Universidad Nacional de Ingenieria
Facultad de Ciencias
Sección de Post-grado y Segunda Especialización Profesional

Tesis para Optar el Grado de Maestro en Ciencias, Mención :
Matemática Aplicada

Titulada:

El Teorema de la Ω-Estabilidad

Presentada Por:
Roland Rabanal Montoya

Lima - Perú
2000

Resumen

Cuando $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$ y es hiperbólico, se descompone en conjuntos básicos $\{\Lambda_\alpha\}$, que al no tener ciclos garantiza la existencia de una filtración $\mathrm{M} = \{M_\alpha\}$, adaptada a todos los g $\mathcal{C}^0$-próximos a f con $K^g(\mathrm{M}) = h_g(\Omega(f))$ donde h_g es la conjugación entre $f|_{\Lambda_\alpha}$ y $g|_{h_g(\Lambda_\alpha)}$ que existe por la hiperbolicidad de $\Omega(f)$. Esto implica también que los $K^g_\alpha(\mathrm{M})$ sean g-hiperbólicos lo que se usa para ver que $K^g(\mathrm{M}) = \Omega(g)$

A Irma que siempre ha estado a mi lado
y a todos con los que viví ...

Agradecimíentos:

1. A mis tíos que siempre me apoyaron.
2. A mi Asesor Dr. Roger M. por todo el tiempo dedicado y también por sus exigencias.
3. Al Dr. M Benazic, Dr. J. Alcantara, Lic. F. Escalante, Ingrid y a todos los que en el IMCA siempre me ayudaron.
4. A todos mis compañeros por lo que logramos compartir.

Contenido

Introducción

El objetivo de estas notas es dar la prueba del teorema de la $\Omega - estabilidad$ para un difeomorfismo f definido en una variedad compacta M de dimensión finita. Se considera por eso el conjunto de los puntos no errantes de f denotado por $\Omega(f)$ que es cerrado e invariante bajo f y también los difeomorfismos g que son $\Omega - conjugados$ a f, es decir existe un homeomorfismo $h : \Omega(f) \to \Omega(g)$, muy cercano de la identidad, que cumple $h \circ f = g \circ h$. Como es usual se dice que f es $\Omega - estable$ si existe una vecindad V_f de f, en la C^r-topología , $0 < r < \infty$ de $Diff^r(M)$, de modo que cada $g \in V_f$ es $\Omega - conjugado$ a f.

Lo que establece el teorema de la $\Omega - estabilidad$ son condiciones suficientes para que un difeomorfismo sea $\Omega - estable$. La *primera* condición es que los puntos periódicos de f sean densos en $\Omega(f)$ y que además $\Omega(f)$ tenga una *estructura hiperbólica*. Esto no es otra cosa que conseguir una descomposición de $T_\Omega M$ en dos subfibrádos E^s y E^u que son invariantes bajo la derivada $Df : T_\Omega M \to T_\Omega M$ y para los cuales existen dos constantes $c > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|Df|_{E^s_x}\| \leq c\lambda$ y $\|Df^{-1}|_{E^u_x}\| \leq c\lambda$ para todo $x \in \Omega$. Estas condiciones se acostumbran resumir diciendo que f cumple el *Axioma A*, o lo que es lo mismo que su conjunto $\Omega(f)$ es hiperbólico y sus puntos periódicos son densos.

Cuando f cumple el *Axioma A*. El teorema de la *descomposición espectral* establece que $\Omega(f)$ se puede descomponer en una unión finita de conjuntos *básicos* $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ donde cada Λ_α es cerrado, invariante bajo f y existe $x \in \Lambda_\alpha$ de modo que el conjunto $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es denso en Λ_α.

Para dar la segunda condición del teorema de la $\Omega - estabilidad$ se acostumbra definir entre los conjuntos básicos dados por la descomposición espectral la relación $\Lambda_\alpha >> \Lambda_\beta$ que significa que $(W^u(\Lambda_\beta) - \Lambda_\beta) \cap (W^s(\Lambda_\alpha) - \Lambda_\alpha) \neq \emptyset$ donde $W^s(\Lambda_\alpha) = \{y \in M : d((\Lambda_\alpha), f^n(y)) \to 0$ cuando $n \to +\infty\}$ y $W^u(\Lambda_\beta) = \{y \in M : d(\Lambda_\beta, f^n(y)) \to 0$ cuando $n \to -\infty\}$ y se dice que los conjuntos básicos tienen un *ciclo* cuando existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tales que $\Lambda_{\alpha_1} >> \Lambda_{\alpha_2} >> \ldots >> \Lambda_{\alpha_r} = \Lambda_{\alpha_1}$. Con esto el Teorema de la $\Omega - estabilidad$ afirma que f es $\Omega - estable$ siempre que cumpla el Axioma A y su descomposición espectral no tenga ciclos.

Parte 1

Resultados Preliminares

1.1 Conjuntos Invariantes

En lo que sigue M designará una variedad de clase $\mathcal{C}^\infty$, compacta y de dimensión finita m, dotada de una métrica Riemmaniana d. Denotaremos por T_xM el espacio tangente de M en $x \in M$ y por TM el fibrado tangente de M. Para $v \in T_xM$ escribiremos $|v|$ para indicar la norma generada en T_xM por d. Con la métrica Riemmaniana fijada podemos definir para $x \in M$ la *aplicación exponencial* exp que es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$ de una vecindad del *origen* en T_xM sobre una vecindad de x en M. Como M es compacta existe un $r_0 > 0$ tal que para cualquier $x \in M$ la aplicación exp es un difeomorfismo de $\{v \in T_xM : |v| < r_0\}$ sobre su imagen.

Estudiaremos los *sistemas dinámicos* discretos generados por un difeomorfismo $f : M \to M$. No distinguiremos entre un difeomorfismo f y el sistema dinámico generado por él.

Denotaremos por

$$\mathcal{O}(f; x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}$$

la *órbita* (trayectoria) de un punto $x \in M$ en un sistema dinámico f.

Como es usual diremos que un punto $x \in M$ es un *punto periódico* de periodo n si

$$f^n(x) = x; f^j(x) \neq x \text{ para } j \in \{1, \ldots, n-1\}$$

(Si $f(x) = x$ diremos que x es un *punto fijo*). Denotaremos por $Per(f)$ el conjunto de los puntos periódicos de f.

Definición 1.1.1 *Un punto $x \in M$ se dice que es* errante *si existe $\mathcal{U}$, una vecindad abierta de x, para la cual $f^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{Z}$. Se denota por $\Omega(f)$ el conjunto de los puntos* no errantes.

La definición sigue teniendo sentido aún cuando la función sólo sea continua y definida en un espacio topológico, además se deduce, que todos los elementos del abierto U son errantes, por eso $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado.

Cuando un punto x es no errante y U es una de sus vecindades $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ para algún n, más aún, existe una sucesión n_k creciente tal que $f^{n_k}(U) \cap U \neq \emptyset$ para todo k.

También, para cada vecindad abierta V de la imagen $f(x)$ de un punto no errante, $f^n(f^{-1}(V)) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ para algún número natural n, por ser $f^{-1}(V)$ una vecindad abierta de x; esto significa que $f(x)$ es un punto no errante, es decir $f(\Omega) \subset \Omega$.

Puesto que f es un homeomorfismo se tiene que para cualquier vecindad abierta U, del punto no errante x, $f^{-n}[f^n(U) \cap U] = U \cap f^{-n}(U)$ y así por la definición de punto no errante se tiene que $\Omega(f) \subset \Omega(f^{-1})$, pero como se pueden intercambiar los roles de f y f^{-1}, resulta que $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$. De esto y lo afirmado en el párrafo anterior se tiene que $f^{-1}(\Omega) \subset \Omega$. De donde se obtiene $\Omega = f(f^{-1}(\Omega)) \subset f(\Omega) \subset \Omega$ es decir $f(\Omega) = \Omega$[1].

Definición 1.1.2 *Para un punto $x \in M$ y un sistema dinámico f, el ω-límite de x denotado por $\omega_x(f)$, es el conjunto dado por*

$$\omega_x(f) = \{\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) : \text{ cuando } n_k \text{ tiende a } +\infty\}$$

Como f es un homeomorfismo podemos definir el α-límite de x

$$\alpha_x(f) = \{\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) : \text{ cuando } n_k \text{ tiende a } -\infty\}$$

Con esto se se consideran las siguientes notaciones

$$L_+(f) = \overline{\cup_{x\in M}\omega_x(f)} \qquad L_-(f) = \overline{\cup_{x\in M}\alpha_x(f)} \qquad L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$$

De las definiciones se tiene que, los puntos periódicos son *puntos limites* y por la construcción anterior resulta que $\overline{Per(f)} \subset L(f)$.

Cuando y pertenece al ω-límite de algún elemento x de M, para cualquier vecindad U de y existe un número natural k_0 tal que $f^{n_k}(x)$ está en U para todo $k \geq k_0$, así y es un punto no errante, de esto y procediendo análogamente para z algún punto del α-límite, se tiene que todos los puntos de $L(f)$ son no errantes y en vista de que $\Omega(f)$ es cerrado, tenemos que $L(f) \subset \Omega(f)$.

Como M es secuencialmente compacto se puede deducir el siguiente resultado

Proposición 1.1.1 *Si $\mathcal{U}$ es vecindad del conjunto $\Omega(f)$, para cada $x \in M$ se tiene $f^n(x) \in \mathcal{U}$ para n suficientemente grande.*

[1]Cuando se cumple esta propiedad se dice que Ω es invariante

Prueba. Como $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, de la definición 1.1.2 se tiene que existe un k_0 tal que $f^{n_k}(x)$ es un elemento de U para todo $k \geq k_0$, puesto que U es vecindad de algún punto (no errante) del ω-límite de x.

Si se tiene que $n_k < m < n_{k+1}$ también $f^m(x)$ pertenece a U, a partir de algún n_0, pues de lo contrario existiría una sucesión m_j que cumple la propiedad $f^{m_j}(x) \notin U$ y de esto el límite de alguna de sus subsucesiones, que está en $\omega_x(f)$, no sería un elemento de U, lo que es una contradicción.

Definición 1.1.3 *Se dice que un conjunto numerable de puntos de* M

$$\xi = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$$

es una δ*-órbita si para cada* $k \in \mathbb{Z}$

$$d(x_{k+1}, f(x_k)) < \delta \tag{1.1}$$

En ocasiones una δ-órbita es llamada *pseudórbita* (δ-pseudórbita).

Considerando el conjunto $\xi = \{x_k : k_1 \leq k \leq k_2\}$. Se dice que ξ es una δ-órbita finita si (1.1) se cumple para todo $k_1 \leq k < k_2$.

A una δ-órbita finita se la llama *periódica* si $x_{k_1} = x_{k_2}$ con $k_1 \neq k_2$.

Para $x, y \in M$ diremos que existe una δ-órbita de x a y si hay una δ-órbita $\xi = \{x_k\}$ y $m > 0$ tal que $x_0 = x$ y $x_m = y$.

Definición 1.1.4 *Consideremos los siguientes subconjuntos de* M

$$CH(x, f) = \{y \in M : \textit{ Para cada } \epsilon{>}0, \textit{ existe una } \epsilon\textit{-órbita de } x \textit{ a } y\}$$

$$\mathcal{R}(f) = \{x \in M : x \in CH(x, f)\}$$

$\mathcal{R}(f)$ *es llamado conjunto de puntos* recurrentes por cadenas

Siempre que $x \in \Omega(f)$ y ϵ es positivo, por la continuidad uniforme de f en el compacto $\Omega(f)$, es posible hallar un δ positivo, que puede ser elegido más pequeño que $\frac{\epsilon}{2}$, de modo que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, de esto y por ser x un punto no-errante existe un natural n tal que $f^n(B_\delta(x)) \cap B_\delta(x)$ es distinto del vacío. Así cuando $n = 1$, $\{x, x\}$ es una ϵ-órbita de f y en caso contrario, eligiendo y en $B_\delta(x)$, tal que $f^n(y)$ sea un elemento de $B_\delta(x)$, resulta que $\{x, f(y), \ldots, f^{n-1}(y), x\}$ es una ϵ-órbita de x a x. Todo esto permite afirmar que $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$.

Ahora buscaremos mostrar que $\mathcal{R}(f)$ es cerrado, para eso se considera $x \in \overline{\mathcal{R}(f)}$ y un ϵ positivo. Por un razonamiento análogo al anterior, existe un δ positivo, más pequeño que ϵ de modo que $d(f(z), f(y)) < \frac{\epsilon}{4}$ siempre que $d(z, y) < \frac{\delta}{2}$. Con esto, es posible hallar $y \in \mathcal{R}(f)$ con $d(x, y) < \frac{\delta}{2}$, pero para y existe $\{y, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = y\}$ una $\frac{\epsilon}{4}$-órbita periódica y por la desigualdad triangular resulta que $\{x, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ es una ϵ-órbita que parte de x, pero como $d(x_{k-1}, y) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(y, x) < \frac{\delta}{2}$, se tiene que $\{x, x_1, \ldots, x_{k-1}, x\}$ es una ϵ-órbita de x a x. es decir $\overline{\mathcal{R}(f)} \subset \mathcal{R}(f)$.

En resumen se obtiene que

$$\overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$$

Lo que hasta ahora se ha hecho es definir conjuntos invariantes en M, y algunas de sus propiedades, las que usaremos en la segunda parte cuando se muestre los resultados sobre la *estabilidad* de los difeomorfismos, informalmente podemos decir que nos interesa saber que sucede para los difeomorfismos "cercanos" a un f conocido, con sus órbitas y sus conjuntos límites. Por esta razón es que se acostumbra definir una topología en el conjunto de los difeomorfismos en M.

Inicialmente se puede usar la función ρ_0 que sigue teniendo sentido aún cuando sólo consideramos *homeomorfismos*, y ésta se define para dos sistemas dinámicos discretos f y g de la siguiente manera.

$$\rho_0(f, g) = \max_{x \in M} \left\{ d(f(x), g(x)), d(f^{-1}(x), g^{-1}(x)) \right\}$$

Esta función ρ_0 es una métrica en el espacio de los sistemas dinámicos, y la topología que genera se llama la C^0-topología y además si tomamos como $\mathcal{Z}(M)$ el conjunto de todos los homeomorfismos de M, se puede mostrar que $(\mathcal{Z}(M), \rho_0)$ es un espacio métrico completo. Para una demostración de estas afirmaciones se puede consultar J. Palis y W. de Melo [9][2].

Antes de definir la topología teniendo en cuenta la estructura diferenciable de los difeomorfismos es necesario considerar algunos resultados adicionales y observar a M con la topología inicial inducida por las *cartas*, es decir la menos fina de las topologías que hace continuas a todas las cartas de un *atlas*.

Una aplicación diferenciable $\varphi : M \to N$ donde M y N son variedades diferenciables se dice que es una *inmersión*: cuando la derivada

$$D_p(\varphi) : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$$

es inyectiva para todo $p \in M$.

La aplicación φ se dice que es una *inmersión propia* cuando es una inmersión inyectiva que tiene una inversa, $\varphi^{-1} : \varphi(M) \subset N \to M$ continua.

[2] los números indican la referencia

Un teorema clásico de Whitney (ver por ejemplo [1]) establése que si $dim(M) = m$ entonces existe una inmersión propia real

$$\varphi : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$$

Con esto se puede introducir la C^r-topología en el espacio de los difeomorfismos de clase C^r, $1 \leq r < +\infty$ y para eso fijamos un cubrimiento finito de M por conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ de modo que cada $\overline{V_j}$ esta contenido en el dominio de una carta local (U_j, ξ_j) para M y procedemos de la siguiente manera.

Recordemos que al tener una aplicación diferenciable $\chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$, donde $x = (x_1, \ldots, x_m)$ indicán las coordenadas de $\mathbb{R}^m$. Es usual denotar para $p = (p_1, \ldots, p_m)$ con p_j enteros no negativos.

$$\frac{\partial^p \chi}{\partial x^p} = \frac{\partial^p \chi}{\partial {x_1}^{p_1} \ldots \partial {x_m}^{p_m}} \qquad |p| = p_1 + \ldots + p_m$$

Tomemos dos difeomorfismos f y g de M. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, supongamos que $\overline{V_i} \subset U_j$, y sea

$$\tilde{V}_i = \xi_j(V_i) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{f}_i = \varphi \circ f \circ \xi_j^{-1}, \qquad \tilde{g}_i = \varphi \circ g \circ \xi_j^{-1}$$

aquí φ denota una inmersión propia real. Para estos dos difeomorfismos f y g de clase $C^r, 1 \leq r < +\infty$ se define

$$\rho_r(f, g) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sup_{x \in \tilde{V}_i} \sum_{0 \leq |p| \leq r} \| \frac{\partial^p (\tilde{f}_i - \tilde{g}_i)}{\partial x^p}(x) \| \right\}$$

Es esencial verificar que ρ_r es una métrica en el espacio de los difeomorfismos de clase C^r en M y la topología inducida por esta métrica es la C^r-topología (como M es compacto la topología es independiente de la elección de los $V_1, \ldots, V_n$)

Denotaremos por $Diff^r(M)$ el correspondiente espacio topológico.

Para un subconjunto A de M, un difeomorfismo $f \in Diff^r(M)$ si consideramos un ϵ positivo denotaremos por

$$N_\epsilon(A) = \{x \in M : d(x, A) < \epsilon\}$$

(como es usual aquí $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$)

$$N_\epsilon(f) = \{g \in Diff^r(M) : \rho_r(f, g) < \epsilon\}$$

También podemos definir la métrica de la convergencia uniforme

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in M\}$$

1.2 Filtraciones y Ciclos

El concepto de Filtración, permite dar una prueba del teorema de la Ω-estabilidad y su existencia da un control global del comportamiento de f en el conjunto de los puntos no errantes, como veremos más adelante, y también en los punto limites $L(f)$ como se puede leer en S. Newhouse [7].

Definición 1.2.1 *Una* filtración adaptada a f, *es una colección finita* $\mathrm{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha=1}^{m}$ *de subconjuntos compactos* M_α, *con* $\alpha \in I_m = \{0, \ldots, m\}$ *tal que*
(a)$M_0 = \emptyset$ *y* $M_m = M$
(b)$M_{\alpha-1} \subset M_\alpha \; \alpha = 1, \ldots, m$
(c)$f(M_\alpha) \subset \; Int(M_\alpha)$ *si* $\alpha \in I_m$

Se sigue de (c) que si M es una filtración adaptada a $f \in Diff^r(M)$ entonces también M es adaptada a cualquier g perteneciente a una vecindad de f en el espacio métrico $(Diff^r(M), \rho_0)$; por esto podemos decir que (c) es una propiedad abierta.

Observe que cuando consideramos la colección

$$\overline{M - M_m} \subset \overline{M - M_{m-1}} \subset \ldots \subset \overline{M - M_0}$$

También obtenemos una filtración adaptada a f^{-1}, la que se denota por M^{-1}

Escribiremos para todo $\alpha \in A$

$$K_\alpha^f(\mathrm{M}) = \cap_{k\in\mathbf{Z}} f^k(M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

$$\Omega_\alpha(f) = \Omega(f) \cap (M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

$$\mathcal{R}_\alpha(f) = \mathcal{R}(f) \cap (M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

$$K^f(\mathrm{M}) = \cup_{\alpha\in I_m} K_\alpha^f(\mathrm{M})$$

De la definición se observa que $\overline{\Omega_\alpha(f)}$ y $\overline{\mathcal{R}_\alpha(f)}$ están contenidos en el conjunto $\cap_{k\in\mathbf{Z}} f^k\overline{(M_\alpha - M_{\alpha-1})}$ que es invariante bajo f, más aún afirmamos que se cumple

$$\bigcap_{k\in\mathbf{Z}} f^k(\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}) \subset \bigcap_{k\in\mathbf{Z}} f^k(M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

para cada α de I_m.

Para ver eso se define con cada número natural n y α en I_m los

$$B_n = \bigcap_{j=-n}^{j=n} f^j(M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

que forman una sucesión decreciente de conjuntos que convergen a $K^f_\alpha(\mathrm{M})$ cuando n crece, y se muestra que

$$\overline{B_{n+1}} \subset B_n \subset \overline{B_n}$$

Tomemos una sucesión (x_k) en B_{n+1} que converge a x, es decir todos los $x_k \in f^j(M_\alpha)$ para $-(n+1) \leq j \leq n+1$ y supongamos ahora que x es un elemento de $f^j(M_{\alpha-1})$ para algún j entre $-n$ y n, luego por la parte (c) de la definición de filtración, tenemos que x esta en el interior de $f^{j-1}(M_{\alpha-1})$, y así para k suficientemente grande resulta que x_k pertenece a $f^{j-1}(M_{\alpha-1})$ con $j-1$ entre $-(n+1)$ y $n-1$ es decir estos $x_k \notin B_{n+1}$. Esta contradicción muestra que x es un elemento de B_n lo que es suficiente para probar lo deseado.

Todo esto nos permite afirmar que $K^f_\alpha(\mathrm{M})$ es compacto e invariante. Más aún es *maximal*, esto es para cualquier subconjunto Y de $M_\alpha - M_{\alpha-1}$ que es cerrado e invariante bajo f, se cumple que $Y \subset K^f_\alpha(\mathrm{M})$, en particular $\Omega_\alpha(f) \cup \mathcal{R}_\alpha(f)$ es un subconjunto de $K^f_\alpha(\mathrm{M})$ para cada α.

Para mostrar esta última afirmación, también se puede proceder por la definición de los puntos no errantes y los recurrentes por cadenas, directamente; por ejemplo, si elegimos un $x \in (M_\alpha - M_{\alpha-1}) - K^f_\alpha(\mathrm{M})$; por la elección podemos hallar $-m \in \mathbb{Z}$ tal que $x \notin f^{-m}(M_\alpha - M_{\alpha-1})$ es decir existe un entero m tal que $y = f^m(x)$ no es un elemento de $M_\alpha - M_{\alpha-1}$.

Si $y \in M_{\alpha-1}$ hallamos una vecindad U_x de x, que sea disjunta con $M_{\alpha-1}$ así para $k > 0$ $f^k(y)$ es un elemento de $Int(M_{\alpha-1})$, lo que muestra que $x \notin \Omega(f)$.

Pero si $y \in M - M_\alpha$ hallamos una vecindad U_y de y, que sea disjunta con M_α. Para $k \geq 1$ tenemos que $f^k(x) = f^{k-m}(y)$ pertenece a $Int(M_\alpha)$, así y es un punto errante es decir $x \notin \Omega(f)$.

Proposición 1.2.1 *(Estabilidad de los maximales invariantes) Sea* M *una filtración adaptada a* f *y un abierto* $\mathcal{U}$ *que contiene a* $K^f(\mathrm{M})$ *Entonces existe una vecindad* C^0*-abierta* $\mathcal{V}_f \subset Diff^r(M)$ *de* f *donde* M *es adaptada a toda* $g \in \mathcal{V}_f$ *y* $K^g(\mathrm{M}) \subset U$. *Mas aún* $\mathcal{V}_f$ *puede ser escogida de modo que*

$$K^g_\alpha(\mathrm{M}) \subset (M_\alpha - M_{\alpha-1}) \cap \mathcal{U} =: \mathcal{U}_\alpha$$

Prueba. Para ver esta afirmación básta notar, que el conjunto de los difeomorfismos que cumplen $f(M_\alpha) \subset Int(M_\alpha)$, para una filtración fija, es un conjunto abierto, y como U_α es una vecindad de $K^f(\mathrm{M})$, existe un natural n, suficientemente grande tal que $B_n \subset U_\alpha$. Esto nos garantiza la existencia de una vecindad V_f, de modo que $\cap_{j=-n}^{j=n} g^j(M_\alpha - M_{\alpha-1})$, es un subconjunto de U_α, cualquiera que sea g en V_f.

