

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST-GRADO Y 2da ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL



TESIS PARA OPTAR EL GRADO
DE MAESTRO EN CIENCIAS
Mención Física

TÍTULO

"ESTABILIDAD DINÁMICA DE ESTRELLAS AXISIMÉTRICAS"

Presentada por:
EDGARD VIDALÓN VIDALÓN

LIMA - PERÚ
2003

Agradecimientos

Agradezco al Profesor Holger Valqui por todas las interesantes críticas constructivas y discusiones que me ayudaron a comprender varios aspectos de la Dinámica de Fluidos.

Agradezco a mi asesor Armando Bernui por ofrecerme este tema de tesis de maestría y por su constante ayuda, principalmente en la redacción, en el desarrollo del presente trabajo.

Mi reconocimiento al Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias – UNI por el apoyo para llevar a cabo la presente tesis.

También agradezco a todos mis amigos y colegas de la Facultad de Ciencias entre ellos a Marlene Soldevilla por ayudarme a resolver algunos problemas de integración, y Alejandra Altamirano por su apoyo moral y ayudarme en los problemas de softwares que se presentaron en el desarrollo de la presente investigación sin la cual no se finalizaría la tesis.

ABSTRACT

Here we study the dynamics of rotation of Newtonian fluid ellipsoids, specifically its stability properties. We use this approach to model star condensation from an original homogeneous gas cloud, in order to understand the Sun's evolution from a primitive gas nebula to become a hot star.

Finally we apply our results to a more realistic pre-solar model, considering the nebula formed by two different –but homogeneous– axially symmetric gas clouds, one being a nucleus and the other being a shell covering the nucleus.

The results are very interesting and match very well with the present knowledge about the formation of our solar system. This suggests that, with further work, this model could be used to improve our understanding of planetary–star formation processes.

Indice

Principales símbolos usados	ii
Introducción	1
<i>Capítulo 1. Ecuación Virial de 2^{do} orden</i>	2
1.1 Introducción	3
1.2 Definiciones básicas	3
1.3 Ecuación virial de 2 ^{do} orden del fluido 'rígido' para un Sistema de Referencia no inercial	5
Apéndice del Capítulo 1	8
<i>Capítulo 2. Los Esferoides de Maclaurin</i>	16
2.1 Introducción	17
2.2 Breve Teoría del Potencial Gravitatorio	17
2.3 Condición de Maclaurin para el equilibrio	19
2.4 Aplicaciones de la condición de Maclaurin	21
Apéndice del Capítulo 2	23
<i>Capítulo 3. Colapso de los esferoides de Maclaurin</i>	24
3.1 Introducción	25
3.2 Ecuación de balance de energía de un esferoide de Maclaurin en colapso	26
3.3 Ecuación de Euler del esferoide de Maclaurin en colapso	27
3.4 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales de los semiejes de los esferoides de Maclaurin	32
3.5 Colapso de los esferoides de Maclaurin constituido por un núcleo y una capa envolvente	62
Apéndice del Capítulo 3	72
<i>Bibliografía</i>	84

Principales símbolos usados

\vec{x}	Segmento Orientado: Vector posición
\mathbf{x}	Vector Coordenadas del punto $P(x_1, x_2, x_3)$.
x	Longitud del vector posición o coordenadas
\vec{u}	Velocidad del fluido en el punto \mathbf{x} .
I_{ij}	Momentos de distribución de la densidad de 2 ^{do} orden.
Π	Momentos de distribución de la presión de orden cero.
G	Constante de gravitación.
β	El potencial gravitatorio Newtoniano.
β_{ij}	Elemento de la matriz potencial gravitacional Newtoniano.
Ep_{ij}	Elemento de la matriz de la energía potencial gravitatoria.
a_1, a_2, a_3	Semiejes del elipsoide.
e	Excentricidad del elipsoide.
e_{in}	Excentricidad de la inestabilidad.
$\vec{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$	Función de Onda.
δJ	La primera variación de la integral J (cambio de Euler).
M	Masa del Fluido Elipsoidal.
C_a	Constante relacionada con la Resistencia del vórtice del fluido.
k	Conductividad térmica del fluido.
$X_1 X_2 X_3$	Sistema de referencia no inercial (en rotación con el fluido).
b_1, b_2, b_3	Semiejes de la frontera del elipsoide.

Introducción

Gracias al vasto trabajo realizado por físicos y astrónomos, durante las últimas décadas hemos aprendido bastante sobre los cuerpos celestes que denominamos *estrellas*. Conocemos por ejemplo sus mecanismos de generación y emisión de energía (i.e. radiación), su composición química, sus propiedades dinámicas de interacción con otros cuerpos celestes, y algunas características de su proceso de evolución. Una de las propiedades dinámicas más importantes de este proceso es justamente su rotación intrínseca. Al respecto surgen preguntas interesantes sobre la posible relación entre la velocidad angular de rotación y la estabilidad de la estrella, o sobre cuál es el papel que juega la viscosidad para mantener el equilibrio dinámico. Muchas de las propiedades de las estrellas pueden explicarse usando la teoría de la estabilidad de fluidos elipsoidales en rotación, esta teoría fue desarrollada principalmente por Maclaurin, Jacobi, Dirichlet, Poincaré y Darwin. Aquí usaremos el método desarrollado por Maclaurin [1], que se aplica a hipotéticos y ficticios fluidos elipsoidales homogéneos rotantes llamados Esferoides de Maclaurin que mantienen su forma a pesar de su movimiento y conservando su eje de rotación. El objetivo de esta tesis es analizar algunos detalles de la formación de una estrella y su estabilidad modelando la nube gaseosa que la origina como un Esferoide de Maclaurin con 2 semiejes iguales (debido a lo cual su forma geométrica adquiere simetría axial por esta razón es comúnmente denominado Estrella axisimétrica). Comenzaremos analizando las condiciones de estabilidad que permitan la existencia de los hipotéticos Esferoides de Maclaurin, aun sometidos a pequeñas perturbaciones o en estado de colapso. Es necesario mencionar que al estudiar estos cuerpos luego de analizar sus propiedades se considera en forma gradual parámetros físicos como la viscosidad, la presión interna del fluido, etc de tal manera que describan un modelo más real de una estrella. Además también aplicaremos la teoría de los Esferoides de Maclaurin a un breve estudio sobre la formación del Sistema Solar. Esta tesis se ha dividido en 3 capítulos; hemos dejado para los respectivos apéndices las demostraciones de algunos resultados, importantes pero algo complicados para ser verificados durante el desarrollo del capítulo. A continuación ofrecemos un breve resumen de cada capítulo.

En el capítulo 1, considerando las definiciones de momentos de distribución de magnitudes físicas en un fluido y usando sistemas de referencia no inercial deducimos las ecuaciones que relacionan los momentos de distribución (ecuaciones viriales) para el caso de un fluido de densidad constante elipsoidal sin viscosidad de forma arbitraria aislada.

En el capítulo 2, usando la ecuación virial de 2^{do} orden y la teoría del potencial gravitatorio hallamos la relación que existe entre la velocidad angular y el grado de achatamiento de un fluido elipsoidal en rotación que mantiene el fluido en equilibrio dinámico.

En el capítulo 3 analizaremos el colapso del fluido elipsoidal en rotación mediante la resolución numérica del sistema de ecuaciones (diferenciales ordinarias) de evolución de sus semiejes.

Existen varias propiedades de la nebulosa proto-estelar que no estamos considerando en este trabajo pues hacen sumamente complicado el estudio de la dinámica del fluido en estudio. Por ejemplo, no consideramos en detalle el análisis de las ondas elásticas que habría en el fluido perturbado. A este respecto daremos más información al final del apéndice del capítulo 3.

1 Ecuación Virial de 2^{do} orden

un fluido, en rotación (si es un fluido dipolo) con dos ejes iguales (simetría axial que presenta debido a su rotación). Para esto necesitaremos algunas físicas relevantes que describen un fluido que nos describan parámetros tales como el caso particular de fluidos dipolo en un caso de distribución que sea homogénea las de las magnitudes físicas. En este trabajo usaremos la Ecuación Virial de 2^{do} orden, la ecuación que relaciona el momento angular constante con respecto a un eje de rotación y donde el fluido es para los ejes de las demostraciones de

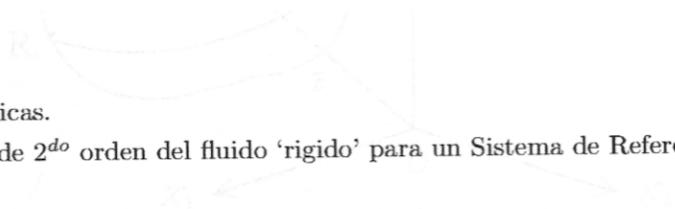
los ejes consistentes un fluido que ocupa un elemento diferencial de volumen dV está en la posición $\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ (ver

Fig. 1)

1.1 Introducción.

1.2 Definiciones básicas.

1.3 Ecuación virial de 2^{do} orden del fluido 'rígido' para un Sistema de Referencia no Inercial.



al de volumen dV con funciones ρ y ρ_0 de \vec{r} de \vec{r}

(1.1)

1.1 Introducción

Deseamos estudiar la dinámica de un fluido, en rotación (si es un fluido elipsoidal con dos semiejes iguales se le dice fluido axisimétrico por la simetría axial que presenta debido a su rotación). Para esto necesitamos tomar en cuenta las distribuciones espaciales de las magnitudes físicas relevantes que describen un fluido, esto es, necesitamos funciones ya sea escalar o vectorial que nos describan parámetros tales como la densidad de masa, la presión, la energía cinética, etc. En el caso particular de fluidos elipsoidales en rotación es conveniente introducir nuevos conceptos tales como los de distribución que son magnitudes donde intervienen las coordenadas y las distribuciones espaciales de las magnitudes físicas. En este trabajo usaremos momentos de distribución de orden cero, de 1^{er} orden y de 2^{do} orden. La ecuación que relaciona los momentos de distribución de 1^{er} (respectivamente 2^{do}) orden recibe el nombre de Ecuación Virial de 1^{er} (respectivamente 2^{do}) orden. En el presente capítulo usaremos la Ecuación Virial de 2^{do} orden considerando un sistema de referencia no inercial que rota con velocidad angular constante con respecto a un sistema de referencia inercial, ambos sistemas de referencia tienen un eje común y donde el fluido rota solidario con el sistema de referencia no inercial. Dejamos para los apéndices las demostraciones de las ecuaciones más complicadas.

1.2 Definiciones Básicas

Para definir los Momentos de distribución de densidad de varias ordenes consideremos un fluido que ocupa una región R arbitraria y está limitado por una superficie S ; un elemento diferencial de volumen dV está ubicado en el punto $P(x_1, x_2, x_3)$, es decir le corresponde el vector posición $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ (ver fig. 1.1).

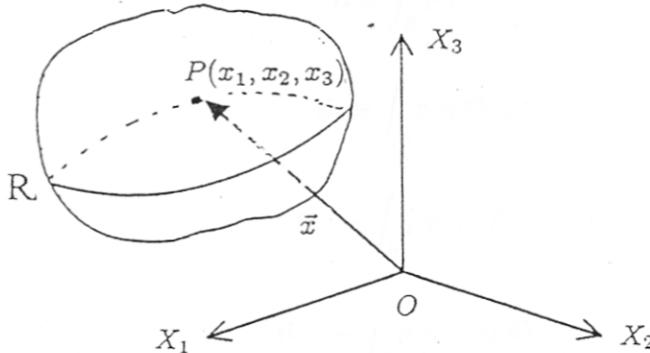


Fig. 1.1.

En general la densidad ρ , la presión p y la velocidad \vec{u} de un diferencial de volumen dV son funciones de las coordenadas espaciales (x_1, x_2, x_3) y de la coordenada tiempo t , es decir

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

$$p = p(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

$$\vec{u} = \vec{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

en donde $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$. Partiendo del concepto de densidad definimos los *momentos de distribución de la densidad*:

- de orden cero

$$M = \int_R \rho dV, \quad (1.4)$$

donde M es la masa del fluido.

- de 1^{er} orden

$$I_i \equiv \int_R \rho x_i dV, \quad (1.5)$$

- de 2^{do} orden

$$I_{ij} \equiv \int_R \rho x_i x_j dV, \quad (1.6)$$

- de 3^{er} orden

$$I_{ijk} \equiv \int_R \rho x_i x_j x_k dV. \quad (1.7)$$

donde $i, j, k = 1, 2, 3$.

De manera semejante definimos los *momentos de distribución de la presión*:

- de orden cero

$$\Pi \equiv \int_R p dV, \quad (1.8)$$

- de 1^{er} orden

$$\Pi_i \equiv \int_R p x_i dV, \quad (1.9)$$

- de 2^{do} orden

$$\Pi_{ij} \equiv \int_R p x_i x_j dV, \quad (1.10)$$

- de 3^{er} orden

$$\Pi_{ijk} \equiv \int_R p x_i x_j x_k dV, \quad (1.11)$$

Definiremos ahora el *momento de distribución de la Energía Cinética de orden cero*. Notemos que la energía cinética del sistema de la fig. 1.1, es

$$\Upsilon \equiv \frac{1}{2} \int_R \rho u^2 dV, \quad (1.12)$$

nos serán útiles también las siguientes definiciones relacionadas con la energía cinética. La primera es el elemento de la matriz de energía cinética

$$\Upsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int_R \rho u_i u_j dV, \quad (1.13)$$

y las siguientes definiciones que no tienen nombre especial

$$\Upsilon_{ij,k} \equiv \frac{1}{2} \int_R \rho u_i u_j x_k dV, \quad (1.14)$$

$$\Upsilon_{ij,kl} \equiv \frac{1}{2} \int_R \rho u_i u_j x_k x_l dV. \quad (1.15)$$

Ahora definamos los *momentos de distribución del potencial gravitatorio*. El potencial gravitatorio Newtoniano del fluido representado en la fig. 1.1, está dado por

$$\beta(\mathbf{x}, t) \equiv G \int_R \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV', \quad (1.16)$$

observamos que según esta la definición $\beta(\mathbf{x}, t)$ es el negativo del potencial gravitatorio usual. Asociado al volumen de la fig. 1.1, se tiene la energía potencial gravitatoria

$$Ep = -\frac{1}{2} \int_R \rho(\mathbf{x}, t) \beta(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.17)$$

este resultado es semejante al caso electromagnético donde se calcula la energía potencial electrostática de un cuerpo cargado. También usaremos las siguientes definiciones:

- Elemento de la matriz del potencial Newtoniano gravitatorio

$$\beta_{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv G \int_R \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV', \quad (1.18)$$

- Elemento de la matriz de la energía potencial gravitatoria

$$Ep_{ij} \equiv -\frac{1}{2} \int_R \rho(\mathbf{x}, t) \beta_{ij}(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.19)$$

observamos de la definición que las matrices las matrices $\{\Pi_{ij}\}$, $\{\Upsilon_{ij}\}$ $\{\beta_{ij}\}$ y $\{Ep_{ij}\}$ son simétricas.

1.3 Ecuación virial de 2^{do} orden del fluido ‘rígido’ para un Sistema de Referencia no Inercial

Consideremos el fluido R de la fig. 1.2, el cual se encuentra aislado y rota solidario (como un cuerpo rígido de densidad constante ρ_o) con el sistema de referencia no inercial $X_1 X_2 X_3$ con respecto a un sistema de referencia inercial $X Y Z$ (ver fig. 1.2) con velocidad angular constante w_o coincidente con los ejes X_3 y Z , manteniendo los sistemas de ejes un origen común. Representaremos la base de vectores unitarios ligados a los sistemas de ejes $X_1 X_2 X_3$ y $X Y Z$ por los conjuntos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ respectivamente. Por otra parte asumimos que no hay viscosidad ni tensión superficial. La condición de contorno para la presión es

$$p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.20)$$

si \mathbf{x} pertenece a la superficie S del fluido (por ser S superficie libre). Si representemos por w_1, w_2, w_3 las componentes de la velocidad angular en la base ligada al sistema no inercial, es obvio que $w_3 = w_z = w_o$ y el resto de las componentes son nulas (ver fig. 1.2) por lo tanto $\vec{w} = w_o \vec{e}_3 = w_o \vec{e}_z$.

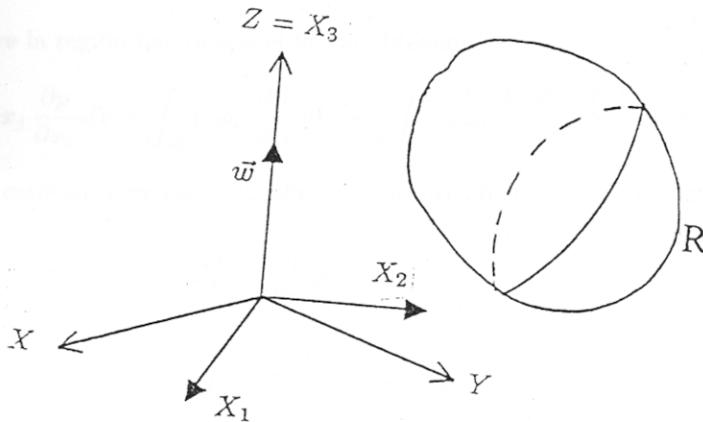


Fig. 1.2.

Por otra parte si queremos analizar en el caso general (ver pag. 8) del movimiento de un diferencial de masa dm del fluido, usando un Sistema de referencia no inercial $X_1 X_2 X_3$ que rota con velocidad angular constante respecto a un Sistema de referencia inercial XYZ y cuyo eje de rotación pasa por el origen común. Para esto usaremos la ecuación de Euler

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{\nabla}\beta - 2\rho \vec{\omega} \times \vec{u} + \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} |\vec{\omega} \times \vec{x}|^2, \quad (1.21)$$

referida a un Sistema de referencia no inercial $X_1 X_2 X_3$, (la demostración de la ecuación mencionada se da en el apéndice de este capítulo en la pag. 8). Es necesario mencionar que, para que tenga sentido la derivada total de la ecuación (1.21) y en todas las ecuaciones donde interviene $\frac{d}{dt}$ asumimos que la trayectoria C es seguida por el elemento diferencial de masa. Pero el caso que estamos analizando es aquel donde el fluido rota como si fuera un cuerpo rígido por lo tanto

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad (1.22)$$

debido a esta condición de hipótesis a este fluido se le dice fluido 'rígido'. Se reconoce que este cuerpo es ficticio, pero sabemos que algunos casos de sistemas mecánicos que se comportan de manera aproximada al fluido 'rígido'. Por ejemplo si se tiene un líquido en un recipiente cilindrico que rota con velocidad angular constante sometido a la fuerza gravedad constante, el líquido se moverá de tal modo que la superficie que lo limita con el aire es un paraboloides de dimensiones definidas, es decir el fluido se comporta como un cuerpo 'rígido'. Usando la relación (1.22) en (1.21), con $\rho = \rho_0$ se obtiene

$$-\vec{\nabla}p + \rho_0 \vec{\nabla}\beta + \frac{\rho_0}{2} \vec{\nabla} |\vec{\omega} \times \vec{x}|^2 = 0, \quad (1.23)$$

expresando esta ec. vectorial en componentes tenemos

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_0 \frac{\partial \beta}{\partial x_i} + \frac{\rho_0}{2} \frac{\partial |\vec{\omega} \times \vec{x}|^2}{\partial x_i} = 0. \quad (1.24)$$

Si multiplicamos por x_j a la ecuación anterior

$$-x_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + x_j \rho_o \frac{\partial \beta}{\partial x_i} + x_j \frac{\rho_o}{2} \frac{\partial |\vec{w} \times \vec{x}|^2}{\partial x_i} = 0, \quad (1.25)$$

y luego integramos sobre la región que ocupa el fluido obtenemos

$$-\int_R x_j \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_R x_j \rho_o \frac{\partial \beta}{\partial x_i} dV + \frac{1}{2} \int_R x_j \rho_o \frac{\partial |\vec{w} \times \vec{x}|^2}{\partial x_i} dV = 0. \quad (1.26)$$

En el apéndice de este capítulo (ver pag. 11, 12 y 14 respectivamente) demostraremos que son válidas las siguientes relaciones

$$\int_R x_j \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = -\delta_{ij} \Pi, \quad (1.27)$$

$$\int_R \rho_o x_j \frac{\partial \beta}{\partial x_i} dV = E p_{ij}, \quad (1.28)$$

$$\int_R x_j \frac{\rho_o}{2} \frac{\partial |\vec{w} \times \vec{x}|^2}{\partial x_i} dV = w_o^2 I_{ij} - w_i w_o I_{3j}, \quad (1.29)$$

donde ρ_o es la densidad constante del fluido. Si reemplazamos las ecuaciones (1.27), (1.28), (1.29) en la ecuación (1.26) obtendremos

$$\delta_{ij} \Pi + E p_{ij} + w_o^2 I_{ij} - w_i w_o I_{3j} = 0. \quad (1.30)$$

Esta ecuación se llama *Ecuación Virial de 2^{do} orden* para el caso de un fluido 'rígido' que rota junto con un sistema de referencia no inercial, con el eje X_3 que coincide con el eje Z y donde ambos sistemas de referencia tienen el origen común.

APENDICE DEL CAPITULO I

Ecuación de Euler para un Sistema de Referencia No Inercial

Vamos determinar la ecuación de Euler para un sistema no inercial $X_1 X_2 X_3$ que rota con velocidad angular constante respecto a un sistema de referencia inercial XYZ con eje de rotación que pase por el origen común (ver fig. 1.4). Para esto debemos previamente determinar una expresión para la fuerza (ver fig. 1.3) que actúan sobre un diferencial de masa debido a las diferencias de presión. Para lograr esto consideremos una pequeña masa Δm de volumen pequeño $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ perteneciente al fluido.

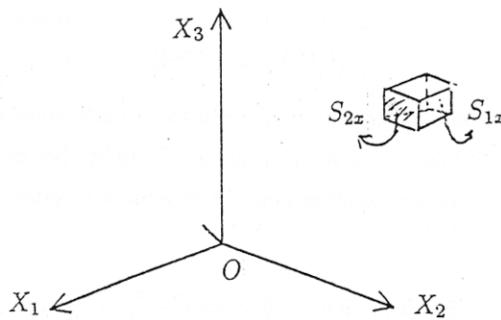


Fig. 1.3.

Para obtener con mayor facilidad (sin perder la generalidad) la fuerza debido a la diferencia de presión analizaremos las fuerzas que actúan en las superficies perpendiculares al eje X_1 , que limitan al volumen ΔV . Estas superficies pequeñas son S_{1x} y S_{2x} , de áreas ΔA , donde actúan las presiones p y $p + \Delta p$ respectivamente (ver fig. 1.4). Entonces, sobre la masa Δm actúan 2 fuerzas pequeñas.

$$\Delta F_{a1} = p \Delta A, \quad (1.31)$$

$$\Delta F_{b1} = (p + \Delta p) \Delta A, \quad (1.32)$$

luego la fuerza resultante en la dirección del eje X_1 es $\Delta F_1^{pre} = \Delta F_{a1} - \Delta F_{b1}$, que según, (1.31), y (1.32) se transforma en

$$\Delta F_1^{pre} = -\Delta p \Delta A. \quad (1.33)$$

Donde $\Delta A = \Delta x_2 \Delta x_3$ (ver fig. 1.4), y al reemplazar en (1.33) resulta

$$\Delta F_1^{pre} = -\Delta p \Delta x_2 \Delta x_3, \quad (1.34)$$

que al multiplicar y dividir por Δx_1 en el 2^{do} miembro se encuentra

$$\Delta F_1^{pre} = -\frac{\Delta p}{\Delta x_1} \Delta V. \quad (1.35)$$

En forma semejante se obtiene

$$\Delta F_2^{pre} = -\frac{\Delta p}{\Delta x_2} \Delta V, \quad (1.36)$$

$$\Delta F_3^{pre} = -\frac{\Delta p}{\Delta x_3} \Delta V. \quad (1.37)$$

Luego

$$\Delta \vec{F}^{pre} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\Delta p}{\Delta x_i} \Delta V \vec{e}_i, \quad (1.38)$$

que en el límites $\Delta \rightarrow 0$ nos resulta

$$d\vec{F}^{pre} = -(dV)\vec{\nabla}p, \quad (1.39)$$

que es la expresión que buscamos. Para describir el movimiento de una partícula de masa m sometido a la fuerza resultante \vec{f} , con velocidad \vec{u} en un sistema no inercial $X_1 X_2 X_3$ el cual que rota con velocidad angular constante respecto a un sistema de referencia no inercial XYZ y cuyo eje de rotación pasa por el origen tenemos

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} - 2m\vec{\omega} \times \vec{u} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}), \quad (1.40)$$

Nosotros queremos analizar el movimiento del elemento de masa dm del fluido, que tiene vector posición $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ y velocidad \vec{u} (ver fig. 1.4), luego usamos la ecuación (1.40) pero haciendo los cambios de dm por m , $d\vec{f}$ por \vec{f} , es decir

$$dm \frac{d\vec{u}}{dt} = d\vec{f} - 2dm\vec{\omega} \times \vec{u} - dm\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}). \quad (1.41)$$

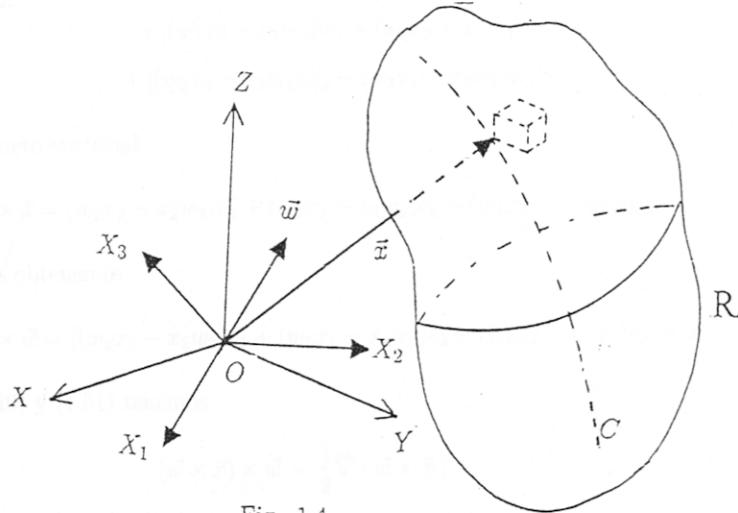


Fig. 1.4.

Las fuerza que actua sobre dm son la fuerza gravitatoria ($d\vec{F}^{grav}$) y la fuerza originada por la presión ($d\vec{F}^{pre}$), por lo tanto

$$d\vec{f} = d\vec{F}^{grav} + d\vec{F}^{pre}. \quad (1.42)$$

La fuerza gravitatoria viene determinada por la energía potencial gravitatoria dE_p , del elemento de masa dm mediante $d\vec{F}^{grav} = -\vec{\nabla}(dE_p)$ siendo $dE_p = -(dm)\beta$, luego

$$d\vec{F}^{grav} = (dm)\vec{\nabla}\beta . \quad (1.43)$$

Reemplazando (1.39) y (1.43) en (1.42) se obtiene

$$d\vec{f} = (dm)\vec{\nabla}\beta - (dV)\vec{\nabla}p , \quad (1.44)$$

de las relaciones (1.41) y (1.44), y considerando $dm = \rho dV$

$$\rho(dV)\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho(dV)\vec{\nabla}\beta - (dV)\vec{\nabla}p - 2\rho(dV)\vec{w} \times \vec{u} - \rho(dV)\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{x}) , \quad (1.45)$$

que al simplificar se obtiene

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{\nabla}\beta - \vec{\nabla}p - 2\rho\vec{w} \times \vec{u} - \rho\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{x}) , \quad (1.46)$$

que es la ecuación de Euler para un sistema no inercial. Antes de aplicarla en nuestro trabajo haremos una ligera transformación usando la identidad:

$$(\vec{w} \times \vec{x}) \times \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{w} \times \vec{x}|^2 . \quad (1.47)$$

Para demostrarlo desarrollamos separadamente cada miembro de (1.47) y efectuando operaciones obtendremos

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{w} \times \vec{x}|^2 = \frac{1}{2}\vec{\nabla}[(w_2x_3 - x_2w_3)^2 + (w_3x_1 - x_3w_1)^2 + (w_1x_2 - x_1w_2)^2] , \quad (1.48)$$

calculando las derivadas parciales encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{w} \times \vec{x}|^2 &= [(w_3x_1 - x_3w_1)w_3 - (w_1x_2 - x_1w_2)w_2]\vec{e}_1 \\ &\quad + [(w_1x_2 - x_1w_2)w_1 + (w_2x_3 - x_2w_3)w_3]\vec{e}_2 \\ &\quad + [(w_2x_3 - x_2w_3)w_2 - (w_3x_1 - x_3w_1)w_1]\vec{e}_3 . \end{aligned} \quad (1.49)$$

Al desarrollar el producto vectorial

$$\vec{w} \times \vec{x} = (w_2x_3 - x_2w_3)\vec{e}_1 + (w_3x_1 - x_3w_1)\vec{e}_2 + (w_1x_2 - x_1w_2)\vec{e}_3 , \quad (1.50)$$

y efectuar operaciones obtenemos

$$(\vec{w} \times \vec{x}) \times \vec{w} = [(w_2x_3 - x_2w_3)\vec{e}_1 + (w_3x_1 - x_1w_3)\vec{e}_2 + (w_1x_2 - x_1w_2)\vec{e}_3] \times \vec{w} . \quad (1.51)$$

De las ecuaciones (1.49) y (1.51) tenemos

$$(\vec{w} \times \vec{x}) \times \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{w} \times \vec{x}|^2 . \quad (1.52)$$

Reemplazando ahora la ec. (1.52) en (1.46) resulta finalmente

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\beta - 2\rho\vec{w} \times \vec{u} + \frac{\rho}{2}\vec{\nabla}|\vec{w} \times \vec{x}|^2 . \quad (1.53)$$

Proposición 1.1

Sea un fluido que ocupa una región R con la densidad constante en el tiempo $\rho = \rho(\mathbf{x})$, pero con presión $p = p(\mathbf{x}, t)$ donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ son las coordenadas de un punto P del espacio. Sea S la superficie que limita a R . Si la presión es cero en la superficie entonces

$$\int_R x_j \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = -\delta_{ij} \Pi .$$

Demostración. Para deducir esta relación usaremos la relación (ver ref. [8])

$$\int_R u \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dV = \int_S F_j n_i dS , \quad (1.54)$$

donde F_j es una función escalar diferenciable que es la componente j -ésima de una función vectorial \vec{F} y n_i es la componente i -ésima de un vector unitario \vec{n} externa perpendicular a la superficie cerrada S que limita la región R . La ecuación (1.54), usa para demostrar el Teorema de la Divergencia. Haciendo $\vec{F} = p(\mathbf{x}, t) \vec{x}$ considerando la ecuación (1.54)

$$\int_R \frac{\partial(x_j p)}{\partial x_i} dV = \int_S x_j p n_i dS , \quad (1.55)$$

como $p = 0$ para puntos de la superficie S , desarrollando las derivadas parciales y tomando en cuenta $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ se obtiene

$$\int_R x_j \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = -\delta_{ij} \int_R p dV , \quad (1.56)$$

finalmente por definición de momento de la presión de orden nulo $\Pi = \int_R p dV$ la última ecuación se convierte en

$$\int_R x_j \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = -\delta_{ij} \Pi . \quad (1.57)$$

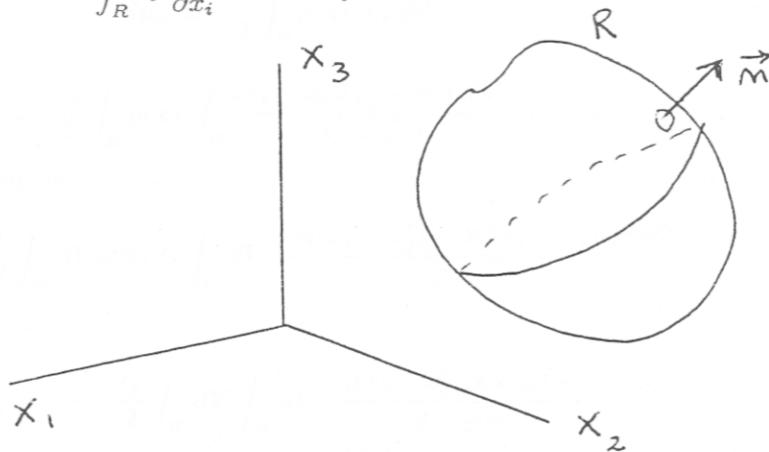


Fig. 1.5.

Proposición 1.2

Sea un fluido que ocupa una región R y tiene densidad constante en el tiempo $\rho = \rho(\mathbf{x})$, además se encuentra limitada por la superficie S . Entonces el elemento de la matriz de la energía potencial gravitatoria Ep_{ij} y el potencial gravitatorio Newtoniano β satisfacen la relación

$$Ep_{ij} = \int_R \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial \beta}{\partial x_i} dV .$$

Demostración. Derivando parcialmente la definición de potencial Newtoniano

$$\beta(\mathbf{x}, t) \equiv G \int_R \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' , \quad (1.58)$$

con respecto a x_j tenemos

$$\frac{\partial \beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} = G \int_R \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' , \quad (1.59)$$

de donde

$$\frac{\partial \beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} = -G \int_R (x_j - x'_j) \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' , \quad (1.60)$$

multiplicando por $\rho(\mathbf{x})x_i$ e integrando sobre la misma región R se tiene

$$\int_R \rho(\mathbf{x}) x_i \frac{\partial \beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} dV = - \int_R \rho(\mathbf{x}) x_i G \int_R (x_j - x'_j) \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' dV . \quad (1.61)$$

Por otra parte de las definiciones de β_{ij} y Ep_{ij}

$$\beta_{ij}(\mathbf{x}) \equiv G \int_R \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' , \quad (1.62)$$

$$Ep_{ij} \equiv -\frac{1}{2} \int_R \rho(\mathbf{x}) \beta_{ij} dV , \quad (1.63)$$

se tiene

$$Ep_{ij} = -\frac{G}{2} \int_R \rho(\mathbf{x}) \int_R \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' dV , \quad (1.64)$$

y con un poco de álgebra obtenemos

$$Ep_{ij} = -\frac{1}{2} \int_R dV \rho(\mathbf{x}) G \int_R dV' \frac{[x_i(x_j - x'_j) - x'_i(x_j - x'_j)] \rho(\mathbf{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} . \quad (1.65)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Ep_{ij} = & - \frac{G}{2} \int_R dV \int_R dV' \frac{x_i(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ & - \frac{G}{2} \int_R dV \int_R dV' \frac{x'_i(x'_j - x_j) \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} . \end{aligned} \quad (1.66)$$

Ahora consideremos el Teorema de Fubini, así

$$\int_R dV \int_R dV' \frac{x_i(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int_R dV \int_R dV' \frac{x'_i(x'_j - x_j) \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} . \quad (1.67)$$

Usando la relación (1.67) en la ecuación (1.66) resulta

$$E p_{ij} = - \frac{G}{2} \int_R dV \int_R dV' \frac{x_i(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{G}{2} \int_R dV \int_R dV' \frac{x_i(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} . \quad (1.68)$$

de donde

$$E p_{ij} = -G \int_R \int_R \frac{x_i(x_j - x'_j) \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' dV , \quad (1.69)$$

reemplazando esta relación en la ecuación (1.61) hemos demostrado finalmente la relación

$$E p_{ij} = \int_R \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial \beta}{\partial x_i} dV. \quad (1.70)$$

Proposición 1.3

Sea un fluido que ocupa una región R limitada por una superficie S que rota solidario con el sistema de referencia no inercial $X_1X_2X_3$ como un cuerpo rígido de densidad $\rho = \rho(\mathbf{x})$ y cuyo eje tiene una dirección arbitraria (ver fig. 1.6) entonces

$$\int_R x_j(\rho/2) \frac{\partial |\bar{w} \times \bar{x}|^2}{\partial x_i} dV = w^2 I_{ij} - w_i \sum_{k=1}^3 w_k I_{jk} .$$

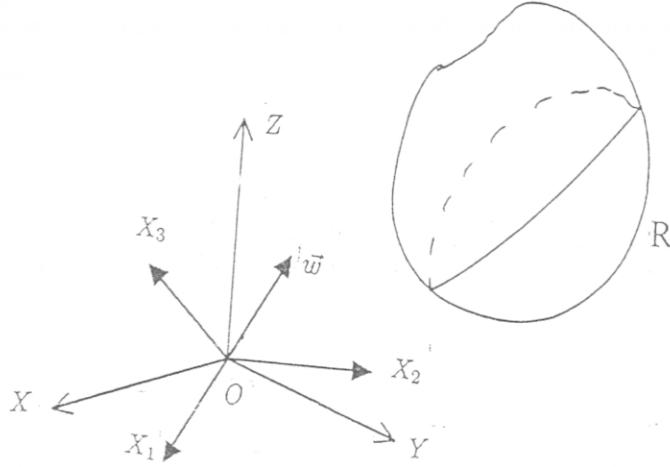


Fig. 1.6.

