

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



Tesis para optar el Título Profesional de:

Licenciado en Matemática

Titulada:

**ECUACIONES E INECUACIONES
VARIACIONALES PARABÓLICAS Y
SU RESOLUCIÓN NUMÉRICA
MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS**

PRESENTADA POR:

Angel Enrique Ramírez Gutiérrez

ASESORA:

Msc. IRLA MANTILLA NÚÑEZ

LIMA - PERÚ

2010

Resumen

Diferentes problemas físicos de transferencia de calor que se dan por conducción, radiación y convección están representados por ecuaciones en derivadas parciales sujetas a condiciones iniciales y de contorno. El interés en este trabajo es el estudio del proceso de transferencia de calor por conducción y su control térmico sobre materiales isótropos que están representadas por ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico.

De la formulación encontrada para estos problemas [7], [8] se han encontrado resultados de existencia y unicidad de solución clásica pero que no conducen netamente a la obtención de una solución explícita. En el presente trabajo el objetivo es hacer un estudio numérico de estos problemas a fin de contribuir con la determinación de una solución explícita. Para ello se realiza el siguiente procedimiento: formulación variacional del problema de contorno y de valor inicial de frontera fija como una ecuación variacional parabólica (EVP) y la formulación variacional del problema de contorno y de valor inicial de frontera móvil como una inecuación variacional parabólica (IVP). Luego, se realiza el análisis cualitativo, es decir, demostrar la existencia y unicidad de la solución débil para ambos problemas. Posteriormente, procedemos a construir un esquema numérico para estimar cuantitativamente las soluciones aproximadas que representan a la distribución de la temperatura y el control térmico bajo las condiciones de convergencia numérica.

El esquema numérico está conformado por el método de Galerkin continuo, Elementos Finitos, Crank-Nicholson sobre un conjunto acotado contenido en un espacio bidimensional para la EVP y Método de Galerkin continuo, Elementos Finitos, Euler Implícito, aproximación lagrangiana y el método de Uzawa para la IVP.

Esta metodología se puede utilizar para realizar la simulación numérica del comportamiento de la transferencia de calor por conducción y el control térmico sobre diversos materiales tales como los que se ha supuesto para la experimentación numérica en este trabajo cuya propiedad de conductividad térmica son semejantes a la de un tipo de aluminio y de vidrio.

Contenido

Introducción	III
Notaciones	v
1. CONCEPTOS PRELIMINARES	1
1.1. Espacios de Banach	1
1.2. Espacios de Hilbert	7
1.3. Resultados Básicos del Análisis Convexo	10
1.4. Nociones de Teoría de la Medida	12
1.5. Espacios L_p	13
1.6. Derivada Distribucional	15
1.7. Espacios de Sobolev	17
1.8. Identidades de Green	20
1.9. Espacios Funcionales Evolutivos	22
1.10. Nociones Generales de Semigrupos	30
1.11. Nociones de Teoría de la Dualidad	31
1.12. Ecuaciones Diferenciales Parabólicas	34
1.13. Condiciones Iniciales y de Frontera	38
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA: TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN Y SU CONTROL TÉRMICO	40
2.1. Ecuaciones de Transferencia de Calor por Conducción	41
2.2. Problema de control térmico	43
3. FORMULACIÓN VARIACIONAL	46
3.1. Formulación de las Ecuaciones Variacionales Parabólicas (EVP)	46
3.1.1. Existencia y unicidad de solución de la EVP	47
3.2. Formulación de las Inecuaciones Variacionales Parabólicas (IVP)	59

3.2.1.	Existencia y unicidad de solución de la IVP	63
4.	APROXIMACIÓN DE LAS EVP E IVP CON EL MEF	69
4.1.	Aproximación de la EVP	69
4.1.1.	Método Variacional de Galerkin	69
4.1.2.	Semidiscretización Espacial mediante el MEF	70
4.1.3.	Aplicación del MEF a la EVP	72
4.1.4.	Discretización Temporal - Método de Crank Nicholson	78
4.1.5.	Convergencia del Método de Crank-Nicholson	79
4.2.	Aproximación de la IVP	82
4.2.1.	Semidiscretización Espacial mediante el MEF	82
4.2.2.	Discretización temporal - Método de Euler Implícito	82
4.2.3.	Método de Uzawa	84
4.2.4.	Convergencia del Método de Uzawa	90
5.	RESULTADOS NUMÉRICOS	92
5.1.	Resultados numéricos para la EVP	92
5.1.1.	Pre Proceso: Datos de Entrada	92
5.1.2.	Proceso computacional para las EVP	93
5.1.3.	Post Proceso: Visualización Gráfica de los Resultados	95
5.2.	Resultados numéricos para la IVP	102
5.2.1.	Pre Proceso: Datos de entrada	102
5.2.2.	Proceso computacional para las IVP	103
5.2.3.	Post Proceso: Visualización Gráfica de los Resultados	105
6.	CONCLUSIONES	113
7.	APÉNDICE	115
7.1.	Generalidades sobre sistemas EDO'S	115
7.2.	Resolución numérica de un sistema EDO	118
7.2.1.	Método θ -aproximación - M. Crank-Nicholson	118
7.3.	Integración numérica - Cuadratura Gaussiana	119
7.4.	Implementación Computacional del Software para las EVP	135
7.5.	Implementación Computacional del Software para las IVP	153
	Bibliografía	164

Introducción

Los problemas de transferencia de calor por conducción, control de temperatura, difusión de sustancias tóxicas entre otros que se basan en leyes físicas tales como la Ley de Fourier y de Fick conducen al estudio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo evolutivo, es decir, donde las ecuaciones dependen del espacio y tiempo y están sujetas a condiciones de valores iniciales y de contorno. Los estudios de estos tipos de modelos matemáticos tienen una larga historia donde se ha alcanzado mayor contribución en los siglos XVIII, XIX y XX por eminentes matemáticos de entre los que sobresalen Fourier, Fick, Newton, Gauss, Dirichlet, Hilbert, J.J. Lions, Sobolev, Brézis, Stamphaccia, Galerkin y Richard Courant. En el campo de la Física, estos modelos matemáticos han motivado la introducción y desarrollo de diversos temas de la matemática tales como los Espacios de Funciones integrables según Lebesgue, Teoría de Distribuciones, Espacios de Sobolev, Teoría de Semigrupos, Optimización, Cálculo Variacional, estos temas permiten apreciar el mayor acercamiento entre la Matemática y la Física.

Según los resultados encontrados en [11], [21] y [27] básicamente se centran en abordar las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas como aplicación de los problemas que se presentan en la transferencia de calor y el control térmico [8], numéricamente en [4], [19] existen algunos resultados en diferencias finitas evolutivamente y espacialmente en una dimensión pero desde el punto de vista de una EDP parabólica homogénea y con frontera fija. El interés en este trabajo es el estudio numérico del proceso de transferencia de calor por conducción y su control térmico sobre materiales isótropos que están representadas por ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico no homogéneo, espacialmente en dos dimensiones, con frontera fija y móvil. Para ello se realiza la resolución numérica de estos problemas a fin de obtener una solución explícita.

Teniendo en cuenta este objetivo, el trabajo desarrollado comprende el siguiente

contenido:

En el **Primer capítulo** hemos considerado los conceptos preliminares y necesarios de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional, Teoría de la Medida, Cálculo Variacional, Análisis Numérico y Optimización para abordar la definición de las problemas de contorno y de valor inicial asociados a las EDP'S de tipo parabólico así como también se utilizan en la búsqueda de su solución. En el **Segundo Capítulo** se plantean los problemas de contorno y de valor inicial que están asociados al problema de transferencia de calor por conducción con frontera fija y el problema de control térmico con frontera móvil. En el **Tercer Capítulo**, se realiza la formulación variacional de las ecuaciones variacionales parabólicas (EVP) y de las inecuaciones variacionales parabólicas (IVP) definidas sobre un espacio funcional de Sobolev evolutivo asociadas a las EDP'S definidas en el capítulo anterior así como también se realiza un breve análisis de la existencia y unicidad de solución débil de estos problemas. En el **Cuarto Capítulo**, se desarrolla la aproximación numérica de las EVP e IVP mediante los siguientes esquemas numéricos: método de semidiscretización con Galerkin continuo y Elementos Finitos (MEF); y la discretización total mediante el método de Crank-Nicholson y el método iterativo de Gauss-Seidel sobre un conjunto acotado contenido en un espacio bidimensional para la EVP y Método de Galerkin continuo, Elementos Finitos, Euler Implícito, aproximación lagrangiana y el método de Uzawa para la IVP así como un breve análisis de la convergencia de los esquemas numéricos. En el **Quinto Capítulo**, se implementa computacionalmente los algoritmos de aproximación para las EVP e IVP discretas y se presentan los resultados numéricos de la transferencia de calor y el control térmico para dos tipos de materiales como son el aluminio y el vidrio con su comportamiento gráfico respectivo y se visualiza gráficamente la convergencia de los esquemas numéricos. Finalmente en el **Sexto Capítulo** se dan algunas conclusiones sobre los resultados numéricos y se proponen algunos futuros trabajos de investigación.

Notaciones

- Ω : un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$) con frontera $\Gamma = \partial \Omega$.
- Para $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$ sea $G = [0, T] \subseteq \mathbb{R}$.
- $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$.
- $|\Omega|$: medida de Lebesgue del conjunto Ω .
- $C(\Omega)$: es el conjunto de las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas sobre Ω .
- $C^m(\Omega)$: es el conjunto de todas las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que tienen todas sus derivadas parciales continuas hasta de orden $m = 0, 1, 2, \dots$ sobre Ω . Cuando $m = 0$ se entenderá que se trata de la misma función "f".
- $\text{sop}(f)$: Soporte de la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, es decir

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$$

- $C_0^m(\Omega)$: espacio de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ "m" veces continuamente diferenciables ($m \in \mathbb{N}$ ó $m = +\infty$) y de soporte compacto contenido en Ω .
- V : Espacio vectorial que denotará un espacio de Banach o de Hilbert según se mencione.
- V^* : Espacio dual topológico de V , es decir, espacio de las funcionales lineales continuas de V en \mathbb{R} . La notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*, V}$ representa la relación de dualidad entre V y V^* .
- $C(G, V)$: es el conjunto de las funciones $u : G \rightarrow V$ continuas sobre G .
- $C^m(G, V)$: es el conjunto de todas las funciones $u : G \rightarrow V$ que tienen todas sus derivadas parciales continuas hasta de orden $m = 0, 1, 2, \dots$ sobre G . Cuando $m = 0$ se entenderá que se trata de la misma función "u".