◊

1.2.1 Ciclos

Este concepto nos permitirá dar una condición suficiente para la existencia de una filtración adaptada a f, de modo que $K_\alpha(\mathrm{M}) = \Lambda_\alpha$, cuando $\Lambda = \Lambda_1 \cup, \ldots, \cup \Lambda_m$ sea una unión disjunta de conjuntos cerrados, que son invariantes bajo f tal que

$$L(f) \subset \Lambda$$

Definición 1.2.2 *Para cada subconjunto $B \subset M$ y f un difeomorfismo de M los conjuntos* estable e inestable $W^s(B)$ *y* $W^u(B)$ *son:*

$$W^s(B) = \{y \in M : d(f^n(B), f^n(y)) \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty\}$$

$$W^u(B) = \{y \in M : d(f^n(B), f^n(y)) \to 0 \text{ cuando } n \to -\infty\}$$

Cuando se considera B hiperbólico, sus correspondientes conjuntos estables e inestables son subvariedades diferenciables de M.

Definición 1.2.3 *En la colección $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^m$, de conjuntos cerrados, se define un* pre-orden *y escribiremos $\Lambda_\alpha >> \Lambda_\beta$ si*

$$(W^u(\Lambda_\alpha) - \Lambda_\alpha) \cap (W^s(\Lambda_\beta) - \Lambda_\beta) \neq \emptyset$$

En principio $>>$ *no* es una relación de orden parcial pues en general no se cumple la propiedad Transitiva. Pero en el caso en que las intersecciones sean transversales (ver sec 1.5) y los conjuntos sean hiperbólicos, esto termina valiendo por el Lema de inclinación (Teorema 1.4.3)

Se dice que una subcolección $\{\Lambda_{\alpha_j}\}_{j=1}^r$, para $r \in I_m$, es un $r-$ *ciclo* si es posible encontrar una sucesión que cumpla

$$\Lambda_{\alpha_1} >> \Lambda_{\alpha_2} >>, \ldots, >> \Lambda_{\alpha_{r+1}} = \Lambda_{\alpha_1}$$

Cuando el pre-orden en $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ **no** tiene ciclos se define el orden

$$\Lambda_\alpha < \Lambda_\beta \text{ si no existe } \Lambda_\alpha >>, \ldots, >> \Lambda_\beta$$

que cumple para cada α y β; $\Lambda_\alpha < \Lambda_\beta$ ó $\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta$ ó $\Lambda_\beta < \Lambda_\alpha$, donde ó no es exclusivo, esto es, se puede dar más de una posibilidad a la vez, o quizás ninguna.

Pero, reordenando el conjunto $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ de forma que

$$\Lambda_\alpha < \Lambda_\beta \text{ siempre que } \alpha < \beta$$

tenemos una relación de *orden* que cumple la propiedad de *Tricotomía.* En este caso denotaremos por

$$\Lambda = (\Lambda_\alpha)_{\alpha=1}^m$$

y diremos que los subíndices definen un *orden de filtración.*

En general es un problema saber cuando es que existe una filtración adaptada a f con la propiedad que sus invariantes maximales sean los Λ_α ya conocidos. Sin embargo, como mencionamos anteriormente, usando la propiedad de *no ciclos* se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1 *Sea* $f \in Diff^r(M)$ *y* $\Lambda = \Lambda_1 \cup, \ldots, \cup \Lambda_m$ *una unión disjunta de conjuntos cerrados invariantes bajo* f *tal que* $L(f) \subset \Lambda$. *Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a)Existe una filtración adaptada a f *tal que*

$$K_\alpha(\mathrm{M}) = \Lambda_\alpha \qquad \forall \alpha \in I_m$$

(b)Los $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ *no tienen ciclos y los subíndices definen un orden de filtración.*

$$\Lambda = (\Lambda_\alpha)_{\alpha=1}^m$$

(a $\Rightarrow$ b)Por la parte (c) de la definición de filtración se tiene que $f^n(M_\alpha)$ es un subconjunto de M_α para todo natural n, esto implica que $M_\alpha \subset M - W^s(\Lambda_{\alpha+1})$ es decir

$$W^s(\Lambda_{\alpha+1}) \subset M - M_\alpha$$

También de la misma condición se tiene que $\overline{M - M_\alpha}$ es un subconjunto de $f(M - M_\alpha)$ de donde resulta que $M - M_\alpha$ está contenido en $f^n(M - M_\alpha)$ para todo natural n, es decir usando f^{-n} tenemos que $M - M_\alpha$ es un subconjunto de $M - W^u(\Lambda_\alpha)$ de donde obtenemos que

$$W^u(\Lambda_\alpha) \subset M_\alpha$$

para α fijado. Si consideramos $\alpha < \beta$ las condiciones $W^s(\Lambda_\beta) \subset M - M_{\beta-1}$ y $W^u(\Lambda_\alpha) \subset M_\alpha$ implican que no se puede cumplir $\Lambda_\alpha >> \ldots >> \Lambda_\beta$ es decir tenemos

$$\Lambda_\alpha < \Lambda_\beta \text{ siempre que } \alpha < \beta$$

Para concluir será suficiente ver que no existen 1-ciclos puesto que los subíndices ya están *ordenados*.

Cuando $\alpha = \beta$ tenemos que $W^u(\Lambda_\alpha) \cap W^s(\Lambda_\alpha)$ es un subconjunto de $M_\alpha - M_{\alpha-1}$ y como los conjuntos estable e inestables son invariantes bajo f por la observación que sigue a la definición de filtración tenemos que

$$W^u(\Lambda_\alpha) \cap W^s(\Lambda_\alpha) = \Lambda_\alpha$$

lo que es suficiente para decir que no existe 1-ciclos.

$\diamond$

Para mostrar la otra implicación del teorema necesitamos algunos lemas previos, los que pueden ser encontrados entre líneas, en el trabajo de S. Smale, [12], pero nosotros seguiremos a M. Shub [13] y la demostración se incluye en la página 13.

Lema 1.2.1 *Para cada $x \in M$ existen únicos $\alpha, \beta \in I_m = \{1, \dots, m\}$ tal que*

$$x \in W^s(\Lambda_\alpha) \qquad x \in W^u(\Lambda_\beta)$$

Prueba. Para cada $y \in M$, su ω-límite es un subconjunto no vacío de $L(f)$, así, existe un α tal que $\omega_y(f) \cap \Lambda_\alpha \neq \emptyset$. Para concluir mostraremos que $\omega_y(f) \subset \Lambda_\alpha$, y por la definición de conjunto estable, tendremos que $y \in W^s(\Lambda_\alpha)$.

Para ver esto consideremos dos vecindades abiertas W y V en M, tales que $\Lambda_\alpha \subset W$ y $(L(f) - \Lambda_\alpha) \subset V$. Pero en vista que Λ_α es invariante bajo f, para cada x en Λ_α, existe una vecindad abierta U_x en M, contenida en W con $f(U_x) \subset W$ (pues $\Lambda_\alpha \subset f^{-1}(W)$ y $f^{-1}(W)$ es abierto). Haciendo $U = \cup_{x \in \Lambda_\alpha} U_x$ tenemos que $\Lambda_\alpha \subset U \subset W$ y $f(U) \subset W$, de donde podemos afirmar que $U \cap V = \emptyset$ y $f(U) \cap V = \emptyset$.

Por otro lado afirmamos que sólo existe un número finito de índices n, para los que se cumple $f^n(y) \notin U$. De lo contrario, eligiendo n_1 el primer natural mayor que uno tal que $f^{n_1}(y)$ *se sale* de U, y observando que $f^{n_1-1}(y)$ pertenece a U, es decir $f^{n_1}(y)$ está en $f(U)$, tenemos por la elección de U y V, que $f^{n_1}(y) \notin V$.

Sea n_2 el primer índice mayor que $n_1 + 1$ y que $f^{n_2}(y) \notin U$, siguiendo el mismo razonamiento resulta que $f^{n_2}(y) \notin V$. Procediendo inductivamente, obtenemos una sucesión *creciente* en $\mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(y) \in K$ donde $K = M - (U \cup V)$ es compacto, y por esto podemos suponer que $f^{n_k}(y)$ converge a un elemento z de K, cuando k tiende al infinito. Esto es equivalente a decir que $z \in K \cap \omega_y(f)$.

Pero $\Lambda_\alpha \subset W$ y $(L(f) - \Lambda_\alpha) \subset V$ entonces $\omega_y(f)$ es un subconjunto de $U \cup V$, es decir z es un elemento de $U \cup V$ y de K, lo que es una contradicción con la definición de K.

Con todo esto se ha mostrado que sólo existe un número finito de indices, n para los que se cumple que $f^n(y) \notin U$, y como U, es una vecindad de Λ_α, que puede elegirse arbitrariamente pequeña, resulta que $\omega_y(f) \subset \Lambda_\alpha$.

Procediendo análogamente, con el α-limite obtendremos la otra afirmación.

$\Diamond$

Lema 1.2.2 *Para cada β el conjunto cerrado $\cup_{\alpha \leq \beta} W^u(\Lambda_\alpha)$ tiene como una de sus vecindades abiertas a $\cup_{\alpha \leq \beta} W^s(\Lambda_\alpha)$*

La prueba se dará más adelante,en la página 15.

Lema 1.2.3 *Si P y Q son conjuntos compactos tal que*

$$P \subset Int(Q) \qquad y \qquad P = \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)$$

Entonces existe un compacto V que cumple

$$f(V) \subset Int(V) \qquad P \subset Int(V) \qquad y \qquad V \subset Int(Q)$$

Prueba. Se define $A_n = \cap_{j=0}^{n} f^j(Q)$ lo que nos da una sucesión decreciente $A_n \subset A_{n-1}$ de conjuntos que convergen a P que por la definicíon es invariante bajo f, de modo que existe n_0 tal que $A_{n_0} \subset \text{Int}(Q)$ y también $f(A_{n_0}) \subset \text{Int}(Q)$ puesto que Q es una vecindad de P.

Pero $f(A_{n_0}) = f(A_{n_0}) \cap Q = A_{n_0+1}$ y por inducción tenemos que $f^j(A_{n_0}) = A_{n_0+j}$ para todo j entero no negativo, de esto resulta que $\cap_{n \geq 0} f^n(A_{n_0}) = f^{n_0}(P) = P$.

Así existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s(A_{n_0}) \subset \text{Int}(A_{n_0})$ puesto que $P \subset \text{Int}(A_{n_0})$ es decir $f(f^{s-1}(A_{n_0}))$ es un subconjunto de $\text{Int}(A_{n_0})$ y por la continuidad de f existe V_1 una vecindad compacta de $f^{s-1}(A_{n_0})$ tal que

$$\overline{V_1} \subset \text{Int}(Q) \qquad y \qquad f(\overline{V_1}) \subset \text{Int}(A_{n_0})$$

Pero $f^{s-1}(A_{n_0}) \subset \text{Int}(\overline{V_1})$ y así, nuevamente por la continuidad de f, existe una vecindad compacta V_2 de $f^{s-2}(A_{n_0})$ tal que

$$\overline{V_2} \subset \text{Int}(Q) \qquad y \qquad f(\overline{V_2}) \subset \text{Int}(\overline{V_1})$$

Continuando por inducción encontramos una vecindad compacta V_j de $f^{s-j}(A_{n_0})$ tal que $\overline{V}_j \subset \text{Int}(Q)$ y $f(\overline{V}_j) \subset \text{Int}(\overline{V}_{j-1})$

Este proceso termina cuando $j = s$, con el que obtenemos $V_1 \ldots V_s$, conjuntos compactos contenidos en $\text{Int}(Q)$, tales que

$$f^{s-j}(A_{n_0}) \subset \text{Int}(V_j), \qquad f(\overline{V}_j) \subset \text{Int}(\overline{V}_{j-1}), \forall j \geq 2 \qquad f(\overline{V_1}) \subset \text{Int}(Q)$$

Con esto se construye el compacto $V = V_1 \cup \ldots \cup V_s$ que cumple $V \subset \text{Int}(Q)$ y $P \subset \text{Int}(V)$ más aún $f(V) \subset \text{Int}(A_{n_0}) \cup \text{Int}(V_1) \cup \ldots \cup \text{Int}(V_{s-1})$ y como V_s es una vecindad de $f^{s-s}(A_{n_0})$ obtenemos que $f(V) \subset \text{Int}(V)$ por ser f un homeomorfismo.

$\Diamond$

Lema 1.2.4 *Si K es compacto y $K \subset \cup_{j=1}^{r} W^s(\Lambda_{\alpha j})$ Entonces*

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(K) \subset \bigcup_{j=1}^{r} W^u(\Lambda_{\alpha j})$$

Prueba. Elegir un $y \in \cap_{n\geq 0} f^n(K)$, es equivalente a decir que es posible escoger una sucesión $x_n \in K$ tal que $f^n(x_n) = y$ de modo que por la compacidad de K, existe $x \in K$, que es el límite de (x_{nj}), una subsucesión de (x_n).

Como todos los n_j son positivos, se tiene que $x \in \alpha_y(f) \cap K \subset L(f) \cap K$ así, existe $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in K \cap \Lambda_\alpha$ que es un subconjunto de la intersección de Λ_α y $\cup_{j=1}^{r} W^s(\Lambda_{\alpha j})$.

Luego para algún α_j se tiene $W^s(\Lambda_{\alpha j}) \cap \Lambda_\alpha \neq \emptyset$, de donde $\Lambda_\alpha = \Lambda_{\alpha_j}$ y de esto resulta que $x \in \Lambda_{\alpha_j}$, es decir $y \in \Lambda_{\alpha_j} = f(\Lambda_{\alpha_j}) \subset W^u(\Lambda_{\alpha_j})$ de donde obtenemos el resultado.

$\diamond$

Observación 1.2.1 *Como los conjuntos inestables, siempre son invariantes bajo f, resulta que cuando K contiene a $\cup_{j=1}^{\ell} W^u(\Lambda_{\alpha j})$ entonces*

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(K) = \bigcup_{j=1}^{\ell} W^u(\Lambda_{\alpha j})$$

Demostración del teorema 1.2.1
Construcción de M por inducción

Paso 1. Mostremos inicialmente que $W^s(\Lambda_1)$ es una vecindad de Λ_1 usando el Lema 1.2.2. Para eso supongamos que existe $x \in W^u(\Lambda_1) - \Lambda_1$ de modo que por el Lema 1.2.1 existe un único α tal que $x \in W^s(\Lambda_\alpha)$ es decir $x \in (W^u(\Lambda_1) - \Lambda_1) \cap W^s(\Lambda_\alpha)$:
Si $\alpha = 1$ tendríamos $\Lambda_1 >> \Lambda_1$ lo que no es posible por hipótesis.
Si $\alpha > 1$ tenemos que $x \notin \Lambda_\alpha$ pues de lo contrario tendríamos que x también es un elemento de $W^u(\Lambda_\alpha)$ lo que es falso, ya que los conjuntos inestables son disjuntos por Lema 1.2.1. Con esto tenemos que $\Lambda_1 >> \Lambda_\alpha$ lo que contradice la condición $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots < \Lambda_m$.

Ahora que $W^s(\Lambda_1)$ es una vecindad de Λ_1, se puede elegir un compacto Q_1 tal que

$$W^u(\Lambda_1) \subset \mathrm{Int}(Q_1) \quad y \quad Q_1 \subset W^s(\Lambda_1)$$

Así por el Lema 1.2.4 resulta que $\Lambda_1 = \cap_{n\geq 0} f^n(Q_1)$ y por el Lema 1.2.3 existe un compacto V_1 que cumple

$$f(V_1) \subset \mathrm{Int}(V_1), \qquad W^u(\Lambda_1) \subset \mathrm{Int}(V_1) \quad y \quad V_1 \subset \mathrm{Int}(Q_1)$$

Con esto escogemos una función diferenciable g tal que $V_1 = \{x \in M : g(x) = 0\}$ (ver [1]) y para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño definimos al variedad diferenciable con *borde* $M_1 = g^{-1}([0,\varepsilon])$ que cumple $f(M_1) \subset \mathrm{Int}(M_1)$ y $M_1 \subset W^s(\Lambda_1)$ puesto que $g^{-1}(0) = V_1 \subset W^s(\Lambda_1)$.

Paso 2. Por el Lema 1.2.2 existe un compacto Q_2 tal que

$$W^u(\Lambda_1) \cup W^u(\Lambda_2) \subset \mathrm{Int}(Q_2) \qquad y \qquad Q_2 \subset W^s(\Lambda_1) \cup W^s(\Lambda_2)$$

Así por el Lema 1.2.4 y la observación que le sigue resulta que $W^u(\Lambda_1) \cup W^u(\Lambda_2) = \bigcap_{n\geq 0} f^n(Q_2)$, de esto y por el Lema 1.2.3 existe un compacto V_2 que cumple

$$f(V_2) \subset \mathrm{Int}(V_2), \qquad W^u(\Lambda_1) \cup W^u(\Lambda_2)) \subset \mathrm{Int}(V_2) \qquad y \qquad V_2 \subset \mathrm{Int}(Q_2)$$

Análogamente escogemos una función diferenciable g tal que $V_2 \cup M_1 = \{x \in M : g(x) = 0\}$ y para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño definimos al variedad diferenciable con *borde* $M_2 = g^{-1}([0,\varepsilon])$ que cumple $f(M_2) \subset \mathrm{Int}(M_2)$ y $M_2 \subset W^s(\Lambda_1) \cup W^s(\Lambda_2)$ puesto que $g^{-1}(0) = V_2 \cup M_1 \subset W^s(\Lambda_1) \cup W^s(\Lambda_2)$.

Paso 3. Mostraremos que para cada $\beta \in I_m = \{0, \ldots, m\}$ se cumple que

$$\Lambda_\beta = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} f^k(M_\beta - M_{\beta-1})$$

Por la construcción $\cup_{\alpha<\beta} W^u(\Lambda_\alpha) \subset \mathrm{Int}(V_{\beta-1})$ que es un subconjunto de $M_{\beta-2} \cup V_{\beta-1}$ que además está contenido en $M_{\beta-1}$ y de esto resulta que

$$\bigcup_{\alpha<\beta} W^u(\Lambda_\alpha) \subset M_{\beta-1}$$

También tenemos que $M_{\beta-1} \subset \cup_{\alpha<\beta} W^s(\Lambda_\alpha)$ y como $\cup_{\alpha\leq\beta} W^u(\Lambda_\Lambda) \subset M_\beta$ por el Lema 1.2.4 nos da

$$\bigcap_{n>0} f^n(M_\beta) = \bigcup_{\alpha\leq\beta} W^u(\Lambda_\alpha)$$

Usando la segunda relación en la primera igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
\textstyle\bigcap_{n\geq 0} f^n(M_\beta - M_{\beta-1}) &\subset (M_\beta - M_{\beta-1}) \cap (\textstyle\bigcap_{n>0} f^n(M_\beta)) \\
&= (M_\beta - M_{\beta-1}) \cap [W^u(\Lambda_\beta) \cup \textstyle\bigcup_{\alpha<\beta} W^u(\Lambda_\alpha)] \\
&= (M_\beta - M_{\beta-1}) \cap W^u(\Lambda_\beta) \\
&\subset W^u(\Lambda_\beta),
\end{aligned}$$

donde se ha vuelto a usar la segunda relación en la última igualdad. Con todo esto obtenemos

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(M_\beta - M_{\beta-1}) \subset W^u(\Lambda_\beta) \tag{1.2}$$

Análogamente usando el Lema 1.2.1 y $\cap_{n\geq 0} f^{-n}(M - M_\gamma) \subset \cup_{\alpha=\gamma+1}^{m} W^s(\Lambda_\alpha)$, para $\gamma = \beta - 1$ y $\gamma = \beta$, luego de tomar la diferencia resulta que:

$$\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(M_\beta - M_{\beta-1}) \subset W^s(\Lambda_\beta) \tag{1.3}$$

Pero como no existen 1-ciclos $W^u(\Lambda_\beta) \cap W^s(\Lambda_\beta) = \Lambda_\beta$ y de esto resulta que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} f^k(M_\beta - M_{\beta-1}) \subset \Lambda_\beta$$

De donde obtenemos lo deseado puesto que $\cap_{k\in\mathbb{Z}} f^k(M_\beta - M_{\beta-1})$ es el invariante maximal y Λ_β es un subconjunto cerrado de $M_\beta - M_{\beta-1}$, invariante bajo f

$\diamond$

Prueba del Lema 1.2.2.
Para mostrar este resultado probaremos que para cada α se cumple que

$$\overline{W^u(\Lambda_\alpha)} \subset \bigcup_{\gamma\leq\alpha} W^u(\Lambda_\gamma) \tag{1.4}$$

Así tomando la unión en la anterior ecuación tenemos que $\cup_{\alpha\leq\beta}\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$ es un subconjunto de $\cup_{\alpha\leq\beta}(\cup_{\gamma\leq\alpha} W^u(\Lambda_\gamma))$ lo que es suficiente para probar que $\cup_{\alpha\leq\beta} W^u(\Lambda_\alpha)$ es cerrado.

Para mostrar que $\cup_{\alpha\leq\beta} W^s(\Lambda_\alpha)$ es abierto aplicaremos (1.4) al nuevo difeomorfismo f^{-1} cambiando los subíndices de la partición $L(f) \subset \Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ haciendo $\Lambda_\alpha = \tilde{\Lambda}^{m-\alpha+1}$ y usamos en la primera igualdad el Lema 1.2.1

$$\begin{aligned}\left[\cup_{\alpha\leq\beta} W^s(\Lambda_\alpha)\right]^c &= \cup_{\alpha>\beta} W^s(\Lambda_\alpha)\\ &= \cup_{\alpha>\beta} W^u_{f^{-1}}(\tilde{\Lambda}^{m-\alpha+1})\\ &= \cup_{\gamma\leq m-\beta} W^u_{f^{-1}}(\tilde{\Lambda}^{\gamma})\end{aligned}$$

La ecuación (1.4) muestra que este último conjunto es cerrado lo que basta para afirmar que $\cup_{\alpha\leq\beta} W^s(\Lambda_\alpha)$ es abierto.

Para concluir consideremos $x \in W^u(\Lambda_\alpha) - \Lambda_\alpha$ con $\alpha \leq \beta$ (si $x \in \Lambda_\alpha$, resulta inmediatamente que $x \in W^s(\Lambda_\alpha)$), por el Lema 1.2.1 x está en el conjunto estable de algún Λ_γ pero cuando $x \in \Lambda_\gamma$ resulta sin dificultad que $x \in W^u(\Lambda_\gamma)$ de donde la unicidad del Lema 1.2.1 nos da $\alpha = \gamma$, es decir sólo necesitamos ver cuando $x \in W^s(\Lambda_\gamma) - \Lambda_\gamma$. Luego por la definición tenemos que $\Lambda_\alpha >> \Lambda_\gamma$ pero como los subíndices definen un orden tenemos que $\alpha > \gamma$ es así $x \in \cup_{\gamma<\alpha} W^s(\Lambda_\gamma)$ es decir $\cup_{\alpha\leq\beta} W^u(\Lambda_\alpha) \subset \cup_{\alpha\leq\beta} W^s(\Lambda_\alpha)$.