Demostración. Calculemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} |\bar{w} \times \bar{x}|^2 = (w_3 x_1 - x_3 w_1) w_3 - (w_1 x_2 - x_1 w_2) w_2 , \quad (1.71)$$

ahora multiplicando esta ecuación por $x_i \rho$ e integrando obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_R x_j \rho \frac{\partial |\bar{w} \times \bar{x}|^2}{\partial x_1} dV = \int_R x_j \rho [(w_3 x_1 - x_3 w_1) w_3 - (w_1 x_2 - x_1 w_2) w_2] dV , \quad (1.72)$$

efectuando operaciones en el 2^{do} miembro de esta igualdad y usando la definición de I_{ij} se obtiene

$$\frac{1}{2} \int_R x_j \rho \frac{\partial |\bar{w} \times \bar{x}|^2}{\partial x_1} dV = I_{j1} (w_3^2 + w_2^2) - w_1 w_3 I_{j3} - w_1 w_2 I_{j2} , \quad (1.73)$$

haciendo algunos artificios algebraicos en el 2^{do} miembro

$$\frac{1}{2} \int_R x_j \rho \frac{\partial |\bar{w} \times \bar{x}|^2}{\partial x_1} dV = I_{j1} (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - w_1^2 I_{j1} - w_1 w_3 I_{j3} - w_1 w_2 I_{j2} , \quad (1.74)$$

de donde resulta

$$\int_R x_j(\rho/2) \frac{\partial |\bar{w} \times \bar{x}|^2}{\partial x_1} dV = w^2 I_{1j} - w_1 \sum_{k=1}^3 w_k I_{jk} . \quad (1.75)$$

De manera semejante se prueba que

$$\int_R x_j(\rho/2) \frac{\partial |\bar{w} \times \bar{x}|^2}{\partial x_2} dV = w^2 I_{2j} - w_2 \sum_{k=1}^3 w_k I_{jk} . \quad (1.76)$$

$$\int_R x_j(\rho/2) \frac{\partial |\vec{w} \times \vec{x}|^2}{\partial x_3} dV = w^2 I_{3j} - w_3 \sum_{k=1}^3 w_k I_{jk} , \quad (1.77)$$

con todo llegamos a la relación

$$\int_R x_j(\rho/2) \frac{\partial |\vec{w} \times \vec{x}|^2}{\partial x_i} dV = w^2 I_{ij} - w_i \sum_{k=1}^3 w_k I_{jk} . \quad (1.78)$$

Reemplazando $w_x = w_y = w_2 = w_1 = 0$, $w_3 = w_z = w_o$, $\rho(\mathbf{x}) = \rho_o$, en la ecuación (1.78) se tiene finalmente la ecuación (1.29). La relación (1.78), que es más general, será útil para futuros calculos para posteriores investigaciones.

2 Los Esferoides de Maclaurin

Trabaja con la ecuación Virial de 2^o orden para el caso de un fluido que rota con el sistema de referencia no inercial X_1, X_2, X_3 ambos giran con frecuencia inercial XYZ y además ambos sistemas de ejes tienen origen en el centro velocidad angular ω coincide con el eje Z . Aplicaremos la densidad constante, con 2 ejes iguales llamados esferoides de Maclaurin de densidad constante alrededor del eje Z mayor y cuyo eje menor de referencia no inercial. Considerando a los elipsoides oblatos, que son achatados con el tercer y prolatos que son alargados con 3 ejes iguales (ver fig. 2.1) inicialmente trataremos brevemente la teoría del Potencial gravitatorio libre. Para un estudio más profundo del tema se puede recurrir a la bibliografía. En este capítulo estudiaremos (2020) ayuntamiento de la relación la velocidad angular del fluido, la densidad y el grado de achatamiento. Esta ecuación será llamada la Condición de Equilibrio según la rotación. Al final estudiaremos cómo construir para analizar la rotación para calcular y comparar el periodo de rotación de algunos planetas del



2.1 Introducción.

2.2 Breve Teoría del Potencial Gravitatorio.

2.3 Condición de Maclaurin para el equilibrio.

2.4 Aplicaciones de la condición de Maclaurin.

2.1 Teoría del Potencial Gravitatorio

Consideremos un fluido homogéneo de densidad constante ρ que rota con velocidad angular ω alrededor del eje Z . El potencial gravitatorio Φ en un punto (x, y, z) del fluido viene dado por la ecuación (2.1)

$$\Phi = -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{GMx}{r^3} + \omega^2 x \quad (2.2)$$

1 Introducción

En el capítulo anterior hemos encontrados la *Ecuación Virial de 2^{do} orden* para el caso de un fluido que rota como un cuerpo rígido solidariamente con el sistema de referencia no inercial $X_1X_2X_3$ ambos giran con respecto a un sistema de referencia inercial XYZ y además ambos sistemas de ejes tienen origen común, donde tanto el eje X_3 como el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ coinciden con el eje Z . Aplicaremos esta ecuación a fluidos elipsoidales de densidad constante, con 2 semiejes iguales, (llamado esferoides de Maclaurin), que rotan con velocidad angular constante alrededor del semieje menor y cuyos ejes siempre coinciden con los ejes del sistema de referencia no inercial. Considerando a los elipsoides oblatos, que son elipsoides con 2 semiejes iguales y mayores que el tercero, y prolatos, que son elipsoides con 2 semiejes iguales y menores que el tercero, (ver fig. 2.1). Inicialmente trataremos brevemente la teoría del Potencial Gravitatorio necesaria para nuestros fines. Para un estudio más profundo del tema se puede recurrir a los textos que mencionamos en la bibliografía. En este capítulo encontraremos (con ayuda de la ecuación (1.30)) una ecuación que relacione la velocidad angular del fluido, la densidad y el grado de achatamiento del esferoide de Maclaurin. Esta ecuación será llamada *la Condición de Estabilidad* (según el criterio) de Maclaurin del fluido rotante. Al final aplicaremos esta condición para analizar la estabilidad de estrellas axisimétricas y para calcular y comparar el período de rotación de algunos planetas del Sistema Solar.

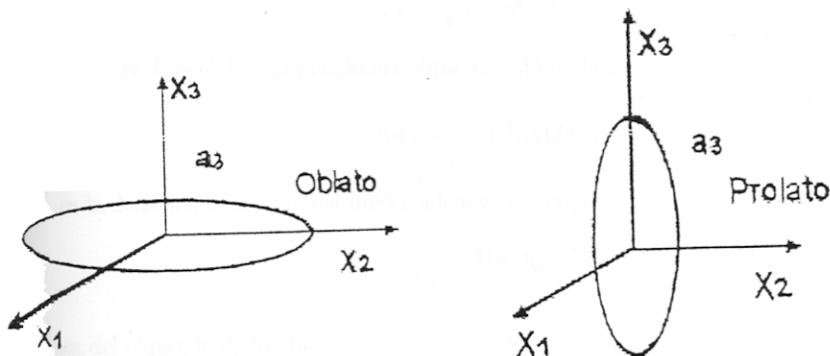


Fig. 2.1.

2.2 Breve Teoría del Potencial Gravitatorio

Sea un cuerpo de densidad constante de forma elipsoidal donde la ecuación de su superficie viene dada por

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1. \quad (2.1)$$

Definimos

$$\Delta \equiv \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}, \quad (2.2)$$

$$A_i \equiv a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)}. \quad (2.3)$$

Consideremos los siguientes teoremas

- Si $a_1 = a_2 \equiv a > a_3$, es decir para un *elipsoide de revolución oblato* tenemos

$$A_1 = A_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin(e) - \frac{1-e^2}{e^2}, \quad (2.4)$$

$$A_3 = \frac{2}{e^2} - \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin(e), \quad (2.5)$$

con

$$e \equiv \sqrt{1 - a_3^2/a_1^2}. \quad (2.6)$$

La cantidad adimensional e se llama *excentricidad* del elipsoide oblato, es evidente que $0 < e < 1$.

- Si $a_1 = a_2 \equiv a < a_3$, es decir para un *elipsoide de revolución prolato*, tenemos

$$A_1 = A_2 = \frac{1-e^2}{e^2} \left[\frac{1}{1-e^2} - \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right], \quad (2.7)$$

$$A_3 = 2 \frac{1-e^2}{e^2} \left[\frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right]. \quad (2.8)$$

En este caso la definición de e será

$$e \equiv \sqrt{1 - a^2/a_3^2}, \quad (2.9)$$

y la relación entre Ep_{ij} y I_{ij} para cualquier elipsoide está dada por

$$Ep_{ij} = -2A_i I_{ij} \pi G \rho_o, \quad (2.10)$$

donde ρ_o es la densidad constante del fluido, además se cumple

$$I_{ij} = \frac{M a_i^2 \delta_{ij}}{5}, \quad (2.11)$$

con la masa del elipsoide dada por

$$M = \frac{4\pi \rho a^2 a_3}{3}. \quad (2.12)$$

Para el caso en que estamos interesados de las relaciones anteriores se obtiene lo siguiente

$$Ep_{11} = Ep_{22} = \frac{-2A_1 M a^2 \rho_o G \pi}{5}, \quad (2.13)$$

$$Ep_{33} = \frac{-2A_3 M a_3^2 \rho_o G \pi}{5}. \quad (2.14)$$

2.3 Condición de Maclaurin para el equilibrio

De la ecuación (1.30) del capítulo anterior tenemos para $i = j = 3$

$$\Pi = -Ep_{33} , \quad (2.15)$$

reemplazando esta igualdad en la ecuación (1.30) se tiene

$$-\delta_{ij}Ep_{33} + Ep_{ij} + w_0^2 I_{ij} - w_i w_j I_{3j} = 0 . \quad (2.16)$$

Haciendo $i = j = 1$ en la última igualdad obtenemos

$$-Ep_{33} + Ep_{11} + w_0^2 I_{11} = 0 , \quad (2.17)$$

y reemplazando (2.13), (2.14) en (2.17) y despejando w_0 se consigue

$$w_0^2 = 2\pi G\rho_o \left[-\frac{A_3 a_3^2}{a_1^2} + A_1 \right] . \quad (2.18)$$

Esta relación es la condición que debe satisfacer la velocidad angular y los semiejes de un elipsoide cualquiera. Para el caso del elipsoide oblatos usamos las relaciones (2.4) y (2.5) en (2.18) y encontramos

$$w_0^2 = 2\pi G\rho_o \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin(e) - \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{a_3^2}{a_1^2} \left(\frac{2}{e^2} - \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin(e) \right) \right] , \quad (2.19)$$

de la definición de e despejamos $a_3^2/a_1^2 = 1 - e^2$ y reemplazamos en la ecuación anterior y obteniendo con un poco de álgebra

$$w_0^2 = 2\pi G\rho_o \left[\frac{(3-2e^2)\sqrt{1-e^2} \arcsin(e)}{e^3} - 3\frac{(1-e^2)}{e^2} \right] , \quad (2.20)$$

finalmente extrayendo raíz cuadrada en (2.20)

$$w_0 = \sqrt{2\pi G\rho_o \left[\frac{(3-2e^2)\sqrt{1-e^2} \arcsin(e)}{e^3} - 3\frac{(1-e^2)}{e^2} \right]} . \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) o la (2.20) se conoce como la *Condición de Maclaurin* y es la ecuación que necesariamente debe satisfacer la velocidad angular para que el fluido elipsoidal rote como un cuerpo rígido (equilibrio hidrostático), se debe mencionar que ésta es una condición necesaria *pero no suficiente*. De la Condición de Maclaurin y dado e podemos hallar el valor de $w_0/\sqrt{\pi G\rho_o}$ para que el fluido rotante sea estable. Pero para calcular los valores críticos de la excentricidad por facilidad de los cálculos se grafica $w_0^2/(\pi G\rho_o)$ en función de e , esto se muestra en la siguiente p' (éste gráfico se conoce como la Secuencia de Maclaurin). Del gráfico presente se observa que si el valor de la excentricidad se aproxima a cero la velocidad angular se acerca a cero, esta afirmación se puede verificar hallando $w_0^2/(\pi G\rho_o)$ para valores de e cercanos a cero obteniendo $w_0^2/(\pi G\rho_o) = \frac{2e^2}{3}$, demostrado en el apéndice de este capítulo. (ver pag. 23) Es obvio que los gráficos de w_0 en función de e para distintos valores de la densidad son semejantes al gráfico mostrado. Debemos tomar en cuenta que si $e \rightarrow 0$ (ó el caso $e \rightarrow 1$) el elipsoide tiende a convertirse en una esfera (en este caso un disco).

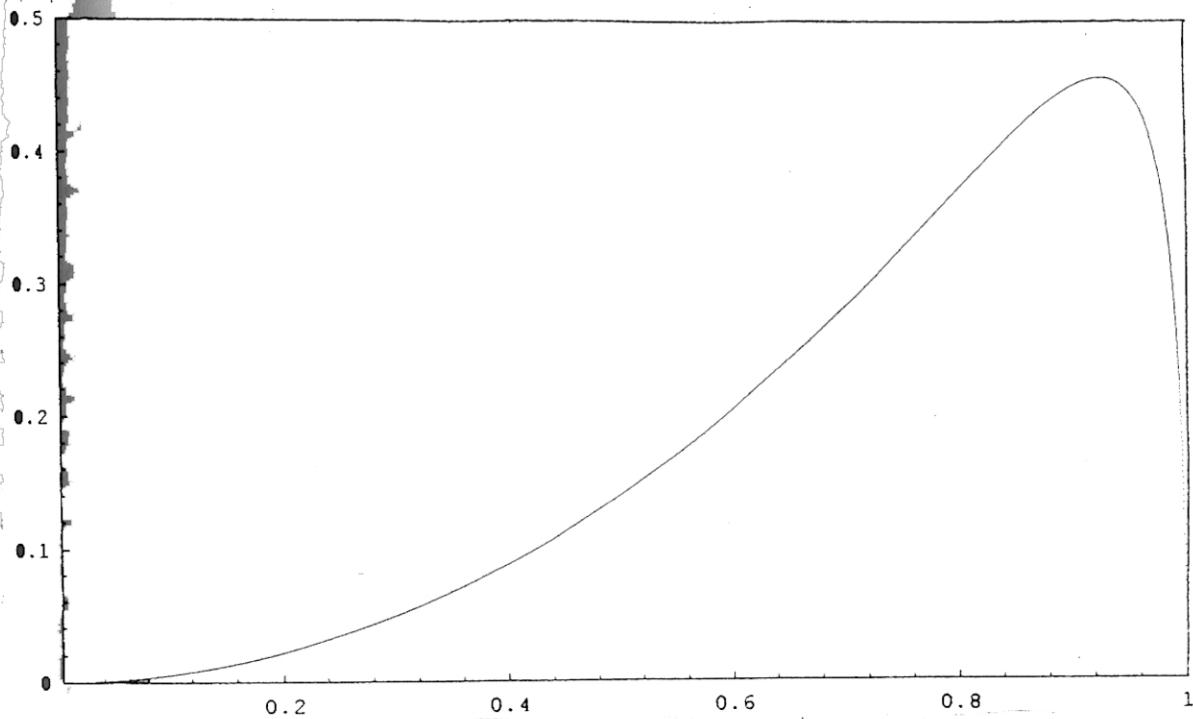


Gráfico 2: $w_0^2/\pi G\rho_0$ en función de e .

Fig. 2.1.

Como se mencionó en el gráfico mostrado se tiene la curva de $w_0^2/\pi G\rho_0$ en función de e : como se observa tienen un máximo para un valor de e . Para hallar este valor resolvemos numéricamente la ecuación

$$\frac{dw_0^2}{de} = \frac{2}{e^3}(9 - 2e^2) - \frac{2(9 - 8e^2) \arcsen(e)}{e^4 \sqrt{1 - e^2}} = 0, \quad (2.22)$$

obteniendo $e = 0.92995$. Con este valor podemos hallar la máxima velocidad angular para que el fluido rotante de densidad sea estable. Podemos hallar el momento angular posible para un determinado valor de los semiejes, para esto recordemos que el elipsoide rota alrededor del eje Z que es un eje de simetría, por lo tanto

$$\vec{L} = I_{33} \vec{\omega}_0, \quad (2.23)$$

así, usando la relación (2.11) en la última expresión tenemos

$$\vec{L} = \frac{2M a_3^2 w_0}{5}. \quad (2.24)$$

Es fácil demostrar la no existencia de fluidos elipsoidales homogéneos prolatos, para esto se sigue el procedimiento (suponiendo que existe este cuerpo) anterior obteniendo

$$w_0^2 = \frac{2\pi G\rho_0}{e^2} \left[3 + \left(\frac{e^2 - 3}{2e} \right) \ln \frac{1+e}{1-e} \right]. \quad (2.25)$$

Al evaluar numéricamente el 2^{do} miembro de la ecuación anterior se tiene cantidades negativas lo que es absurdo. Estas conclusiones se comprueban al expandir en series el 2^{do} miembro

$$w_0^2 = \frac{2\pi G\rho_o}{e^2} \left[-\frac{4}{15}e^4 - \frac{8}{35}e^6 - \frac{4}{21}e^8 \dots \right], \quad (2.26)$$

2.4 Aplicaciones de la Condición de Maclaurin

i) Cálculo del periodo de rotación de los planetas

La validez de La Condición de Maclaurin se comprueba al calcular el periodo de rotación (en horas) de los planetas considerando el mismo modelo que las estrellas axisimétricas, pero en este caso tenemos un criterio para verificar si la teoría es consistente: tenemos el valor de periodo de rotación (en horas) conocido por otros métodos. Usando la ecuación (2.21) obtenemos los resultados que se muestran en la tabla 1, (Ver Pag. 22). Se observa que el modelo usado para los planetas nos da resultados muy buenos, sobre todo teniendo en cuenta que el modelo es bastante simple. Para los casos de Mercurio, Venus y Pluton falta información observacional para poder realizar las respectivas comparaciones.

ii) Cálculos de excentricidad de las estrellas axisimétricas

La Condición de Maclaurin nos permite justificar el equilibrio estable de una estrella pues, como se sabe en gran parte de su evolución las estrellas son cuerpos estables. Para esto, como se mencionó en la introducción del presente capítulo, consideramos a la estrella como un fluido elipsoidal, de revolución, de densidad constante y aislado. La ecuación (2.21) nos da la relación que hay entre e y w_o conociendo su densidad. Es decir dado un valor de e la velocidad angular no puede tener cualquier valor, caso contrario sería inestable. Se sabe por observaciones espectrográficas y del efecto Doppler desde 1877, que las estrellas rotan y como estas son estables en gran parte de su evolución inferimos, (observando la ecuación (2.21)), que las estrellas son achatadas. De las observaciones astronómicas se sabe que sólo giran apreciablemente las estrellas de tipo espectral O, B y A. En la tabla 2, (Ver Pag. 22) se presentan los valores que puede tener la excentricidad de este tipo de estrellas calculados de la densidad, la velocidad de giro en el ecuador y su radio (en unidades del radio del Sol R_\odot). Como es obvio los datos son valores promedios de las mediciones encontradas en la literatura. Para cada tipo de estrella se presentan 2 valores de e , esto se debe a que la función $w_o = w_o(e)$ no es univalente. Pero se descartan los máximos valores de e de cada caso por que dan valores de $e > 0.99$ y esto significaría que por lo menos el semieje mayor es 7 veces mayor que el semieje menor lo cual no ha sido observado. Para otro tipo de estrellas la rotación es menor, por lo tanto su excentricidad debe ser menor a los presentados en la tabla 2. De esta tabla podemos estimar que el valor máximo de la excentricidad es 0.6500 que equivale a una relación de semiejes $a_1/a_3 = 1.315$.

Tabla 1: Periodo (T) de los planetas y del Sol*

	ρ_o (gr/cm^3)	elipsidad: $1 - (a_3/a_1)$	T (usando (2.21))	T (observado)
Tierra	5.52	0.0034	26.95 hs.	23.93 hs.
Marte	3.95	0.0052	25.77 hs.	24.63 hs.
Jupiter	1.33	0.0649	12.66 hs.	9.84 hs.
Saturno	0.69	0.0980	14.36 hs.	10.23 hs.
Urano	1.29	0.0229	21.53 hs.	17.9 hs.
Neptuno	1.64	0.0170	22.15 hs.	19.2 hs.
Sol	1.409	$e = 0.007$	26.18 dias	25 - 30 dias

* Nótese que para el Sol preferimos dar e en vez de la elipsidad, y expresar el Periodo en dias en vez que en horas. La incertidumbre en el Periodo de rotación del Sol se debe a que éste varia de valor entre el ecuador y los polos.

Tabla 2:Excentricidad de las estrellas tipo A, B y O

	ρ_o (gr/cm^3)	R/R_{\odot}	$V(km/seg)$	e
Supergigante B	0.004625	26	95	0.0283
Enana B	0.13000	6	95	0.1873
Enana A	0.41500	2.1	110	0.3328
Supergigante A	0.000235	45	110	0.6502
Enana O	0.010	18	95	0.2586
Sol	1.409	1	1.96	0.007

APENDICE DEL CAPITULO II de Maclaurin

Proposición 2.1

La ecuación (2.20) se puede expresar como

$$w_0^2/(\pi G \rho_0) = \frac{2e^2}{3}, \quad (2.27)$$

$e \ll 1$

Demostración. Recordando la serie de Maclaurin de las siguientes funciones:

$$\arcsen(e) = e + \frac{e^3}{6} + \dots, \quad (2.28)$$

$$\sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{e^2}{2} + \dots, \quad (2.29)$$

Reemplazando (2.28) y (2.29) en (2.22) se obtiene

$$\frac{w_0^2}{2\pi G \rho_0} = \frac{(3 - 2e^2)(1 - \frac{e^2}{2} + \dots)(e + \frac{e^3}{6} + \dots)}{e^3} - 3 \frac{(1 - e^2)}{e^2}, \quad (2.30)$$

Efectuando operaciones

$$\frac{w_0^2}{2\pi G \rho_0} = e^{-2} \left[(3 - 2e^2) \left(1 - \frac{e^2}{3} + \dots\right) - 3 + 3e^2 \right] = e^{-2} \left[3 - 2e^2 - e^2 + 2\frac{e^4}{3} - 3 + 3e^2 \dots \right], \quad (2.31)$$

que podemos simplificar recordando que $e \ll 1$ obtenemos finalmente

$$w_0^2/(\pi G \rho_0) = \frac{2e^2}{3}. \quad (2.32)$$

3 Colapso de los Esferoides de Maclaurin

- 3.1 Introducción
- 3.2 Ecuación de balance de energía del esferoide de Maclaurin en colapso
- 3.3 Ecuación de Euler del esferoide de Maclaurin en colapso
- 3.4 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales de los semiejes de los esferoides de Maclaurin
- 3.5 Colapso de los esferoides de Maclaurin formados por un núcleo y una capa envolvente

3.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos a los esferoides de Maclaurin cuando sufren un proceso de colapso gravitacional. El colapso gravitacional de un elipsoide gaseoso es un problema importante en las teorías de formación de estrellas, (y de sistema planetarios), especialmente para el análisis de su estabilidad.

Para estudiar las distintas características del proceso de colapso deduciremos y analizaremos las ecuaciones de movimiento para los semiejes del esferoide de Maclaurin asumiendo lo siguiente

- Consideraremos un elipsoide gaseoso, (i. e. gas ideal), rotante cuyo eje de rotación es siempre el eje Z (que es eje de simetría, ver fig. 3.1).
- Como en los capítulos anteriores, aparte de un sistema de referencia inercial se tomará en cuenta un *sistema de referencia no inercial* $X_1 X_2 X_3$ que rota junto con el elipsoide. Todas las magnitudes físicas serán medidas según este sistema, a excepción del momentum angular. En este sistema la ecuación de la superficie del elipsoide es

$$\sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^2} = 1$$

- Los semiejes del elipsoide satisfacen $a_i = a_i(t)$ según el sistema no inercial.
- El sistema está aislado luego se conserva su momento angular (despreciamos los efectos de la radiación térmica).
- No hay viscosidad.
- Además asumimos que la densidad del esferoide es uniforme, es decir $\rho = \rho(t)$.
- Suponemos también que antes del colapso el sistema se encontraba en rotación uniforme, posiblemente sometido a pequeñas perturbaciones.

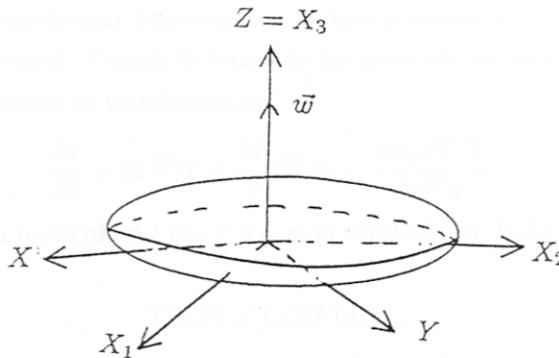


Fig. 3.1.

El sistema estará sujeto a las siguientes ecuaciones de evolución:

a) Ecuación del Balance de Energía

b) Ecuación de Continuidad

c) Ecuación de Euler

A partir de ellas obtendremos las ecuaciones de evolución para los semiejes del elipsoide, la densidad y la temperatura central. Como observaremos estas ecuaciones resultan ser ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y serán resueltas numéricamente. Finalmente aplicaremos lo aprendido hasta aquí a una protoestrella elipsoidal compuesta por dos distintos gases, el primer gas formando su núcleo y el otro su capa envolvente, ambos con simetría axisimétrica.

3.2 Ecuación de balance de energía del esferoide de Maclaurin en colapso

El proceso de colapso es el resultado de un sistema que no está en equilibrio. Para estudiarlos se divide el sistema macroscópico en volúmenes pequeños, pero aun con muchas partículas. A nivel microscópico será un sistema de miles de partículas y por lo tanto se aplicarán los conceptos de la Mecánica Estadística y Termodinámica. Para facilitar el análisis de estos se consideran que estos volúmenes elementales se hallan en estado de equilibrio local. En el presente trabajo consideramos que el comportamiento de los pequeños volúmenes se comporta como elementos de un gas ideal, a pesar que la temperatura y la presión dependen de la posición y el tiempo. Esta aproximación es válida si en el proceso de colapso no existe turbulencia y el proceso demora, algunos años.

De la teoría de Fenómenos de Transporte [16], el análisis de balance de energético para un elemento de volumen de un gas no viscoso nos da

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = k \nabla^2 T - T \frac{\partial p}{\partial T} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \quad (3.1)$$

donde

- C_v es el calor específico a volumen constante,
- k es la conductividad térmica.

Nuestro objetivo ahora es transformar ésta ecuación en una ecuación diferencial donde intervengan los semiejes y la temperatura central. Usando la teoría de los gases ideales en el apéndice mostramos, (ver pag. 72) que la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T + \frac{2T}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{2m_p k \nabla^2 T}{3\rho K_B}, \quad (3.2)$$

donde m_p es la masa de una partícula del gas y K_B es la constante de Boltzman. Por otra parte supon- gamos que

$$T(\mathbf{x}, t) = T_c(t) F(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

donde $T_c(t)$ es la temperatura en el origen (de coordenadas) y donde

$$F(\mathbf{x}, t) = \left(1 - \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^2} \right). \quad (3.4)$$

Reemplazando (3.3) en (3.2) se tiene

$$F(\mathbf{x}, t) \frac{dT_c}{dt} + T_c \frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{x}, t) + T_c \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial}{\partial x_k} F(\mathbf{x}, t) + \frac{2T_c(t)}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{2m_p k T_c}{3\rho K_B} \nabla^2 F(\mathbf{x}, t). \quad (3.5)$$

Se demostrará en el apéndice (ver pag. 73) que las componentes de la velocidad \vec{u} en la base de vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ligada al sistema de referencia no inercial $X_1 X_2 X_3$ satisfacen

$$u_1 = \frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 + a_1^2 \lambda_2 x_3, \quad (3.6)$$

$$u_2 = \frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 - a_2^2 \lambda_1 x_3, \quad (3.7)$$

$$u_3 = \frac{x_3}{a_3} \frac{da_3}{dt} + a_3^2 \lambda_1 x_2 - a_3^2 \lambda_2 x_1, \quad (3.8)$$

con $\lambda_k = \lambda_k(t)$. Luego calculamos la divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{k=1}^3 a_k^{-1} \frac{da_k}{dt}. \quad (3.9)$$

Reemplazando (3.4) y (3.9) en (3.5) obtenemos

$$\left(1 - \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^2}\right) \frac{dT_c}{dt} - 2T_c \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^3} \frac{da_k}{dt} + \frac{2}{3} T_c \sum_{k=1}^3 a_k^{-1} \frac{da_k}{dt} - 4T_c \sum_{k=1}^3 \frac{u_k x_k}{a_k^2} = -\frac{4m_p T_c k}{3\rho K_B} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}\right). \quad (3.10)$$

La ecuación anterior es válida para cualquier punto del fluido, luego podemos hacer $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ en (3.10) obteniendo

$$\frac{dT_c}{dt} + \frac{2T_c}{3} \left(a_1^{-1} \frac{da_1}{dt} + a_2^{-1} \frac{da_2}{dt} + a_3^{-1} \frac{da_3}{dt}\right) + \frac{4m_p T_c k}{3\rho K_B} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}\right) = 0. \quad (3.11)$$

Ahora vamos a transformar la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

en una ecuación diferencial ordinaria. Como estamos considerando $\rho = \rho(t)$ la ecuación anterior se reduce a la siguiente

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0, \quad (3.12)$$

y al reemplazar (3.9) en (3.12) se obtiene finalmente

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(a_1^{-1} \frac{da_1}{dt} + a_2^{-1} \frac{da_2}{dt} + a_3^{-1} \frac{da_3}{dt}\right) = 0. \quad (3.13)$$

3.3 Ecuación de Euler del esferoide de Maclaurin en colapso

La ecuación de Euler para el sistema no inercial $X_1 X_2 X_3$, donde el sistema de referencia no inercial rota con velocidad angular variable pero manteniendo su eje de rotación, es

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{\nabla} \beta + 2\vec{u} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{x} \times \vec{\omega}) + \vec{x} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (3.14)$$

Por otro lado usaremos la siguiente relación (Ver [1], pag. 43)

$$\beta \equiv \pi G \rho \left(I - \sum_{l=1}^3 A_l x_l^2 \right). \quad (3.15)$$

donde

$$I \equiv a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta}, \quad (3.16)$$

$$A_i \equiv a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)}, \quad (3.17)$$

$$\Delta \equiv \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}. \quad (3.18)$$

Calculando el gradiente de β resulta

$$\vec{\nabla} \beta = (-2A_1 x_1 \vec{e}_1 - 2A_2 x_2 \vec{e}_2 - 2A_3 x_3 \vec{e}_3) \pi G \rho. \quad (3.19)$$

Considerando la ley de los gases ideales

$$p = \frac{\rho K_B T}{m_p},$$

y las relaciones (3.3) y (3.4) tenemos

$$p = \frac{\rho K_B T_c}{m_p} \left(1 - \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^2} \right), \quad (3.20)$$

de donde

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{-2K_B T_c}{m_p} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{a_k^2} \vec{e}_k \right). \quad (3.21)$$

Calculando el momentum angular del gas elipsoidal, cuyos detalles mostramos en el apéndice (ver pag. 75) resulta $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y así la ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) se reducen a

$$u_1 = \frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2, \quad (3.22)$$

$$u_2 = \frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1, \quad (3.23)$$

$$u_3 = \frac{x_3}{a_3} \frac{da_3}{dt}. \quad (3.24)$$

Así la velocidad angular tiene una sola componente en ambos sistemas de referencia, componente que la representamos por w , es decir

$$\vec{w} = w \vec{e}_3$$

Con esta expresión calculamos

$$\vec{x} \times \frac{d\vec{w}}{dt} = x_2 \frac{dw}{dt} \vec{e}_1 - x_1 \frac{dw}{dt} \vec{e}_2, \quad (3.25)$$

$$\vec{x} \times \vec{w} = x_2 w \vec{e}_1 - x_1 w \vec{e}_2, \quad (3.26)$$

$$\vec{w} \times (\vec{x} \times \vec{w}) = x_1 w^2 \vec{e}_1 + x_2 w^2 \vec{e}_2, \quad (3.27)$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = u_2 w \vec{e}_1 - u_1 w \vec{e}_2. \quad (3.28)$$

Reemplazando (3.22) y (3.23) en (3.28) se obtiene

$$\vec{u} \times \vec{w} = \left(\frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 \right) w \vec{e}_1 - \left(\frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 \right) w \vec{e}_2 . \quad (3.29)$$

Substituyendo (3.19), (3.21), (3.25), (3.27), y (3.28) en (3.14) encontramos las ecuaciones que cada componente de la velocidad u_k satisface

$$\frac{du_1}{dt} = -2A_1 x_1 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c x_1}{m_p a_1^2} + 2w \left(\frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 \right) + x_2 \frac{dw}{dt} + x_1 w^2 , \quad (3.30)$$

$$\frac{du_2}{dt} = -2A_2 x_2 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c x_2}{m_p a_2^2} - 2w \left(\frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 \right) - x_1 \frac{dw}{dt} + x_2 w^2 , \quad (3.31)$$

$$\frac{du_3}{dt} = -2A_3 x_3 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c x_3}{m_p a_3^2} . \quad (3.32)$$

Calcularemos ahora en forma separada las componentes de las aceleraciones. Para esto empleamos las ecuaciones (3.22), (3.23) y (3.24) y así con la ayuda del cálculo diferencial obtenemos

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{x_1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{u_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - \left(\frac{da_1}{dt} \right)^2 \frac{x_1}{a_1^2} - 2a_1 x_2 \frac{da_1}{dt} \lambda_3 - a_1^2 x_2 \frac{d\lambda_3}{dt} - a_1^2 u_2 \lambda_3 , \quad (3.33)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{x_2}{a_2} \frac{d^2 a_2}{dt^2} + \frac{u_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} - \left(\frac{da_2}{dt} \right)^2 \frac{x_2}{a_2^2} + 2a_2 x_1 \frac{da_2}{dt} \lambda_3 + a_2^2 x_1 \frac{d\lambda_3}{dt} + a_2^2 u_1 \lambda_3 , \quad (3.34)$$

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{x_3}{a_3} \frac{d^2 a_3}{dt^2} + \frac{u_3}{a_3} \frac{da_3}{dt} - \left(\frac{da_3}{dt} \right)^2 \frac{x_3}{a_3^2} . \quad (3.35)$$

Reemplazando (3.22), (3.23) y (3.24) en (3.33), (3.34) y (3.35) respectivamente y luego de simplificar tenemos

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{x_1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} - 3x_2 \lambda_3 a_1 \left(\frac{da_1}{dt} \right) - a_1^2 x_2 \frac{d\lambda_3}{dt} - a_1^2 a_2^2 \lambda_3^2 x_1 - \lambda_3 x_2 \frac{a_1^2}{a_2} \frac{da_2}{dt} , \quad (3.36)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{x_2}{a_2} \frac{d^2 a_2}{dt^2} + 3x_1 \lambda_3 a_2 \left(\frac{da_2}{dt} \right) + a_2^2 x_1 \frac{d\lambda_3}{dt} - a_2^2 a_1^2 \lambda_3^2 x_2 + \lambda_3 x_1 \frac{a_2^2}{a_1} \frac{da_1}{dt} , \quad (3.37)$$

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{x_3}{a_3} \frac{d^2 a_3}{dt^2} . \quad (3.38)$$

Para obtener la ecuación diferencial (de 2^{do} orden) para a_1 consideramos las ecuaciones (3.30) y (3.36) que se pueden expresar respectivamente en la forma

$$\frac{du_1}{dt} = \left(-2A_1 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c}{m_p a_1^2} + w^2 + a_2^2 \lambda_3 \right) x_1 + \left(\frac{2w}{a_2} \frac{da_2}{dt} + \frac{dw}{dt} \right) x_2 , \quad (3.39)$$

$$\frac{du_1}{dt} = \left(\frac{1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} - a_1^2 a_2^2 \lambda_3^2 \right) x_1 + \left(-3\lambda_3 a_1 \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \frac{d\lambda_3}{dt} - \lambda_3 \frac{a_1^2}{a_2} \frac{da_2}{dt} \right) x_2 . \quad (3.40)$$

De estas dos últimas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} & \left(-2A_1 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c}{m_p a_1^2} + w^2 + a_2^2 \lambda_3 \right) x_1 + \left(\frac{2w}{a_2} \frac{da_2}{dt} + \frac{dw}{dt} \right) x_2 \\ &= \left(\frac{1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} - a_1^2 a_2^2 \lambda_3^2 \right) x_1 + \left(-3\lambda_3 a_1 \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \frac{d\lambda_3}{dt} - \lambda_3 \frac{a_1^2}{a_2} \frac{da_2}{dt} \right) x_2 . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Recordando que las coordenadas son para cualquier punto del espacio limitado por el elipsoide tenemos de la última igualdad tenemos

$$\frac{1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} = -2A_1 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c x_1}{m_p a_1^2} + 2a_2^2 \lambda_3 w + w^2 + a_1^2 a_2^2 \lambda_3^2 . \quad (3.42)$$

De manera semejante se obtiene

$$\frac{1}{a_2} \frac{d^2 a_2}{dt^2} = -2A_2 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c}{m_p a_2^2} + 2a_1^2 \lambda_3 w + w^2 + a_1^2 a_2^2 \lambda_3^2 , \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{a_3} \frac{d^2 a_3}{dt^2} = -2A_3 \pi G \rho + \frac{2K_B T_c}{m_p a_3^2} . \quad (3.44)$$

El cálculo del cuadrado del momentum angular del fluido se muestra en el apéndice, (ver pag. 75), encontrando

$$L^2 = \left(\frac{4\pi}{15} a_1 a_2 a_3 \right)^2 \rho^2 [2a_1^2 a_2^2 \lambda_3 + w(a_1^2 + a_2^2)]^2 , \quad (3.45)$$

