$$

desarrollando (α) y aplicando la propiedad A1.8:

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{Re}((\tilde{I}^s)^* e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} (\tilde{I}^s)^* \left(\sum_{i=1}^m e^{j0} + \sum_{i=1}^m e^{j2(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})} \right))$$

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} (\tilde{I}^s)^*)$$

de forma análoga se desarrolla (β) obteniéndose:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re}(j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} (\tilde{I}^s)^*)$$

desarrollando (γ) y aplicando la propiedad A1.2:

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} \tilde{I}^s e^{-j(\nu_1 + \nu_2)P\theta_0} \left(\sum_{i=1}^m (e^{j2(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})} + e^{j0}) \right))$$

$$-\frac{m}{2} \operatorname{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} \tilde{I}^s e^{-j(\nu_1 + \nu_2)P\theta_0})$$

de forma análoga se desarrolla (δ) , obteniéndose:

$$-\frac{m}{2} \operatorname{Re}(j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} \tilde{I}^s e^{-j(\nu_1 + \nu_2)P\theta_0})$$

reemplazando (α) , (β) , (γ) y (δ) :

$$\begin{aligned}
 T_e &= P_m \frac{n}{2} \left(\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re}(j(\tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}) + \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re}(j(\tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) \right. \\
 &\quad \left. - \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re}(j\tilde{I}^s \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{-j(\nu_1 + \nu_2)P\theta_0}) \right. \\
 &\quad \left. - \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re}(j\tilde{I}^s \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{-j(\nu_1 + \nu_2)P\theta_0}) \right)
 \end{aligned}$$

$$-\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re} (j \tilde{I}_s \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{-j(\nu_1 + \nu_2) P \theta_0}) \quad (35)$$

El primer y segundo término de la ecuación (35) son torques asíncronos asociados con los armónicos de órdenes ν_1 y ν_2 respectivamente, los dos últimos términos son los torque síncronos que resultan de la interacción de los mismos armónicos. Así modelos previos en régimen estable y transitorio no incluían la interacción entre armónicos diferentes, los términos relacionados a la interacción síncrona no fueron tomados en cuenta en esos modelos. Sin embargo, es importante que los torques síncronos sean explicados cuantitativamente, como que mas magnitudes de los torques síncronos.

Aún cuando las ecuaciones (32) - (35) han sido halladas para dos armónicos arbitrarios de orden ν_1 y ν_2 , estas ecuaciones pueden extenderse rápidamente a cualquier grupo de armónicos.

4.2 Funcionamiento síncrono en velocidad cero

La condición para que ocurra el torque síncrono cuando la velocidad del rotor es cero es diferente de aquel que cuando el rotor está girando en una velocidad dada. Por otra parte asumiendo los armónicos de órdenes ν_1 y ν_2 como los dados por las ecuaciones (24), la condición para que el torque síncrono sea un valor constante diferente de cero, cuando la velocidad del rotor es cero, es:

$$P (\nu_1 - \nu_2) = Hn \quad (36)$$

donde H es cualquier entero positivo o negativo excluyendo el cero. Cuando ν_1 y ν_2 son expresados en términos del número de fases del estator y rotor la condición (36) viene a ser:

$$P(K_1 m + 1 - (K_2 m + 1)) = Hn$$

$$P(K_1 - K_2)m = Hn \quad (37)$$

4.2.1 Ecuaciones de tensión

Cuando se satisface la condición (36) o (37), se pueden obtener las ecuaciones de tensión para funcionamiento síncrono con velocidad cero del rotor.

Considerando la ecuación (1):

$$v_i^s = (R^s + p L_v^{\alpha\beta s}) i_i^s + p \sum_{k=1}^n L_{ik}^{sr} i_k^r$$

donde:

$$v_i^s = \text{Re}(\sqrt{2} \tilde{v}_i^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

$$i_i^s = \text{Re}(\sqrt{2} \tilde{i}_i^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

$$L_{ik}^{sr} = \text{Re}(L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 p \theta} + L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 p \theta})$$

$$i_k^r = \text{Re}(\sqrt{2} (\tilde{i}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 p \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_1 p \frac{2\pi}{n}} + \tilde{i}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 p \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_2 p \frac{2\pi}{n}}))$$

$$p = j\omega$$

reemplazando:

$$\text{Re}(\sqrt{2} \tilde{v}_i^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})}) = (R^s + p L_v^{\alpha\beta s}) \text{Re}(\sqrt{2} \tilde{i}_i^s e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{m})})$$

$$+ j\omega \sum_{k=1}^n \text{Re}(L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 p \theta} + L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 p \theta})$$

$$\text{Re}(\sqrt{2} (\tilde{i}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 p \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_1 p \frac{2\pi}{n}} + \tilde{i}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 p \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_2 p \frac{2\pi}{n}}))$$

definiendo:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta_0}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}}) \\
 (\beta) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta_0}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n}}) \\
 (\gamma) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta_0}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r) t} e^{-j(k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n}}) \\
 (\delta) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta_0}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r) t} e^{-j(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}})
 \end{aligned}$$

desarrollando (α) y aplicando la propiedad A1.2:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r \sum_{k=1}^n (e^{j(2\nu_1 P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 + 2(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n} + \omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n})} \\
 &\quad + e^{j(\nu_1 P \theta_0 + \omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n})}))
 \end{aligned}$$

como el último término es independiente de k , se reduce

$$\begin{aligned}
 a: &\frac{n}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n})}) \\
 &\frac{n}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n})})
 \end{aligned}$$

de forma análoga se desarrolla (β) , obteniéndose:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n})})$$

desarrollando (γ) y aplicando la propiedad A1.2:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r \sum_{k=1}^n (e^{j((\nu_1 + \nu_2) P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 + (k-1)(\nu_1 + \nu_2) P \frac{2\pi}{n} - \omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n} - \Phi_{\nu_2}^r)} \\
 &\quad + e^{j((\nu_1 - \nu_2) P \omega_r t + \nu_1 P \theta_0 + (k-1)(\nu_1 - \nu_2) P \frac{2\pi}{n} + \omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n} + \Phi_{\nu_2}^r)}))
 \end{aligned}$$

reemplazando las ecuaciones (36) y $\omega_r = 0$:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r \sum_{k=1}^n e^{j(\nu_1 P \theta_0 + (k-1) 2H\pi + \omega t - (i-1)\frac{2\pi}{n} + \Phi_{\nu_2}^r)})$$

donde $(k-1) 2H\pi$ representa siempre un número completo de revoluciones, por lo que se reduce a:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r e^{j(\phi_{\nu_2}^r + \nu_1 p \theta_0)} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) ,$$

de forma análoga se desarrolla (β), obteniéndose:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{sr} I_{\nu_1}^r e^{j(\phi_{\nu_1}^r + \nu_2 p \theta_0)} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) ,$$

reemplazando (α), (β), (γ) y (δ); retirando el operador Re y simplificando:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^s = & (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha ps}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 p \theta_0} + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j\nu_2 p \theta_0} \\ & + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_2}^r e^{j(\phi_{\nu_2}^r + \nu_1 p \theta_0)} + j\omega \frac{n}{2} L_{\nu_2}^{sr} I_{\nu_1}^r e^{j(\phi_{\nu_1}^r + \nu_2 p \theta_0)} \end{aligned} \quad (38)$$

Desarrollando la ecuación del rotor para el armónico ν_1 :

$$0 = (R_{\nu_1}^{\alpha pr} + p L_{\nu_1}^{\alpha pr}) i_k^r + p \sum_{i=1}^m L_{ik}^{sr} i_i^s$$

donde:

$$i_k^r = \operatorname{Re} (\sqrt{2} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j((\omega - \nu_1 p \omega_r) t - (k-1) \nu_1 p \frac{2\pi}{n})}) ,$$

$$L_{ik}^{sr} = L_{ki}^{rs} = \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{rs} e^{j\nu_1 p \theta} + L_{\nu_2}^{rs} e^{j\nu_2 p \theta})$$

$$i_i^s = \operatorname{Re} (\sqrt{2} \tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) ,$$

$$S_{\nu_1} = \frac{\omega - \nu_1 p \omega_r}{\omega} \quad ; \quad \text{o también : } \omega - \nu_1 p \omega_r = S_{\nu_1} \omega$$

$$p = j\omega^r = j(\omega - \nu_1 p \omega_r) = j S_{\nu_1} \omega$$

reemplazando:

$$0 = (R_{\nu_1}^{\alpha pr} + j S_{\nu_1} \omega L_{\nu_1}^{\alpha pr}) \operatorname{Re} (\sqrt{2} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j((\omega - \nu_1 p \omega_r) t - (k-1) \nu_1 p \frac{2\pi}{n})}) ,$$

$$+ j S_{\nu_1} \omega \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{rs} e^{j\nu_1 p \theta} + L_{\nu_2}^{rs} e^{j\nu_2 p \theta}) (\operatorname{Re} (\sqrt{2} \tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}))$$

definiendo:

$$(\alpha) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{rs} e^{j\nu_1 p \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) ,$$

$$(\beta) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} e^{j\nu_2 p \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

desarrollando (α), aplicando la propiedad A1.2 y la con
dición $w_r = 0$:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{rs} \tilde{I}^s \sum_{i=1}^m \left(e^{j(\nu_1 P \theta_0 + (K-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n} - \omega t)} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{j(\nu_1 P \theta_0 + (K-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n} - 2(i-1) \frac{2\pi}{m} + \omega t)} \right) \right)$$

como el primer término es independiente de i , se reduce a:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{rs} \tilde{I}^s e^{j(\nu_1 P \theta_0 - \omega t + (K-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n})} \right)$$

aplicando la propiedad A1.6:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_1}^{rs} \tilde{I}^s e^{-j\nu_1 P \theta_0} e^{j(\omega t - (K-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n})} \right)$$

desarrollando (β), aplicando la propiedad A1.2 y la con
dición $w_r = 0$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{rs} \tilde{I}^s \sum_{i=1}^m \left(e^{j(\nu_2 P \theta_0 + (K-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n} - \omega t - \phi^s)} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{j(\nu_2 P \theta_0 - 2(i-1) \frac{2\pi}{m} + (K-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n} + \omega t + \phi^s)} \right) \right)$$

como el primer término es independiente de i , se reduce a:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{rs} \tilde{I}^s e^{j(\nu_2 P \theta_0 - \omega t + (K-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n} - \phi^s)} \right)$$

aplicando la propiedad A1.6:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{rs} \tilde{I}^s e^{-j\nu_2 P \theta_0} e^{j(\omega t - (K-1) \nu_2 P \frac{2\pi}{n} + \phi^s)} \right)$$

sumando y restando $(K-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n}$ en el término exponen
cial:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} \left(L_{\nu_2}^{rs} \tilde{I}^s e^{j(\phi^s - \nu_2 P \theta_0)} e^{j(\omega t - (K-1) \nu_1 P \frac{2\pi}{n})} e^{j(K-1)(\nu_1 - \nu_2) P \frac{2\pi}{n}} \right)$$

reemplazando la ecuación (36):

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(\phi^s - \nu_2 P \theta_0)} e^{j(\omega t - (K-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})} e^{j(K-1) 2H\pi})$$

donde $(K-1) 2H\pi$ representa siempre un número completo de revoluciones por lo que se reduce a:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(\phi^s - \nu_2 P \theta_0)} e^{j(\omega t - (K-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})})$$

reemplazando (α) y (β) :

$$\begin{aligned} 0 = & (R_{\nu_1}^{\alpha\beta r} + j S_{\nu_1} \omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega t - (K-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})}) \\ & + j S_{\nu_1} \omega \frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_1}^{rs} I^s e^{-j\nu_1 P \theta_0} e^{j(\omega t - (K-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})}) \\ & + j S_{\nu_1} \omega \frac{m}{2} \operatorname{Re} (L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(\phi^s - \nu_2 P \theta_0)} e^{j(\omega t - (K-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})}) \end{aligned}$$

retirando el operador Re y simplificando:

$$\begin{aligned} 0 = & (R_{\nu_1}^{\alpha\beta r} + j S_{\nu_1} \omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r}) \tilde{I}_{\nu_1}^r + j S_{\nu_1} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_1}^{rs} I^s e^{-j\nu_1 P \theta_0} \\ & + j S_{\nu_1} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{j(\phi^s - \nu_2 P \theta_0)} \end{aligned} \quad (39)$$

De forma análoga se desarrolla la ecuación del rotor para el armónico ν_2 :

$$\begin{aligned} 0 = & (R_{\nu_2}^{\alpha\beta r} + j S_{\nu_2} \omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r}) \tilde{I}_{\nu_2}^r + j S_{\nu_2} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_2}^{rs} I^s e^{-j\nu_2 P \theta_0} \\ & + j S_{\nu_2} \omega \frac{m}{2} L_{\nu_1}^{rs} I^s e^{j(\phi^s - \nu_1 P \theta_0)} \end{aligned} \quad (40)$$

definiendo:

$$\tilde{I}_{\nu_1}^{r'} = \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 P \theta_0}$$

$$\tilde{I}_{\nu_2}^{r'} = \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j\nu_2 P \theta_0}$$

reemplazando en la ecuación (38):

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} I_{\nu_1}^r e^{j\phi_{\nu_1}^r} e^{j\nu_1 p \theta_0} + L_{\nu_2}^{sr} I_{\nu_2}^r e^{j\phi_{\nu_2}^r} e^{j\nu_2 p \theta_0})$$

sumando y restando $\nu_2 p \theta_0$, $\nu_1 p \theta_0$ a los dos últimos términos de la exponencial respectivamente, se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j\nu_2 p \theta_0} e^{j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 p \theta_0} e^{-j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0})$$

finalmente:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{-j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0}) \quad (41)$$

en la ecuación (39) se multiplica por $e^{j\nu_1 p \theta_0}$ y se divide entre S_{ν_1} :

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 p \theta_0} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s e^{j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0})$$

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s e^{j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0}) \quad (42)$$

en la ecuación (40) se multiplica por $e^{j\nu_2 p \theta_0}$ y se divide entre S_{ν_2} :

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} + j\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j\nu_2 p \theta_0} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s e^{-j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0})$$

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} + j\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s e^{-j(\nu_1 - \nu_2) p \theta_0}) \quad (43)$$

4.2.2 Ecuación de torque

Considerando la ecuación (3) se tiene:

$$T_e = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n i_i^s \frac{\partial L_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} i_k^r$$

donde:

$$i_i^s = \text{Re}(\sqrt{2} \tilde{i}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

$$\frac{\partial i_{ik}^{sr}}{\partial \theta_r} = P \text{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} + j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta})$$

$$i_k^r = \text{Re}(\sqrt{2} (\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega - \nu_1 P \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n}} + \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega - \nu_2 P \omega_r)t} e^{-j(k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n}}))$$

reemplazando y considerando la condición que $\omega_r = 0$:

$$T_e = 2P \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \text{Re}(\tilde{i}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) (\text{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta} + j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta}))$$

$$\text{Re}(\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega t - (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})} + \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega t - (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n})})$$

definiendo:

$$(\alpha) = \sum_{k=1}^n \text{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta}) \text{Re}(\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega t - (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})})$$

$$(\beta) = \sum_{k=1}^n \text{Re}(j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta}) \text{Re}(\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega t - (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n})})$$

$$(\gamma) = \sum_{k=1}^n \text{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta}) \text{Re}(\tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega t - (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n})})$$

$$(\delta) = \sum_{k=1}^n \text{Re}(j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} e^{j\nu_2 P \theta}) \text{Re}(\tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j(\omega t - (k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n})})$$

desarrollando (α) y aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \text{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r \sum_{k=1}^n (e^{j(\nu_1 P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + 2(k-1)\nu_1 P \frac{2\pi}{n} - \omega t)} + e^{j(\nu_1 P \theta_0 + \omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}))$$

como el segundo término es independiente de k , se reduce

$$a: \frac{n}{2} \text{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^r e^{j\nu_1 P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

$$\frac{n}{2} \text{Re}(j\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

de forma análoga se desarrolla (β) , obteniéndose:

$$\frac{n}{2} \text{Re}(j\nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^r e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

desarrollando (γ) y aplicando la propiedad A1.5:

$$- \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{j\nu_1 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n})}) ,$$

aplicando la propiedad A1.7:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} e^{-j\nu_1 P \theta}) \operatorname{Re} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (k-1)\nu_2 P \frac{2\pi}{n})}) ,$$

aplicando la propiedad A1.3:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} \sum_{k=1}^n (e^{j(-\nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - (k-1)(\nu_1 - \nu_2) P \frac{2\pi}{n} - \omega t)} + e^{j(-\nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - (k-1)(\nu_1 + \nu_2) P \frac{2\pi}{n} + \omega t)}))$$

reemplazando la ecuación (36), se tiene:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} \sum_{k=1}^n e^{j(-\nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - (k-1) 2H\pi - \omega t)}) ,$$

donde $(k-1) 2H\pi$ representa siempre un número completo de revoluciones por lo que se reduce a:

$$\frac{n}{2} \operatorname{Im} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(-\nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - \omega t)}) ,$$

aplicando la propiedad A1.4:

$$- \frac{n}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(-\nu_1 P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - \omega t)}) ,$$

sumando y restando $\nu_2 P \theta_0$ en el término exponencial:

$$- \frac{n}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{-j\nu_2 P \theta_0} e^{j(-(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0 + (i-1) \frac{2\pi}{m} - \omega t)}) ,$$

$$- \frac{n}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* e^{-j((\nu_1 - \nu_2) P \theta_0 - (i-1) \frac{2\pi}{m} + \omega t)}) ,$$

aplicando la propiedad A1.6:

$$- \frac{n}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* e^{j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) ,$$

de forma análoga se desarrolla $(\frac{b}{c})$, obteniéndose:

$$-\frac{n}{2} (j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^* e^{-j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

reemplazando (α) , (β) , (γ) y (δ) :

$$T_e = P n \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} + j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \\ & - j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* e^{j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})} \\ & - j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^* e^{-j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) \end{aligned}$$

definiendo, todas afectadas por $\sum_{i=1}^m$:

$$(\alpha) = \operatorname{Re} (\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

$$(\beta) = \operatorname{Re} (\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re} (j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

$$(\gamma) = -\operatorname{Re} (\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re} (j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^* e^{j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

$$(\delta) = -\operatorname{Re} (\tilde{I}^s e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* e^{-j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

desarrollando (α) y aplicando la propiedad A1.8:

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} ((\tilde{I}^s)^* e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}) \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} e^{j(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})})$$

aplicando la propiedad A1.2:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} (\tilde{I}^s)^* \sum_{i=1}^m (e^{j0} + e^{j2(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}))$$

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} (\tilde{I}^s)^*)$$

de forma análoga se desarrolla (β) , obteniéndose:

$$\frac{m}{2} \operatorname{Re} (j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} (\tilde{I}^s)^*)$$

desarrollando (γ) y aplicando la propiedad A1.2:

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re}(j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* \tilde{I}^s e^{j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0} \sum_{i=1}^m (e^{j 0} + e^{j 2(\omega t - (i-1) \frac{2\pi}{m})}))$$

$$-\frac{m}{2} \operatorname{Re}(j \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* e^{j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0})$$

de forma análoga se desarrolla (β), obteniéndose:

$$-\frac{m}{2} \operatorname{Re}(j \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^* e^{-j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0})$$

reemplazando (α), (β), (γ) y (δ):

$$T_e = P m \frac{n}{2} (\nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re}(j (\tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}) + \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re}(j (\tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_2}^{r'})$$

$$- \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* e^{j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0})$$

$$- \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^* e^{-j(\nu_1 - \nu_2) P \theta_0})) \quad (44)$$

Puesto que $P(\nu_1 + \nu_2)$ en las ecuaciones (32)-(35) y $P(\nu_1 - \nu_2)$ en las ecuaciones (41) - (44) se pueden reemplazar por H_n , se puede concluir que el torque síncrono de una máquina de inducción, si existe, depende únicamente del número de barras del rotor y el ángulo entre las fases del rotor y estator. Nótese que la velocidad síncrona ω_r dada por la ecuación (27) también depende únicamente del número de barras del rotor.

4.3 Relación entre el funcionamiento síncrono y los armónicos en cada componente $\alpha - \beta$

Los dos armónicos de órdenes ν_1 y ν_2 , los cuales pertenecen a un grupo de componentes $\alpha - \beta$ satisfacen la ecuación (26) ó (36). Lo contrario también es verdad, es decir que los armónicos de órdenes ν_1 y ν_2 que satisfacen la ecuación (26) ó (36) pertenecen a un grupo de componentes $\alpha - \beta$. Esto demuestra que el agrupamiento

de armónicos dentro de diferentes grupos de componentes $\alpha - \beta - 0$ no es un artificio de la transformación considerada sino es en realidad una indicación de su interacción natural. Esta importante conclusión invalida la suposición común que el rotor de jaula responde a cada armónico independientemente. Esta suposición puede ser conveniente o aún aplicable a algunos ejemplos por razones de facilidad o sencillez; sin embargo, esto es una sobresimplificación. En general, no es posible asumir un circuito independiente para cada armónico.

CAPITULO V

APLICACION DEL ANALISIS DEL FUNCIONAMIENTO SINCRONO Y ASINCRONO EN LA MAQUINA DE INDUCCION CON ROTOR JAULA DE ARDILLA EMPLEANDO TECNICAS COMPUTACIONALES

El objetivo de esta parte final del documento es el de ilustrar la aplicación de la teoría desarrollada a la común máquina de inducción trifásica tipo jaula de ardilla en la que se incluyen el efecto de los armónicos espaciales.

Se describe el procedimiento para identificar los armónicos más significativos. Se examinan los efectos de los armónicos de la fuerza magnetomotriz en funcionamiento de estado estable de tres máquinas de inducción cuyos rotores han sido expresamente diseñados para observar torques síncronos y asíncronos pronunciados. Se plantean los algoritmos de solución y finalmente se procede a la simulación en una computadora digital.

5.1 Cálculo de los parámetros de la máquina de inducción

Las tres máquinas tienen un diseño estatórico común, y difieren únicamente en sus rotores.

La máquina I tiene un rotor expresamente diseñado para dar torques armónicos asíncronos pronunciados, mientras que la máquina III tiene un rotor que proporciona -

torques sincronicos pronunciados. La máquina II tiene pequeños torques armónicos sincronicos y asincronicos y es el diseño que se recomienda

5.1.1. Especificaciones Generales

-	Potencia	:	5 HP
-	Número de Polos	:	4
-	Número de fases del estator	:	3
-	Tensión	:	460 Voltios
-	Frecuencia	:	60 Hz
-	Conexión	:	Estrella

5.1.2 Especificaciones del estator

Las dimensiones están en pulgadas.

-	Número de ranuras	:	24
-	Paso bobina/paso polar (p)	:	5/6
-	Longitud del estator apilado	:	4.5
-	Longitud efectiva (l_e)	:	4.54
-	Longitud del entrehierro (g)	:	0.018
-	Entrehierro efectivo de la Máquina I (g_e)	:	0.0247
-	Entrehierro efectivo de la Máquina II y III (g_e)	:	0.024
-	Número de vueltas por fase (N)	:	240

Los valores de entrehierro efectivo se obtienen al corregirlos por el coeficiente de Carter y el factor

tor de saturación.

El estator tiene un bobinado imbricado de doble capa con alambre de cobre esmaltado calibre N°18 AWG.

La densidad de flujo en el entrehierro se - asume que está por debajo de la saturación (36.6 Klíneas/pulg²).

Las ranuras estatóricas son rectangulares y semicerradas con las siguientes dimensiones:

- Ancho de la abertura : 0.125
- Profundidad de la abertura : 0.04
- Ancho de la porción rectangular : 0.5
- Profundidad de la porción rectangular : 0.85
- Profundidad total : 0.93

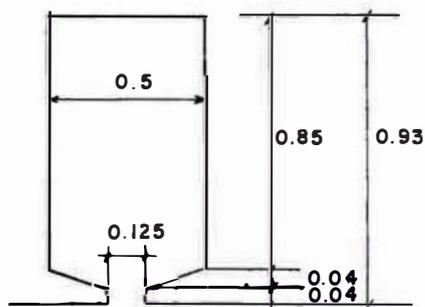


Fig.15. Dimensiones de una ranura del estator

A partir de estos datos de base se efectúan los cálculos que a continuación siguen para construir el esquema de bobinados.

- N°de bobinas : 24
- N°de bobinas/fase : 8

- N° ranuras / (polo x fase) : $24 / (4 \times 3) = 2$ (1 grupo formado por 2 bobinas)
- N° grupos / fase : $8 / 2 = 4$
- Paso polar () : $24 / 4 = 6$ ranuras / polo
- Paso de fase : ranuras / (fase x pares de polos) = $24 / (3 \times 2) = 4$
- Paso de bobina : 5 ranuras
- Paso de grupo : N° ranuras / N° polos = $24 / 4 = 6$

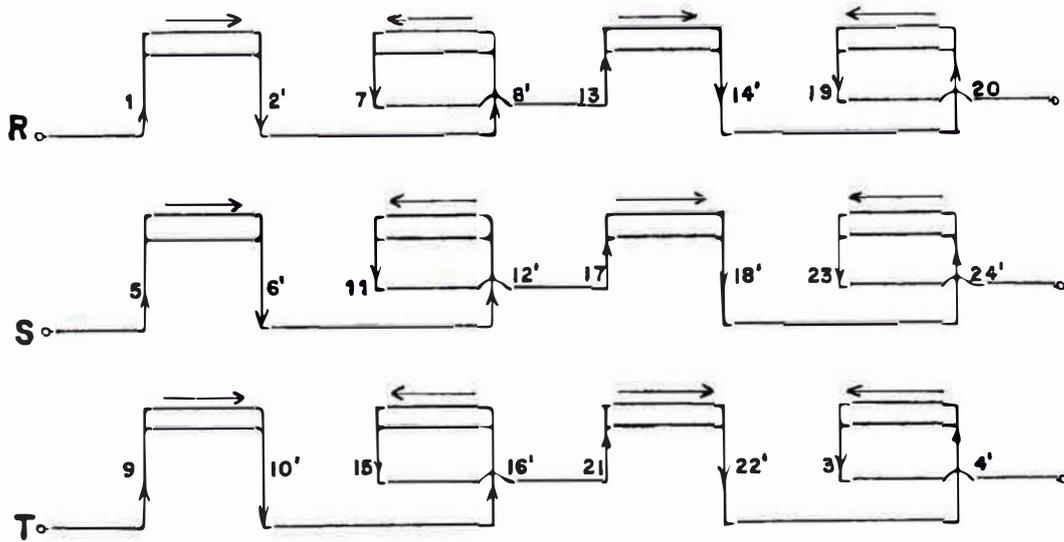


Fig.16. Esquema de las conexiones de los grupos de bobinas del estator.

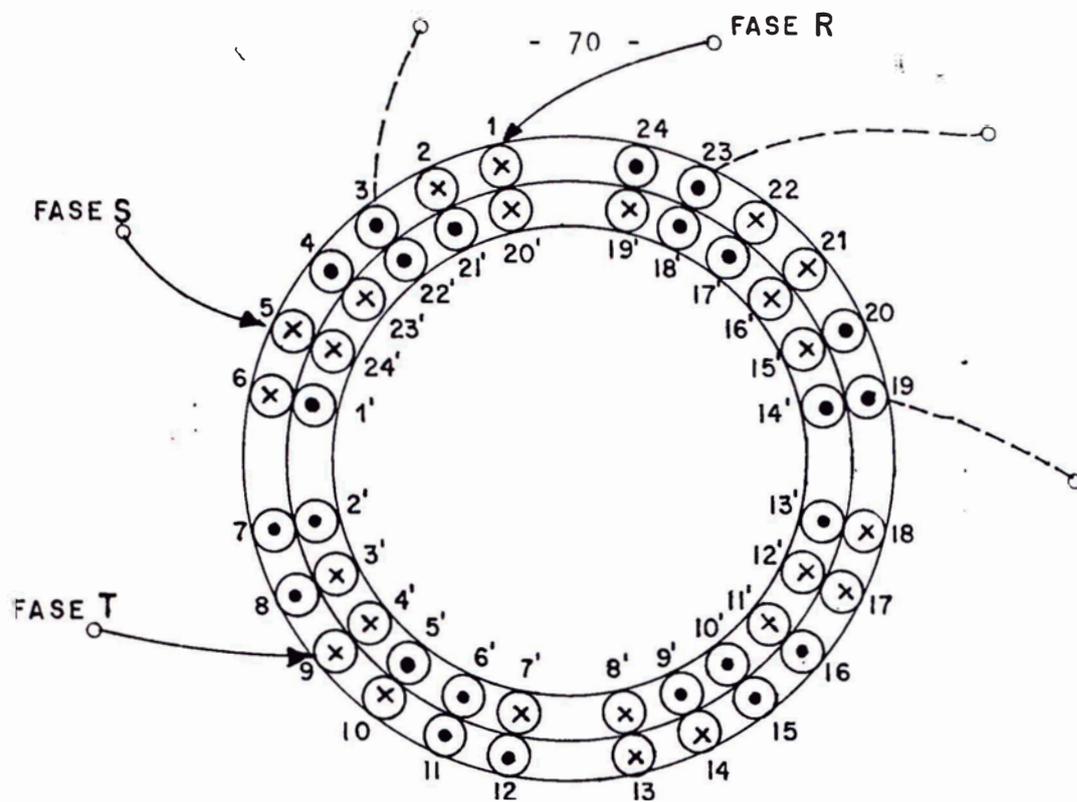


Fig.17. Esquema lateral del devanado trifásico para un estator de 24 ranuras y 4 polos.