Para mostrar la relación (1.4) tomemos un elemento x en $\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$, como por el Lema 1.2.1 x siempre está en algún $W^u(\Lambda_\gamma)$ sólo necesitamos probar que $\gamma \leq \alpha$

Por la afirmación 1.2.1 tenemos que $\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$ intecsecta a Λ_γ así para $\alpha = \gamma$ la prueba termina, pero cuando $\alpha \neq \gamma$ por la afirmación 1.2.3 tenemos que $\gamma < \alpha$, es decir en todos los casos siempre se puede concluir que $\gamma \leq \alpha$

Afirmación 1.2.1 *Si $\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$ intersecta a $W^u(\Lambda_\gamma)$ entonces su intersección con Λ_γ es no vacía.*

Como existe $y \in \overline{W^u(\Lambda_\alpha)} \cap W^u(\Lambda_\gamma)$ tenemos que $\mathcal{O}(f, y)$ está contenido en el conjunto cerrado $\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$, en particular $\alpha_y(f) \subset \overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$.

Pero también se tiene que $d(\Lambda_\gamma, f^n(y)) \to 0$ cuando n tiende a $-\infty$ y como Λ_γ es cerrado $\alpha_y(f) \subset \Lambda_\gamma$

De esto tenemos el resultado puesto que la compacidad garantiza que $\alpha_y(f)$ es un conjunto distinto del vacío.

Afirmación 1.2.2 *Si $\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$ intersecta a Λ_γ con $\alpha \neq \gamma$ entonces su intersección con $W^s(\Lambda_\gamma) - (\Lambda_\gamma)$ es no vacía.*

Consideremos vecindades compactas $\overline{U_\sigma}$ de Λ_σ con $\Lambda_\sigma \subset U_\sigma$ y $f(\overline{U_\beta}) \cap \overline{U_\sigma} = \emptyset$ cuando $\beta \neq \sigma$. Como existe z en la intersección podemos elegir una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $W^u(\Lambda_\alpha)$ cuyo limite x esta en Λ_γ y por esto podemos suponer que todos los x_k son elementos de U_γ.

En vista que los x_k son elementos de $W^u(\Lambda_\alpha)$ podemos asociar el *menor entero* positivo n_k tal que $f^{-n_k}(x_k) \notin U_\gamma$.

n_k crece indefinidamente puesto que el límite de x_k es un elemento de Λ_γ

El conjunto $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ no es finito pues en este caso su límite sería alguno de sus elementos, existiría x_{k_0} que estaría en Λ_γ, un subconjunto de $W^u(\Lambda_\gamma)$ y así por el Lema 1.2.1 $\alpha = \gamma$ lo que por hipótesis no es posible. Por esto es que existe un punto de acumulación, y, del conjunto $\{f^{-n_k}(x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ es decir $y \in \overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$

Observemos que para cada $\tilde{n}$ natural $f^{\tilde{n}}(f^{-n_k}(x_k))$ es un elemento de U_γ lo que es suficiente para decir que $f^{\tilde{n}}(y) \in \overline{U}_\gamma$.

Este elemento y es el que prueba la afirmación pues por el Lema 1.2.1 $y \in W^s(\Lambda_\sigma)$ para algún σ pero como $f^{\tilde{n}}(y)$ pertenece a $\overline{U}_\gamma$ para todo natural $\tilde{n}$ tenemos que $f^{\tilde{n}}(y)$

no se puede acumular en un Λ_σ que no sea Λ_γ pues también se cumple que $\overline{U}_\sigma \cap \overline{U}_\gamma = \emptyset$ cuando $\overline{U}_\gamma$ es pequeño. Si $y \in \Lambda_\gamma$ tendríamos que la intersección de $W^s(\Lambda_\alpha)$ y $W^s(\Lambda_\gamma)$ es no vacío de donde concluiríamos que $\alpha = \gamma$.

Afirmación 1.2.3 *Si $\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$ intersecta a Λ_γ con $\alpha \neq \gamma$ entonces $\gamma < \alpha$*

Por la afirmación 1.2.2 existe z en la intersección de $\overline{W^u(\Lambda_\alpha)}$ y $W^s(\Lambda_\gamma) - \Lambda_\gamma$ y como $W^s(\Lambda_\gamma) - \Lambda_\gamma$ y Λ_α son disjuntos (de lo contrario $W^u(\Lambda_\gamma) \cap \Lambda_\alpha \neq \emptyset$ y así $\alpha = \gamma$ por el Lema 1.2.1) tenemos que no se cumple $\Lambda_\gamma >> \Lambda_\alpha$

Supongamos que existen $\alpha_1 \ldots \alpha_r$, subíndices diferentes entre si y también de α y γ, tales que $\Lambda_\gamma >> \Lambda_{\alpha_1} >> \ldots >> \Lambda_{\alpha_r} >> \Lambda_\alpha$. Por la tricotomía $\alpha > \alpha_1$ o $\alpha < \alpha_1$, y en ese último caso $\Lambda_\alpha < \Lambda_{\alpha_1}$, lo que contradice nuestra suposición, es decir $\alpha > \alpha_1$. Análogamente, procediendo por inducción se tiene que $\alpha > \alpha_1 > \ldots > \alpha_r > \gamma$, es decir $\gamma < \alpha$.

1.3 Conjuntos Hiperbólicos

La noción de conjunto hiperbólico es básica en la teoría de *la estabilidad estructural* de los sistemas dinámicos diferenciables. Muchos resultados incluidos en las siguientes páginas estarán basadas en la propiedad de hiperbolicidad.

Fijemos un difeomorfismo f de clase C^r. Consideremos un punto $x \in M$ y números $C > 0, \lambda \in (0, 1)$

Definición 1.3.1 *Se dice que una trayectoria $\mathcal{O}(f; x)$ es* hiperbólica *con constantes de hiperbolicidad C, λ (y escribiremos $x \in H(C, \lambda)$ u $\mathcal{O}(f; x) \in H(C, \lambda)$ en éste caso) si para cualquier $p \in \mathcal{O}(f; x)$ existen dos subespacios vectoriales E_p^s, E_p^u de T_pM tal que:*
(a)$E_p^s \oplus E_p^u = T_pM$
(b)$D_p(f)E_p^s = E_{f(p)}^s \qquad D_p(f)E_p^u = E_{f(p)}^u$
(c)$|Df^{(n)}v| \leq C\lambda^n|v|$ *para* $v \in E_p^s, n \geq 0 \qquad |Df^{(n)}v| \leq C\lambda^{-n}|v|$ *para* $v \in E_p^u, n \leq 0$

Ahora podemos definir un *conjunto hiperbólico.* Se dice que un conjunto $\Lambda \subset M$ es un conjunto hiperbólico para f si:
(a)Λ es compacto e invariante bajo f.
(b)Existen constantes $C > 0, \lambda \in (0, 1)$ tal que para cualquier $x \in \Lambda$ tenemos que $\mathcal{O}(f; x) \in H(C, \lambda)$.

En éste caso escribiremos $\Lambda \in H(C, \lambda)$.

De la definición no es difícil ver que si Λ es un conjunto hiperbólico entonces para cualquier $p \in \Lambda$

$$E_p^s \oplus E_p^u = T_pM$$

Podemos escribir para la restricción del fibrado tangente TM de M a Λ

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u \tag{1.5}$$

donde E^s, E^u son subfibrados vectoriales, que dependen continuamente de p, definidos naturalmente del siguiente modo:

$$E^\sigma = \{(p, E_p^\sigma) : p \in \Lambda\}, \sigma = s, u$$

Diremos que (1.5) es la *estructura hiperbólica* en Λ con constantes de hiperbolicidad C, λ

Como el conjunto Λ es compacto, la noción de hiperbolicidad es independiente de la métrica. Además si $\Lambda \in H(C, \lambda)$, podemos definir una métrica d_L, de clase $\mathcal{C}^\infty$, en M de modo que para la correspondiente norma $| \ . \ |_L$ se satisface lo siguiente: Existe $\mu \in (\lambda, 1)$ tal que para $x \in \Lambda$

$$|D_x(f)v|_L \leq \mu |v|_L \text{ para } v \in E_x^s$$

$$|D_x(f^{-1})v|_L \leq \mu |v|_L \text{ para } v \in E_x^u$$

Con respecto a ésta métrica en el conjunto hiperbólico podemos escribir

$$\|Df|_{E_x^s}\| \leq \mu \qquad \|Df^{-1}|_{E_x^u}\| \leq \mu$$

para $x \in \Lambda$. En este caso diremos que (1.5) es la estructura hiperbólica en Λ con constante (de hiperbolicidad) μ.

Estas propiedades quedan expresadas en el siguiente teorema cuya prueba puede encontrase en M. Hirsch [2].

Teorema 1.3.1 *Si Λ es un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo con estructura hiperbólica (1.5) Entonces existe una vecindad W_1 de Λ y una constante $\mu \in (\lambda, 1)$ tal que $T_{W_1}M$ se descompone en una suma continua de Whitney formada por subfibrados*

$$T_{W_1}M = E^1 \oplus E^2$$

con las siguientes propiedades.
(a)$Df(E^i|_{W_1 \cap f^{-1}(W_1)}) = E^i|_{f(W_1) \cap W_1}; i = 1.2$
(b)$\|Df|_{E_x^1}\| < \mu \qquad \|Df^{-1}|_{E_x^2}\| < \mu \qquad x \in W_1$
(c)$E_x^1 = E_x^s, E_x^2 = E_x^u$ para $x \in \Lambda$

Ejemplo 1.3.1 *En particular cuando Λ es un punto fijo de f. Existe una descomposición (1.5) para T_pM, siempre que los autovalores de $D_p(f)$, tengan módulo distinto de 1.*

Para el autovalor *real* λ de $D_p(f)$, se denota por E_λ el *autoespacio generalizado* asociado a λ, considerando todos los vectores v de T_pM (isomorfo a $\mathbb{R}^m$), tal que $(D_p(f) - \lambda I)^k v = 0$ para algún k.

Análogamente, para un par de autovalores *complejos conjungados* λ y $\overline{\lambda}$, $E_{\lambda,\overline{\lambda}}$ es la interseción de $\mathbb{R}^m$ con la suma de E_λ y $E_{\overline{\lambda}}$, que son los autoespacios generalizados para la complejificación de $D_p(f)$.

Con esto podemos definir

$$E^u = \oplus_{|\lambda|>1} E_\lambda + \oplus_{|\lambda|>1} E_{\lambda,\overline{\lambda}} \qquad y \qquad E^s = \oplus_{|\lambda|<1} E_\lambda + \oplus_{|\lambda|<1} E_{\lambda,\overline{\lambda}}$$

Cuando ningún autovalor de $D_p(f)$ tiene modulo igual a 1, tenemos que $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ y cada uno de los subespacios E^σ, $\sigma = s, u$, son subespacios invariantes bajo $D_p(f)$, esto muestra el ejemplo.

Por otro lado el conjunto de los autovalores de la restricción $D_p(f)|_{E^s}$, es igual a todos los autovalores de $D_p(f)$, con modulo menor a 1. (análogamente, para la restricción $D_p(f)|_{E^u}$) es decir tenemos que.

$$\{\lambda : \lambda \text{ es autovalor de } D_p(f)|_{E^s}\} \subset B_1(0)$$

Esto es suficiente para decir que existe $\tilde{\mu} < 1$ y una norma $\|\ .\ \|_s$ en E^s, equivalente a la norma inicial, para la cual

$$\|D_p(f)v\|_s \leq \tilde{\mu}\|v\|_s \text{ para } v \in E^s$$

basta para eso, tomar $\tilde{\mu} < 1$, más grande que el *radio espectral* de $D_p(f)|_{E^s}$, y definir

$$\|x\|_s = \sum_{n\geq 0} \tilde{\mu}^{-n} \|D_p(f^n)\|$$

que es convergente, puesto que para n suficientemente grande, $\|D_p(f^n)\| < \tilde{\mu}^n$.

También se tiene que $D_p(f^{-1}) - \lambda I = -\lambda(D_p(f) - \frac{1}{\lambda}I) \circ D_p(f^{-1})$ lo que implica que

$$\{\lambda : \lambda \text{ es autovalor de } D_p(f^{-1})|_{E^u}\} \subset B_1(0)$$

y análogamente a lo anterior, existe una norma $\|\ .\ \|_u$ en E^u, que cumple

$$\|D_p(f^{-1})v\|_u \leq \tilde{\mu}\|v\|_u \text{ para } v \in E^u$$

Pero $T_pM = E^s \oplus E^u$ por construcción, esto implica que existe un producto interno en T_pM (que da origen a la métrica d_L), de modo que para su correspondiente norma.

$$\|D_p(f)|_{E^s}\| \leq \mu \qquad \|D_p(f^{-1})|_{E^u}\| \leq \mu$$

cambiando $\tilde{\mu}$ si es necesario.

El Ejemplo anterior, nos da condiciones suficientes (que también son necesarias) para que un punto fijo p de f sea hiperbólico. Siguiendo este razonamiento consideremos Λ, un conjunto compacto e invariante bajo f; trataremos de encontrar condiciones suficientes para que Λ sea hiperbólico bajo f.

Tomemos para eso $r_0 > 0$ independiente de x tal que $\exp_x$ sea un difeomorfismo local. Podemos decir que la derivada $D_y(\exp_x)$ es una aplicación de T_xM en $T_{\exp_x(y)}M$.

Eligiendo $0 < \varepsilon < r_0$ el conjunto $\overline{B_\varepsilon(inc)}$ podemos identificarlo con una vecindad $\chi_\varepsilon^0(\Lambda)$ del *campo de vector* cero en el fibrado TM por el homeomorfismo $\varphi : \overline{B_\varepsilon(inc)} \to \chi_\varepsilon^0(\Lambda)$ de modo que a cada $k \in B_\varepsilon(inc)$ le asociamos $\varphi(k) : \Lambda \to T_\Lambda M$ donde $[\varphi(k)]_x = \exp_x^{-1} k(x)$

Como ya hemos dicho queremos dar condiciones suficientes para que un conjunto compacto, invariante bajo f sea hiperbólico, y lo que en realidad se cumple es que a cada conjunto hiperbólico, siempre le corresponde algún punto fijo hiperbólico, de una aplicación en una *variedad de dimensión infinita.* Para explicar esta afirmación, asociemos a la aplicación $\mathbf{F} : C^0(\Lambda, M) \to C^0(\Lambda, M)$, dada por $\mathbf{F}(k) = f \circ k \circ f^{-1}$, la nueva función $\tilde{\mathbf{F}}$ definida en $\chi_\varepsilon^0(\Lambda)$ mediante la carta φ, por la identidad $\tilde{\mathbf{F}} = \varphi \circ \mathbf{F} \circ \varphi^{-1}$, más explícitamente

$$[\tilde{\mathbf{F}}\sigma]_x = \exp_x^{-1}(f(\exp_{f^{-1}(x)}[\sigma]_{f^{-1}(x)}))$$

Como $\chi^0(\Lambda)$ es un espacio lineal, su espacio tangente es él mismo, en particular $T_0\chi_\varepsilon^0(\Lambda)$, esto implica que la derivada $D_0(\tilde{\mathbf{F}})$ es un automorfismo lineal de $\chi^0(\Lambda)$, pero como $D_0(\exp_x^{-1})$ es la identidad. Usando limites, resulta que

$$D_0(\tilde{\mathbf{F}})\sigma = Df \circ \sigma \circ f^{-1}$$

explícitamente $[D_0(\tilde{\mathbf{F}})\sigma]_x = D_{f^{-1}(x)}(f)[\sigma]_{f^{-1}(x)}$.

Proposición 1.3.1 *Si Λ un conjunto compacto e invariante bajo f. Λ es hiperbólico bajo f* si y sólo si *$D_0(\tilde{\mathbf{F}})$ tiene a 0 como punto fijo hiperbólico; ó lo que es lo mismo, inc_Λ es un punto fijo hiperbólico para $\mathbf{F}$.*

Prueba. Si Λ es hiperbólico, entonces el espacio $\chi^0(\Lambda)$, admite una descomposición para $D_0(\tilde{\mathbf{F}})$

$$\chi^0(\Lambda, T_\Lambda M) = \chi^0(\Lambda, E^s) \oplus \chi^0(\Lambda, E^u)$$

Por otro lado, si $\chi^0(\Lambda) = E^s \oplus E^u$, es una descomposción hiperbólica para $D_0(\tilde{\mathbf{F}})$, es posible reconstruir una descomposición hiperbólica de $T_\Lambda M$, usando la regla que sigue

$$E_x^\sigma = E^\sigma(x) = \{g(x) : g \in E^\sigma\}, \sigma = s, u$$

$\Diamond$

1.4 El Teorema de la Variedad Estable

1.4.1 Aplicaciones de Lipschitz

Se considera entre los espacios métricos X y Y el espacio vectorial $Lip(X, Y) = \{f : X \to Y : f$ es de lipschitz $\}$ y llamemos $Lip(f)$ al ínfimo de las constantes de lipschitz de f, un elemento de $Lip(X, Y)$, y denotemos por $Lip_1(X, Y)$ a las contracciones.

Proposición 1.4.1 *Sea Y un espacio metrico completo Si $f \in Lip_1(Y)$ se cumple*
(a)Existe un único $y_0 \in Y : f(y_0) = y_0$.
(b)Para cada $y \in Y$, $\lim_{n \to +\infty} f^n(y) = y_0$.

Esta proposición es consecuencia del *Teorema del punto fijo* para contracciones.

Corolario 1.4.1 *Sea Y un espacio metrico completo y $F : X \times Y \to Y$ una aplicación continua en X para la que existe $0 < K < 1$ tal que $\delta(F(x, y_1); F(x, y_2)) \leq K\delta(y_1, y_2)$ para todo $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ Entonces:*
(a)Para cada $x \in X, F_x : Y \to Y$ definida por $F_x(y) = F(x, y)$ tiene un único punto fijo $\phi(x) \in Y$
(b)La aplicación $\phi : X \to Y$ es continua puesto que verifica

$$\delta(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \frac{1}{1-K}\delta(F(x_1, \phi(x_1)); F(x_2, \phi(x_1))), \forall x_1 x_2 \in X \tag{1.6}$$

Para tener mas información sobre esta proposición y su Corolario vea por ejemplo E.L. Lima [5], S. Höning[3].

Proposición 1.4.2 *Sea $Y = E$ un espacio de* Banach
(a)Si $h \in Lip_1(E)$ entonces $H = I + h$ es un homeomorfismo y además

$$Lip((I + h)^{-1}) \leq \frac{Lip(h)}{1 - Lip(h)}$$

(b)Si $f \in \mathcal{C}(E)$ es inyectiva y $f^{-1} \in Lip(E)$ entonces $f + h$ es inyectiva. Además cuando $h \in Lip(E)$ con $Lip(h).Lip(f^{-1}) < 1$ se tiene

$$Lip((f + h)^{-1}) \leq \frac{Lip(f^{-1})}{1 - Lip(h).Lip(f^{-1})} = \left[(Lip(f^{-1}))^{-1} - Lip(h)\right]^{-1}$$

Prueba.

(a)La aplicación continua $F(x, y) = y - h(x)$ satisface en $E \times E$ la desigualdad $\delta(F(x_1, y); F(x_2, y)) \leq Lip(h)\|x_1 - x_2\|$ así por el corolario anterior, para cada $y \in E$

existe un único x que cumple $F(x,y) = x$ es decir existe una única solución del la ecuación $H(x) = y$ para y conocido, por lo tanto H es inyectiva.

Mas aún la aplicación que a cada y le asocia el punto fijo de F_y es continua y como esta aplicación es la inversa de H, se tiene que $H = I + h$ es un homeomorfismo.

Por (1.6) se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(H^{-1}(x_1), H^{-1}(x_2)) &\leq \frac{1}{1 - Lip(h)} \delta(F(x_1, H^{-1}(x_1)); F(x_2, H^{-1}(x_2))) \\ &= \frac{1}{1 - Lip(h)} \|h(x_2) - h(x_1)\| \\ &\leq \frac{Lip(h)}{1 - Lip(h)} \delta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

(b)Para probar la segunda parte bastará observar que $f + h = (I + h \circ f^{-1}) \circ f$ y aplicar directamente la parte (a) puesto que $Lip(h \circ f^{-1}) \leq Lip(h).Lip(f^{-1}) < 1$ de donde se obtiene que $f + h$ es un homeomorfismo y también la desigualdad deseada.

Observación 1.4.1 *La desigualdad de (b) se puede obtener usando las siguientes:*

$$\|x_1 - x_2\| \leq Lip(f^{-1}) \|f(x_1) - f(x_2)\|$$

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq Lip(h) \|x_2 - x_1\|$$

En efecto

$$\begin{aligned} \|(f+h)(x_1) - (f+h)(x_2)\| &\geq \|f(x_1) - f(x_2)\| - \|h(x_2) - h(x_1)\| \\ &\geq \{Lip(f^{-1})\}^{-1} \|x_1 - x_2\| - Lip(h)\|x_1 - x_2\| \\ &\geq ([Lip(f^{-1})]^{-1} - Lip(h))^{-1} \delta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Observación 1.4.2 *Si $\lambda = Lip(h) < 1$ se cumple para $r > 0$ y $x_0 \in E$*

$$\overline{B}_{r(1-\lambda)}((I+h)(x_0)) \subset (I+h)\{\overline{B}_r(x_0)\}$$

De la desigualdad $\|x - x_0\|(1 - \lambda) \leq \|(I+h)(x) - (I+h)(x_0)\|$ tenemos que $I + h$ es inyectiva y además cuando $\|y - (I+h)(x_0)\| < (1-\lambda)r$ entonces se cumple $\|(I+h)^{-1}(y) - x_0\| < r$ es decir $y \in (I+h)(B_r(x_0))$

Así la aplicación $I + h$ es abierta cuando h es una contracción y como es inyectiva, resulta que su inversa $(I+h)^{-1}$ es continua.

Teorema 1.4.1 *Sea f un homeomorfismo definido en un abierto $\mathcal{U}$ de un espacio de Banach E, sobre algún abierto $\mathcal{V}$ del espacio de Banach F cuya inversa es de lipschitz. Si $h : \mathcal{U} \to F$ es de lipschitz y $Lip(h).Lip(f^{-1}) < 1$ entonces $f + h$ es un homeomorfismo y*

$$Lip((f+h)^{-1}) \leq ([Lip(f^{-1})]^{-1} - Lip(h))^{-1}$$

Prueba. Como $f+h=(I+h\circ f^{-1})\circ f$ y $v_1=h\circ f^{-1}$ es Lipschitz con $\lambda = Lip(v_1)\leq Lip(h)Lip(f^{-1})<1$, se tiene por la observación 1.4.2 que $I+v_1$ es abierta, además como existe x_0, un punto fijo $v_1(x_0)=x_0$. Consideraremos la nueva función $v(x)=v_1(x_0-x)-x_0$ que va ha cumplir $v(0)=0$ y $Lip(v)=\lambda<1$, así por la proposición 1.4.2 $I+v$ es inyectiva y $Lip(I+v)^{-1}\leq\frac{1}{1-\lambda}$.