- $\mathcal{L}(V, W)$: Espacio de los operadores lineales continuos de V en W .
- K : Subconjunto no vacío convexo cerrado de V .
- $C^{m,1}(\Omega_T)$: Conjunto de funciones continuas $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas derivadas clásicas hasta de orden m son continuas en $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y derivada clásica de orden 1 en la variable $t \in [0, T]$ también es continua.

$$C^{m,1}(\Omega_T) = \left\{ u : u, \frac{\partial^m u}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}, \frac{\partial u}{\partial t} \text{ son continuas} \right\}$$

para todo $p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq m$

Capítulo 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

A continuación presentamos las definiciones, teoremas, y otros resultados que necesitaremos a lo largo del presente trabajo.

1.1. Espacios de Banach

Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. En esta sección daremos todos los conceptos necesarios para llegar a definir un espacio de Banach en el campo de los números reales.

Definición 1.1.1 (Base de un espacio vectorial)

Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un subconjunto de V . Se define a B como una **base** de V si satisface lo siguiente:

1. B es el **conjunto generador** de V .
2. B es **linealmente independiente**.

donde B puede ser un conjunto finito o infinito.

Definición 1.1.2 (Dimensión de un espacio vectorial)

La **dimensión** del espacio vectorial V está definido por el número de elementos de su base.

La **dimensión** del espacio vectorial puede ser finito o infinito.

Ejemplo 1.1.1

a) $V = (\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial cuya base es

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

luego es de dimensión finita ($\dim V = 4$).

b) $V = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es un polinomio}\}$ es un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{C} , además, V está formado por elementos de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + c_n x^n.$$

Sean $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Así el conjunto $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ es una base de V , vemos así que V es de dimensión infinita ($\dim V = \infty$).

Del ejemplo anterior, el caso (a) está generado por un número finito de vectores y el caso (b) está generado por un número infinito de vectores.

Definición 1.1.3 Sean V, W dos espacios vectoriales reales, y consideremos la aplicación $T : V \rightarrow W$. Decimos que T es una **transformación lineal** si:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y todo } u, v \in V$$

Si $W = \mathbb{R}$ entonces T es llamada **funcional lineal**.

Definición 1.1.4 (Norma de un espacio vectorial) La aplicación $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty >$ define una **norma** sobre V si cumple lo siguiente:

1. $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ para todo $u, v \in V$
2. $\| \lambda u \| = |\lambda| \| u \|$ para todo $u \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\| u \| = 0$ si y solamente si $u = 0$

Un espacio vectorial provisto de una norma será llamado **espacio vectorial normado (e.v.n)** y será denotado por $(V, \| \cdot \|)$.

Definición 1.1.5 Sean V, W e.v.n. Una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es **acotada** si ésta es acotada sobre la bola unitaria de V , esto es

$$\exists M > 0 \quad \text{tal que} \quad \| Tv \|_W \leq M \| v \|_V \quad \text{para todo } v \in V \quad (1.1)$$

Definición 1.1.6 Sea V un espacio vectorial real. Una aplicación $d : V \times V \rightarrow [0, \infty >$ es llamada una **distancia ó métrica** si:

1. $d(u, v) > 0$ para todo $u, v \in V$
2. $d(u, v) = 0$ si y solamente si $u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$ para todo $u, v \in V$
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ para todo $u, v, w \in V$

Un espacio vectorial V provisto de una distancia será llamado **espacio métrico (e.m.)** y será denotado por (V, d) .

Observación 1.1.1

► En un e.v.n. $(V, \| \cdot \|)$, se puede construir una métrica mediante la siguiente relación

$$d(u, v) = \| u - v \| \quad \text{para todo } u, v \in V$$

Definición 1.1.7 (Espacio separable)

Se dice que un espacio métrico V es **separable** si existe un subconjunto $D \subset V$ numerable y denso.

Definición 1.1.8 Sea (V, d) un e.m., dada una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$, decimos que ésta **converge** a " $u \in V$ " si respecto a la métrica d se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) = 0 \tag{1.2}$$

y se denota por $u_n \rightarrow u$. También podemos decir que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ **converge fuertemente** a $u \in V$.

Definición 1.1.9 Sean: V un e.v.n., una funcional $f : V \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$. Luego

1. Diremos que f es **continua** en un punto $x_0 \in V$ si

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \text{siempre que } x_n \rightarrow x_0.$$

2. La funcional f será llamada **funcional continua** sobre V si es continua en cada punto de V .

3. La funcional f será llamada **funcional lineal continua** si es simultáneamente lineal y continua sobre V .

Definición 1.1.10 Sea V un espacio vectorial normado. Se define al espacio:

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es una funcional lineal continua}\}$$

como el **espacio dual topológico de V** .

Observación 1.1.2

► El espacio V^* con la aplicación siguiente

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \quad \text{para todo } f \in V^*$$

es un espacio vectorial normado.

Observación 1.1.3

► En un espacio vectorial normado, los conceptos de funcional lineal continua y funcional lineal acotada son equivalentes, es decir, para que una funcional lineal sea continua es necesario y suficiente que sea acotada.

Definición 1.1.11 Sea $u \in V$ y $f \in V^*$, se define el **producto de dualidad** por

$$\langle f, u \rangle_{V^*, V} := f(u)$$

Definición 1.1.12 Sea (V, d) un e.m. y sea una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ entonces, se tiene los siguientes conceptos:

1. La sucesión es llamada **sucesión de Cauchy** si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(u_m, u_n) < \epsilon \quad \text{para todo } m, n \geq n_0.$$

2. V es llamado **espacio métrico completo** si toda sucesión de Cauchy converge en V .

Definición 1.1.13 (Espacio de Banach)

Se dice que un espacio vectorial normado es un **espacio de Banach** si éste es completo con la métrica inducida por la norma.

Definición 1.1.14 (Inclusión continua)

Sean V, W espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con $V \subseteq W$. Definimos el operador inclusión "j" como

$$j : V \rightarrow W$$

$$u \mapsto j(u) = u$$

para todo $u \in V$. Decimos que $V \subseteq W$ es una **inclusión continua** si y sólo si "j" es continua, es decir, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_W \leq c \|u\|_V \quad \text{para todo } u \in V$$

Definición 1.1.15 (Espacio reflexivo)

Sea V un espacio de Banach y $J : V \rightarrow V^{**}$ la **inyección canónica** de V en V^{**} definida como

$$\langle Jv, f \rangle_{V^{**}, V^*} = \langle f, v \rangle_{V^*, V} \quad \text{para todo } v \in V \text{ y todo } f \in V^*$$

Se define a V como un **espacio reflexivo** si cumple la siguiente relación $J(V) = V^{**}$, es decir, la aplicación J es sobreyectivo.

En lo que sigue mencionamos dos resultados que involucran las definiciones de espacios separables y reflexivos para un espacio de Banach V .

Teorema 1.1.1 *Sea V un espacio de Banach tal que V^* es separable. Entonces V es separable.*

El recíproco de este teorema no es cierto dado que existen espacios de Banach V separables tales que su dual V^* no es separable. Para un estudio más detallado recomendamos la lectura de [3].

Corolario 1.1.1 *Sea V un espacio de Banach. Entonces*

V es reflexivo y separable si y solamente si V^ es reflexivo y separable.*

Definición 1.1.16 (Convergencia débil) *Decimos que una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ converge débilmente a $u \in V$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$ existe y además*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u) \quad \text{para todo } f \in V^*$$

y será denotada del modo siguiente : $u_n \rightharpoonup u$.

La definición anterior permite hablar en términos de convergencia débil, la cual es una definición importante en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales y en lo que sigue damos algunos resultados de la convergencia débil en espacios de Banach que serán de interés en los siguientes capítulos.

Teorema 1.1.2 *Toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo tiene una subsucesión débilmente convergente.*

Proposición 1.1.1 (Propiedades de la convergencia débil) *Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ una sucesión en un espacio de Banach V sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *La convergencia fuerte $u_n \rightarrow u$ cuando $n \rightarrow \infty$ implica la convergencia débil $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \rightarrow \infty$.*
2. *Si $\dim V < \infty$, entonces la convergencia débil $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \rightarrow \infty$ implica la convergencia fuerte $u_n \rightarrow u$ cuando $n \rightarrow \infty$.*
3. *Si $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotado y*

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \quad (1.3)$$

4. *Si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en V y si existe un $u \in V$ y un subconjunto $D \subset V^*$ tal que*

$$\langle f, u_n \rangle_{V^*, V} \rightarrow \langle f, u \rangle_{V^*, V} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad \text{para todo } f \in D,$$

entonces $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \rightarrow \infty$.