5.1.3 Especificaciones del rotor de la Máquina I

- Número de barras (n) : 46
- Sección transversal de cada barra : 0.0255
- Sección transversal de los anillos : 0.09
- Longitud de la barra : 5.5

Las ranuras rotóricas son rectangulares y se micerradas con las siguientes dimensiones:

- Ancho de abertura : 0.06
- Profundidad de abertura: 0.04
- Ancho de la porción rectangular : 0.085
- Profundidad de la porción rectangular : 0.0287 (0.3287)
- Profundidad total : 0.42

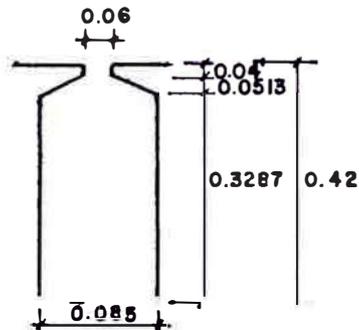


Fig.18. Dimensiones de una ranura del rotor de la Máquina I.

5. 4 Especificaciones del rotor de la Máquina II

- Número de barras (n) : 30
- Sección transversal de cada barra : 0.039
- Sección transversal de los anillos : 0.09

- Longitud de la barra : 5.5

Las ranuras rotóricas son rectangulares y se micerradas con las siguientes dimensiones:

- Ancho de abertura : 0.06
- Profundidad de abertura : 0.04
- Ancho de la porción rectangular : 0.105
- Profundidad de la porción rectangular : 0.40
- Profundidad total : 0.447

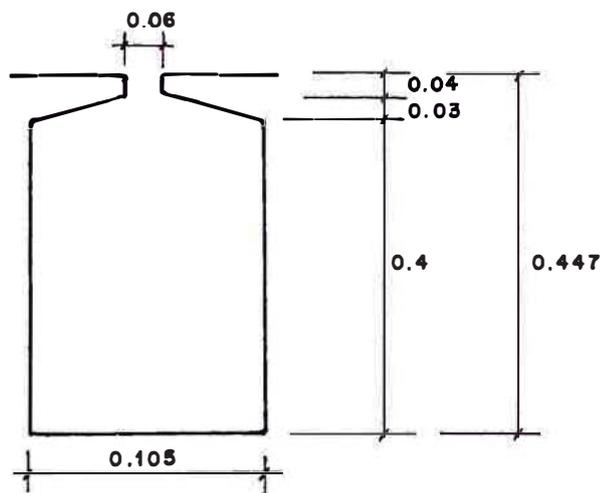


Fig.19. Dimensiones de una ranura del rotor de la Máquina II.

5. 5 Especificaciones del rotor de la Máquina III

- Número de barras(n) : 28
- Sección transversal de cada barra : 0.042
- Sección transversal de los anillos : 0.09
- Longitud de la barra : 5.5

Las ranuras rotóricas son rectangulares y se micerradas, con las siguientes dimensiones:

- Ancho de abertura : 0.06
- Profundidad de abertura : 0.04
- Ancho de la porción rectangular : 0.105
- Profundidad de la porción rectangular : 0.43
- Profundidad total : 0.477

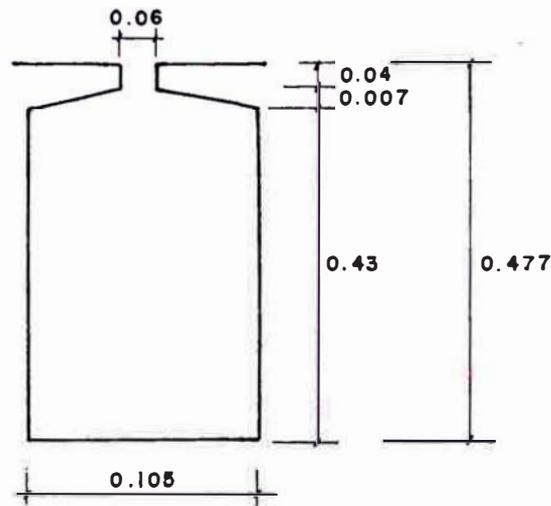


Fig.20. Dimensiones de una ranura del rotor de la máquina III.

5.1.6 Parámetros calculados del estator

- Resistencia del estator (Rs) : 1.866 Ω
- Inductancia de dispersión (L₁^s) : 11.6x10⁻³ H.

Incluye la inductancia de dispersión de ranura, cabezas de bobinas y zig-zag.

$$L_{m_1}^s = 0.2984 \sum_{\nu} \left(\frac{K_{\nu}}{\nu} \right)^2 \quad \text{H.}$$

Donde:

$$K_{\nu} = \frac{\text{Sen}(90^{\circ}\nu) \text{ Sen}(75^{\circ}\nu) \text{ Sen}(30^{\circ}\nu)}{2 \text{ Sen}(15^{\circ}\nu)} \frac{\text{Sen}(2.65^{\circ}\nu)}{0.0462\nu}$$

5.1.7 Parámetros calculados de la Máquina I

- Resistencia de cada barra (R_b) : $178 \mu\Omega$
- Resistencia del segmento de anillo (R_a) : $2.75 \mu\Omega$
- Inductancia de dispersión de cada barra (L_b) : 0.296×10^{-6} H.
- Inductancia de dispersión del segmento de anillo (L_a) : 5.1×10^{-9} H.
- Inductancia mutua esta-
tor-rotor (L_{ν}^{sr}) = $1.2459 \times 10^{-3} \frac{K_{\nu}}{\nu^2} \text{Sen}(\frac{180}{23} \nu)$ H.

5.1.8 Parámetros calculados de la Máquina II

- Resistencia de cada barra (R_b) : $116.3 \mu\Omega$
- Resistencia del segmento de anillo (R_a) : $4.22 \mu\Omega$
- Inductancia de dispersión de cada barra (L_b) : 0.2953×10^{-6} H.
- Inductancia de dispersión del segmento de anillo (L_a) : 7.8×10^{-9} H.
- Inductancia mutua esta-
tor-rotor (L_{ν}^{sr}) = $1.196 \times 10^{-3} \frac{K_{\nu}}{\nu^2} \text{Sen}(\frac{180}{15} \nu)$ H.

5.1.9 Parámetros calculados de la Máquina III

- Resistencia de cada barra (R_b) : $108 \mu\Omega$
- Resistencia del segmento de anillo (R_a) : $4.52 \mu\Omega$
- Inductancia de dispersión de cada barra (L_b) : 0.31×10^{-6} H.
- Inductancia mutua es-
tator-rotor (L_{ν}^{sr}) = $1.196 \times 10^{-3} \frac{K_{\nu}}{\nu^2} \text{Sen}(\frac{180}{14} \nu)$ H.

5.2 Formulación de los algoritmos de solución

Se pueden obtener las características completas de estado estable al resolver las ecuaciones para funcionamiento síncrono y asíncrono. El procedimiento empieza - al determinar si existe funcionamiento síncrono significativo y en que velocidad ocurre.

Desde que cualquier par de armónicos pertenecientes al mismo juego de componentes α - β satisfacen la condición dada en la ecuación (26) ó (36), como se verá más adelante es relativamente simple determinar las velocidades síncronas de las Tablas 3-5. A continuación se obtienen las características de estado estable en las velocidades síncronas. Finalmente, se obtienen las características de estado estable para funcionamiento asíncrono en las otras velocidades.

5.2.1 Selección de armónicos significativos

La selección se basa en el conocimiento de - que armónicos están presentes y sus interacciones. Para una máquina de inducción trifásica, la interacción está presente entre dos armónicos cuyas ordenes son comunes a $\nu = Km + 1$ y $\nu = H \frac{n}{p} + j$. La magnitud de estas interacciones se determinan mejor de los cálculos de estado estable.

Los armónicos estatóricos cumplen:

$$\nu_i = Km + i$$

Para:

$$(0 < i < \frac{m}{2}) \quad \text{y} \quad (i=1, \dots, \frac{m-1}{2})$$

Entonces para el caso particular que desarrolla, debe cumplir que:

$$v_1 = 3K + 1$$

Tabla 2. Armónicos del estator de 3 fases.

K	0	+1		+2	-2	+3	-3	+4	-4
v_1	1	4	-2	7	-5	10	-8	-13	-11

K	+5	-5	+6	-6	+7	-7	+8	-8
v_1	6	4	19	7	22	-20	25	-23

Los armónicos rotóricos de la máquina cumplen:

$$v_j = H \frac{n}{p} + j$$

Para:

$$(0 < j < \frac{n}{2}) \quad \text{y} \quad (j=1, \dots, \frac{n-1}{2})$$

Entonces para el caso particular que desarrolla, debe cumplir que:

$$v_j = 23H + j$$

$$j = 1, 2, \dots, 11$$

H \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
-1	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	23
1	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	23

Table 3. Armónicos del rotor de la máquina I.

Para el caso particular de los armónicos rotóricos de la máquina II, debe cumplir que:

$$V_j = 15 H + j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

H \ j	1	2	3	4	5	6	7	0
0	1	2	3	4	5	6	7	0
-1	14	13	12	11	10	9	8	15
1	16	17	18	19	20	21	22	15
-2	29	28	27	26	25	24	23	30

Tabla 4. Armónicos del rotor de la Máquina II.

Para el caso particular de los armónicos rotóricos de la maquina III, debe cumplir que:

$$V_j = 14H + j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

H \ j	1	2	3	4	5	6	7	0
0	1	2	3	4	5	6	7	0
-1	13	12	11	10	9	8	7	14
1	15	16	17	18	19	20	21	14
-2	27	26	25	24	23	22	21	28

Tabla 5. Armónicos del rotor de la Máquina III.

Los bobinados del estator son de diseño stan
dard, no se ha intentado incrementar el contenido de ar
mónicos más allá que el obtenido con el diseño práctico
convencional. Las bobinas del estator tienen un paso -
0.833, que reduce los primeros dos armónicos, el quinto y
el sétimo. Aunque, los armónicos más importantes con -
esta configuración de bobinado son el onceavo y el tre -
ceavo.

Con una configuración ya establecida del estator, las características de los torques armónicos asíncronos y síncronos dependen del número de barras del rotor. Los rotores de las máquinas I, II y III tienen 46, 30 y 28 barras respectivamente. Las Tablas 3-5 muestran la distribución de los armónicos del rotor de menor orden en los diferentes juegos de componentes rotóricas.

Los armónicos del rotor que interaccionan con los del estator están encerrados en círculo.

No todos estos armónicos son significativos, de hecho muchos de estos armónicos se pueden ignorar, en particular los armónicos más altos tienen menor efecto en la mayoría de los casos.

Basados en estas tablas y las conexiones de bobinados, se pueden hacer una eliminación juiciosa de ciertos grupos de armónicos.

5.2.2 Funcionamiento asíncrono

Para la evaluación del funcionamiento asíncrono, se hace uso de las ecuaciones (13), (14) y (22) ó alternativamente las ecuaciones (16), (17) y (23).

Considerando el primer caso, se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_\nu^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + \sum_\nu j\omega \frac{n}{2} L_\nu^{sr} \tilde{I}_\nu^{r'}$$

$$0 = \left(\frac{R_\nu^{\alpha\beta r}}{S_\nu} + j\omega L_\nu^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_\nu^{r'} + j\omega \frac{m}{2} L_\nu^{sr} \tilde{I}^s$$

Reagrupando, se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_\nu^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + \sum_\nu j\omega \frac{n}{2} L_\nu^{sr} \tilde{I}_\nu^{r'}$$

$$0 = j\omega \frac{m}{2} L_\nu^{sr} \tilde{I}^s + \left(\frac{R_\nu^{\alpha\beta r}}{S_\nu} + j\omega L_\nu^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_\nu^{r'}$$

Transformando a la forma submatricial, considerando que:

$$a + jb = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Y desarrollando para un solo armónico, se tiene:

$$\tilde{V}^s = \begin{bmatrix} R^s & -\omega L_\nu^{\alpha\beta s} \\ \omega L_\nu^{\alpha\beta s} & R^s \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \frac{n}{2} L_\nu^{sr} \\ \omega \frac{n}{2} L_\nu^{sr} & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}_\nu^{r'}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \frac{m}{2} L_\nu^{sr} \\ \omega \frac{m}{2} L_\nu^{sr} & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} \frac{R_\nu^{\alpha\beta r}}{S_\nu} & -\omega L_\nu^{\alpha\beta r} \\ \omega L_\nu^{\alpha\beta r} & \frac{R_\nu^{\alpha\beta r}}{S_\nu} \end{bmatrix} \tilde{I}_\nu^{r'}$$

Si se hace:

$$\tilde{V}^s = [v1 \quad 0]^t$$

$$\tilde{I}^s = [I1 \quad I2]^t$$

$$\tilde{I}_\nu^{r'} = [I3 \quad I4]^t$$

Las ecuaciones se pueden transformar a la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s & -\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} & 0 & -\omega \frac{n}{2} L_{\nu}^{sr} \\ \omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} & R^s & \omega \frac{n}{2} L_{\nu}^{sr} & 0 \\ 0 & -\omega \frac{m}{2} L_{\nu}^{sr} & \frac{R_{\nu}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu}} & -\omega L_{\nu}^{\alpha\beta r} \\ \omega \frac{m}{2} L_{\nu}^{sr} & 0 & \omega L_{\nu}^{\alpha\beta r} & \frac{R_{\nu}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Para la expresión del torque, se tiene:

$$T_e = P m \frac{n}{2} \left\{ \nu L_{\nu}^{sr} \operatorname{Re} (j \tilde{I}_{\nu}^{r'} (\tilde{I}^s)^*) \right\}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (j \tilde{I}_{\nu}^{r'} (\tilde{I}^s)^*) &= \operatorname{Re} (j (I3 + j I4) (I1 + j I2)^*) \\ &= \operatorname{Re} ((-I4 + j I3) (I1 - j I2)) \\ &= \operatorname{Re} ((I2 I3 - I1 I4) + j (I2 I4 + I1 I3)) \\ &= I2 I3 - I1 I4 \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$T_e = P m \frac{n}{2} \left\{ \nu L_{\nu}^{sr} (I2 I3 - I1 I4) \right\} \quad (46)$$

5.2.3 Funcionamiento síncrono

A. En una velocidad específica

Para la evaluación del funcionamiento síncrono en velocidad específica, se hace uso de las ecuaciones (32)

(35). Considerando $\theta_o = 0$; se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta r}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^* + L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^*)$$

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}^s)^*)$$

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} + j\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}^s)^*)$$

Reagrupando, se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^*) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} + L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^*)$$

$$0 = j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_2}^{sr} (\tilde{I}^s)^*) + \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}$$

$$0 = j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_1}^{sr} (\tilde{I}^s)^*) + \left(\frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} + j\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}$$

Transformando a la forma submatricial, considerando que:

$$1) \quad a + jb = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \text{Sea } T = AB^* \quad ; \quad A = ja \quad , \quad B = b + jc$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene:

$$\tilde{V}^s = \begin{bmatrix} R^s & -\omega L_p^{\alpha p s} \\ \omega L_p^{\alpha p s} & R^s \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} 0 & \omega \frac{m}{2} (-L_{\mu_1}^{sr} + L_{\mu_2}^{sr}) \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\mu_1}^{sr} + L_{\mu_2}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}_{\mu_1}^{r'} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \frac{m}{2} (-L_{\mu_2}^{sr} + L_{\mu_1}^{sr}) \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\mu_2}^{sr} + L_{\mu_1}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}_{\mu_2}^{r'}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \frac{m}{2} (-L_{\mu_1}^{sr} + L_{\mu_2}^{sr}) \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\mu_1}^{sr} + L_{\mu_2}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} \frac{R_{\mu_1}^{\alpha p r}}{S_{\mu_1}} & -\omega L_{\mu_1}^{\alpha p r} \\ \omega L_{\mu_1}^{\alpha p r} & \frac{R_{\mu_1}^{\alpha p r}}{S_{\mu_1}} \end{bmatrix} \tilde{I}_{\mu_1}^{r'}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \frac{m}{2} (-L_{\mu_2}^{sr} + L_{\mu_1}^{sr}) \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\mu_2}^{sr} + L_{\mu_1}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} \frac{R_{\mu_2}^{\alpha p r}}{S_{\mu_2}} & -\omega L_{\mu_2}^{\alpha p r} \\ \omega L_{\mu_2}^{\alpha p r} & \frac{R_{\mu_2}^{\alpha p r}}{S_{\mu_2}} \end{bmatrix} \tilde{I}_{\mu_2}^{r'}$$

Si se hace:

$$\tilde{V}^s = [V_1 \quad 0]^t \quad ; \quad \tilde{I}^s = [I_1 \quad I_2]^t$$

$$\tilde{I}_{\mu_1}^{r'} = [I_3 \quad I_4]^t \quad ; \quad \tilde{I}_{\mu_2}^{r'} = [I_5 \quad I_6]^t$$

Las ecuaciones se pueden transformar a la forma matricial:

$$[V] = [Z] [I] \quad (47)$$

$$[V] = [V_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t$$

$$[I] = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4 \ I_5 \ I_6]^t$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R^s & -\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} & 0 & \omega \frac{n}{2} (-L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & \omega \frac{n}{2} (-L_{\nu_2}^{sr} + L_{\nu_1}^{sr}) \\ \omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} & R^s & \omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & \omega \frac{n}{2} (L_{\nu_2}^{sr} + L_{\nu_1}^{sr}) & 0 \\ 0 & \omega \frac{m}{2} (-L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & \frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} & -\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} & 0 & 0 \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & \omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} & \frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \omega \frac{m}{2} (-L_{\nu_2}^{sr} + L_{\nu_1}^{sr}) & 0 & 0 & \frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} & -\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\nu_2}^{sr} + L_{\nu_1}^{sr}) & 0 & 0 & 0 & \omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} & \frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} \end{bmatrix}$$

Para la expresión del torque, se tiene:

$$T_e = P m \frac{n}{2} \left\{ \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re} (j (\tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}) + \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re} (j (\tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) - \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re} (j \tilde{I}^s \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}) - \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re} (j \tilde{I}^s \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) \right\}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} &= \operatorname{Re}(j (I_1 + j I_2)^* (I_3 + j I_4)) \\
 &= \operatorname{Re}(j (I_1 - j I_2) (I_3 + j I_4)) \\
 &= \operatorname{Re}((I_2 + j I_1) (I_3 + j I_4)) \\
 &= \operatorname{Re}((I_2 I_3 - I_1 I_4) + j (I_2 I_4 + I_1 I_3)) \\
 &= I_2 I_3 - I_1 I_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} &= \operatorname{Re}(j (I_1 + j I_2)^* (I_5 + j I_6)) \\
 &= \operatorname{Re}((I_2 + j I_1) (I_5 + j I_6)) \\
 &= \operatorname{Re}((I_2 I_5 - I_1 I_6) + j (I_2 I_6 + I_1 I_5)) \\
 &= I_2 I_5 - I_1 I_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) &= \operatorname{Re}(j (I_1 + j I_2) (I_5 + j I_6)) \\
 &= \operatorname{Re}((-I_2 + j I_1) (I_5 + j I_6)) \\
 &= \operatorname{Re}(-(I_2 I_5 + I_1 I_6) + j (-I_2 I_6 + I_1 I_5)) \\
 &= -(I_2 I_5 + I_1 I_6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}) &= \operatorname{Re}(j (I_1 + j I_2) (I_3 + j I_4)) \\
 &= \operatorname{Re}((-I_2 + j I_1) (I_3 + j I_4)) \\
 &= \operatorname{Re}(-(I_2 I_3 + I_1 I_4) + j (-I_2 I_4 + I_1 I_3)) \\
 &= -(I_2 I_3 + I_1 I_4)
 \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$T_e = \frac{P_m n}{2} \left\{ \begin{aligned} & \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} (I_2 I_3 - I_1 I_4) + \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} (I_2 I_5 - I_1 I_6) \\ & + \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} (I_2 I_5 + I_1 I_6) + \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} (I_2 I_3 + I_1 I_4) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

B. En velocidad cero

Para la evaluación del funcionamiento síncrono en ve locidad cero, se hace uso de las ecuaciones (41)-(44).

Considerando $\theta_0 = 0$; se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta r}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}) + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'})$$

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s)$$

$$0 = \left(\frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} + j\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} + j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_2}^{sr} \tilde{I}^s + L_{\nu_1}^{sr} \tilde{I}^s)$$

Reagrupando, se tiene:

$$\tilde{V}^s = (R^s + j\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s}) \tilde{I}^s + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + j\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}$$

$$0 = j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \tilde{I}^s + \left(\frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} + j\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}$$

$$0 = j\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \tilde{I}^s + \left(\frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} + j\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \right) \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}$$

Transformando a la forma submatricial, considerando que:

$$a + jb = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene:

$$\tilde{V}^s = \begin{bmatrix} R^s & -\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} \\ \omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} & R^s \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \\ \omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \\ \omega \frac{n}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} \frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} & -\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} \\ \omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} & \frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} \end{bmatrix} \tilde{I}_{\nu_1}^{r'}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 \end{bmatrix} \tilde{I}^s + \begin{bmatrix} \frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} & -\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \\ \omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} & \frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} \end{bmatrix} \tilde{I}_{\nu_2}^{r'}$$

Si se hace:

$$\tilde{V}^s = [V1 \ 0]^t \quad ; \quad \tilde{I}^s = [I1 \ I2]^t$$

$$\tilde{I}_{\nu_1}^{r'} = [I3 \ I4]^t \quad ; \quad \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} = [I5 \ I6]^t$$

Las ecuaciones se pueden transformar a la forma matricial:

$$[V] = [Z] [I] \quad (49)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I1 & I2 & I3 & I4 & I5 & I6 \end{bmatrix}^t$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R^s & -\omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} & 0 & -\omega \frac{\eta}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & -\omega \frac{\eta}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) \\ \omega L_{\nu}^{\alpha\beta s} & R^s & \omega \frac{\eta}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & \omega \frac{\eta}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 \\ 0 & -\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & \frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} & -\omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} & 0 & 0 \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & \omega L_{\nu_1}^{\alpha\beta r} & \frac{R_{\nu_1}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_1}} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & 0 & \frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} & -\omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} \\ \omega \frac{m}{2} (L_{\nu_1}^{sr} + L_{\nu_2}^{sr}) & 0 & 0 & 0 & \omega L_{\nu_2}^{\alpha\beta r} & \frac{R_{\nu_2}^{\alpha\beta r}}{S_{\nu_2}} \end{bmatrix}$$

Para la expresión del torque, se tiene:

$$T_e = P_m \frac{\eta}{2} \left\{ \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} + \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} - \nu_1 L_{\nu_1}^{sr} \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^*) - \nu_2 L_{\nu_2}^{sr} \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^*) \right\}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_1}^{r'} &= \operatorname{Re}(j (I_1 + j I_2)^* (I_3 + j I_4)) \\ &= \operatorname{Re}((I_2 + j I_1) (I_3 + j I_4)) \\ &= \operatorname{Re}((I_2 I_3 - I_1 I_4) + j (I_2 I_4 + I_1 I_3)) \\ &= I_2 I_3 - I_1 I_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s)^* \tilde{I}_{\nu_2}^{r'} &= \operatorname{Re}(j(I_1 + jI_2)^* (I_5 + jI_6)) \\
 &= \operatorname{Re}((I_2 + jI_1) (I_5 + jI_6)) \\
 &= \operatorname{Re}((I_2 I_5 - I_1 I_6) + j(I_2 I_6 + I_1 I_5)) \\
 &= I_2 I_5 - I_1 I_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_2}^{r'})^*) &= \operatorname{Re}(j(I_1 + jI_2) (I_5 + jI_6)^*) \\
 &= \operatorname{Re}((-I_2 + jI_1) (I_5 - jI_6)) \\
 &= \operatorname{Re}(-(I_2 I_5 - I_1 I_6) + j(I_2 I_6 + I_1 I_5)) \\
 &= -(I_2 I_5 - I_1 I_6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(j \tilde{I}^s (\tilde{I}_{\nu_1}^{r'})^*) &= \operatorname{Re}(j(I_1 + jI_2) (I_3 + jI_4)^*) \\
 &= \operatorname{Re}((-I_2 + jI_1) (I_3 - jI_4)) \\
 &= \operatorname{Re}(-(I_2 I_3 - I_1 I_4) + j(I_2 I_4 + I_1 I_3)) \\
 &= -(I_2 I_3 - I_1 I_4)
 \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
 T_e = P m \frac{n}{2} &\left\{ \nu_1^{\text{sr}} L_{\nu_1}^{\text{sr}} (I_2 I_3 - I_1 I_4) + \nu_2^{\text{sr}} L_{\nu_2}^{\text{sr}} (I_2 I_5 - I_1 I_6) \right. \\
 &\left. + \nu_1^{\text{sr}} L_{\nu_1}^{\text{sr}} (I_2 I_5 - I_1 I_6) + \nu_2^{\text{sr}} L_{\nu_2}^{\text{sr}} (I_2 I_3 - I_1 I_4) \right\} \quad (50)
 \end{aligned}$$

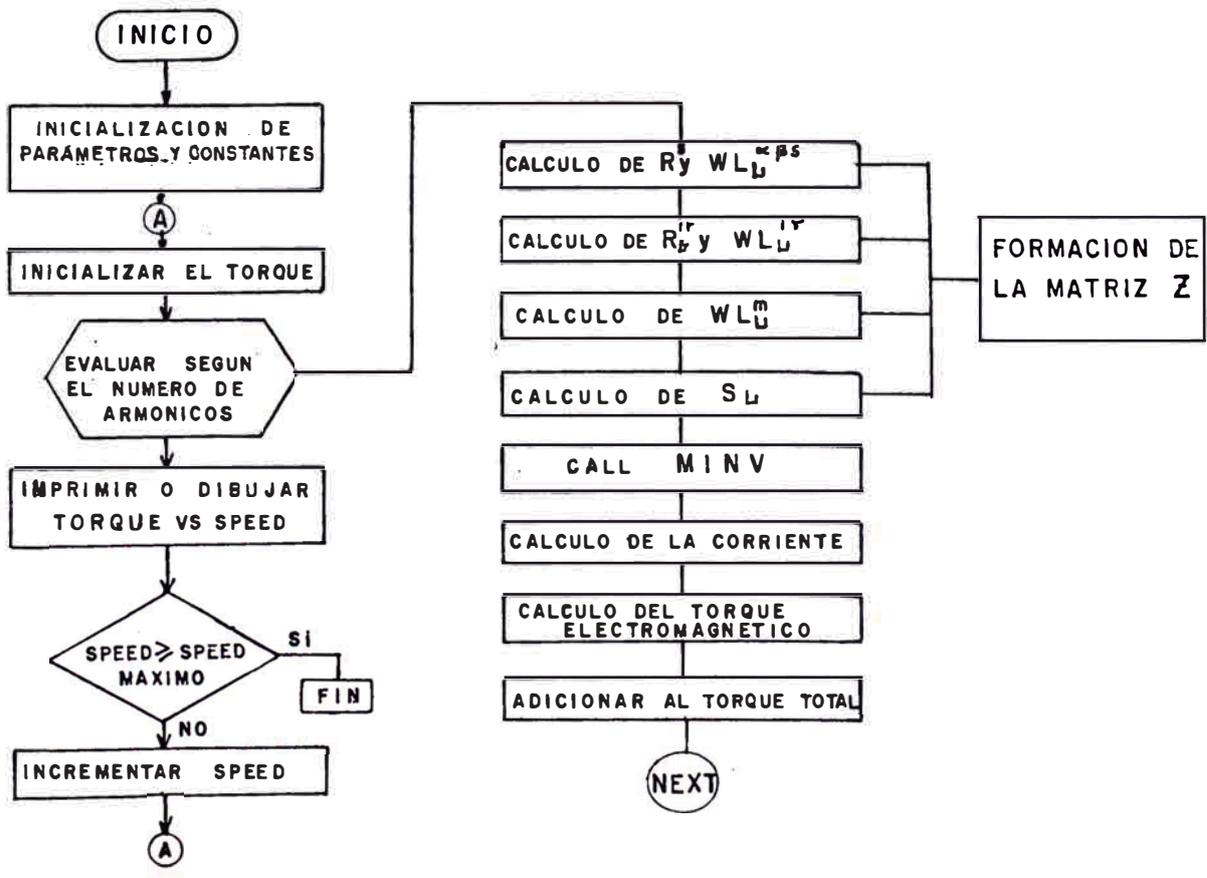
5.3 Simulación en una computadora digital

Se describe una simulación completamente digital, de una máquina de inducción general de m-n fases en la que se incluyen los efectos de los armónicos espaciales de cualquier orden, para calcular en condiciones de estado estable el funcionamiento síncrono y asíncrono. El elemento principal es la solución de las ecuaciones complejas, para el cual se usan los algoritmos ya descritos anteriormente. Con el uso de esta técnica, es relativamente fácil programar aún al nivel de microcomputadoras profesionales.