Definamos L_F como

$$L_F \equiv \frac{5L}{2M} , \quad (3.46)$$

donde M es la masa del fluido (como M es constante entonces L_F es constante). Es fácil mostrar que (3.46) se puede expresar como

$$L_F = \frac{1}{2} [2a_1^2 a_2^2 \lambda_3 + w(a_1^2 + a_2^2)] , \quad (3.47)$$

y despejando la velocidad angular encontramos

$$w = \frac{2L_F - 2a_1^2 a_2^2 \lambda_3}{a_1^2 + a_2^2} . \quad (3.48)$$

Como el momentum angular se conserva y depende de las condiciones iniciales debe aparecer en las ecuaciones diferenciables, para esto se va a despejar λ_3 y w en función de los a_k , del momentum angular y de una nueva función de los semiejes que lo denotaremos por C_a que se define como

$$C_a \equiv \frac{1}{2} [\lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1 a_2 + 2w a_1 a_2] , \quad (3.49)$$

Esta nueva función está relacionada con otra magnitud llamada *Resistencia del Vórtice* cuya definición y su expresión por medio de integrales de superficie se menciona en el apéndice (ver pag. 77). También se muestra en el apéndice (ver pag. 79) que C_a es la suma de 3 Resistencias de Vórtices. Despejando de (3.49) obtenemos la velocidad angular

$$w = \frac{2C_a - \lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1 a_2}{2a_1 a_2} . \quad (3.50)$$

Igualando ahora las ecuaciones (3.48) y (3.50)

$$\frac{2C_a - \lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1 a_2}{2a_1 a_2} = \frac{2L_F - 2a_1^2 a_2^2 \lambda_3}{a_1^2 + a_2^2} , \quad (3.51)$$

y después de algunos artificios despejamos λ_3

$$\lambda_3 = \frac{2[C_a(a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 L_F]}{a_1 a_2 (a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)^2} , \quad (3.52)$$

reemplazamos (3.52) en (3.49) y se tiene

$$w = \frac{2[L_F a_1 a_2 (a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)^2 - 2C_a a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2) + 2a_1^2 a_2^2 L_F]}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)^2}, \quad (3.53)$$

finalmente encontramos

$$w = \frac{2[L_F (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 C_a]}{(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)^2}. \quad (3.54)$$

Las ecuaciones (3.42) y (3.43) se pueden expresar en la forma equivalente

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = -2A_1 \pi G \rho a_1 + \frac{2K_B T_c}{m a_1} + 2a_2^2 a_1 \lambda_3 w + a_1 [a_1^2 a_2^2 \lambda_3^2 + w^2], \quad (3.55)$$

$$\frac{d^2 a_2}{dt^2} = -2A_2 \pi G \rho a_2 + \frac{2K_B T_c}{m a_2} + 2a_1^2 \lambda_3 w a_2 + a_2 [a_1^2 a_2^2 \lambda_3^2 + w^2], \quad (3.56)$$

reemplazando (3.52) y (3.54) en (3.55) y (3.56) tenemos respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_1}{dt^2} &= -2A_1 \pi G \rho a_1 + \frac{2K_B T_c}{m_p a_1} \\ &+ 8a_2 \frac{[L_F (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 C_a][C_a (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 L_F]}{(a_1 + a_2)^4 (a_1 - a_2)^4} + 4a_1 H, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_2}{dt^2} &= -2A_2 \pi G \rho a_2 + \frac{2K_B T_c}{m_p a_2} \\ &+ 8a_1 \frac{[L_F (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 C_a][C_a (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 L_F]}{(a_1 + a_2)^4 (a_1 - a_2)^4} + 4a_2 H, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde

$$H \equiv \frac{(C_a (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 L_F)^2}{(a_1 + a_2)^4 (a_1 - a_2)^4} + \frac{(L_F (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 a_2 C_a)^2}{(a_1 + a_2)^4 (a_1 - a_2)^4}.$$

Consideremos la condición de igualdad de semiejes esto es $a_1 = a_2$ de esta condición se encuentra que $L_F = C_a$. Para mostrarlo usaremos la ecuación (3.51) donde hacemos $a_1 = a_2$ obteniendo

$$\frac{2C_a - \lambda_3 (a_1^2 + a_2^2) a_1 a_2}{2a_1 a_1} = \frac{2L_F - 2a_1^2 a_1^2 \lambda_3}{a_1^2 + a_1^2}, \quad (3.59)$$

al simplificar se obtiene que L_F es igual a C_a . Para el caso donde 2 semiejes son iguales las ecuaciones (3.57) y (3.58) se reducen (previo paso al limite) respectivamente a las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = -2A_1 \pi G \rho a_1 + \frac{2K_B T_c}{m_p a_1} + \frac{L_F^2}{a_1^3}, \quad (3.60)$$

$$\frac{d^2 a_2}{dt^2} = -2A_2 \pi G \rho a_2 + \frac{2K_B T_c}{m_p a_2} + \frac{L_F^2}{a_2^3}. \quad (3.61)$$

3.4 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales de los semiejes de los esferoides de Maclaurin

Restringiéndonos al caso axisimétrico, (i.e. $a_1 = a_2$) de las ecuaciones (3.11) y (3.13) se tiene

$$\frac{dT_c}{dt} + \frac{2T_c}{3} \left(2a_1^{-1} \frac{da_1}{dt} + a_3^{-1} \frac{da_3}{dt} \right) + \frac{4m_p k T_c}{3\rho K_B} \left(\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(2a_1^{-1} \frac{da_1}{dt} + a_3^{-1} \frac{da_3}{dt} \right) = 0. \quad (3.63)$$

Como $a_1 = a_2$ no es necesario considerar las ecuaciones (3.60) y (3.61) simultáneamente, es suficiente con la ecuación (3.60). Luego tenemos 4 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas: (3.60), (3.44), (3.62) y (3.63). Antes de resolverlas numéricamente haremos unos cambios de variables apropiados.

Sabemos que $\rho = M/V$, y dado que el volumen del elipsoide es $V = 4\pi a_1^2 a_3 / 3$ entonces

$$\rho = \frac{3M}{4\pi a_1^2 a_3}. \quad (3.64)$$

Con la expresión anterior se tiene la identidad

$$\frac{2T_c k m_p}{3\rho K_B} \left(\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) = \frac{8\pi T_c k m_p}{9K_B M} \left(2a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right). \quad (3.65)$$

Reemplazando (3.65) en (3.62)

$$\frac{dT_c}{dt} + \frac{2T_c}{3} \left(2a_1^{-1} \frac{da_1}{dt} + a_3^{-1} \frac{da_3}{dt} \right) + \frac{16\pi T_c k m_p}{9K_B M} \left(2a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) = 0. \quad (3.66)$$

Por otra parte usaremos la relación (Ver [1], pag. 78):

$$L = \frac{\sqrt{3} G^{1/2} M^{3/2} a_1 w}{5a_3^{1/2}}, \quad (3.67)$$

usando la definición de $L_F \equiv 5L/2M$, encontramos

$$L_F^2 = \frac{3GM a_1^2 w^2}{4a_3}. \quad (3.68)$$

Introduciremos ahora nuevas variables con el objetivo de que en las ecuaciones diferenciales encontradas aparezcan magnitudes adimensionales. Esto simplifica los cálculos y facilita el análisis numérico posterior.

En todos los casos las nuevas magnitudes son proporcionales a las magnitudes físicas correspondientes.

Estas nuevas variables son

a) para los semiejes iguales $a_1 = a_2$

$$a_1^* \equiv \frac{a_1}{a_1(0)}, \quad (3.69)$$

b) para el semieje a_3

$$a_3^* \equiv \frac{a_3}{a_1(0)}, \quad (3.70)$$

c) para el tiempo t

$$t^* \equiv \frac{t}{\sqrt{\frac{4a_1^3(0)}{3GM}}}, \quad (3.71)$$

d) para la temperatura T

$$T_c^* \equiv \frac{8a_1(0)K_B T_c}{3GMm_p}, \quad (3.72)$$

e) para la constante L_F^2

$$L_F^{*2} \equiv \frac{4L_F^2}{3GMa_1(0)}, \quad (3.73)$$

f) para la conductividad térmica

$$k^* \equiv k \sqrt{\frac{4a_1^3(0)}{3GM} \frac{16\pi m_p a_1(0)}{9MK_B}}. \quad (3.74)$$

Con estas nuevas definiciones es fácil mostrar, a partir de (3.64), que

$$\pi\rho = \frac{3M}{4a_1^{*2}a_3^*a_1^3(0)}. \quad (3.75)$$

Usando estas variables adimensionales y la relación (3.75), las ecuaciones diferenciales (3.60), (3.44), (3.66) y (3.63) se convierten en

$$\frac{d^2 a_1^*}{dt^{*2}} = -2A_1^* a_1^* + \frac{T_c^*}{a_1^*} + \frac{L_F^{*2}}{a_1^{*3}}, \quad (3.76)$$

$$\frac{d^2 a_3^*}{dt^{*2}} = -2A_3^* a_3^* + \frac{T_c^*}{a_3^*}, \quad (3.77)$$

$$\frac{dT_c^*}{dt^*} = -\frac{2T_c^*}{3} \left(\frac{2}{a_1^*} \frac{da_1^*}{dt^*} + \frac{1}{a_3^*} \frac{da_3^*}{dt^*} \right) - k^* T_c^* \left(2a_3^* + \frac{a_1^{*2}}{a_3^*} \right), \quad (3.78)$$

$$\frac{d\rho^*}{dt^*} = -\rho^* \left(\frac{2}{a_1^*} \frac{da_1^*}{dt^*} + \frac{1}{a_3^*} \frac{da_3^*}{dt^*} \right), \quad (3.79)$$

donde

$$\rho^* \equiv \frac{\rho}{\rho(0)}$$

$$A_1^* \equiv \frac{A_3}{a_3^* a_1^{*2}}$$

$$A_3^* \equiv \frac{A_1}{a_3^* a_1^{*2}}$$

Es necesario recordar que las integrales A_k ya fueron calculadas (ver pag. 18) y por lo tanto dependen de los semiejes. Para resolver estas ecuaciones diferenciales las transformaremos en un sistema de ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden, con este fin haremos el siguiente cambio de variable

$$a_1^* \equiv x_1, \quad (3.80)$$

$$a_3^* \equiv x_2, \quad (3.81)$$

$$\frac{da_1^*}{dt^*} \equiv x_3, \quad (3.82)$$

$$\frac{da_3^*}{dt^*} \equiv x_4, \quad (3.83)$$

$$T_c^* \equiv x_5, \quad (3.84)$$

$$\rho^* \equiv x_6. \quad (3.85)$$

Con estas nuevas definiciones las ecuaciones diferenciales (3.76), (3.77), (3.78) y (3.79) se transforman en las siguientes 6 ecuaciones diferenciales no lineales

$$\frac{dx_1}{dt^*} = x_3 , \quad (3.86)$$

$$\frac{dx_2}{dt^*} = x_4 , \quad (3.87)$$

$$\frac{dx_3}{dt^*} = -2A_1^*x_1 + \frac{x_5}{x_1} + \frac{L_F^{*2}}{x_1^{*3}} , \quad (3.88)$$

$$\frac{dx_4}{dt^*} = -2A_3^*x_2 + \frac{x_5}{x_2} , \quad (3.89)$$

$$\frac{dx_5}{dt^*} = -\frac{2x_5}{3} \left(\frac{2x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_2} \right) - k^* \left(2x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} \right) x_5 , \quad (3.90)$$

$$\frac{dx_6}{dt^*} = -x_6 \left(\frac{2x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_2} \right) . \quad (3.91)$$

Conviene expresar la constante L_F^{*2} en función de los valores iniciales de los semiejes, para conseguir esto evaluamos los semiejes en $t = 0$ en la igualdad (3.68) obteniendo

$$L_F^{*2} = \frac{3MGa_1^2(0)w^2(0)}{4a_3(0)} . \quad (3.92)$$

De esta última expresión y de (3.73) resulta

$$L_F^{*2} = \frac{a_1(0)w^2(0)}{a_3(0)} . \quad (3.93)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales fue resuelto mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 para lo cual se elaboró un programa en lenguaje Pascal, en el cual se tomaron las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} a_1^*(0) &= 1, \quad a_3^*(0) = 0.95 , \\ \frac{da_1^*}{dt^*}(0) &= 0, \quad \frac{da_3^*}{dt^*}(0) = 0 , \\ T_c^*(0) &= 0.14641011, \quad \rho^* = 1 . \end{aligned}$$

Para mostrar que el elipsoide gaseoso colapsa graficamos el semieje adimensional a_3^* versus a_1^* y cuando la curva se aproxime al origen significará que el colapso prosigue indefinidamente. Si por el contrario la curva se aproxima a algún punto esto significa que después de variar sus dimensiones (por ejemplo contrayéndose o dilatándose), el elipsoide finalmente toma dimensiones estacionarias. A continuación se muestran los gráficos obtenidos, a partir de la página 38, con sus correspondientes comentarios

a) Gráficos 1 y 2

Para obtener estos gráficos se consideró los parámetros:

$$k^* = 0.1; L_F^* = 2 ,$$

Cómo se observa del gráfico 1 el semieje adimensional a_1^* crece con el tiempo y del gráfico 2, que muestra la variación de la relación de los semiejes adimensionales observamos que el valor de a_3^* también aumenta

luego de un pequeña contracción. Es decir con estos valores de los parámetros no hay colapso.

b) Gráficos del 3 al 8

Los parámetros considerados son

$$k^* = 0.1; L_F^* = 1.1856081592 .$$

En el gráfico 3 se tiene que a_1^* después de tener un máximo decrece rápidamente y tiende hacia una constante. Del gráfico 4 se ve que algo similar ocurre con el otro eje, donde hay 2 oscilaciones, esto se ve del gráfico 4. Luego este es el primer caso donde encontramos colapso. Otra manera de concluir que hay colapso es observar el gráfico 5 donde notamos que el elipsoide al final alcanza dimensiones menores donde permanece estable. El elipsoide inicialmente caracterizado por $a_1^*(0) > a_3^*(0)$ cambia de estado de prolato a oblató varias veces y rápidamente alrededor de $t^* = 2.2$ para luego ser prácticamente una esfera ($a_1^*/a_3^* = 0.99997$) en el estado estable; este comportamiento se observa en el gráfico 6. En el gráfico 7 se nota que la temperatura crece rápidamente para oscilar durante un pequeño tiempo para luego crecer lentamente con el tiempo cuando el elipsoide ya es estable. En el siguiente gráfico tomamos un intervalo de tiempo menor para observar con mayor claridad las oscilaciones alrededor de T_c^* .

c) Gráficos 9 al 13

Para obtener estos gráficos se consideró los parámetros:

$$k^* = 0; L_F^* = 0 .$$

Estamos en la situación donde no hay conductividad térmica y no hay rotación, de los gráficos 9 y 10 se observa que los semiejes disminuyen pero a diferencia del caso anterior hay varias oscilaciones que se amortiguan hasta que los valores de los semiejes se vuelven constantes. Esto significa que el elipsoide colapsa oscilando hasta llegar a un estado estable y con dimensiones menores, lo cual se confirma al observar el gráfico 11. Del gráfico 12 se nota que el elipsoide cambia varias veces, de forma amortiguada, de prolato a oblató para finalmente estabilizarse en $a_1^*/a_3^* = 1.000004$, lo cual es prácticamente una esfera (estado estacionario). Finalmente tenemos del gráfico 13 que la temperatura central antes de ser estable oscila durante un intervalo de tiempo de aproximadamente 5 unidades. Como se nota este tiempo de oscilación es mayor que aquel del gráfico 8.

d) Gráficos 14 al 19

Para obtener estos gráficos se consideró los parámetros:

$$k^* = 0; L_F^* = 1.185608159.$$

Como en el último caso aquí no hay conductividad térmica, pero se tiene velocidad angular diferente de cero. Del gráfico 14 se observa algo notable el semieje mayor durante un intervalo de tiempo de 10 (aproximadamente) oscila ligeramente, siendo su incremento pequeño comparado con su dimensión. Para luego disminuir y decrecer oscilando rápidamente (y finalmente se aproxima a un valor constante

como se observa de los resultados numéricos). No se dió mayor intervalo de tiempo, para no perder los detalles de la curva. En cambio del gráfico 15 vemos que el otro semieje oscila pero con una amplitud tal que la variación del semieje es grande comparada con las dimensiones del semieje a_3 , para luego disminuir rápidamente en forma oscilatoria. Es decir otra vez estamos ante un colapso, si bien de características diferentes. Esto se aprecia con mayor nitidez al comparar los gráficos 16 y 11. En este caso antes de que el fluido rotante colapse, un semieje tiende permanecer casi constante mientras el otro oscila fuertemente, pero al final también colapsa. En el gráfico 17 se muestra la variación de a_3^* con a_1^* para un tiempo menor, se nota que $1 \leq a_1^* \leq 1.08$. Del gráfico 18 observamos que el cambio de estado entre prolato y oblato es casi periodico antes de oscilar amortiguadamente hacia el estado final estable con $a_1^*/a_3^* = 0.99864$. Es decir *cuando el fluido es estable su forma es casi una esfera*. Esa periodicidad de la curva también la notamos para la temperatura al observar el gráfico 19, es decir la temperatura sube rápidamente oscila amortiguadamente y termina siendo finalmente estable.

e) Gráficos 20 al 47

Hemos encontrado casos donde hay colapso, pero esto puede suceder, de varias maneras, puede ser un cambio de estado con o sin oscilaciones. Esto dependerá de los valores de los parámetros y de las condiciones iniciales. Para observar esta dependencia mostramos los gráficos del 20 al 47 en los que no hay conductividad térmica y donde se cambia el valor de L_F^* , con esto mostramos como el gráfico 8 se transforma gradualmente en el gráfico 13, el cual representa la variación del semieje a_1^* con el tiempo. Se nota que para $L_F^* \leq 1.02$ la curva casi no cambia.

Conclusiones

- 1) En los casos que hemos mostrado tenemos que para ciertos valores de L_F^* y k^* la masa gaseosa colapsa pero no indefinidamente, lo hace hasta alcanzar un estado de estabilidad en el cual es prácticamente una esfera de dimensiones que son del orden de 0.1 del inicial. Después del colapso, y dado que los semiejes satisfacen $a_1 = a_2$, se trata de una estabilidad axisimétrica válida por lo menos durante el intervalo de tiempo en que se hicieron los cálculos. Para otros valores de L_F^* y k^* el fluido se expande. Durante el proceso de colapso se observó varias veces que el elipsoide se vuelve muy achatado como un disco.
- 2) La teoría del colapso de una gas elipsoidal puede aplicarse a la teoría de formación de las estrellas. En efecto en muchos textos de astronomía (incluidos aquellos de divulgación) se menciona solo en forma cualitativa dicho fenómeno. De hecho, es comunmente aceptado que las estrellas surgen del colapso de una nube gaseosa primordial, proceso durante el cual aumentan su temperatura y su densidad. Luego, siempre en forma cualitativa, explican los siguientes pasos de su evolución. Pero no se llega a analizar el problema en forma cuantitativa, por ejemplo no se indican que ecuaciones intervienen en el proceso y sobretodo como varían los semiejes con el tiempo (como si fuese obvio que cualquier tipo de colapso generará una estrella cuasi esférica y caliente).

Con la teoría desarrollada aquí podemos estudiar la etapa donde la nube gaseosa colapsa hasta convertirse en un globo cuasi esférico y de dimensión menor, lo cual es consistente –hasta donde sabemos– con la formación del Sistema Solar a partir de una nube de gas proto-estelar. Para analizar esto hemos consideremos el siguiente modelo de nube proto-estelar:

- a) Inicialmente es de forma elipsoidal (i.e. axisimétrica), sea en rotación o no.
- b) La densidad es uniforme.
- c) La temperatura es cero en la superficie.
- d) No hay viscosidad.
- e) Es un sistema aislado. Como se ve se trata de un modelo simple, ya que en una situación real se presentan otros factores que aquí no se toman en cuenta tales como el hecho que la densidad no necesariamente es uniforme, además existen campos magnéticos no uniformes y no estáticos, etc.

A pesar de esto nuestro modelo predice bien que la nube gaseosa colapsa hasta formar una estrella axisimétrica estable y donde se obtiene como resultado un incremento en la temperatura central. Esto es lo que ocurre, por lo menos, hasta $t^* = 20$ que fué el tiempo final (adimensional) usado en la simulación. Para conocer el tiempo real usamos la relación (3.71). Como ejemplo tomamos los datos: $10^{15} mt$ para el semieje mayor y $\rho = 1.67 \times 10^{-21} gr/cm^3$ como densidad. Así se obtiene que $t^* = 1$ equivale a $t \sim 10^6$ años (i.e. 1 millón de años). En resumen podemos concluir que:

La nube proto-estelar usada en nuestro modelo se comportó como un gas elipsoidal de densidad uniforme en su fase de colapso.

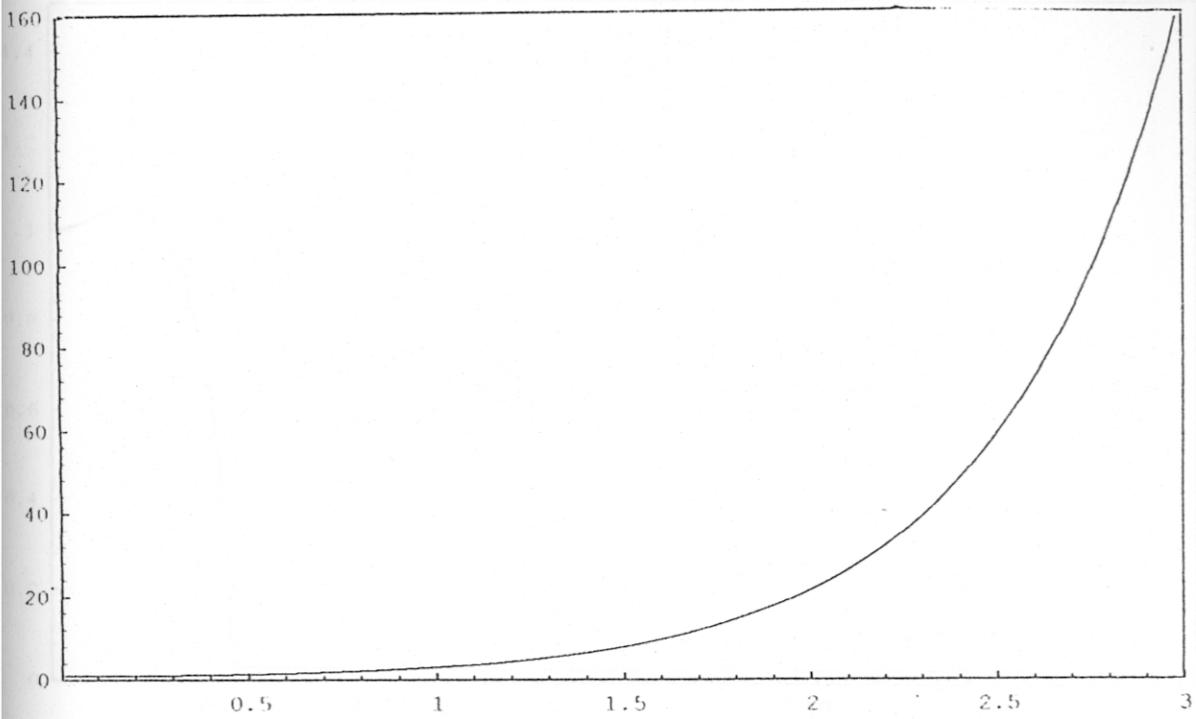


Gráfico 1: Semieje a_1^* en función de t^*

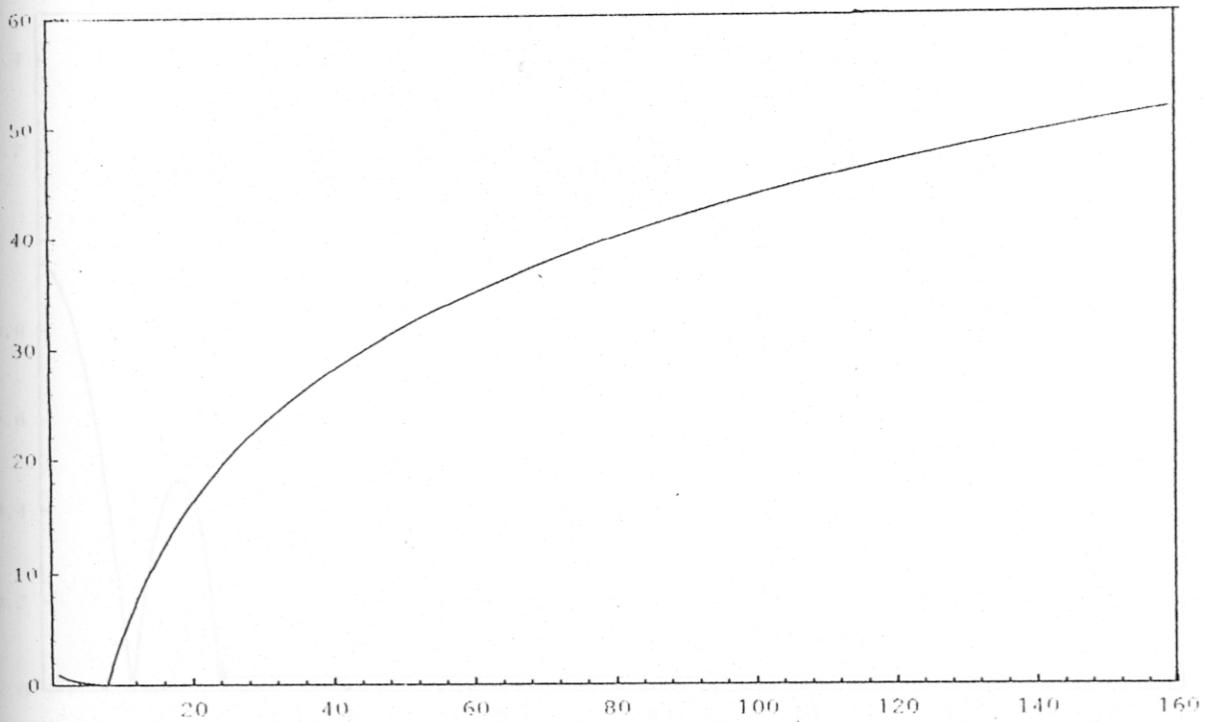


Gráfico 2: Semieje a_3^* en función del Semieje a_1^*

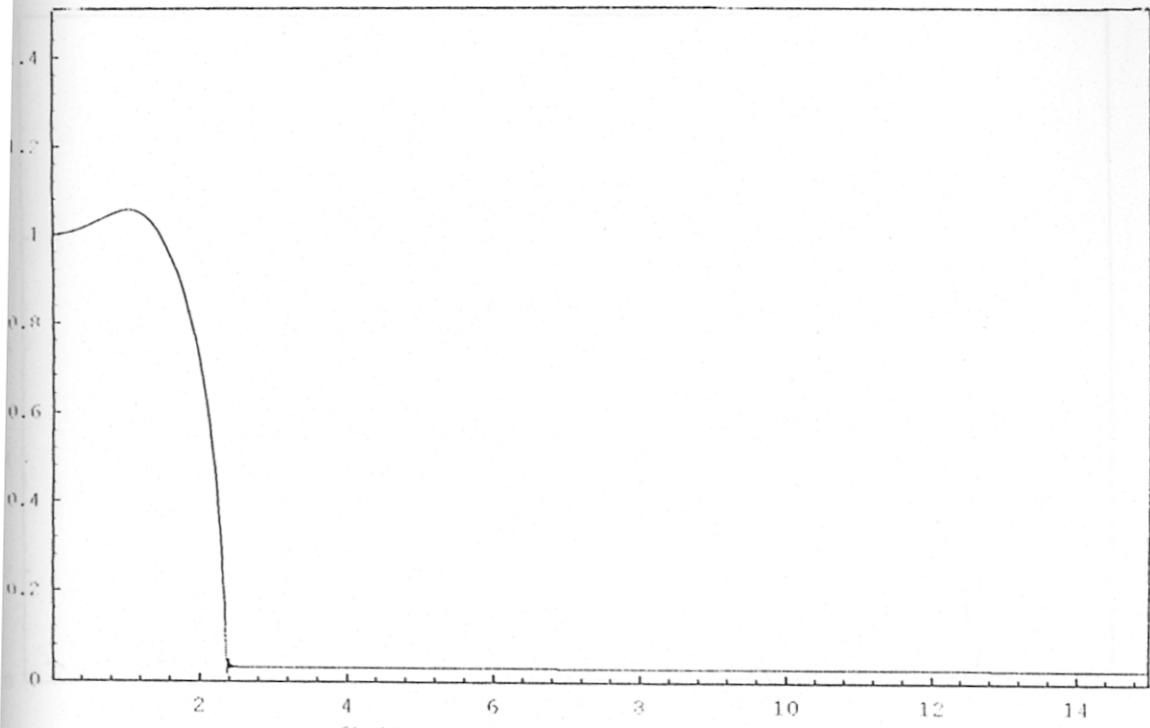


Gráfico 3: Semieje a_1^* en función de t^*

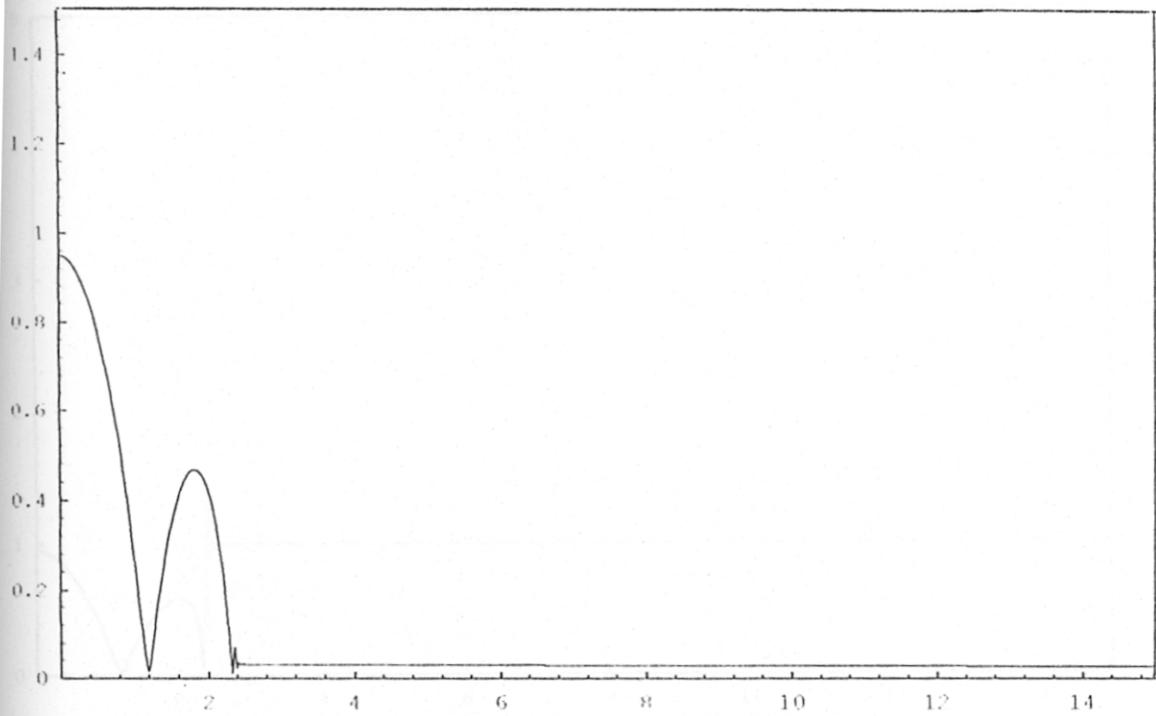


Gráfico 4: Semieje a_3^* en función de t^*

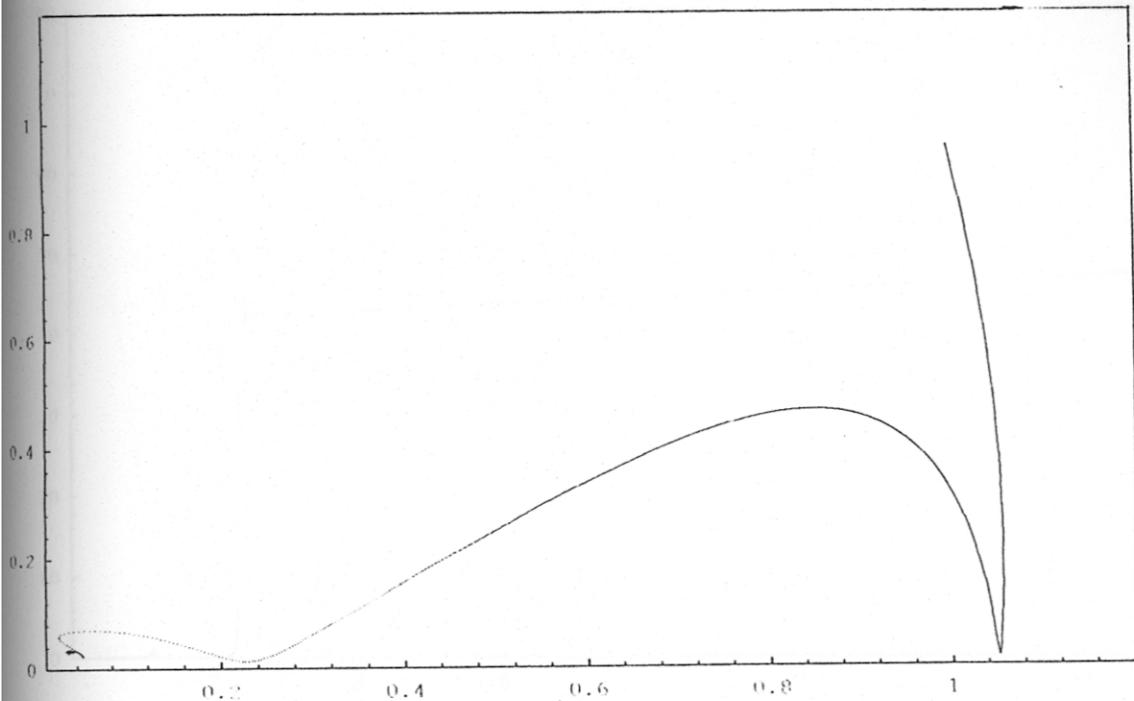


Gráfico 5: Semieje a_3^* en función del Semieje a_1^*

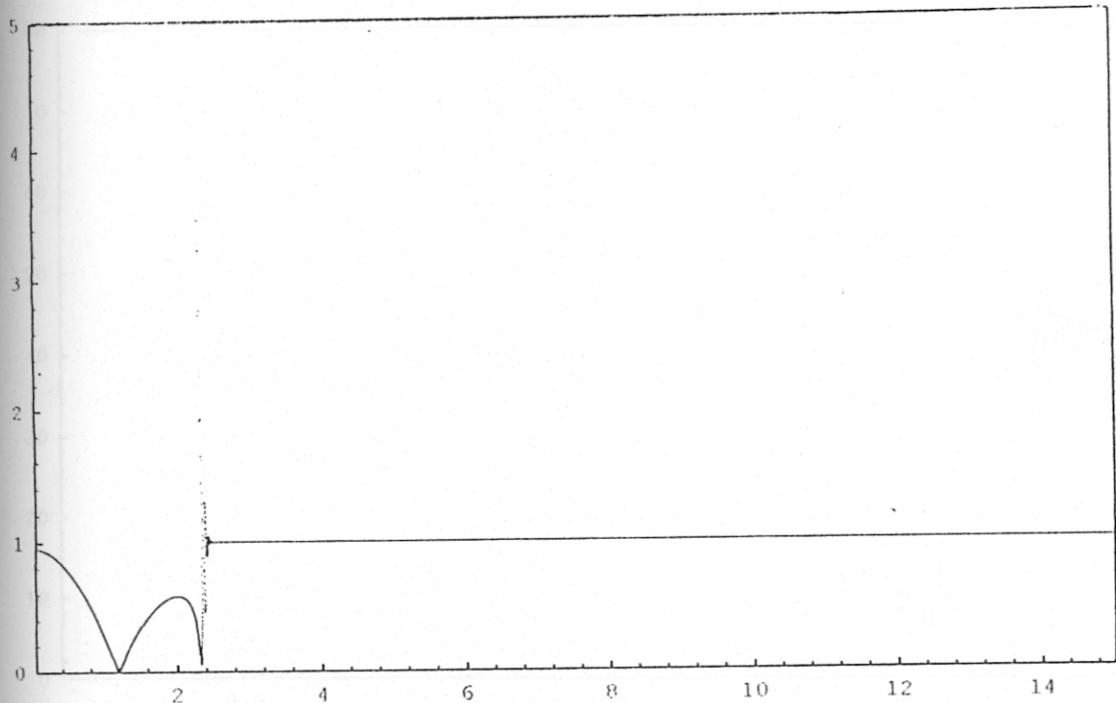


Gráfico 6: Razón de los Semiejes a_3^*/a_1^* en función de t^*

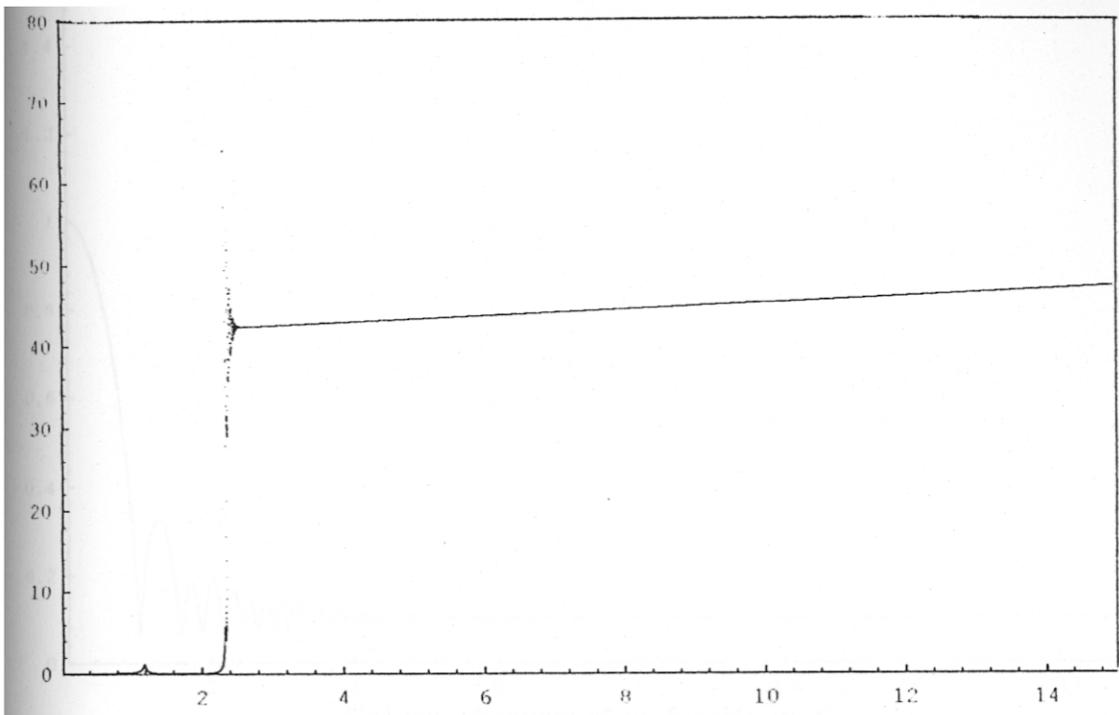


Gráfico 7: Temperatura Central T_c^* en función de t^* .