5. *Si V es además reflexivo y la sucesión real $\{\langle v, u_n \rangle_{V^*, V}\}_{n=1}^{\infty}$ converge para todo $v \in V^*$, entonces existe un $u \in V$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \rightarrow \infty$.*
6. *Si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en el espacio reflexivo V , entonces $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge débilmente. Adicionalmente, si cada subsucesión débilmente convergente de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene el mismo límite u , entonces $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

7. *Dada la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ que verifica*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en } V \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

$$f_n \rightarrow f \quad \text{en } V^* \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces $\langle f_n, u_n \rangle_{V^, V} \rightarrow \langle f, u \rangle_{V^*, V}$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

8. Si V es reflexivo y se tiene que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \quad \text{en } V \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \\ f_n &\rightarrow f \quad \text{en } V^* \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \langle f_n, u_n \rangle_{V^*, V} \rightarrow \langle f, u \rangle_{V^*, V} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Los resultados de la Proposición 1.1.1 serán de vital importancia más adelante cuando se quiera probar la convergencia del método de Galerkin, su demostración puede ser revisada en [25].

1.2. Espacios de Hilbert

Definición 1.2.1 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Un **producto interno** es una aplicación $(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que verifica las siguientes condiciones:

1. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ para todo $u, v, w \in V$.
2. $(\alpha u, v) = \alpha (u, v)$ para todo $u, v \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. $(u, v) = \overline{(v, u)}$ para todo $u, v \in V$.
4. $(u, u) \geq 0$ para todo $u \in V$.
5. $(u, u) = 0$ si y solamente si $u = 0$.

en el caso de los espacios euclidianos ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) se tiene la linealidad en ambos argumentos del $(,)$, lo que recibe el nombre de bilinealidad.

Observación 1.2.1

► A todo producto interno se le asocia una norma, definida por

$$\| u \| := (u, u)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para todo } u \in V \quad (1.4)$$

Definición 1.2.2 V es llamado un **espacio pre-Hilbert** si con la norma (1.4) satisface la siguiente condición

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2) \quad \text{para todo } u, v \in V$$

Definición 1.2.3 (Espacio de Hilbert)

Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial con producto interno $(, \cdot)$, y que es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|$ inducida por $(, \cdot)$. Por la Observación 1.2.1 esto es posible.

En [2] se demuestra que todo espacio de Hilbert es un espacio reflexivo.

Teorema 1.2.1 (Representación de Riesz) *Toda funcional lineal acotada $f \in H^*$ sobre un espacio de Hilbert H puede ser representado en términos del producto interno como sigue*

$$\langle f, u \rangle_{H^*, H} = (u, v) \quad \text{para todo } u \in H$$

donde $v \in H$ depende de f y está únicamente determinado, además

$$\|v\|_H = \|f\|_{H^*}$$

Definición 1.2.4 (Forma bilineal)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Toda aplicación $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

$$i) \quad a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \quad \text{para todo } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{y } u, v, w \in V$$

$$ii) \quad a(u, \lambda v + \mu w) = \lambda a(u, v) + \mu a(u, w) \quad \text{para todo } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{y } u, v, w \in V$$

se denomina **forma bilineal**.

Además:

• Decimos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es **simétrica** si se cumple

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \text{para todo } u, v \in V$$

• Decimos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ está **acotada** si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \text{para todo } u, v \in V$$

• Decimos que la forma bilineal es **V - elíptica, coercivo o fuertemente positiva** si existe una constante $c > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq c \|v\|^2 \quad \text{para todo } v \in V$$

Definición 1.2.5 (Operador monótono)

Sea V un espacio de Hilbert real con producto interno (\cdot, \cdot) respectivo. Un operador $A : V \rightarrow V^*$ es **monótono** si cumple la siguiente condición

$$(Au - Av, u - v) \geq 0 \quad \text{para todo } u, v \in V$$

Definición 1.2.6 (Operador fuertemente monótono)

Sea V un espacio de Hilbert real con producto interno (\cdot, \cdot) respectivo. Un operador $A : V \rightarrow V^*$ es **fuertemente monótono** si y solamente si existe una constante $c > 0$ de modo que

$$(Au - Av, u - v) \geq c \|u - v\|^2 \quad \text{para todo } u, v \in V$$

Definición 1.2.7 (Operador hemicontinuo)

Sea V un espacio de Hilbert real con producto interno (\cdot, \cdot) respectivo. Un operador $A : V \rightarrow V^*$ es **hemicontinuo** si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto f(\lambda) = (A(u + \lambda v), w) \end{aligned}$$

es continua para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $u, v, w \in V$.

Definición 1.2.8 (Operador pseudomonótono)

Sea V un espacio de Hilbert real. Un operador $A : V \rightarrow V^*$ se dice **pseudomonótono** si cumple las siguientes condiciones:

1. A es acotado.
2. Si $u_j \rightarrow u$ en V débilmente y $\limsup_{j \rightarrow \infty} (Au_j, u_j - u) \leq 0$ entonces

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (Au_j, u_j - v) \geq (Au, u - v) \quad \text{para todo } v \in V.$$

El siguiente resultado muestra como se relacionan los operadores monótonos, hemicontinuos y pseudomonótonos en un espacio de Hilbert.

Proposición 1.2.1 Sea V un espacio de Hilbert real y sea $A : V \rightarrow V^*$ un operador. Luego, si A es acotado, hemicontinuo y monótono entonces A es pseudomonótono.

Teorema 1.2.2 Sean K un conjunto convexo, cerrado y acotado de V , $A : K \rightarrow V^*$ un operador pseudomonótono y coercivo, es decir:

Existe v_0 tal que

$$\frac{(A(v), v - v_0)}{\|v\|} \rightarrow +\infty \text{ si } \|v\| \rightarrow \infty \quad \text{para todo } v \in K$$

entonces para todo $f \in V^*$ existe $u \in K$ tal que satisface

$$(A(u), v - u) \geq (f, v - u) \quad \text{para todo } v \in K$$

1.3. Resultados Básicos del Análisis Convexo

Definición 1.3.1 (Conjunto convexo)

Un subconjunto K de un espacio vectorial V es **convexo** si verifica la siguiente propiedad geométrica:

$$\forall x, y \in K : \lambda x + (1 - \lambda) y \in K, \quad \text{para todo } \lambda \in (0, 1).$$

Es decir, los elementos de la recta que unen a x e y también pertenecen al conjunto K .

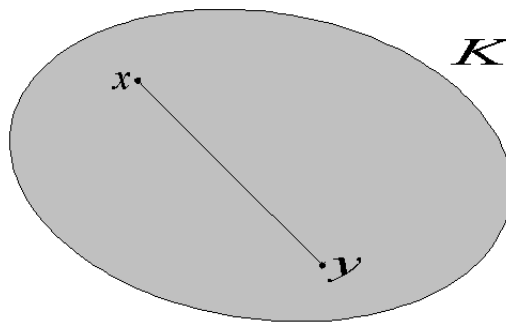


Figura 1.1: Conjunto convexo

Teorema 1.3.1 (De la mejor aproximación sobre un convexo cerrado)

Sea K un subconjunto convexo cerrado no vacío de un espacio de Hilbert H . Dado $x \in H$, existe un único elemento $y_0 \in K$ que verifica

$$\|x - y_0\|_H = \inf_{y \in K} \|x - y\|_H \leq \|x - y\|_H, \quad \text{para todo } y \in K$$

es decir, existe un elemento $y_0 = \text{Proy}_K x$ llamado **la mejor aproximación a x** , dado que minimiza su distancia a éste según la norma de H .

Además se cumple

$$d(x, K) = \|x - y_0\|$$

tal que y_0 se caracteriza por la siguiente propiedad

$$y_0 \in K, \quad (x - y_0, v - y_0) \leq 0, \quad \text{para todo } v \in K$$

Teorema 1.3.2 (De la proyección sobre un subespacio vectorial cerrado)

Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H . Entonces:

- i) Para todo $x \in H$ existe un único elemento $y = \text{Proy}_M x \in M$ el cual verifica $(y - x) \perp M$.

ii) El operador de proyección $P = \text{Proy}_M$ es un operador lineal continuo de H en H , de norma $\|P\| \leq 1$.

Definición 1.3.2 Sea V un espacio vectorial normado, $J : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una función. Se define como **dominio efectivo de J** al conjunto

$$D(J) = \{v \in V / J(v) < +\infty\}$$

Definición 1.3.3 Una función $J : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ donde V es un espacio vectorial normado, se dice que J es **semicontinua inferiormente (s.c.i.)** si para todo $v \in V$ se tiene

$$\liminf_{w \rightarrow v} J(w) \geq J(v)$$

Definición 1.3.4 Sea una función $J : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ donde V es un espacio vectorial normado. Decimos que J es **convexa** si

$$J(tv + (1-t)w) \leq tJ(v) + (1-t)J(w) \quad \text{para todo } v, w \in V \text{ y } t \in]0, 1[$$

Definición 1.3.5 Sea la funcional $J : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ definida sobre un espacio vectorial normado V tal que $J \not\equiv +\infty$. Se define la funcional $J^* : V^* \rightarrow]-\infty, +\infty]$ llamada **conjugada** de J de la manera siguiente

$$J^*(f) = \sup_{v \in V} \{ \langle f, v \rangle_{V^*, V} - J(v) \} \quad \text{para todo } f \in V^*$$

Notar que J^* es una funcional convexa y semicontinua inferiormente sobre V^* , este resultado puede verse en [2].

Proposición 1.3.1 Sea la funcional $J : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ definida sobre un espacio vectorial normado V . J es convexa, semicontinua inferiormente y $J \not\equiv +\infty$. Entonces $J^* \not\equiv +\infty$.

La demostración de este resultado también puede leerse en [2].

A partir de la proposición anterior, podemos definir ahora siempre que $J^* \not\equiv +\infty$ la siguiente funcional $J^{**} : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ del modo siguiente

$$J^{**}(v) = \sup_{f \in V^*} \{ \langle f, v \rangle_{V^*, V} - J^*(f) \} \quad \text{para todo } v \in V.$$

Para la funcional J^{**} definida se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3.3 Sea la funcional $J : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ definida sobre un espacio vectorial normado V . J es convexa, semicontinua inferiormente y $J \not\equiv +\infty$. Entonces $J^{**} = J$.