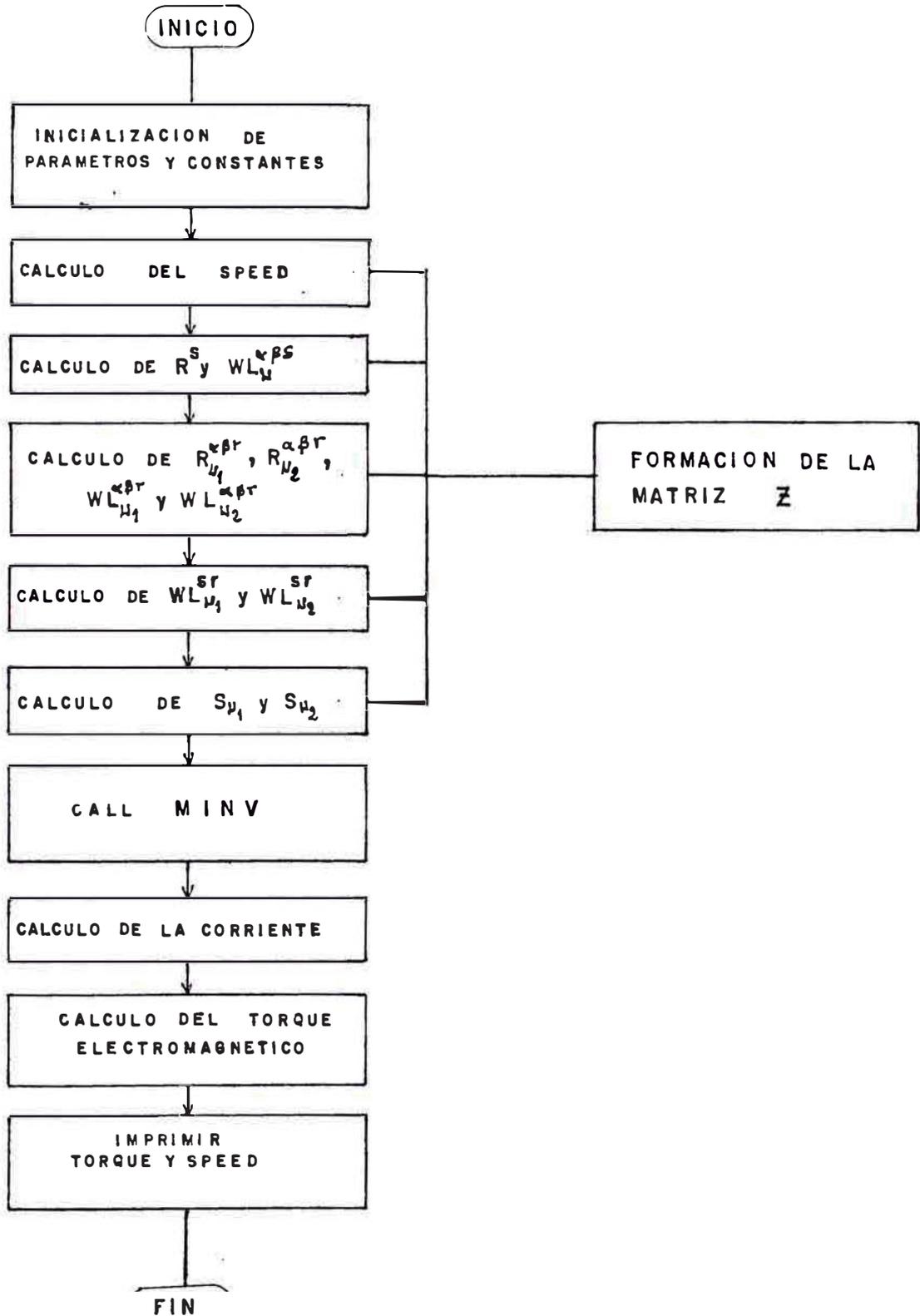
5.3. Software de solución

El lenguaje de programación empleado es el FORTRAN. A continuación se detallan los diagramas de flujo, programas y subrutinas.

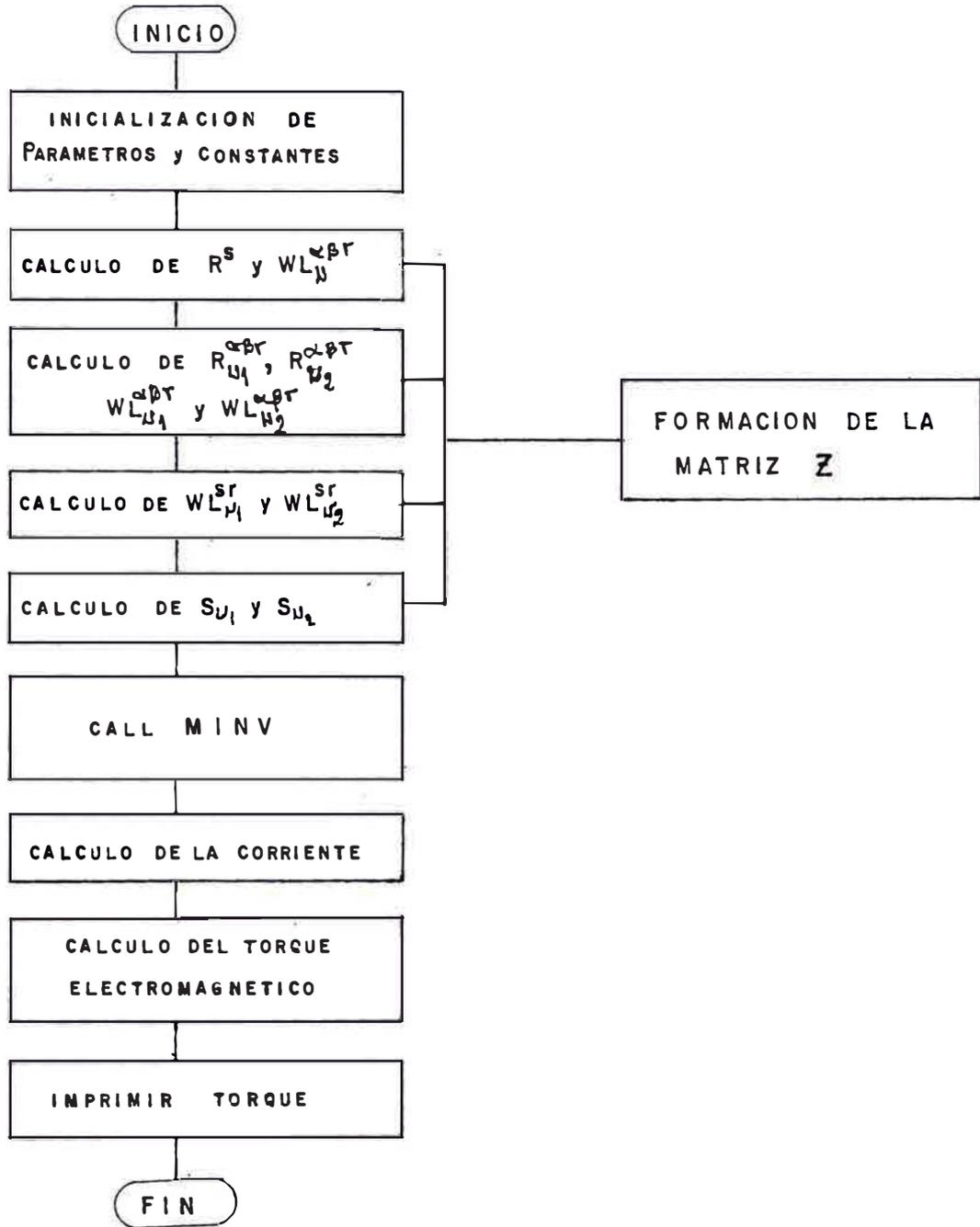
A.1. DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL FUNCIONAMIENTO ASINCRONO



A.2 DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL FUNCIONAMIENTO SINCRONO EN VELOCIDAD ESPECIFICA.



A.3. DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL FUNCIONAMIENTO SINCRONO EN VELOCIDAD CERO.



B.1. PROGRAMA 1 : Funcionamiento asíncrono.

ORGANIZACION DE LOS DATOS

RS	: Resistencia del estator en ohms. (R^S)
RA	: Resistencia del segmento de anillo en ohms. (R_a)
rb	: Resistencia de cada barra en ohms (R_b)
CS	: Constante de permeancia del estator.
CSR	: Constante de permeancia del estator-rotor.
CR	: Constante de permeancia del rotor.
LIS	: Inductancia de dispersión total del estator (ra nura, cabeza y zig-zag) en H. ($L\zeta$)
LA	: Inductancia del segmento de anillo en H. (L_a)
LB	: Inductancia de cada barra en H. (L_b)
F	: Frecuencia en Hz.
M	: Número de fases del estator.
N	: Número de fases del rotor.
P	: Número de pares de polos.
H	: Incremento a considerarse con el SPEED.
NA	: Número de armónicos.
ARM	: Matriz unidimensional de armónicos.
VOLT	: Matriz unidimensional de tensión en V.
ALFA	: Angulo de inclinación de las barras en grados se xagesimales.
K1	: Factor de escala gráfica para desplazamiento ho rizontal.
K2	: Factor de escala gráfica para ampliación.
K3	: Factor de escala gráfica para reducción.
SLIP	: Deslizamiento del armónico.
SPEED	: Valor en p.u., proviene de SPEED w_r/w .

- T : Torque electromagnético puntual para cada armónico en Nt-m.
- TORQUE : Torque total en cada punto de SPEED en Nt-m.
- RR : Resistencia en ohms.
- LM : Inductancia de magnetización en H.
- LS : Inductancia del estator en H.
- LR : Inductancia del rotor en H.
- XS : Impedancia del estator en ohms.
- XSR : Impedancia del estator-rotor en ohms.
- XR : Impedancia del rotor en ohms.
- CORR : Matriz unidimensional de corriente.
- V : Armónico.
- GRAY : Matriz unidimensional para graficar.
- W : Frecuencia angular en rad./seg.
- PI : Constante igual a 3.1416.
- AUX1 : Matriz unidimensional auxiliar 1 usado dentro de la subrutina MINV.
- AUX2 : Matriz unidimensional auxiliar 2 usado dentro de la subrutina MINV.
- Z : Matriz bidimensional de orden 4 donde se encuentran los elementos que componen la impedancia.

(Ver LISTADO 1 : PROGRAMA DEL FUNCIONAMIENTO ASINCRONO)

B.2 PROGRAMA 2 : Funcionamiento síncrono en velocidad específica

ORGANIZACION DE LOS DATOS

RS : Resistencia del estator en ohms. (R^s)
RA : Resistencia del segmento de anillo en ohms (R_a)
RB : Resistencia de cada barra en ohms. (R_b)
CS : Constante de permeancia del estator.
CSR : Constante de permeancia del estator-rotor.
CR : Constante de permeancia del rotor.
LIS : Inductancia de dispersión total del estator (ranura, cabeza y Zig-zag) en H.
LA : Inductancia del segmento de anillo en H. (L_a)
LB : Inductancia de cada barra en H. (L_b)
F : Frecuencia en Hz.
M : Número de fases del estator.
N : Número de fases del rotor.
P : Número de pares de polos del estator.
VOLT : Matriz unidimensional de orden 6 de tensión en V.
V1 : Armónico
V2 : Armónico 2.
RR1 : Resistencia del rotor para el armónico 1 en ohms.

- RR2 : Resistencia del rotor para el armónico 2 en ohms.
- LVR1 : Inductancia del rotor para el armónico 1 en H.
- LVR2 : Inductancia del rotor para el armónico 2 en H.
- LVSR1 : Inductancia estator-rotor para el armónico 1 en H.
- LVSR2 : Inductancia estator-rotor para el armónico 2 en H.
- LS : Inductancia del estator en H.
- CORR : Matriz unidimensional de orden 6 de corriente - en A.
- Z : Matriz bidimensional de orden 6 de impedancia - en ohms.
- SLIP1 : Deslizamiento del armónico .
- SLIP2 : Deslizamiento del armónico 2.
- SPEED : Velocidad específica en el que ocurre el funcionamiento síncrono.
- TORQUE : Torque electromagnético en Nt-m.
- AUX1 : Matriz unidimensional auxiliar 1 usado dentro de la subrutina MINV.
- AUX2 : Matriz unidimensional auxiliar 2 usado dentro de rutina MINV.
- W : Frecuencia angular en rad/seg.
- PI : Constante igual a 3.1416.
- F1 : Constante que resulta de $(\omega \times m) / 2$

- F2 : Constante que resulta de $(\omega * n) / 2$
- F3 : Constante que resulta de $(P * m * n) / 2$
- F4 : Constante que resulta de $v_1 * L_{v_1}^{sr}$
- F5 : Constante que resulta de $v_2 * L_{v_2}^{sr}$
- F6 : Constante que resulta de $L_{v_1}^{sr} + L_{v_2}^{sr}$
- F7 : Constante que resulta de $L_{v_1}^{sr} - L_{v_2}^{sr}$
- F8 : Constante que resulta de $I_2 (I_3 + I_5)$
- F9 : Constante que resulta de $I_1 (I_6 - I_4)$

(Ver LISTADO 2 : Programa del funcionamiento síncrono en velocidad específica)

B.3. PROGRAMA 3 : Funcionamiento síncrono en velocidad cero.

ORGANIZACION DE LOS DATOS

- RS : Resistencia del estator en ohms. (R^s)
- RA : Resistencia del segmento de anillo en ohms (R_a)
- RB : Resistencia de cada barra en ohms (R_b)
- CS : Constante de permeancia del estator.

- CSR : Constante de permeancia del estator-rotor.
- CR : Constante de permeancia del rotor.
- LIS : Inductancia de dispersión total de estator (ranura, cabeza y zig-zag) en H.
- LA : Inductancia del segmento de anillo en H. (L_a)
- LB : Inductancia de cada barra en H. (L_b)
- F : Frecuencia en Hz.
- M : Número de fases del estator.
- N : Número de fases del rotor.
- P : Número de pares de polos del estator.
- VOLT : Matriz unidimensional de orden 6 de tensión en V.
- V1 : Armónico 1.
- V2 : Armónico 2.
- RR1 : Resistencia del rotor para el armónico 1 en ohms.
- RR2 : Resistencia del rotor para el armónico 2 en ohms.
- LVR1 : Inductancia del rotor para el armónico 1 en H.
- LVR2 : Inductancia del rotor para el armónico 2 en H.
- LVSR1 : Inductancia estator-rotor para el armónico 1 en H.
- LVSR2 : Inductancia estator-rotor para el armónico 2 en H.
- LS : Inductancia del estator en H.

- CORR : Matriz unidimensional de orden 5 de corriente en A.
- Z : Matriz bidimensional de orden 6 de impedancia en ohms.
- SLIP1 : Deslizamiento del armónico 1.
- SLIP2 : Deslizamiento del armónico 2.
- TORQUE : Torque electromagnético en Nt-m.
- AUX1 : Matriz unidimensional auxiliar 1 usado dentro de la subrutina MINV.
- AUX2 : Matriz unidimensional auxiliar 2 usado dentro de la subrutina MINV.
- W : Frecuencia angular en rad/seg.
- PI : Constante igual a 3.1416.
- FL : Constante que resulta de $(\omega * m) / 2$
- F2 : Constante que resulta de $(\omega * n) / 2$
- F3 : Constante que resulta de $(P * m * n) / 2$
- F4 : Constante que resulta de $\mu_1 * L_{\mu_1}^{sr}$
- F5 : Constante que resulta de $\mu_2 * L_{\mu_2}^{sr}$
- F6 : Constante que resulta de $L_{\mu_1}^{sr} + L_{\mu_2}^{sr}$
- F7 : Constante que resulta de $L_{\mu_1}^{sr} - L_{\mu_2}^{sr}$
- F8 : Constante que resulta de $I2 (I3 + I5)$

F9 : Constante que resulta de $I1 (I6 + I4)$

(Ver LISTADO 3 : Programa del funcionamiento síncrono en Velocidad cero)

C. SUBROUTINAS EMPLEADAS

SUBROUTINA MINV

La característica de esta subrutina es que la matriz que se entrega como dato de entrada se destruye internamente y al final del proceso resulta ser la matriz invertida. El método que emplea es el Gauss-Jordan. En cada etapa se encuentra el elemento más grande de la matriz en consideración, se intercambian filas para colocar el elemento pivot sobre la diagonal, se divide la fila pivot por el elemento pivot, se reducen las filas no pivot y así sucesivamente.

La forma general de llamar es:

CALL MINV (X,N,D, AUX1,AUX2)

Donde:

Z : Matriz a invertirse al ingresar y al retornar es la matriz invertida.

N : Orden de la matriz

D : Determinante de la matriz

AUX1 : Matriz unidimensional de orden N, ésta debe declararse en el programa principal como matriz entera.

AUX2 : Matriz unidimensional de orden N, ésta debe declararse en el programa principal como matriz entera.

SUBROUTINA FABO

Es una subrutina del tipo REAL FUNCTION. Tiene por finalidad calcular el factor de bobinado. El dato de entrada lo constituye el armónico y responde a la siguiente relación.

$$K_v = \text{Sen} \left(v \frac{\pi}{2} \right) K_{pv} K_{dv} K_{cv}$$

Donde:

K_{pv} : es el factor de paso. ($K_{pv} = \text{Sen} (vp\pi/2)$)

K_{dv} : es el factor de distribución ($K_{dv} = \text{Sen} (vq\gamma/2) / (q \text{Sen} (v\gamma/2))$)

K_{cv} : es el factor de ranura. ($K_{cv} = \text{Sen} (v\beta/2) / (v\beta/2)$)

Siendo:

p : paso de bobina

q : ranuras por polo por fase.

β : ancho de la abertura de ranura en radianes.

γ : paso de ranura en radianes.

es decir;

$$K_v = \text{Sen} \left(v \frac{\pi}{2} \right) \text{Sen} \left(vp \frac{\pi}{2} \right) \frac{\text{Sen} \left(vq \frac{\gamma}{2} \right)}{q \text{Sen} \left(v \frac{\gamma}{2} \right)} \frac{\text{Sen} \left(v \frac{\beta}{2} \right)}{v \frac{\beta}{2}}$$

Obviamente como se tiene un solo dato de entrada las otras constantes están como valores numéricos los mismos que han de modificarse si se desea considerar otro estator con características diferentes al presente.

11/19/13

DATE = 3625+

MAIN

RELEASE 2.0

```

0033      DO 10 I=1, IEC
0034      DO 10 J=1, IEC
0035      AR(I,J)=0.0
0036      AT(I,J)=0.0
0037      S(I,J)=0.0
0038      T(I,J)=0.0
0039
0040      LS=LI
0041      DO 20 I=1, IA
0042      V=IABS(AR4(I))
0043      CS=LS+1.5*CS*(FABS(V)/V)**2
0044      KS=V*LS
0045
0046      AR(1,1)=KS
0047      AR(2,2)=KS
0048      AT(1,1)=KS
0049      AT(2,2)=KS
0050
0051      DO 30 I=1, IA
0052      S=2*I+1
0053      T=L+1
0054      V=IABS(AR4(I))
0055      SI,AV=AR4(I)/IABS(AR4(I))
0056      V=AR4(I)
0057
0058      RELATION DE TRANSFORMATION
0059
0060      RT=JRT(3.0/438)*IV*FABS(V)/SIN(V*PAP*PI/438)
0061
0062      K1=1.0
0063      AM=ABS(J(V))
0064      K2=K1*(1.0+AM)/AM
0065      K3=K1*(1.0+K2*(SIN(V*PAP*PI/N38))**2)**2
0066      K4=K3/2.0
0067      K5=K3*(1+K4)**2
0068
0069      AK(P,P)=K3
0070      AK(L,P)=K3
0071
0072      L1J3=2.0*L3+4.0*K3*(SIN(V*PAP*PI/438))**2+
0073      I(438/2.0)*K3*(SIN(V*PAP*PI/438))**2/(V**2)
0074      L1J2=L1J3*K4**2
0075      K5=L1J3*K5
0076      AT(P,P)=K5

```

```

00970
00980
00990
01000
01010
01020
01030
01040
01050
01060
01070
01080
01090
01100
01110
01120
01130
01140
01150
01160
01170
01180
01190
01200
01210
01220
01230
01240
01250
01260
01270
01280
01290
01300
01310
01320
01330
01340
01350
01360
01370
01380
01390
01400
01410
01420
01430
01440
01450

```

11/19/13

DATE = 8.25.4

MAIN

RELEASE 2.0

FORTRAN IV

```

0001  AL(L,U)=XK
0002  C3X=2.0
0003  C5X=C3X*(SIN(V*PI*ALFA/2.0))/(V*PI*ALFA/2.0)
0004  L3X=(C3X*(3.0*V3X)/2.0)*C3X*FAUC(I)*SIN(I*PI*PI/ABX)/(V*2)
0005  L5X=L3X*C3X
0006  X3X=V*L3X
0007  AL(L,U)=X3X
0008  AL(2,2)=X5X
0009  AL(L,U)=X5X
0010  AL(P,2)=X5X
0011  Z(P,1)=-X5X
0012  Z(L,2)=+X5X
0013  Z(P,L)=-X3X
0014  Z(L,U)=+X3X
0015  Z(P,1)=-LSX*V*PI*SIGMA
0016  Z(L,2)=+LSX*V*PI*SIGMA
0017  Z(P,L)=-LJRX*V*PI*SIGMA
0018  Z(L,U)=+LJRX*V*PI*SIGMA
0019  WRITE(3,33)X,RT,SIGMA,A1,ALFA,XALFA
0020  IF(3.0*2X,ALFA=,F3.5,=,F7.2)
0021  WRITE(3,33)LSX,LJRX
0022  IF(3X,LSR=,E12.7,3X,LJRX=,E12.4)
0023  WRITE(3,33)X,=F5.3,3X,=E12.4
0024  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0025  WRITE(3,33)X,=F5.3,3X,=E12.4
0026  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0027  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0028  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0029  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0030  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0031  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0032  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0033  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0034  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0035  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0036  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0037  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0038  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0039  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0040  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0041  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0042  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0043  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0044  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0045  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0046  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0047  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0048  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0049  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0050  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0051  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0052  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0053  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0054  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0055  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0056  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0057  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0058  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0059  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0060  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0061  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0062  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0063  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0064  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0065  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0066  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0067  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0068  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0069  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0070  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0071  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0072  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0073  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0074  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0075  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0076  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0077  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0078  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0079  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0080  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0081  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0082  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0083  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0084  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0085  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0086  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0087  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0088  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0089  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0090  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0091  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0092  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0093  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0094  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0095  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0096  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0097  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0098  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0099  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)
0100  IF(3X,=F5.3,3X,=E12.4)

```


11/19/18

DATE = 35254

MAIN

JRTRAM I/ 2L (RELEASE 2.0

*OPTIMUM IN EFFICACY TERM, IDIO, EBODIC, SOURCE, IDLIST, NDDECK, LUDAD, JUMAP, NOTEST
 *OPTIMUMS IN EFFICACY NAME = MAIN, LINECNT = 20
 STATISTICS SOURCE STATEMENTS = 147, PROGRAM SIZE = 7156
 STATISTICS (1) DIAGNOSTICS GENERATED

11/19/18

DATE = 36254

844

PRINTAN IV PL RELEASE 200

PTI010 11 EFFECIT# FERR, JUL, EBOCIG, SOURCE, ADLIST, NUDEC6, LJAD, NU1A2, NDTEST
 PTI010 11 EFFECIT# NAME = K11
 PTI010 11 SOURCE STATEMENTS = 32, PROGRAM SIZE = 2460
 PTI010 11 D1A5D, ILLUS, GENERATE

11/19/18

DATE = 30254

MAIN

RELEASE 2.0

FORMAT 10 14

SUBROUTINA PARA DIBUJAR

SUBROUTINE PLOT(N, A, N, I, NL, NS)

```

1 DIMENSION JUT(0:1), YPR(0:1), ANG(9), A(1)
2 FJX=AT(14, 50X, 9H GRAFICJ, 1J)
3 FJX=AT(14, 5X, F5.2, 5X, 051A1)
4 FJX=AT(14, )
5 FJX=AT(104, 12345789)
6 FJX=AT(104, )
7 FJX=AT(104, 16(, 0004.
8 FJX=AT(14, 9X, 07FL0.4)

```

CALL PLOT

PRINT(10, I, D)

QUEDE LA VARIABLE DE BASE EN FORMA ASCENDENTE

```

10 DO 10 I=1, 4
11 DO 10 J=1, 4
12 IF(A(I)-A(J)) 10, 10, 11
13 CONTINUE
14 L=J-1
15 K=L+1
16 DO 10 I=K, L
17 L=K+1
18 IF(A(L))
19 A(L)=A(K)
20 A(K)=A(L)
21 CONTINUE

```

PRINTE DE LL

```

10 IF(ILL(2), 13, 2)
11 GOTO 30

```

PRINTE ELABEZAMIENTO

PRINT(10, I, D)

QUEDE BLANCO Y DIGITOS PARA LA IMPRESION

03740
03750
03760
03770
03780
03790
03800
03810
03820
03830
03840
03850
03860
03870
03880
03890
03900
03910
03920
03930
03940
03950
03960
03970
03980
03990
04000
04010
04020
04030
04040
04050
04060
04070
04080
04090
04100
04110
04120
04130
04140
04150
04160
04170
04180
04190
04200
04210
04220
04230
04240
04250