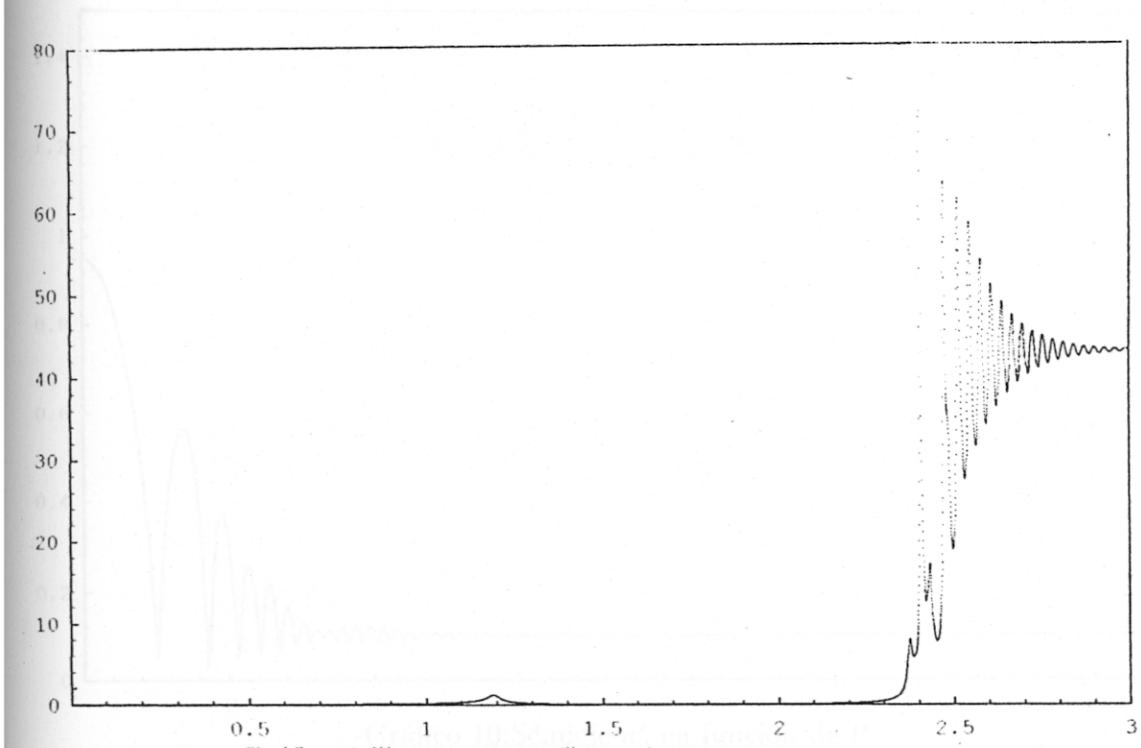


Gráfico 8: Temperatura Central (T_c^*) en función de t^*

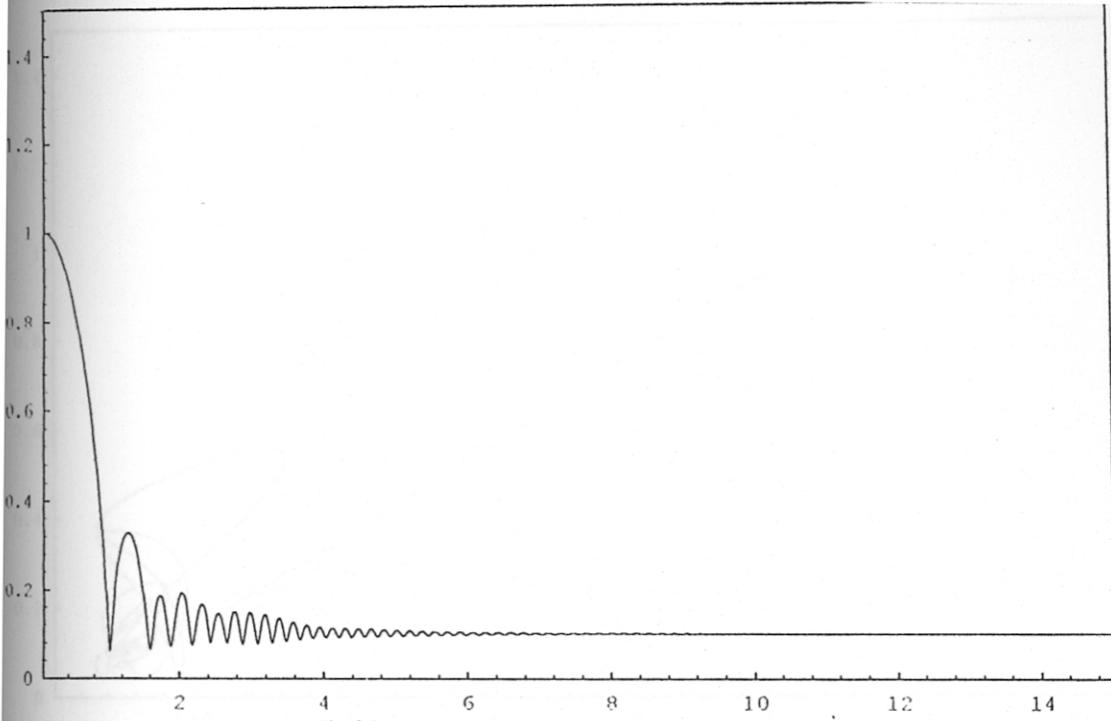


Gráfico 9: Semieje a_1^* en función de t^*

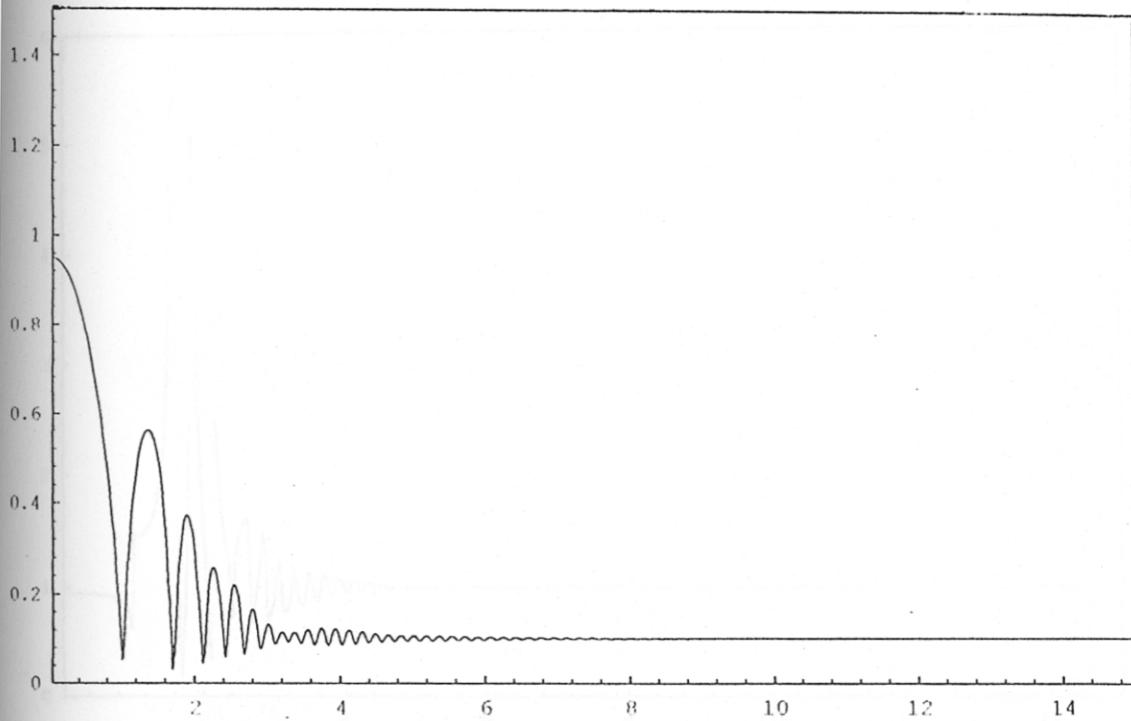


Gráfico 10: Semieje a_3^* en función de t^*

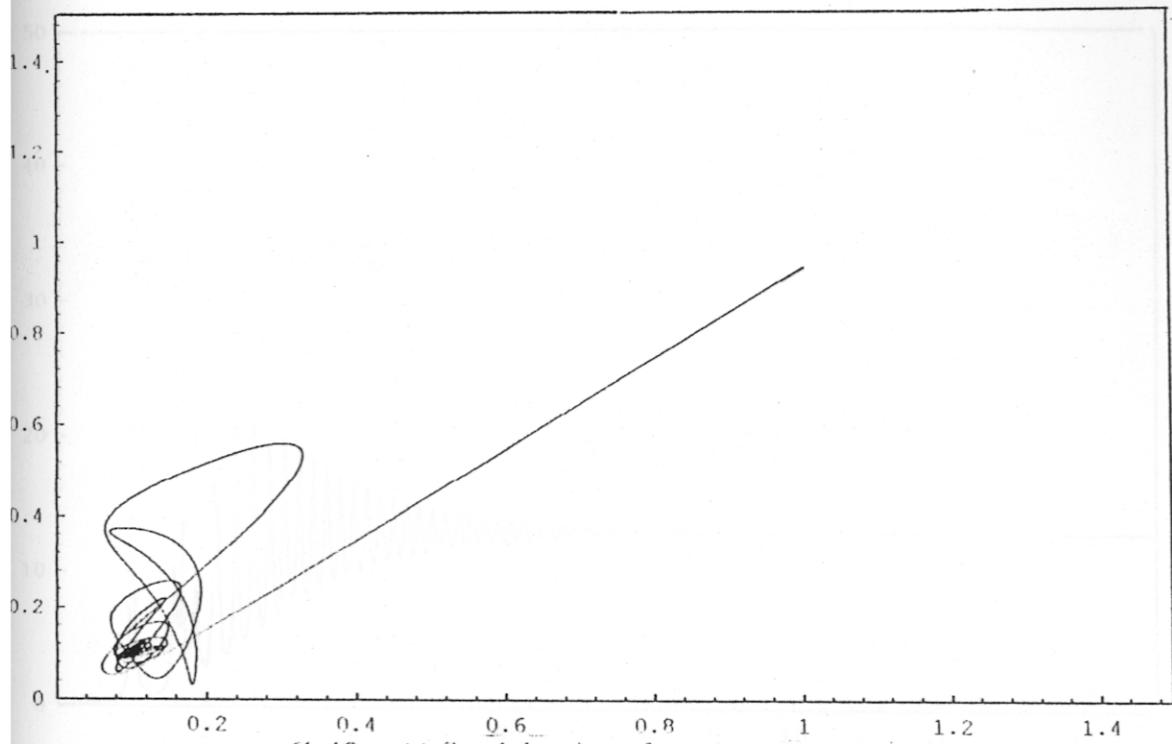


Gráfico 11: Semieje a_3 en función del Semieje a_1

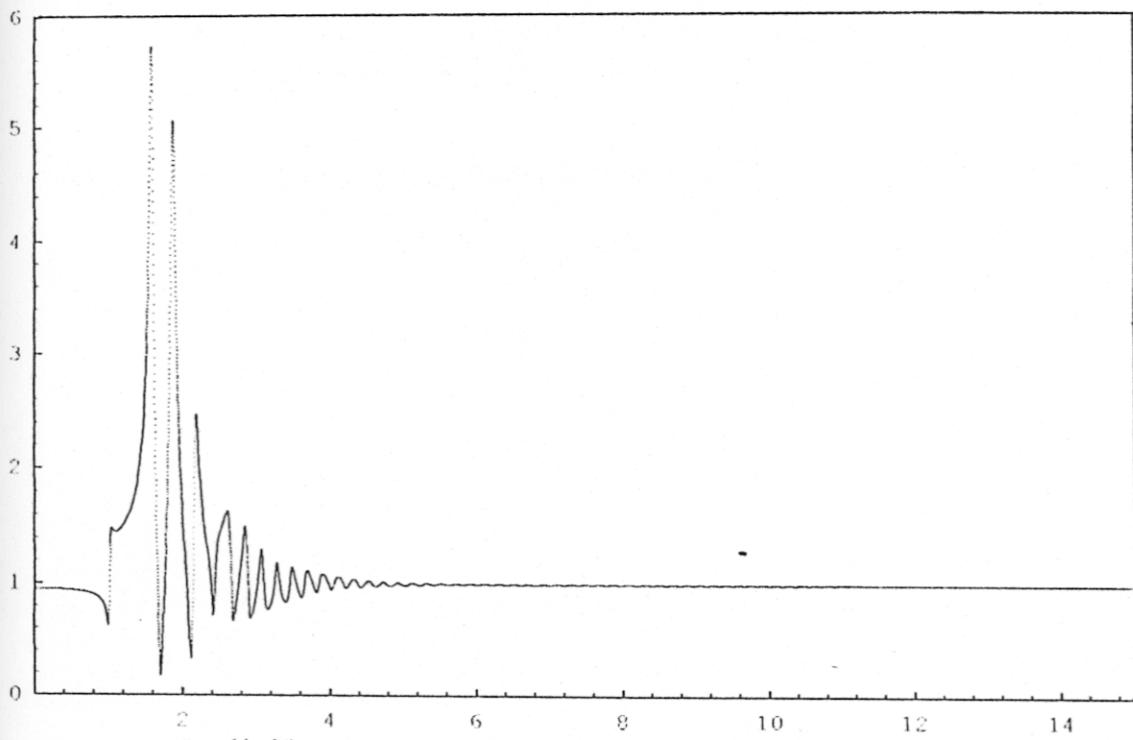


Gráfico 12: Razón de los Semiejes (a_3/a_1) en función de t^*

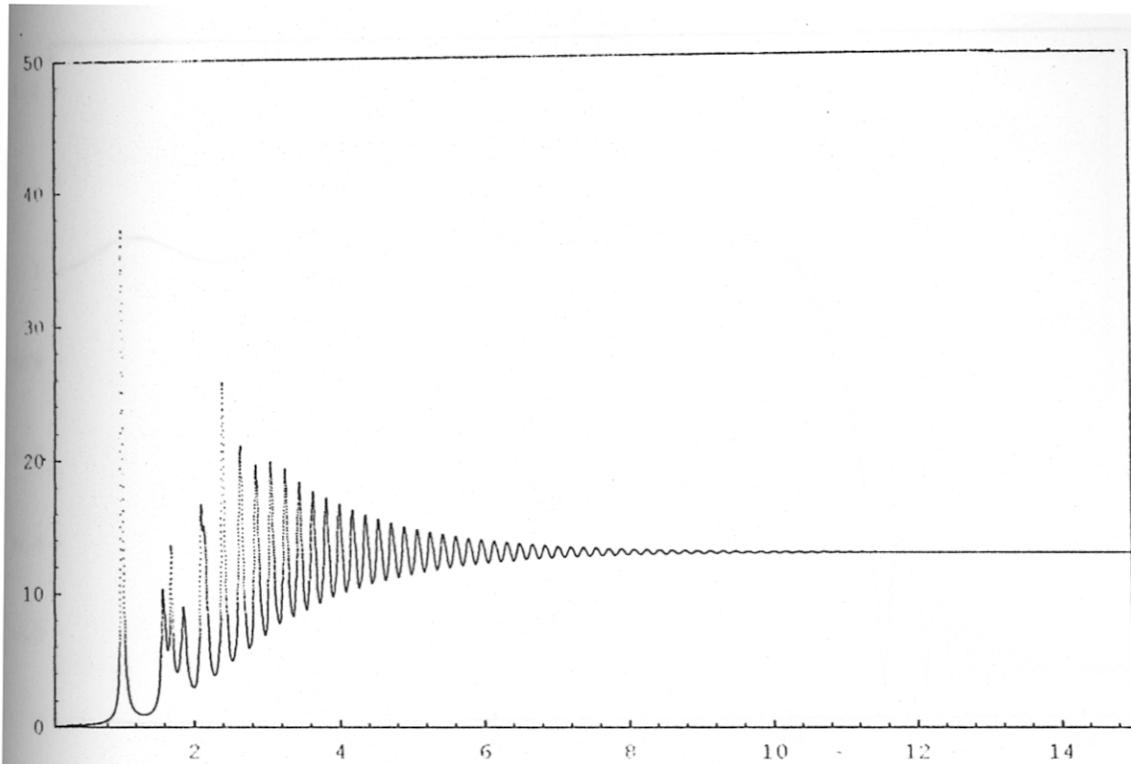


Gráfico 13: Temperatura Central (T_c^*) en función de t^* .

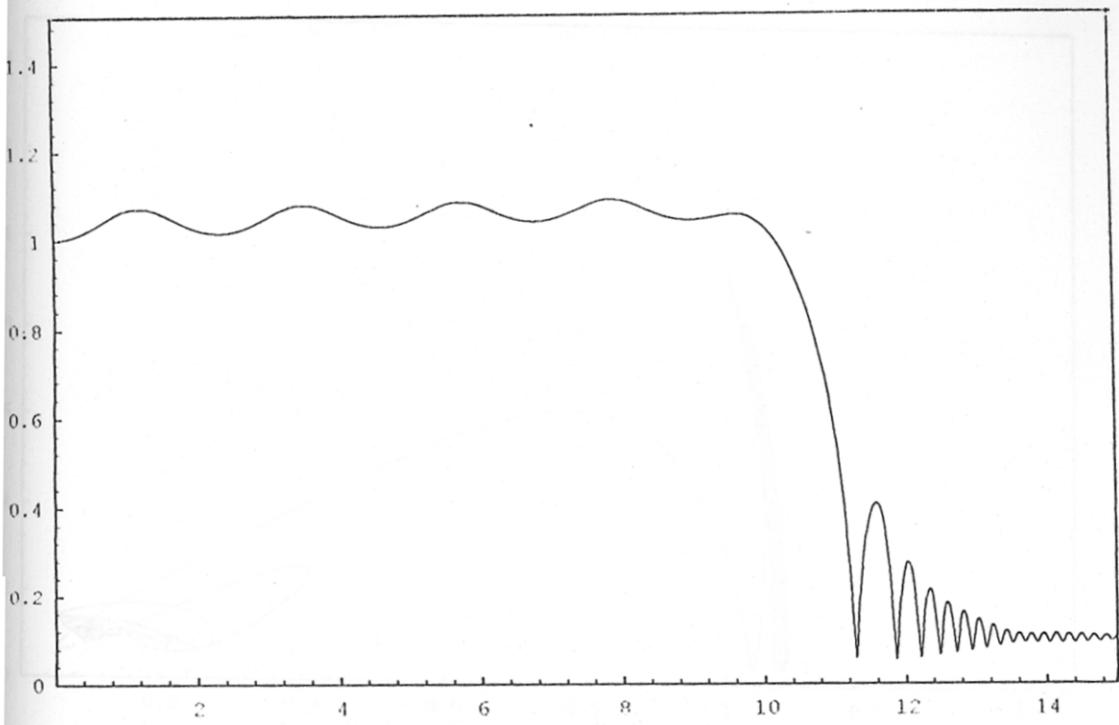


Gráfico 14: Semieje a_1^* en función de t^* .

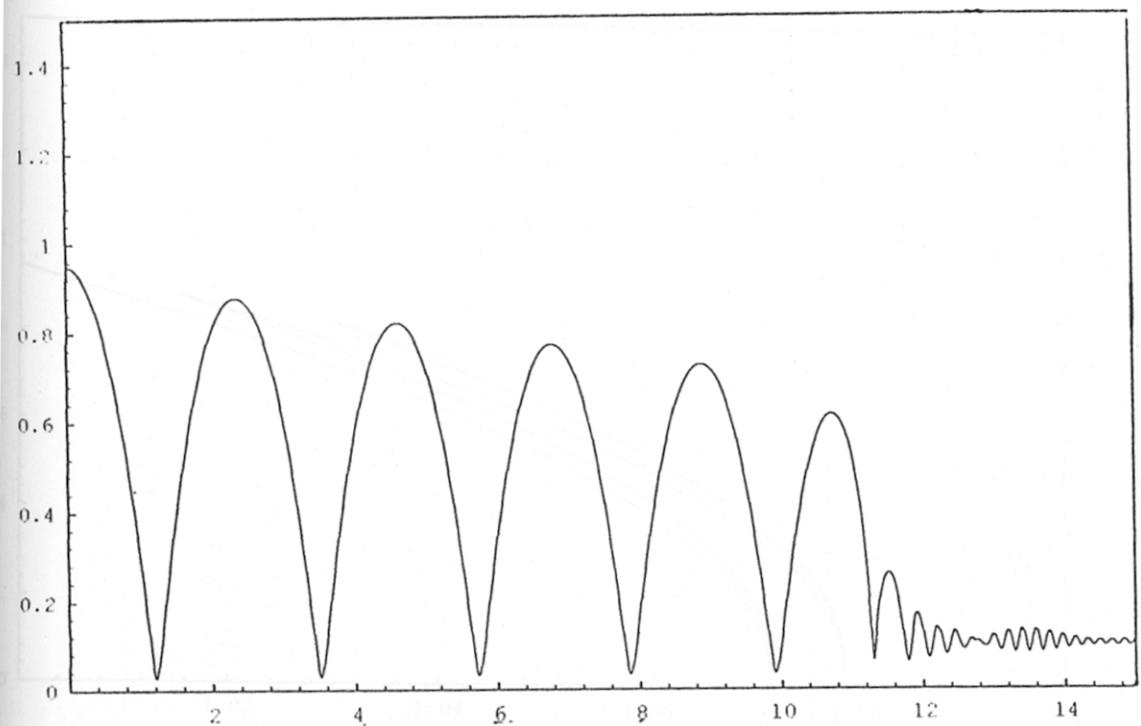


Gráfico 15: Semieje a_3^* en función de t^* .

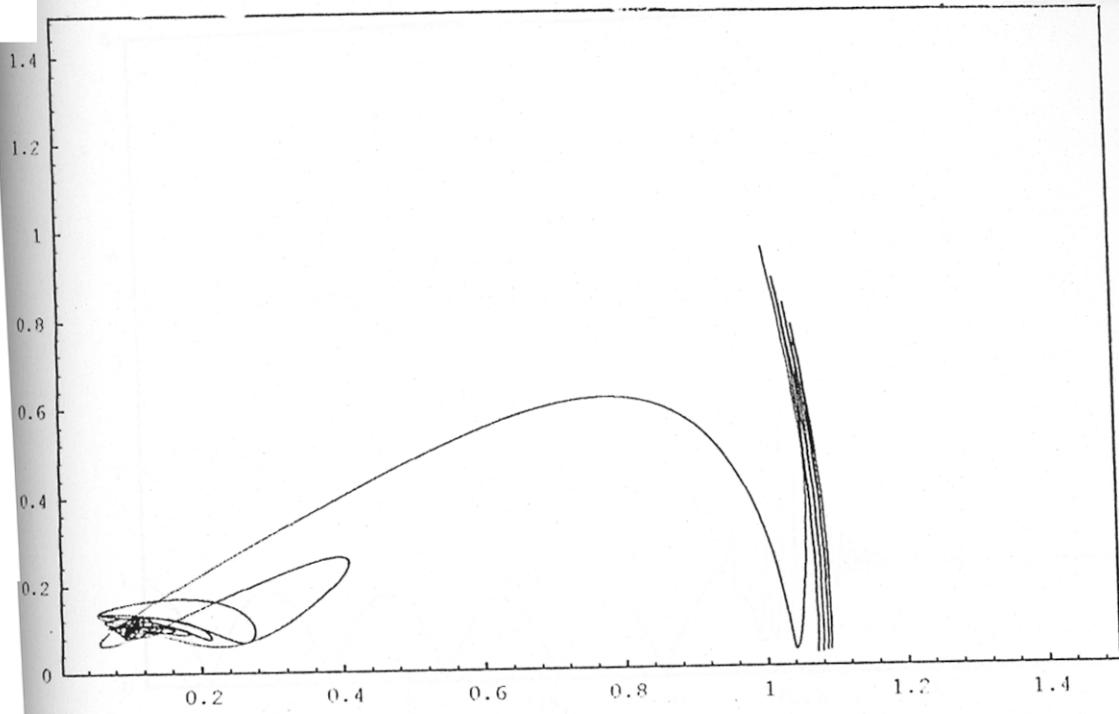


Gráfico 16: Semieje a_3^* en función del Semieje a_1^*

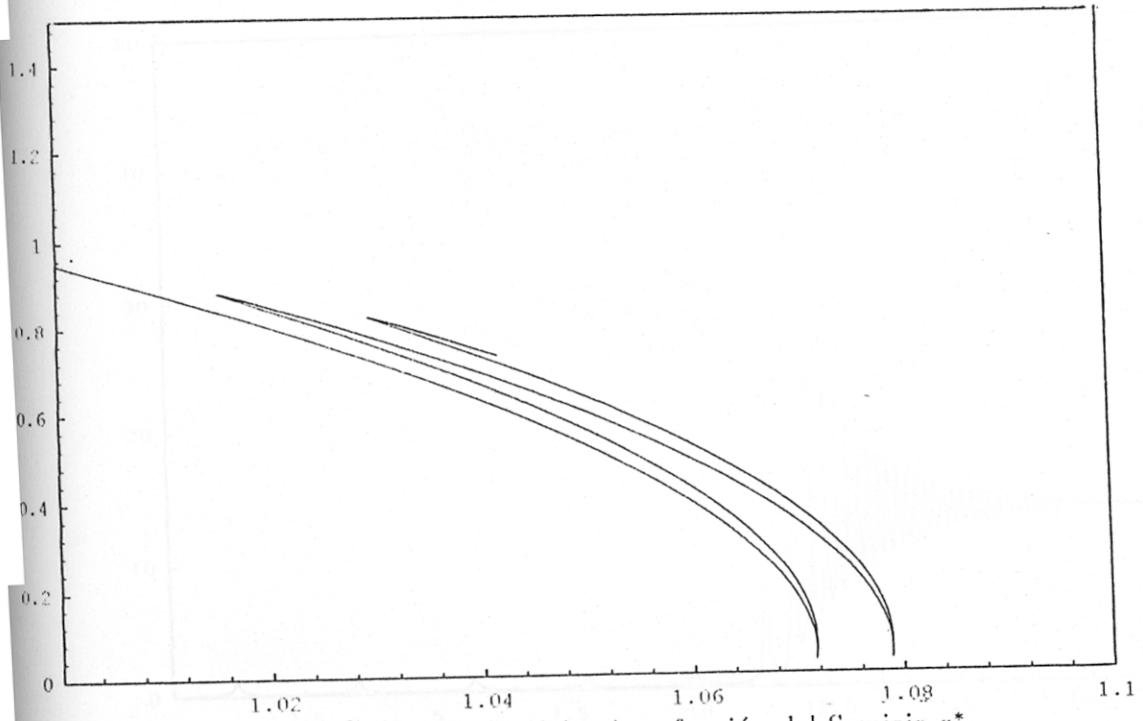


Gráfico 17: Semieje a_3^* en función del Semieje a_1^* .