Definición 1.3.6 Para una funcional $J : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida sobre un espacio vectorial normado V se define la **subdiferencial** en $u \in V$, $\partial J(u)$, de la manera siguiente

$$\partial J(u) = \{z \in V^* : J(v) - J(u) \geq \langle z, v - u \rangle_{V^*, V} \quad \forall v \in V\}$$

Proposición 1.3.2 Sea una funcional $J : V \rightarrow \mathbb{R}$. Para $v \in V$ y $q \in V^*$ se tiene la siguiente relación

$$q \in \partial J(v) \quad \text{si y sólo si} \quad v \in \partial J^*(q)$$

Proposición 1.3.3 Sea una funcional $J : V \rightarrow \mathbb{R}$. Para $q \in \partial J(v)$ se verifica

$$q \in \partial J(v) \quad \text{si y solamente si} \quad J^*(q) + J(v) = \langle q, v \rangle_{V^*, V}$$

Definición 1.3.7 (Derivada de Gateaux) Sea $J : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Definimos la derivada direccional de J en un punto $u \in V$ en la dirección de $v \in V$ al siguiente límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda}$$

si este límite existe, será denotado por $J'(u, v)$.

Si existe $u^* \in V^*$ de modo que

$$J'(u, v) = \langle u^*, v \rangle_{V^*, V} \quad \text{para todo} \quad v \in V \quad (1.5)$$

diremos que J es Gateaux diferenciable en el punto $u \in V$ y además u^* es la derivada en el sentido de Gateaux de J en el punto u y será denotado por $u^* = J'(u)$.

Estos resultados básicos de análisis convexo serán de vital importancia cuando se desee aproximar la solución de una inecuación variacional parabólica, sus demostraciones pueden ser revisadas en [2].

1.4. Nociones de Teoría de la Medida

A continuación presentamos algunas nociones de teoría de la medida, presentando la Medida de Lebesgue, el cual nos permite describir el "tamaño" de ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Definición 1.4.1 Una colección \mathcal{M} de subconjuntos de \mathbb{R}^n es llamado un σ -álgebra si:

- I. $\phi, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$.

2. Si $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}$.

3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Teorema 1.4.1 Existe un σ -álgebra \mathcal{M} de subconjuntos de \mathbb{R}^n y una aplicación $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ con las siguientes propiedades:

1. Todo subconjunto abierto de \mathbb{R}^n pertenece a \mathcal{M} , y así, todo subconjunto de \mathbb{R}^n pertenece a \mathcal{M} .

2. Si B es cualquier bola en \mathbb{R}^n , entonces $\mu(B)$ es igual al volumen n -dimensional de B .

3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

4. Si $A \subset B$ donde $B \in \mathcal{M}$ y $\mu(B) = 0$, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$.

Los conjuntos en \mathcal{M} son llamados **conjuntos Lebesgue medibles** y μ es la **medida de Lebesgue n -dimensional**.

Definición 1.4.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es una **función medible** si para cada subconjunto abierto $\Omega \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{M}$.

En particular, si f es una función continua, entonces f es medible. También se cumple que la suma y el producto de funciones medibles son funciones medibles.

Definición 1.4.3 Decimos que una propiedad se cumple en **casi todo punto (c.t.p.)** de Ω , si el conjunto de los puntos en la que **no** se cumple es medible y tiene medida nula.

1.5. Espacios L_p

Para cada p tal que $1 \leq p < \infty$ definimos

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\}$$

Si para todos $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, definimos la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega \quad (1.6)$$

por tanto, pasando al cociente, obtenemos el conjunto

$$L_p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f|^p < \infty\} \quad (1.7)$$

Sobre $L_p(\Omega)$, definimos la norma dada por:

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \quad \text{y,} \quad (1.8)$$

$$\|f\|_p := \sup\{|f(x)| / x \in \Omega\} \quad \text{si } p = \infty \quad (1.9)$$

para todo $f \in L_p(\Omega)$.

Por lo tanto, los espacios $L_p(\Omega)$ son conjuntos de clases de equivalencia respecto a la relación (1.6). En particular, cuando $p = 2$, denotaremos el producto interno como

$$(f, g)_p := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (1.10)$$

y a la norma inducida por él, la denotaremos por

$$\|f\|_p := (f, f)_p^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

Dos propiedades muy importantes se dan en los siguientes teoremas.

Teorema 1.5.1 *Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Entonces el espacio $L_p(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma dada en (1.8) y en el caso de $p = \infty$ con la norma dada por (1.9).*

Teorema 1.5.2 *Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$. Entonces el espacio $L_p(\Omega)$ es reflexivo y separable.*

ambas demostraciones pueden encontrarse en [2]. Además, para $p = 2$ el espacio $L_2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido en (1.10).

Teorema 1.5.3 (Desigualdad de Minkowski) *Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$. Si $f, g \in L_p(\Omega)$ entonces*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1.12)$$

Un resultado importante en análisis moderno está dado por el siguiente teorema.

Teorema 1.5.4 (Desigualdad de Hölder) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío; $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p, q < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Si $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_q(\Omega)$ entonces*

$$\left| \int_{\Omega} fg \, d\Omega \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (1.13)$$

esta desigualdad fue probada por vez primera por Otto Hölder (1859 - 1937) aplicado a series, su extensión respectiva para integrales fue hecha por Fryges Riesz y la demostración de ambas puede ser revisada en [25].

1.6. Derivada Distribucional

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $C^\infty(\Omega)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables a valores reales, y para cada $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ definimos su *soporte* como el conjunto

$$\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}} \quad (1.14)$$

Además definimos

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) / \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto y } \text{sop}(\varphi) \subseteq \Omega\} \quad (1.15)$$

Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son llamados **funciones de prueba** ó **funciones test** y lo denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$. Nos interesa saber que es una sucesión convergente en $\mathcal{D}(\Omega)$, con este fin damos las siguientes definiciones que nos permitirán justificar la definición de sucesión convergente en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.6.1 *Sea una sucesión de funciones $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ definidas sobre Ω y una función $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión **converge puntualmente** a φ en Ω si y sólo si para cada $x \in \Omega$ y cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon, x)$ tal que siempre que $k > N(\epsilon, x)$ se cumple que $|\varphi_k(x) - \varphi(x)| < \epsilon$.*

Definición 1.6.2 *Sea una sucesión de funciones $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ definidas sobre Ω y una función $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión **converge uniformemente** a φ en Ω si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ tal que siempre que $k > N(\epsilon)$ para todo $x \in \Omega$ se cumple que $|\varphi_k(x) - \varphi(x)| < \epsilon$.*

La siguiente definición describe cuando una sucesión de funciones $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.6.3 *Sea una sucesión de funciones $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$, se dice que **converge** a $0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ si existe un conjunto compacto fijo K tal que $\text{sop}(\varphi_k) \subset K$ para todo $k \in \mathbb{N}$, además φ_k y todas sus derivadas convergen uniformemente a cero sobre K .*

Ahora podemos dar algunos conceptos y resultados generales acerca de unos objetos que nos permitirán generalizar el concepto de *función* al considerar funcionales lineales de $\mathcal{D}(\Omega)$, estos objetos son llamados *distribuciones*.

Definición 1.6.4 *Sean $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y una funcional lineal $f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. La funcional f es llamada una **distribución** sobre Ω si se verifica lo siguiente*

$$\text{si } \varphi_k \rightarrow 0 \text{ entonces } f(\varphi_k) \rightarrow 0$$

Observación 1.6.1

► El espacio de distribuciones es el espacio dual topológico de las funciones test y es denotado por $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Observación 1.6.2

► Dada una función integrable f , definimos $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (1.16)$$

observar que T_f es una funcional lineal y verifica que es una distribución [20], es decir, una función integrable f genera una distribución T_f .

Definición 1.6.5 Un vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que cada una de sus componentes α_k ($k = 1, \dots, n$) es un número entero no negativo (que en particular pudiera ser nulo), se denomina **multiíndice de orden**

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Ahora, dado un multiíndice α , se suele utilizar la siguiente notación para una derivada parcial de orden $|\alpha|$

$$D^{\alpha}u(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial^{|\alpha|}u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (1.17)$$

Definición 1.6.6 Supongamos que $u, v \in L_1(\Omega)$ y sea α un multiíndice. Decimos que v es la α -ésima derivada distribucional de u si se cumple

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \quad (1.18)$$

para todas las funciones test $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, y lo denotaremos por

$$D^{\alpha}u = v \quad (1.19)$$

Observación 1.6.3

► Si existe tal función v que satisface (1.18) para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ decimos que $D^{\alpha}u = v$ es la **derivada débil** de u .

Observación 1.6.4

► La α -ésima derivada débil de u , si existe, es única.

Ejemplo 1.6.1 Sea $n = 1, \Omega = (0, 2)$ y consideremos:

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

y definamos:

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Afirmamos que $Du = v$ en el sentido débil.

En efecto, elijamos cualquier $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Debemos demostrar que:

$$\int_0^2 u\varphi' dx = - \int_0^2 v\varphi dx \quad (1.20)$$

Entonces, veamos:

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\varphi' dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 (1)\varphi'(x) dx \\ &= - \int_0^1 \varphi(x)dx + \varphi(1) + \int_1^2 \varphi'(x)dx = - \int_0^2 v\varphi(x)dx \end{aligned}$$

así queda probada la afirmación. ■

1.7. Espacios de Sobolev

Definiremos ahora los llamados espacios de Sobolev, en la cual se basa la moderna teoría de las ecuaciones diferenciales parciales.