11/19/18

DATE = 19254

PLJT

MESSAGE 2.0

PROGRAM IV PL

```

0021 REWIND 13
0022 WRITE(13,*)
0023 REWIND 13
0024 READ(13,*) BLANK, (ANG(I), I=1,3)
0025 REWIND 13
0026
0027
0028
0029
0030
0031
0032
0033
0034
0035
0036
0037
0038
0039
0040
0041
0042
0043
0044
0045
0046
0047
0048
0049
0050
0051
0052
0053
0054
0055
0056
0057
0058
0059
0060
0061
0062
0063
0064
0065
0066
0067
0068
0069
0070
0071
0072
0073
0074
0075
0076
0077
0078
0079
0080
0081
0082
0083
0084
0085
0086
0087
0088
0089
0090
0091
0092
0093
0094
0095
0096
0097
0098
0099
0100
0101
0102
0103
0104
0105
0106
0107
0108
0109
0110
0111
0112
0113
0114
0115
0116
0117
0118
0119
0120
0121
0122
0123
0124
0125
0126
0127
0128
0129
0130
0131
0132
0133
0134
0135
0136
0137
0138
0139
0140
0141
0142
0143
0144
0145
0146
0147
0148
0149
0150
0151
0152
0153
0154
0155
0156
0157
0158
0159
0160
0161
0162
0163
0164
0165
0166
0167
0168
0169
0170
0171
0172
0173
0174
0175
0176
0177
0178
0179
0180
0181
0182
0183
0184
0185
0186
0187
0188
0189
0190
0191
0192
0193
0194
0195
0196
0197
0198
0199
0200
0201
0202
0203
0204
0205
0206
0207
0208
0209
0210
0211
0212
0213
0214
0215
0216
0217
0218
0219
0220
0221
0222
0223
0224
0225
0226
0227
0228
0229
0230
0231
0232
0233
0234
0235
0236
0237
0238
0239
0240
0241
0242
0243
0244
0245
0246
0247
0248
0249
0250
0251
0252
0253
0254
0255
0256
0257
0258
0259
0260
0261
0262
0263
0264
0265
0266
0267
0268
0269
0270
0271
0272
0273
0274
0275
0276
0277
0278
0279
0280
0281
0282
0283
0284
0285
0286
0287
0288
0289
0290
0291
0292
0293
0294
0295
0296
0297
0298
0299
0300
0301
0302
0303
0304
0305
0306
0307
0308
0309
0310
0311
0312
0313
0314
0315
0316
0317
0318
0319
0320
0321
0322
0323
0324
0325
0326
0327
0328
0329
0330
0331
0332
0333
0334
0335
0336
0337
0338
0339
0340
0341
0342
0343
0344
0345
0346
0347
0348
0349
0350
0351
0352
0353
0354
0355
0356
0357
0358
0359
0360
0361
0362
0363
0364
0365
0366
0367
0368
0369
0370
0371
0372
0373
0374
0375
0376
0377
0378
0379
0380
0381
0382
0383
0384
0385
0386
0387
0388
0389
0390
0391
0392
0393
0394
0395
0396
0397
0398
0399
0400
0401
0402
0403
0404
0405
0406
0407
0408
0409
0410
0411
0412
0413
0414
0415
0416
0417
0418
0419
0420
0421
0422
0423
0424
0425
0426
0427
0428
0429
0430
0431
0432
0433
0434
0435
0436
0437
0438
0439
0440
0441
0442
0443
0444
0445
0446
0447
0448
0449
0450
0451
0452
0453
0454
0455
0456
0457
0458
0459
0460
0461
0462
0463
0464
0465
0466
0467
0468
0469
0470
0471
0472
0473
0474
0475
0476
0477
0478
0479
0480
0481
0482
0483
0484
0485
0486
0487
0488
0489
0490
0491
0492
0493
0494
0495
0496
0497
0498
0499
0500
0501
0502
0503
0504
0505
0506
0507
0508
0509
0510
0511
0512
0513
0514
0515
0516
0517
0518
0519
0520
0521
0522
0523
0524
0525
0526
0527
0528
0529
0530
0531
0532
0533
0534
0535
0536
0537
0538
0539
0540
0541
0542
0543
0544
0545
0546
0547
0548
0549
0550
0551
0552
0553
0554
0555
0556
0557
0558
0559
0560
0561
0562
0563
0564
0565
0566
0567
0568
0569
0570
0571
0572
0573
0574
0575
0576
0577
0578
0579
0580
0581
0582
0583
0584
0585
0586
0587
0588
0589
0590
0591
0592
0593
0594
0595
0596
0597
0598
0599
0600
0601
0602
0603
0604
0605
0606
0607
0608
0609
0610
0611
0612
0613
0614
0615
0616
0617
0618
0619
0620
0621
0622
0623
0624
0625
0626
0627
0628
0629
0630
0631
0632
0633
0634
0635
0636
0637
0638
0639
0640
0641
0642
0643
0644
0645
0646
0647
0648
0649
0650
0651
0652
0653
0654
0655
0656
0657
0658
0659
0660
0661
0662
0663
0664
0665
0666
0667
0668
0669
0670
0671
0672
0673
0674
0675
0676
0677
0678
0679
0680
0681
0682
0683
0684
0685
0686
0687
0688
0689
0690
0691
0692
0693
0694
0695
0696
0697
0698
0699
0700
0701
0702
0703
0704
0705
0706
0707
0708
0709
0710
0711
0712
0713
0714
0715
0716
0717
0718
0719
0720
0721
0722
0723
0724
0725
0726
0727
0728
0729
0730
0731
0732
0733
0734
0735
0736
0737
0738
0739
0740
0741
0742
0743
0744
0745
0746
0747
0748
0749
0750
0751
0752
0753
0754
0755
0756
0757
0758
0759
0760
0761
0762
0763
0764
0765
0766
0767
0768
0769
0770
0771
0772
0773
0774
0775
0776
0777
0778
0779
0780
0781
0782
0783
0784
0785
0786
0787
0788
0789
0790
0791
0792
0793
0794
0795
0796
0797
0798
0799
0800
0801
0802
0803
0804
0805
0806
0807
0808
0809
0810
0811
0812
0813
0814
0815
0816
0817
0818
0819
0820
0821
0822
0823
0824
0825
0826
0827
0828
0829
0830
0831
0832
0833
0834
0835
0836
0837
0838
0839
0840
0841
0842
0843
0844
0845
0846
0847
0848
0849
0850
0851
0852
0853
0854
0855
0856
0857
0858
0859
0860
0861
0862
0863
0864
0865
0866
0867
0868
0869
0870
0871
0872
0873
0874
0875
0876
0877
0878
0879
0880
0881
0882
0883
0884
0885
0886
0887
0888
0889
0890
0891
0892
0893
0894
0895
0896
0897
0898
0899
0900
0901
0902
0903
0904
0905
0906
0907
0908
0909
0910
0911
0912
0913
0914
0915
0916
0917
0918
0919
0920
0921
0922
0923
0924
0925
0926
0927
0928
0929
0930
0931
0932
0933
0934
0935
0936
0937
0938
0939
0940
0941
0942
0943
0944
0945
0946
0947
0948
0949
0950
0951
0952
0953
0954
0955
0956
0957
0958
0959
0960
0961
0962
0963
0964
0965
0966
0967
0968
0969
0970
0971
0972
0973
0974
0975
0976
0977
0978
0979
0980
0981
0982
0983
0984
0985
0986
0987
0988
0989
0990
0991
0992
0993
0994
0995
0996
0997
0998
0999
1000

```

0000 04700
 0001 04710
 0002 04720
 0003 04730
 0004 04740
 0005 04750
 0006 04760
 0007 04770
 0008 04780
 0009 04790
 0010 04800
 0011 04810
 0012 04820
 0013 04830
 0014 04840
 0015 04850
 0016 04860
 0017 04870
 0018 04880
 0019 04890
 0020 04900

```

* WRITE(5,2) (PR, (OUT(IZ), IZ=1,351)
  5000 30
  70 WRITE(5,3)
  70 CONTINUE
  80 IF(I-ALL)+5,3+3,3)
  90 KPIEA(1)
  90 30
  C      ESCRIBE EL NUMERO DE VARIABLES A IMPRIMIR
  90
  90 WRITE(5,7)
  90 YPR(1)=YMI+4
  90 90 KJ=1,7
  90 YPR(KJ+1)=YPR(KJ)+YSICAL#10.0
  90 YPR(1)=YMAX
  90 WRITE(5,3) (YPR(IP), IP=1,37)
  90 CONTINUE
  90 EN
  
```


5.3.2 Hardware requerido

Se requiere mínimamente la capacidad de invertir una matriz de orden 6. El sistema de cómputo que se utilizó es la IBM 4341 con sistema operativo VM/CMS y OS/VS1. Aunque la solución que se presenta se puede adoptar fácilmente a una microcomputadora profesional de 64K de RAM con acceso a disk drives para disquetes de 200K, teniendo como ventaja la posibilidad de usar SOFTWARE de última generación como las Hojas Electrónicas de Cálculo para la elaboración de las tablas de armónicos del rotor y estator de manera más simple que utilizando enguajes de programación de alto nivel como el FORTRAN.

5.4 Resultados

Para la máquina II los armónicos significativos son el 1, 11, 13, 5 y 7 respectivamente. Puesto que el rotor tiene 23 barras, el armónico 23 no existe en este caso y el efecto del armónico 25 es pequeño. De la Tabla 3 se observa claramente que no existe funcionamiento síncrono porque ninguno de ellos se encuentran en el mismo grupo de componentes.

Para la máquina III, los armónicos importantes son el 1, 11, 23, 5, 25, 7 y 13. Nótese que dos o más de estos armónicos aparecen en el mismo grupo de componentes

$\alpha - \beta = 0$. En lo que al torque síncrono concierne, los pares de armónicos importantes son 1-13 y 11-25, ambos pares tienen una velocidad síncrona de $w/7$. Los valores máximos y mínimos del torque síncrono en esta velocidad son 98.5 Nt-m y -48.8 Nt-m respectivamente.

Para la máquina II, los armónicos importantes son el 1, 11 y 13. Como quiera que estos armónicos no per-

tenecen al mismo grupo de componentes α - β , la máquina II no presenta funcionamiento síncrono.

La curva torque-velocidad para el armónico fundamental de la máquina I se muestra en la Fig. 21. Mientras que en la Fig. 30 se muestra la curva torque-velocidad total de la máquina I. Se puede apreciar que los torques armónicos de la máquina I introducen considerable distorsión a la componente fundamental de la curva torque-velocidad, también se puede notar una reducción notable del torque máximo en la región motora. Se puede ver pequeñas depresiones alrededor de las velocidades síncronas de los armónicos 11 y 13. Las curvas torque-velocidad debido a los armónicos 5,7,11,13,1-11,1-13,1-5 y 1-7 se muestran en las Figs. 22,23,24,25,26,27,28. y 29. La Fig. 31 muestra la magnitud de la corriente del estator de la máquina I. Esta corriente cae de su valor de magnetización a medida que la velocidad del rotor se aproxima a la velocidad síncrona fundamental. De igual manera las corrientes armónicas del rotor llegan a ser cero en sus velocidades síncronas. En las Figs. 32 y 33 se muestran las corrientes del rotor de la máquina I debido a los armónicos fundamental y 13.

Las curvas torque-velocidad de las máquinas II y III se muestran en las Figs. 34-45. Las curvas debido a los armónicos son similares al de la máquina I, excepto que sus magnitudes son mucho menores y por lo tanto sus efectos también.

El efecto de inclinación de las barras del rotor a un paso de ranura del estator es más pronunciado en la máquina I puesto que tiene los torques armónicos asíncronos más pronunciados entre las tres máquinas. Los armónicos 5 y 7 se reducen por el paso de 5/6 en el estator. Los armónicos que no son afectados por el paso del estator, se reducen significativamente por la inclinación de las barras como se muestra en la Fig. 46. Los efectos de inclinación en las máquinas II y III se muestran en las Figs. 47 y 48 respectivamente.

El efecto de abertura de ranura se toma en cuenta al asumir un cambio lineal en la FMM sobre la abertura de ranura en contraste a la suposición normal de un cambio abrupto de la FMM en el medio de la abertura de la ranura. Se encuentra que el efecto de abertura de ranura es despreciable en la componente fundamental pero significativo en los armónicos de alto orden. Esto reduce las inductancias propias y mutuas de los armónicos, afectando indirectamente al fundamental como se muestra en la Fig. 49.

Como quiera que las corrientes en las barras del rotor contienen componentes de alta frecuencia, es de gran importancia que se considere el efecto skin. La influencia del efecto skin sobre los torques y corrientes del rotor, especialmente los armónicos de alto orden, es más pronunciado en la región de freno. En la Fig. 50

se muestra la curva torque-velocidad considerando el efecto skin. En la región motora, el incremento en el torque fundamental es anulado por los incrementos de los torques armónicos en la dirección opuesta, resultando en una neta disminución del torque disponible.

VELOCIDAD (P.U.)

GRAFICO 21

1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.0
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.45
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00

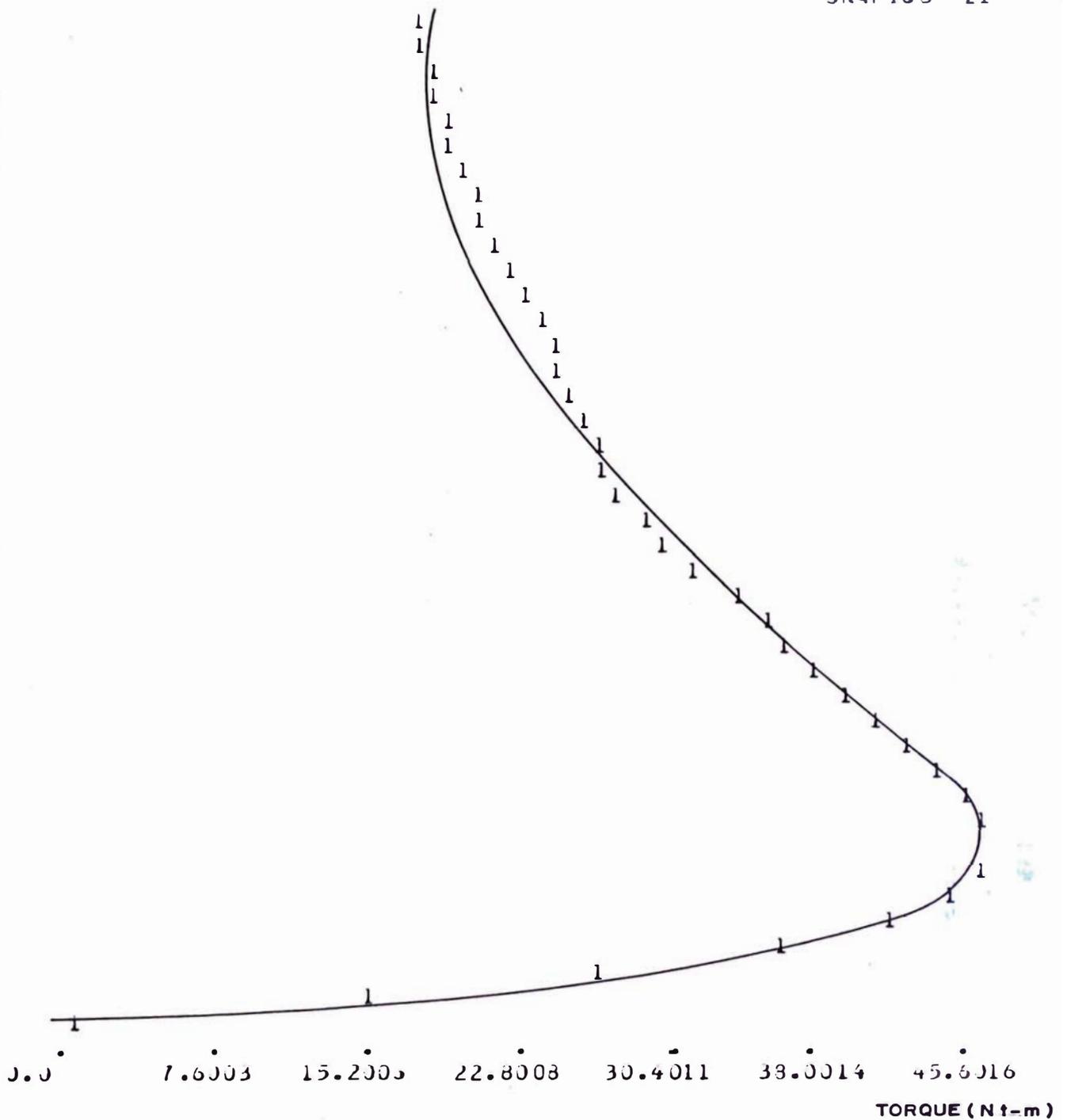


Fig. 21. Curva torque-velocidad de la máquina 1 debido al armónico fundamental

PEED (P.U.)

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

GRAFICO 22

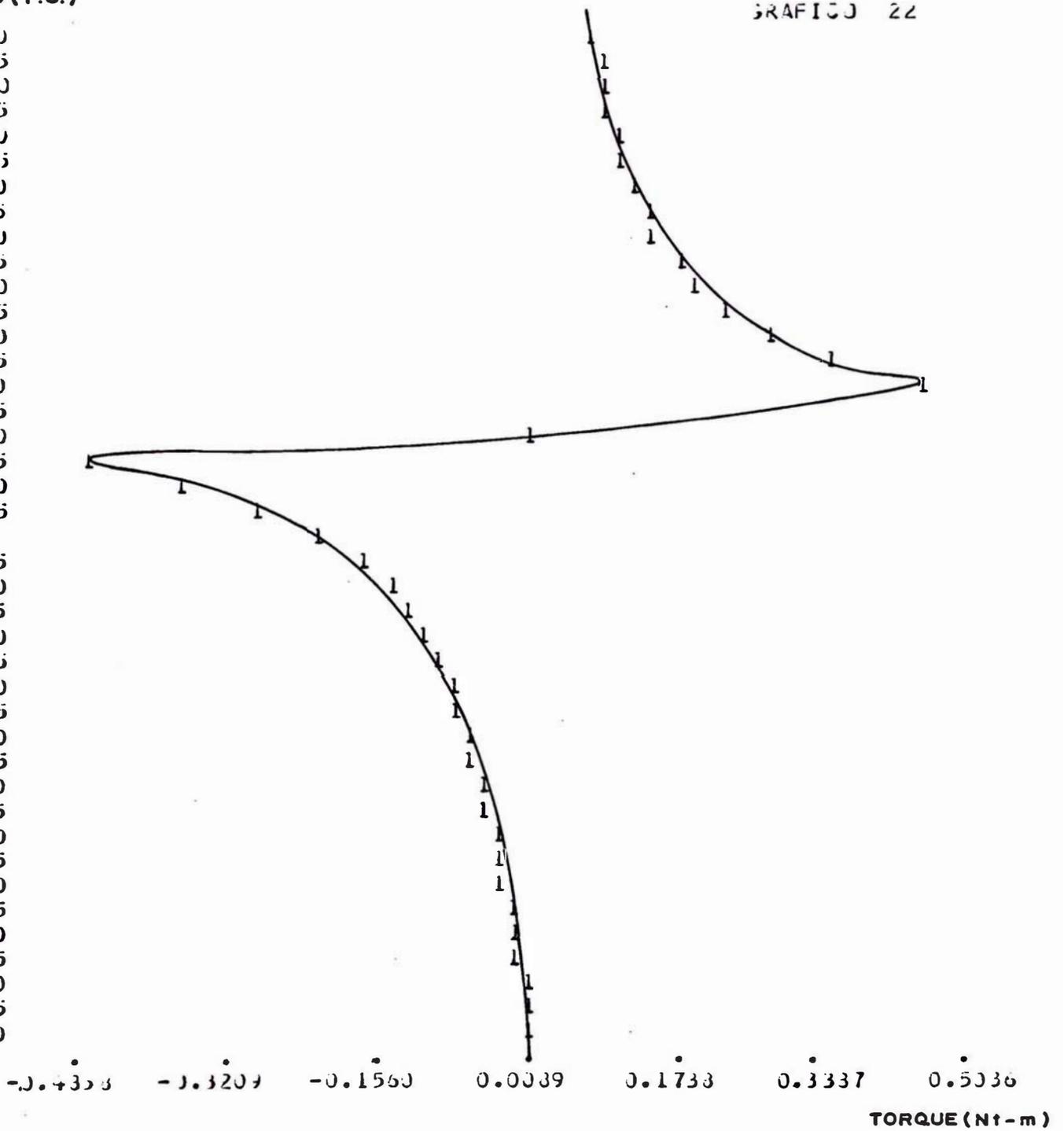


Fig. 22. Curva torque-velocidad de la máquina 1 debido al armónico 5

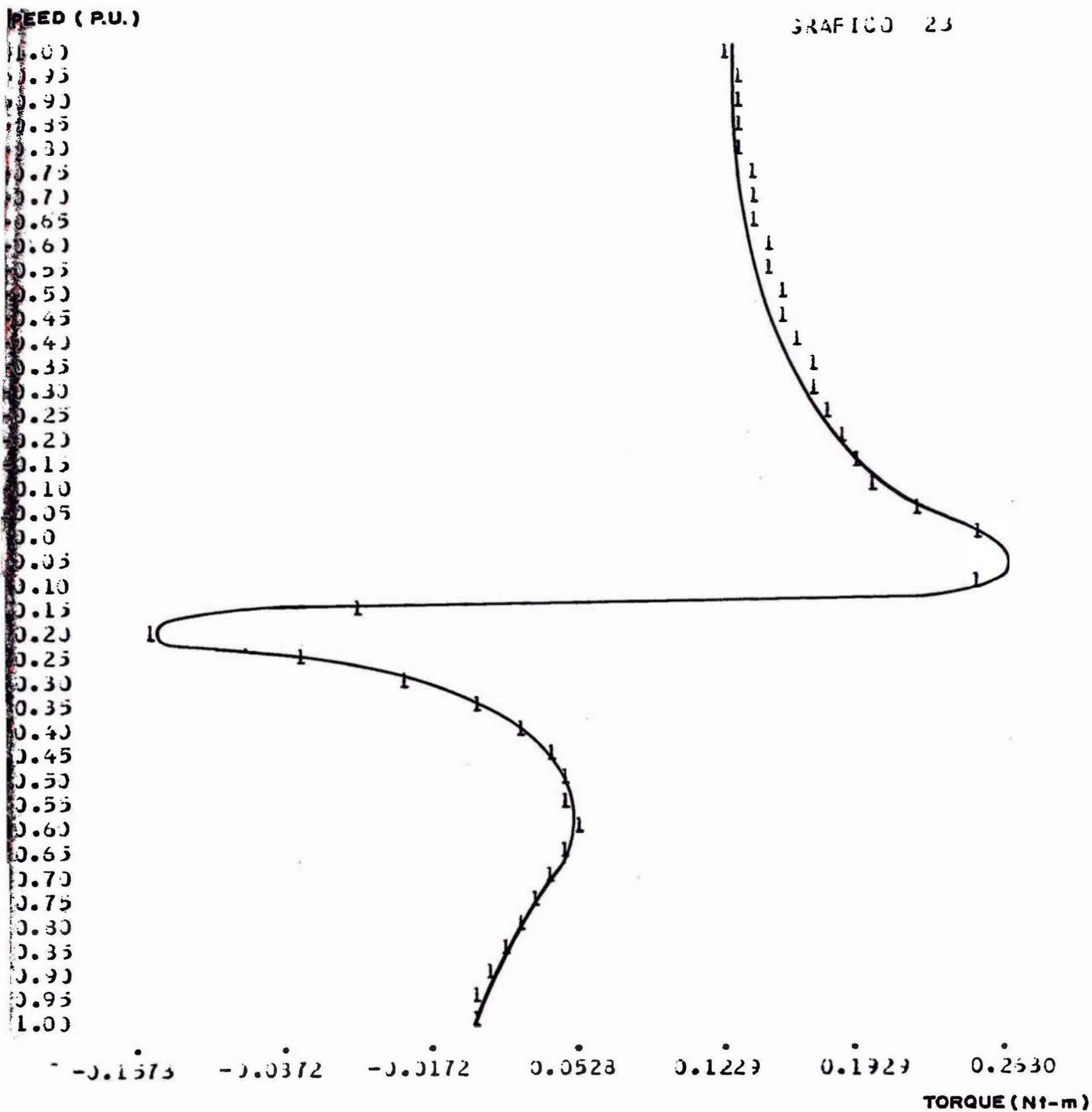


Fig. 23. Curva torque-velocidad de la máquina 1 debido al armónico 7

SPEED (P.U.)

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

GRAFICO 24

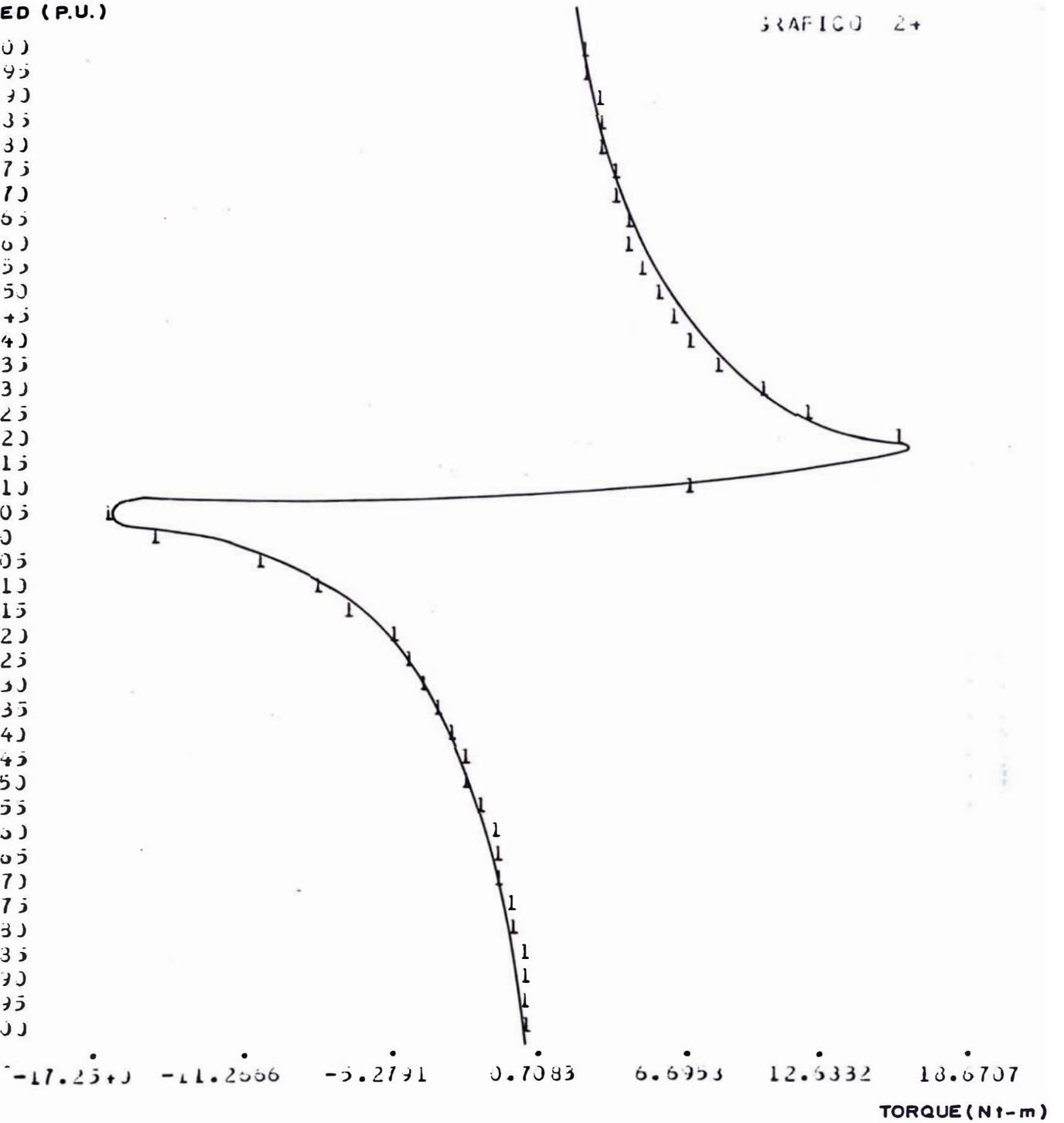


Fig. 24. Curva torque-velocidad de la máquina 1 debido al armónico 11

SPEED (P.U.)