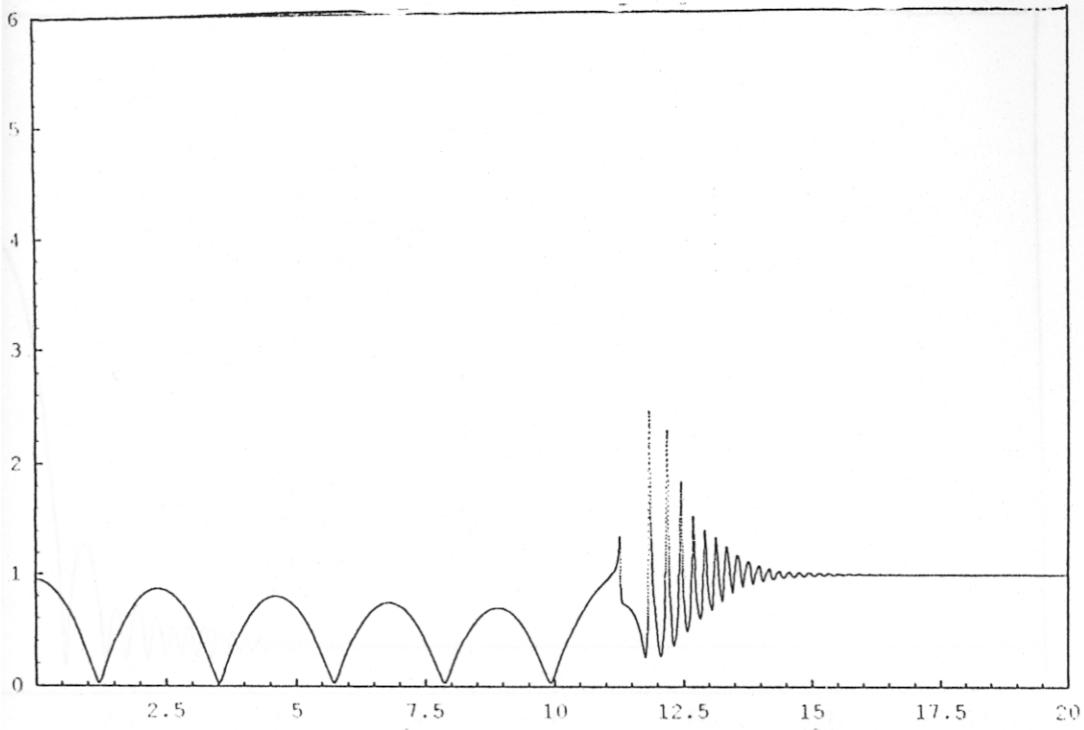


Gráfico 18: Razón de los Semiciejes (a_3^*/a_1^*) en función de t^*

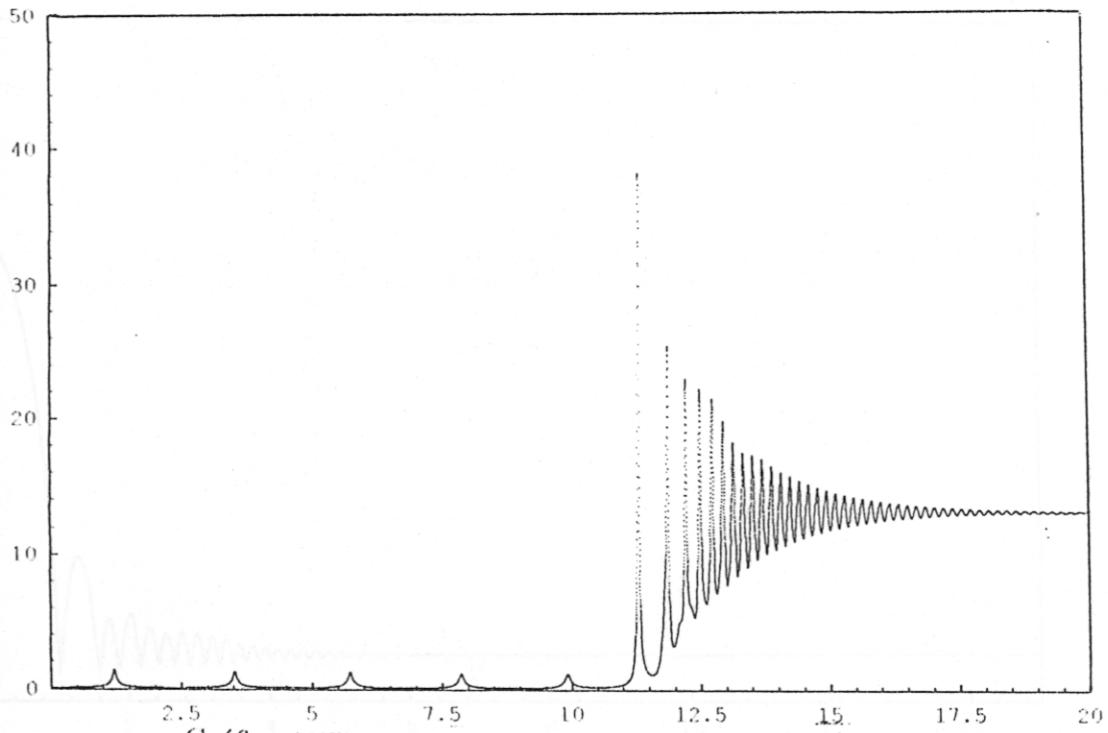


Gráfico 19: Temperatura Central (T_c^*) en función de t^*

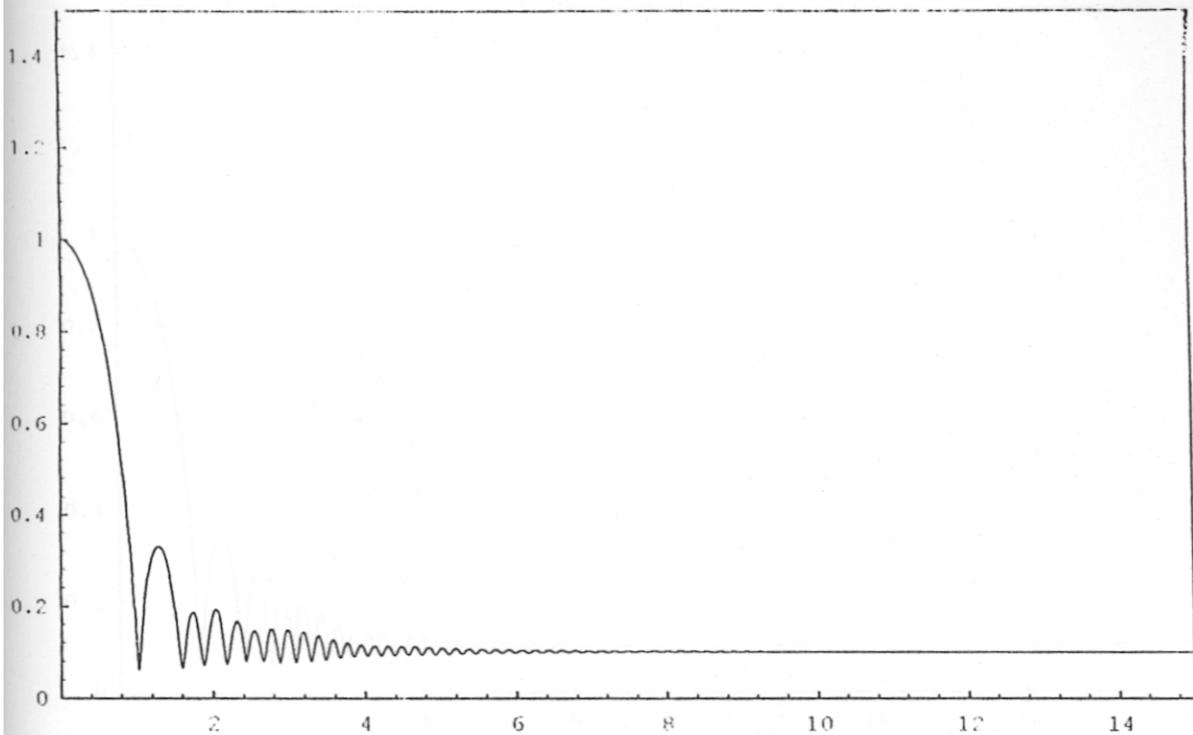


Gráfico 20: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{T^*}^* = 0$

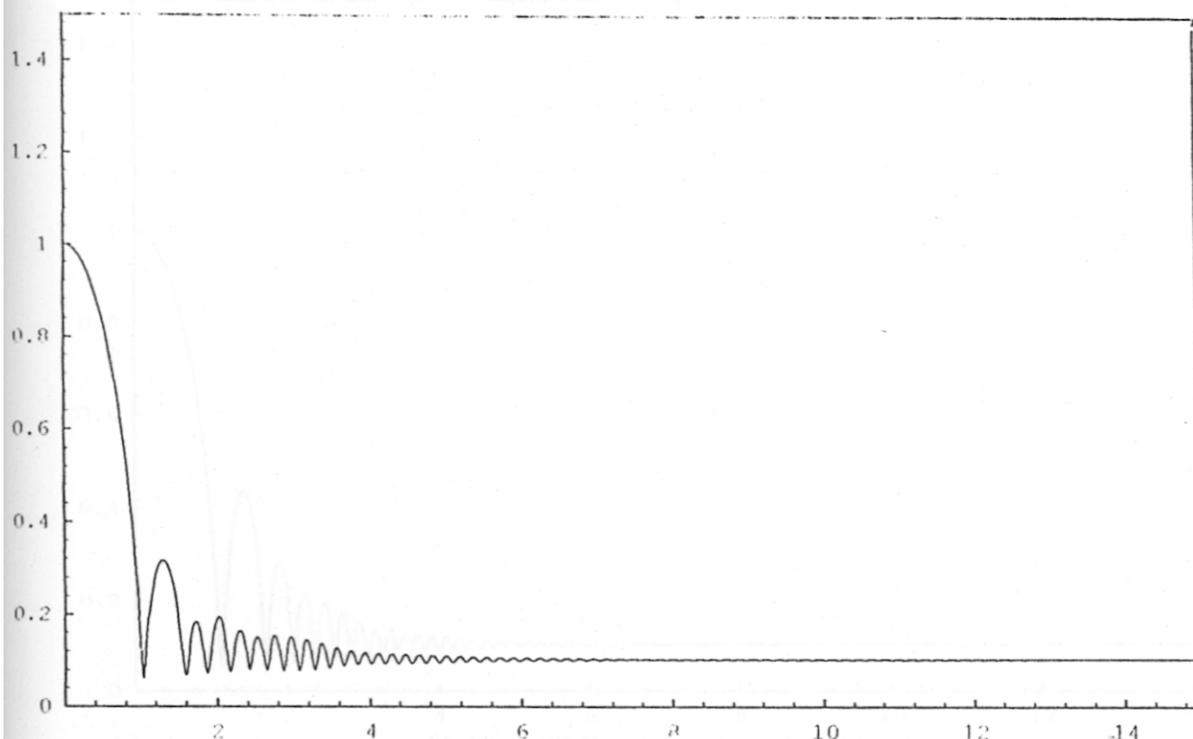


Gráfico 21: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{T^*}^* = 0.2$

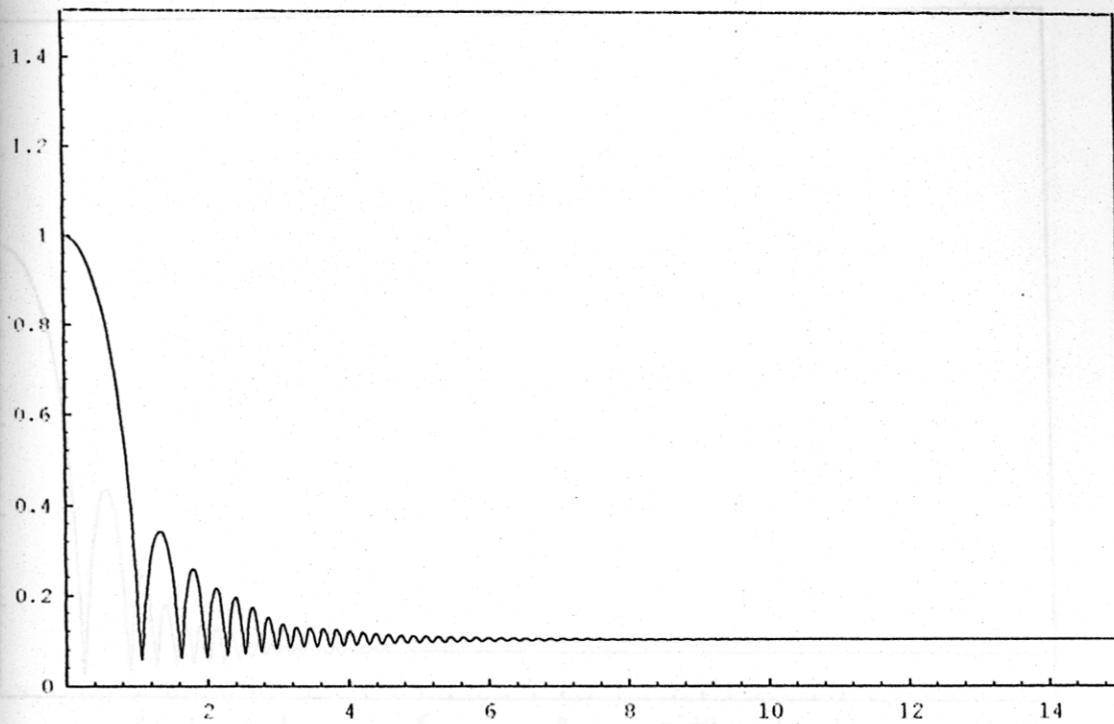


Gráfico 22: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 0.1$

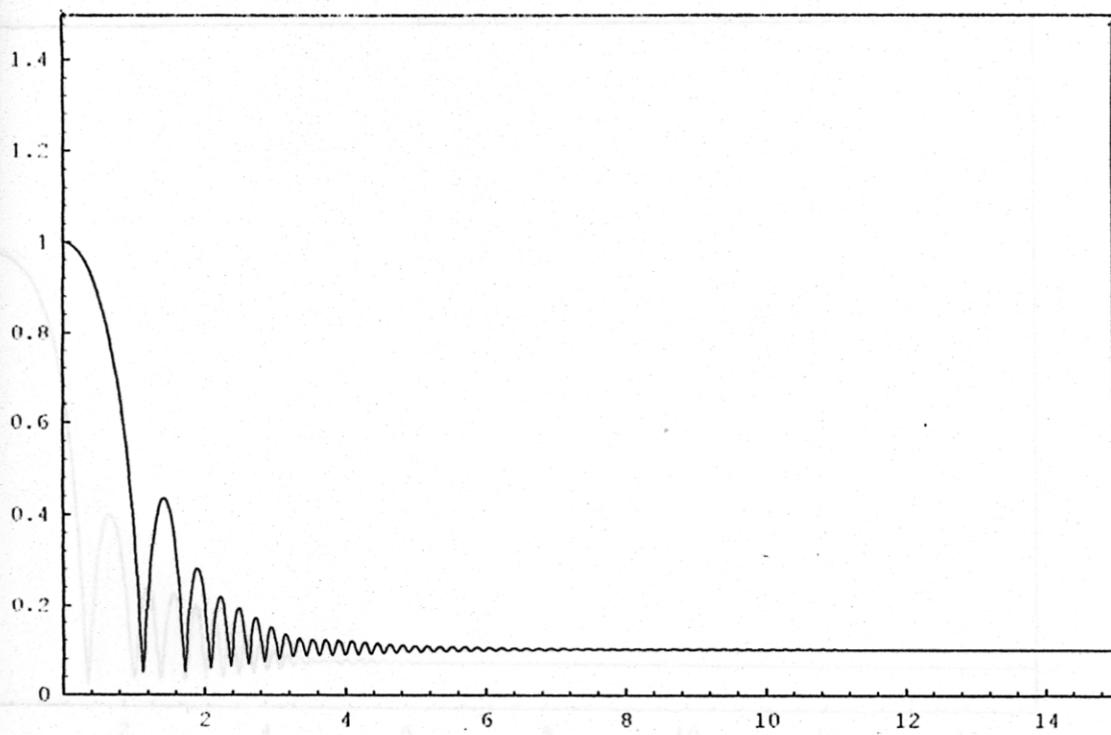


Gráfico 23: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 0.6$

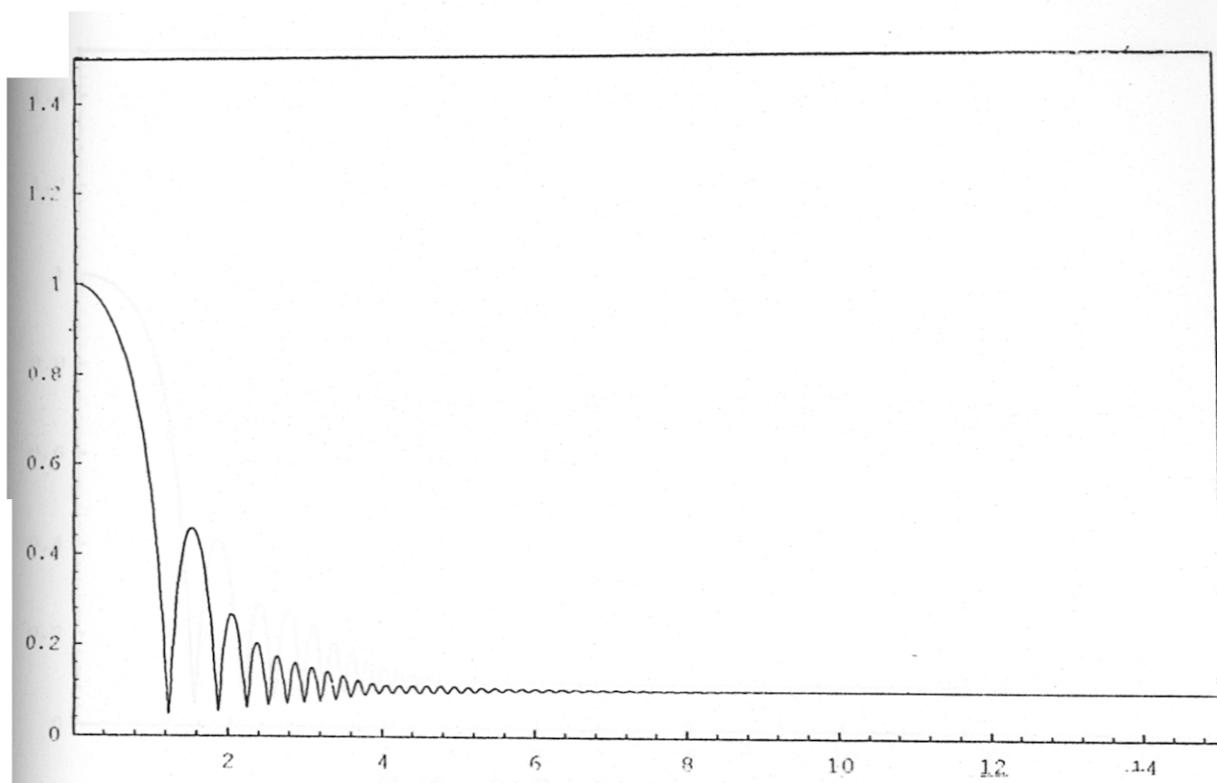


Gráfico 24: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 0.8$

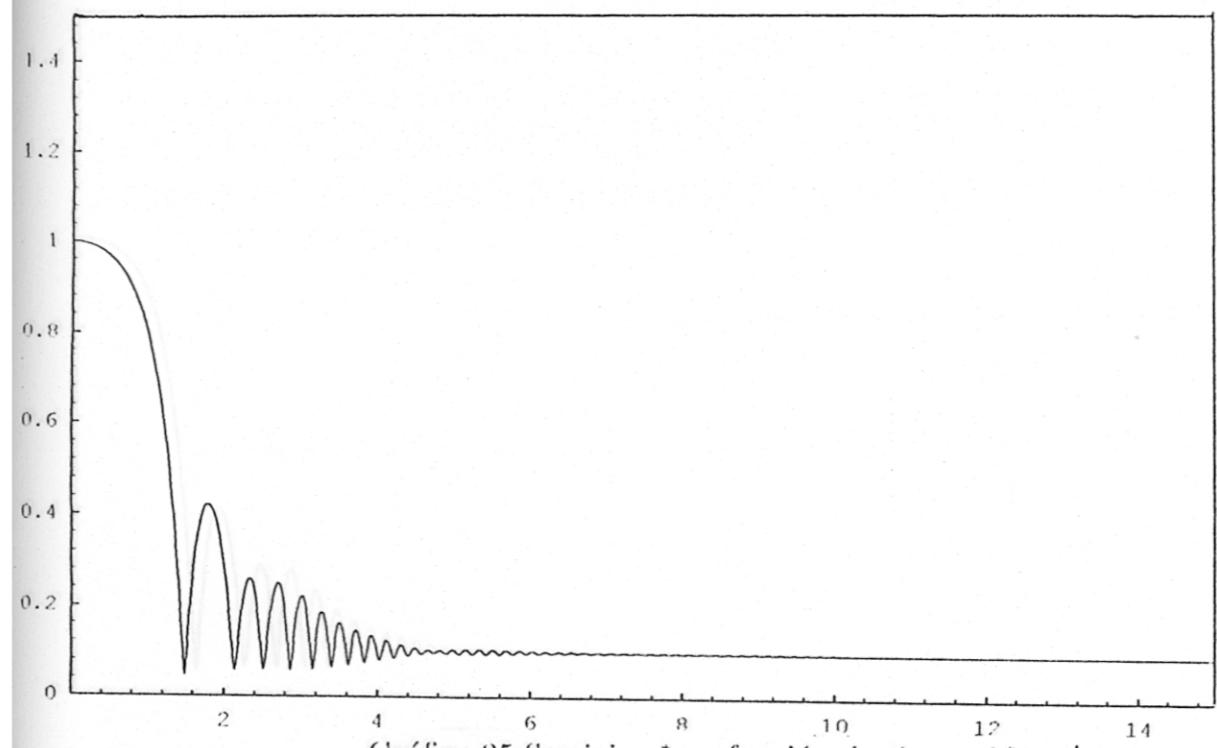


Gráfico 25: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1$

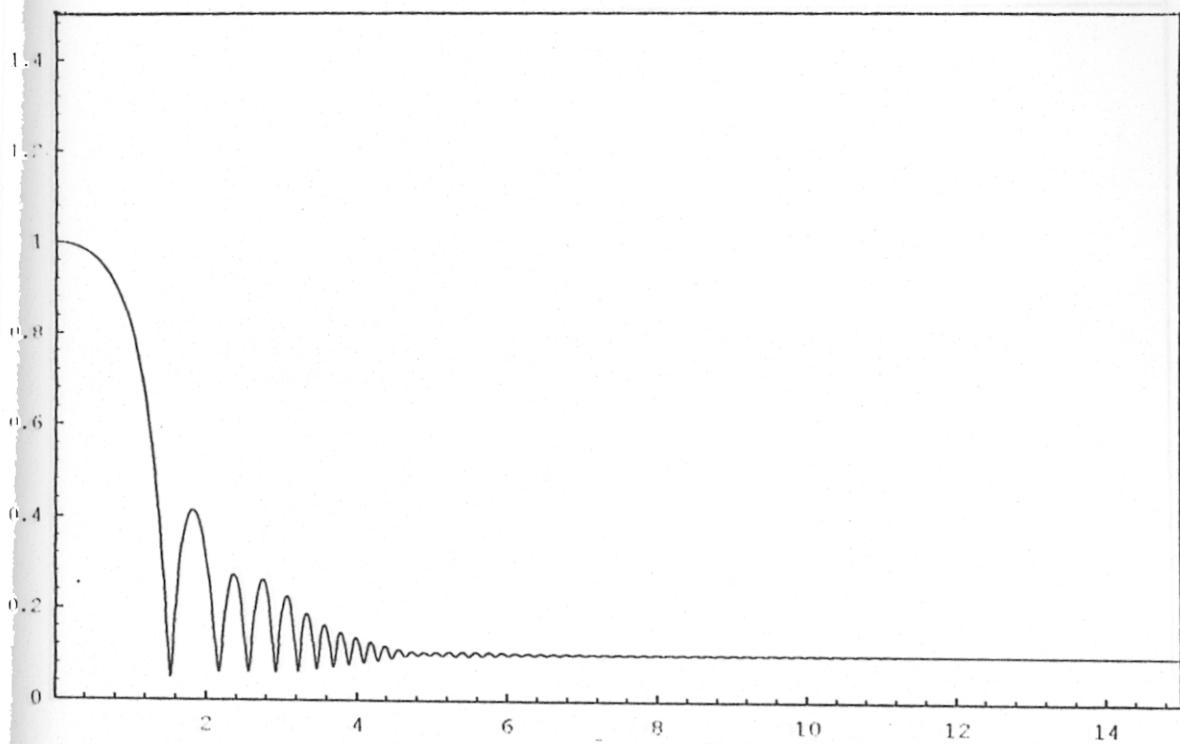


Gráfico 26: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{j^*} = 1.02$

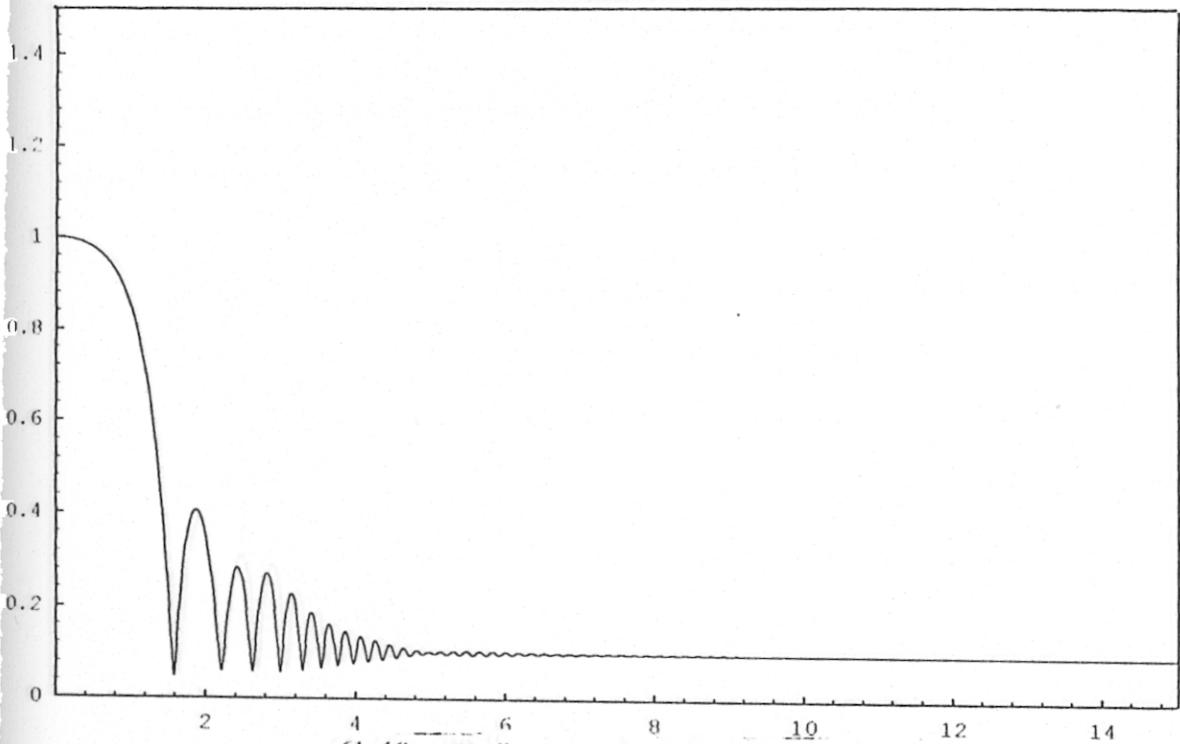


Gráfico 27: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{j^*} = 1.01$

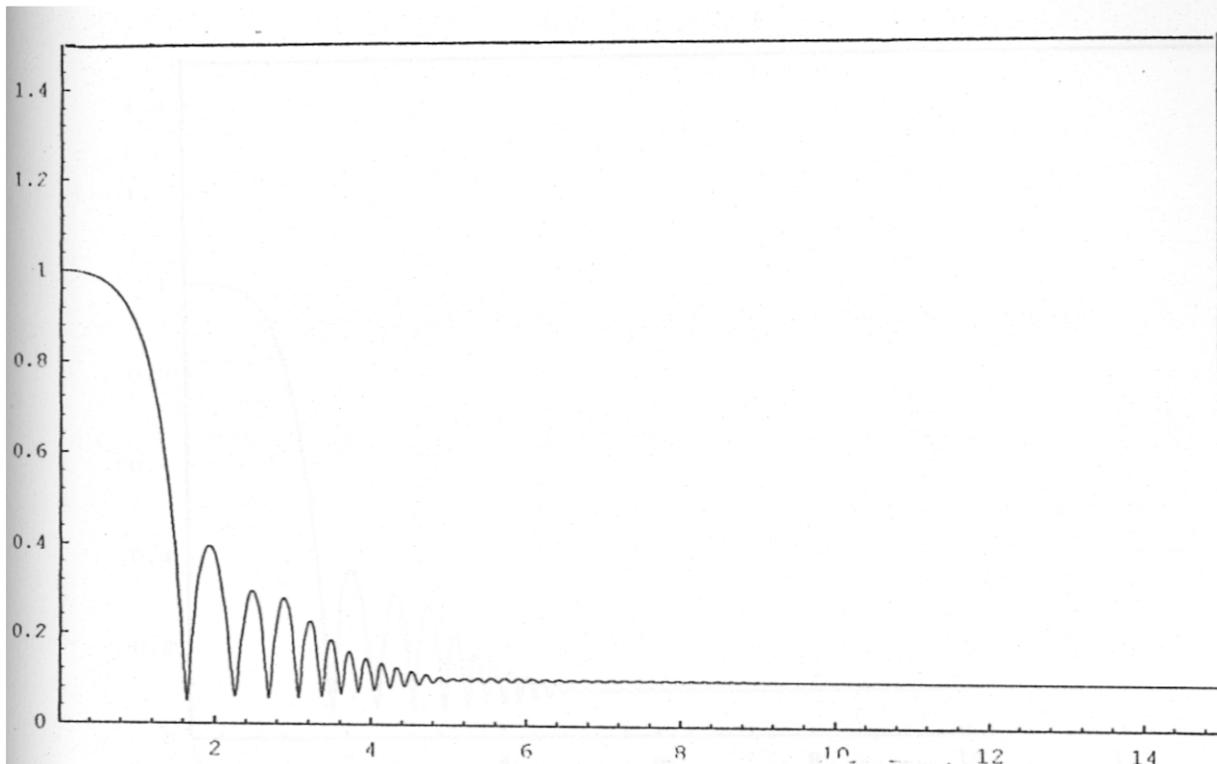


Gráfico 28: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.06$.

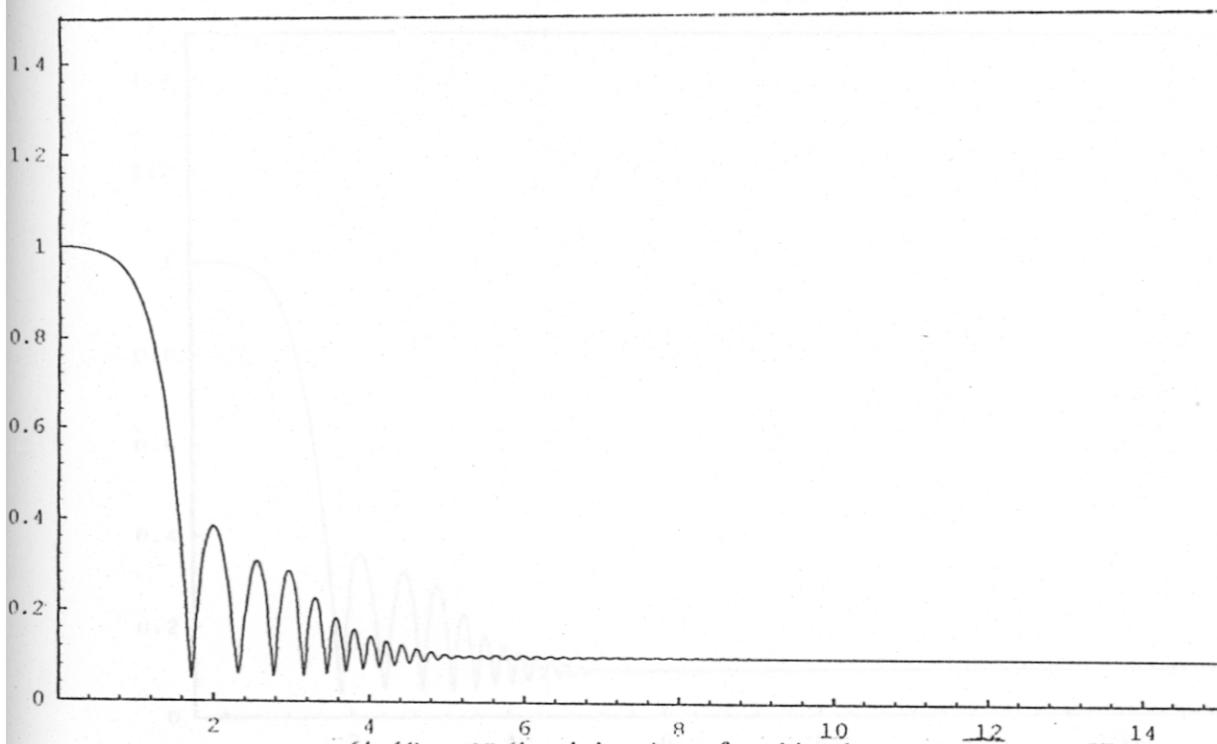


Gráfico 29: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.08$.

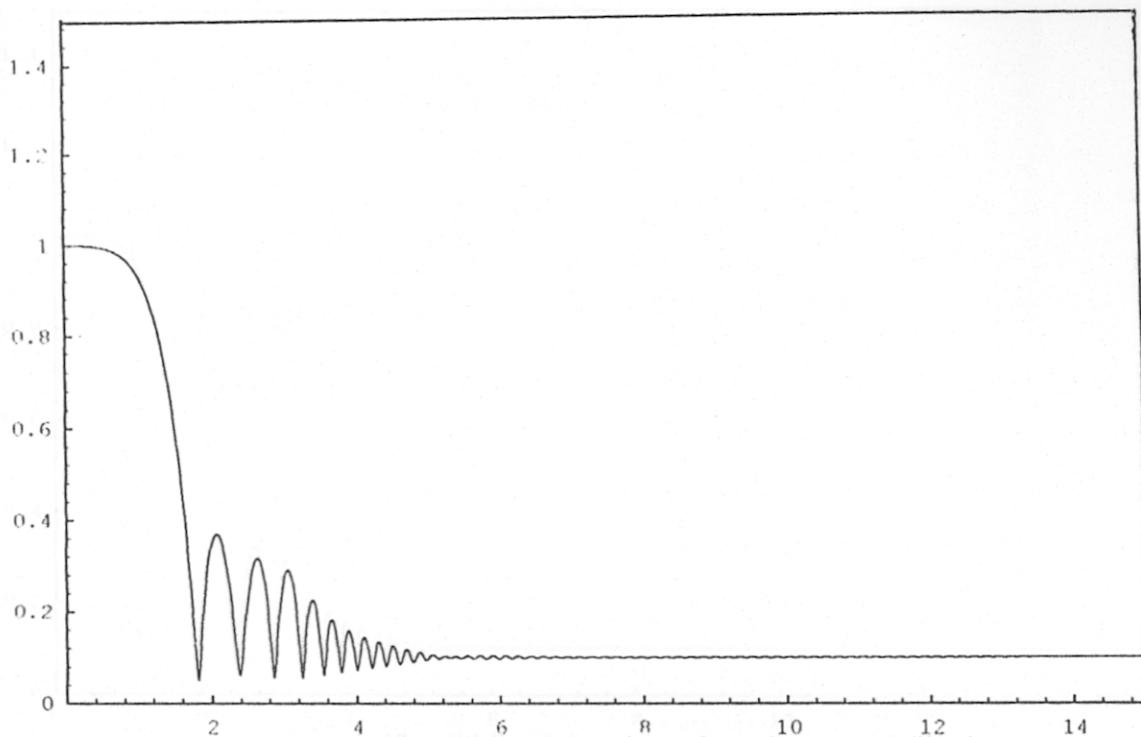


Gráfico 30: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.10$

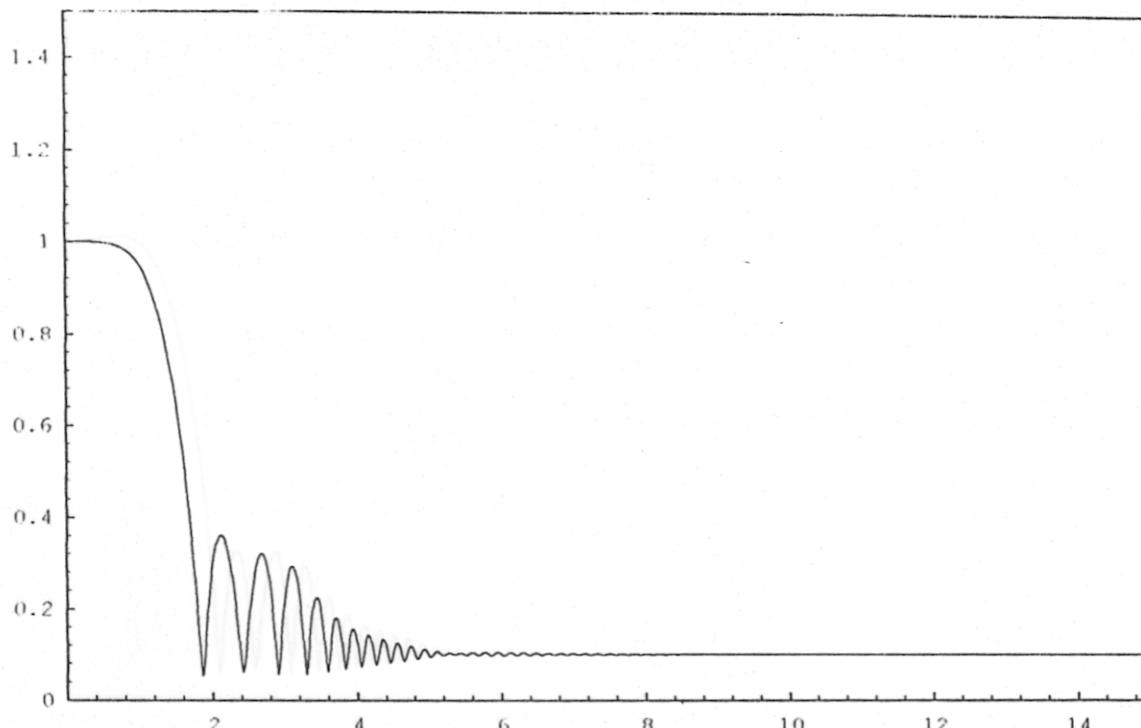


Gráfico 31: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.11$

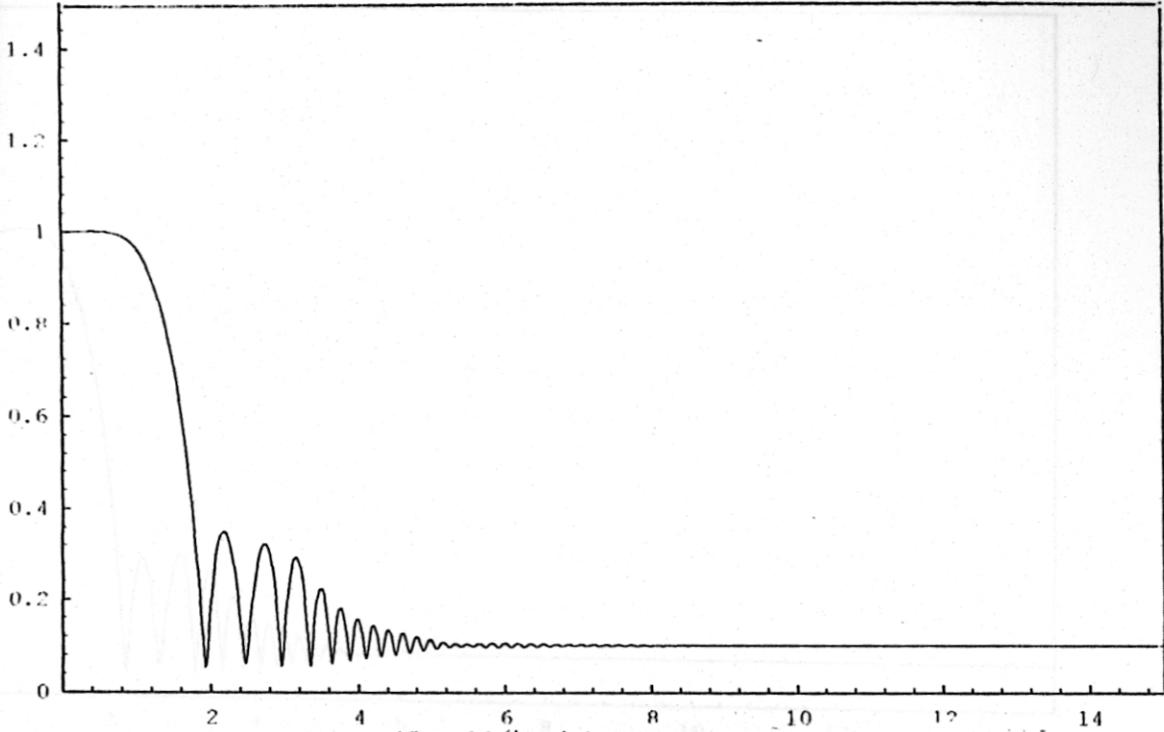


Gráfico 32: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{F^*} = 1.12$.

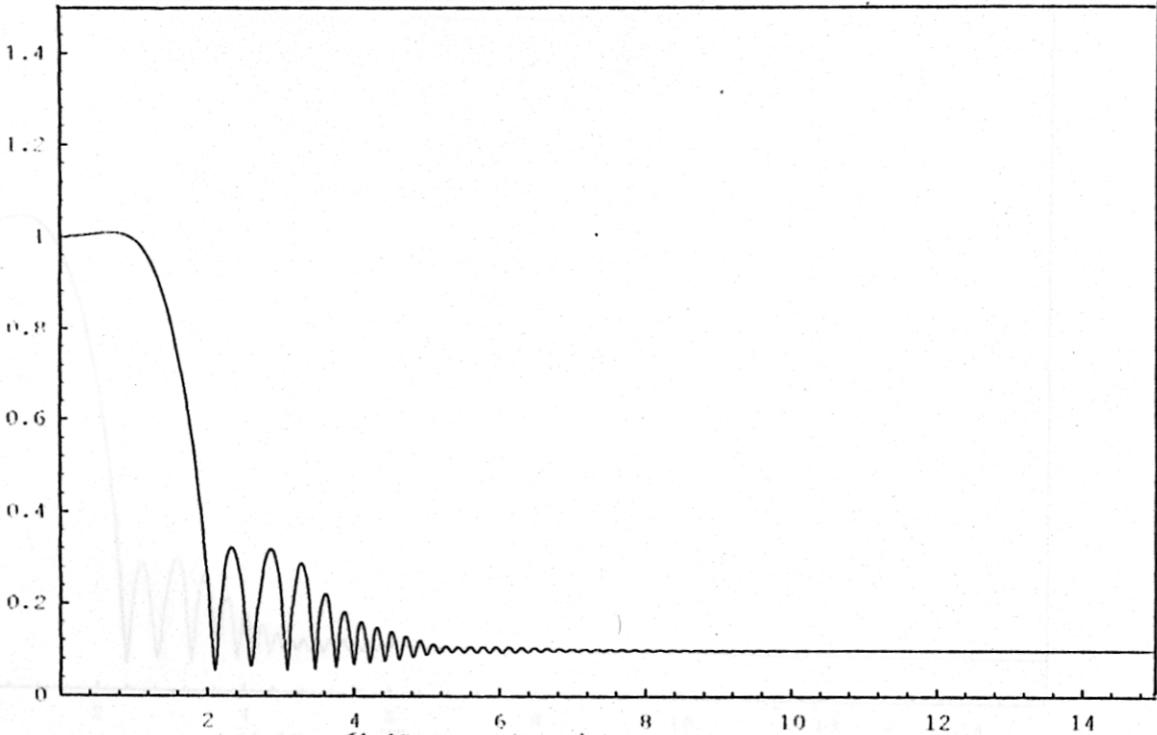


Gráfico 33: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{F^*} = 1.11$.