Sea k un entero no negativo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) abierto y acotado, además sea p de modo que $1 \leq p \leq \infty$. Definimos:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L_p(\Omega) : D^\alpha v \in L_p(\Omega) \forall \alpha \text{ multiíndice tal que } |\alpha| \leq k\} \quad (1.21)$$

donde D^α indica la α -ésima derivada distribucional de v . Luego, el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es llamado **espacio de Sobolev** y sobre él se define la siguiente norma:

$$\|v\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \quad (1.22)$$

$$\|v\|_{k,p,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha v(x)| \quad \text{si } p = \infty \quad (1.23)$$

Definición 1.7.1 Sean $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $W^{k,p}(\Omega)$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Decimos que u_m **converge** a $u \in W^{k,p}(\Omega)$ si y sólo si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{k,p,\Omega} = 0 \quad (1.24)$$

y lo denotamos como: $u_m \rightarrow u$ en $W^{k,p}(\Omega)$

Observación 1.7.1

► Si $p = 2$ entonces, utilizaremos la siguiente notación: $H^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$.

► Para $H^k(\Omega)$ se define la **seminorma** siguiente

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^{\alpha} v)^2 d\Omega} \quad (1.25)$$

► Por simplicidad haremos uso de las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} H^0(\Omega) &= L_2(\Omega) \\ H_0^k(\Omega) &= W_0^{k,2}(\Omega) \end{aligned}$$

► $W_0^{k,p}(\Omega)$ es el conjunto de aquellas funciones $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$D^{\alpha} u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \text{para toda } |\alpha| \leq k-1 \quad (1.26)$$

Teorema 1.7.1 (Friedrichs) Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_n|_{\Omega} \rightarrow u \quad \text{en } L_p(\Omega)$$

Para una función $v \in H^k(\Omega)$ queremos ahora obtener el valor de v sobre la frontera $\Gamma = \partial\Omega$, para lograrlo se hará uso del operador traza dada en la siguiente definición.

Definición 1.7.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Γ poligonal y $k \geq 1$. Luego, existe una y sólo una aplicación lineal y continua γ_0 tal que

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^k(\Omega) &\rightarrow L_2(\Gamma) \\ v &\mapsto \gamma_0(v) = v|_{\Gamma} \end{aligned}$$

para todo $v \in H^k(\Omega) \cap C(\Omega)$.

El operador γ_0 es llamado el **operador traza** de v sobre Ω . La continuidad de γ_0 implica que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|\gamma_0(v)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|v\|_{H^k(\Omega)}$$

Definición 1.7.3 Nosotros denotaremos por $H^{-1}(\Omega)$ el espacio dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.7.2 (Caracterización de $H^{-1}(\Omega)$)

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ entonces existen funciones f^0, f^1, \dots, f^n en $L_2(\Omega)$ tal que:

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} \left(f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i D_i(v) \right) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

Teorema 1.7.3 Para cada $k = 1, 2, \dots$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Haremos el caso de $1 \leq p < \infty$

Primero probaremos que $\| \cdot \|_{k,p,\Omega}$ es una norma.

1. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in W^{k,p}(\Omega)$ tenemos que:

$$\| \lambda v \|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}(\lambda v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \| v \|_{k,p,\Omega}$$

2. $\| v \|_{k,p,\Omega} = 0 \Leftrightarrow v = 0$ c.t.p. $x \in \Omega$

3. Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned} \| u + v \|_{k,p,\Omega} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}(u + v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(u + v) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(u) + D^{\alpha}(v) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

La desigualdad de Minkowski implica que

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(u) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(v) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \| u \|_{k,p,\Omega} + \| v \|_{k,p,\Omega} \end{aligned}$$

De (1), (2) y (3) concluimos que $\| \cdot \|_{k,p,\Omega}$ es una norma.

Ahora veamos que $W^{k,p}(\Omega)$ es completo con respecto a la norma $\| \cdot \|_{k,p,\Omega}$:

Tomemos una sucesión de Cauchy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(\Omega)$ entonces para cada $|\alpha| \leq$

k , $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L_p(\Omega)$ y como éste es completo, entonces existe $u_\alpha \in L_p(\Omega)$ tal que:

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \quad \text{en} \quad L_p(\Omega) \quad (1.27)$$

en particular cuando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ es decir:

$$D^\alpha u_n = u_n \rightarrow u_\alpha = u_{(0,0,\dots,0)} \quad \text{en} \quad L_p(\Omega) \quad (1.28)$$

Afirmamos ahora que $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $D^\alpha u = u_\alpha$ ($|\alpha| \leq k$).

En efecto, fijemos $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n D^\alpha \phi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi dx \end{aligned}$$

y esto prueba la afirmación. Así,

$$D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u \quad \text{en} \quad L_p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Por lo tanto, también obtenemos que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en} \quad W^{k,p}(\Omega).$$

Así $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. ■

1.8. Identidades de Green

En \mathbb{R}^n , un **campo vectorial** es una función del modo siguiente

$$\begin{aligned} F : D \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \end{aligned}$$

donde D es un abierto y acotado de \mathbb{R}^n y F_i es llamada la i -ésima componente del campo F .

Se define **la divergencia** para el campo F por

$$\text{div } F = \nabla \cdot F$$

donde el operador ∇ es definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$. Por lo tanto

$$\text{div } F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

La divergencia permite medir las "tasas de cambio de magnitudes" en más de una dimensión, es decir, representa la **derivada** en dimensiones mayores.

En particular, si $n = 3$ y tenemos el campo $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, luego:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

En lo que sigue, Ω denota un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . A continuación se deducen las dos primeras identidades de Green a partir del **teorema de la divergencia de Gauss**, el cual establece para un campo vectorial $F \in [C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^n$ se cumple:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta \, ds \quad (1.29)$$

donde $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ y $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ es el **vector normal unitario exterior**

a Ω . En particular, si $F := (0, \dots, 0, \overbrace{uv}^i, 0, \dots, 0)$ con $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, entonces se obtiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (uv) \, dx = \int_{\partial\Omega} uv \eta_i \, ds,$$

es decir :

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \eta_i \, ds, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

al reemplazar $u = \frac{\partial w}{\partial x_i}$ en la ecuación anterior, resulta:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v \eta_i \, ds, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

luego, al sumar sobre todos los índices, se concluye la **primera identidad de Green**

$$\int_{\Omega} v \Delta w = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} v \, ds \quad (1.30)$$

La relación indicada en (1.30) es válida para todo $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Nota:

La expresión $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ representa la **derivada normal sobre** $\partial\Omega$ y es definida como

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \eta_i$$

Ahora, intercambiando los roles de v y w en (1.30) y luego restando la ecuación resultante a (1.30) se obtiene la **segunda identidad de Green**:

$$\int_{\Omega} [v \Delta w - w \Delta v] \, dx = \int_{\partial\Omega} \left[v \frac{\partial w}{\partial \eta} - w \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \, ds \quad (1.31)$$

para todo $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Las identidades de Green serán de importancia para nuestro objetivo de poder deducir las formulaciones débiles del problema de transferencia de calor por conducción y de control térmico que se verán en los capítulos siguientes.

1.9. Espacios Funcionales Evolutivos

Cuando consideremos funciones dependientes del tiempo y espacio: $v(x, t)$, es natural extender las definiciones de medida e integrabilidad a funciones de la forma:

$$f : [0, T] \rightarrow V$$

donde $T > 0$ y V es un espacio de Banach real con norma $\| \cdot \|$.

Consideremos para esta sección el intervalo $G = [0, T]$.

Definición 1.9.1

i) Una función $s : G \rightarrow V$, es llamado **simple** si tiene la forma

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i} u_i \quad (0 \leq t \leq T)$$

donde cada E_i es medible Lebesgue de $[0, T]$ y $u_i \in V$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

ii) Una función $f : G \rightarrow V$ es **fuertemente medible** si existen funciones simples $s_k : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$s_k(t) \rightarrow f(t) \quad \text{c.t.p.} \quad 0 \leq t \leq T$$

iii) Una función $f : G \rightarrow V$ es **débilmente medible** si para cada $u^* \in V^*$, la aplicación $t \mapsto \langle u^*, f(t) \rangle_{V^*, V}$ es medible Lebesgue.

Definición 1.9.2

i) Para una función $s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i$ simple, definimos

$$\int_0^T s(t) dt := \sum_{i=1}^m |E_i| u_i$$

ii) Decimos que $f : G \rightarrow V$ es **sumable** si existe una sucesión $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples tal que

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\| dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

iii) Si $f : G \rightarrow V$ sumable, definimos

$$\int_0^T f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T s_k(t) dt$$

Teorema 1.9.1 (Bochner) Una función fuertemente medible $f : G \rightarrow V$ es sumable si y solamente si $t \mapsto \|f(t)\|$ es sumable. En este caso

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\| \leq \int_0^T \|f(t)\| dt$$

y además

$$\left\langle u^*, \int_0^T f(t) dt \right\rangle_{V^*, V} = \int_0^T \langle u^*, f(t) \rangle_{V^*, V} dt$$

para todo $u^* \in V^*$.

Definición 1.9.3 Sean: $T > 0$, $G = [0, T] \subset \mathbb{R}$ y V un espacio de Banach o de Hilbert. El espacio $C(G, V)$ se define como el conjunto de todas las funciones continuas $f : G \rightarrow V$ y en el cual se define la siguiente norma

$$\|f\|_{C(G, V)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\| < \infty \quad (1.32)$$

Definición 1.9.4 Sea una función $f : G \rightarrow V$, el **sopORTE de f** es definido por el conjunto

$$\text{sop}(f) := \overline{\{t \in G / f(t) \neq 0\}}$$

Denotamos por $\mathcal{D}(G, \mathbb{K})$ el siguiente conjunto

$$\mathcal{D}(G, \mathbb{K}) = \{f : G \rightarrow \mathbb{K} : f \in C^\infty(G), \text{sop}(f) \text{ es compacto y } \text{sop}(f) \subseteq G\} \quad (1.33)$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Definición 1.9.5 Sea V un espacio de Banach. El espacio $L_p(0, T, V)$ consiste de todas las funciones medibles $u : G \rightarrow V$ que satisfacen:

$$\|u\|_{L_p(0, T, V)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \text{ y} \quad (1.34)$$

$$\|u\|_{L_p(0, T, V)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty \quad \text{si } p = \infty \quad (1.35)$$

Teorema 1.9.2 Sean V, W espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y sea $1 \leq p < \infty$.