GRAFICO 25

-1.00
-0.75
-0.50
-0.30
-0.30
-0.75
-0.70
-0.65
-0.60
-0.55
-0.50
-0.45
-0.40
-0.35
-0.30
-0.25
-0.20
-0.15
-0.10
0.05
0.0
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.45
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00

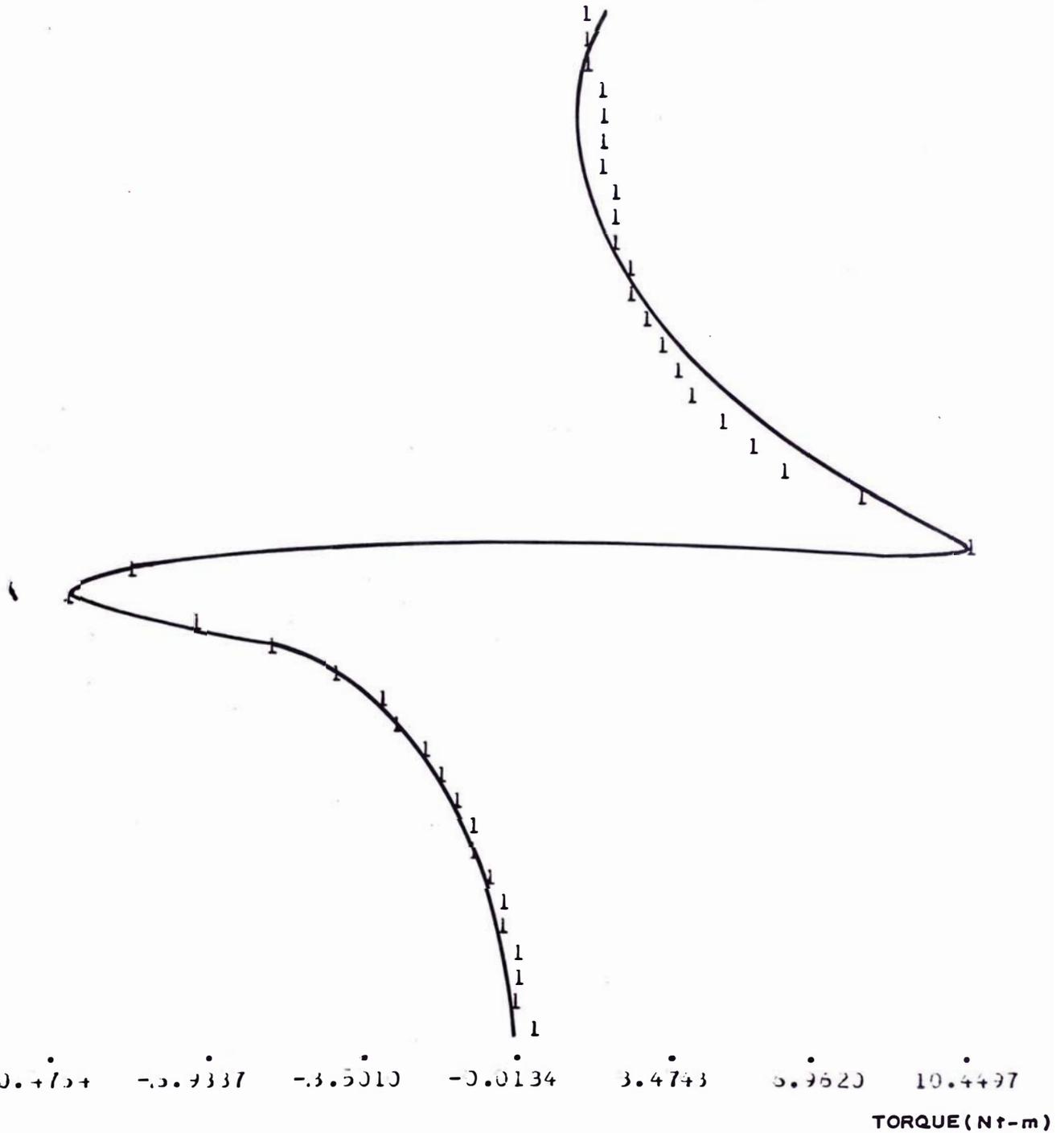


Fig. 25. Curva torque-velocidad de la máquina 1 debido al armónico 13.

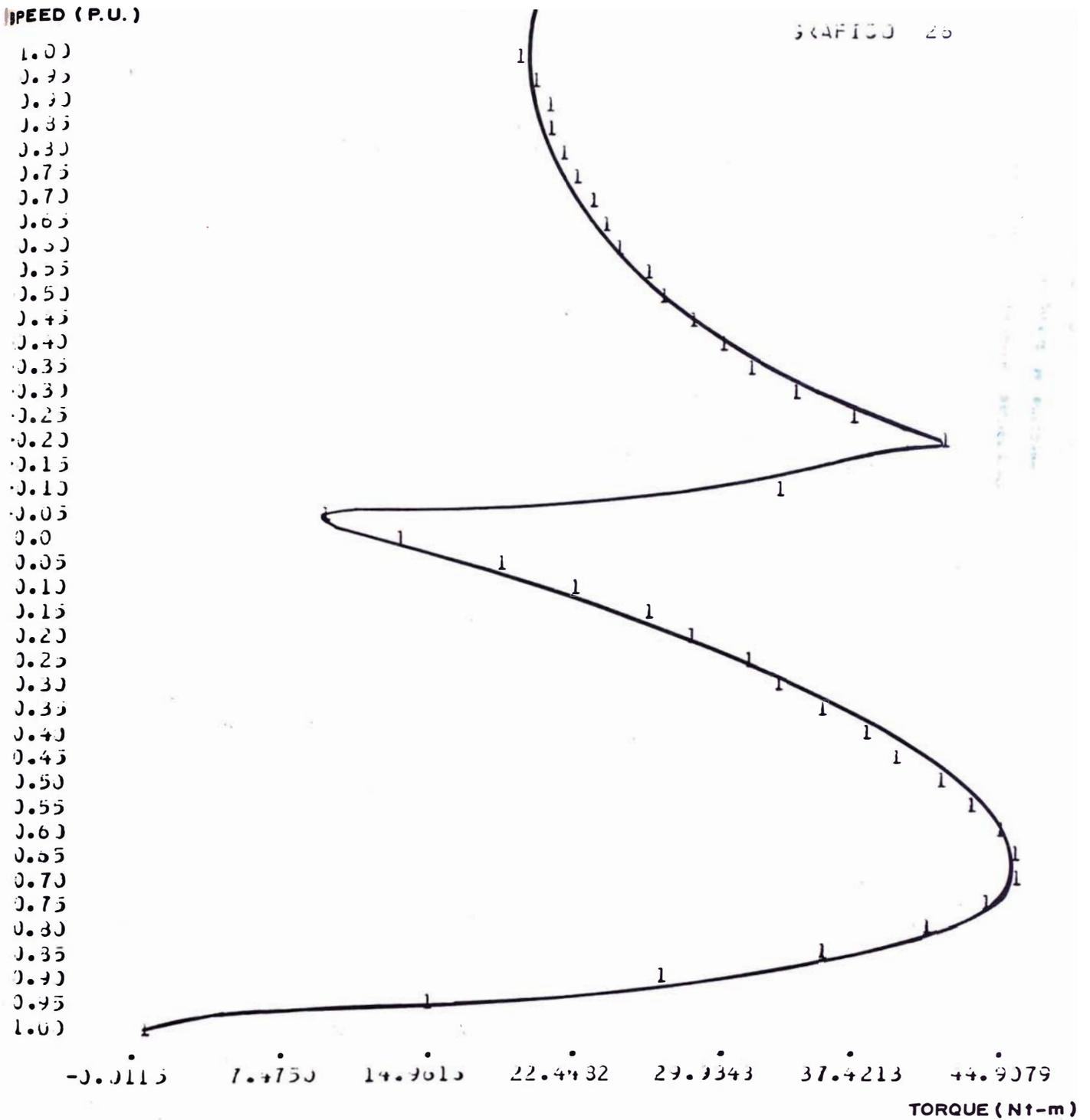


Fig. 26. Curva torque-velocidad de la máquina 1 debido a los armónicos 1-11

GRAFICO 27

SPEED (P. U.)

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

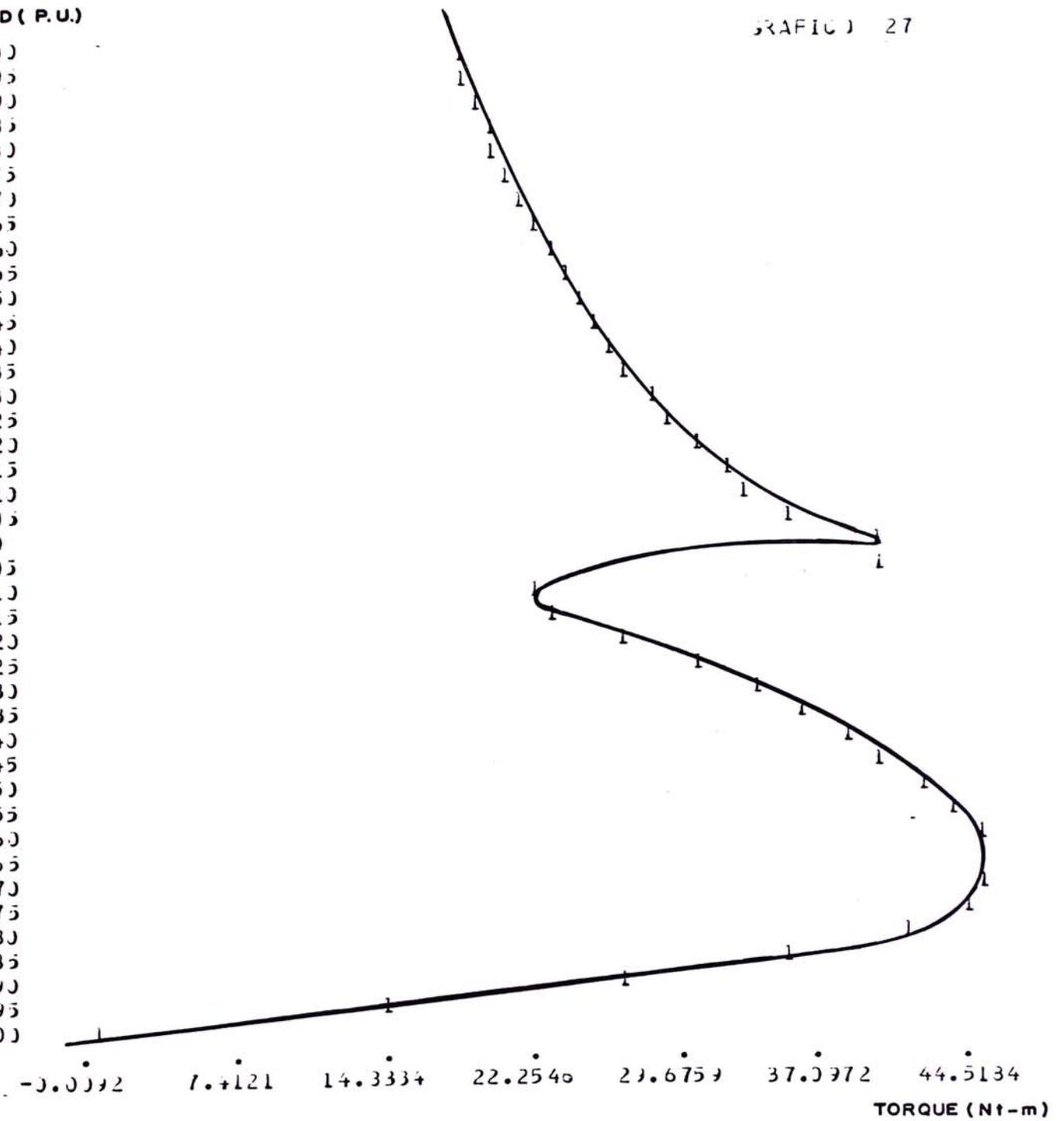


Fig. 27. Curva torque-velocidad de la máquina 1 debido a los armónicos 1-13

SPEED (P.U.)

GRAFICO 30

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

-0.0135 3.2334 16.4302 24.7569 32.9830 41.2104 49.4921

TORQUE (Nt-m)

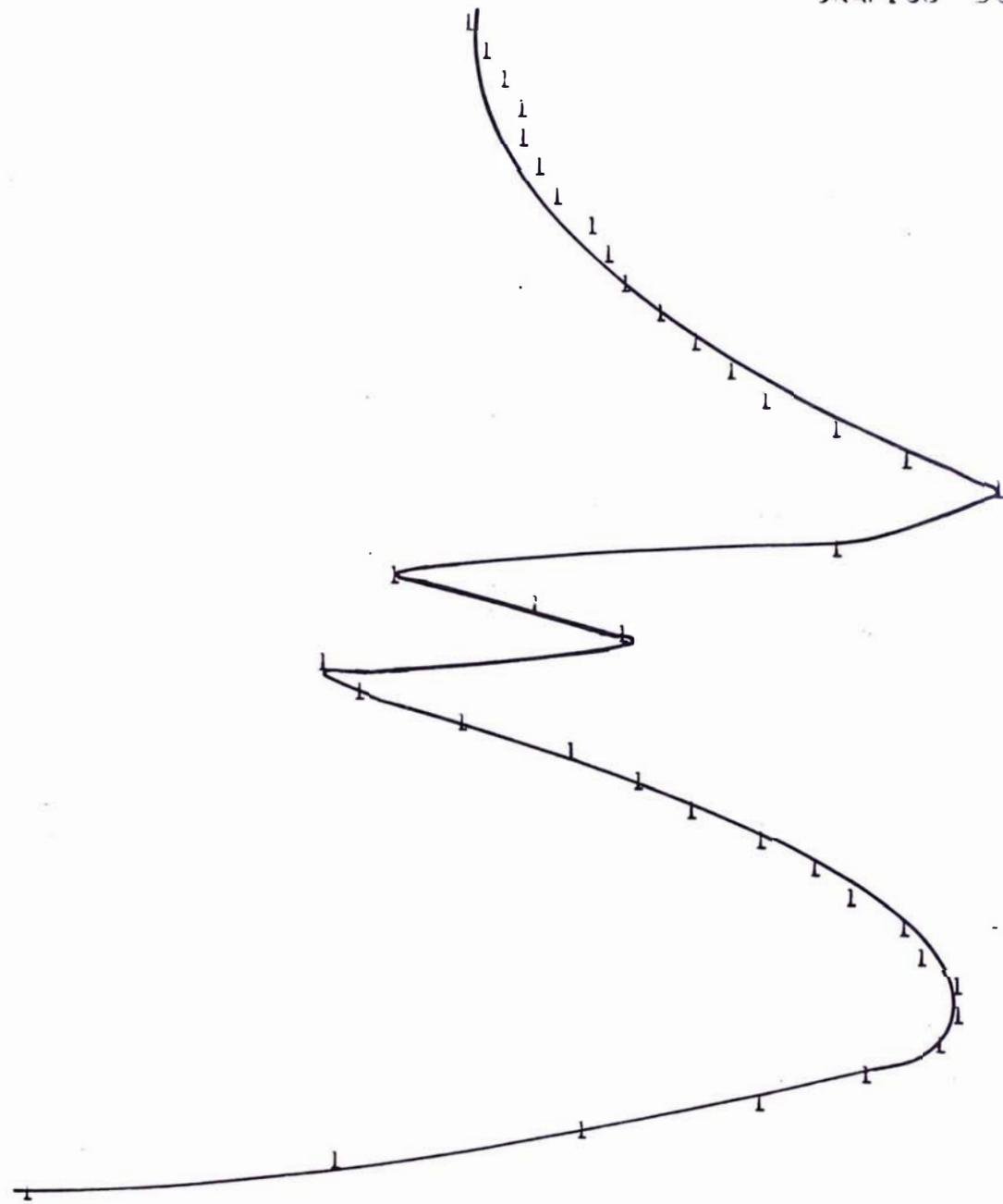


Fig. 30. Curva torque-velocidad total de la máquina I

PEED (P.U.)

GRAFICO 31

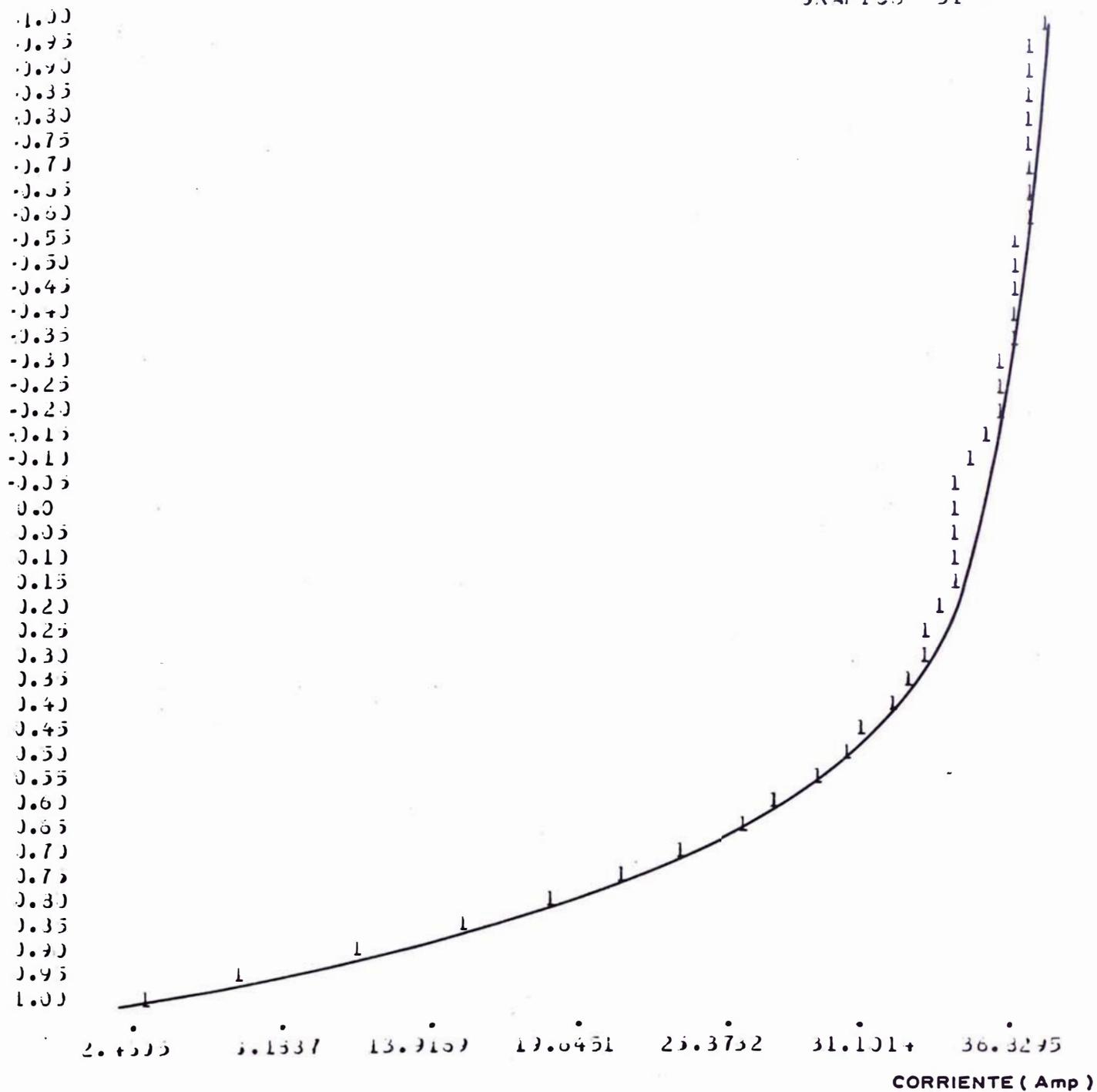


Fig. 31. Magnitud de la corriente del estator de la máquina I

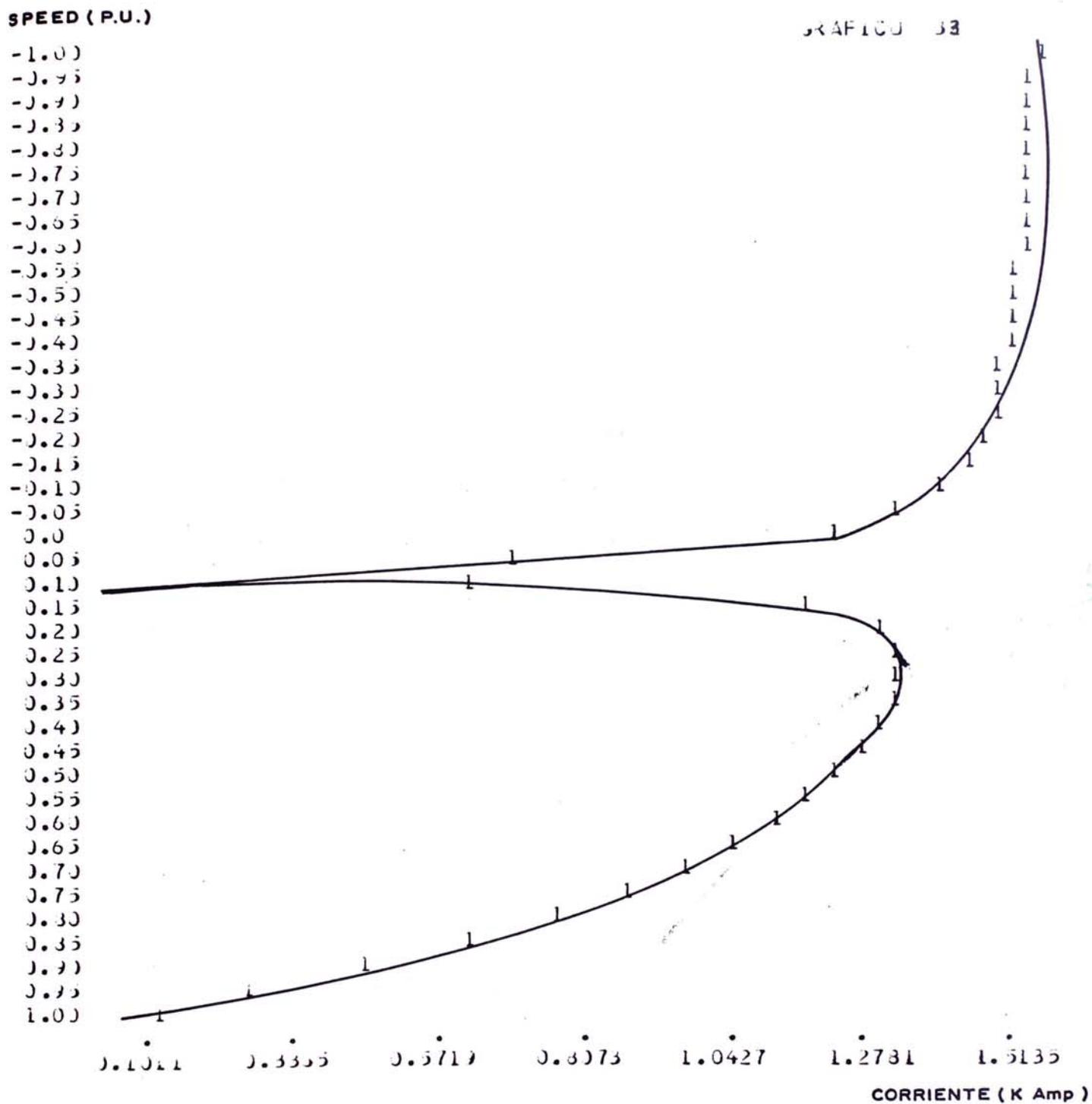


Fig. 33. Corriente del rotor de la máquina 1 debido al armónico 13

SPEED (P.U.)

GRAFICO 34

1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.0
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.45
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00

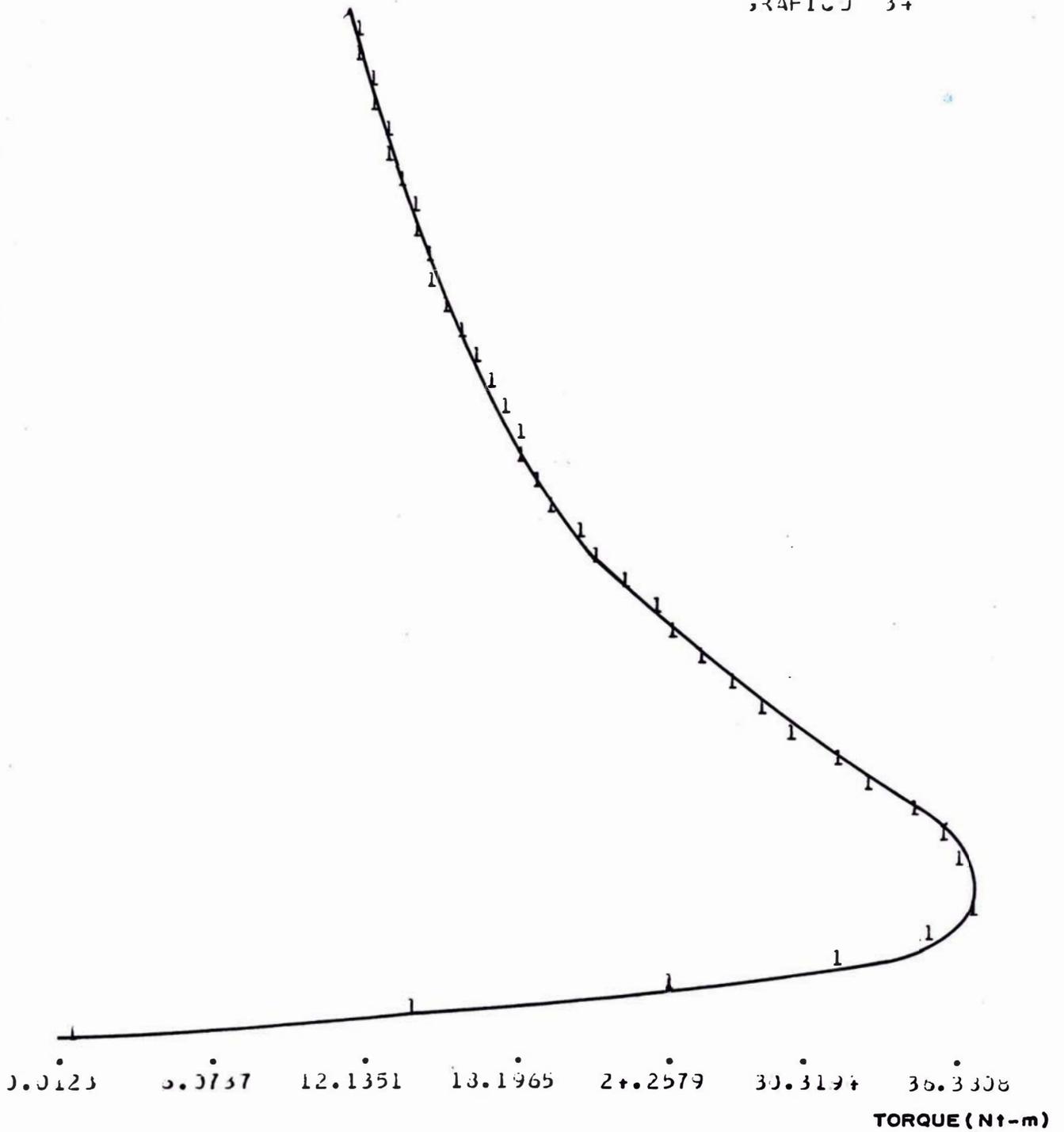


Fig. 34. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al armónico fundamental

SPEED (P.U.)