Para $r>0$ fijo con $\overline{B}_r(0)\subset V$ se cumple $\overline{B}_{r(1-\lambda)}((I+v)(0))\subset(I+v)\{\overline{B}_r(0)\}$ así la inversa de $I+v$, vamos ha considerar que satisface $w:\overline{B}_{(1-\lambda)r}(0)\to V$, donde $(I+w)\{\overline{B}_{(1-\lambda)r}(0)\}\subset\overline{B}_r(0)$ y $(I+v)\circ(I+w)=I$; pero desarrollando la ultima desigualdad en el algebra adecuada resulta que $w=-v(I+v)^{-1}$ luego $Lip(w)\leq\frac{Lip(v)}{1-\lambda}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$; es decir la w que nos servirá para construir la inversa de $I+v$ la buscaremos en

$$E=\{u\in C^0(B_{(1-\lambda)r}(0);F):u(0)=0,Lip(u)\leq\frac{\lambda}{1-\lambda}\}$$

Pero, decir que $(I+v)\circ(I+w)=I$ es equivalente a $w=-v(I+v)^{-1}$ y como el espacio $(E,\|\ .\ \|_{sup})$ es completo; buscaremos a w como el punto fijo de la función $\phi(u)=-v(I+u)$.

Se puede probar con un cálculo directo que $\phi:E\to E$ y además ϕ es una contracción por eso existe una única función $w\in E$ tal que $w=-v(I+w)$ de donde resulta que $I+v$ es un homeomorfismo y por eso $I+v_1$ también, por lo tanto se obtiene que $f+h$ es un homeomorfismo.

Corolario 1.4.2 *Si $L:E\to E$ es un automorfismo de un espacio de Banach y $h\in Lip(E(r),E)$ cumple $Lip(h).\|L^{-1}\|<1$ entonces $L+h:E(r)\to E$ es un homeomorfismo sobre un abierto y $Lip((L+h)^{-1})\leq\frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1}-Lip(h)}$. Además si $h(0)=0$ se tiene $E(s)\subset U$ donde $s=r.(\|L^{-1}\|^{-1}-Lip(h))$.*

Proposición 1.4.3 *Si $g:U\subset E\to F$ es un homeomorfismo en un abierto y la inversa g^{-1} es lipschitz con $Lip(g^{-1})<\lambda$ entonces para cada $r>0$*

$$\overline{B}_{\frac{r}{\lambda}}(g(x))\subset g(\overline{B}_r(x))$$

1.4.2 La Variedad Estable

Fijado un punto p de M, un entero k, $0\leq k\leq m$ y un número positivo η. Se dice que $D(p,\eta)$ es un disco diferenciable (de clase C^r) $k-$dimensional de centro p y radio η si el espacio T_pM se puede escribir como el producto $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{m-k}$ de modo que usando las coordenadas y en $\mathbb{R}^k$ y z en $\mathbb{R}^{m-k}$ tenemos

$$D(p,\eta)=\exp_p\{(y,\varphi(y)):y\in\mathbb{R}^k,|y|<\eta\}$$

donde φ es una aplicación de clase C^r de $\{y \in \mathbb{R}^k : |y| < \eta\}$ sobre $\mathbb{R}^{m-k}$ y $\varphi(0) = 0$.

Cuando consideramos un elemento p del conjunto Λ que es hiperbólico bajo el difeomorfismo de clase C^r f, los conjuntos estable $W^s(p)$ e inestable $W^u(p)$, se constituyen en subvariedades diferenciables de clase C^r y además en el punto p tienen a E_p^s y E_p^u como sus espacios tangentes.
Más aún, localmente, $W_\epsilon^s(p)$ es la imagen bajo la exponencial del gráfico de una función de clase C^r $\varphi : E_p^s(\epsilon) \to E_p^u$. Son discos diferenciables.

Análogamente, $W_\epsilon^u(p)$ se puede relacionar con el gráfico de una fución de clase C^r $\psi : E_p^u(\epsilon) \to E_p^s$.

Teorema 1.4.2 *Asumiendo que $f \in Diff^r(M)$, $r \geq 1$ y que Λ es un conjunto hiperbólico de f. Entonces existe un $\epsilon_0 > 0$ teniendo las siguientes propiedades.*
Si $p \in \Lambda$ y $dim E_p^s = k$, entonces
(a)existen inmersiones b^s, b^u de clase C^r:

$$b^s : \mathbb{R}^k \to M, b^s(0) = p, b^s(\mathbb{R}^k) = W^s(p);$$

$$b^u : \mathbb{R}^{m-k} \to M, b^u(0) = p, b^s(\mathbb{R}^{m-k}) = W^u(p);$$

(b)para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ existen discos diferenciables (de clase C^r) $W_\epsilon^s(p)$, $W_\epsilon^u(p)$ siendo subconjuntos de

$$W^s(p) \cap N_\epsilon(p), \qquad W^u(p) \cap N_\epsilon(p)$$

conteniendo a p y además
(b.1)$T_p W_\epsilon^\sigma(p) = E_p^\sigma, \sigma = s, u$
(b.2)para $x \in N_\epsilon(p) - W_\epsilon^s(p)$ existe un $n_1 > 0$ con

$$d(f^{n_1}(x), f^{n_1}(p)) \geq \epsilon;$$

(b.3)para $x \in N_\epsilon(p) - W_\epsilon^u(p)$ existe un $n_2 > 0$ con

$$d(f^{-n_2}(x), f^{-n_2}(p)) \geq \epsilon;$$

Se puede hallar $W^s(p)$ usando el punto fijo de la llamada *transformación gráfico.* Para dar una descripción de como se demuestra, supongamos que $\Lambda = \{p\}$ es un punto fijo hiperbólico donde $T_pM = E^s \oplus E^u$ (Vea el ejemplo de la Sec. 1.3). Sean $E^s(r)$ y $E^u(r)$ las bolas abiertas centradas en 0, de radio r contenidas en E^s y E^u respectivamente. Consideremos el espacio de Banach $C(E^s(r), E^u(r))$ (más formalmente $Lip_1(E^s(r), E^u(r))$) con la norma $\|k\| = \sup\{\|k(x)\|_u : x \in E^s(r)\}$.

Si $W = graf(k)$ es el gráfico de alguna aplicación, lo mismo se obtiene para $A^{-1}(W)$ con $A = D_p(f)$, cuando nos restringimos a $E^s(r) \times E^u(r)$. Es decir existe $k_1 : E^s(r) \to E^u(r)$ de modo que $graf(k_1) = A^{-1}(W) \cap E^s(r) \times E^u(r)$.

No se requiere de gran esfuerzo para ver que la tranformación gráfico definida por $\Gamma_f : k \to k_1$ es una contracción en $\mathcal{C}(E^s(r), E^u(r))$. De esto se sigue que existe una *única* aplicación $\varphi : E^s(r) \to E^u(r)$ tal que $\Gamma_f(\varphi) = \varphi$ y $\lim_n {\Gamma_f}^n(k) = \varphi$ para cada $k \in \mathcal{C}(E^s(r), E^u(r))$.

La diferenciabilidad de φ, es una cuestión más delicada. En vista que los subespacios H de aplicaciones $k : E^s(r) \to E^u(r)$ de clase C^r, que cumplen $\Gamma_f(H) \subset H$, no se satisface que $\varphi \in H$ puesto que H no es cerrado, en $C^r(E^s(r), E^u(r))$. En general Γ_f no es una contración relativa a las normas C^r de las C^r-aplicaciones. Sin embargo se puede mostrar que φ es de clase C^r (igual que f), pero requiere de argumentos mas sofisticados.

Sea $W_{\varepsilon,f}$ el disco diferenciable asociado al gráfico de φ. Por la construcción contiene a p con $T_pW_{\varepsilon,f} = E^s$ y es invariante bajo f, en el sentido $f(W_{\varepsilon,f}) \subset W_{\varepsilon,f}$. Más aun $W_{\varepsilon,f}$ contiene los puntos de $E^s(r) \times E^u(r)$ cuyas iteradas positivas permanecen en $E^s(r) \times E^u(r)$ y estas iteradas de hecho convergen a p. Entonces se puede mostrar que

$$W^s(p) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(W_{\varepsilon,f})$$

y tener que $W^s(p)$ es una inmersión inyectiva de clase C^r, en M y además

$$W^s(p) = \{x \in M : \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p\}$$

Una demostración del teorema de la variedad estable puede ser encontrada en Katok [6] y también en [13]. Para el caso de un punto fijo hiperbólico una demostración diferente, usando el *teorema de función implícita*, se encuentra en [9], o el trabajo original de Irwin[4].

La siguiente proposición puede ser presentada del teorema de la variedad estable pero daremos otra demostración pues las estimativas que se presentan las usaremos para demostrar algunas de las verdades más importantes de las siguientes páginas.

Sea E un espacio de Banach que tiene una descomposición en una suma directa $E = E^1 \oplus E^2$ para la que existen las *proyecciones* $P_j : E \to E^j$ de modo que

$$P_j \circ P_j \to P_j \qquad y \qquad x = P_1(x) + P_2(x)$$

define una partición única.

Para una función cualquiera $g : E \to E$ denotaremos por $g_j = P_j \circ g$ es decir tenemos que $g_j : E \to E_j$, en particular para la función identidad.

Podemos entonces definir la siguiente *norma*

$$\|x\|_b = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

donde $x_j = P_j(x)$.

Para una constante r positiva usaremos la siguiente notación $E(r) = \{x \in E : \|x\|_b < r\}$

Proposición 1.4.4 *Sea T un automorfismo lineal en E que es hiperbólico con respecto a la descomposición $E = E^1 + E^2$ y existe una constante positiva $\lambda < 1$ tal que $\|T_1\| < \lambda$ y $\|T_2^{-1}\| < \lambda$. Sea $g : E(r) \to E$ una aplicación cercana a T tal que $Lip(g - T) < \epsilon$ y $\|g(0)\| \leq \delta$.*
Si $\lambda + \epsilon < 1$ y $\delta < r(1 - \lambda - \epsilon)$ Entonces g tiene un único punto fijo p_g en $E(r)$ también

$$\|p_g\|_b \leq \frac{1}{1 - \lambda - \epsilon}\|g(0)\|_b \tag{1.7}$$

Además p_g depende continuamente de g en la topología C^0.

Prueba. Definamos $\tilde{g} : E(r) \to E$

$$\tilde{g}(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2) + T_2^{-1}[x_2 + T_2x_2 - g_2(x_1, x_2)]$$

que tienen los mismos puntos fijos que la función $g : E \to E$ de modo que buscaremos los puntos fijos de $\tilde{g}$. Note que la norma $\|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)\|_b$ es igual al máximo entre $\|g_1(x) - g_2(y)\|$ y $\|T_2^{-1}[(x_2 - y_2) + (T_2P_2 - g_2)(x) - (T_2P_2 - g_2)(y)]\|$ de modo que vamos ha tener

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)\|_b &\leq \max\{(\epsilon + \lambda)\|x - y\|; \lambda(1 + \epsilon)\|x - y\|\} \\ &\leq (\epsilon + \lambda)\|x - y\|_b \end{aligned}$$

así $\tilde{g}$ resulta ser una contracción. Para ver que el punto fijo p_g esta en $E(r)$ basta observar que $\|\tilde{g}(0)\|_b = \|g(0)\|_b$ y

$$\|\tilde{g}(x)\|_b \leq (\epsilon + \lambda)\|x\|_b + \|\tilde{g}(0)\|_b \leq (\epsilon + \lambda)r + \|\tilde{g}(0)\|_b \leq (\epsilon + \lambda)r + \delta$$

por la elección de la constante δ.

Veamos ahora la dependencia continua del punto fijo p_g, para eso recordemos que es el limite de la sucesión $\tilde{g}^n(0)$ cuando n tiende al infinito y como $\tilde{g}^n(0) - \tilde{g}(0) = (\tilde{g}^n(0) - \tilde{g}^{n-1}(0)) + (\tilde{g}^{n-1}(0) - \tilde{g}^{n-2}(0)) + \ldots + (\tilde{g}^3(0) - \tilde{g}^2(0)) + (\tilde{g}^2(0) - \tilde{g}(0))$ usando que $\|\tilde{g}^j(0) - \tilde{g}^{j-1}(0)\|_b \leq (\epsilon + \lambda)\|\tilde{g}^{j-1}(0) - \tilde{g}^{j-2}(0)\|_b$ para todo j obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}^n(0) - \tilde{g}(0)\|_b &\leq [(\epsilon + \lambda)^{n-2} + (\epsilon + \lambda)^{n-3} + \ldots + (\epsilon + \lambda)] + \|\tilde{g}(0)\|_b \\ &\leq (\epsilon + \lambda)\Big[\frac{1 - (\lambda + \epsilon)^{n-1}}{1 - (\lambda + \epsilon)}\Big]\|\tilde{g}(0)\|_b \end{aligned}$$

así al tomar el límite sobre n nos da $\|\tilde{g}^n(0) - \tilde{g}(0)\|_b \leq \left[\frac{(\lambda+\epsilon)}{1-(\lambda+\epsilon)}\right]\|\tilde{g}(0)\|_b$ pero como $\|p_g\|_b \leq \|p_g - \tilde{g}(0)\|_b + \|\tilde{g}(0)\|_b$ obtenemos

$$\|p_g\|_b \leq \frac{1}{1-\lambda-\epsilon}\|g(0)\|_b$$

Para ver la dependencia continua, definamos $\tilde{f}$ de modo análogo a $\tilde{g}$ y de esto tenemos que $\|\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)\|_b \leq \|g(x) - f(x)\|_b \leq \rho(g, f)$ así por la desigualdad triangular después de sumar y restar $\|\tilde{f}(p_g)\|_b$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|p_g - p_f\|_b &\leq \|\tilde{g}(p_g) - \tilde{f}(p_g)\|_b + \|\tilde{f}(p_g) - \tilde{f}(p_g)\|_b \\ &\leq \rho(\tilde{g}, \tilde{f}) + (\epsilon + \lambda)\|p_g - p_f\|_b \\ &\leq \rho(\tilde{g}, \tilde{f}) + (\epsilon + \lambda)\frac{\|\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)\|_b}{1-\lambda-\epsilon}\end{aligned}$$

y de esto resulta que

$$\|p_g - p_f\|_b \leq \frac{\rho(\tilde{g}, \tilde{f})}{1-\lambda-\epsilon}$$

$\diamond$

Sea p un punto periódico e hiperbólico de un difeomorfismo f de clase C^1. Podemos aplicar el Teorema de la *variedad estable* y hallar un $\epsilon_0 > 0$ y su correspondiente disco diferenciable

$$W^s_{\epsilon_0}(p) = \exp_p\{(y, \varphi(y)) : y \in \mathbb{R}^k \subset T_pM, |y| < \epsilon_0\}$$

en $W^s(p)$ con φ de clase C^1 y $\varphi(0) = 0$.

Análogamente, (usando f^{-1}) existe ψ de clase C^1 con $\psi(0) = 0$ tal que

$$W^u_{\epsilon_0}(p) = \exp_p\{(\psi(z), z) : z \in \mathbb{R}^{m-k} \subset T_pM, |z| < \epsilon_0\}$$

Con esto podemos definir, en una vecindad del origen de $T_pM = E^s_p \oplus E^u_p$, la aplicación $H(y, z) = (y - \psi(z), z - \varphi(y))$, que es de clase C^1 y cumple $H(0, 0) = (0, 0)$. Más aún $H(W^s_{\epsilon_0}(p)) \subset E^s_p$ y $H(W^u_{\epsilon_0}(p)) \subset E^u_p$.

Pero al ser $H = I - (\psi, \varphi)$ con $-(\psi, \varphi) \in Lip_1(T_pM)$, por la proposición 1.4.2, H es un homeomorfismo con $D_0H = I$. Lo que es suficiente para decir que H, es un difeomorfismo en una vecindad del origen de $E^s_p \oplus E^u_p$.

Con esto podemos considerar el difeomorfismo local $\tilde{f} = H \circ \exp_p^{-1} \circ f \circ \exp_p \circ H^{-1}$, definido en una vecindad del origen que cumple $\tilde{f}(0) = 0$ y $D_0\tilde{f} = D_0f$. además en este caso, H lleva el gráfico de ψ en $W^u_\epsilon(0, \tilde{f})$ y el de φ en $W^s_\epsilon(0, \tilde{f})$, que son vecindades del origen de E^u_p y E^s_p respectivamente. Y como f en una vecindad de p y $\tilde{f}$ alrededor del origen tienen el mismo comportamiento.

Podemos suponer que la variedad estable local $W^s_{\epsilon_0}$ (Resp. inestable), de un punto periódico y f-hiperbólico p, sea la imagen bajo $\exp_p$ de una vecindad del origen en el subespacio estable (Resp. inestable) de $D_p(f)$, la parte lineal de f.

Tomemos dos discos diferenciables D_1, D_2 definidos por

$$D_i = \exp_p\{(\psi_i(z), z) : z \in \mathbb{R}^{m-k} \subset T_pM, |z| < \epsilon_0\},$$

$i = 1, 2$ con ψ_i de clase $\mathcal{C}^1$, definamos

$$\tilde{\rho}_1(D_1, D_2) = \sup_{|z|\leq\epsilon_0}\left(|\psi_1(z) - \psi_2(z)| + \|\frac{\partial\psi_1}{\partial z}(z) - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}(z)\|\right)$$

Teorema 1.4.3 *(Lema de Inclinación)Asumiendo que N es un disco diferenciable que tiene en el punto q, una intersección transversal con $W^s(p)$. Dado $\epsilon > 0$ existe un $n(\epsilon)$ tal que para cada $n \geq n(\epsilon)$ podemos hallar funciones ψ_n de clase $\mathcal{C}^1$,*

$$\psi_n : \{z \in \mathbb{R}^{m-k} \subset T_pM, |z| < \epsilon_0\} \to \{\mathbb{R}^k \subset T_pM\}$$

de modo que los discos

$$N_n = \exp_p\{(\psi_n(z), z) : z \in \mathbb{R}^{m-k} \subset T_pM, |z| < \epsilon_0\}$$

tienen las siguientes propiedades:
(a)$N_n \subset f^n(N)$;
(b)$\tilde{\rho}_1(N_n, W^u_{\epsilon_0}(p)) < \epsilon$

Prueba. Consideremos inicialmente el difeomorfismo f, definido en una vecindad V, del origen de $E^s_p \oplus E^u_p$. Donde podemos considerar que V es el producto de las bolas abiertas $E^s_p(\varepsilon_0) \subset E^s_p$ y $E^u_p(\varepsilon_0) \subset E^u_p$, para $\varepsilon_0 > 0$, de modo que para tener $\| \, . \, \|_b$ se toma en cuenta la restricción, a cada subespacio, de la norma asociada a la hiperbolicidad de $D_0\tilde{f} = D_pf$ originada por d_L (vea la notación de la proposición 1.4.4 y la Sec. 1.3).

Esto implica que la expresión de $\tilde{f}$ en V, viene dada por

$$\tilde{f}(y, z) = (A^s y + R_s(y, z), A^u y + R_u(y, z))$$

donde

$$D_0\tilde{f} = D_pf = (A^s, A^u) \qquad y \in E^s_p(\varepsilon_0) \qquad z \in E^u_p(\varepsilon_0)$$

$$\|A^s\| \leq a < 1 \qquad \|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$$

Supongamos que $\tilde{N}$ es el gráfico de una función $\psi : E_p^u(\varepsilon_0) \to E^s$ de clase $\mathcal{C}^1$, con $\psi(0) = \tilde{q} \in E^s - \{0\}$

Mostraremos que dado $\epsilon > 0$, es posible hallar $n(\epsilon)$ tal que para cada $n \geq n(\epsilon)$ existen funciones $\psi_n : E_p^u(\varepsilon_0) \to E_p^u(\varepsilon_0)$ de clase $\mathcal{C}^1$, de modo que sus *gráficos* $\tilde{N}_n$ tienen las siguientes propiedades

$$\tilde{N}_n \subset \tilde{f}^n(\tilde{N}) \qquad \tilde{\rho}_1(\psi_n, 0) < \epsilon$$

Para ver esto note que

$$\frac{\partial R_s}{\partial z}|_{E_p^u(\varepsilon_0)} = \frac{\partial R_u}{\partial y}|_{E_p^s(\varepsilon_0)} = 0$$

Como $\frac{\partial R_\sigma}{\partial z}(0,0) = \frac{\partial R_\sigma}{\partial y}(0,0) = 0$ para $\sigma = s, u$ y son funciones continuas, existe una vecindad abierta del origen $V_1 \subset V$ tal que

$$\max_{V_1}\{\|\frac{\partial R_\sigma}{\partial z}\|, \|\frac{\partial R_\sigma}{\partial y}\|\} < k \qquad \sigma = s, u$$

donde $a_1 = a + k < 1$, $0 < k < 1$

$$b = (\frac{1}{a} - k) > 1 \qquad k < \frac{(b-1)^2}{4}$$

Podemos suponer que $\tilde{q} \in V_1$ y que $E_p^u(\varepsilon_0) \subset V_1$. Sea ν_0 un vector unitario en el plano tangente a $\tilde{N}$ en $\tilde{q}$. Como $\tilde{N}$ corta transversalmente a $E_p^s(\varepsilon_0)$ en $\tilde{q}$, con relación a la descomposición $E_p^s(\varepsilon_0) \times E_p^u(\varepsilon_0)$ de V, podemos escribir $\nu_0 = (\nu_0^y, \nu_0^z)$ con $\nu_0^z \neq 0$. Sea λ_0 la inclinación de ν_0, esto es $\lambda_0 = \|\nu_0^y\|/\|\nu_0^z\|$.

Consideremos

$$\begin{array}{ll} q_1 = \tilde{f}(\tilde{q}) & \nu_1 = D_{\tilde{q}}\tilde{f}(\nu_o) \\ q_2 = \tilde{f}^2(\tilde{q}) & \nu_2 = D_{q_1}\tilde{f}(\nu_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ q_n = \tilde{f}^n(\tilde{q}) & \nu_n = D_{q_{n-1}}\tilde{f}(\nu_{n-1}) \end{array}$$

$\nu_1 \in T_{q_1} f(\tilde{N})$ y $f(\tilde{N})$ corta transversalmente a $W_{\varepsilon_0}^s(0, \tilde{f})$ entonces

$$\begin{aligned} D_{\tilde{q}}(\tilde{f})\nu_o &= \begin{pmatrix} A^s + \frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial y} & \frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial z} \\ 0 & A^u + \frac{\partial R_u(\tilde{q})}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_0^y \\ \nu_0^z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^s\nu_0^y + \frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial y}\nu_0^y + \frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial z}\nu_0^z \\ A^u\nu_0^z + \frac{\partial R_u(\tilde{q})}{\partial z}\nu_0^z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\lambda_1 = \frac{\|\nu_1^y\|}{\|\nu_1^z\|} = \frac{\|A^s\nu_0^y + \frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial y}\nu_0^y + \frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial z}\nu_0^z\|}{\|A^u\nu_0^z + \frac{\partial R_u(\tilde{q})}{\partial z}\nu_0^z\|}$$

el númerador es mayorado por

$$\|A^s\nu_0^y\| + \|\frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial y}\nu_0^y\| + \|\frac{\partial R_s(\tilde{q})}{\partial z}\nu_0^z\| \leq a\|\nu_0^y\| + k\|\nu_0^y\| + k\|\nu_0^z\|$$

el denominador es minorado por

$$\|A^u\nu_0^z\| - \|\frac{\partial R_u(\tilde{q})}{\partial z}\nu_0^z\| \geq \frac{1}{a}\|\nu_0^z\| - k\|\nu_0^z\|$$

y de esto

$$\lambda_1 \leq \frac{a\lambda_0 + k\lambda_0 + k}{\frac{1}{a} - k} \leq \frac{\lambda_0 + k}{b} = \frac{\lambda_0}{b} + \frac{k}{b}$$

$$\lambda_2 = \frac{\|\nu_2^y\|}{\|\nu_2^z\|} \leq \frac{\lambda_1 + k}{b} \leq \frac{\lambda_0}{b^2} + k\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{b^i}$$

$$\lambda_n = \frac{\|\nu_n^y\|}{\|\nu_n^z\|} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b^i} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{b-1}$$

Si tomamos ν_0 en la esfera unitaria del plano tangente a $\tilde{N}$ en $\tilde{q}$ tal que la inclinación λ_0 sea la maxima inclinación entonces para cualquier v_n en la esfera unitaria de $T_{q_n}\tilde{f}^n(\tilde{N})$, la inclinación $\lambda_n(v_n) = \frac{\|v_n^y\|}{\|v_n^z\|}$ satisface $\lambda_n(v_n) < \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{b-1}$ (en particular si en v_n alcanza su maxima inclinación), pero $\frac{\lambda_0}{b^n} \to 0$ y $\frac{k}{b-1} < \frac{1}{4}(b-1)$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n < \frac{b-1}{4}$ para cualquier $n > n_0$.