Luego :

- a) $C(G, V)$ es un espacio de Banach con la norma dada en (1.32).
- b) $L_p(0, T, V)$ es un espacio de Banach con la norma dada en (1.34) siempre que $1 \leq p < \infty$ y con (1.35) cuando $p = \infty$.
- c) $C(G, V)$ es denso en $L_p(0, T, V)$ y la inclusión $C(G, V) \subseteq L_p(0, T, V)$ es continua.
- d) El conjunto de polinomios $w : G \rightarrow V$, es decir

$$w(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

con $a_i \in V$ para todo $i, n = 0, 1, 2, \dots$ es denso en $C(G, V)$ y en $L_p(0, T, V)$.

- e) Si V es un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_V$, entonces el espacio $L_2(0, T, V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{L_2(0, T, V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt$$

- f) Si V es un espacio de Banach separable entonces el espacio $L_p(0, T, V)$ también es separable.
- g) Si $V \subseteq W$ es una inclusión continua entonces

$$L_r(0, T, V) \subseteq L_q(0, T, W) \quad 1 \leq q \leq r < \infty$$

también es una inclusión continua.

Teorema 1.9.3 Sea V un espacio de Banach, entonces para todo $u \in L_p(0, T, V)$ y todo $v \in L_q(0, T, V^*)$ de modo que $1 < p, q < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$ se cumple la desigualdad de Hölder, es decir

$$\int_0^T | \langle v(t), u(t) \rangle_{V^*, V} | dt \leq \left(\int_0^T \| v(t) \|_{V^*}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \| u(t) \|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposición 1.9.1 Sean: V un espacio de Banach reflexivo y separable, $1 < p, q < \infty$ de modo que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Luego :

a) A cada función $v \in L_q(0, T, V^*)$ existe una única funcional $w \in L_p(0, T, V)^*$ tal que

$$\langle w, u \rangle_{L_p(0, T, V)^*} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{V^*, V} dt \quad \text{para todo } u \in L_p(0, T, V)$$

b) Inversamente, a cada función $w \in L_p(0, T, V)^*$ existe exactamente una función $v \in L_q(0, T, V^*)$ de modo que

$$\begin{aligned} \langle w, u \rangle_{L_p(0, T, V)^*} &= \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{V^*, V} dt \quad \text{para todo } u \in L_p(0, T, V) \quad \text{y,} \\ \|w\|_{L_p(0, T, V)^*} &= \|v\|_{L_q(0, T, V^*)} \end{aligned}$$

c) El espacio $L_p(0, T, V)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable.

Observación 1.9.1

► La Proposición 1.9.1 establece lo siguiente: si $X = L_p(0, T, V)$ entonces su dual viene dado por $X^* = L_q(0, T, V^*)$ siempre que $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y V es un espacio de Banach reflexivo separable.

Proposición 1.9.2 Sea V un espacio de Banach, además sean $1 < p, q < \infty$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y $0 \leq t \leq T < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) Si $u \in L_p(0, T, V)$ entonces

$$\langle v^*, \int_0^t u(s) ds \rangle_{V^*, V} = \int_0^t \langle v^*, u(s) \rangle_{V^*, V} ds \quad \text{para todo } v^* \in V^*.$$

b) Si $u \in L_p(0, T, V^*)$ entonces

$$\langle \int_0^t u(s) ds, v \rangle_{V^*, V} = \int_0^t \langle u(s), v \rangle_{V^*, V} ds \quad \text{para todo } v \in V.$$

c) Si $\{u_n\}_{n=0}^\infty \in L_p(0, T, V)$ tal que $u_n \rightarrow u \in L_p(0, T, V)$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces

$$\int_0^t u_n(s) ds \rightarrow \int_0^t u(s) ds \quad \text{en } V \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Adicionalmente si V es separable y reflexivo se tiene que para las sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^\infty \in L_p(0, T, V)$ y $\{v_n\}_{n=0}^\infty \in L_q(0, T, V^*)$ tal que:

d)

$$u_n \rightarrow u \in L_p(0, T, V) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

$$v_n \rightarrow v \in L_q(0, T, V^*) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

ó también

e)

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \in L_p(0, T, V) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \\ v_n &\rightarrow v \in L_q(0, T, V^*) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

entonces para ambos casos

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s) \rangle_{V^*, V} ds \rightarrow \int_0^t \langle v(s), u(s) \rangle_{V^*, V} ds \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Proposición 1.9.3 Sea V un espacio de Banach real, si $u \in L_1(0, T, V)$ y

$$\int_0^T \varphi(t)u(t) dt = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G)$$

entonces

$$u(t) = 0 \quad \text{c.t.p. } t \in]0, T[$$

Definición 1.9.6 Sea V un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Luego, una funcional $u : \mathcal{D}(G, \mathbb{K}) \rightarrow V$ lineal y continua es llamada una **distribución**.

El conjunto de todas las distribuciones será denotado por $\mathcal{D}'(G, V)$, es decir

$$\mathcal{D}'(G, V) = \{f : \mathcal{D}(G, \mathbb{K}) \rightarrow V : f \text{ es lineal y continua}\} \quad (1.36)$$

Se recomienda [25] para una lectura más detallada de la teoría de distribuciones y de los resultados que se muestran a continuación.

Definición 1.9.7 Sean V y W dos espacios de Banach, $u \in L_1(0, T, V)$ y $w \in L_1(0, T, W)$.

Se define la α -ésima derivada distribucional de la función u sobre G como la relación de igualdad

$$\int_0^T \varphi^{(\alpha)}(t)u(t) dt = (-1)^\alpha \int_0^T \varphi(t)w(t) dt \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G) \quad (1.37)$$

siendo $w = u^{(\alpha)}$

Proposición 1.9.4 Sean V y W dos espacios de Banach y sea $u \in L_1(0, T, V)$. Sean $v, w \in L_1(0, T, W)$, si

$$u^{(\alpha)} = v \quad \text{y} \quad u^{(\alpha)} = w$$

en el sentido de derivadas distribucionales, entonces

$$v(t) = w(t) \quad \text{c.t.p. } t \in]0, T[$$

es decir: $v = w$ en $L_1(0, T, W)$.

Observación 1.9.2

► Para cada función $u \in L_1(0, T, V)$ podemos asignarle a u una distribución U de la siguiente manera

$$U(\varphi) = \int_0^T \varphi(t)u(t) dt \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, esta distribución tiene una n -ésima derivada $U^{(n)}$ definido por

$$U^{(n)} = (-1)^n U(\varphi^{(n)})$$

de la Definición 1.9.7 y (1.37) podemos representar $U^{(n)}$ de la siguiente forma

$$U^{(n)}(\varphi) = \int_0^T \varphi(t)u^{(n)}(t) dt \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G) \quad (1.38)$$

La ventaja de trabajar con distribuciones, es que cada $u \in L_1(0, T, V)$ posee derivadas distribucionales de todos los órdenes.

Proposición 1.9.5 (Derivada distribucional y convergencia débil) Sean V y W dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ con la inclusión continua $V \subseteq W$. Si para cada n -ésima derivada distribucional, $n \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene :

$$\begin{aligned} u_k^{(n)} &= v_k \quad \text{sobre }]0, T[\quad \text{para todo } k \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{en } L_p(0, T, V) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \\ v_k &\rightarrow v \quad \text{en } L_q(0, T, W) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

donde $1 \leq p, q < \infty$, entonces

$$u^{(n)} = v \quad \text{sobre }]0, T[$$

Esta proposición indica una relación de compatibilidad entre la derivada distribucional y la convergencia débil.

Nota: Este resultado es importante porque nos va a servir en adelante para probar la convergencia del método de Galerkin.

Definición 1.9.8 (Triple inclusión continua) Dados los siguientes espacios funcionales V y H , se define la siguiente relación de triple inclusión continua

$$V \subseteq H \subseteq V^*$$

donde:

i) V es un espacio de Banach real reflexivo y separable con espacio dual topológico V^* .

ii) H es un espacio de Hilbert separable.

iii) Para la inclusión continua $V \subseteq H$ se tiene que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|v\|_H \leq c \|v\|_V \quad \text{para todo } v \in V$$

y V es denso en H .

Proposición 1.9.6 (Existencia y unicidad de $u^{(n)}$) Sean V , y H espacios de Hilbert de modo que $V \subseteq H \subseteq V^*$ forman una triple inclusión continua, $1 \leq p, q < \infty$ y $0 < T < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) Para $u \in L_p(0, T, V)$, la derivada distribucional $u^{(n)} \in L_q(0, T, V^*)$ es única, es decir, $t \mapsto u^{(n)}(t)$ puede ser modificada sobre un subconjunto de $]0, T[$ de medida cero.

b) Sea $u \in L_p(0, T, V)$. Entonces existe la derivada distribucional $u^{(n)} \in L_q(0, T, V^*)$ si y sólo si existe una función $w \in L_q(0, T, V^*)$ tal que

$$\int_0^T (u(t), v)_H \varphi^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^T \langle w(t), v \rangle_{V^*, V} \varphi(t) dt \quad (1.39)$$

para todo $v \in V$ y todo $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$.

Luego, $u^{(n)} = w$ y

$$\frac{d^n}{dt^n} (u(t), v)_H = \langle u^{(n)}(t), v \rangle_{V^*, V} \quad (1.40)$$

se cumple para todo $v \in V$ y casi todo punto $t \in]0, T[$. Aquí, d^n/dt^n significa la n -ésima derivada distribucional de una función real sobre $]0, T[$.