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

GRAFICO 35

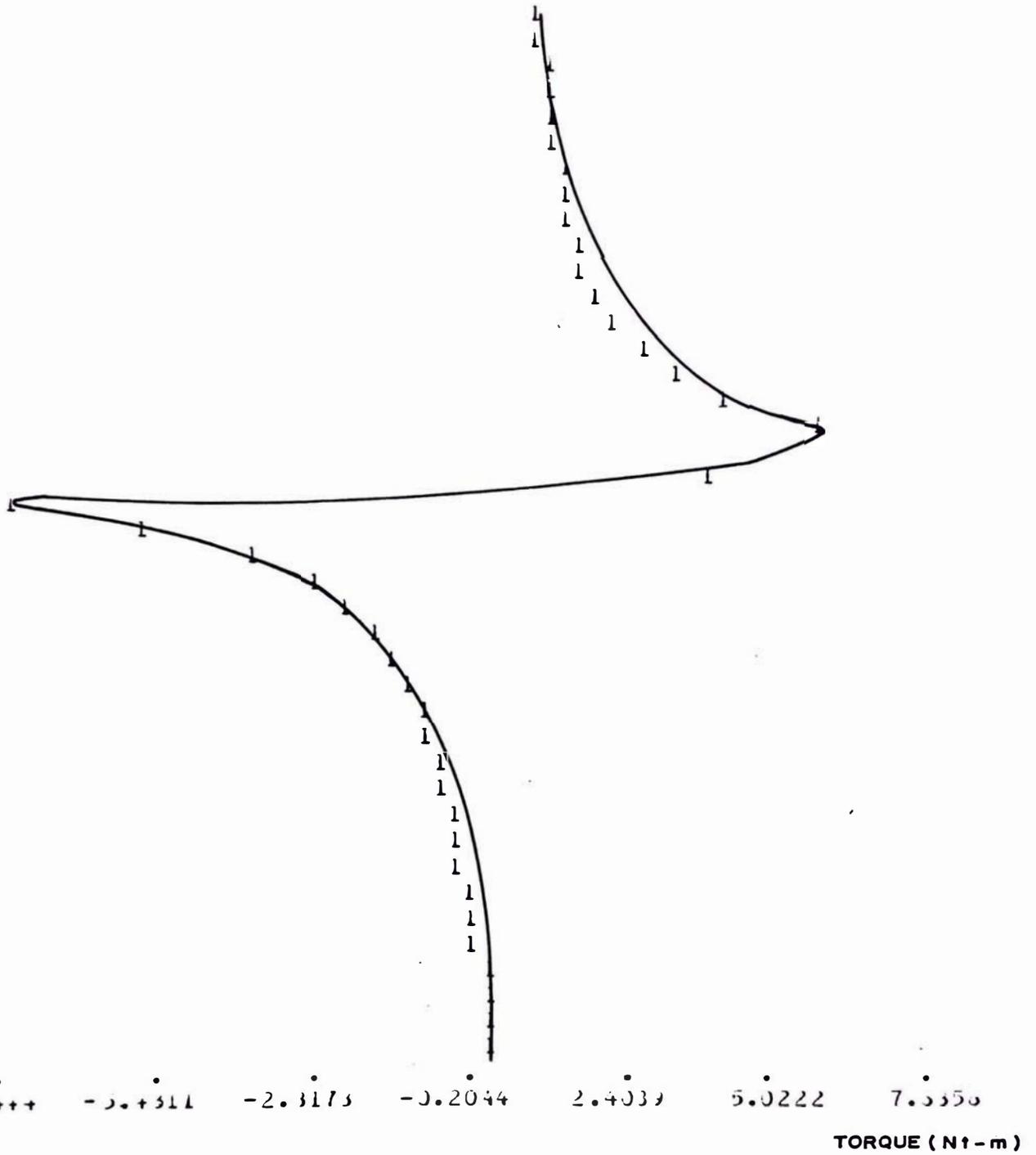


Fig. 35. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al armónico 11

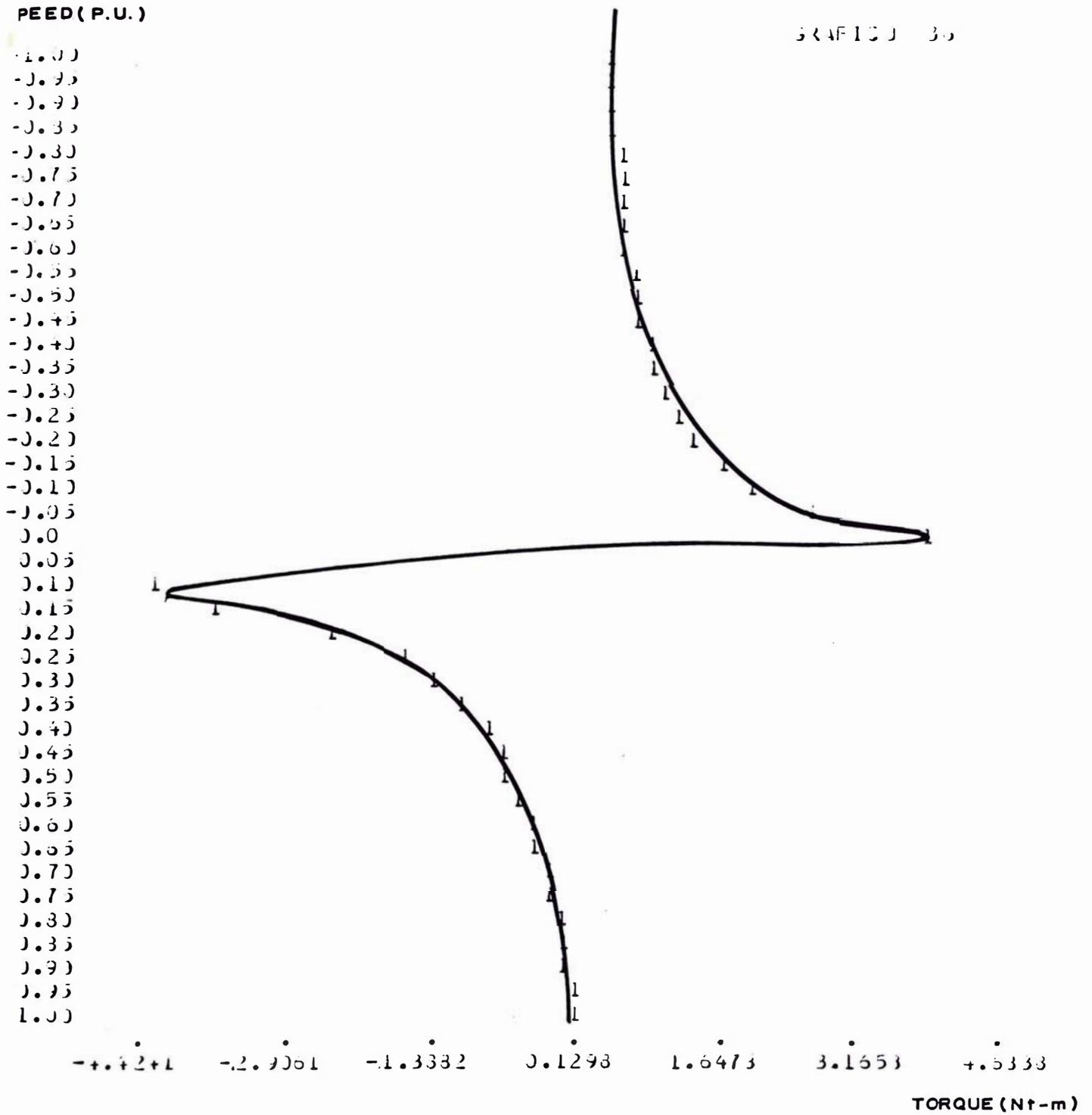


Fig: 36. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al armónico 13

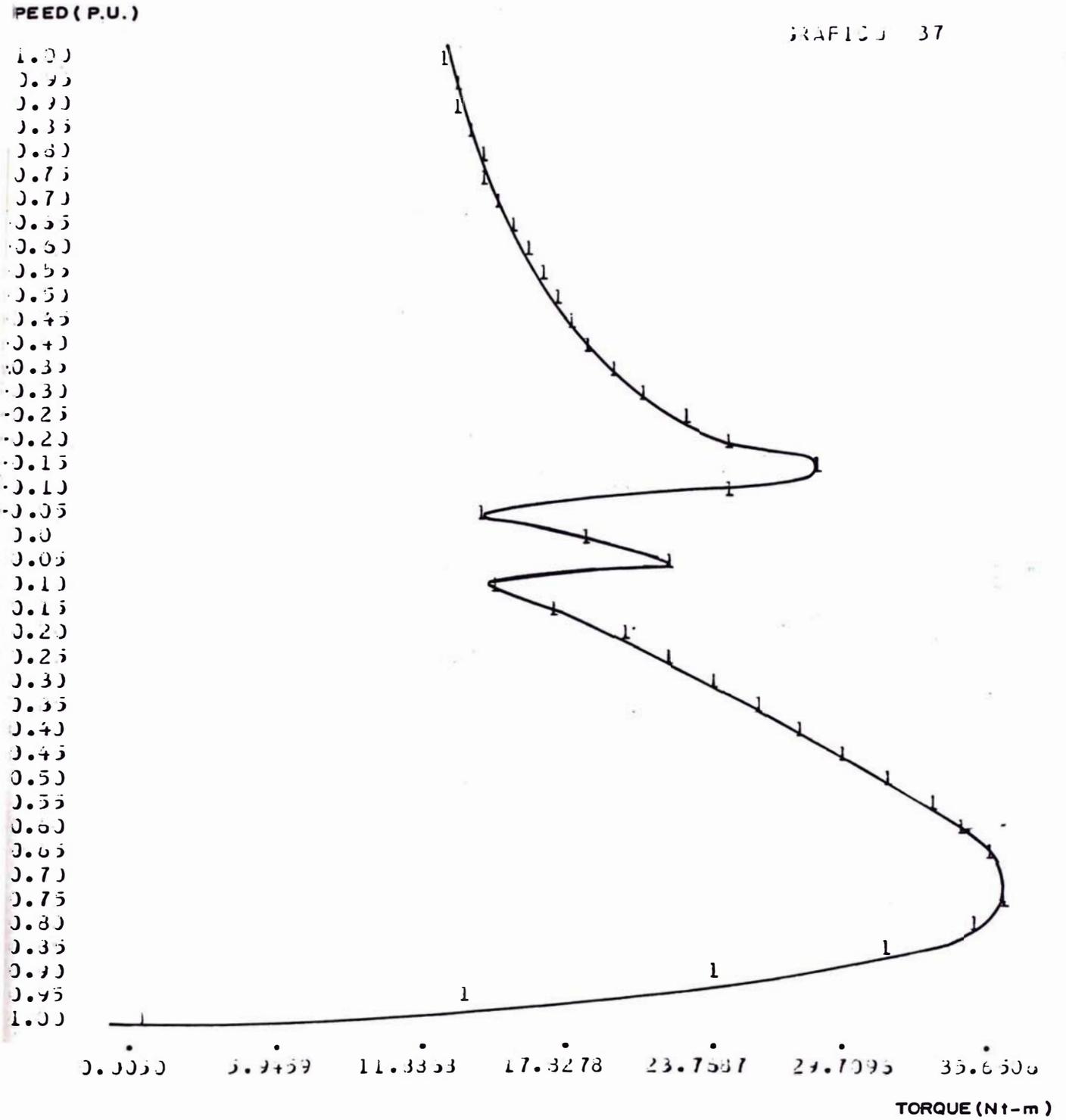


Fig. 37. Curva torque-velocidad total de la máquina II.

VELOCIDAD (P.U.)

GRAFICO 33

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

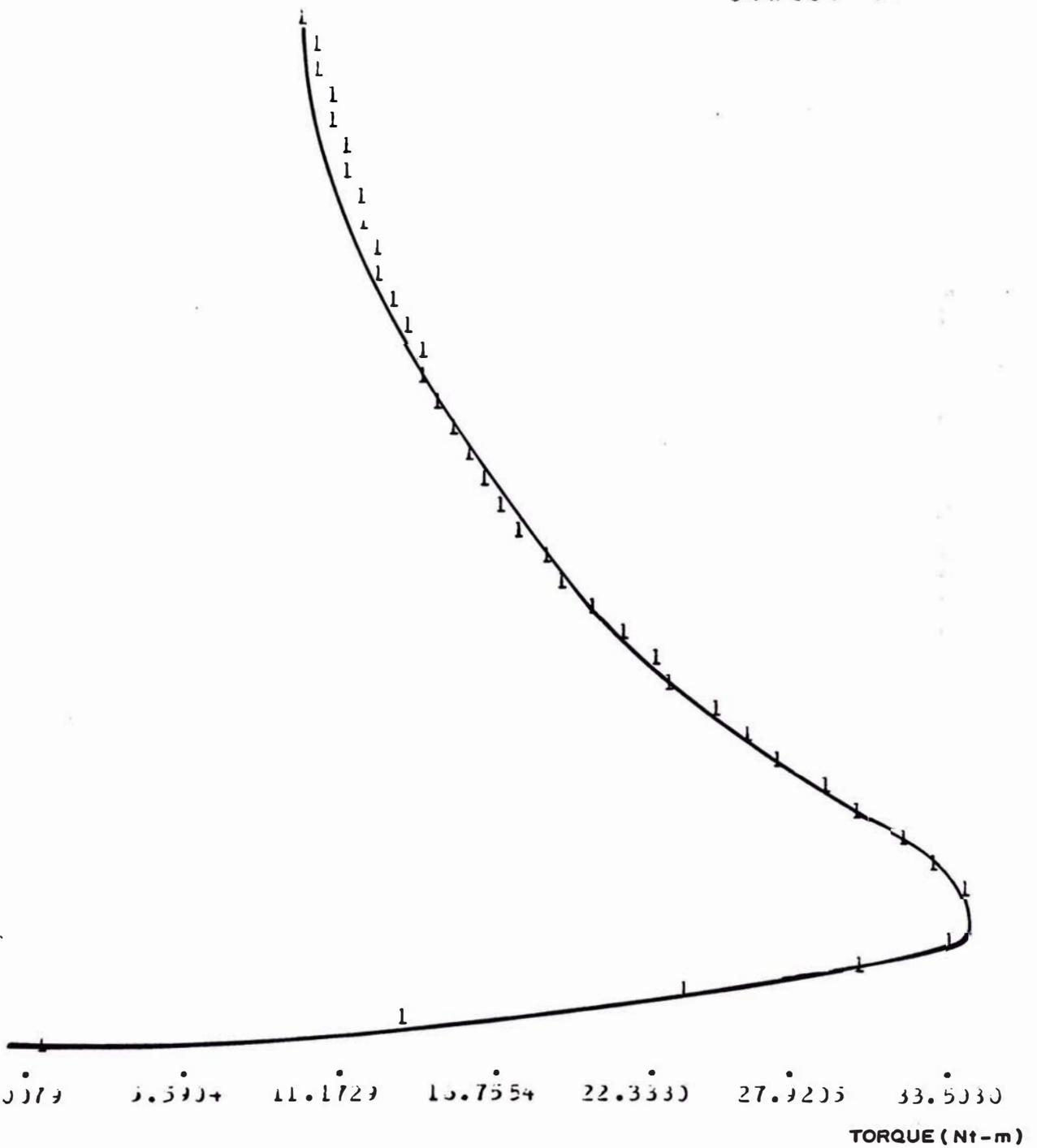


Fig. 38. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico fundamental

SPEED (P.U.)

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.00
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

GRAFICO 39

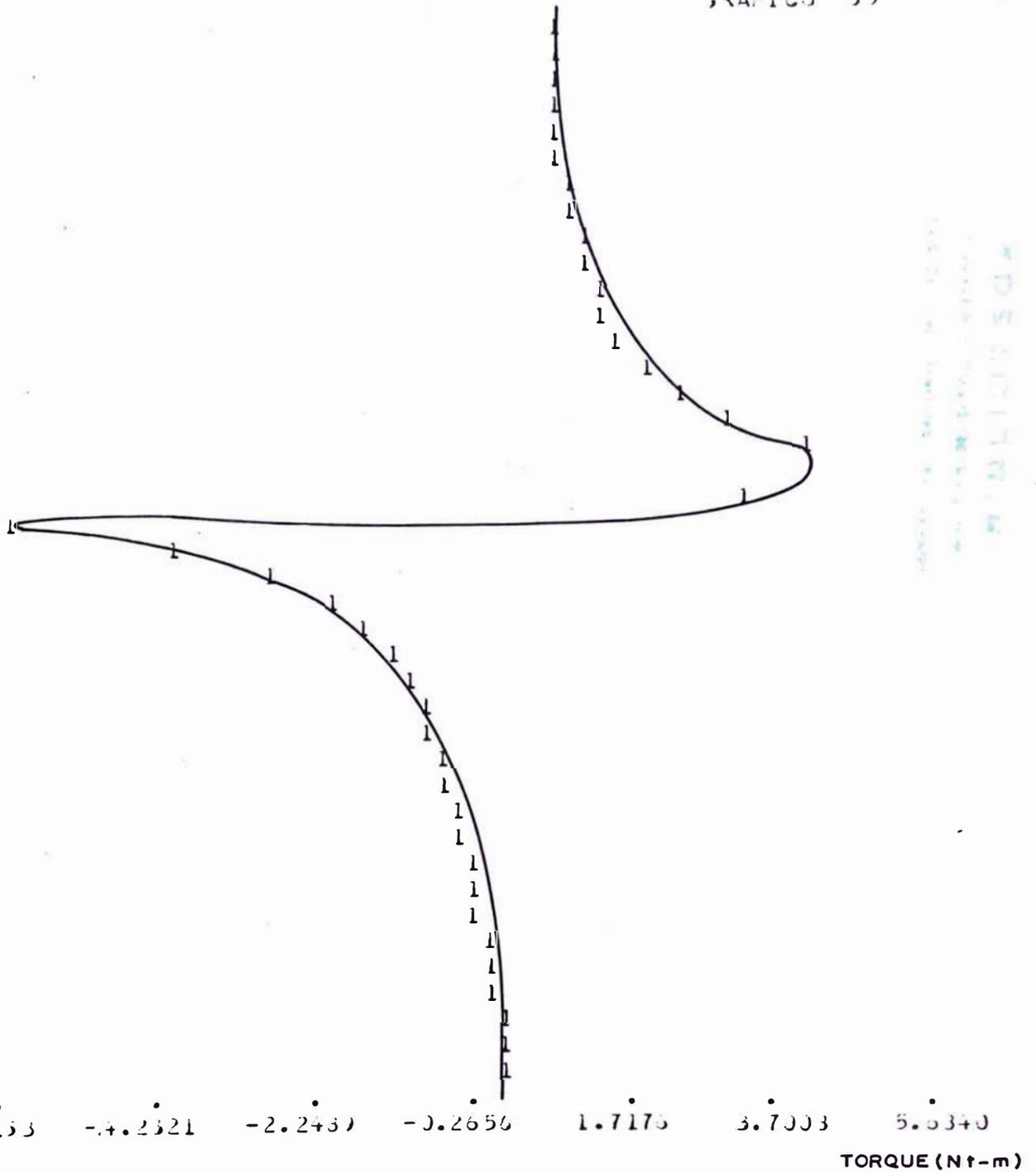


Fig. 39. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 11

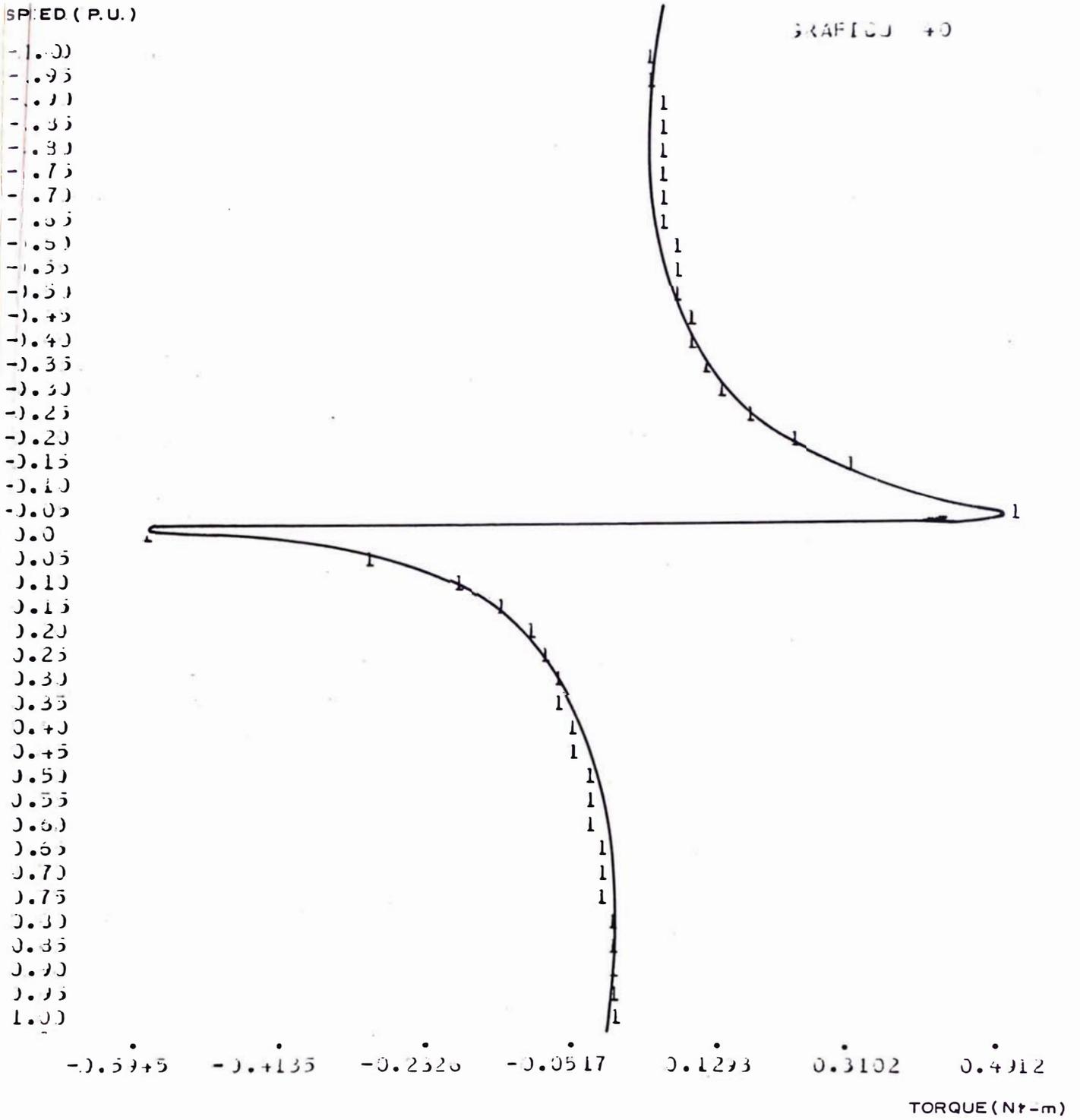


Fig. 40. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 23

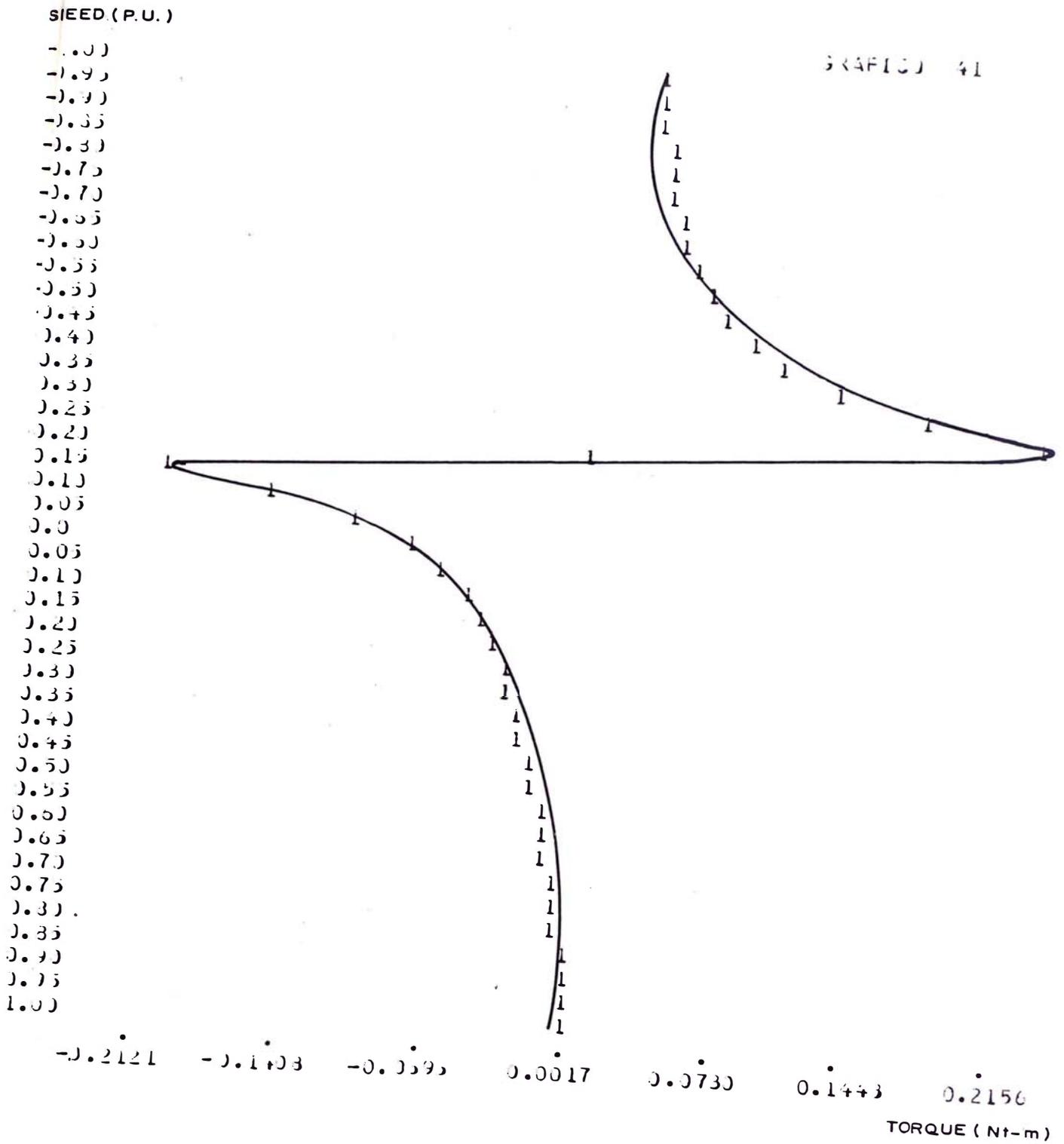


Fig. 41. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 5.