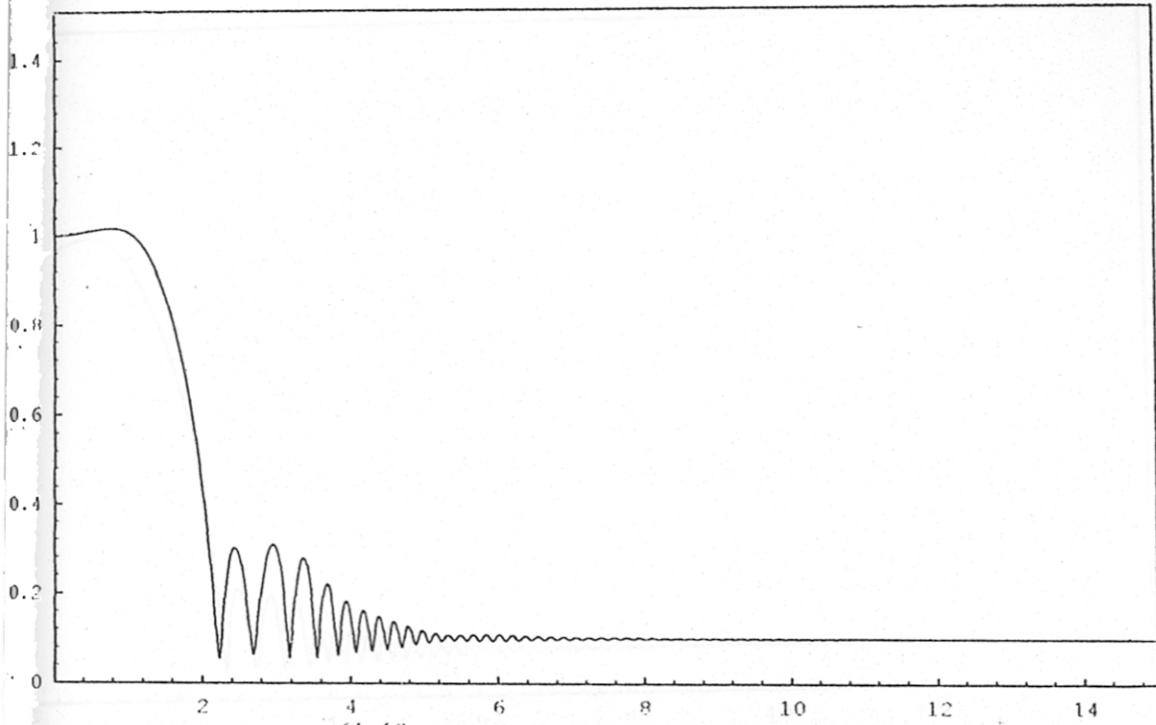


Gráfico 34: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{F^*} = 1.15$

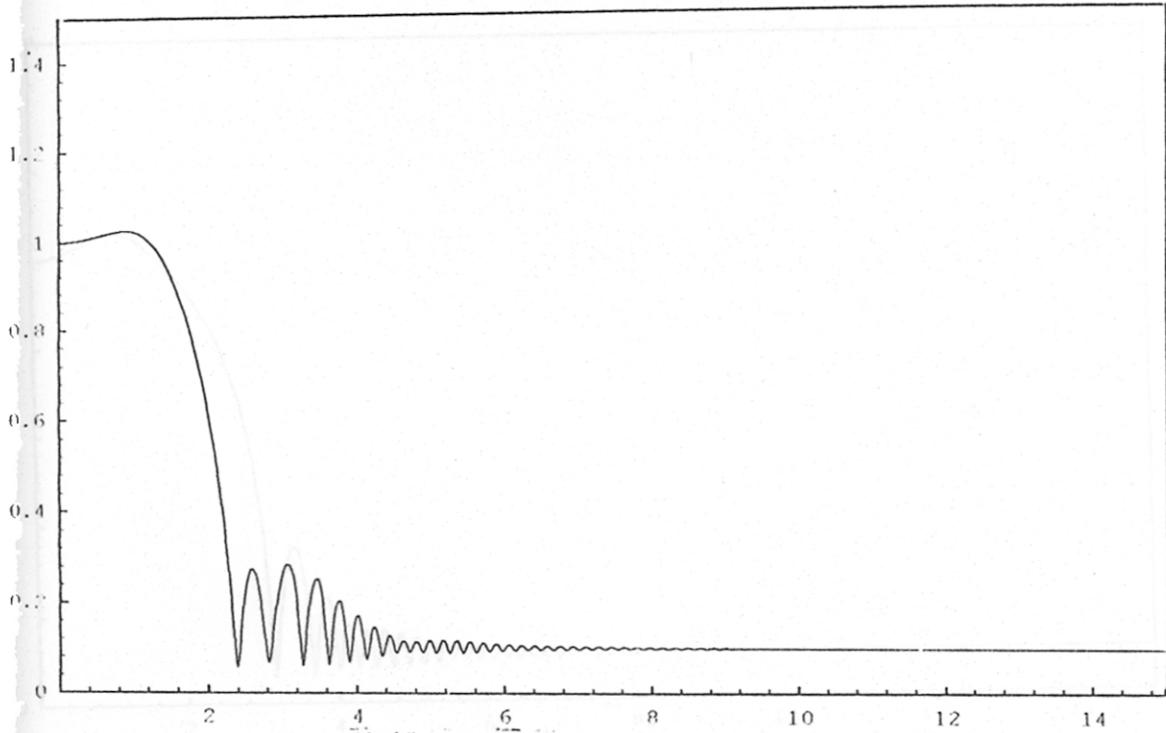


Gráfico 35: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{F^*} = 1.16$

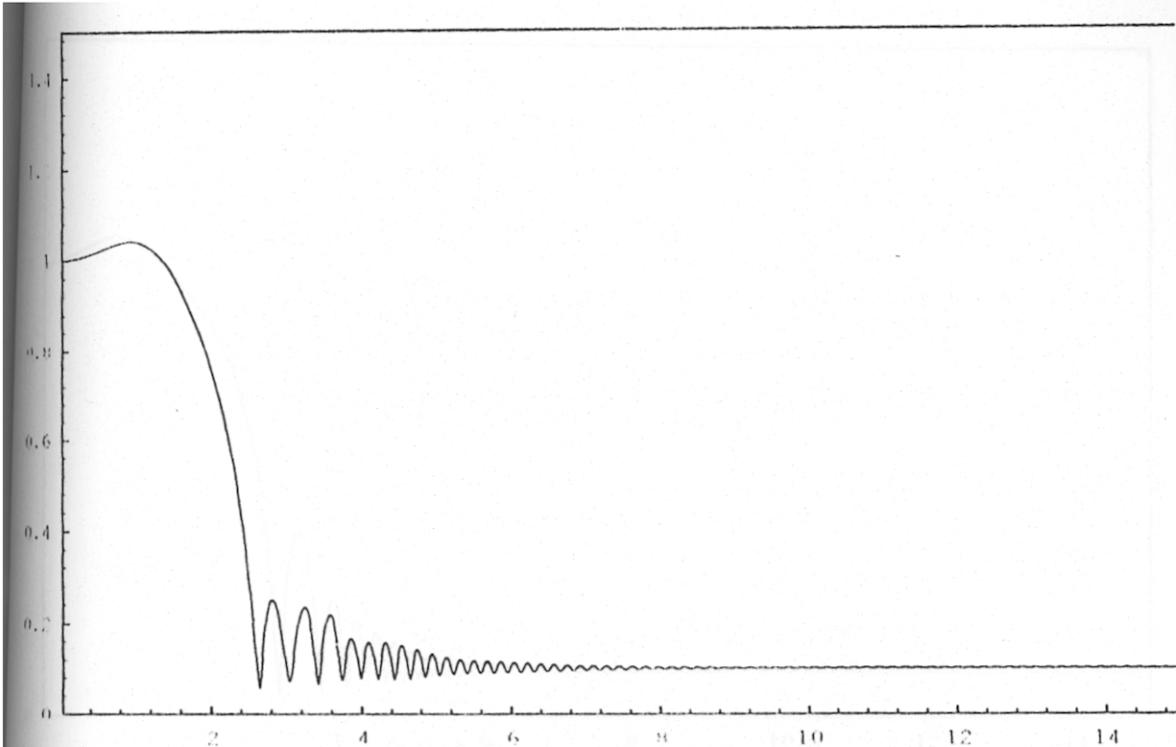


Gráfico 36: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.17$

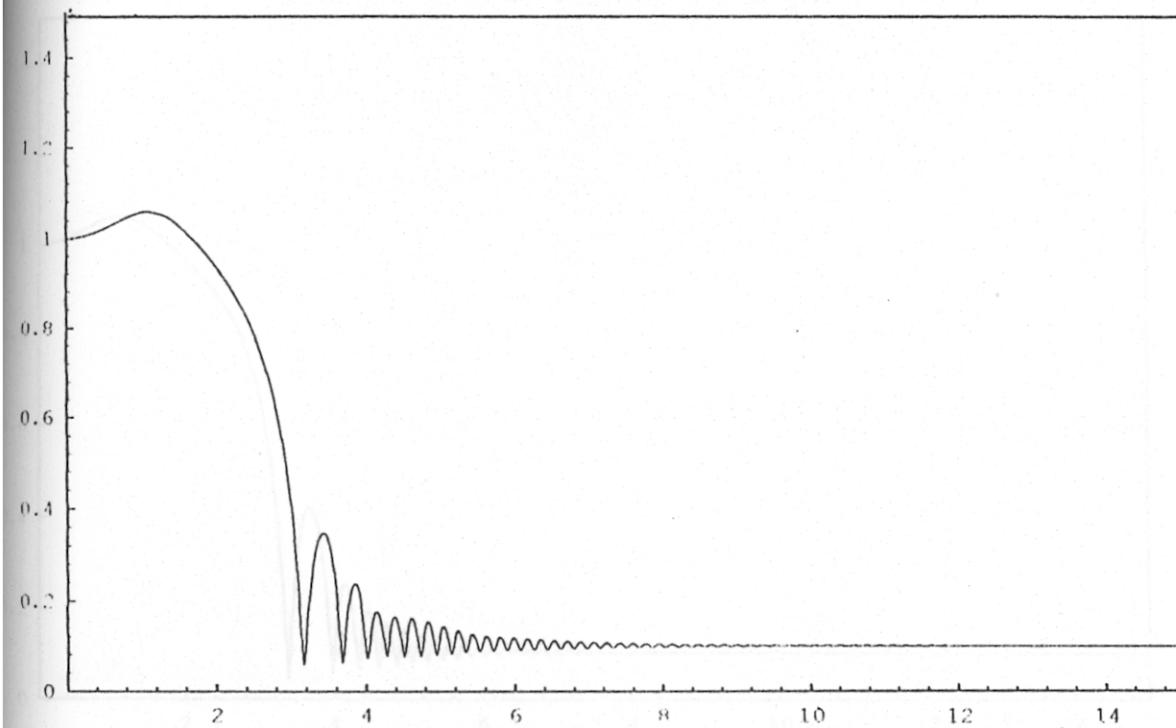


Gráfico 37: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.18$

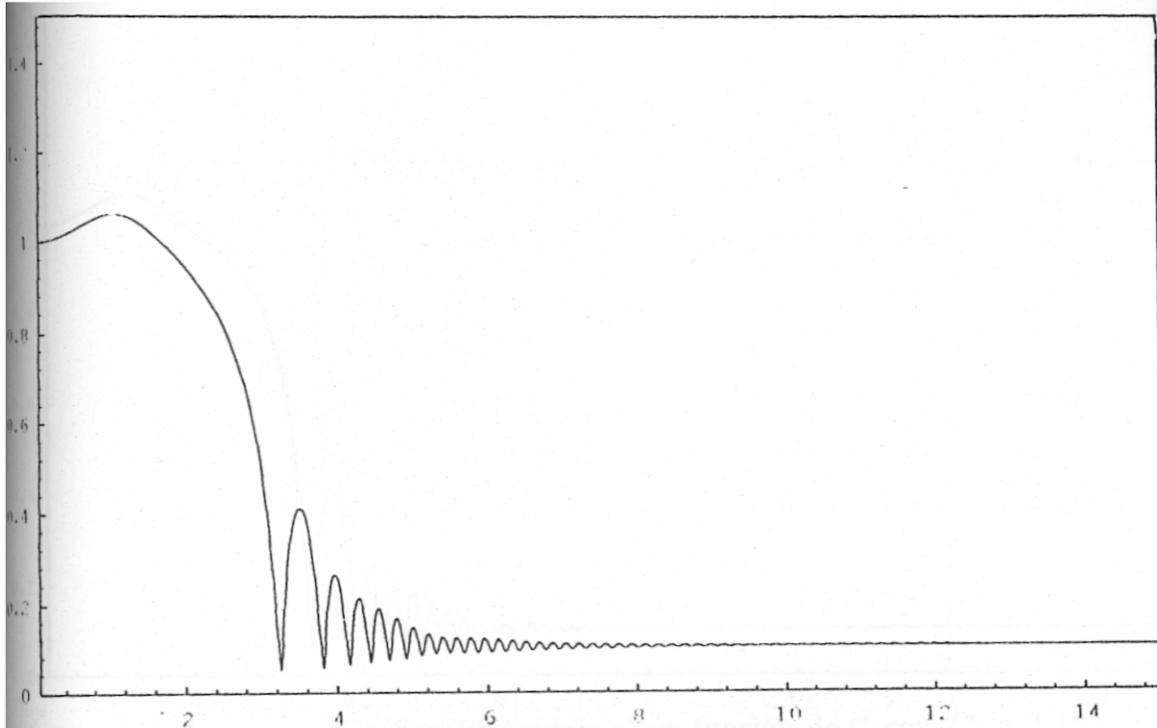


Gráfico 38: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{j^*} = 1.181$

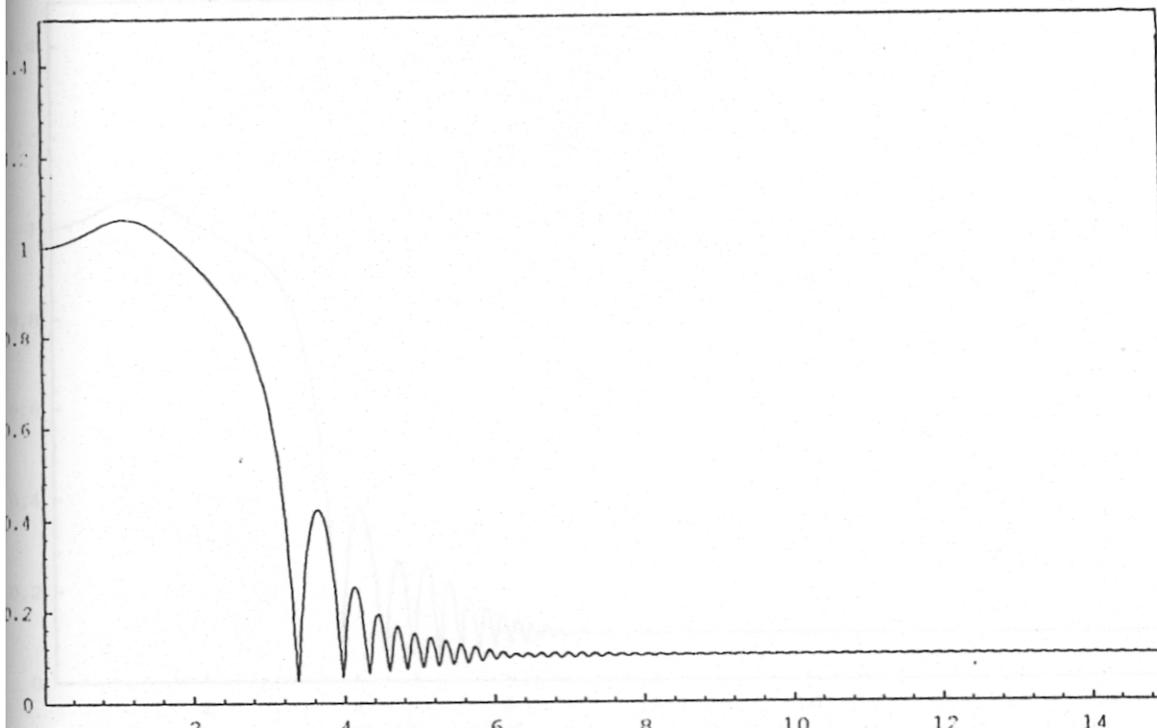


Gráfico 39: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{j^*} = 1.182$

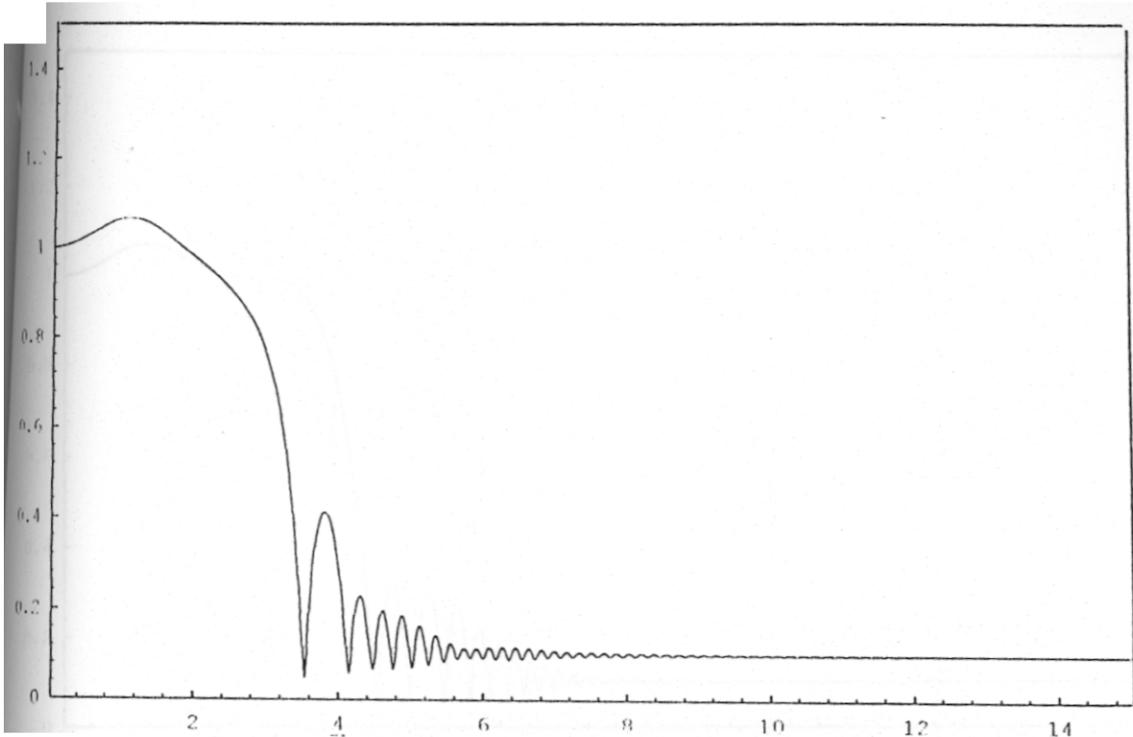


Gráfico 40: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{J^*} = 1.183$

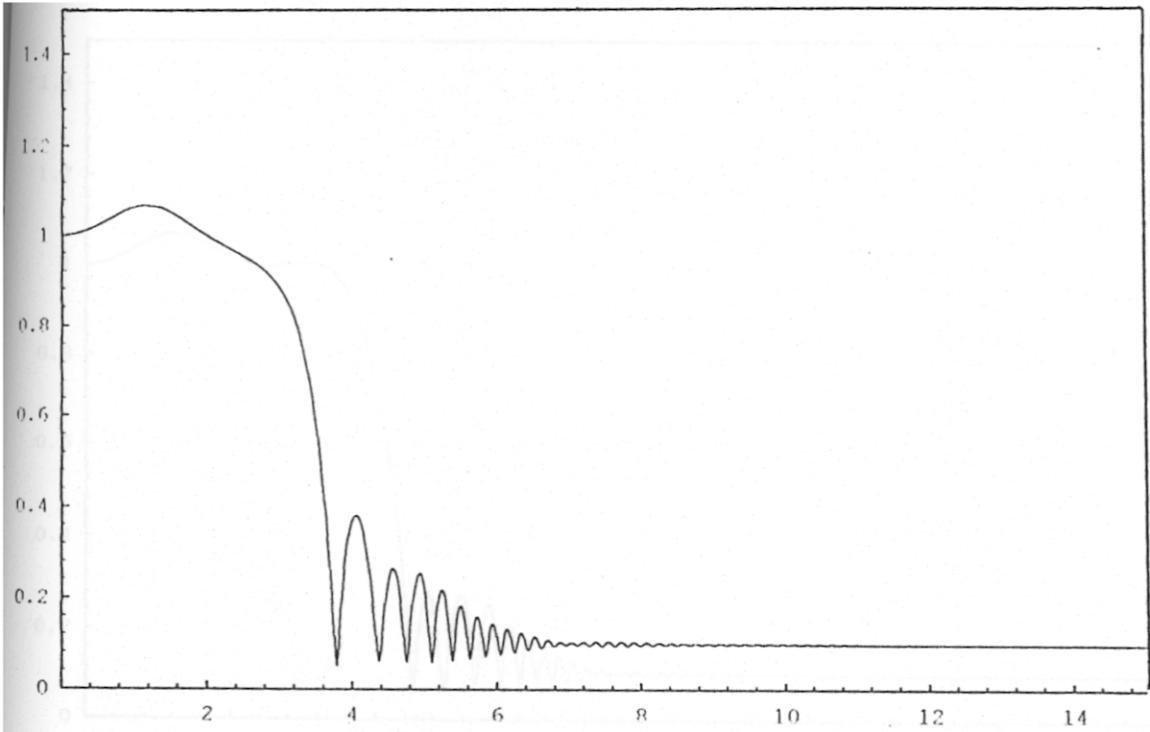


Gráfico 41: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{J^*} = 1.184$

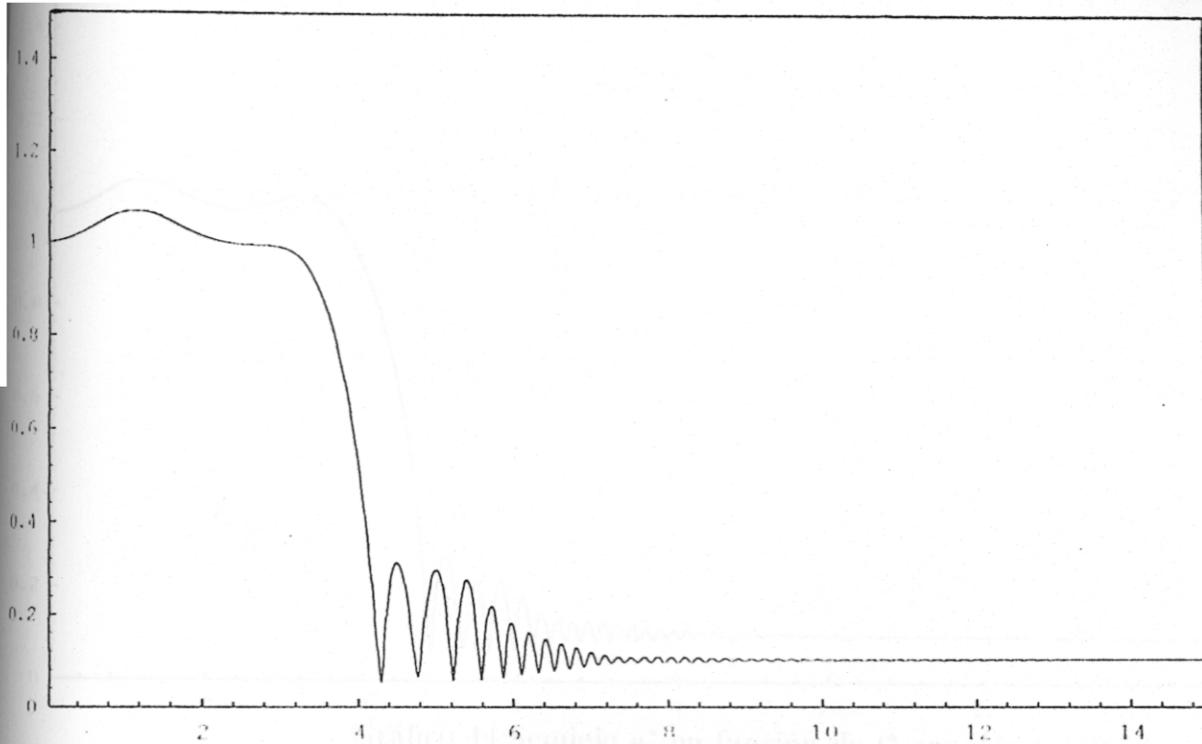


Gráfico 42: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.185$

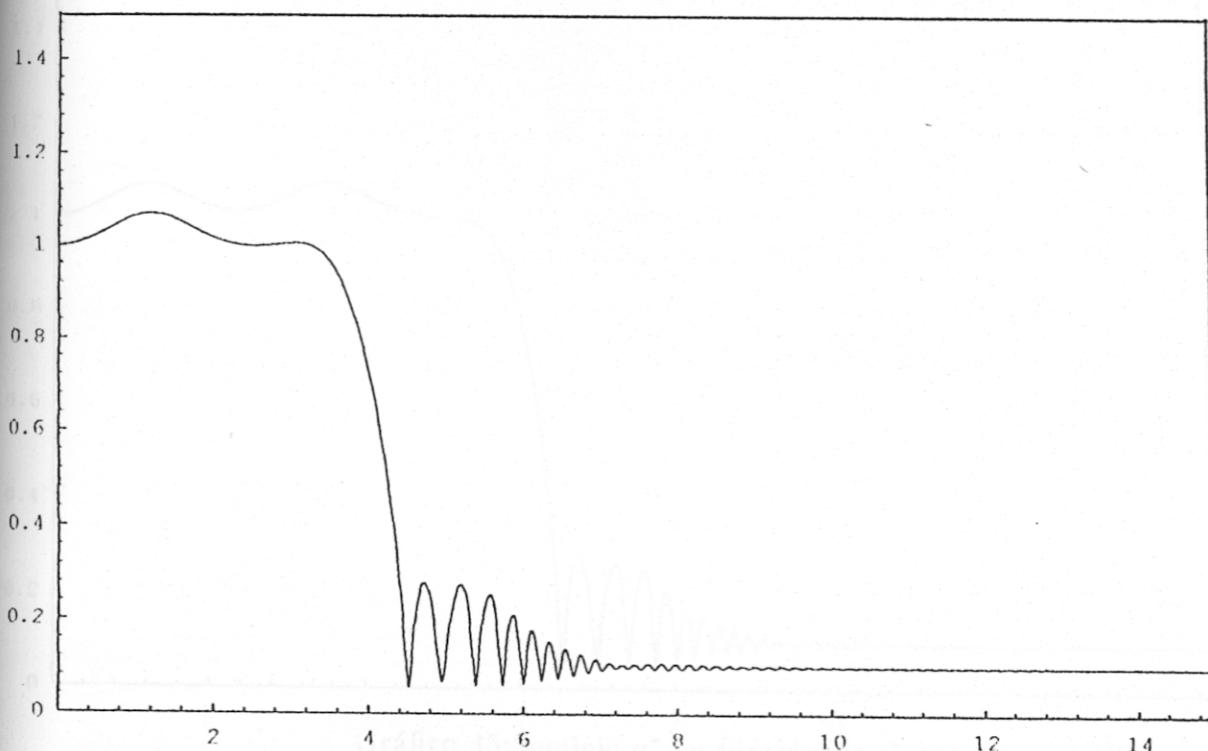


Gráfico 43: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_F^* = 1.1852$

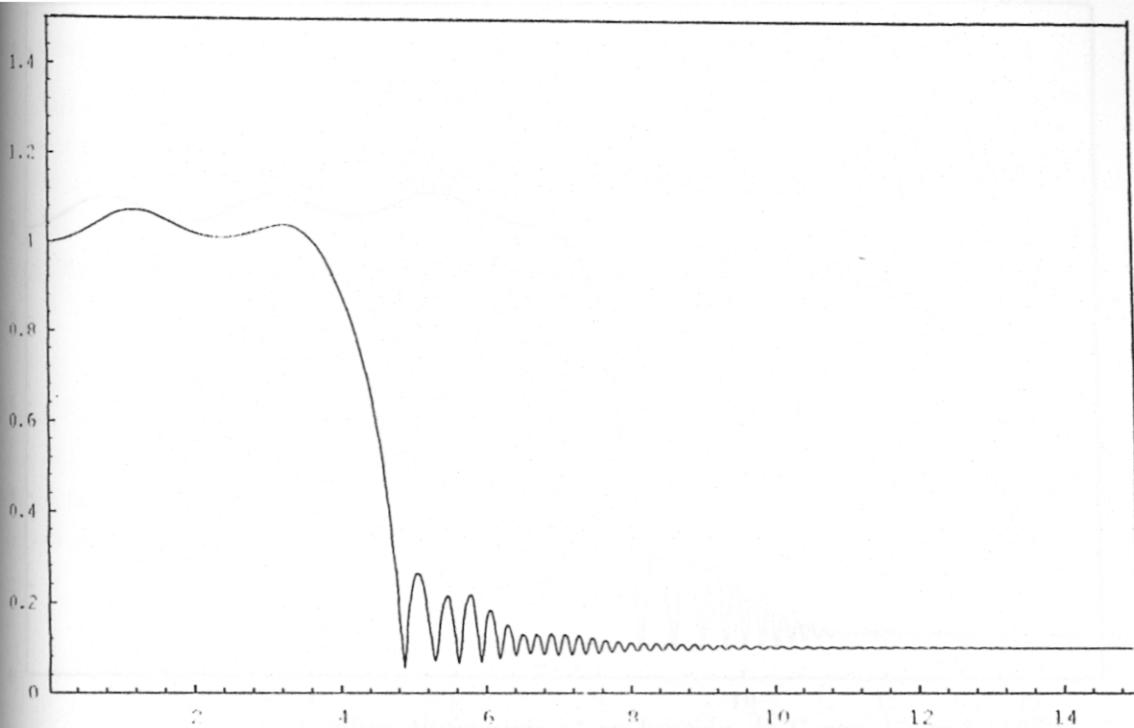


Gráfico 44: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{P^*} = 1.1854$

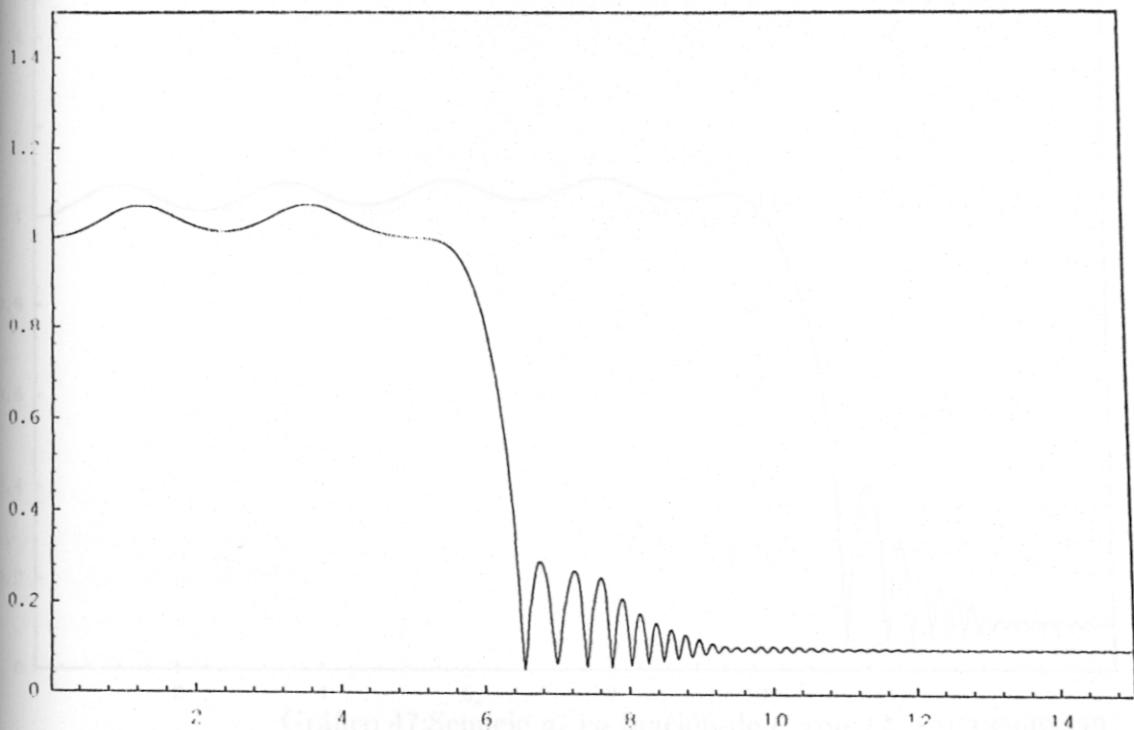


Gráfico 45: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{P^*} = 1.1856$

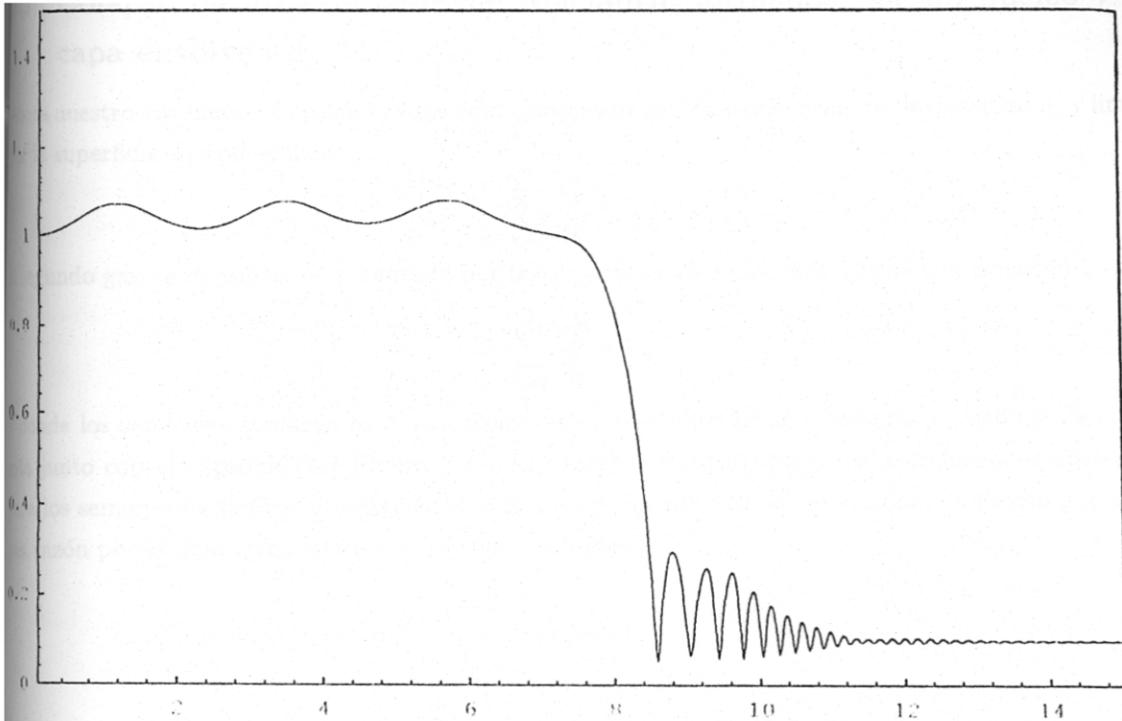


Gráfico 46: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{J^*}^* = 1.185608$

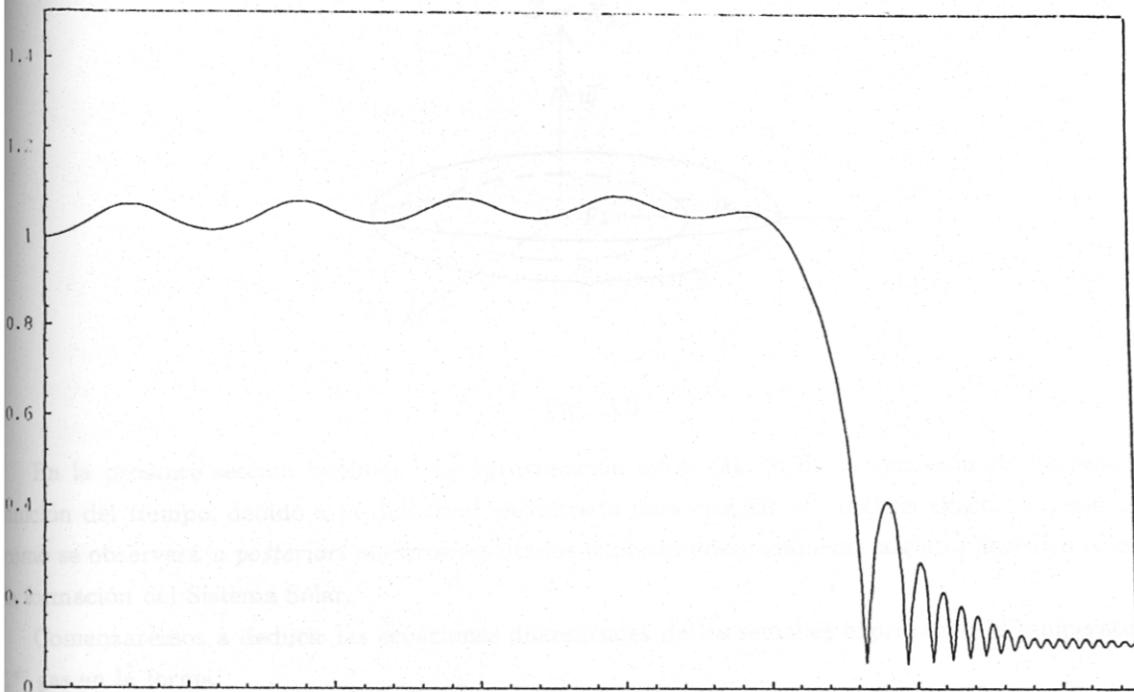


Gráfico 47: Semieje a_1^* en función de t^* con $L_{J^*}^* = 1.185608159$

3.5 Colapso de los esferoides de Maclaurin formados por un núcleo y una capa envolvente

Ahora nuestro sistema será un fluido elipsoidal compuesto por 2 gases el primero de densidad ρ_1 y limitado por la superficie S_1 con ecuación

$$\sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^2} = 1 ,$$

el segundo gas de densidad ρ_2 y limitado por las superficies S_1 y S_2 , esta última con ecuación

$$\sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{b_k^2} = 1 ,$$

y donde los semiejes satisfacen $b_k > a_k$. Como en el caso anterior se considera un sistema de ejes que rota junto con el elipsoide (ver Figura. 3.2). El proceso de construcción de las ecuaciones diferenciales para los semiejes es similar al caso considerado anteriormente, esto es del elipsoide formado por un solo gas, razón por la cual mencionaremos sólo los resultados.