El espacio tangente $T_{q_{n_0}}\tilde{f}^n(\tilde{N})$ varia continuamente con q_{n_0}, por eso existe un disco $\tilde{N}_{n_0} \subset \tilde{f}^{n_0}(\tilde{N})$ con centro en $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{q}) = q_{n_0}$ y $dim(\tilde{N}_{n_0}) = dim(\tilde{N})$, tal que la inclinación λ de cualquier vector unitario en $T_p\tilde{N}_{n_0}$ con $p \in \tilde{N}_{n_0}$ satisface $\lambda < \dfrac{b-1}{2}$.

Como $\frac{\partial R_s}{\partial z}|_{E_p^u(\epsilon_0)} = 0$ y $\overline{E_p^u(\epsilon_0)}$ es compacto; para $0 < k_1 < \min\{\epsilon, k\}$ existe $0 < \delta < \min\{1, \epsilon\}$ (que define V_1) tal que

$$\max_{V_1}\{\|\frac{\partial R_s}{\partial z}\|\} \leq k_1$$

donde $V_1 \subset E_p^s(\epsilon_0) \times E_p^u(\epsilon_0)$.

Debido ha que $\tilde{f}^n(\tilde{q}) \to 0$ cuando n crece indefinidamente y V_1 es una vecindad del origen, entonces podemos suponer que $\tilde{N}_{n_0}$ es un subconjunto de V_1.

Sea $\nu = (\nu^y, \nu^z) \in T_{\tilde{p}}\tilde{N}_{n_0}$, para $\tilde{p} \in \tilde{N}_{n_0}$. ν tiene inclinación $\lambda_{n_0} = \frac{\|\nu^y\|}{\|\nu^z\|} < \frac{1}{4}(b-1)$ y las inclinaciones de sus iteradas $\{\lambda_{n_0+1}, \lambda_{n_0+2}, \ldots, \lambda_{n_0+n}\}$ son pequeñas.

$$D_{\tilde{p}}(\tilde{f})\nu = \begin{pmatrix} A^s\nu^y + \frac{\partial R_s(\tilde{p})}{\partial y}\nu^y + \frac{\partial R_s(\tilde{p})}{\partial z}\nu^z \\ A^u\nu^z + \frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial y}\nu^y + \frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial z}\nu^z \end{pmatrix}$$

de donde la inclinación λ_{n_0+1} de $D_{\tilde{p}}(\tilde{f})\nu$ es:

$$\lambda_{n_0+1} = \frac{\|A^s\nu^y + \frac{\partial R_s(\tilde{p})}{\partial y}\nu^y + \frac{\partial R_s(\tilde{p})}{\partial z}\nu^z\|}{\|A^u\nu^z + \frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial y}\nu^y + \frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial z}\nu^z\|}$$

cuyo numerador es menor que $a\|\nu^y\| + k\|\nu^y\| + k_1\|\nu^z\|$ y el denominador es mayor que $\|A^u\nu^z\| - \|\frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial y}\nu^y\| - \|\frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial z}\nu^z\| \geq \frac{1}{a}\|\nu^z\| - k\|\nu^z\| - k\|\nu^y\|$.

luego

$$\lambda_{n_0+1} \leq \frac{\|\nu^y\| + k_1|\nu^z\|}{b\|\nu^z\| - k\|\nu^y\|} \leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - k(\frac{b-1}{2})} \qquad (\lambda_{n_0} \leq \tfrac{b-1}{2})$$

$$\leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - \frac{b-1}{2}} = \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{\frac{b+1}{2}}$$

Sea $b_1 = \frac{b+1}{2} > 1$, entonces $\lambda_{n_0+1} < \frac{\lambda_{n_0}}{b_1} + \frac{k_1}{b_1-1}$. Inductivamente puede probarse que para $\nu_n \in T_{\tilde{p}_n}\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0})$ se cumple para las inclinaciones $\lambda_{n_0+n} = \lambda_{n_0+n}(\nu_n) \leq \frac{\lambda_{n_0}}{(b_1)^n} + \frac{k_1}{b_1-1}$, por esto existe $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > \tilde{n}$, $\lambda_{n_0+n} < \frac{k_1}{b_1-1}$, pero $k_1 < \min\{\epsilon, k\}$ y $b_1 > 1$ entonces $\lambda_{n_0+n} < \frac{b_1\epsilon}{b_1-1}$.

Es decir para $b_1 = \frac{b+1}{2} > 1$ con $\lambda_{n_0+n} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{(b_1)^n} + \frac{k_1}{b_1-1}$, existe $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > \tilde{n}$.

$$\lambda_{n_0+n} \leq \epsilon\Big(1 + \frac{1}{b_1 - 1}\Big)$$

Como $\nu \in T_{\tilde{p}}\tilde{N}_{n_0}$ puede ser elegido como el vector unitario que tenga la maxima inclinación (λ_{n_0}), entre la inclinaciones de los vectores unitarios tangentes a $\tilde{N}_{n_0}$, tenemos que para $n \geq \tilde{n}$ cualquier vector no nulo tangente a $\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0}) \cap V_1$, tiene la inclinación menor que $\lambda_{n_0+n} \leq \epsilon(1 + \frac{1}{b_1-1})$.

Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n(\epsilon)$, todos los vectores no nulos tangentes a $\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0}) \cap V_1$ en p_n, tienen inclinación menor que ϵ, es decir $T_{\tilde{f}^n(\tilde{p})}\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0}) = T_{\tilde{p}_n}\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0})$ es casi paralelo a $E^u_p(\varepsilon_0)$ para n suficientemente grande.

Por otro lado $\tilde{f}$ expande a $\tilde{N}_{n_0}$ con *razón* $(\frac{1}{a} - k) > 1$. Para ver esto, comparemos la norma de $\nu_n = (\nu_n^y, \nu_n^z) \in T_{\tilde{p}}\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0})$ y de su iterada $\nu_{n+1} = (\nu_{n+1}^y, \nu_{n+1}^z) = D_{\tilde{p}}(f)\nu_n$

$$\frac{\sqrt{\|\nu_{n+1}^y\|^2 + \|\nu_{n+1}^z\|^2}}{\sqrt{\|\nu_n^y\|^2 + \|\nu_n^z\|^2}} = \frac{\|\nu_{n+1}^z\|}{\|\nu_n^z\|}\sqrt{\frac{1+\lambda_{n+1}^2}{1+\lambda_n^2}}$$

donde λ_j es la inclinación de ν_j. .

Pero de la definición tenemos que $\nu_{n+1}^z = A^u\nu_n^z + \frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial z}\nu_n^z + \frac{\partial R_u(\tilde{p})}{\partial y}\nu_n^y$ de donde $\|\nu_{n+1^z}\| \geq \frac{1}{a}\|\nu_n^z\| - k\|\nu_n^z\| - k\|\nu_n^y\|$, entonces resulta que

$$\frac{\|\nu_{n+1}\|}{\|\nu_n\|} \geq \left(\frac{1}{a} - k - k\lambda_n\right)\sqrt{\frac{1+\lambda_{n+1}^2}{1+\lambda_n^2}}$$

Pero las inclinaciones λ_n y λ_{n+1} se hacen arbitrariamente pequeñas, por lo tanto para un valor grande de n, tenemos que las normas de las iteradas de los vectores no nulos, tangentes a $\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0}) \cap V_1$ crecen a una razón próxima de $(\frac{1}{a} - k) > 1$.

Luego el diámetro de $\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0})$ es aproximadamente el diámetro de $\tilde{N}_{n_0}$ multiplicado por $(\frac{1}{a} - k)^n$. Así $\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0})$ puede alcanzar cualquier valor prefijado, eligiendo n suficientemente grande. De este hecho junto con la pequeña inlcinación uniforme de los espacios tangentes a $\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0})$ podemos afirmar que existe $n(\epsilon)$ de modo que para $n > n(\epsilon)$, $\tilde{f}^n(\tilde{N}_{n_0}) \cap V_1 \subset \tilde{f}^n(\tilde{N})$ es el gráfico de una función $\psi_n : E_p^u(\varepsilon_0) \to E_p^u(\varepsilon_0)$ de clase C^1, con $\tilde{\rho}_1(\psi_n, 0) < \epsilon$ (C^1-próximo de $E_p^u(\varepsilon_0)$), via la proyección canónica en $E_p^u(\varepsilon_0)$.
Con todo esto podemos afirmar que está demostrado el lema de la inclinación.

◊

1.5 Algunas consecuencias de la hiperbolicidad

Definición 1.5.1 *Se dice que un difeomorfismo f es expansivo cuando existe $\alpha > 0$ para el cual decir $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ implica que $x = y$.*

En éste caso diremos que α es una constante de expansividad para f.

Proposición 1.5.1 *Sea Λ un conjunto cerrado de M, que es hiperbólico bajo f, entonces $f|_\Lambda$ es expansivo.*

Prueba. Consideremos ϵ_0 como en el Teorema 1.4.2. (la variedad estable) Si tenemos que $\sup\{d[f^k(x), f^k(y)] : z \in \mathbb{Z}\} \leq \epsilon_0$ para x en M y y pertenece a Λ, nos da que $x \in W^s_{\epsilon_0}(y)$ y $x \in W^u_{\epsilon_0}(y)$. Así $x \in W^s_{\epsilon_0}(y) \cap W^u_{\epsilon_0}(y)$, de donde obtenemos que $x = y$.

$\diamond$

Definición 1.5.2 *Dos subvariedades de V y W de M que se intersectan en un punto p, se dice que son transversales ó que p* es un punto de intersección transversal *si*

$$T_pV \oplus T_pW = T_pM$$

Mas generalmente si f es un difeomorfismo de una variedad diferenciable V sobre la variedad M y W es una subvariedad de M, diremos que f es *transversal a M en un punto p de V*, $f \sqcap W$ [3] si $f(p) \notin W$ o $f(p) \in W$ y $D_p(f)(T_pV) + T_{f(p)}W = T_{f(p)}M$.

Se dice que V y W son transversales $V \sqcap W$ si V y W son transversales en todos sus puntos de intersección y $f : V \to M$ es transversal a W en un subconjunto K si f es transversal a W en todos los puntos de K.

Consideremos Λ un conjunto cerrado de M, que es hiperbólico bajo f.

Proposición 1.5.2 *Sea Λ un conjunto cerrado de M, que es hiperbólico bajo un difeomorfismo de clase C^r de M, $r \geq 1$. Entonces, para cada η positivo existe un δ positivo tal que $\forall x, y \in \Lambda$ con $d(x,y) < \delta$ se tiene $W^s_\eta(x) \sqcap W^u_\eta(y) = p$, donde p es un punto de intersección transversal de $W^s_\eta(x)$ y $W^u_\eta(y)$.*

Prueba. Consideremos $\epsilon < \epsilon_0$, donde ϵ_0 es dado por el Teorema 1.4.2. Entonces $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x)$ es un único punto x y el hecho que $W^s_\epsilon \sqcap W^u_\epsilon$, sigue de $T_xW^s_\epsilon = E^s_x$, $T_xW^u_\epsilon = E^u_x$ y $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$. Entonces la proposición sigue de la dependencia continua de W^s_ϵ y W^u_ϵ en la C^1 topología.

$\diamond$

Observe que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \Lambda \qquad d(x,y) \leq \delta \Rightarrow W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \text{ es unitario}$$

Mas aún esta intersección es transversal. Denotaremos por $[x,y]_{\epsilon.\delta}$, este punto, suprimiendo los subíndices cuando no exista ambigüedad. La aplicación $[\,.\,,.\,] : U_\delta(\Lambda \times \Lambda) \to M$ es continua en el abierto $U_\delta(\Lambda \times \Lambda) = \{(x,y) : x, y \in \Lambda \text{ y } d(x,y) < \delta\}$.

Definición 1.5.3 *Un conjunto Λ cerrado de M, que es hiperbólico bajo f se dice que tiene* estructura de producto local *si para ϵ pequeño y $\delta > 0$ $[x,y]$ pertenece a Λ siempre que $d(x,y) \leq \delta$.*

[3] Usaremos $\sqcap$ para indicar la transversalidad aún cuando no sea tradicional

Proposición 1.5.3 *Sea Λ un conjunto hiperbólico bajo un difeomorfismo f, de clase C^r, con $r \geq 1$ Entonces existen vecindades $\mathcal{U}$ de Λ en M y $\mathcal{V}$ de f en $Diff^r(M)$ tal que si g pertenece a $\mathcal{V}$ y K un subconjunto de $\mathcal{U}$ invariante bajo g , entonces K es hiperbólico para g.*

Prueba. Consideremos la descomposición de TM sobre Λ

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u \qquad \|Df|_{E^s}\| < \lambda < 1 \qquad \|Df^{-1}|_{E^u}\| < \lambda < 1$$

Primero usemos la continuidad para extender continuamente los fibrados E^s y E^u sobre Λ a fibrados E^1 y E^2 definidos en un abierto U_1, pero además como los isomorfismos lineales forman un abierto, podemos hallar una vecindad U_2 de Λ contenida en U_1 donde $T_{U_2}M = E^1 \oplus E^2$.

Si x es un punto de la intersección de U_2 y $f^{-1}(U_2)$ podemos escribir la aplicación lineal $Df : E^1_x \oplus E^2_x \to E^1_{f(x)} \oplus E^2_{f(x)}$ como una matriz

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}_x$$

además restringiendo nuestra atención a una vecindad posiblemente mas pequeña U_3 de Λ tenemos

$$\|\tilde{A}\| < \lambda + \frac{\delta}{2} \qquad \|\tilde{B}\| < \frac{\delta}{2} \qquad \|\tilde{C}\| < \frac{\delta}{2} \qquad \|\tilde{D}^{-1}\| < \lambda + \frac{\delta}{2}$$

pues la aplicación que a cada x le asocia $D_x(f)$ es continua y por la hiperbolicidad de f en $x \in \Lambda$ $\tilde{B} = \tilde{C} = 0$.

Ahora podemos tomar una vecindad compacta de Λ tal que $f(\overline{U}_4) \cup \overline{U}_4$ este contenido en U_3 ($\overline{U}_4 \subset f^{-1}(\overline{U}_3) \cap \overline{U}_3$). Si g esta cerca de f en la topología $\mathcal{C}^1$ la vecindad U_2 contiene a $g(U_4)$ de modo que para cada elemento x de U_4 la aplicación $D_x(g) : E^1_x \oplus E^2_x \to E^1_{g(x)} \oplus E^2_{g(x)}$ puede expresarse como una matriz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x$$

donde

$$\|A\| < \lambda + \delta \qquad \|B\| < \delta \qquad \|C\| < \delta \qquad \|D^{-1}\| < \lambda + \delta$$

Si K es un subconjunto de U_4 invariante bajo g, entonces su *fibrado inestable* es el punto fijo de cierta aplicación entre fibrados vectoriales. Definamos para eso el fibrado $e \mapsto K$ de modo que para cada x de K su correspondiente fibra es la bola unitaria del espacio de las trasformaciones lineales de E_x^2 a E_x^1.

Sea $F : e \rightarrow e$ una aplicación que preserva las fibras, más específicamente la la restricción de F a la fibra en x denotada por F_x cumple

$$F_x : e_x \rightarrow e_{g(x)}$$

y viene definida como una *"función gráfico"* ($F_x = \Gamma_{D_x(g)}$) es decir para cada trasformación lineal T perteneciente a e_x su gráfico en $E_x^2 \oplus E_x^1$ bajo la derivada $D_x(g)$ genera el gráfico de una nueva aplicación lineal $F_x(T)$ de $E_{g(x)}^2$ a $E_{g(x)}^1$.

De la forma como se eligió U_4 existe una constante positiva $\lambda + \delta < 1$ que es una cota superior uniforme, de las constantes lipschitzianas de F_x.

Con esto a la mano podemos definir en el espacio de las secciones continuas, $\chi^0(K, e)$ completo respecto a la topología uniforme, la aplicación Γ_F dada por $\Gamma_F = F \circ \sigma \circ g^{-1}$, donde σ es una elemento de $\chi^0(K, e)$. Explícitamente

$$[\Gamma_F(\sigma)]_x = F([\sigma]_{g^{-1}(x)})$$

Así definido y por la propiedad de F en cada fibra Γ_F resulta tener un único punto fijo $\sigma \in \chi^0(K, e)$.

Esta única sección $\sigma : K \rightarrow e$ continua, cumple $F($ imagen de $\sigma) =$ imagen de σ, mas específicamente para cada x perteneciente a K tenemos $[\sigma]_x = F([\sigma]_{g^{-1}(x)})$ y por la definición de F resulta $graf(\sigma_x)$ es igual a $D_{g^{-1}(x)}(g)[graf(\sigma_{g^{-1}(x)})]$ y por ser $D_x(g)$ un isomorfismos para todo x, obtenemos un subfibrado de TM en K, que resulta ser la descomposición inestable para g.

Se cumple

$$[D_x(g)]^{-1}(graf(\sigma_x)) = graf(\sigma_{g^{-1}(x)})$$

y cada $graf(\sigma_x)$ es un subespacio vectorial de T_xM y por ser $D_x(g)$ un isomorfismo para todo x, todos los $graf(\sigma_x)$ tienen la misma dimensión de esto y por la forma como se construyo U_4 tenemos que estos gráficos generan el fibrado inestable de g en K.

Para construir el fibrado estable basta considerar en la construcción de la función gráfico, la aplicación g^{-1} y seguir usando el Teorema del punto fijo.

$\diamond$

Parte 2

La Estabilidad

Trataremos en esta parte sobre la prueba de las condiciones suficientes (que también son necesarias) para que un difeomorfismo f sea Ω-estable, para eso se da al conjunto $\Omega(f)$ una descomposición en conjuntos básicos $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ usando el Teorema 2.2.1 siempre que f cumpla el Axioma A.

Como la descomposición nos da conjuntos hiperbólicos se muestra la existencia de una vecindad V_f de difeomorfismos en la topología $\mathcal{C}^0$ tal que para cada $g \in V_f$ existe una Ω-conjugación entre $f|_{\Omega_\alpha}$ y $g|_{\tilde{\Omega}_\alpha}$.

Finalmente usaremos la filtraciones (Sec. 1.2) para probar que los difeomorfismos que cumplen el Axioma A y tienen la propiedad de no-ciclos son Ω-conjugados.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & N_1 & \xrightarrow{f} & N_2 & \\ h & \downarrow & & \downarrow & h \\ & N_3 & \xrightarrow{g} & N_4 & \end{array} \tag{2.1}$$

donde $N_1, \ldots, N_4$ son subconjuntos de M, $f, g \in Diff^r(M)$ y h es una aplicación continua.

Definición 2.0.4 *Se dice que dos sistema dinámicos f, g son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $H : M \to M$ tal que $H \circ f \circ H^{-1} = g$.*

Definición 2.0.5 *Se dice que un sistema dinámico f es Ω-estable si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad W de f en $Diff^r(M)$ tal que para cada sistema $g \in W$ existe un homeomorfismo h de $\Omega(f)$ sobre $\Omega(g)$ y cumple:*
(a)$d(x, h(x)) < \epsilon \qquad \forall x \in \Omega(f)$
(b)El diagrama (2.1) con $N_1 = N_2 = \Omega(f), N_3 = N_4 = \Omega(g)$ es conmutativo.

En éste capitulo algunas de las demostraciones necesitarán de procedimientos comunes, para eso denotaremos por X un subconjunto de M y usaremos el conjunto $\mathcal{C}^0(X, M)$ de todas las funciones continuas de X en M.

Linealizando $\mathcal{C}^0(X, M)$. Tomemos $r_0 > 0$ independiente de x tal que $\exp_x$ sea un difeomorfismo local. Podemos decir que la derivada $D_y(\exp_x)$ es una aplicación de T_xM en $T_{\exp_x(y)}M$.

Si $0 < \varepsilon < r_0$; el conjunto $\overline{B_\varepsilon(inc)} = \{k : X \to M; \rho(inc, k) \leq \varepsilon\}$ podemos identificarlo con una vecindad $\chi^0_\varepsilon(X)$ del campo de vector cero del fibrado TM por el homeomorfismo $\varphi : \overline{B_\varepsilon(inc)} \to \chi^0_\varepsilon(X)$ de modo que a cada $k \in B_\varepsilon(inc)$ le asociamos

$$\varphi(k) : X \to T_XM$$

donde $[\varphi(k)]_x = \exp_x^{-1} k(x)$

En realidad φ es una carta local sobre el espacio de Banach $\chi^0(X)$ de los *campos de vectores continuos* en M y es posible tratar a $\mathcal{C}^0(X, M)$ como una variedad diferenciable de dimensión infinita. [14] Pg. 35.

Sea Λ un conjunto cerrado de M, que además es invariante e hiperbólico bajo f y que su estructura hiperbólica tiene una constante λ (vea Sec. 1.3 para las definiciones y la métrica d_L) y que la partición $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ es posible extenderla continuamente a una vecindad compacta W de Λ con $f(W) \subset W$ tal que $T_WM = E^1 \oplus E^2$ (Teorema 1.3.1).