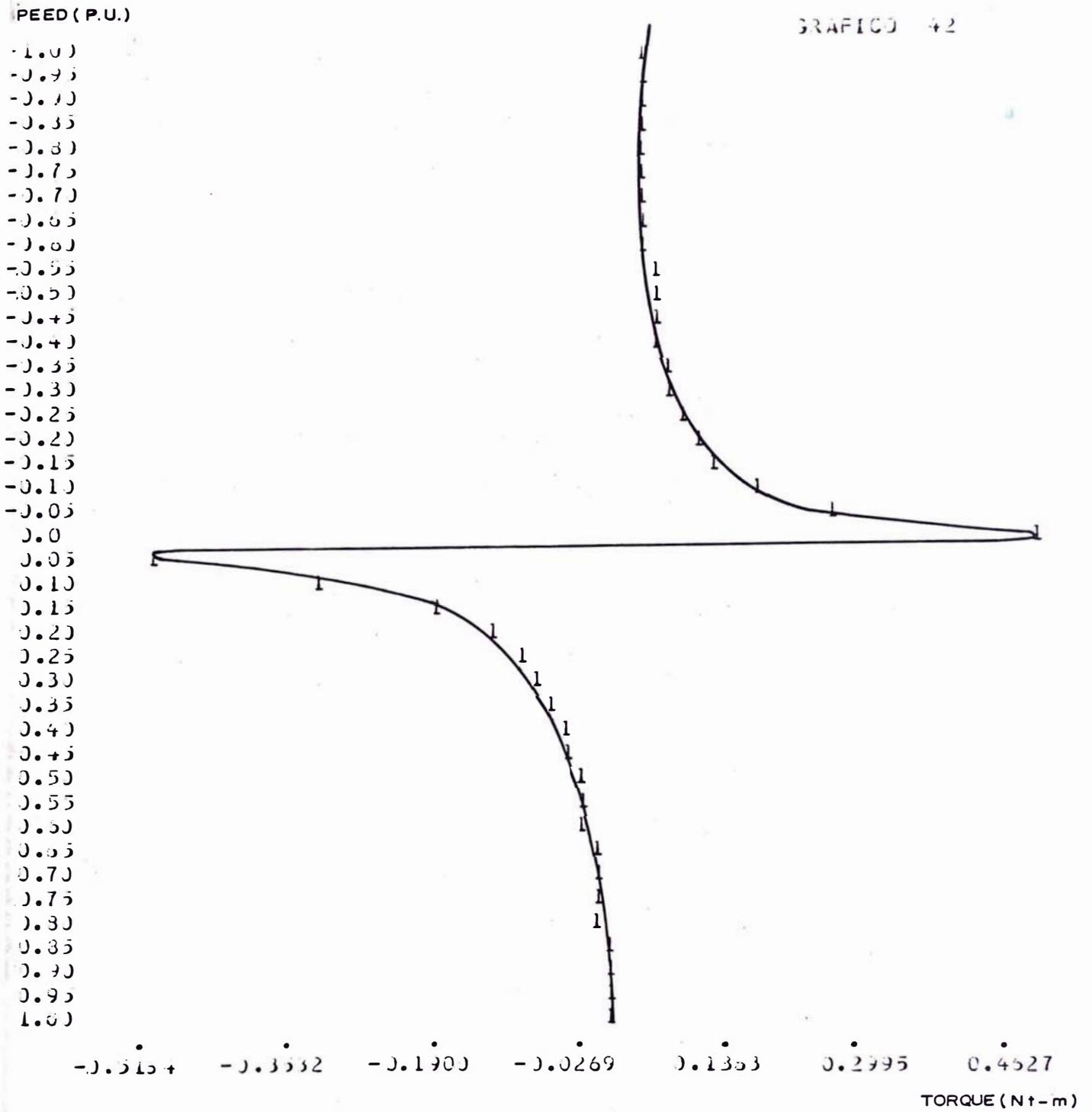


Fig. 42. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 25

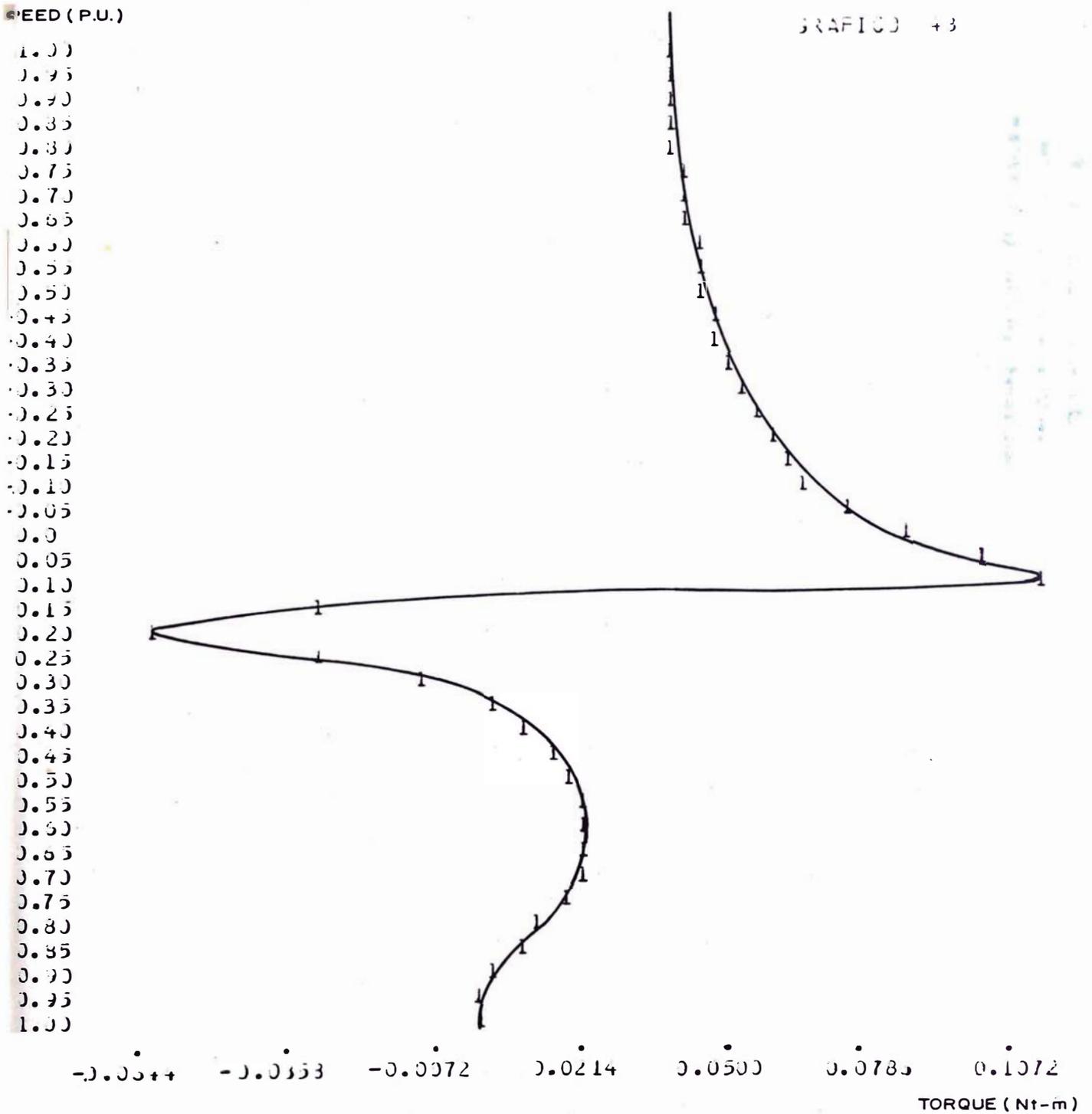


Fig. 43. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 7

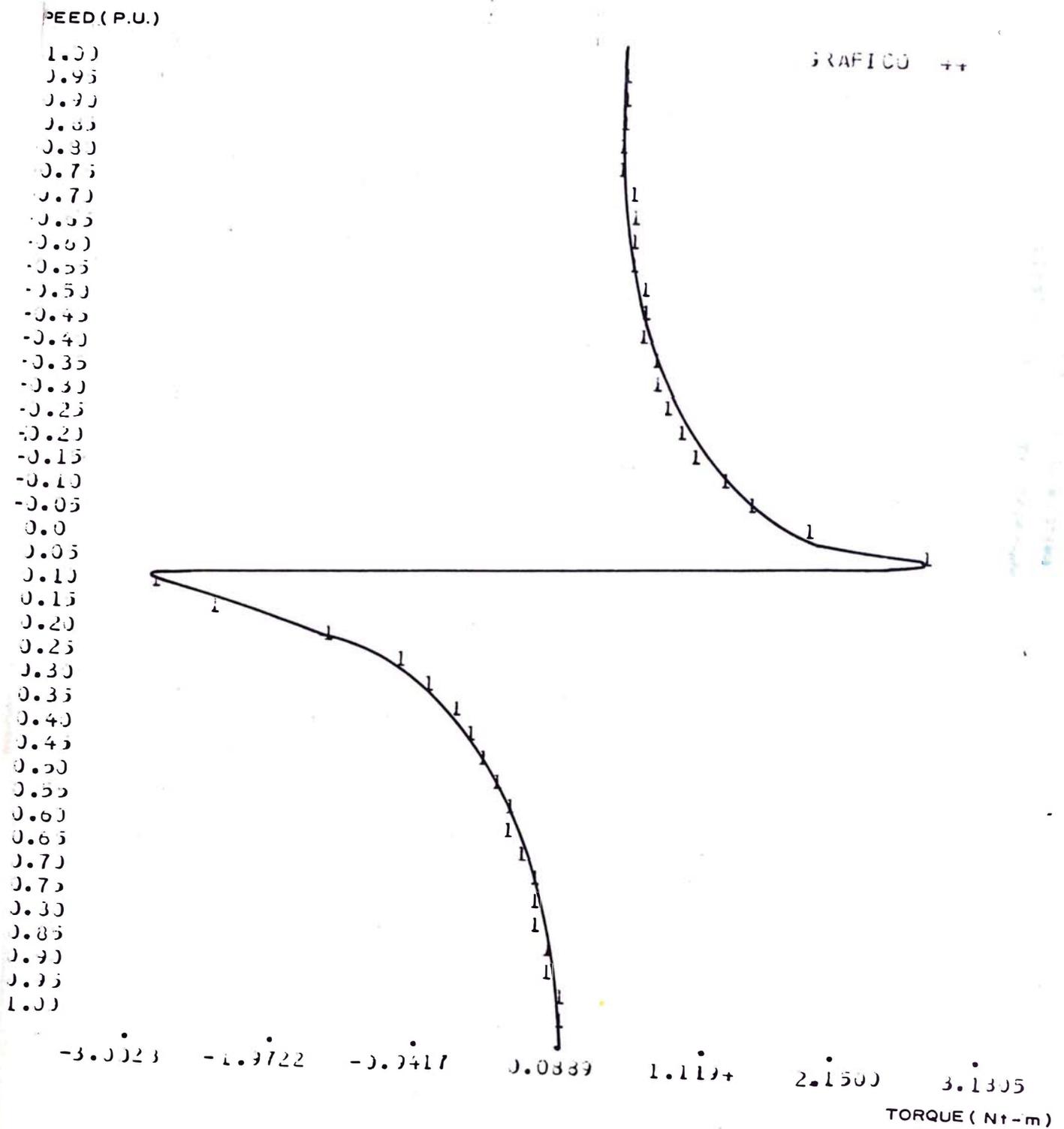


Fig. 44. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al armónico 13

SPEED (P.U.)

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 0.95
- 1.00

GRAFICO 45

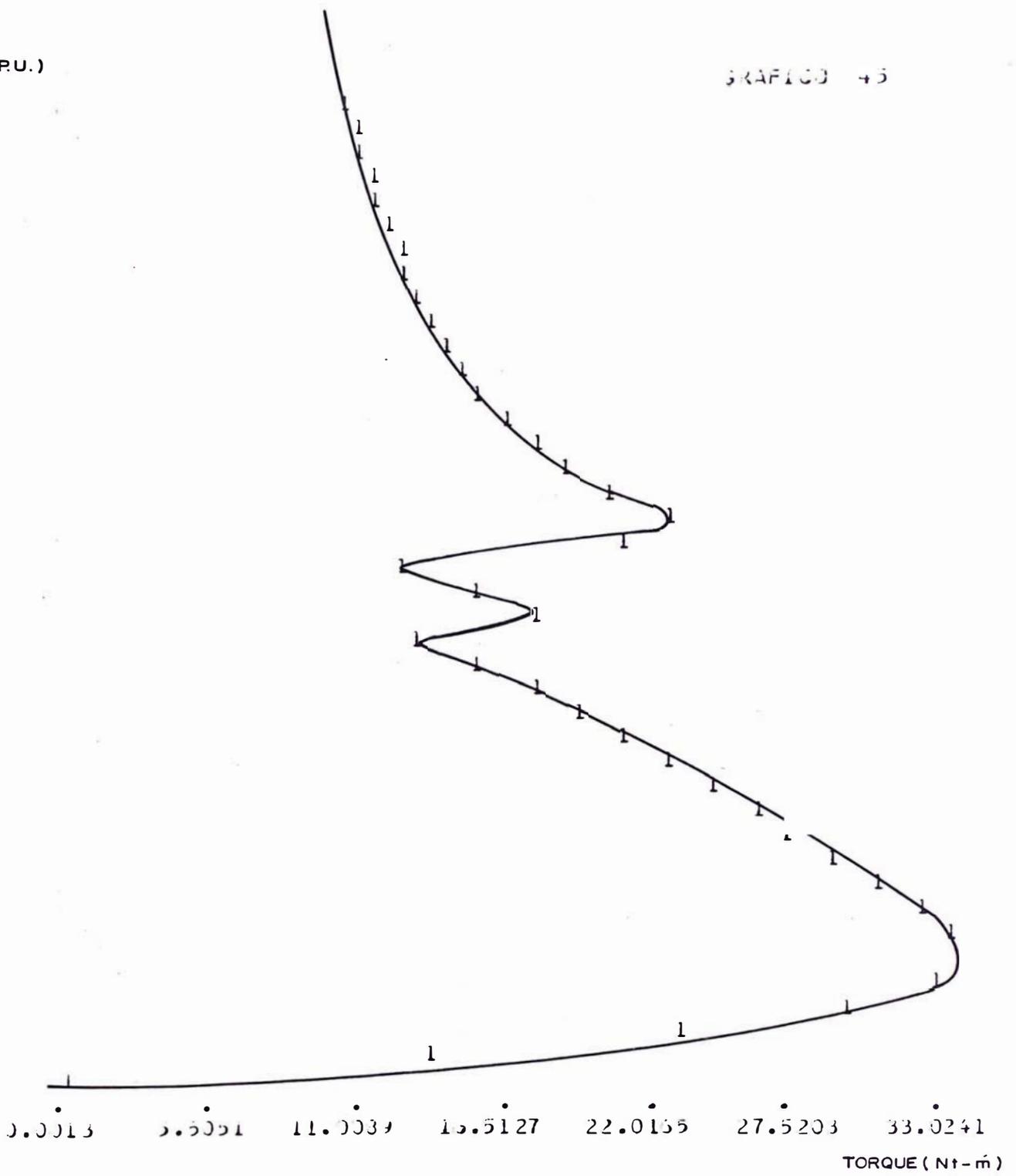


Fig. 45. Curva torque-velocidad total de la máquina III

SPEED (P.U.)

GRAFICO 46

- 1.00
- 0.95
- 0.90
- 0.85
- 0.80
- 0.75
- 0.70
- 0.65
- 0.60
- 0.55
- 0.50
- 0.45
- 0.40
- 0.35
- 0.30
- 0.25
- 0.20
- 0.15
- 0.10
- 0.05
- 0.0
- 0.05
- 0.10
- 0.15
- 0.20
- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40
- 0.45
- 0.50
- 0.55
- 0.60
- 0.65
- 0.70
- 0.75
- 0.80
- 0.85
- 0.90
- 1.00

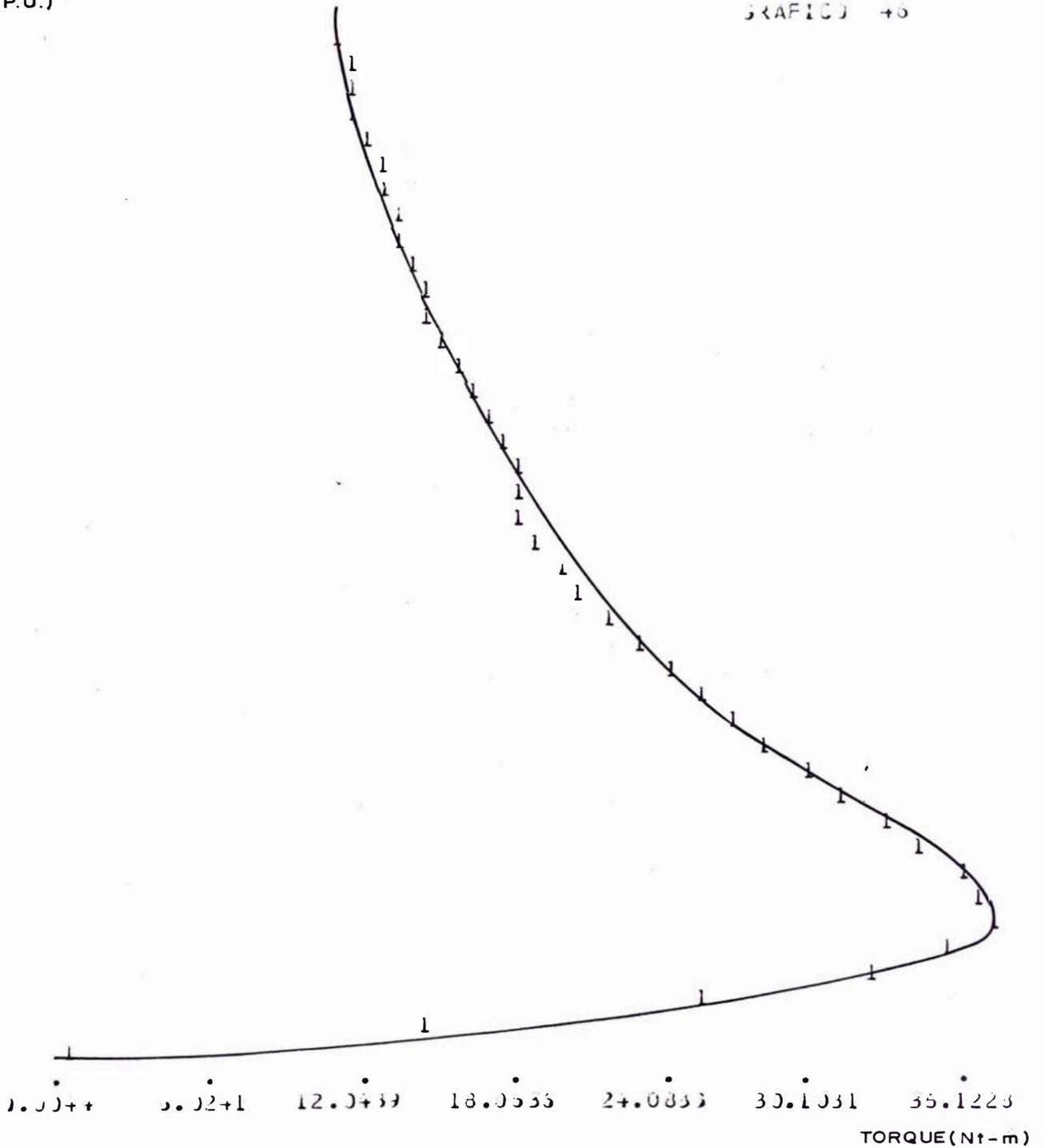


Fig. 46. Curva torque-velocidad de la máquina I debido al efecto de inclinación de las barras

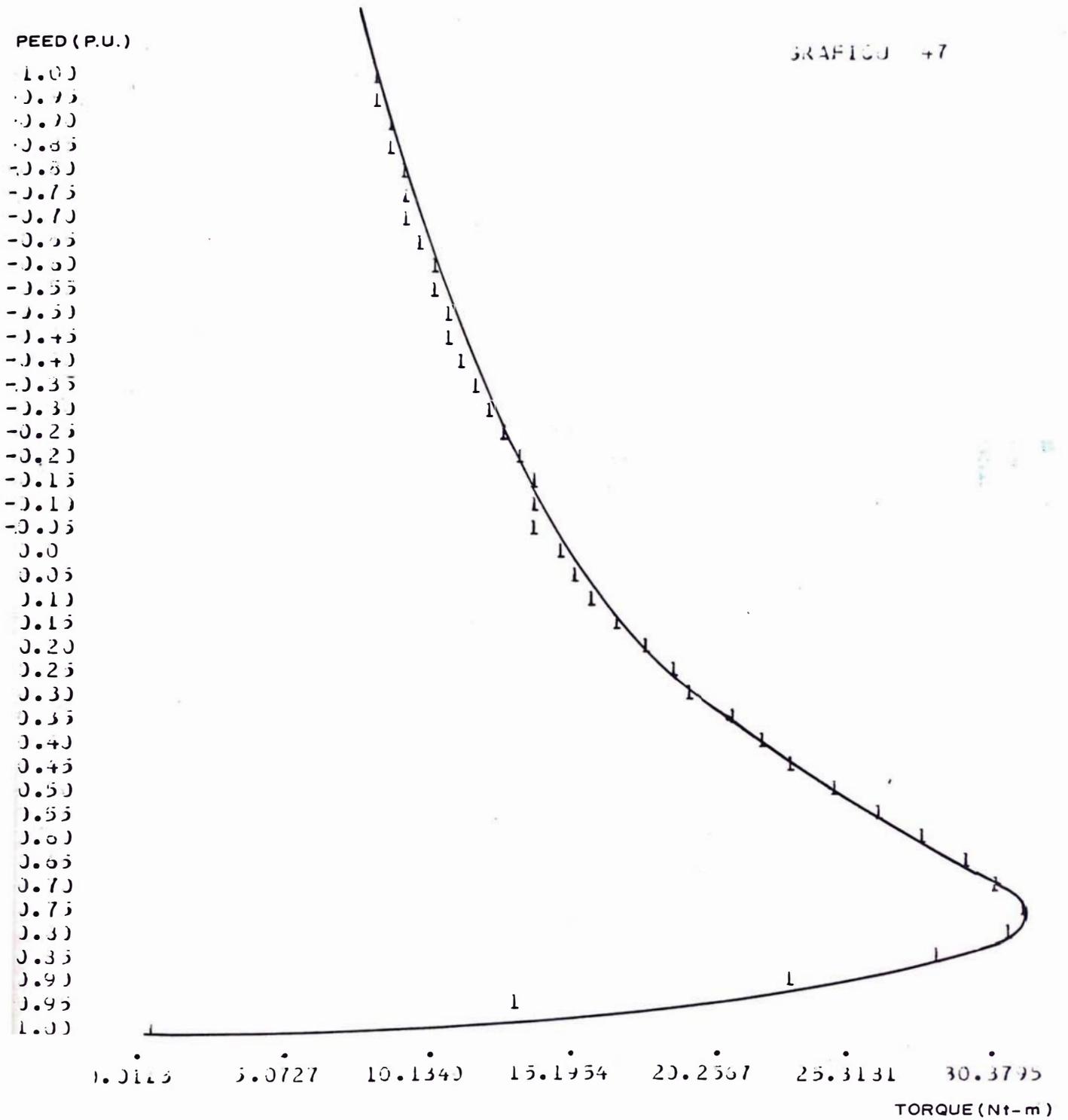


Fig. 47. Curva torque-velocidad de la máquina II debido al efecto de inclinación de las barras

SPEED (P.U.)

GRAFICO 43

-1.00
-0.75
-0.50
-0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

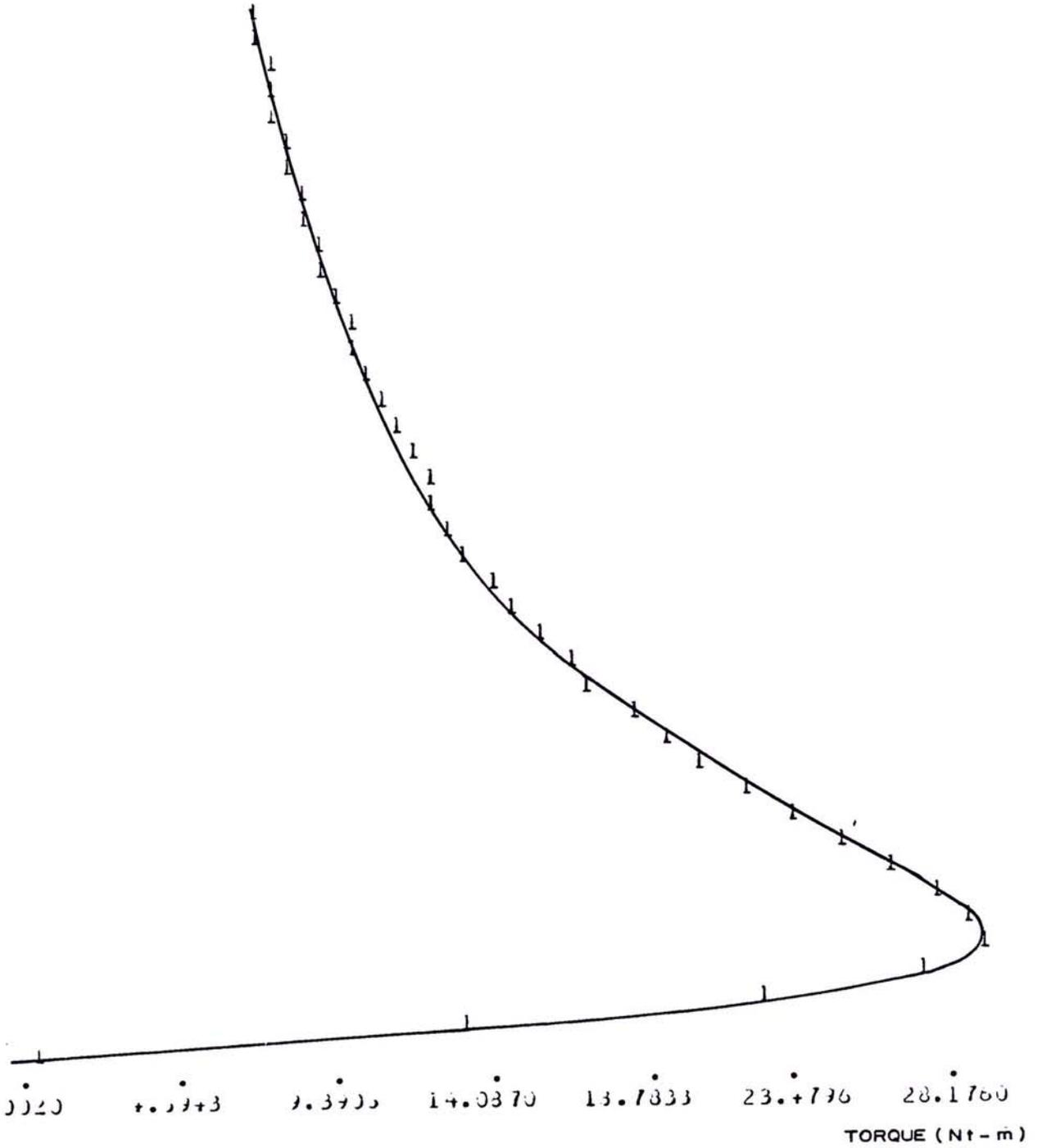


Fig. 48. Curva torque-velocidad de la máquina III debido al efecto de inclinación de las barras

SPEED (P.U.)

GRAFICO 49

-1.00
-0.95
-0.90
-0.85
-0.80
-0.75
-0.70
-0.65
-0.60
-0.55
-0.50
-0.45
-0.40
-0.35
-0.30
-0.25
-0.20
-0.15
-0.10
-0.05
0.0
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.45
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00

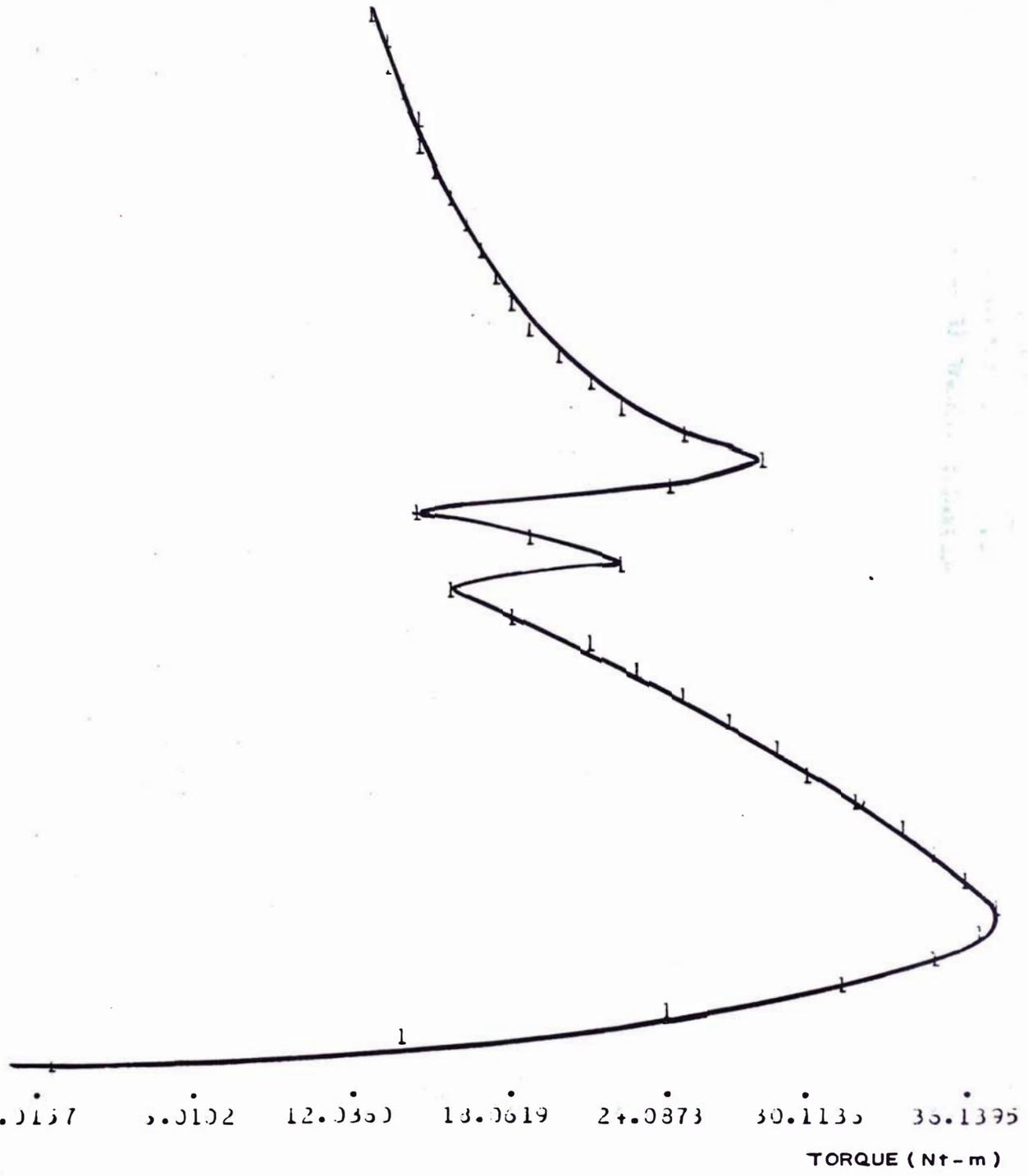


Fig. 49. Curva torque-velocidad total de la máquina
II sin considerar el efecto de abertura de
ranura.