Definición 1.9.9 (Espacios de Sobolev evolutivos) Sea V un espacio de Banach real, $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Se define como el **espacio de Sobolev evolutivo** $W^{1,p}(0, T, V)$ de orden 1 al conjunto

$$W^{1,p}(0, T, V) = \{u \in L_p(0, T, V) / u' \in L_q(0, T, V^*)\}$$

donde u' es la primera derivada distribucional.

Para $u \in W^{1,p}(0, T, V)$ se define la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T, V)} := \|u\|_{L_p(0, T, V)} + \|u'\|_{L_q(0, T, V^*)}$$

es decir

$$\| u \|_{W^{1,p}(0,T,V)} := \left(\int_0^T \| u(t) \|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^T \| u'(t) \|_{V^*}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.41)$$

siendo $1 < p, q < \infty$ y $0 < T < \infty$.

Nota:

Para $k = 1$ y $p = 2$ el espacio $W^{1,2}(0, T, V)$ se denota como $H^1(0, T, V)$

Proposición 1.9.7 El espacio de Sobolev $W^{1,p}(0, T, V)$ es un espacio de Banach con la norma definida por la función dada en (1.41).

Proposición 1.9.8 Sean los espacios V y H que forman una triple inclusión continua; $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p, q < \infty$ de modo que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y $0 < T < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

a) La inclusión

$$W^{1,p}(0, T, V) \subseteq C(G, H)$$

es continua, es decir, si $u \in W^{1,p}(0, T, V)$, entonces existe una función continua únicamente determinada $u_1 : G \rightarrow H$ la cual coincide con la función inicial u en casi todo punto $t \in G$. Por ello, no haremos distinción entre u y u_1 , además, en este sentido, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| u(t) \|_H \leq c \| u \|_{W^{1,p}(0,T,V)}$$

b) El conjunto de todos los polinomios $w : G \rightarrow V$, esto es

$$w(t) = \sum_i t^i a_i \quad \text{con} \quad a_i \in V \quad \text{para todo} \quad i$$

es denso en los espacios $W^{1,p}(0, T, V)$, $L_p(0, T, V)$ y $L_p(0, T, H)$.

Teorema 1.9.4 (Integración por partes en espacios de Sobolev)

Para todo $u, v \in W^{1,p}(0, T, V)$ y $t, s \in \mathbb{R}$ arbitrarios tal que $s \leq t \leq T$ ($T \in \mathbb{R}$ y $T \geq 0$). Luego, se verifica la fórmula de integración por partes, es decir

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t (\langle u'(\tau), v(\tau) \rangle_{V^*,V} + \langle v'(\tau), u(\tau) \rangle_{V^*,V}) d\tau \quad (1.42)$$

donde los valores de $u(t), v(t), u(s)$ y $v(s)$ son los valores de las funciones continuas $u, v : G \rightarrow H$ en el sentido de la Proposición 1.9.8-(a).

El siguiente teorema relaciona u y u' cuando no se encuentran en el mismo espacio.

Teorema 1.9.5 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un subconjunto abierto y acotado. Luego, si $u \in L_2(0, T, H_0^1(\Omega))$ con $u' \in L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ entonces:

$$u \in C(G, L_2(\Omega))$$

y la aplicación $t \mapsto \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ es absolutamente continua con:

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2) = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle \quad \text{c.t.p.} \quad 0 \leq t \leq T$$

Además:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L_2(0, T, H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))} \right)$$

donde la constante C depende solamente de T .

1.10. Nociones Generales de Semigrupos

Estos conceptos serán de vital importancia cuando se estudien las desigualdades variacionales parabólicas. No se profundizará sobre la teoría de semigrupos, sólo mencionaremos las definiciones y teoremas necesarios para el presente trabajo recomendando para mayores detalles los textos [11] y [20].

Definición 1.10.1 Sea V un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ una familia de operadores lineales acotados sobre V (i.e. $S(t) : V \rightarrow V$). Decimos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo si satisface:

- i) $S(0) = I$ es el operador identidad sobre V .
- ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$.
- iii) $\forall u \in V : S(t)u \rightarrow u$ cuando $t \downarrow 0$

Observación 1.10.1

► La propiedad (iii) indica una relación de continuidad del operador S respecto a t , para $t \geq 0$.

Teorema 1.10.1 Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo sobre un espacio de Banach V , entonces existen constantes $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt} \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (1.43)$$

Corolario 1.10.1 Sea V un espacio de Banach, luego para todo $u \in V$ el mapeo $t \mapsto S(t)u$ es un mapeo continuo de $[0, \infty)$ en V .

Definición 1.10.2 En (1.43) cuando $M = 1$ y $w = 0$ se tiene que

$$\| S(t) \| \leq 1 \quad \text{para todo } t \geq 0$$

en estos casos decimos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un **semigrupo de contracción**.

Observación 1.10.2

► Observar que para $u \in V$ fijo, $S(\cdot)u \in C([0, \infty), V)$

Definición 1.10.3 Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo sobre un espacio de Banach V . El generador infinitesimal es un operador lineal A definido por

$$Au = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A)$$

cuyo dominio efectivo es dado por

$$D(A) = \left\{ u \in V / \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\}$$

Observación 1.10.3

► Sea A el generador infinitesimal de un espacio de Hilbert V con producto interno (\cdot, \cdot) . Sea $u \in D(A)$, de modo que

$$\| S(t)u \| \leq \| u \|$$

de lo anterior se obtiene

$$(S(t)u - u, u) \leq 0$$

dividiendo esta desigualdad entre t y haciendo $t \downarrow 0$ resulta

$$(Au, u) \leq 0 \quad \text{para todo } u \in D(A)$$

1.11. Nociones de Teoría de la Dualidad

Asumiendo las siguientes consideraciones:

$$\text{Sean } V \text{ y } W \text{ espacios de Hilbert} \tag{1.44}$$

y

$$J \text{ una funcional convexa propia y s.c.i. en } V \tag{1.45}$$

planteamos el problema de minimización

$$\inf_{v \in V} J(v) \quad (1.46)$$

Siempre que $J(v)$ pueda escribirse como un *supremo* de una aplicación $\mathcal{L} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ en $w \in W$, es decir

$$J(v) = \sup_{w \in W} \mathcal{L}(v, w) \quad \text{para todo } v \in V$$

la aplicación \mathcal{L} es llamada **lagrangiano**.

Definición 1.11.1 Decimos que $(p, q) \in V \times W$ es un **punto de silla** de una aplicación $\mathcal{L} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$\mathcal{L}(p, w) \leq \mathcal{L}(p, q) \leq \mathcal{L}(v, q) \quad \text{para todo } v \in V, w \in W \quad (1.47)$$

Definición 1.11.2 Sean V, W espacios de Hilbert y una aplicación $\mathcal{L} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$.

Definimos:

$$\mathcal{J}(v) = \sup_{w \in W} \mathcal{L}(v, w) \quad (1.48)$$

$$\mathcal{G}(v) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, w) \quad (1.49)$$

el problema de minimización de (1.48), es decir

$$\inf_{v \in V} \mathcal{J}(v) = \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \mathcal{L}(v, w) \quad (1.50)$$

es llamado **problema primal**, y el problema de maximización de (1.49) dado por

$$\sup_{w \in W} \mathcal{G}(w) = \sup_{w \in W} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, w) \quad (1.51)$$

es llamado **problema dual**.

Proposición 1.11.1 Si existe $p_0 \in V, q_0 \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathcal{L}(p_0, w) \leq \alpha \quad \text{para todo } w \in W, \quad \text{y,}$$

$$\mathcal{L}(v, q_0) \geq \alpha \quad \text{para todo } v \in V$$

entonces, (p_0, q_0) es un punto silla de \mathcal{L} y

$$\alpha = \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \mathcal{L}(v, w) = \sup_{w \in W} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, w)$$

Operadores Multivaluados y Subdiferenciabilidad

Como siempre, V denota un espacio de Hilbert con producto interno (\cdot, \cdot) y norma asociada $\|\cdot\|$, V^* denota el dual de V , es decir, el espacio de las funciones lineales y continuas de V en \mathbb{R} y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*, V}$ la relación de dualidad entre V^* y V , además denotaremos por $\mathcal{P}(V)$ a la colección de partes de V . Un operador $T : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$, $T : x \mapsto Tx$ se dirá **multivaluado**.

Para los elementos del conjunto $\mathcal{P}(V)$ se definen las siguientes operaciones:

i) Para $z, w \in \mathcal{P}(V)$ se define $z + w$ como el conjunto

$$z + w = \{z_1 + w_1 : z_1 \in z \text{ y } w_1 \in w\} \in \mathcal{P}(V)$$

ii) Si $v \in V$ y $z \in \mathcal{P}(V)$, se define $v + z$ como el conjunto

$$v + z = \{v + z_1 : z_1 \in z\} \in \mathcal{P}(V)$$

iii) Para $z, w \in \mathcal{P}(V)$ se define $z.w$ como el conjunto

$$z.w = \{z_1 w_1 : z_1 \in z \text{ y } w_1 \in w\} \in \mathcal{P}(V)$$

vi) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathcal{P}(V)$, se define λz como el conjunto

$$\lambda z = \{\lambda z_1 : z_1 \in z\} \in \mathcal{P}(V)$$

Ahora damos algunas definiciones adicionales que serán de utilidad más adelante.