Para cada $x, z \in M$ tal que $d(z, f(x)) < \varepsilon$ podemos definir

$$F_{(z,x)} : T_xM \to T_zM$$

$F_{(z,x)} = D_{f(x)}(\exp_z^{-1} f(x)) = D_{f(x)}(\exp_z^{-1}) \circ D_x(f)$

Cuando $x, z \in W$, usando $T_WM = E^1 \oplus E^2$, la aplicación lineal $F_{(z,x)}$ se puede escribir como una matriz de bloque

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(z,x)}$$

donde se tiene que $A \in \mathcal{L}(E^1_x, E^1_z)$; $B \in \mathcal{L}(E^2_x, E^1_z)$; $C \in \mathcal{L}(E^1_x, E^2_z)$ y $D \in \mathcal{L}(E^2_x, E^2_z)$ con esto se define $\tilde{F}_{(z,x)}$ como la aplicación lineal cuya matriz en bloque viene dada por

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}_{(z,x)}$$

Afirmación 2.0.1 *Para cada $\eta > 0$ es posible hallar una vecindad $\mathcal{U}(\eta)$ de Λ y una constante $\delta > 0$ tal que cuando $x \in \mathcal{U}(\eta)$ y $d(f(x), z) < \delta$ se tiene*

$$\|F_{(z,x)} - \tilde{F}_{(z,x)}\| < \eta \qquad \|\tilde{F}_{(z,x)}|_{E_z^1}\| < \lambda \qquad \|\tilde{F}_{(z,x)}^{-1}|_{E_z^2}\| < \lambda$$

Prueba. Si x es un elemento de Λ y $z = f(x)$ tenemos que $F_{(z,x)} = \tilde{F}_{(z,x)} = D_x(f)$. Para el caso general el resultado sigue de la dependencia continua de $F_{(z,x)}$ y $\tilde{F}_{(z,x)}$ sobre x y z.

$\diamond$

Afirmación 2.0.2 *Para cada $\eta_1 > 0$ y $0 < \delta < \varepsilon$ existe $r = r(\eta_1, \delta) > 0$ y una $\mathcal{C}^1$-vecindad $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\delta, \eta_1)$ de f de modo que se $d(z, f(y)) \leq \delta$ y g pertenece a $\mathcal{V}$, entonces:*

$$g(B_r(y)) \subset \exp_z(B_\varepsilon(0)) \tag{2.2}$$

$$Lip[(F_{(z,y)} - \exp_z^{-1} \circ g \circ \exp_y)|_{B_r(0)}] < \eta_1 \tag{2.3}$$

Prueba. Por la continuidad uniforme de la función f existe $2r_1 > 0$ tal que cuando $d(y_1, y_2) < 2r_1$ se tiene que $d(f(y_1), f(y_2)) < \min\{d(z, f(y)), \delta - d(z, f(y))\}$ así usando que $\delta < \varepsilon$ se tiene que $f(\overline{B_{r_1}}(y)) \subset \exp_z(B_\varepsilon(0))$ además como $f(\overline{B_{r_1}}(y))$ es un compacto contenido en el interior de $\exp_z(B_\varepsilon(0))$ existe un $r(\delta) > 0$ y una $\mathcal{C}^1$-vecindad $V_1(\delta)$ de f de modo que para cada $g \in V_1$ tenemos

$$g(B_r(y)) \subset \exp_z(B_\varepsilon(0))$$

Por otro lado la aplicación $\exp_z^{-1} \circ f \circ \exp_y$ esta definida en $B_r(0)$. Si $\exp_z^{-1}$ está definida en una vecindad de ν contenida en $B_{r_1}(0)$ tenemos que

$$D_\nu(F_{(z,y)} - \exp_z^{-1} \circ g \circ \exp_y) = D_\nu[D_{f(y)} \exp_z^{-1} D_y(f) - \exp_z^{-1} \circ g \circ \exp_y]$$

que es lo mismo que

$$D_{f(y)}(\exp_z^{-1}) D_y(f) - D_{g(\exp_y \nu)}(\exp_z^{-1}).D_{\exp_y \nu}(g).D_\nu(\exp_y)$$

esta ultima expresión es cero si $f = g$ y $\nu = 0$ y en vista que la derivada es una función continua de ν en T_xM y también $g \in Diff^1(M)$ obtenemos para $\eta_1 > 0$ un $r = r(\eta_1, \delta) > 0$ y $V = V(\delta, \eta_1)$ una vecindad de f tal que $D[(F_{(z,y)} - \exp_z^{-1} \circ g \circ \exp_y)|_{B_r(0)}] < \eta_1$.

$\diamond$

2.1 Lema del Sombreamiento

Describiremos aquí algunas propiedades topológicas de las órbitas de f, lo que permite ver que cuando Λ es hiperbólico, decir que tiene estructura de producto local es equivalente a ser localmente maximal.

Usando estas propiedades, en el Lema 2.3.2 vamos ha caracterizar los difeomorfismos g cercanos a f para los que existe una conjugación "local" dado por el Lema 2.3.1.

Definición 2.1.1 *Sea f un difeomorfismo y $\xi = \{x_k\}$ una δ-órbita de f. Un punto x se dice que ϵ-sombrea a ξ si para todo k se cumple:*

$$d(f^k(x), x_k) \leq \epsilon$$

Lema 2.1.1 *Sea Λ un conjunto cerrado e hiperbólico bajo f. Entonces existe una vecindad $\mathcal{U}$ de Λ y $K > 0$ y $\alpha_0 > 0$ constantes con la siguiente propiedad: Para cada ξ, una δ-órbita contenida en $\mathcal{U}$ con $\delta < \alpha_0$, existe un punto $x \in M$ que $K\delta$-sombrea a ξ.*

Prueba. A lo largo de esta demostración consideraremos $X = \xi = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Paso 1. Se construye un operador hiperbólico $\mathbf{F}$ en el espacio $\chi^0(\xi)$ que sólo depende de f y del homeomorfismo $h : X \to X$ definido $h(x_k) = x_{k+1}$, dado por la formula

$$[\mathbf{F}(\sigma)]_x = \tilde{F}_{(x,h^{-1}(x))}([\sigma]_{h^{-1}(x)}) \qquad donde \qquad \sigma \in \chi^0(X) \tag{2.4}$$

Desde que $\tilde{F}_{(z,x)}$ sólo esta definido cuando x y z pertenecen a una pequeña vecindad W de Λ y la distancia entre $f(x)$ y z es pequeña, el operador $\mathbf{F}$ esta bien definido cuando X está contenido en una vecindad $U \cap W$ de Λ y $d(x_k, f(x_{k-1})) < \varepsilon$ para todo k. Por la construcción $\mathbf{F}$ preserva la descomposición $\chi^0(X, T_X M) = \chi^0(X, E^1) \oplus \chi^0(X, E^2)$.

En particular asumiendo la vecindad adecuada de Λ y que $d(x_k, f(x_{k-1}))$ es pequeña para todo entero k por la afirmación 2.0.1 tenemos que $\mathbf{F}$ es hiperbólico

$$\|\mathbf{F}|_{\chi^0(X,E^1)}\| < \lambda < 1 \qquad \|\mathbf{F}^{-1}|_{\chi^0(X,E^2)}\| < \lambda < 1$$

Por la afirmación 2.0.2, a cada $\eta > 0$ le podemos asociar una vecindad $U(\eta)$ de Λ y un número $\delta(\eta) > 0$ tal que cuando $\xi \subset U(\eta)$ y $d(f(x_k), x_{k+1}) < \delta(\eta)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ se tenga que

$$\sup_{x \in X} \|F_{(x,h^{-1}(x))} - \tilde{F}_{(x,h^{-1}(x))}\| < \eta \tag{2.5}$$

Paso 2. Definiendo G_f y $\mathbf{G_f}$. Consideremos la aplicación $G_f : \mathcal{C}^0(X, M) \to \mathcal{C}^0(X, M)$ definida por $G_f(k) = f \circ k \circ h^{-1}$ y por la desigualdad triangular

$$\rho(f \circ k \circ h^{-1}, inc) \leq \rho(f \circ k \circ h^{-1}, f \circ h^{-1}) + \rho(f \circ h^{-1}, inc)$$

tenemos que existen constantes $\alpha_1 > 0$ y $r_1 > 0$ tales que $G_f(B_{r_1}(inc))$ esta contenida en $B_\epsilon(inc)$ siempre que $\rho(f, h) < \alpha_1$.

Con estas condiciones podemos definir la aplicación $\mathbf{G_f} : \chi^0_{r_1}(X) \to \chi^0_{r_1}(X)$ usando la carta φ de modo que $\mathbf{G_f} = \varphi \circ G_f \circ \varphi^{-1}$ y explícitamente

$$[\mathbf{G_f}\sigma]_x = \exp_x^{-1}(f(\exp_{h^{-1}(x)}[\sigma]_{h^{-1}(x)}))$$

puesto que $G_f(k) = f \circ k \circ h^{-1}$.

Paso 3. Lipschitz de $\mathbf{G_f} - \mathbf{F}$. Usando la norma de $\chi^0(X)$ inducida por la métrica riemmaniana de M podemos estudiar la constante de lipschitz de la diferencia entre $\mathbf{G_f}$ y $\mathbf{F}$ en $B_{\tilde{r}}(0)$

$$\begin{aligned} Lip[(\mathbf{G_f} - \mathbf{F})|_{B_{\tilde{r}}(0)}] \; &\leq \sup_{x \in X} \|F_{(x,h^{-1}(x))} - \bar{F}_{(x,h^{-1}(x))}\| \\ &+ \sup_{x \in X} Lip[(F_{(x,h^{-1}(x))} - \exp_x^{-1}(f(\exp_{h^{-1}(x)}|_{B_{\tilde{r}}(0_{h^{-1}(x)})}))|_{B_{\tilde{r}}(0)}] \end{aligned}$$

Así, por lo comentado en el paso 1 y usando la afirmación 2.0.1 para $\eta > 0$ podemos hallar una constante $\delta(\eta) > 0$ y una vecindad $U(\eta)$ de modo que si $\xi \subset U(\eta)$ y también $d(x_k, fx_{k-1}) < \delta$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\sup_{x \in X} \|F_{(x,h^{-1}(x))} - \bar{F}_{(x,h^{-1}(x))}\| < \eta$.

Es posible hallar $\alpha_2(\eta) > 0$ de modo que $\rho(inc, f \circ h^{-1}) < \delta$ cuando $\rho(f, h) < \alpha_2$ es decir $d(x_k, f(x_{k-1})) < \delta$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado para $\eta_1 > 0$ la afirmación 2.0.2 permite hallar un $r(\eta_1, \delta(\eta)) > 0$ de modo que si $\rho(inc, f \circ h^{-1}) < \delta$ (podemos tomar $\tilde{r} < r(\eta_1, \delta(\eta))$) entonces

$$\sup_{x \in X} Lip[(F_{(x,h^{-1}(x))} - \exp_x^{-1}(f(\exp_{h^{-1}(x)}|_{B_{\tilde{r}}(0_{h^{-1}(x)})}))|_{B_{\tilde{r}}(0)}] < \eta_1 \qquad (2.6)$$

En resumen elegimos α_0 y U satisfaciendo:

$$\alpha_0 < \inf\{\alpha_1, \alpha_2\} \qquad r < r(\eta_1, \delta(\eta)) \qquad U \subset U(\eta)$$

entonces cuando $\rho(f, h) < \alpha_0$ y $X = \xi \subset U$ tenemos que

$$Lip[(\mathbf{G_f} - \mathbf{F})|_{B_{\tilde{r}}(0)}] < \eta + \eta_1 \qquad \|\mathbf{G}(0)\| = \rho(f \circ h^{-1}, inc) < \alpha_0$$

y

$$\|\mathbf{F}|_{\chi^0(X,E^1)}\| < \lambda < 1 \qquad \|\mathbf{F}^{-1}|_{\chi^0(X,E^2)}\| < \lambda < 1$$

Paso 4. Aplicaremos la proposición 1.4.1 al espacio $\chi^0(X, T_X M) = \chi^0(X, E^1) \oplus \chi^0(X, E^2)$ con la norma $\| \cdot \|_b$. Existe una constante $c > 0$ que solo depende de las extensiones E^1 y E^2 a la vecindad W de Λ y da la equivalencia de las normas $\| \cdot \|_b$ y $\| \cdot \|_{riem}$ en $E^s \oplus E^u$

$$\frac{1}{c}\| \cdot \|_b \leq \| \cdot \|_{riem} \leq c\| \cdot \|_b$$

y análogamente para las normas asociadas a $\chi^0(X, T_X M) = \chi^0(X, E^1) \oplus \chi^0(X, E^2)$.

Esta proposición da la existencia de un punto fijo de $\mathbf{G_f}$ lo que garantiza la existencia de una función continua $j : U \to M$ tal que $\mathbf{G_f}(j) = j$, es decir $f \circ j = j \circ h$ y también $\|\varphi(j)\|_{riem} \leq \tilde{r}_1$ más precisamente tenemos que $\|\varphi(j)\|_b \leq K_1 \|\mathbf{G_f}(0)\|_b$.

Pero $\|\varphi(j)(x)\|_{riem} = d(x, j(x))$ y para todo k $\|\mathbf{G_f}(0)(x_k)\|_{riem} = d(x_k, f(x_{k-1}))$, así existe una constante $K > 0$ de modo que para la función continua $j : \xi \to M$, que cumple $j(x_{k+1}) = f(j(x_k))$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, satisface $\rho(inc, j) < K.\delta$ puesto que $d(x_k, f(x_{k-1})) < \delta$, y de esto resulta que, al hacer $x = j(x_0)$ tenemos la órbita $f^k(x) = j(x_k)$ que satisface $d(x_k, f^k(x)) < K\delta$ para todo entero k es decir x $K\delta$-sombrea a ξ.

$\diamondsuit$

Observación 2.1.1 *Con las hipótesis del teorema anterior, existe una vecindad $\mathcal{U}$ de Λ y una constante positiva α_0 de modo que se cumple: Para cada $\xi = \{x_k : k_1 \leq k \leq k_2\}$ una δ-órbita periódica ($x_{k_1} = x_{k_2}$) contenida en $\mathcal{U}$ con $\delta < \alpha_0$, existe un punto periódico $x \in M$ que $K\delta -$ sombrea a ξ.*

Basta considerar U, α_0 y K como en el Lema 2.1.1 y tomar en el espacio topológico $\xi = \{x_{k_1+n} : 0 \leq n \leq p, p = k_2 - k_1\}$ el homeomorfismo $h : \xi \to \xi$ definido por $h(x_{k_1+n}) = x_{k_1+n+1}$ si $0 \leq n \leq p-1$ y $h(x_{k_1+p}) = x_{k_1}$.

Siguiendo la demostración del Lema 2.1.1 podemos afirmar que existe una función continua $j : \xi \to U$ tal que $f \circ j = j \circ h$ y $\rho(id, j) < K\delta$ en particular $f^n(j(x_{k_1})) = jh^n(x_{k_1}) = j(x_{k_1+n})$ para $0 \leq n \leq p-1$ y también $f^p(j(x_{k_1})) = jh^p(x_{k_1}) = j(x_{k_2})$ de esto el resultado sigue tomando $x = j(x_{k_1})$.

Teorema 2.1.1 *(Lema del Sombreamiento)Supongamos que Λ tiene estructura de producto local. Entonces: Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda δ-órbita ,ξ, contenida en Λ, existe un punto $x \in \Lambda$ que ϵ-sombrea a ξ.*

Prueba. Supongamos inicialmente que $\xi = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ es finita en Λ. Tomemos $0 < \varepsilon_1 < \epsilon_0$, donde ϵ_0 es dado por el Teorema 1.4.2. De la variación continua de las subvariedades $W^u_{\varepsilon_1}(x)$ y $W^s_{\varepsilon_1}(x)$, es claro por ser $W^s_{\varepsilon_1}(x) \cap W^u_{\varepsilon_1}(x) = \{x\}$, que existe un δ_1 positivo (que podemos elegir $\delta_1 < \epsilon_0$), que no depende de los elementos escogidos, (Λ es compacto) tal que $d(x, y) < \delta_1$ implica que $W^s_{\varepsilon_1}(x) \cap W^u_{\varepsilon_1}(y) \neq \emptyset$. Pero Λ tiene estructura de producto local, lo que es suficiente para decir que $[x, y]_{\varepsilon_1} = W^u_{\varepsilon_1}(y) \cap W^s_{\varepsilon_1}(x)$ es un elemento de Λ, cambiando δ_1 si es necesario.

Por la continuidad de $[\,.,.\,]_{\varepsilon_1}$ existe un δ positivo para el que se cumple

$$[z, w]_{\varepsilon_1} \in W^s_{\delta_1}(z) \text{ y } [z, \Lambda \cap W^s_{\lambda\delta_1}(w)]_{\varepsilon_1} \subset W^s_{\delta_1}(z)$$

siempre que z y w sean elementos de Λ con $d(z, w) < \delta$, puesto que es verdad cuando $z = w$ esta en Λ.

Côn esto podemos definir $y_0 = x_0$ y $y_j = [x_j, f(y_{j-1})]_{\varepsilon_1}$, que son elementos de Λ, siempre que ξ sea una δ-órbita, lo que se puede hacer por inducción ya que δ se puede elegir menor que δ_1.

Así, definiendo $x = f^{-n}(y_n)$, que está en Λ, mostraremos que es el elemento buscado.

$$d(f^j(x), x_j) \leq d(f^j(x), y_j) + d(y_j, x_j) \leq d(f^{j-n}(y_n), y_j) + \delta_1$$

por la definición de x y la construcción de y_j.

Por la construcción se tiene que $y_k \in W^u_{\varepsilon_1}(f(y_{k-1}))$ y usando a λ la constante de hiperbolicidad de f (vea Sec. 1.3), tenemos que para cada $l \geq 0$ $f^{-l}(y_k)$ es un elemento de $W^u_{\lambda^l\varepsilon_1}(f^{-l+1}(y_{k-1}))$, es decir se cumple que

$$d(f^{-l}(y_k), f^{-l+1}(y_{k-1})) \leq \lambda^l \varepsilon_1 \text{ para todo } l \geq 0$$

entonces

$$\begin{aligned} d(f^{j-n}(y_n), y_j) &\leq d(f^{j-n}(y_n), f^{j-n+1}(y_{n-1})) + \ldots + d(f^{-1}(y_{j+1}), y_j) \\ &\leq \lambda^{n-j}\varepsilon_1 + \lambda^{n-j-1}\varepsilon_1 + \ldots + \lambda\varepsilon_1 \\ &\leq \frac{\lambda\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \end{aligned}$$

Escogiendo ε_1 y δ_1 tales que

$$\frac{\lambda\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} + \delta_1 < \epsilon$$

tenemos que x ϵ-sombrea a la δ-órbita ξ.

Para el caso general en que $\xi = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$, consideremos $\delta > 0$ de modo que cada δ-órbita *finita* de Λ, es $\frac{\epsilon}{2}$-sombreada por un elemento de Λ. En particular, para cada n natural existe un $\xi_n \in \Lambda$ que cumple

$$d(f^k(\xi_n), x_{k-n}) \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ para } 0 < k \leq 2n$$

es decir ξ_n $\frac{\epsilon}{2}$-sombrea a $\{x_{-n}, \ldots, x_n\}$.

Considerando $y_n = f^n(\xi_n)$, resulta que $d(f^k(y_n), x_k) \leq \frac{\epsilon}{2}$ si $|k| \leq n$.

Así, escogiendo una subsucesión convergente con $\lim y_n = x$ obtenemos que x ϵ-sombrea a la δ-órbita arbitraria ξ.

$\diamond$

Cuando en el Teorema 2.1.1 elegimos ϵ menor que $\frac{\alpha}{2}$ donde α es una constante de expansividad de f en Λ entonces cada δ-órbita bi-infinita ξ es ϵ-sombreada por un *único* punto x en Λ. Pues al considerar $\mathcal{O}(f; x)$ y $\mathcal{O}(f; y)$ dos órbitas que ϵ-sombrean a ξ, tenemos que para todo entero k $d(f^k(x), f^k(y)) < 2\epsilon < \alpha$ y por la definición de α resulta que $x = y$.

Observación 2.1.2 *Sea α una constante de expansividad de f en Λ, con f y Λ como en el teorema anterior y ϵ una constante positiva menor que $\frac{\alpha}{2}$. Entonces existe una constante δ_0 y una vecindad $\mathcal{U}$ de Λ tal que cada δórbita, $\xi = \{x_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$, contenida en $\mathcal{U}$, con $\delta \leq \delta_0$ es $\epsilon -$ sombreada por un punto $x \in \Lambda$.*

Para el $\frac{\epsilon}{2}$ positivo, se considera el δ_1 mayor que cero dado por el Teorema 2.1.1 y por ser f uniformemente continua existe $\delta_0 < \frac{\delta_1}{3}$ de modo que cuando $d(x,y) < \delta_0$ se tiene que $d(f(x), f(y)) < \min\{\frac{\delta_1}{3}, \frac{\epsilon}{2}\}$. Con esto se define la vecindad abierta buscada $U = \{y \in M : d(y, \Lambda) < \min\{\frac{\delta_0}{3}, \frac{\epsilon}{2}\}\}$.

Si $\xi = \{x_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ en una δ_0-órbita en U, por la compacidad de Λ para cada k existe $\tilde{x}_k$ en Λ tal que $d(x_k, \Lambda) = d(x_k, \tilde{x}_k)$, de esto resulta que

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_{k+1}, f(\tilde{x}_k) &\leq d(\tilde{x}_{k+1}, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, f(\tilde{x}_k) \\ &\leq \frac{\delta_0}{3} + d(x_{k+1}, f(x_k) + d(f(x_k), f(\tilde{x}_k)) \\ &\leq \frac{\delta_0}{3} + \delta_0 + \frac{\delta_1}{3} < \delta_1 \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 2.1.1 existe un punto x que pertenece a Λ que $\frac{\epsilon}{2}$-sombrea a $\tilde{\xi} = \{\tilde{x}_k\}$ de donde obtenemos $d(f^k(x), x_k) \leq d(f^k(x), \tilde{x}_k) + d(\tilde{x}_k, x_k) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para todo entero k, en otras palabras x $\epsilon -$ *sombrea* a ξ.

Definición 2.1.2 *Se dice que un conjunto Λ es localmente maximal cuando existe una vecindad $U \subset M$ de Λ tal que*

$$\Lambda = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(U)$$

Teorema 2.1.2 *Sea Λ un subconjunto hiperbólico de M. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a)El conjunto Λ tiene estructura de producto local.

(b)Existen ϵ_0 una constante positiva y U_0 una vecindad abierta de Λ tal que si ξ es una ϵ_0-órbita en U_0, que es $K.\epsilon_0$-sombreada por un punto $x \in M$, entonces x pertenece al conjunto Λ.

(c)El conjunto Λ es localmente maximal.

$(a \to b)$ Sea U_0 la intersección de las vecindades de Λ dadas por el Lema 2.1.1 y la observación 2.1.2 y definamos ϵ_0 como el mínimo entre δ_0, $\frac{\alpha_0}{2}$ y $\frac{\alpha}{2K}$ donde α es una constante de expansividad.

Si ξ es una ϵ_0-órbita en U_0 , esta es $K\epsilon$-sombreada por un elemento x que pertenece a M, debido al Lema 2.1.1, pero como $\epsilon_0 < \alpha_0$ y $K\epsilon_0 \leq \frac{\alpha}{2}$ resulta por la observación 2.1.2 que $x \in \Lambda$.

$(b \to c)$Decir que un elemento $y \in \cap_{k\in\mathbb{Z}} f^{-k}(U_0)$ es equivalente ha afirmar que existe una sucesión $f^k(y)$ en U_0 que es una ϵ_0-órbita contenida en U_0 y que además es $K\epsilon_0$-sombreada por y que está en M y por la hipotesis tenemos que $y \in \Lambda$; de esto concluimos que Λ es localmente maximal, puesto que es un conjunto invariante bajo el difeomorfismo f.

$(c \to a)$Sean $x, y \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$ de modo que al hacer $N_\epsilon(\Lambda) = \{z \in M : d(z, \Lambda) < \epsilon\}$ se tenga que $\overline{N_\epsilon(\Lambda)} \subset U$, donde U es la vecindad que hace que Λ sea localmente maximal.