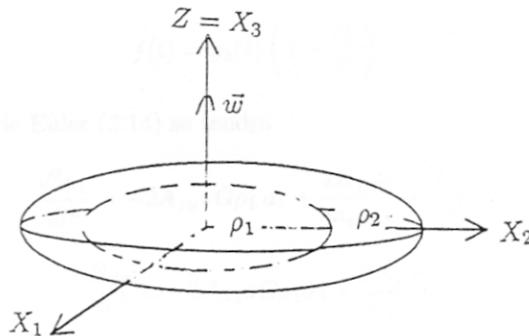


Fig. 3.2.

En la presente sección haremos una aproximación en el cálculo de la variación de los semiejes en función del tiempo, debido a la dificultad encontrada para realizar un análisis exacto. A pesar de esto como se observará *a posteriori* nuestros resultados explican adecuadamente algunos aspectos referidos a la formación del Sistema Solar.

Comenzaremos a deducir las ecuaciones diferenciales de los semiejes expresando la temperatura del 1^{er} gas en la forma

$$T(\mathbf{x}, t) = g_1(t) \left(1 - \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^2} \right) + f(t) , \quad (3.94)$$

notando que para los puntos con coordenada $\mathbf{x} \in S_1$ la expresión anterior se reduce a

$$T(\mathbf{x}, t) = f(t) , \quad (3.95)$$

es decir la función $f(t)$ se interpreta como la temperatura en la superficie de separación S_1 . Es claro que la temperatura en el centro debe ser mayor que en la superficie S_1 . Haciendo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en (3.95) obtenemos

$$T(0, t) = g_1(t) + f(t), \quad (3.96)$$

es decir la función g_1 nos da la diferencia de temperaturas entre el centro del elipsoide y la superficie S_1 . Las ecuaciones diferenciales de temperatura en el primer gas serán iguales al caso tratado en la sección anterior haciendo la salvedad que donde aparece el término T_c será reemplazado por el término $g_1(t) + f(t)$; así de la ecuación (3.2) se deduce

$$\frac{dg_1(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt} + 2 \frac{(g_1(t) + f(t))}{3} (2a_1^{-1} \frac{da_1}{dt} + a_3^{-1} \frac{da_3}{dt}) + \frac{4m_{p1}k_1(g_1(t) + f(t))}{3\rho_1 K_B} \left(\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) = 0. \quad (3.97)$$

Para la región donde está el segundo gas consideramos la temperatura

$$T(\mathbf{x}, t) = g_2(t) \left(1 - \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{b_k^2} \right). \quad (3.98)$$

Evaluando en el punto $P_1(a_1, 0, 0)$ se obtiene

$$T(a_1, 0, 0, t) = g_2(t) \left(1 - \frac{a_1^2}{b_1^2} \right). \quad (3.99)$$

Por continuidad de la temperatura en el punto P_1 , usando (3.94) y (3.99) se tiene que

$$f(t) = g_2(t) \left(1 - \frac{a_1^2}{b_1^2} \right). \quad (3.100)$$

También, de las ecuaciones de Euler (3.14) se tendrá

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = -2A_{1a} \pi G \rho_1 a_1 + \frac{2K_B g_1}{m_{p1} a_1} + \frac{L_{aF}^2}{a_1^3}, \quad (3.101)$$

$$\frac{d^2 a_3}{dt^2} = -2A_{3a} \pi G \rho_1 a_3 + \frac{2K_B g_1}{m_{p1} a_3}. \quad (3.102)$$

La aplicación de las ecuaciones de Euler al gas que envuelve el núcleo es bastante complicada por que se debe calcular el potencial gravitatorio de un elipsoide en puntos externos e internos, lo cual nos lleva a integrales elípticas con límites de integración que dependen del punto donde se desea conocer el potencial gravitatorio. En vez de analizar este gas limitado por las 2 superficies S_1 y S_2 consideramos en su lugar un sistema equivalente: un gas de forma elipsoidal que tiene una densidad promedio de los gases que ocupan un volumen V_2 limitado por S_2 . Luego estaríamos en el caso del elipsoide formado por un sólo gas, por lo tanto se tiene

$$\frac{d^2 b_1}{dt^2} = -2A_{1b} \pi G \rho_{pro} b_1 + \frac{2K_B G_b}{m_{p2} b_1} + \frac{L_{bF}^2}{b_1^3}, \quad (3.103)$$

$$\frac{d^2 b_3}{dt^2} = -2A_{3b} \pi G \rho_{pro} b_3 + \frac{2K_B G_b}{m_{p2} b_3}, \quad (3.104)$$

$$\frac{dg_2(t)}{dt} + \frac{2g_2(t)}{3} \left(2b_1^{-1} \frac{db_1}{dt} + b_3^{-1} \frac{db_3}{dt} \right) + \frac{4m_{p2} k_2 g_2(t)}{3\rho_2 K_B} \left(\frac{2}{b_1^2} + \frac{1}{b_3^2} \right) = 0, \quad (3.105)$$

con $g_2(t)$ como la temperatura en el centro del elipsoide equivalente considerado ¹.

Al efectuar el cambio de variables con las magnitudes adimensionales se obtiene

$$\frac{d^2 a_1^*}{dt^{*2}} = -2A_{1a}^* a_1^* + \frac{g_1^*}{a_1^*} + \frac{L_{Fa}^{*2}}{a_1^{*3}}, \quad (3.106)$$

$$\frac{d^2 a_3^*}{dt^{*2}} = -2A_{3b}^* a_3^* + \frac{g_1^*}{a_3^*}, \quad (3.107)$$

$$\frac{g_1(t)^*}{dt^*} + \frac{df(t)^*}{dt^*} = -2 \frac{(g_1(t)^* + f(t)^*)}{3} \left(\frac{2}{a_1^*} \frac{da_1^*}{dt^*} + \frac{1}{a_3^*} \frac{da_3^*}{dt^*} \right) - k_1^* (g_1^* + f(t)^*) \left(2a_3^* + \frac{a_1^{*2}}{a_3^*} \right), \quad (3.108)$$

$$f(t)^* = g_2^*(t) \left(1 - \frac{a_1^{*2}}{b_2^{*2}} \right), \quad (3.109)$$

$$\frac{d^2 b_1^*}{dt^{*2}} = -2A_{1b}^* b_1^* + \frac{g_2^*}{a_b^*} + \frac{L_{Fb}^{*2}}{b_1^{*3}}, \quad (3.110)$$

$$\frac{d^2 b_3^*}{dt^{*2}} = -2A_{3b}^* b_3^* + \frac{g_2^*}{b_3^*}, \quad (3.111)$$

$$\frac{dg_2(t)^*}{dt^*} = -\frac{2g_2(t)^*}{3} \left(\frac{2}{b_1^*} \frac{db_1^*}{dt^*} + \frac{1}{b_3^*} \frac{db_3^*}{dt^*} \right) - k_2^* g_2^* \left(2b_3^* + \frac{b_1^{*2}}{b_3^*} \right), \quad (3.112)$$

donde

$$L_{Fa}^{*2} \equiv \frac{a_1(0)w_o^2}{a_3(0)}, \quad (3.113)$$

$$L_{Fb}^{*2} \equiv \frac{b_1(0)w_o^2}{b_3(0)}, \quad (3.114)$$

Las definiciones de las magnitudes con asterisco son semejantes al caso tratado en la sección anterior. Dado que en el presente caso el número de ecuaciones diferenciales aumentó dejaremos de lado, por simplicidad, las ecuaciones para las densidades pues ellas no aparecen en las ecuaciones que gobiernan la evolución de los semiejes.

Para aplicar el algoritmo numérico en Lenguaje Pascal vamos a transformar las ecuaciones anteriores a un sistema de ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden, para conseguir esto realizamos los siguientes cambios de variables

$$a_1^* \equiv x_1, \quad (3.115)$$

$$a_3^* \equiv x_2, \quad (3.116)$$

$$\frac{da_1^*}{dt^*} \equiv x_3, \quad (3.117)$$

$$\frac{da_3^*}{dt^*} \equiv x_4, \quad (3.118)$$

$$g_1^* \equiv x_5, \quad (3.119)$$

$$f(t)^* \equiv x_6, \quad (3.120)$$

$$b_1^* \equiv x_7, \quad (3.121)$$

$$b_3^* \equiv x_8, \quad (3.122)$$

¹reconocemos que ésta parece ser una aproximación bastante grande, aún así la realizamos como un primer paso para una investigación posterior más rigurosa

$$\frac{db_1^*}{dt^*} \equiv x_9, \quad (3.123)$$

$$\frac{db_3^*}{dt^*} \equiv x_{10}, \quad (3.124)$$

$$g_2^* \equiv x_{11}. \quad (3.125)$$

Con estos cambios las ecuaciones diferenciales que queremos estudiar se transforman en

$$\frac{dx_1}{dt^*} = x_3, \quad (3.126)$$

$$\frac{dx_2}{dt^*} = x_4, \quad (3.127)$$

$$\frac{dx_3}{dt^*} = -2A_{1a}^*x_1 + \frac{x_5}{x_1} + \frac{I_{Fa}^*}{x_1^{*3}}, \quad (3.128)$$

$$\frac{dx_4}{dt^*} = -2A_{3a}^*x_2 + \frac{x_5}{x_2}, \quad (3.129)$$

$$\frac{dx_5}{dt^*} + \frac{dx_6}{dt^*} = -2\frac{x_5 + x_6}{3} \left(\frac{2x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_2} \right) - k_1^* \left(2x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} \right) x_5, \quad (3.130)$$

$$\frac{dx_7}{dt^*} = x_9, \quad (3.131)$$

$$\frac{dx_8}{dt^*} = x_{10}, \quad (3.132)$$

$$\frac{dx_9}{dt^*} = -2A_{1b}^*x_7 + \frac{x_5}{x_1} + \frac{I_{Fb}^*}{x_1^{*3}}, \quad (3.133)$$

$$\frac{dx_{10}}{dt^*} = -2A_{3b}^*x_8 + \frac{x_{11}}{x_7}, \quad (3.134)$$

$$\frac{dx_{11}}{dt^*} = -\frac{2x_{11}}{3} \left(\frac{2x_9}{x_7} + \frac{x_{10}}{x_8} \right) - k_2^* \left(2x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} \right) x_{11}. \quad (3.135)$$

Para completar este sistema de ecuaciones tomamos la derivada de (3.109) con respecto al tiempo t^* , y con los demás cambios de variable se obtiene

$$\frac{dx_6}{dt^*} = \frac{dx_{11}}{dt^*} \left(1 - \frac{x_1^2}{x_7^2} \right) - 2x_{11} \left(\frac{x_1x_3}{x_7^2} - \frac{x_1^2x_9}{x_7^3} \right), \quad (3.136)$$

Antes de aplicar el método de Runge-Kutta debemos llevar las ecuaciones a la forma

$$\frac{dx_k}{dt^*} = F(\mathbf{x}, t), \quad (3.137)$$

y para conseguirlo hacemos

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv -\frac{2x_{11}}{3} \left(\frac{2x_9}{x_7} + \frac{x_{10}}{x_8} \right) - k_2^* \left(2x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} \right) x_{11}, \quad (3.138)$$

$$\tilde{H}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{F}(\mathbf{x}) \left(1 - \frac{x_1^2}{x_7^2} \right) - 2x_{11} \left(\frac{x_1x_3}{x_7^2} - \frac{x_1^2x_9}{x_7^3} \right). \quad (3.139)$$

Con estas nuevas definiciones y poniendo en orden nuestro sistema de once ecuaciones diferenciales acopadas finalmente se obtiene

$$\frac{dx_1}{dt^*} = x_3, \quad (3.140)$$

$$\frac{dx_2}{dt^*} = x_4, \quad (3.141)$$

$$\frac{dx_3}{dt^*} = -2A_{1a}^*x_1 + \frac{x_5}{x_1} + \frac{L_{Fa}^{*2}}{x_1^{*3}}, \quad (3.142)$$

$$\frac{dx_4}{dt^*} = -2A_{3a}^*x_2 + \frac{x_5}{x_2}, \quad (3.143)$$

$$\frac{dx_5}{dt^*} = -2\frac{x_5 + x_6}{3}\left(\frac{2x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_2}\right) - k_1^*(2x_2 + \frac{x_1^2}{x_2})x_5 - \tilde{H}(\mathbf{x}), \quad (3.144)$$

$$\frac{dx_6}{dt^*} = \tilde{H}(\mathbf{x}), \quad (3.145)$$

$$\frac{dx_7}{dt^*} = x_9, \quad (3.146)$$

$$\frac{dx_8}{dt^*} = x_{10}, \quad (3.147)$$

$$\frac{dx_9}{dt^*} = -2A_{1b}^*x_7 + \frac{x_5}{x_1} + \frac{L_{Fb}^{*2}}{x_1^{*3}}, \quad (3.148)$$

$$\frac{dx_{10}}{dt^*} = -2A_{3b}^*x_8 + \frac{x_{11}}{x_7}, \quad (3.149)$$

$$\frac{dx_{11}}{dt^*} = \tilde{F}(\mathbf{x}). \quad (3.150)$$

Después de probar con distintos valores numéricos para los parámetros y condiciones iniciales, encontramos varios resultados semejantes, uno de los cuales será mostrado aquí. Los valores numéricos de los parámetros y las condiciones iniciales que usamos son

$$a_1^* = 0.1, a_3^* = 0.095, b_1^* = 2, b_3^* = 1.9,$$

$$\frac{da_1^*}{dt^*}(0) = 0, \frac{da_3^*}{dt^*}(0) = 0,$$

$$\frac{db_1^*}{dt^*}(0) = 0, \frac{db_3^*}{dt^*}(0) = 0,$$

$$g_1^*(0) = 1, f^*(0) = 1, g_2^*(0) = 2, k_1^* = 1, k_2^* = 2,$$

$$L_{Fa}^{*2} = 1, L_{Fb}^{*2} = 1.$$

A continuación se dan comentarios de los gráficos más importantes obtenidos mediante la resolución numérica del sistema ecuaciones diferenciales acopladas y usando las condiciones iniciales y parámetros arriba mencionados. En los gráficos 48 y 49 notamos que los semiejes a_1 , a_3 decrecen oscilando al pasar el tiempo, para luego tomar valores constantes. Se observa que la masa gaseosa interna colapsa hasta convertirse prácticamente en un esfera de aproximadamente $1/7$ de las dimensiones iniciales. En estos gráficos el intervalo de tiempo tomado fué menor, con respecto a los otros casos, para poder observar mejor las oscilaciones. En los gráficos 50 y 51 se muestra la variación de los semiejes en función del tiempo para un intervalo de tiempo mayor, como se observa los semiejes permanecen constantes.

En el gráfico 52 se muestra el gráfico a_3^* versus a_1^* , en donde se nota que el colapso es suave en los primeros instantes. Este fenómeno también se nota en el gráfico 53, donde se puede apreciar el cambio de estado consecutivo del elipsoide interno –de prolato a oblato– para finalmente estabilizarse como una esfera. Con

respecto al comportamiento de la capa gaseosa envolvente se observa en el gráfico 54 que la superficie externa S_2 se expande rápidamente. Además se tiene que al final de $t^* = 10$ el semieje b_1 es mayor que b_3 invirtiendo la situación inicial impuesta por las condiciones iniciales. Estas ideas se confirman en el gráfico 55 en donde el semieje b_3 es mucho mayor durante un cierto intervalo de t^* para luego decrecer y terminar siendo menor que b_1 . Es necesario mencionar que se disminuyó el paso de 0.0005 (usado en el caso anterior) a 0.0001 para no disminuir la precisión de los resultados ante el incremento del número de ecuaciones. Esto implica que los cálculos se realizaron en forma más lenta y por esta razón no nos animamos a realizar simulaciones para intervalos de tiempo excesivamente grandes.

Conclusiones

Durante el cambio de estado de la superficie externa de *prolato* a *oblato*, el elipsoide interno colapsa hasta ser estable, mientras que la superficie externa se desintegra como envoltura del núcleo, pudiendo convertirse en un *halo* o en un *disco proto-planetario* alrededor del núcleo. Esto nos permite suponer que nuestros resultados son aplicables –por lo menos cualitativamente– al estudio sobre la formación de un sistema estrella, +, planetas, a semejanza de lo que se supone parece haber ocurrido con nuestro Sistema Solar.

Resumiendo, el modelo aquí considerado tiene las siguientes características:

Se trata de un sistema formado por 2 gases: uno interno y una capa envolvente, ambos de densidad uniforme. Aplicando la teoría desarrollada observamos que la parte interna colapsa formando una estrella con simetría casi esférica, la cual según nuestros resultados numéricos es estable. La parte externa se expande y se desintegra, con el tiempo la materia de esta capa se depositará en el plano perpendicular al eje de rotación de la estrella dando origen a un disco proto-planetario (y/o eventualmente a un halo difuso de materia). En conclusión, este modelo es consistente para predecir la formación de un núcleo estelar de un sistema planetario y del disco de materia alrededor de él que dará origen a los planetas.

Así consideramos que este modelo puede ser tomado como una primera aproximación para analizar con más detalle este tipo de fenómenos naturales. Confiamos en que nuestros cálculos y resultados servirán como base para estudios posteriores en los que se considere modelos más realistas sobre la formación de sistemas planetarios a partir de nubes gaseosas proto-estelares.

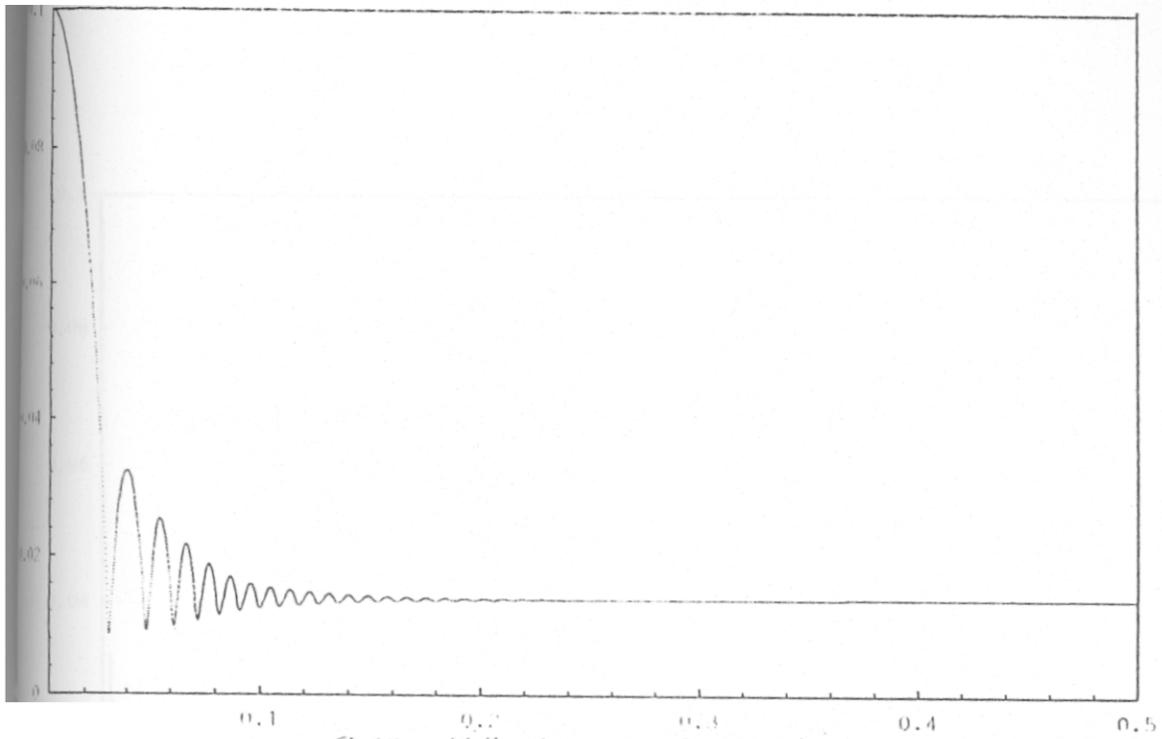


Gráfico 18: Semieje a_1^* en función de t^*

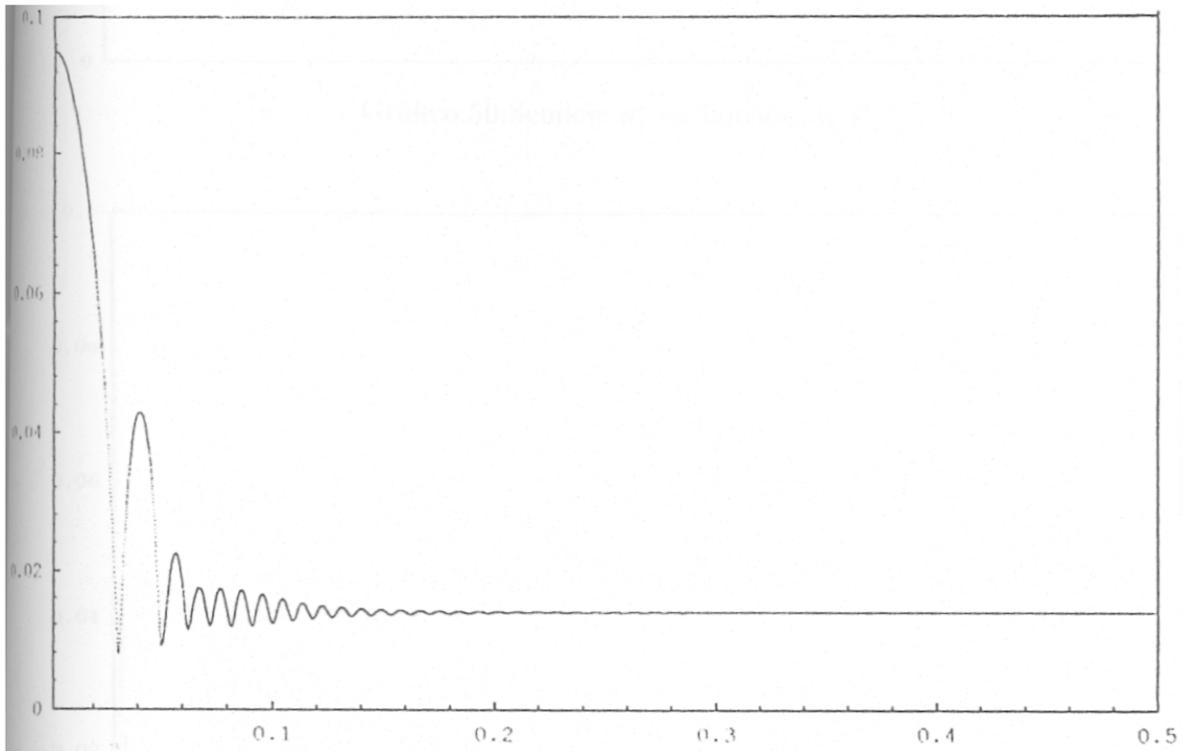
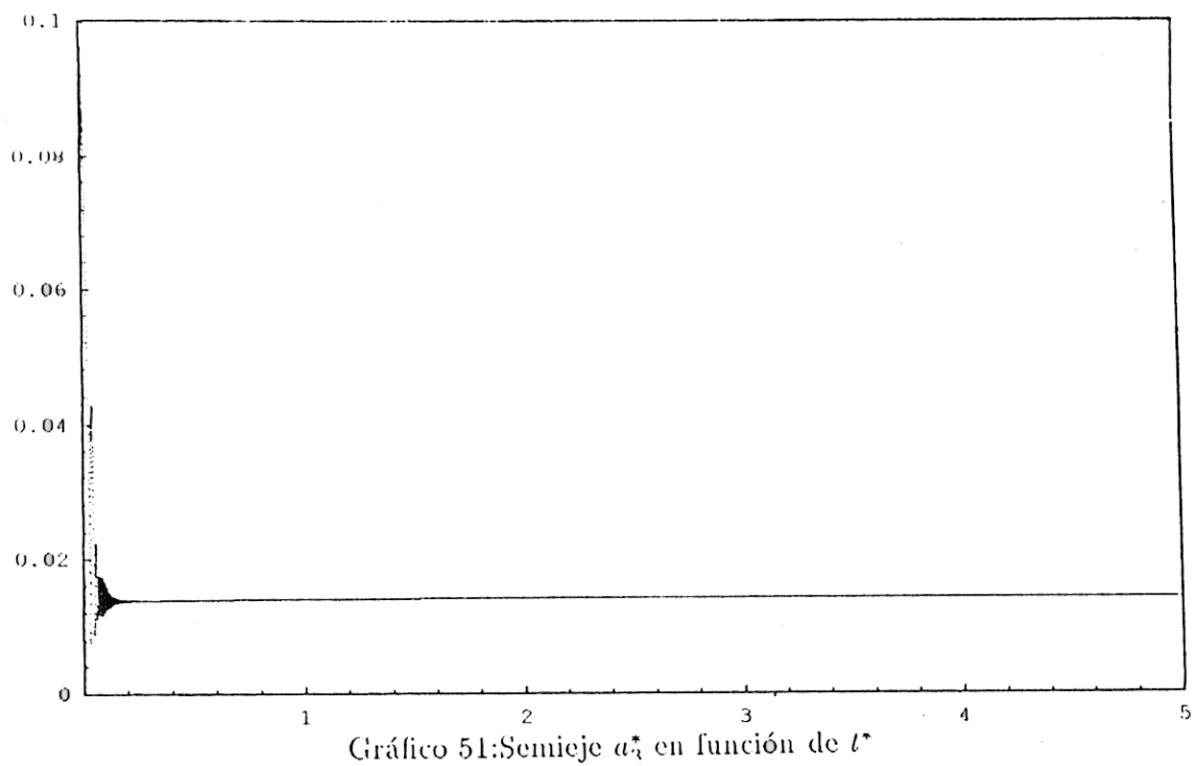
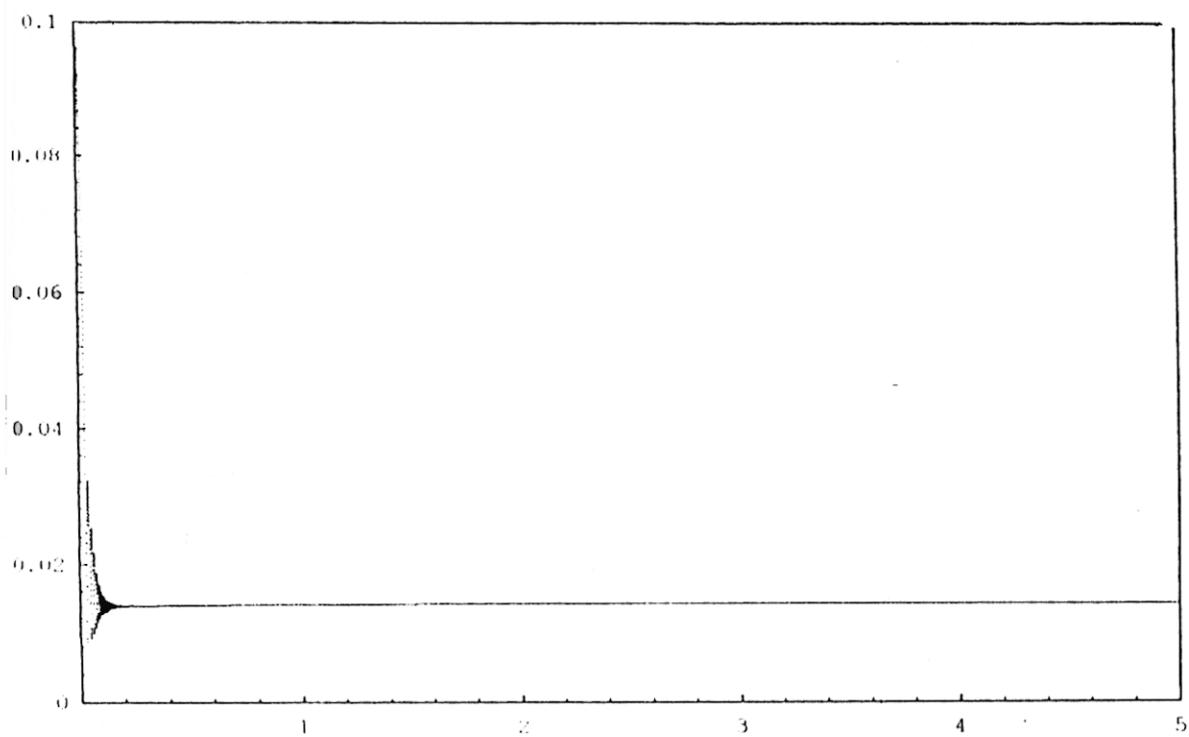


Gráfico 19: Semieje a_3^* en función de t^*



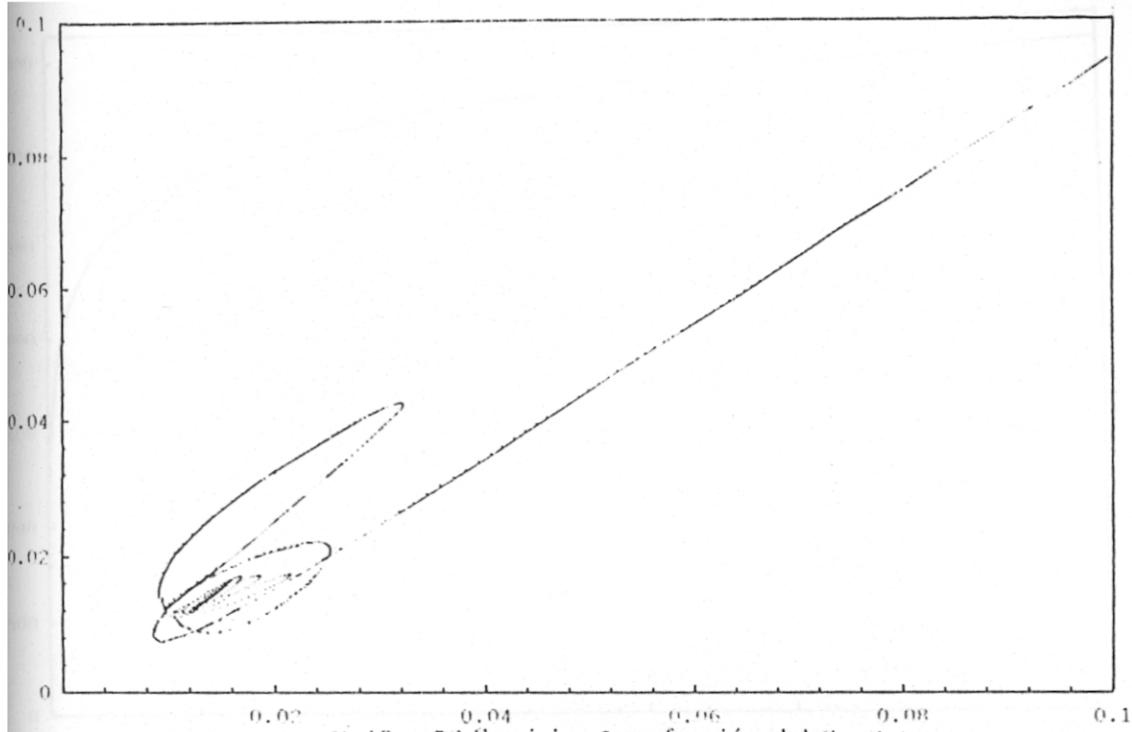


Gráfico 52: Semieje a_3 en función del Semieje a_1

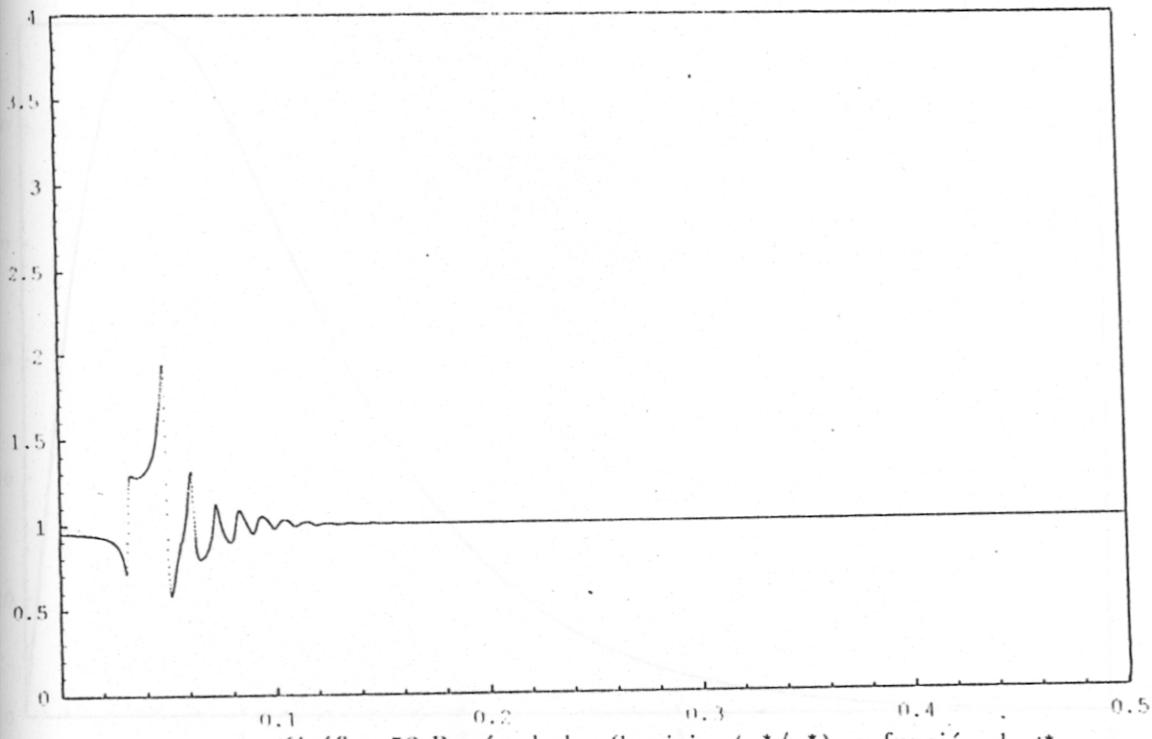


Gráfico 53: Razón de los Semiejes (a_3/a_1) en función de t^*

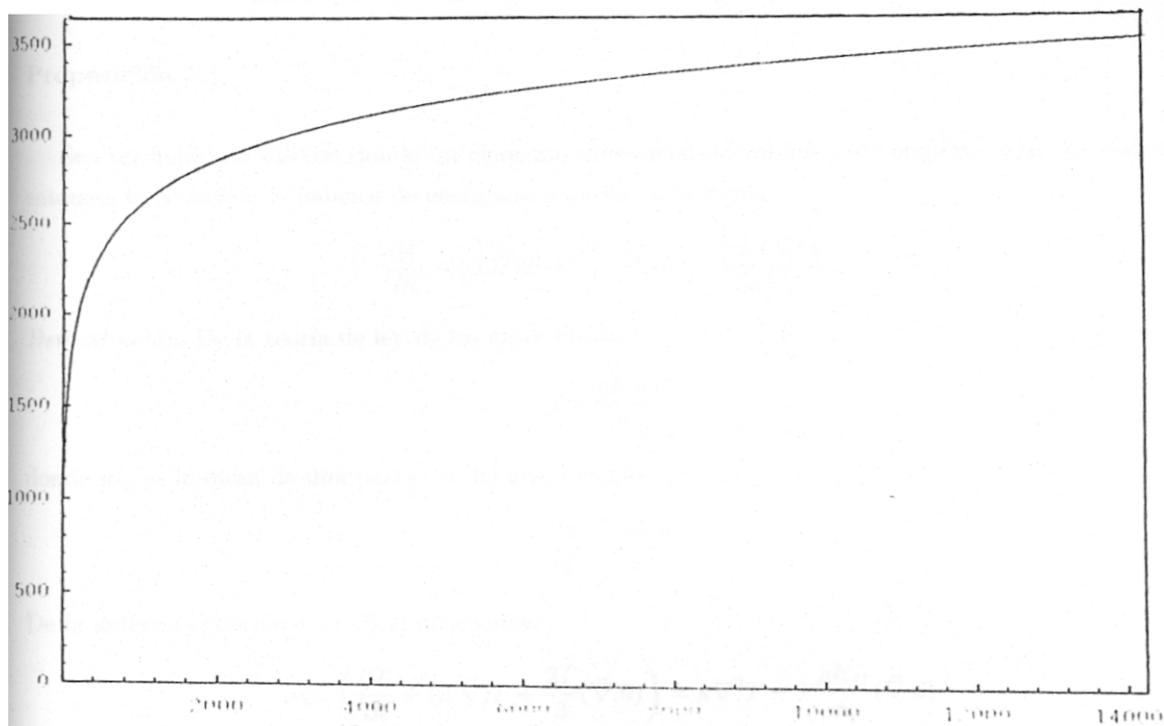


Gráfico 54: Semieje b_3^* en función del Semieje b_1^*

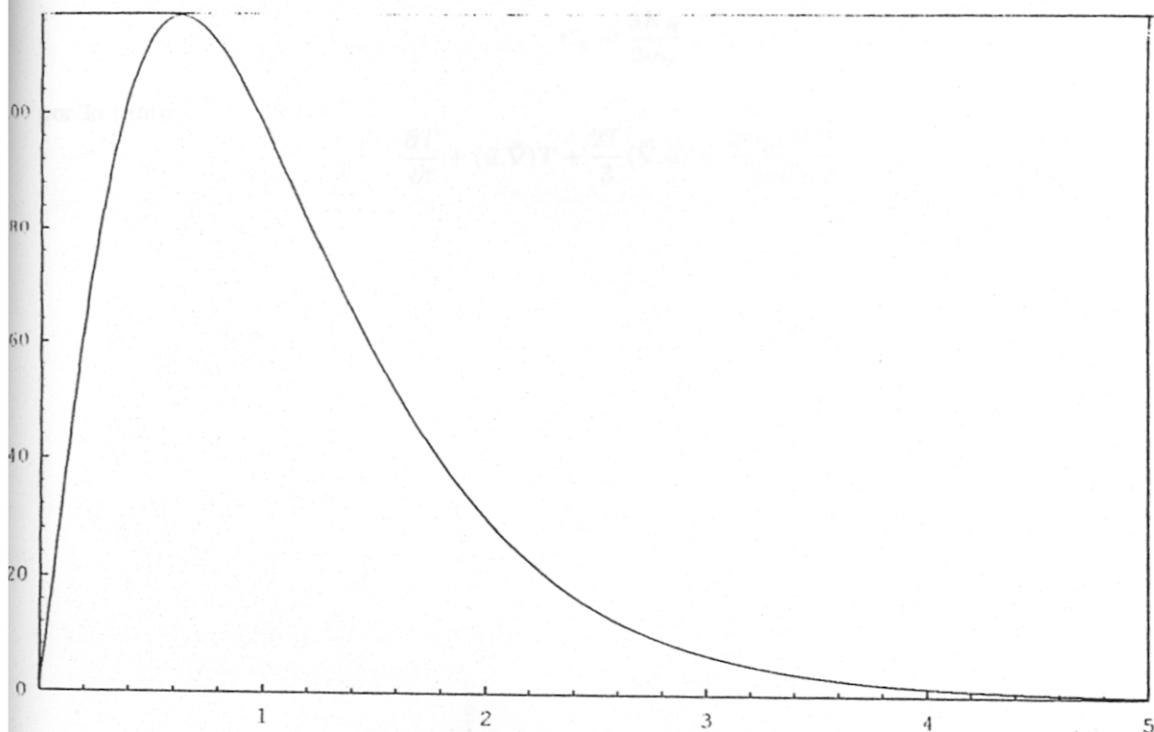


Gráfico 55: Semieje (b_3^*/b_1^*) en función de t^*

APENDICE DEL CAPITULO 3

Proposición 3.1

Sea un fluido no viscoso donde un elemento diferencial de volumen se comporta como un gas ideal entonces la ecuación de balance de energía se expresa en la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T + \frac{2T}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{2m_p k \nabla^2 T}{3\rho K_B} .$$