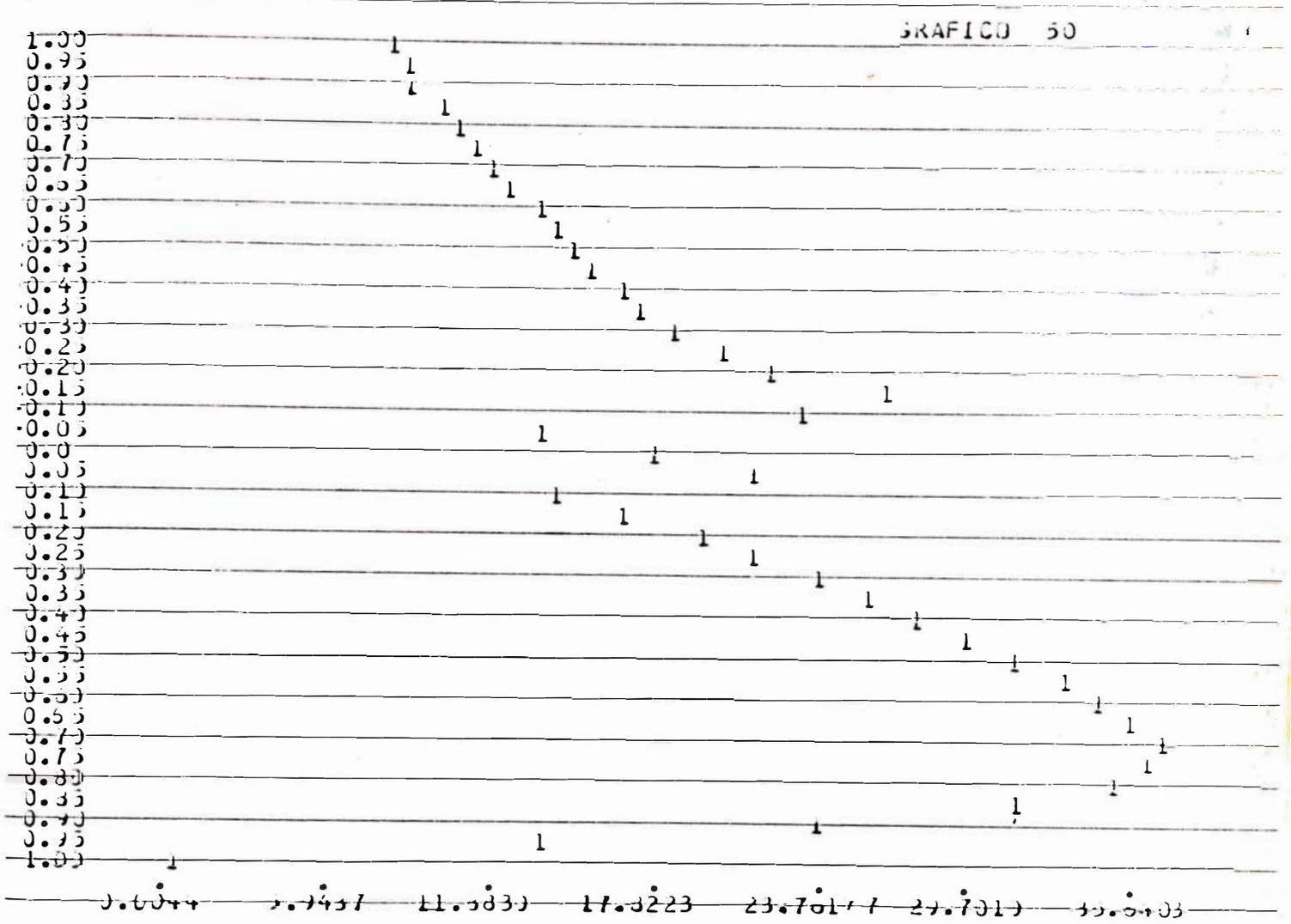


Fig. 50. Curva torque - velocidad total de la máquina
II considerando el efecto Skin.

CONCLUSIONES

- Se han hallado las ecuaciones en régimen estable del funcionamiento asíncrono y síncrono de una máquina de inducción eléctrica general de $m-n$ fases en la que se han incluido los armónicos espaciales.
- La condición hallada en este documento para que ocurra el funcionamiento síncrono es más general que el obtenido utilizando la teoría de campo giratorio.
- A partir de esta condición se puede concluir que todo par de armónicos que pertenecen al mismo grupo de componentes $\alpha-\beta$ produce funcionamiento síncrono y viceversa.
- Se confirma que los armónicos que pertenecen a cada grupo de componentes $\alpha-\beta$ no son independientes.
- La contribución de mayor importancia de este documento es la formulación basada en el enfoque de circuitos acoplados, de las ecuaciones que describen el funcionamiento síncrono de una máquina de inducción general en la que se incluyen los armónicos espaciales.
- Las ecuaciones proporcionan una explicación cuantitativa del torque síncrono.
- Se describe una simulación completamente digital para el análisis del funcionamiento asíncrono y síncrono de una máquina de inducción general de $m-n$ fases.

- Se describe una técnica matemática con el que resulta relativamente fácil programar para la solución de ecuaciones complejas.

BIBLIOGRAFIA

1. Dreese, E.
Synchronous Motor Effect in Induction Machine
AIEE Trans., Vol. 49, 1930, pp. 1033-1040
2. Alger, P.L.
Induction Machines
Gordon and Breach Science Publishers
New York, 1970
3. Moreno, M.R.
Modelo y Análisis General de Máquinas Eléctricas incluyendo Armónicos Espaciales de Campo Magnético
Tesis de Grado
4. Say, M.G.
Alternating Current Machines
John Wiley, New York, 1978
5. Liwschitz, M.M.
Differential Leakage with Respect to the Fundamental Wave and Its Harmonics
AIEE Trans., Vol. 63, 1944, pp. 1139-1150
6. Liwschitz, M.M.
Differential Leakage of a Fractional Slot Winding
AIEE Trans., Vol. 65, 1946, pp. 314-320
7. Veinott, C.G.
Spatial Harmonics Magnetomotive Forces in Irregular Winding and Special Connections of Polyphase Windings
IEEE Trans., Power Apparatus and Systems
Vol. PAS-83, 1964, pp. 1246-1253
8. Bravo, B.J.
Torque Electromagnético en máquinas de inducción de devanados primarios asimétricos
VII CONIMERA

ANEXO 1

RELACIONES Y PROPIEDADES DEL

ALGEBRA FASORIAL

si: $\bar{c} = a + jb$

Entonces, se denomina:

$$\text{Re}(\bar{c}) = a$$

$$\text{Im}(\bar{c}) = b$$

$$\bar{c} = \text{Re}(\bar{c}) + j \text{Im}(\bar{c})$$

Ecuación de Euler:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \text{Sen} \alpha$$

Se puede demostrar que:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} e^{j\alpha} + \frac{1}{2} e^{-j\alpha}$$

$$\text{Sen} \alpha = -\frac{j}{2} e^{j\alpha} - \frac{j}{2} e^{-j\alpha}$$

Propiedad 1:

$$\text{Sen} \alpha \text{ Sen} \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{Im}(e^{j\alpha}) \text{Im}(e^{j\beta}) = \frac{1}{2} \text{Re}(e^{j(\alpha - \beta)}) - \frac{1}{2} \text{Re}(e^{j(\alpha + \beta)}) \quad (\text{A.1.1})$$

Propiedad 2:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{Re}(e^{j\alpha}) \operatorname{Re}(e^{j\beta}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(e^{j(\alpha-\beta)}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(e^{j(\alpha+\beta)}) \quad (\text{A1.2})$$

Propiedad 3:

$$\operatorname{Sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \operatorname{Sen} (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{Sen} (\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{Im}(e^{j\alpha}) \operatorname{Re}(e^{j\beta}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(e^{j(\alpha-\beta)}) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(e^{j(\alpha+\beta)}) \quad (\text{A1.3})$$

Propiedad 4:

$$\operatorname{Sen} \alpha = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\operatorname{Im}(e^{j\alpha}) = \operatorname{Re}(e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})})$$

$$\operatorname{Im}(e^{j\alpha}) = -\operatorname{Re}(j e^{j\alpha}) \quad (\text{A1.4})$$

Propiedad 5:

$$\cos \alpha = \operatorname{Sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\operatorname{Re}(e^{j\alpha}) = \operatorname{Im}(e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})})$$

$$\operatorname{Re}(e^{j\alpha}) = \operatorname{Im}(j e^{j\alpha}) \quad (\text{A1.5})$$

Propiedad 6:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{Re}(e^{-j\alpha}) = \operatorname{Re}(e^{j\alpha}) \quad (\text{A1.6})$$

Propiedad 7:

$$\operatorname{Sen}(-\alpha) = -\operatorname{Sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{Im}(e^{-j\alpha}) = -\operatorname{Im}(e^{j\alpha}) \quad (\text{A1.7})$$

Propiedad 8:

$$\operatorname{Re}(e^{j\alpha}) = \operatorname{Re}(e^{j\alpha})^* \quad (\text{A1.8})$$

Propiedad 9:

$$(e^{j\alpha})^* = e^{-j\alpha} \quad (\text{A1.9})$$

ANEXO 2

CALCULO DE INDUCTANCIAS

1. Cálculo de inductancia entre 2 fases

Partiendo de la Ley de Ampere

$$FMM = Ni = N(\Psi) i$$

y considerando un bobinado concentrado de paso completo se consigue la siguiente distribución:

$$FMM = f(\Psi) = \begin{cases} + \left(\frac{N}{2}\right) i & \text{para } \Psi = [-90, +90] \\ - \left(\frac{N}{2}\right) i & \text{para } \Psi = \langle 90, 270 \rangle \end{cases}$$

(N : número de vueltas)

Esta función puede ser representada por una serie de Fourier.

$$FMM = f(\Psi) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{2}\right) i \sum_{\nu} \frac{1}{\nu} \cos(\nu p \Psi) \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)$$

Si consideramos un bobinado distribuido

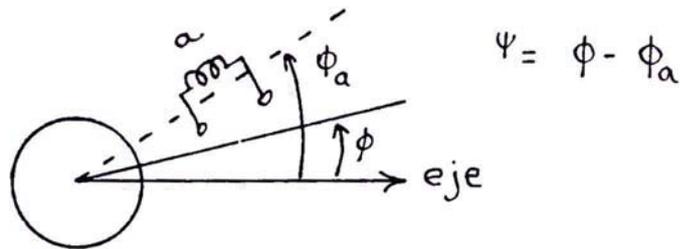
$$N_{ef} = \left(\frac{N}{2}\right) K_{\nu}$$

$$FMM = \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{2}\right) i \sum_{\nu} \frac{K_{\nu}}{\nu} \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \cos(\nu p \Psi)$$

Si hacemos $K_{\nu} = K_{\nu} \sin(\nu \pi/2)$

$$FMM = \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{2}\right) i \sum_{\nu} \frac{K_{\nu}}{\nu} \cos(\nu p \Psi) \quad (A2.1)$$

Si aplicamos esta definición a una bobina a.



la fuerza magnetomotriz sería:

$$FMM_a(\theta) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{N_a}{2}\right) i_a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{K_{\nu}^a}{\nu} \cos p \nu (\theta - \theta_a)$$

(ν impar)

K_{ν} es el factor de bobinado

$$K_{\nu} = \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) K_{p\nu} K_{d\nu} K_{c\nu}$$

donde:

$$K_{p\nu} = \sin\left(\nu p \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Factor de paso}$$

$$K_d = \frac{\sin\left(\nu \frac{q\gamma}{2}\right)}{q \sin\left(\nu \frac{\gamma}{2}\right)} \quad \text{Factor de distribución}$$

$$K_c = \frac{\sin\left(\nu \frac{\beta}{2}\right)}{\nu \frac{\beta}{2}} \quad \text{Factor de ranura}$$

p : paso de bobina

q : ranuras por polo por fase

β : ancho de la abertura de ranura en radianes

γ : Paso de ranura en radianes

reemplazando:

$$K_{\nu} = \sin \left(\nu p \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin \left(\nu \frac{q\delta}{2} \right)}{q \sin \left(\nu \frac{\delta}{2} \right)} \frac{\sin \left(\nu \frac{\beta}{2} \right)}{\nu \frac{\beta}{2}} \sin \left(\nu \frac{\pi}{2} \right)$$

La densidad de flujo en el entrehierro, debido a la corriente del bobinado (a) está dado por el producto de la $FMM_a(\phi)$ y la permeancia específica del entrehierro μ_1

$$B_a = \mu_1 FMM_a(\phi) \quad \text{donde} \quad \mu_1 = \frac{\mu_0}{g_l}$$

$$B_a = \frac{4}{\pi} \left(\frac{N_a}{2} \right) i_a \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_1 \frac{K_{\nu a}}{\nu} \cos \nu P (\phi - \phi_a)$$

Si λ_{ba} es el flujo producido por el bobinado (a) y concatenado con el bobinado (b) para P pares de polos.

$$\lambda_{ba} = \int_0^{\frac{2\pi}{P}} B_a(\phi) \underbrace{\left(\frac{4}{\pi} \left(\frac{N_b}{2} \right) \sum_{\nu} \frac{K_{\nu b}}{\nu} \cos \nu P (\phi - \phi_b) \right)}_{N_b(\phi)} (r l e \frac{1}{p} d\phi)$$

$$\lambda_{ba} = \int_0^{\frac{2\pi}{P}} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N_a}{2} \right) i_a \sum_{\nu} \mu_1 \frac{K_{\nu a}}{\nu} \cos \nu P (\phi - \phi_a) \frac{4}{\pi} \left(\frac{N_b}{2} \right)$$

$$\lambda_{ba} = \left(\frac{4}{\pi} \right) \left(\frac{N_a}{2} \right) \left(\frac{4}{\pi} \right) \left(\frac{N_b}{2} \right) i_a \mu_1 \frac{r l e}{p} \sum_{\nu} \frac{K_{\nu a} K_{\nu b}}{\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{P}} \cos \nu P (\phi - \phi_a) \cos \nu P (\phi - \phi_b) d\phi$$

$$\lambda_{ba} = \frac{4}{\pi} \frac{N_a N_b}{\pi} i_a \frac{p}{1} \frac{r_{le}}{P} \sum \frac{K_{\nu a} K_{\nu b}}{\nu^2} \frac{2\pi}{P} \left(\frac{1}{2}\right) \cos \nu P (\phi_a - \phi_b)$$

$$\lambda_{ba} = \mu_0 \frac{r_{le}}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{N_a N_b}{P^2} i_a \sum \frac{K_{\nu a} K_{\nu b}}{\nu^2} \cos \nu P (\phi_a - \phi_b) \quad (\text{A.2.3})$$

La inductancia mutua L_{ba} está dada por:

$$L_{ba} = \frac{\lambda_{ba}}{i_a}$$

$$L_{ba} = \mu_0 \frac{r_{le}}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{N_a N_b}{P^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{K_{\nu a} K_{\nu b}}{\nu^2} \cos \nu P (\phi_a - \phi_b) \quad (\text{A.2.4})$$

Por reciprocidad, el valor de L_{ab} está también dado por la misma expresión.

La expresión general (A.2.4) para la inductancia mutua se puede usar para detener las inductancias propias y mutuas de los bobinados de una máquina.

La inductancia de una máquina de inducción de m fases, rotor cilíndrico con P pares de polos y variaciones de permeancia despreciable son las siguientes:

1.1 Inductancia propia de una fase del estator debido al flujo en el entrehierro

$$\phi_a = \phi_b$$

$$N_a = N_b = N$$

$$K_{\nu a} = K_{\nu b} = K_{\nu}$$

$$L_{m_1}^s = \mu_0 \frac{\tau l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{P}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{K_\nu}{\nu}\right)^2 \quad (\text{A.2.5})$$

donde;

g_e = entrehierro efectivo

l_e = longitud efectiva

N = N° de vueltas totales por fase

ν = impar

Para obtener la inductancia propia total L_1^s , a $L_{m_1}^s$ se le debe adicionar las inductancias de dispersión.

$$L_1^s = L_{m_1}^s + \text{inductancias de dispersión}$$

1.2 Inductancia mutua entre 2 fases del estator

$$\nu P (\phi_a - \phi_b) = \nu P (i-1) \frac{2\pi}{m}$$

$$K_{\nu a} = K_{\nu b} = K_\nu$$

$$N_a = N_b = N$$

$$L_{m_i}^s = \mu_0 \frac{\tau l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{P}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{K_\nu}{\nu}\right)^2 \cos\left[\nu P (i-1) \frac{2\pi}{m}\right] \quad (\text{A2.6})$$

$$(\nu \text{ impar}) \quad i = 2, 3, \dots, m$$

Para obtener la inductancia mutua total L_i^s a $L_{m_i}^s$ se le debe adicionar la inductancia mutua de dispersión de ranura

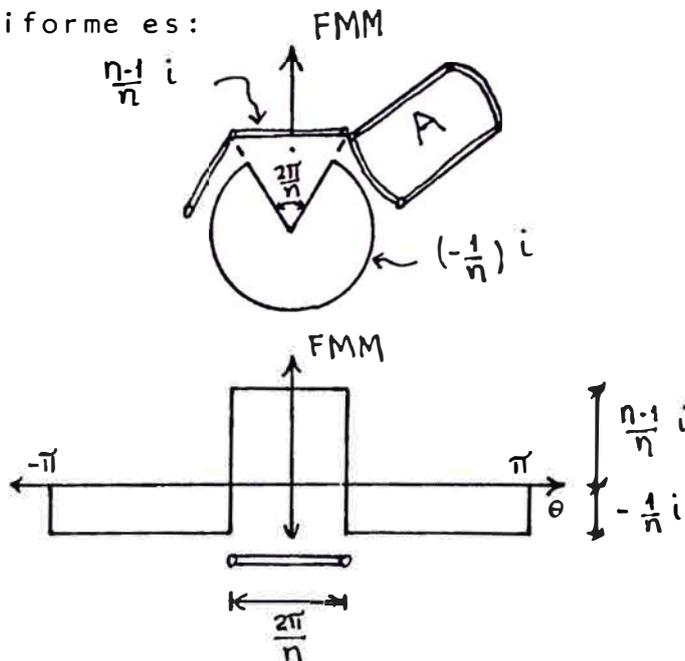
$$L_i^s = L_{m_i}^s + \text{dispersión de ranura mutua}$$

$$i = 2, 3 \dots \quad (\nu \text{ impar})$$

2. Inductancias de los circuitos del rotor jaula de ardilla
11a

Debido a que los circuitos rotóricos son bobinas de una sola vuelta estos son ricos en armónicos. Considerar, para tomar el caso más popular, un devanado rotórico jaula de ardilla con n barras rotóricas uniformemente espaciadas y donde cada circuito rotórico está constituida por dos barras sucesivas y los dos segmentos de anillo que las unen. Se debe notar que el número de barras por par de polos no tiene que ser un número entero.

La distribución de fuerza magnetomotriz establecida por una corriente del circuito rotórico y un entrehierro uniforme es:



La densidad de flujo resultante en el entrehierro B se puede expresar en función de la fuerza magnetomotriz

$$B = \frac{u_o}{g_e} \quad \text{FMM}$$

g_e : longitud efectiva del entrehierro.

Usando la definición de inductancia como el flujo por unidad de corriente, la inductancia mutua debido al flujo del entrehierro entre dos circuitos rotóricos.

L_{loop} es:

$$B = \frac{u_o}{g_e} \quad \text{FMM}$$

$$B = \frac{u_o}{g_e} \left(\frac{1}{n}\right) i$$

$$\lambda = B \times A$$

$$\lambda = \frac{u_o}{g_e} \left(\frac{1}{n}\right) i \times l_e \times r \times \frac{2\pi}{n}$$

$$L_{loop} = \frac{\lambda}{i}$$

$$L_{loop} = \frac{u_o}{g_e} \left(\frac{1}{n}\right) l_e r \frac{2\pi}{n}$$

$$L_{loop} = u_o \frac{l_e}{g_e} \frac{2\pi r}{n^2}$$

(A2.7)

(Inductancia mutua)

r : radio medio

l_e : longitud efectiva del rotor

La inductancia propia de un circuito debido al flujo en el entrehierro se puede demostrar que es $(n-1)L_{loop}$

$$B = \frac{u_o}{g_e} \quad \text{FMM}$$

$$B = \frac{u_o}{g_e} \left(\frac{n-1}{n} \right) i$$

$$\lambda = B \cdot A$$

$$\lambda = \frac{u_o}{g_e} \left(\frac{n-1}{n} \right) i \times l_e \times r \times \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{\lambda}{i} = u_o \times \frac{l_e}{g_e} \times \frac{2\pi r}{n^2} \times (n-1)$$

$$\frac{\lambda}{i} = L_{loop} (n-1)$$

Alternativamente, se puede usar la expresión general A2.4 para evaluar las inductancias propia y mutua de los circuitos rotóricos debido al flujo en el entrehierro.

$$K_{va} K_{vb} = \text{sen}^2 \left(\nu p \frac{\pi}{n} \right)$$

$$N_a = N_b = 1$$

$$\phi_a - \phi_b = 0$$

Inductancia propia:

$$(n-1) L_{loop} = \mu_0 \frac{r_l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{1}{p^2} \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^2} \text{sen}^2 \left(\nu p \frac{\pi}{n} \right) \quad (A2.8)$$

Inductancia mutua:

$$K_{\nu a} = K_{\nu b} = \text{sen}^2 \left(\nu p \frac{\pi}{n} \right)$$

$$N_a = N_b = 1$$

$$\phi_a - \phi_b = \frac{2\pi}{n} (j-1)$$

$$L_{loop} = \mu_0 \frac{r_l e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{1}{p^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \text{sen}^2 \left(\nu p \frac{\pi}{n} \right) \cos \nu p (j-1) \frac{2\pi}{n} \quad (A2.9)$$

$(j-1) \frac{2\pi}{n}$: ángulo entre los ejes de 2 circuitos rotóricos.

Se puede mostrar que los valores de L_{loop} calculados por las expresiones (A2.7) y (A2.9) son idénticos.

Para obtener la inductancia propia total de un circuito se debe adicionar la inductancia de dispersión en los segmentos de los anillos conectores, su inductancia propia $(n-1) L_{loop}$ es decir:

$$L_1^r = 2(L_b + L_e) + (n-1) L_{loop}$$

$$L_2^r = -L_b - L_{loop}$$

$$L_i^r = -L_{loop} \quad \text{para } i = 3, 4, \dots$$

(A2.10)

Donde:

L_b : inductancia de dispersión de ranura

L_e : inductancia de dispersión de los segmentos de anillos conectores.

3. Inductancia mutua entre un circuito rotórico y una fase estática

Usando la expresión general (A2.4), se puede obtener la inductancia mutua entre la i -ésima fase estática y el j -ésimo circuito rotórico.

$$K_{\nu a} = K_{\nu}$$

$$K_{\nu b} = \text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n})$$

$$N_a = N$$

$$N_b = 1$$

$$\nu P(\phi_a - \phi_b) = \nu(P\theta_r - (i-1)\frac{2\pi}{m} + (j-1)P\frac{2\pi}{n})$$

$$L_{ij}^{sr} = \mu_0 \frac{r l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{N}{P^2} \sum_{\nu} \frac{K_{\nu}}{\nu^2} \text{Sen}(\nu P \frac{\pi}{n}) \cos \nu(P\theta_r - (i-1)\frac{2\pi}{m} + (j-1)P\frac{2\pi}{n}) \quad (A2.11)$$

4. Inductancias Equivalentes Bifásicas

La inductancia del estator a 2 fases es:

$$L_{\nu}^{aps} = L_1^s + 2L_2^s \cos(\nu \frac{2\pi}{m}) + \dots$$

Reemplazando para los L_i^s ($i = 1, 2, \dots$) se obtiene:

$$L_{\nu}^{aps} = L_{\text{dispersión}} + \frac{m}{2} \mu_0 \frac{r l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{P}\right)^2 \sum_{\nu} \left(\frac{K_{\nu}}{\nu}\right)^2$$

Si definimos la inductancia magnetizante del estator

L_{ν}^m para el armónico ν -ésimo, como:

$$L_{\nu}^m = \frac{m}{2} \mu_0 \frac{r l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{P}\right)^2 \left(\frac{K_{\nu}}{\nu}\right)^2 \quad (A2.13)$$

$L_{\nu}^{\alpha\beta s}$ se puede escribir como:

$$L_{\nu}^{\alpha\beta s} = L_{\text{dispersión}} + \sum_{\nu} L_{\nu}^m \quad (A2.14)$$

$$(\nu_i = Km + i)$$

Se asume que la inductancia de dispersión de ranura mutua está combinada con la inductancia de dispersión $L_{\text{dispersión}}$

La inductancia rotórica a 2 ejes es:

$$L_{\nu}^{\alpha\beta r} = L_1^r + 2L_2^r \cos\left(\nu P \frac{2\pi}{n}\right) + \dots$$

Reemplazando para los L_j^r con $j = 1, 2, 3, \dots$

$$L_{\nu_j}^{\alpha\beta r} = 2(L_e + 2L_b \sin^2(\nu P \frac{\pi}{n})) + \frac{n}{2} \mu_0 \frac{r l_e}{g_e} \frac{4}{\pi} \frac{1}{P^2} \sum_{\nu_j} \frac{\sin^2(\nu P \frac{\pi}{n})}{\nu_j^2} \quad (A2.15)$$

$$(\nu_j = K \frac{n}{P} + j)$$

Sustituyendo L_{ν}^m de la ecuación (A2.13) se tiene:

$$L_{\nu}^{\alpha\beta r} = 2(L_e + 2L_b \sin^2(\nu P \frac{\pi}{n})) + \frac{n \sin^2(\nu P \frac{\pi}{n})}{m K_{\nu}^2 N^2} L_{\nu}^m \sum_k \frac{\nu^2}{(K \frac{n}{P} + \nu)^2} \quad (A2.16)$$

$$K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$L_{\nu}^{\alpha PR}$ también se puede expresar como:

$$L_{\nu}^{\alpha PR} = \frac{\eta \operatorname{Sen}^2\left(\nu P \frac{\pi}{n}\right)}{m K_{\nu}^2 N^2} \left(L_{1\nu}^r + L_{\nu}^m \right)$$

5. Efectos de inclinación de las barras

El efecto debido a la inclinación de las barras rotóricas se puede tener en cuenta al multiplicar la inductancia mutua en la ec. (A2.11) por el factor de inclinación

$$K_{s\nu} = \frac{\operatorname{Sen}\left(\nu P \frac{\alpha}{2}\right)}{\nu P \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{A2.17})$$

α : ángulo de inclinación en radianes

6. Efecto SKIN

El efecto SKIN en los bobinados estáticos generalmente se desprecian, pero para las barras rotóricas la resistencia e inductancia ac, son calculados como sigue:

$$R_{ac} = \alpha d \frac{\operatorname{Senh}(2\alpha d) + \operatorname{Sen}(2\alpha d)}{\operatorname{Cosh}(2\alpha d) - \operatorname{Cos}(2\alpha d)} R_{dc} \quad (\text{A2.18})$$

$$L_{ac} = \frac{\alpha d}{2\pi f} \frac{\operatorname{Senh}(2\alpha d) - \operatorname{Sen}(2\alpha d)}{\operatorname{Cosh}(2\alpha d) - \operatorname{Cos}(2\alpha d)} R_{dc} \quad (\text{A2.19})$$

d: profundidad del conductor

f: frecuencia de la corriente rotórica

$$\alpha: \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}$$

σ : conductividad de las barras rotóricas.

Como el efecto SKIN es apreciable únicamente en la sección del conductor que está en la ranura, R_{dc} representa solamente la resistencia de esa porción de la barra del rotor que está en la ranura.