Si $W^s(x, \epsilon) \cap W^u(y, \epsilon) = \emptyset$ no hay nada que probar.

Si $z \in W^s(x, \epsilon) \cap W^u(y, \epsilon)$ entonces para todo número natural n tenemos que $d(f^n(z), f^n(x)) \leq \lambda^n\epsilon < \epsilon$ y también $d(f^{-n}(z), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n\epsilon < \epsilon$ es decir $d(f^k(z), \Lambda)$ $< \epsilon$ para todo entero k y por la definición de $N_\epsilon(\Lambda)$ tenemos que z es un elemento de $\cap_{k\in\mathbb{Z}} f^{-k}(U)$ y de esto resulta que $z \in \Lambda$.

$\Diamond$

Proposición 2.1.1 *Si $\overline{Per(f)}$ es hiperbólico, entonces tiene estructura de producto local.*

Prueba. Tomemos U, α_0 y $K > 0$ como en la observación 2.1.1 y también $\epsilon > 0$ de modo que para cada x que pertenece a $\overline{Per(f)}$ tengamos que $W^s_\epsilon(x) \cup W^u_\epsilon(x)$ esté contenido en U con esto buscamos un $\delta > 0$ de modo que cuando $x, y \in \overline{Per(f)}$

$$\text{Si, } d(x,y) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad [x,y]_\epsilon \in \overline{Per(f)}$$

En vista que [,] es continua sólo necesitamos considerar el caso en que x y y son puntos periódicos.

Sea $w = [x,y]$ y $z = [y,x]$. Mostraremos que para $\delta > 0$ el elemento w es el principio de una δ-órbita periódica contenida en $\mathcal{U}$ con $\delta < \alpha_0$ y por la observación 2.1.1 tendremos que w pertenece a $\overline{Per(f)}$.

Supongamos que x tiene periodo n y que y es de periodo m. De las definiciones tenemos

$$\begin{array}{llll}
\forall j \geq 0 & f^j(w) \in W^s_\epsilon(f^j(x)) \subset U & y & \lim_{k\to+\infty} f^{kn}(w) = x \\
\forall j \geq 0 & f^j(z) \in W^s_\epsilon(f^j(y)) \subset U & y & \lim_{k\to+\infty} f^{km}(z) = y \\
\forall j \leq 0 & f^j(w) \in W^u_\epsilon(f^j(y)) \subset U & y & \lim_{k\to-\infty} f^{km}(w) = y \\
\forall j \leq 0 & f^j(z) \in W^u_\epsilon(f^j(x)) \subset U & y & \lim_{k\to-\infty} f^{kn}(z) = x
\end{array}$$

Así podemos escoger k_1, k_2, k_3 y k_4 enteros positivos tales que

$$d(f^{k_1 n}(w), x) < \frac{\delta}{2} \qquad d(f^{-k_2 n}(z), x) < \frac{\delta}{2}$$

$$d(f^{k_3 m}(z), y) < \frac{\delta}{2} \qquad y \qquad d(f^{-k_4 m}(w), y) < \frac{\delta}{2}$$

De esto podemos construir la siguiente δ-órbita contenida en U con lo que se obtiene lo deseado.

$$\{w, f(w), \ldots, f^{nk_1-1}(w), f^{-nk_2}(z), \ldots, f^{-1}(z), z, f(z), \ldots, f^{mk_3-1}(z),$$
$$f^{-mk_4}(w), \ldots, f^{-1}(w), w\}$$

◊

2.2 La Descomposición Espectral

Trataremos aquí una de las propiedades mas importantes de la cerradura de los puntos periódicos, cuando $\overline{Per(f)}$ es hiperbólico, pues permite usar el concepto de ciclos y estudiar para g cercanos a f como se relacionan $f|_{\overline{Per(f)}}$ y $g|_{\overline{Per(g)}}$; esto se acostumbra hacer, suponiendo que $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$. Para la primera demostración de éste resultado se puede ver S. Smale [11].

Definición 2.2.1 *Se dice que un difeomorfismo f es* topológicamente transitivo *si para cada par de abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$ es no-vacío. Se dice que f es topologicamente mezclante si para cada par de abierto $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\forall n > N \qquad f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$$

Se puede probar que f es topologicamente transitivo si existe z en M cuya órbita es densa en M.

Teorema 2.2.1 *(Descomposición Espectral). Sea f perteneciente a $Diff^r(M)$ con $\overline{Per(f)}$ hiperbolico. Existe una descomposición de $\overline{Per(f)}$ en conjuntos cerrados y disjuntos. $\overline{Per(f)} = \Lambda_1 \cup, \ldots, \cup \Lambda_m$ tal que:*

(a)Cada Λ_α es invariante bajo f y la restricción de f a Λ_α es topologicamente transitivo.

(b)Existe una descomposición de cada Λ_α en conjuntos cerrados y disjuntos de modo que $\Lambda_\alpha = X_{1,\alpha} \cup, \ldots, \cup X_{n_\alpha,\alpha}$ y así $f(X_{\beta,\alpha}) = X_{\beta+1,\alpha}$ para $1 \leq \beta \leq n_\alpha - 1$, $f(X_{n_\alpha,\alpha}) = X_{1,\alpha}$ y la aplicación $f^{n_\alpha} : X_{\beta,\alpha} \to X_{\beta,\alpha}$, es topologicamente mezclante para todo β, $1 \leq \beta \leq n_\alpha$

Prueba. Al definir el conjunto $X_p = \overline{W^u(p) \cap \overline{Per(f)}}$ para cada punto periódico p, se formará una partición por conjuntos abiertos en $\overline{Per(f)}$, de la cerradura de los puntos periódicos.

El conjunto X_p es abierto y cerrado en $\overline{Per(f)}$, para ver esto se considera el número positivo $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}\}$ donde δ_2 es dado por la Proposición 2.1.1 y δ_1 por la Proposiciónón 1.5.2, así para todo y, z en $U_p = B(p, \delta) \cap \overline{Per(f)}$ el producto local, siempre es un elemento de la cerradura de los puntos periódicos y además su intersección es transversal. Mostraremos que $X_p = B_\delta(X_p) \cap \overline{Per(f)}$ donde $B_\delta(X_p)$ es la unión de todos los abiertos U_x cuando x recorre el conjunto X_p.

Si $y \in U_x$ con $x \in X_p$ existe una sucesión y_n en U_x que converge a y. También existe una sucesión x_n de elementos en $W^u(p) \cap \overline{Per(f)}$ que converge a x y como U_x es una vecindad del limite podemos decir que pertenecen a U_x. Así $[y_n, x_n]$ pertenece a $\overline{Per(f)}$ pero es claro que $W^u(x_n) = W^u(p)$ y por la definición de producto local resulta que para todo número natural n $[y_n, x_n] \in W^u(p) \cap \overline{Per(f)}$ Observemos que llamando k_n al periodo de cada y_n resulta que $f^{mk_n}([y_n, x_n])$ converge a y_n cuando m crece al infinito por eso podemos elegir m_n natural y creciente respecto de n tal que $f^{m_n k_n}([y_n, x_n]) = z_n$ se aproxime a y_n y como y_n tiende a y tenemos que z_n converge a y y además al ser z_n una sucesión en $W^u(p) \cap \overline{Per(f)}$ obtenemos que $y \in X_p$.

Para concluir esta parte basta observar que los puntos periódicos son densos en $B_\delta(X_p)$

Afirmamos que si p y q son puntos periódicos X_p y X_q son idénticos ó son disjuntos.

Supongamos inicialmente que q es un elemento de X_p luego para $\eta = \frac{\delta}{2}$ el conjunto $\overline{W}^u_\eta(q) = W^u_\eta(q) \cap \overline{Per(f)}$ es una vecindad de q, abierta en $\overline{Per(f)}$ y está contenida en X_p, así tenemos que

$$X_q = \overline{\cup_{n\geq 0} f^{mnl}(\overline{W}^u_\eta(q))} \subset X_p$$

donde p tiene periodo l y m es el periodo de q.

Para cada $y \in X_q$ existe una sucesión (y_n) en $W^u(q) \cap \overline{Per(f)}$ que converge a y y para cada elemento y_n la sucesión $f^{-mlk}(y_n)$ tiene a q como su límite cuando k crece al infinito, y desde que $\overline{W}^u_\eta(q)$ es una vecindad abierta de y se tiene que para algún k_n positivo $f^{-mlk_n}(y_n)$ es un elemento de este conjunto es decir la sucesión (y_n) está formada por elementos de $\cup_{n\geq 0} f^{mnl}(\overline{W}^u_\eta(q))$ y de esto se obtiene que $y \in \overline{\cup_{n\geq 0} f^{mnl}(\overline{W}^u_\eta(q))}$. Por otro lado $\overline{W}^u_\eta(q) \subset X_p$ y $\overline{W}^u_\eta(q) \subset X_q$ (cambiando η si es necesario) y como los conjunto X_p y X_q son invariantes bajo la función f^{ml} podemos obtener las dos inclusiones que se necesitan para obtener el resultado deseado.

Además X_q es una vecindad abierta de q que es punto adherente de $W^u(p) \cap \overline{Per(f)}$ así existe un y en X_q y pertenece a $W^u(p) \cap \overline{Per(f)}$ por lo tanto $p = \lim_{n\to -\infty} f^{nlm}$ de esto resulta que p es un elemento de X_q. Por el argumento anterior $X_p \subset X_q$.

Ahora para el caso en que p y q son puntos arbitrarios de $Per(f)$. Cuando la intersección de X_p y X_q no es vacío, como ambos son abiertos podemos hallar un punto periódico q_1 en la intersección y por lo anterior tenemos que $X_q = X_{q_1} = X_p$.

En vista que $\overline{Per(f)}$ es compacto, sólo puede haber un número finito de conjuntos distintos X_p y desde que $f(X_p) = X_{f(p)}$ todos ellos son permutados por f.

Sean $\Lambda_1 \ldots \Lambda_m$ las distintas órbitas bajo f de esos conjuntos escritos en general como:

$$\Lambda_\alpha = X_{1,\alpha} \cup \ldots \cup X_{\beta,\alpha} \cup \ldots \cup X_{n_\alpha,\alpha}$$

Para terminar sólo necesitamos probar que cuando $f^{N_1}(X_p) = X_p$, la aplicación f^{N_1} es topologicamente mezclante en X_p, desde que $f^{n_\alpha} : X_{\beta,\alpha} \to X_{\beta,\alpha}$ y ser topologicamente mezclante implica que f restringido a Λ_α será topologicamente transitivo. Si U y V son subconjuntos arbitrarios de X_p, es preciso hallar N natural de modo que para todo $n > N$ el conjunto $f^{nN_1}(U) \cap V$ es no vacío. Observe que para cada p_1, elemento periódico de U se tiene que $X_{p_1} = X_p$ y por esto podemos hallar z en $W^u(p_1) \cap \overline{Per(f)}$ que pertenece a V. Supongamos que k es el periodo de p_1 así $f^{N_1k}(p_1) = p_1$. Otra vez para cada $i, 1 \leq i \leq k-1$ considerando $f^{N_1i}(p_1)$, podemos hallar z_i en V, subconjunto de $\overline{Per(f)}$, que pertenece a $W^u(f^{N_1i}(p_1))$. Observemos que la sucesión $f^{-nN_1i}(z_i)$ tiene como limite a $f^{N_1i}(p_1)$ cuando n crece al infinito y por esto existen enteros $T_i, 1 \leq i \leq k-1$ tales que

$$\forall \quad n \geq T_i \qquad f^{-nN_1i}(z_i) \in f^{N_1i}(U)$$

Sea $N = \max\{T_i\}.k$ y $n > N$ luego por ser $\mathbb{Z}$ un dominio euclidiano existe $0 \leq i \leq k-1$ tal que $n = sk + i$ así $f^{-nN_1i}(z_i) = f^{-sN_1k-N_1i}(z_i)$ pertenece a U. Por lo tanto

$$\forall \quad n \geq T_i \qquad f^{-nN_1}(V) \cap U \neq \emptyset$$

en otras palabras

$$\forall \quad n \geq T_i \qquad f^{nN_1}(U) \cap V \neq \emptyset$$

$\diamond$

Los conjuntos Λ_α,s y $X_{\beta,\alpha}$,s son *únicos*, salvo por el subíndice. Pues si $P_1 \ldots P_s$ es otra descomposición de $\overline{Per(f)}$ en conjuntos cerrados y que son invariantes bajo f en los que f es topologicamente transitivo, resulta que $P_1 \cap \Lambda_\alpha \ldots P_s \cap \Lambda_\alpha$ seria una descomposición de Λ_α en conjuntos cerrados e invariantes bajo f pero como existe una órbita densa de f en Λ_α algún $P_j \cap \Lambda_\alpha$ tiene que ser vacío así $\Lambda_\alpha \subset P_j$. Intercambiando los roles de Λ,s y P,s podemos tener que $P_j \subset \Lambda_\alpha$. Análogamente se consigue la unicidad de los X,s.

Se puede definir para cada p y x puntos periódicos la relación $p\Re x$ si y sólo si $W^s(p) \cap W^u(x) \cap \overline{Per(f)} \neq \emptyset$ y también $W^s(x) \cap W^u(p) \cap \overline{Per(f)} \neq \emptyset$. De esta definición se desprende que $p\Re x$ si y solo si $f(p)\Re f(x)$ y que es una relación reflexiva y simétrica. Más aún es una relación de equivalencia y sus clases que definen una partición de $\overline{Per(f)}$ son abiertos en $\overline{Per(f)}$ puesto que $\overline{Per(f)}$ tiene estructura de producto local y por que $[z, y] \in W^s_\epsilon(z) \cap W^u_\epsilon(y)$. También se cumple que $X_p = \overline{\{x \in Per(f) : x\Re p\}}$.

Para ver que la relación es transitiva consideremos x, y, z puntos fijos (de periodo 1), tales que $x\Re y$ y $y\Re z$. Luego para δ dado por la Proposición 2.1.1 construiremos una δ-órbita usando $w = [x, y]$ y $t = [y, z]$ elementos de $\overline{Per(f)}$ haciendo $u_k = f^{-N+k}(w)$ si $k \geq 0$ y para $k < 0$ definimos $u_k = f^{-N+k}(w)$ donde el n es elegido de modo que $f^{-N}(w)$ y $f^{N}(t)$ estén es $B_{\frac{\delta}{2}}(y)$. Asi existe $u \in \overline{Per(f)}$ que $K\delta$-sombrea a la órbita $\xi = \{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es decir $d(u_k, f^k(u)) \leq K\delta$ para todo k y como u_k tiende a x si k crece al infinito, tenemos que $d(x, f^k(u)) \leq (K+1)\delta$ para $k \geq k_0$ (k_0 fijo) Además el δ se puede hacer suficientemente pequeño de modo que $f^{k_0}(U)$ sea un elemento de $W^s_{loc}(x)$ es decir $u \in W^s(x)$.

Análogamente usando que u_k tiende a z cuando k decrece al infinito se puede mostrar que U pertenece a $W^u(z)$ es decir $u \in W^s(x) \cap W^u(z) \cap \overline{Per(f)}$ Con esto concluimos que $x\Re z$ puesto que la demostración de $W^s(z) \cap W^u(x) \cap \overline{Per(f)} \neq \emptyset$ es análoga.

$\diamond$

2.3 Teorema de Ω-Estabilidad

Nuestro objetivo es mostrar que los difeomorfismos que cumplen el Axioma A y tienen la propiedad de los no-ciclos, son Ω-estables. Para eso se muestra inicialmente que cuando Λ es un conjunto hiperbólico, existe una vecindad abierta U_f de difeomorfismos en la topología C^0, de modo que para cada $g \in U_f$, existe una conjugación (que varia continuamente con g) entre $f|_\Lambda$ y $g|_{\Lambda_g}$, donde Λ_g es la imagen de Λ bajo la conjugación y además Λ_g es hiperbólico bajo g.

Como la descomposición $\overline{Per(f)} = \Omega(f) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ no tiene ciclos, existe M una filtración adaptada a toda $g \in U_f$ (estabilidad de los maximales invariantes), más aún existe una conjugación entre Λ y $K^g(\mathrm{M})$.

Finalmente por el hecho que $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$ es hiperbólico, tiene estructura de producto local y por eso es posible elegir una vecindad U de Λ de modo que para cada $g \in U_f$ el conjunto Λ_g es el "más grande" invariante bajo g contenido en U, lo que es lo mismo a decir que Λ_g es localmente maximal y con esto se muestra que $K^g(\mathrm{M})$ es en realidad $\Omega(g)$, lo que garantiza que todos los $g \in U_f$ son Ω-conjugados a f. Esto es que f sea Ω-estable.

Proposición 2.3.1 *Si $\mathcal{R}(f)$ (o $L(f)$ resp.) es hiperbólico tenemos $\overline{Per(f)} = \mathcal{R}(f)$ (o $\overline{Per(f)} = L(f)$ resp.)*

También se cumple un resultado análogo para los conjuntos $L_+(f)$ y $L_-(f)$. Sin embargo

Proposición 2.3.2 *Si $\Omega(f)$ es hiperbolico entonces $\overline{Per(f)} = \mathcal{R}(f|_{\Omega(f)})$*

Definición 2.3.1 *Un difeomorfismo f perteneciente a $Diff^r(M)$ satisface el Axioma A siempre que:*
(a)El conjunto de los puntos no-errantes $\Omega(f)$ es hiperbólico, y
(b)Las órbitas periódicas forman un conjunto denso en el conjunto de los puntos no-errantes

Cuando un difeomorfismo satisface el Axioma A es posible aplicar el Teorema 2.2.1, así tenemos que $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup, \ldots, \cup \Lambda_m$ donde cada uno de los Λ_α son conjuntos compactos, invariantes bajo f y además contienen una órbita densa.

En este caso en particular a los Λ_α se acostumbra llamar *conjuntos básicos*

Teorema 2.3.1 *Si un difeomorfismo f satisface el Axioma A entonces*

$$M = \bigcup_{1 \leq \alpha \leq m} W^s(\Lambda_\alpha) = \bigcup_{1 \leq \alpha \leq m} W^u(\Lambda_\alpha)$$

Prueba. Por el Teorema de la Descomposición Espectral, $\Omega(f) = \Lambda_1, \cup \ldots, \cup \Lambda_m$, es una unión disjunta de conjuntos cerrados, invariantes bajo f. Con esto basta recordar que $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado, $L(f) \subset \Omega(f)$ (Sec. 1.1) y usar el Lema 1.2.1

$\diamond$

El siguiente teorema describe algunas de las propiedades de los conjuntos básicos.

Teorema 2.3.2 *Sean Λ_α los conjuntos básicos de un difeomorfismo que cumple el Axioma A, entonces*
(a)Cada Λ_α es localmente maximal.
(b)$W^\sigma(\Lambda_\alpha) = \cup_{p \in \Lambda_\alpha} W^s(p), \sigma = s, u$;
(c)Para cada $p \in \Lambda_\alpha$ la órbita $\mathcal{O}(f;p)$ es densa en Λ_α.

Prueba.
(a)Por la proposición 2.1.1 $\overline{Per(f)}$ tiene estructura de producto local. Usando la observación 2.1.2 para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, existe una vecindad U de $\overline{Per(f)}$ y $\delta_0 > 0$ de modo que cada δ-órbita con $\delta \leq \delta_0$, contenida en U, es ϵ-sombreada por un punto $x \in \overline{Per(f)}$.

El Lema 2.1.1 garantiza la existencia de una vecindad U_α de Λ_α, $K > 0$ y $\alpha_0 > 0$ con la propiedad que cada δ-órbita en $\mathcal{U}$, con $\delta < \alpha_0$, es $K\delta$-sombreada por un punto $x \in M$.

Se considera $U_0 = U \cap U_\alpha$ y la constante $0 < \epsilon_0 < \min\{\delta_0; K\delta_0; d(\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta)$ con $\alpha \neq \beta\}$. Con esto cada ϵ_0-órbita ξ en U_0, es $K\epsilon_0$-sombreada por un punto $x \in M$, pues

$\epsilon_0 < \alpha_0$. Pero también $\epsilon_0 < \delta_0$, lo que implica que $x \in \overline{Per(f)}$. Más aún cada Λ_β es cerrado e invariante bajo f por eso $\mathcal{O}(f,x)$, está en Λ_β, para algún β; pero $\epsilon_0 < d(\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta)$, de donde resulta que $x \in \Lambda_\alpha$.

Con esto el Teorema 2.1.2(b) garantiza que Λ_α es localmente maximal.

(b)En vista que Λ_α es hiperbólico y tiene estructura de producto local, (Teorema 2.1.2), por la observación 2.1.2, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe una una constante positiva δ_0 y una vecindad U de Λ_α, donde cada δ-órbita, contenida en U, con $\delta \leq \delta_0$ es ε-sombreada por un único elemento x de Λ_α.

Si $y \in W^s(\Lambda_\alpha)$ existe un natural suficientemente grande N tal que

$$f^n(y) \in U \qquad \forall n \geq N$$

Así, el conjunto $\xi = \{y_j = f^{N+j}(y)j \geq 0\}$, es una órbita en U, por lo tanto está ε-sombreada por un elemento $x \in \Lambda_\alpha$, esto es

$$d(f^j(x), f^{N+j}(y)) < \varepsilon \qquad \forall j \geq 0$$

Al considerar ε de modo que la variedad estable local $W^s_\varepsilon(x)$, este definida como un disco diferenciable, (Teorema de la variedad estable), tenemos que $f^N(y)$ es uno de sus elementos, es decir $y \in W^s(f^{-N}(x))$.

Análogamente, se muestra el resultado para W^u, considerando en el argumento anterior f^{-1}.

(c)Recordemos que por el Teorema de la descomposición espectral se tiene que $\Lambda_\alpha = X_{1,\alpha} \cup \ldots \cup X_{n_\alpha,\alpha}$ es una unión disjunta de conjuntos cerrados, donde $f(X_{\gamma,\alpha}) = X_{\gamma+1,\alpha}$, $f(X_{n_\alpha,\alpha}) = X_{1,\alpha}$ y $f^{n_\alpha} : X_{\gamma,\alpha} \to X_{\gamma,\alpha}$ es topologicamente mezclante, para cualquier γ, es decir, todas las orbitas de f^{n_α}, son densas en $X_{\gamma,\alpha}$.

Como $p \in \Lambda_\alpha$, existe β de modo que p es un elemento de $X_{\beta,\alpha}$, por eso el conjunto $\mathcal{O}_1(f,p) := \{f^{kn_\alpha}(p) : k \in \mathbb{Z}\}$, es una parte de $\mathcal{O}(f,p)$ que es densa en $X_{\beta,\alpha}$.

Análogamente, $\mathcal{O}_2(f,p) := \{f^{kn_\alpha}(f(p)) : k \in \mathbb{Z}\}$, es un subconjunto de $\mathcal{O}(f,p)$, que es denso en $X_{\beta+1,\alpha}$.

Procediendo inductivamente, se obtienen $\mathcal{O}_1(f,p), \ldots, \mathcal{O}_{n_\alpha}(f,p)$, que son subconjuntos de $\mathcal{O}(f,p)$, con $\mathcal{O}_\gamma(f,p)$ denso en $X_{\beta+\gamma-1,\alpha}$ (las operaciones de los subíndices son en modulo n_α). De esto resulta que $\mathcal{O}(f,p)$, es denso en Λ_α.