Demostración. De la teoría de ley de los gases ideales

$$p = \frac{\rho K_B T}{m_p} ,$$

donde m_p es la masa de una partícula del gas, tenemos que

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\rho K_B}{m_p} . \quad (3.151)$$

De la anterior ecuación y de (3.1) obtenemos

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T + \frac{2T}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) = k \nabla^2 T - T \frac{\rho K_B}{m_p} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) . \quad (3.152)$$

Por la teoría de los gases ideales también tenemos

$$C_v = \frac{3K_B}{2m_p} , \quad (3.153)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T + \frac{2T}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{2m_p k \nabla^2 T}{3\rho K_B} . \quad (3.154)$$

Proposición 3.2

Sea un fluido no viscoso donde a pesar que hay movimiento de sus partículas componentes, dicho movimiento se encuentra siempre limitado por un superficie elipsoidal rotante de semiejes variables. Si además la relación entre las componentes de la velocidad y las coordenadas es lineal entonces

$$u_1 = \frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 + a_1^2 \lambda_2 x_3 ,$$

$$u_2 = \frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 - a_2^2 \lambda_1 x_3 ,$$

$$u_3 = \frac{x_3}{a_3} \frac{da_3}{dt} + a_3^2 \lambda_1 x_2 - a_3^2 \lambda_2 x_1 .$$

Demostración. Supongamos que las componentes de la velocidad (u_k) del fluido en el Punto P de las coordenadas x_k están relacionadas por

$$u_1 = B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3 , \quad (3.155)$$

$$u_2 = B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + B_{23}x_3 , \quad (3.156)$$

$$u_3 = B_{31}x_1 + B_{32}x_2 + B_{33}x_3 , \quad (3.157)$$

donde $B_{ij} = B_{ij}(t)$, son funciones incognitas. Para encontrar dichas funciones consideremos un diferencial de masa del gas que está en la superficie del elipsoide, entonces su trayectoria es la curva C descrita por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ donde las coordenadas \mathbf{x} satisfacen

$$\sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2(t)}{a_k^2(t)} = 1 , \quad (3.158)$$

que es la ecuación del elipsoide que contiene al fluido. Luego usando el cálculo diferencial hallamos

$$\sum_{k=1}^3 x_k a_k^{-2} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^3 a_k^{-3} x_k^2 \frac{da_k}{dt} , \quad (3.159)$$

como $dx_k/dt = u_k$, luego la anterior ecuación se transforma en

$$\sum_{k=1}^3 x_k a_k^{-2} u_k = \sum_{k=1}^3 a_k^{-3} x_k^2 \frac{da_k}{dt} . \quad (3.160)$$

Desarrollando ambas series tenemos

$$\frac{x_1 u_1}{a_1^2} + \frac{x_2 u_2}{a_2^2} + \frac{x_3 u_3}{a_3^2} = \frac{x_1^2}{a_1^3} \frac{da_1}{dt} + \frac{x_2^2}{a_2^3} \frac{da_2}{dt} + \frac{x_3^2}{a_3^3} \frac{da_3}{dt} . \quad (3.161)$$

Como las ecuaciones (3.155), (3.156) y (3.157) son válidas para todo punto del gas podemos reemplazar en la ecuación (3.161) obteniendo

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{a_1^2} (B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3) + \frac{x_2}{a_2^2} (B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + B_{23}x_3) \\ & + \frac{x_3}{a_3^2} (B_{31}x_1 + B_{32}x_2 + B_{33}x_3) = \frac{x_1^2}{a_1^3} \frac{da_1}{dt} + \frac{x_2^2}{a_2^3} \frac{da_2}{dt} + \frac{x_3^2}{a_3^3} \frac{da_3}{dt} . \end{aligned} \quad (3.162)$$

Y agrupando términos convenientemente resulta

$$\frac{B_{11}x_1^2}{a_1^2} + \left(\frac{B_{12}}{a_1^2} + \frac{B_{21}}{a_2^2}\right)x_1x_2 + \left(\frac{B_{13}}{a_1^2} + \frac{B_{31}}{a_3^2}\right)x_1x_3 + \frac{B_{22}x_2^2}{a_2^2} + \left(\frac{B_{23}}{a_2^2} + \frac{B_{32}}{a_3^2}\right)x_2x_3 + \frac{B_{33}x_3^2}{a_3^2} = \frac{x_1^2}{a_1^3} \frac{da_1}{dt} + \frac{x_2^2}{a_2^3} \frac{da_2}{dt} + \frac{x_3^2}{a_3^3} \frac{da_3}{dt} \quad (3.163)$$

Es fácil comprobar que una de las soluciones $B_{ij}(t)$ que satisface la anterior ecuación es

$$B_{kk} = \frac{1}{a_k} \frac{da_k}{dt}, \quad (3.164)$$

con $k = 1, 2, 3$

$$B_{12} = -a_1^2 \lambda_3, \quad (3.165)$$

$$B_{13} = a_1^2 \lambda_2, \quad (3.166)$$

$$B_{23} = -a_2^2 \lambda_1, \quad (3.167)$$

$$B_{21} = a_2^2 \lambda_3, \quad (3.168)$$

$$B_{31} = -a_3^2 \lambda_2, \quad (3.169)$$

$$B_{32} = a_3^2 \lambda_1, \quad (3.170)$$

con $\lambda_k = \lambda_k(t)$. Podemos hallar otras soluciones pero con la anterior es suficiente para el objetivo del presente trabajo. Reemplazando las funciones B_{ij} en (3.155), (3.156) y (3.157) se obtiene finalmente

$$u_1 = \frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 + a_1^2 \lambda_2 x_3, \quad (3.171)$$

$$u_2 = \frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 - a_2^2 \lambda_1 x_3, \quad (3.172)$$

$$u_3 = \frac{x_3}{a_3} \frac{da_3}{dt} + a_3^2 \lambda_1 x_2 - a_3^2 \lambda_2 x_1. \quad (3.173)$$

Momento angular del Elipsoide Gaseoso

El momentum angular para un diferencial de masa

$$d\vec{L} = dm \vec{r} \times \vec{v} ,$$

luego el momentum angular para todo el fluido será

$$\vec{L} = \int_R \rho (\vec{r} \times \vec{v}) dx dy dz .$$

Nos conviene introducir las coordenadas del sistema rotante de referencia ,para lo cual usamos la relación $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}$, luego

$$\vec{L} = \int_R \rho [\vec{r} \times (\vec{u} + \vec{w} \times \vec{r})] dx dy dz , \quad (3.174)$$

y desdoblado

$$\vec{L} = \int_R \rho (\vec{r} \times \vec{u}) dx dy dz + \int_R \rho [\vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r})] dx dy dz , \quad (3.175)$$

calcularemos separadamente cada término de la igualdad anterior. Sabemos que

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 ,$$

por lo tanto

$$\vec{w} \times \vec{r} = [-x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2] w , \quad (3.176)$$

con este resultado hallamos

$$\vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = w [-x_1 x_3 \vec{e}_1 - x_2 x_3 \vec{e}_2 + (x_1^2 + x_2^2) \vec{e}_3] . \quad (3.177)$$

Por otra parte como estamos cambiando de variable debemos expresar el diferencial de volumen en las coordenadas x_1, x_2, x_3 . Para esto usamos la transformación de coordenadas

$$x = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta ,$$

$$y = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta ,$$

$$z = x_3 .$$

donde $\theta = \int w(t) dt$, y calculando su respectivo Jacobiano encontramos $dx dy dz = dx_1 dx_2 dx_3$ luego tenemos que la integral

$$\int_R \rho \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) dx dy dz = w \int_R \rho [-x_1 x_3 \vec{e}_1 - x_2 x_3 \vec{e}_2 + (x_1^2 + x_2^2) \vec{e}_3] dx_1 dx_2 dx_3 , \quad (3.178)$$

de lo anterior

$$\begin{aligned} \int_R \rho \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) dx dy dz &= w \vec{e}_1 \int_R \rho (-x_1 x_3) dx_1 dx_2 dx_3 - w \vec{e}_2 \int_R \rho (x_2 x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &+ w \vec{e}_3 \int_R \rho (x_1^2) dx_1 dx_2 dx_3 + w \vec{e}_3 \int_R \rho (x_2^2) dx_1 dx_2 dx_3 . \end{aligned} \quad (3.179)$$

Usando ahora la expresión (1.6) en esta última ecuación se tiene

$$\int_R \rho \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) dx dy dz = -I_{13} w \vec{e}_1 - I_{23} w \vec{e}_2 + I_{11} w \vec{e}_3 + I_{22} w \vec{e}_3 . \quad (3.180)$$

Para un elipsoide homogéneo de masa M sabemos que ([1], pag. 57)

$$I_{ij} = \frac{1}{5} M a_i^2 \delta_{ij} , \quad (3.181)$$

y usando (3.181) en (3.180) obtenemos

$$\int_R \rho \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) dx dy dz = \frac{wM}{5} (a_1^2 + a_2^2) \vec{e}_3 . \quad (3.182)$$

Notemos que

$$\vec{r} \times \vec{u} = (x_2 u_3 - u_2 x_3) \vec{e}_1 - (x_1 u_3 - u_1 x_3) \vec{e}_2 + (x_1 u_2 - u_1 x_2) \vec{e}_3 , \quad (3.183)$$

así reemplazando (3.171), (3.172) y (3.173) en (3.183) se consigue mostrar que

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{u} = & [x_2 \left(\frac{x_3}{a_3} \frac{da_3}{dt} + a_3^2 \lambda_1 x_2 - a_3^2 \lambda_2 x_1 \right) - x_3 \left(\frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 - a_2^2 \lambda_1 x_3 \right)] \vec{e}_1 \\ & - [x_1 \left(\frac{x_3}{a_3} \frac{da_3}{dt} + a_3^2 \lambda_1 x_2 - a_3^2 \lambda_2 x_1 \right) - \left(\frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 + a_1^2 \lambda_2 x_3 \right) x_3] \vec{e}_2 \\ & + [x_1 \left(\frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 \right) - a_2^2 \lambda_1 x_3 - \left(\frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 + a_1^2 \lambda_2 x_3 \right) x_2] \vec{e}_3 . \end{aligned}$$

Con la expresión anterior ya podemos calcular $\int_R \rho (\vec{r} \times \vec{u}) dx dy dz$, de esta manera siguiendo el procedimiento hecho al inferir (3.182) se obtiene

$$\int_V \rho (\vec{r} \times \vec{u}) dx dy dz = \frac{2M}{5} [a_2^2 a_3^2 \lambda_1 \vec{e}_1 + a_1^2 a_3^2 \lambda_2 \vec{e}_2 + a_1^2 a_2^2 \lambda_3 \vec{e}_3] . \quad (3.184)$$

Usando ahora las relaciones (3.182) y (3.184) en (3.175) encontramos

$$\vec{L} = \frac{2M}{5} [a_2^2 a_3^2 \lambda_1 \vec{e}_1 + a_1^2 a_3^2 \lambda_2 \vec{e}_2 + a_1^2 a_2^2 \lambda_3 \vec{e}_3] + \frac{wM}{5} (a_1^2 + a_2^2) \vec{e}_3 . \quad (3.185)$$

Como el sistema gaseoso está aislado se conserva el momento angular y como inicialmente el sistema rota alrededor del eje Z , entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, luego la relación anterior se reduce a

$$\vec{L} = \frac{2M}{5} (a_1^2 a_2^2 \lambda_3 \vec{e}_3) + \frac{wM}{5} (a_1^2 + a_2^2) \vec{e}_3 . \quad (3.186)$$

Consideremos ahora el cuadrado de \vec{L} esto es $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L}$

$$L^2 = \frac{M^2}{25} [2a_1^2 a_2^2 \lambda_3 + w(a_1^2 + a_2^2)]^2 , \quad (3.187)$$

y como

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 a_3 ,$$

finalmente reemplazamos este valor de M en (3.187) para obtener

$$L^2 = \left(\frac{4\pi}{15} a_1 a_2 a_3 \right)^2 \rho^2 [2a_1^2 a_2^2 \lambda_3 + w(a_1^2 + a_2^2)]^2 . \quad (3.188)$$

Resistencia del Vórtice de un Fluido

Para cualquier fluido se define la *Resistencia del Vórtice* como la integral de línea

$$C_o \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}, \quad (3.189)$$

donde \vec{v} es la velocidad que tiene el fluido en un punto P con vector posición \vec{r} según un sistema referencial inercial XYZ . La resistencia del vórtice de un fluido es un concepto importante porque si el fluido está sometido a fuerzas conservativas, y la curva de integración es fija, se demuestra que C_o se conserva (ver [4]). Pero como se verá más adelante se consideran curvas que cambian con el tiempo entonces no necesariamente es una constante. Transformaremos la integral de línea en la expresión anterior en una integral de superficie. Sea \vec{u} la velocidad según sistema referencial no inercial $X_1X_2X_3$, con origen común al sistema XYZ y donde el eje X_3 coincide con el eje Z , y donde el sistema $X_1X_2X_3$ rota con velocidad angular

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \omega \vec{e}_3. \quad (3.190)$$

Por otra parte tenemos que

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.191)$$

Reemplazando (3.191) en (3.189) se tiene

$$C_o = \frac{1}{2\pi} \oint_C (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (3.192)$$

de donde obtenemos

$$2\pi C_o = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_C (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.193)$$

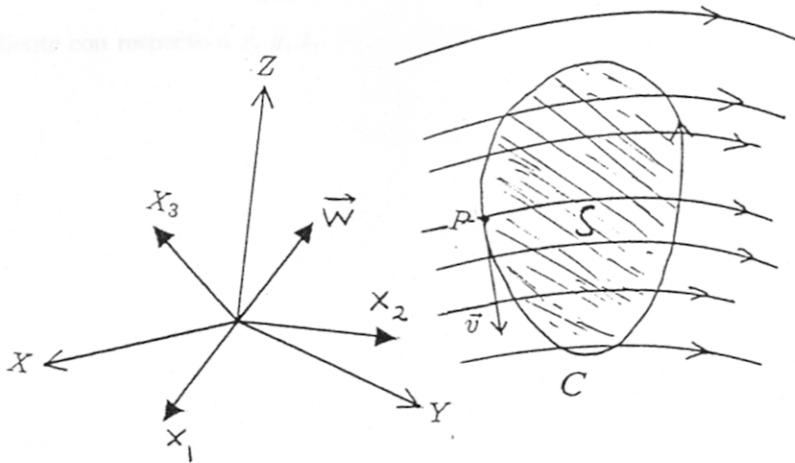


Fig. 3.3.

La velocidad \vec{u} expresada en las componentes tanto en la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ y como en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (ver fig. 3.3), es

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3. \quad (3.194)$$

dado que los modulos de los vectores \vec{u} y $d\vec{r}$ son invariantes bajo una rotación, esto significa que el producto escalar $\vec{u}.d\vec{r}$ no depende de la base, por lo tanto

$$\oint_C \vec{u}.d\vec{r} = \oint_C (u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z).d\vec{r} = \oint_C (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3).d\vec{r}, \quad (3.195)$$

y analizando solo las componentes u_k obtenemos

$$\oint_C \vec{u}.d\vec{r} = \oint_C \left(\sum_{k=1}^3 u_k \vec{e}_k \right).d\vec{r}. \quad (3.196)$$

Aplicando ahora el teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{u}.d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \left(\sum_{k=1}^3 u_k \vec{e}_k \right).d\vec{S}, \quad (3.197)$$

donde las derivadas parciales se toman con respecto a las variables x_k , es decir

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{e}_k,$$

y usando (3.197) en (3.193) se obtiene

$$2\pi C_o = \int_S \vec{\nabla} \times \left(\sum_{k=1}^3 u_k \vec{e}_k \right).d\vec{S} + \oint_C \vec{w} \times \vec{r}.d\vec{r}. \quad (3.198)$$

Aplicando ahora el teorema de Stokes al segundo término del lado derecho de la igualdad anterior tenemos finalmente

$$2\pi C_o = \int_S \vec{\nabla} \times \left(\sum_{k=1}^3 u_k \vec{e}_k \right).d\vec{S} + \int_S \vec{\nabla}_r \times (\vec{w} \times \vec{r}).d\vec{S}, \quad (3.199)$$

donde $\vec{\nabla}_r$ es el gradiente con respecto a x, y, z .

Proposición 3.3

Sea un fluido que satisface las condiciones de la Proposición 3.1 entonces la expresión

$$\lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1a_2 + 2wa_1a_2$$

está relacionado con vórtices.

demostración. En la pag. 73 hemos demostrado que:

$$u_1 = \frac{x_1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - a_1^2 \lambda_3 x_2 + a_1^2 \lambda_2 x_3, \quad (3.200)$$

$$u_2 = \frac{x_2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \lambda_3 x_1 - a_2^2 \lambda_1 x_3, \quad (3.201)$$

$$u_3 = \frac{x_3}{a_3} \frac{da_3}{dt} + a_3^2 \lambda_1 x_2 - a_3^2 \lambda_2 x_1. \quad (3.202)$$

Calculemos ahora

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \lambda_1(a_3^2 + a_2^2)\vec{e}_1 + \lambda_2(a_1^2 + a_3^2)\vec{e}_2 + \lambda_3(a_2^2 + a_1^2)\vec{e}_3, \quad (3.203)$$

luego

$$\int_S \vec{\nabla} \times \left(\sum_{k=1}^3 u_k \vec{e}_k \right) \cdot d\vec{S} = \int_S [\lambda_1(a_3^2 + a_2^2)\vec{e}_1 + \lambda_2(a_1^2 + a_3^2)\vec{e}_2 + \lambda_3(a_2^2 + a_1^2)\vec{e}_3] \cdot d\vec{S}. \quad (3.204)$$

Calculemos por otro lado

$$\int_S \vec{\nabla}_r \times (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot d\vec{S},$$

donde $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ y $\vec{w} = w\vec{e}_z$. Hallando el producto vectorial

$$\vec{w} \times \vec{r} = -y w \vec{e}_x + x w \vec{e}_y, \quad (3.205)$$

y luego el rotacional

$$\vec{\nabla}_r \times (\vec{w} \times \vec{r}) = 2w\vec{e}_z,$$

obtenemos la integral

$$\int_S \vec{\nabla}_r \times (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot d\vec{S} = 2w \int_S \vec{e}_z \cdot d\vec{S}. \quad (3.206)$$

Reemplazando (3.204) y (3.206) en (3.199) se obtiene

$$2\pi C_o = \int_S [\lambda_1(a_3^2 + a_2^2)\vec{e}_1 + \lambda_2(a_1^2 + a_3^2)\vec{e}_2 + \lambda_3(a_2^2 + a_1^2)\vec{e}_3] \cdot d\vec{S} + 2w \int_S \vec{e}_z \cdot d\vec{S}, \quad (3.207)$$

y dado que a_k y λ_k dependen solo del tiempo, y además $\vec{e}_z = \vec{e}_3$, luego

$$2\pi C_o = [\lambda_1(a_3^2 + a_2^2)\vec{e}_1 + \lambda_2(a_1^2 + a_3^2)\vec{e}_2 + \lambda_3(a_2^2 + a_1^2)\vec{e}_3] \cdot \int_S d\vec{S} + 2w \int_S \vec{e}_3 \cdot d\vec{S}. \quad (3.208)$$

Como la superficie es arbitraria hacemos $S = S_1$, donde S_1 es la superficie limitada por la elipse

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

luego $d\vec{S} = dx_1 dx_2 \vec{e}_3$ que al ser reemplazando en (3.208) se obtiene luego de simplificar

$$2\pi C_{1o} = \lambda_3(a_1^2 + a_2^2) \int_S dx_1 dx_2 + 2w \int_S dx_1 dx_2, \quad (3.209)$$

donde hemos denotado por C_{1o} la resistencia del vórtice correspondiente a la superficie $S = S_1$. Por otra parte tenemos que $\int_S dx_1 dx_2 = Area(S_1) = \pi a_1 a_2$, luego de la relación anterior

$$2\pi C_{1o} = \lambda_3(a_1^2 + a_2^2)\pi a_1 a_2 + 2w\pi a_1 a_2, \quad (3.210)$$

y elevando al cuadrado resulta

$$4C_{1o}^2 = [\lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1 a_2 + 2w a_1 a_2]^2. \quad (3.211)$$

En forma semejante, consideremos la superficie $S = S_2$, donde S_2 es la superficie limitada por la elipse

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

donde el respectivo cuadrado de resistencia del Vórtice será

$$4C_{2o}^2 = \lambda_1^2(a_2^2 + a_3^2)a_2^2 a_3^2. \quad (3.212)$$

Para la superficie $S = S_3$, donde S_3 es la superficie limitada por la elipse

$$\frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{x_1^2}{a_1^2} = 1,$$

el respectivo cuadrado de resistencia del Vórtice será

$$4C_{3o}^2 = \lambda_2^2(a_1^2 + a_3^2)a_1^2 a_3^2. \quad (3.213)$$

Sumando los cuadrados de los C_{io} tendremos

$$4(C_{1o}^2 + C_{2o}^2 + C_{3o}^2) = [\lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1 a_2 + 2w a_1 a_2]^2 + \lambda_1^2(a_2^2 + a_3^2)a_2^2 a_3^2 \lambda_2^2(a_1^2 + a_3^2)a_1^2 a_3^2, \quad (3.214)$$

definamos $C_{to}^2 \equiv C_{1o}^2 + C_{2o}^2 + C_{3o}^2$, luego de (3.214) resulta

$$4C_{to}^2 = [\lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1 a_2 + 2w a_1 a_2]^2 + \lambda_1^2(a_2^2 + a_3^2)a_2^2 a_3^2 \lambda_2^2(a_1^2 + a_3^2)a_1^2 a_3^2. \quad (3.215)$$

Para el caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ la igualdad anterior se reduce finalmente a

$$2C_{to} = \lambda_3(a_1^2 + a_2^2)a_1 a_2 + 2w a_1 a_2. \quad (3.216)$$

Finalmente por (3.49) y la anterior igualdad C_a está relacionado con los 3 vórtices mencionados en esta página.

Breve análisis de la estabilidad del fluido elipsoidal

Como se dijo en la introducción no hemos considerado varias propiedades de la nebulosa protoestelar, por ejemplo la interacción con el medio exterior mediante campos magnéticos y eléctricos, (si las partículas que forman el gas están cargadas), la viscosidad, la tensión superficial, etc. nos lleva a ecuaciones diferenciales parciales no lineales. En este apéndice hacemos un breve análisis de las funciones de onda elásticas $\varepsilon_k(\mathbf{x}, t)$ las cuales representan el desplazamiento de un diferencial de volumen del fluido. Esto es importante porque una posible divergencia de la función de onda hace que un fluido elipsoidal perturbado se vuelva inestable y puede colapsar o desvanecerse en una explosión tipo supernova. Formalmente para estudiar el comportamiento de los desplazamientos $\varepsilon_k(\mathbf{x}, t)$ debemos resolver la ecuación de onda no homogénea

$$k \nabla^2 \varepsilon_k - \rho_o \frac{\partial^2 \varepsilon_k}{\partial t^2} = -\rho_o \frac{\partial \beta}{\partial x_k}, \quad (3.217)$$

donde k es una constante que depende del medio. La resolución de esta ecuación necesita información sobre el potencial newtoniano β que no tenemos, por esto postergamos su análisis completo para otra ocasión. Sin embargo aquí si podemos analizar el comportamiento de la función de onda. Para poder conseguir esto consideramos la ecuación de onda no homogénea.

$$a \nabla^2 \phi - b \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t), \quad (3.218)$$

en la cual $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$, además a y b son constantes. Para resolver esta ecuación de onda anterior se dispone tiene las condiciones iniciales

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_o(\mathbf{x}), \quad (3.219)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = V_o(\mathbf{x}). \quad (3.220)$$

Así la solución general de la ec. (3.218) es

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_h(\mathbf{x}, t) + \phi_I(\mathbf{x}, t), \quad (3.221)$$

donde

$$\phi_h = \int_R \left(G V_o(\mathbf{x}') - \frac{\partial G}{\partial t'} \phi_o(\mathbf{x}') \right)_{t'=0} dV', \quad (3.222)$$

$$\phi_I = \int G f(\mathbf{x}', t') dV' dt', \quad (3.223)$$

siendo G la función de Green del operador de onda y viene dado por (Ref. [19]),

$$G = \frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.224)$$

Simplificaremos la escritura para lo cual definimos

$$I_1 \equiv \int_R (G V_o(\mathbf{x}'))_{t'=0} dV', \quad (3.225)$$

$$I_2 \equiv \int_R \left(\frac{\partial G}{\partial t'} \phi_o(\mathbf{x}') \right)_{t'=0} dV', \quad (3.226)$$

decir $\phi_h = I_1 + I_2$. Mediante la función de Green la integral, I_1 se transforma en

$$I_1 = \int_R V_o(\mathbf{x}') \frac{\delta(t - |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'|)}{4\pi |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'|} dV'. \quad (3.227)$$

Consideramos coordenadas esféricas y para integrar sobre $\bar{\mathbf{x}}'$ tomamos otro Sistema de Ejes $X'_1 X'_2 X'_3$ diferente a $X_1 X_2 X_3$ sin perder la generalidad podemos considerar el punto \mathbf{x} en el eje X'_3 (ver fig. 3.4)

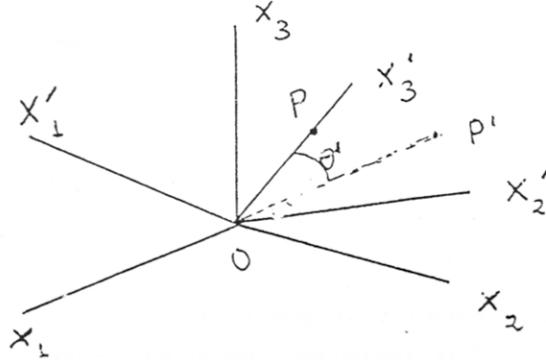


Fig. 3.4.

luego la integral (3.227) se puede expresar como

$$I_1 = \int_R \frac{x'^2 \text{sen} \theta' V_o(x', \theta', \phi') \delta(t - \sqrt{x^2 + x'^2 - 2 x x' \cos \theta'})}{4\pi \sqrt{x^2 + x'^2 - 2 x x' \cos \theta'}} dx' d\theta' d\phi', \quad (3.228)$$

definiendo $f_1 \equiv x^2 + x'^2$, $f_2 \equiv 2 x x'$, tenemos de (3.225)

$$I_1 = \int_R \frac{x'^2 \text{sen} \theta' V_o(x', \theta', \phi') \delta(t - \sqrt{f_1 - f_2 \cos \theta'})}{4\pi \sqrt{f_1 - f_2 \cos \theta'}} dx' d\theta' d\phi', \quad (3.229)$$

ahora considerando el cambio de variable $u \equiv -\cos \theta'$ la integral se transforma en

$$I_1 = \int_R \frac{x'^2 V_o(x', u, \phi') \delta(t - \sqrt{f_1 + f_2 u})}{4\pi \sqrt{f_1 + f_2 u}} dx' du d\phi', \quad (3.230)$$

y recordando la propiedad de la delta de Dirac:

$$\delta(f(u)) = \frac{\delta(u - u_o)}{|f'(u_o)|} \quad (3.231)$$

donde u_o satisface $f(u_o) = 0$, en este caso tomaremos $f(u) = t - \sqrt{f_1 + f_2 u}$ con lo cual $u_o = \frac{t^2 - a}{b}$. Por lo tanto la integral (3.230) se convierte en

$$I_1 = - \int_R \frac{t x'^2 V_o(x', u, \phi') \delta(u - u_o)}{2\pi f_2 \sqrt{f_1 + f_2 u}} dx' du d\phi', \quad (3.232)$$

integrando sobre u y simplificando se obtiene

$$I_1 = - \int_R \frac{x'^2 V_o(x', u_o, \phi')}{2\pi f_2} dx' d\phi' , \quad (3.233)$$

Como en estos casos las condiciones de contorno físicas imponen que la función V_o sea acotada y como también el valor de la función $u = \cos\theta$ está acotada la integral converge cuando el tiempo crece. Ahora nos falta analizar la integral

$$I_2 \equiv \int_R \left(\frac{\partial G}{\partial t'} \phi_o(\mathbf{x}') \right)_{t'=0} dV' , \quad (3.234)$$

que también se puede expresar como

$$I_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t'} \int_R G \phi_o(\mathbf{x}') dV' \right)_{t'=0} , \quad (3.235)$$

y donde la parte interna puede transformarse como la integral I_1 , entonces

$$I_2 = - \left(\frac{\partial}{\partial t'} \int_R \frac{x'^2 \phi_o(x', u_o, \phi')}{2\pi f_2} dx' d\phi' \right)_{t'=0} . \quad (3.236)$$

Como también la función ϕ_o es acotada y continua la integral es otra función acotada luego el resultado de la derivada es otra función que es convergente cuando el tiempo crece. Dado que $\phi_h = I_1 + I_2$ encontramos que la solución homogénea no será divergente cuando el tiempo aumenta. Es decir para el problema del fluido elipsoidal la posible inestabilidad en ningún caso es producida por la solución homogénea de la ecuación de onda. Finalmente analizaremos la solución no homogénea, así de (3.223) y de (3.224)

$$\phi_I = \int \left(\frac{\delta(t-t' - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} f(\mathbf{x}', t') \right) dV' dt' , \quad (3.237)$$

y usando las propiedades de la Delta de Dirac

$$\phi_I = \int_R \frac{f(\mathbf{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} dV' , \quad (3.238)$$

Para nuestro caso del fluido elipsoidal usando la anterior expresión se tiene el término no homogéneo de la función de onda

$$\varepsilon_{kI} = \int_R \frac{\beta(\mathbf{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' , \quad (3.239)$$

donde recordamos del capítulo 1 que $\beta(\mathbf{x}, t)$ es el potencial newtoniano. Luego hemos encontrado que si hay inestabilidad en el fluido ella dependerá del comportamiento de la función de onda no homogénea y esta dependerá del comportamiento temporal $\beta(\mathbf{x}, t)$. Para comprobar esta afirmación se debe resolver numéricamente la ecuación y hallar el potencial newtoniano o bien analizar el comportamiento de la función de onda usando otra ecuación como se sugiere en la teoría de fluidos elipsoidales rotantes (ver ref. [1]). Todo esto escapa a los objetivos del presente trabajo, luego lo dejamos para futuras investigaciones.

bliografía

- La teoría de fluidos elipsoidales rotantes en equilibrio se presenta en las siguientes referencias:
 - [1] S. Chandrasekhar, "Ellipsoidal Figures of Equilibrium", caps. 1, 2 y 5, 1987.
 - [2] S. Chandrasekhar, "The stability of a rotating liquid drop", Proc. Roy. Soc., **286** (1965), pags. 1 - 26.
 - [3] C. E. Rosenkilde, "Stability of Axisymmetric Figures of Equilibrium of a Rotating Charged Liquid Drop", J. Math. Phys., **8** (1966), pags. 98 - 117.
 - [4] S. Chandrasekhar & N.R. Lebovitz, "Non-radial oscillations and convective instability of gaseous masses", Astroph. J. **138** (1963), pags. 185 - 199.
 - Una manera alternativa de estudiar fluidos elipsoidales en rotación se desarrolla en
 - [5] Horace Lamb, "Hydrodynamics", cap. 12, 1932.
 - El método de las ecuaciones viriales usado varias veces en esta tesis se puede encontrar en otras ramas de la física, consúltese por ejemplo
 - [6] S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", cap. 13.
 - La teoría del potencial gravitatorio se halla en forma incompleta, pero suficiente para nuestro caso, en el capítulo 3 de la ref. [1], pero también se puede ver en
 - [7] A. S. Ramsey, "The Theory of Newtonian Attraction", cap. 7, 1964.
 - La demostración del teorema de la divergencia se encuentra en varios textos pero el que se considero como referencia para demostrar la (ecuación (1.27)) es
 - [8] Murray R. Spiegel, "Vector Analysis", pag. 177, 1959.
 - La ecuación (1.27) es una aplicación de los teoremas del Análisis Vectorial, se puede consultar también
 - [9] H. B. Phillips, "Análisis Vectorial", cap. 3, pag. 98, 1946.
 - Los temas de Astronomía mencionados en el presente trabajo se presentan en varios textos e incluso de divulgación entre ellos se recomienda
 - [10] C. Jaschek & M. Corlavan, "Astrofísica", cap. 4, 1974.
 - [11] I. S. Shklovski, "Universo-Vida-Intelecto", cap. 9, pag. 135, 1977.
 - [12] E. Keppler, "Sol, Lunas y Planetas", cap. 9, 1986.
 - Las ecuaciones usadas de Dinámicas de Fluidos se pueden hallar en los textos de la materia o en algunos libros de Análisis Vectorial como aplicación. Aquí usamos como referencia
 - [13] A. Sharmer, "Mecánica de Fluidos", pag. 305, 1967.
- Pero también se puede hallar de manera resumida en
- [14] Hwei P. Hsu, "Análisis Vectorial", cap. 8, 1973.

- Para el concepto de vorticidad véase

[15] A. S. Kompaneys, "A Course of Theoretical Physics", **2**, cap. 17, pag. 203.

- En el caso de la ecuación 3.1 del Capítulo 3 (usado no solamente en Dinámica de Fluidos) se consultó

[16] R. B. Bird, "Fenómenos de Transporte", pag. 7, cap. 7, 1982.

- El tema del colapso de los esferoides de Maclaurin se encuentra parcialmente discutido en el artículo

[17] M. Fujimoto, "Gravitational Collapse of Rotating Gaseous Ellipsoids", Ap. J., **152** (1968), pag. 523 – 536.

- Para entender el origen del Método de Runge-Kutta de orden 4 véase, por ejemplo

[18] A. Arroyo, A. Bernui, "Análisis del Método Numérico de Runge-Kutta", REVCUNI, **6**, #1 pag. 1 – 13.

- Sobre función de Green y su relación con las ecuaciones diferenciales parciales se pueden hallar con rigor en

[19] Philip M. Morse, "Methods of Theoretical Physics", pag 839 Tomo 1. 1953.