$\diamondsuit$

Recordemos que cuando y es un elemento de $W^s(x)$, las variedades estable $W^s(y)$ y $W^s(x)$ coinciden.

Corolario 2.3.1 *Cuando f cumple el Axioma A,entonces para cualquier x de M, los conjuntos $W^s(x)$ y $W^u(x)$ son subespacios euclidianos inmersos en M, por una inmersión inyectiva de clase C^r.*

Prueba. Para cada $x \in M$, por el Teorema 2.3.1, existen α y β tales que $x \in W^s(\Lambda_\alpha)$ y $x \in W^u(\Lambda_\beta)$. El Teorema 2.3.2 garantiza la existencia de elementos y_β en Λ_β y y_α en Λ_α, de modo que x pertenece a $W^s(y_\alpha)$ y a $W^s(y_\beta)$, así $W^s(x) = W^s(y_\alpha)$ y $W^u(x) = W^u(y_\beta)$.

$\diamond$

El siguiente resultado se desprende del Lema de Inclinación, (Teorema 1.4.3).y su demostración se puede encontrar en [2]

Proposición 2.3.3 *Sean Λ_α los conjuntos básicos de un difeomorfismo que cumple el Axioma A, entonces. Para cada $p \in \Lambda_\alpha$*

$$W^\sigma(\Lambda_\alpha) \subset \overline{\bigcup_{q \in \mathcal{O}(f;p)} W^\sigma(q)}, \sigma = s, u$$

Nuestro objetivo de dar condiciones suficientes para que un sistema f sea Ω-estable, lo obtendremos como una consecuencia del siguiente teorema, el cual para ser demostrado necesitara del algunos lemas previos.

Teorema 2.3.3 *Sea Λ un conjunto cerrado de M, que es invariante e hiperbólico bajo f, tiene estructura de producto local y contiene a $L(f)$ Supongamos además que Λ tiene una descomposición $\Lambda = \Lambda_1, \cup, \ldots, \cup, \Lambda_m$ en subconjuntos cerrados, disjuntos e invariantes bajo f y que no tienen ciclos. Entonces existe* M *una filtración adaptada a f, una vecindad $\mathcal{V}$ de f en $Diff^r(M)$ y una función continua $\phi : \mathcal{V} \to C^0(\Lambda, M)$ tal que:*

*(a)*M *es adaptada simultáneamente a todas las aplicaciones $g \in \mathcal{V}$*
(b)$\phi(f) = inc_\Lambda$
(c)$\phi(g)(\Lambda) = K^g(\mathrm{M})$ $\qquad \phi(g)(\Lambda_\alpha) = K^g_\alpha(\mathrm{M})$
(d)$\phi(g) : \Lambda \to K^g(\mathrm{M})$ es una conjugación topológica.
(e)Existe una constante K tal que $\rho_0(\phi(g), inc_\Lambda) \leq K\rho_0(g, f)$.

Prueba. La existencia de la filtración M es dada por el Teorema 1.2.1 y la parte (a) es consecuencia de la proposición de la estabilidad de los maximales invariantes. También por esta proposición se sigue que para g suficientemente cercano de f se puede tener que $K^g(\mathrm{M})$ está contenido en la vecindad U de Λ dada por el Lema 2.3.2 y por este mismo Lema tenemos que $K^g(\mathrm{M})$ es un subconjunto de $\phi(g)\Lambda$

Para concluir será suficiente mostrar $\phi(g)\Lambda$ esta contenido en $K^g(\mathrm{M})$ Escribamos para eso la filtración $M_0 \subset \ldots \subset M_m = M$ adaptada a f y como cada Λ_α es cerrado y f-invariante tenemos que esta contenido en la diferencia $M_\alpha - M_{\alpha-1}$. Por otro lado para g suficientemente cercano de f la filtración también es una filtración adaptada para g, entonces $\phi(g)\Lambda_\alpha$ también será un subconjunto de $M_\alpha - M_{\alpha-1}$ y de esto tenemos que $\phi(g)\Lambda_\alpha$ esta contenido en $K^g_\alpha(\mathrm{M})$.

◇

Lema 2.3.1 *Consideremos Λ un conjunto cerrado, invariante e hiperbólico bajo $f \in Diff^r(M)$. Existe una vecindad $\mathcal{U}_f$ de f y una función continua $\phi : \mathcal{U} \to C^0(\Lambda, M)$ tal que:*

(a)$\phi(f)$ es la inclusión, inc_Λ, de Λ en M.

(b)$\phi(g)(\Lambda)$ es invariante e hiperbólico bajo g. cualquiera que sea g en $\mathcal{U}_f$.

(c)$\phi(g)$ es un homeomorfismo de Λ sobre $\phi(g)(\Lambda)$ y es una conjugación topológica de la restricción de f a Λ con la restricción de g a $\phi(g)(\Lambda)$.

(d)Existe una constante K tal que $\rho_0(\phi(g), inc_\Lambda) < K\rho_0(g, f)$.

Prueba. A lo largo de ésta demostración se considera $X = \Lambda$ y las mismas notaciones del Teorema 2.1.1 es decir $F_{(z,x)}$, $\tilde{F}_{(z,x)}$, y $B_\varepsilon(inc_\Lambda)$ vista como el dominio de la carta local $\varphi : B_\varepsilon(inc_\Lambda) :\to \chi^0_\varepsilon(X)$

Paso 1. Usando el homeomorfismo $h = f : \Lambda \to \Lambda$ se puede construir un operador lineal hiperbólico $\mathbf{F}$ en $\chi^0(X)$ que sólo depende de f, definido por la identidad (2.4)

También para $\eta > 0$ es posible encontrar una vecindad $U(\eta)$ de W que contiene Λ donde se cumple la desigualdad (2.5), además es hiperbólico

$$\|\mathbf{F}|_{\chi^0(X,E^1)}\| < \lambda < 1 \qquad y \qquad \|\mathbf{F}^{-1}|_{\chi^0(X,E^2)}\| < \lambda < 1 \tag{2.7}$$

Paso 2. Definición de G y $\mathbf{G}$ Se considera la aplicación $G : C^0(\Lambda, M) \to C^0(\Lambda, M)$ definida por $G(k) = g \circ k \circ f^{-1}$ (g fijo) y por la desigualdad triangular

$$\rho(g \circ k \circ f^{-1}, inc) \leq \rho(g \circ k \circ f^{-1}, g \circ i \circ f^{-1}) + \rho(g \circ i \circ f^{-1}, inc)$$

tenemos que existen constantes $\alpha_1 > 0$ y $r_1 > 0$ y una C^0-vecindad de f V_1 (que no depende de X y k), tal que para cada $g \in V_1$ con $\rho(g, f) < \alpha_1$ se tiene que $G(B_{r_1}(inc))$ es un subconjunto de $B_\varepsilon(inc)$. Con estas condiciónes podemos definir la aplicación

$\mathbf{G} : \chi^0_{r_1}(X) \to \chi^0_{r_1}(X)$, para cada $g \in V_1$, usando la carta φ, $\mathbf{G} = \varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$. Explícitamente

$$[\mathbf{G}\sigma]_x = \exp_x^{-1}(g(\exp_{f^{-1}(x)}[\sigma]_{f^{-1}(x)}))$$

puesto que $G(k) = g \circ k \circ f^{-1}$.

*Paso 3.*Lipschitz También nos interesa lo que podríamos llamar la distancia lipschitziana de $\mathbf{G_f}$ y $\mathbf{F}$ en una vecindad riemmaniana $B_{\tilde{r}}(0)$ de $\chi^0(X)$, para eso usamos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} Lip[(\mathbf{G}-\mathbf{F})|_{B_{\tilde{r}}(0)}] &\leq \sup_{x\in X} \|F_{(x,f^{-1}(x))} - \tilde{F}_{(x,f^{-1}(x))}\| \\ &+ \sup_{x\in X} Lip[(F_{(x,f^{-1}(x))} - \exp_x^{-1}(g(\exp_{f^{-1}(x)}|_{B_{\tilde{r}}(0_{f^{-1}(x)})})|_{B_{\tilde{r}}(0)})] \end{aligned}$$

Así por la afirmación 2.0.1 para $\eta > 0$ podemos hallar una constante $\delta(\eta) > 0$ y una vecindad $U(\eta)$ de Λ tal que tenemos (2.5), $\sup_{x\in X} \|F_{(x,f^{-1}(x))} - \tilde{F}_{(x,f^{-1}(x))}\| < \eta$.

Tomamos $\alpha_2(\eta) > 0$ y $V_2(f)$ la bola centrada en f y radio $\alpha_2(\eta)$ con respecto a la métrica ρ_0.

Por otro lado para $\eta_1 > 0$ la afirmación 2.0.2 permite hallar un $r(\eta_1, \delta(\eta)) > 0$ (podemos elegir $\tilde{r}$ con $\tilde{r} < r(\eta_1, \delta(\eta))$) de modo que para todo $g \in V_2(f)$ se tiene algo como (2.6). $\sup_{x\in X} Lip[(F_{(x,f^{-1}(x))} - \exp_x^{-1}(g(\exp_{f^1(x)}|_{B_{\tilde{r}}(0_{f^{-1}(x)})})|_{B_{\tilde{r}}(0)}] < \eta_1$.

En resumen elegimos α_0,V_f U que satisfacen:

$$\alpha_0 < \inf\{\alpha_1, \alpha_2\} \qquad r < r(\eta_1, \delta(\eta)) \qquad U \subset U(\eta) \qquad V_f \subset V_1 \cap V_2(\eta)$$

entonces cuando $\rho(g, f) < \alpha_0$ y g es un elemento de V_f tenemos la hiperbolicidad de $\mathbf{F}$,dada por (2.7), y

$$Lip[(\mathbf{G}-\mathbf{F})|_{B_{\tilde{r}}(0)}] < \eta + \eta_1 \qquad \|\mathbf{G}(0)\| = \rho(g \circ f^{-1}, inc) < \alpha_0$$

Paso 4. Punto fijo de $\mathbf{G}$ Se usa la proposición 1.4.1 al espacio $\chi^0(X, T_XM) = \chi^0(X, E^1) \oplus \chi^0(X, E^2)$ con la norma $\| \cdot \|_b$, notemos que existe una constante $c > 0$ que sólo depende de las extensiones E^1 y E^2 a la vecindad W de Λ y da la equivalencia de las normas $\| \cdot \|_b$ y $\| \cdot \|_{riem}$ en $E^s \oplus E^u$ mas precisamente $\frac{1}{c}\| \cdot \|_b \leq \| \cdot \|_{riem} \leq c\| \cdot \|_b$. Análogamente para las normas asociadas a $\chi^0(X, T_XM) = \chi^0(X, E^1) \oplus \chi^0(X, E^2)$.

Con esto podemos reescribir las estimativas del paso 3

$$Lip_b[(\mathbf{G}-\mathbf{F})|_{B_{\tilde{r}}(0)}] < c^2(\eta+\eta_1) \qquad \|\mathbf{G}(0)\| < c^2\alpha_0$$

Si elegimos $\tilde{r_1}$ menor que $\frac{\tilde{r}}{c}$ el conjunto $E^1(\tilde{r_1}) \times E^2(\tilde{r_1})$ esta contenido $B_{\tilde{r}}(0)$ con la norma riemmaniana y así tenemos

$$Lip_b[(\mathbf{G}-\mathbf{F})|_{E(\tilde{r_1})}] \leq Lip_b[(\mathbf{G}-\mathbf{F})|_{B_{\tilde{r}}(0)}] < c^2(\eta+\eta_1)$$

De este modo para aplicar la proposición 1.4.1 tenemos que tener

$$\lambda + c^2(\eta+\eta_1) < 1 \qquad (*)$$

y

$$c\alpha_0 < \tilde{r}_1[1-\lambda-c^2(\eta+\eta_1)] \qquad (**)$$

Para esto elegimos primero η y η_1 de modo que $(*)$ sea verdadera. Con esto fijamos las vecindades U de Λ, V_f de f y consideramos la constantes $\tilde{r}$ y $\tilde{r}_1 < \frac{r_1}{c}$, con esto elegimos como antes $\alpha_0 < \inf\{\alpha_1, \alpha_2(\eta)\}$ con la condición adicional que cumpla $(**)$.

La proposición 1.4.1 da la existencia de un punto fijo para $\mathbf{G}$ lo que garantiza la existencia de una función continua $\phi(g) : \Lambda \to M$ que es un punto fijo de G es decir $g \circ \phi(g) = \phi(g) \circ f$ y también $\|\varphi(\phi(g))\|_b \leq \tilde{r_1}$ más precisamente

$$\|\varphi(\phi(g))\|_b \leq \|\mathbf{G}(0)\|_b$$

Ahora tomando $r < \frac{\tilde{r_1}}{c}$ la desigualdad $\rho(inc, k) < r$ implica que $\|\varphi(k)\|_b \leq \tilde{r_1}$. Así cuando $g \circ \phi(g) = \phi(g) \circ f$ y $\rho(inc, \phi(g)) \leq r$ la función $\phi(g)$ es *única* de esto, por la definición de φ y la relación entre las normas pues $\|G(0)\|_{riem} \leq \rho(g \circ f^{-1}, inc)$ tenemos

$$\rho(inc, \phi(g)) \leq \left[\frac{c^2}{1-\lambda-c^2(\eta+\eta_1)}\right]\rho(g,f)$$

así cuando α_0 es pequeño la *única* función $\phi(g)$ satisface $\rho(inc, \phi(g)) \leq r$.

Además cuando fijamos inc y h $\phi(g)$ depende continuamente de $\mathbf{G}$ que depende continuamente de g pues si consideramos $\mathbf{G}_i$ asociado a g_i tenemos

$$\|\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2\|_b \leq c.\|\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2\|_{riem} \leq c.cnst.\rho(G_1, G_2) \leq cnst.\rho(g_1, g_2)$$

Es decir $\phi : B_\epsilon(inc) \to C'(\Lambda, M)$ es una función continua y $g \circ \phi(g) = \phi(g) \circ f$.

En resumen tenemos que existen vecindades U de Λ, V_f de f y la constantes α_0, r y K. Si $g \in V$ y $\rho(f,g) < \alpha_0$ existe una única aplicación continua $\phi(g) : \Lambda \to U$ tal que $\rho(inc_\Lambda, \phi(g)) \leq r$ y $g \circ \phi(g) = \phi(g) \circ f$. Más aún $\phi(g)$ depende continuamente de g y satisface $\rho_0(inc_\Lambda, \phi(g)) \leq K\rho_0(f,g)$.

(a)Esta parte se desprende inmediatamente de la unicidad de $\phi(f)$ puesto que inc_Λ cumple trivialmente $g \circ inc = inc \circ f$

(b)Observe que el conjunto $\Lambda_g = \phi(g)(\Lambda)$ es un conjunto invariante bajo g así por la continuidad de ϕ y por ser el conjunto de los difeomorfismos hiperbólicos un conjunto C^r abierto tenemos que para g suficientemente cercano a f, $\phi(g)(\Lambda)$ es hiperbólico para g (Proposición 1.5.3).

(c)Para concluir mostraremos la inyectividad de $\phi(g)$ y consideremos $\phi(g)x = \phi(g)y$

$$\begin{aligned} d(f^k(x), f^k(y)) &\leq d(f^k(x), g^k(\phi(g).x)) + d(g^k(\phi(g).y), f^k(y)) \\ &= d(f^k(x), \phi(g).f^k(x)) + d(\phi(g).\phi(g)(y), f^k(y)) \\ &\leq 2\rho(inc_\Lambda, \phi(g)) \\ &\leq K\rho(f,g) \end{aligned}$$

así eligiendo una vecindad tal que $K.\rho(f,g)$ sea menor que la constante de *expansividad* de f resulta que $x = y$.

Con esto tenemos que $\phi(g) : \Lambda \to \phi(g).\Lambda =: \Lambda_g$ es una biyección continua entre compactos por lo tanto es un homeomorfismo.

◇

Observación 2.3.1 *Cuando Λ es hiperbólico, existen vecindades $\mathcal{V}_f$ de f, $\mathcal{U}$ de Λ y las constantes α_0, $r > 0$ con la siguiente propiedad:*

Para cualquier $X \subset M$ y $h : X \to X$ un homeomorfismo si $g \in \mathcal{V}_f$ y $\rho(g \circ id, id \circ h) < \alpha_0$. existe una única función continua $j : X \to M$ tal que $\rho(id, j) < r$ y $g \circ j = j \circ h$

La estrategia como siempre consiste en probar que

$$\begin{array}{cccc} G & C^0(X,M) & \longrightarrow & C^0(X,M) \\ & k & \to & g \circ k \circ h^{-1} \end{array}$$

tiene un único punto fijo.

Lema 2.3.2 *Sea Λ un conjunto cerrado de M, que es invariante e hiperbólico bajo f y tiene estructura de producto local entonces Λ es local y uniformemente maximal. Mas específicamente existen vecindades $\mathcal{U} \subset M$ de Λ y $\mathcal{V} \subset Diff^r(M)$ de f tal que:*

(a)$\Lambda = \cap_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\mathcal{U})$

(b)El conjunto $\phi(g)(\Lambda)$ dado por el Lema anterior para $g \in \mathcal{V}$, conjugado a Λ es igual a $\cap_{k\in\mathbb{Z}} g^k(\mathcal{U})$

Prueba. Tomemos la vecindad U de Λ como en la observación 2.1.2 y la vecindad V de f dada por e Lema 2.3.1 para el que esta bien definido ϕ y para cada g, de V, tenemos $\rho(g, f) = \sup_{x\in M} d(g(x), f(x)) < \delta_0$ donde δ_0 es dado por la observación 2.1.2. Con todo esto cuando un z pertenece a $\cap_{k\in\mathbb{Z}} g^k(U)$ se tiene que la $\mathcal{O}(g; z)$ es una bi-infinita δ_0-órbita para f que está contenida en U. Así por la observación 2.1.2 y su comentario anterior esta es ϵ-sombreada por un único punto $x \in \Lambda$.

Para concluir será suficiente mostrar que $z = \phi(g)(x)$. Para esto observemos que tomando una vecindad, posiblemente menor que V, podemos garantizar que

$$d(f^k(x), g^k(\phi(g)x)) = d(f^k(x), \phi(g)(f^k(x))) \leq \rho_0(id, \phi(g)) < \delta$$

con esto tenemos que

$$d(f^k(x), g^k(\phi(g)^{-1}z)) < \epsilon + d(g^k(z), (\phi(g)^{-1}z)) < \epsilon + \rho_0(id, (\phi(g))^{-1}), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Así eligiendo $\epsilon+\delta$ menor que la constante de expansividad de g obtenemos la igualdad deseada.

Para mostrar la otra inclusión por la continuidad de ϕ podemos cambiar V, si es necesario, de modo que para todo g de esta vecindad se tenga que $\phi(g)\Lambda$ sea un subconjunto de $\mathcal{U}$ y por esto también en $\cap_{k\in\mathbb{Z}} g^k(U)$.

$\diamond$

Teorema 2.3.4 *(Ω − estabilidad)Sea f perteneciente a $Diff^r(M)$ que satisface el Axioma A y que su descomposición no admite ciclos. Entonces f es un difeomorfismo Ω-estable y el conjunto de tales f forman un abierto en $Diff^r(M)$.*

Prueba. Sólo bastará probar que cuando g está cerca de f, para el conjunto hiperbólico bajo g, $\phi(g)\Lambda$, dado por el Lema 2.3.1, cuando $\Lambda = \Omega(f)$ se tiene que $\phi(g)\Lambda = \Omega(g)$. Puesto que el Teorema 2.3.4 garantiza que $\phi(g)$ es una conjugación y que la descomposición espectral de $g|_{\phi(g)\Lambda}$ no tiene ciclos pues nos da una filtración adaptada M.

Sabemos por la Proposición 2.1.1 que tiene estructura de producto local cuando $\overline{Per(f)}$ es hiperbólico. Por eso podemos aplicar el Teorema 2.3.4 al conjunto $\Lambda = \overline{Per(f)}$ y tenemos que para g perteneciente a una vecindad V de f, $K^g(\mathrm{M}) = \phi(g)\Lambda$, así resulta que

$$\mathcal{R}(g) \subset \phi(g)\Lambda$$

Desde que $\phi(g)$ es una conjungación , $\phi(g)(\overline{Per(f)})$ está contenido en $Per(g)$ y pore eso $\phi(g)(\overline{Per(f)}) = \phi(g)\Lambda$ es un subconjunto de $\overline{Per(g)}$ de esto tenemos que

$$\overline{Per(g)} = L(g) = \Omega(g) = \mathcal{R}(g) = \phi(g)\Lambda$$

Cuando g esta cerca de f, el Lema 2.3.1 garantiza que $\phi(g)\Lambda$ es un conjunto hiperbólico para g.

◊

Pensando en el reciprocó de este resultado presentamos el siguiente Teorema cuya demostración puede encontrarse en J. Palis [8].

Teorema 2.3.5 *Cuando un difeomorfismo f que satisface el Axioma A es Ω-estable entonces no admite ciclos.*

Corolario 2.3.2 *Si tenemos que para un difeomorfismo f el conjunto $\Omega(f)$ es finito entonces son equivalentes*

(a)El difeomorfismo f es Ω-estable.

(b)El conjunto $\Omega(f)$ es hiperbólico y no tiene ciclos.

Prueba.
(b $\to$ a)Si $\Omega(f)$ es finito, esa constituido por puntos periódicos, luego satisface el Axioma A y no tiene ciclos, por lo tanto es Ω-estable. (a $\to$ b)Si $\Omega(f)$ no fuera hiperbólico es posible aumentar el número de elementos en él; luego satisface el Axioma A y es Ω-estable por lo tanto no admite ciclos.

◊

Referencias

[1] M. Hirsch: *Differential topology,* Springer-Verlag (1976).

[2] M. Hirsch, J. Palis, C. Pugh and M. Shub: *Neighborhoods of hyperbolic sets,* Invent. Math. 9 (1970), 133-163.

[3] S. Höning: *Aplicações da topologia á análise,* Projeto Euclides, IMPA (1978).

[4] M. C. Irwin: *On the stable manifold theorem,* Bull. London. Math. Soc. 2(1970),196.

[5] E.L. Lima: *Espaços métricos,* Projeto Euclides, IMPA (1979).

[6] A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the modern theory of dynamical systems,* Cambridge University press (1998).

[7] S. Newhouse: *Hyperbolic limit set,* Trans. A.M.S. 167 (1972), 125-150.

[8] J. Palis: *A note on Ω-stability,* Global Analysis Proc Symp. in Pure Math. Vol XIV Amer. Math. Soc (1970)

[9] J. Palis, W. de Melo: *Geometric theory of dynamical systems,* Springer-Verlag (1980).

[10] S. Y. Pilyugin: *The space of dynamical systems with the C^0-topology,* Lec. Not. Mat. # 1571 Springer-Verlag (1991).

[11] S. Smale: *Differentiable dynamical systems,* Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967),747.

[12] S. Smale: *The Ω-stability theorem,* Global Analysis Proc. Symp in Pure Math Vol XIV Amer. Math. Soc. (1970).

[13] M. Shub: *Global Stability of dynamical systems,* Springer-Verlag (1988).

[14] A. Verjovsky: *Sistemas de Anosov,* XII-Elam , IMCA (1999).