Definición 1.11.3 El **dominio** de un operador multivaluado $T : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$, se define como

$$\text{Dom}(T) = \{x \in V : Tx \neq \emptyset\}$$

Definición 1.11.4 El operador $T : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$ es **monótono** en un subconjunto $C \subset V$ si

$$(x - y, u - v) \geq 0, \quad \text{para todo } x, y \in C, u \in Tx, v \in Ty$$

Definición 1.11.5 Un operador $T : V \rightarrow V$ es **lipschitziano de orden** λ , si existe $\lambda > 0$ de modo que

$$\|Tu - Tv\| \leq \lambda \|u - v\| \quad \text{para todo } u, v \in V$$

Se dirá **contractivo** si $\lambda < 1$

Definición 1.11.6 El operador **Resolvente** de T de orden λ , $J_\lambda^T : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$ se define como

$$J_\lambda^T(v) = (\mathcal{I} + \lambda T)^{-1}(v) \quad \text{para todo } v \in V$$

donde \mathcal{I} denota el operador identidad : $\mathcal{I} : V \rightarrow V$, definido por

$$\mathcal{I}(v) = v \quad \text{para todo } v \in V$$

Definición 1.11.7 La **aproximación Yosida** de T de orden λ , $T_\lambda : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$ se define como

$$T_\lambda(v) = \frac{1}{\lambda}(\mathcal{I} - J_\lambda^T)(v)$$

Proposición 1.11.2 El operador resolvente J_λ^T asociado a un operador monótono, es lipschitziano de orden 1 y la aproximación Yosida T_λ es un operador lipschitziano de orden $\frac{1}{\lambda}$.

1.12. Ecuaciones Diferenciales Parabólicas

Empezamos este trabajo dando a conocer la clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Parciales y algunos resultados referentes al tipo de ecuación en estudio. Se llama **ecuación en derivadas parciales de segundo orden** con n variables independientes x_i ($i = 1, \dots, n$) a una relación entre la función incógnita $u(x_1, \dots, x_n)$ y sus derivadas parciales de segundo orden inclusive

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, \dots, u_{x_ix_j}, \dots, u_{x_nx_n}) = 0$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$ y donde además

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

En lo que sigue, consideramos la ecuación lineal de segundo orden

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \quad (a_{ij}(x) = a_{ji}(x)) \quad (1.52)$$

donde a_{ij} , b_i , c y f son funciones de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En [19] puede observarse con mayor detalle que los coeficientes de la parte principal de (1.52) que son los términos de segundo orden ($a_{ij}(x)$) varían en forma análoga que los coeficientes de una forma cuadrática bajo una transformación lineal

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \quad (1.53)$$

es conocido que bajo una transformación lineal adecuada se puede obtener una forma cuadrática de (1.53) en su forma canónica, es decir

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{jj}(x) \xi_j^2 \quad (1.54)$$

que por el **teorema de inercia de Sylvester** se sabe que el número de elementos positivos, negativos y nulos a_{ii} de la forma cuadrática (1.53) es invariante con respecto a una transformación lineal y obtener \bar{a}_{ii} en (1.54). Los coeficientes de la forma cuadrática (1.54) serán denotados por a_{ii} , mencionamos que las formas cuadráticas expresadas en su forma canónica (1.54) son clasificadas según la siguiente definición.

Definición 1.12.1 Una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ expresada en su forma canónica en $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es dado por $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ y podemos clasificarlo de la forma siguiente :

1. Q es **definida positiva** si y sólo si todos los coeficientes son estrictamente positivos, es decir

$$\alpha_i > 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

2. Q es **definida negativa** si y sólo si todos los coeficientes son estrictamente negativos, es decir

$$\alpha_i < 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

3. Q es **indefinida** si y sólo si hay por lo menos dos coeficientes con signos distintos, es decir

$$\exists i, j \text{ con } i \neq j \text{ tal que: } \alpha_i > 0 \text{ y } \alpha_j < 0.$$

4. Q es **semidefinida positiva** si y sólo si todos los coeficientes son no negativos, es decir

$$\alpha_i \geq 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

5. Q es **semidefinida negativa** si y sólo si todos los coeficientes son no positivos, es decir

$$\alpha_i \leq 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Dado el comportamiento análogo de los coeficientes de (1.52) con los de (1.54) damos la siguiente definición.

Definición 1.12.2 Según los coeficientes a_{ii} de la forma cuadrática (1.54) asociada a la ecuación lineal de segundo orden (1.52), entonces (1.52) es llamada de tipo:

1. **Elíptico** en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ si todos los n coeficientes a_{ii} son de un mismo signo.
2. **Parabólico** en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ si por lo menos uno de los coeficientes a_{ii} es igual a cero.
3. **Hiperbólico** en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ si $n - 1$ coeficientes a_{ii} poseen el mismo signo y un coeficiente el signo opuesto.

diremos que (1.52) es elíptica, parabólica o hiperbólica en Ω si se cumple (1), (2) ó (3) respectivamente para todo $x \in \Omega$.

En particular, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tendríamos

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.55)$$

donde $a_{11} = a_{11}(x, y)$, $a_{12} = a_{12}(x, y)$ y $a_{22} = a_{22}(x, y)$ son funciones de x e y . Luego, esta ecuación será llamada:

1. Elíptico en el punto $(x, y) \in \Omega$ si: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
2. Parabólico en el punto $(x, y) \in \Omega$ si: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,
3. Hiperbólico en el punto $(x, y) \in \Omega$ si: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

En efecto, la forma cuadrática asociada a (1.55) viene dada por

$$Q(\xi, \eta) = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$$

primero analizamos el caso cuando $a_{11} \neq 0$, entonces completando cuadrados obtenemos

$$Q(\xi, \eta) = a_{11} \left(\xi + \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta \right) + \left(-\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} \right) \eta^2$$

haciendo el cambio de variables adecuado

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta \\ \eta' &= \eta \end{aligned}$$

resulta así

$$Q(\xi', \eta') = a_{11}\xi'^2 + \left(-\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} \right) \eta'^2 \quad (1.56)$$

luego, de (1.56) se obtiene las siguientes conclusiones

a) Es definida positiva si y sólo si

$$a_{11} > 0 \quad \text{y} \quad -\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} > 0$$

b) Es definida negativa si y sólo si

$$a_{11} < 0 \quad \text{y} \quad -\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} < 0$$

de los 2 casos anteriores concluimos que (1.55) es elíptico si se verifica

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$$

sin embargo, cuando

$$a_{11} \left(-\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} \right) < 0$$

podemos concluir que (1.56) es indefinido, resultando así (1.55) de tipo hiperbólico.

Además, hemos supuesto que $a_{11} \neq 0$ pudiendo darse el caso que

$$\left(-\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} \right) = 0$$

en cuyo caso (1.55) es de tipo parabólico.

Ahora, el caso cuando $a_{11} = 0$, tenemos $Q(\xi, \eta) = 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$ y analizamos los casos cuando $a_{22} = 0$ y $a_{22} \neq 0$. En el primer caso, hacemos el cambio

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' + \eta' \\ \eta &= \xi' - \eta' \end{aligned}$$

resultando así

$$Q(\xi', \eta') = 2a_{12}(\xi' + \eta')(\xi' - \eta') = 2a_{12}(\xi'^2 - \eta'^2)$$

concluyendo así que Q es indefinido y como consecuencia (1.55) es tipo hiperbólico no importando el signo de a_{12} . En el caso $a_{22} = 0$ volveríamos a completar cuadrados y regresaríamos a un caso similar a (1.56).

En conclusión damos la siguiente definición.

Definición 1.12.3 (Ecuación Diferencial Parabólica)

Dado un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una función escalar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(\Omega)$. Si al menos un coeficiente a_{ii} (de su forma cuadrática en su forma canónica asociada) es igual a cero en la siguiente ecuación en derivadas parciales de segundo orden

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \quad (a_{ij}(x) = a_{ji}(x)) \quad (1.57)$$

donde a_{ij}, b_i, c y f son funciones son continuas en Ω , entonces se define (1.57) como una ecuación diferencial parabólica en derivadas parciales.

Por ejemplo, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y $(x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in \Omega$ la ecuación dada por

$$u_t(x, t) - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x, t) = f(x, t)$$

se tiene $a_{ii} = -1$, $b_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), $a_{n+1, n+1} = 0$, $b_{n+1} = 1$ y $c = 0$. Luego, se trata de una ecuación diferencial parcial parabólica. Si $f \equiv 0$ diremos que es una EDP parabólica homogénea.

1.13. Condiciones Iniciales y de Frontera

Cuando se describe un fenómeno físico mediante un modelo matemático, en primer lugar hay que plantear correctamente el problema, es decir, enunciar las condiciones suficientes para la determinación de una única solución. Es conocido que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las Ecuaciones Diferenciales Parciales poseen un conjunto infinito de soluciones, por lo que para caracterizar de manera única la solución es necesario agregar al modelo planteado ciertas condiciones complementarias que garanticen la existencia y unicidad de solución. Luego, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) abierto y acotado con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular, hay dos tipos de condiciones complementarias, las cuales son:

1. **Condición inicial:** Consiste en la determinación de los valores de la función $u(x, t)$ en el momento inicial t_0 y para todo $x \in \Omega$.
2. **Condiciones de frontera** A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para garantizar unicidad de solución en una ecuación diferencial parcial, es necesario dar a conocer las condiciones en la frontera Γ de la región en la cual tiene lugar el proceso físico. Existen 3 tipos de condiciones de contorno:

- i) **Especificar la función en la frontera del dominio.** Se conoce como condición del tipo Dirichlet. Por ejemplo, si nuestra incógnita es la función $u(x, t)$ y queremos resolver la EDP del calor en un dominio acotado Ω se pueden presentar las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g_1(x, t) \quad \text{para todo } x \in \Gamma_1, \quad \Gamma_1 \subset \Gamma \quad \text{y,} \\ u(x, t) &= g_2(x, t) \quad \text{para todo } x \in \Gamma \setminus \Gamma_1 \end{aligned}$$

Este tipo de condiciones, junto con la EDP, genera lo que se llama un problema de Dirichlet o de primer tipo. Nótese que se ha impuesto una condi-

ción inicial de tipo Dirichlet y dos condiciones de contorno (siempre de tipo Dirichlet) en las fronteras laterales Γ_1 y $\Gamma \setminus \Gamma_1$.

- ii) **Especificar la derivada de la función en la frontera del dominio.** Se conoce como condición del tipo Neumann y el problema asociado se llama problema de Neumann (o de segundo tipo). Por ejemplo:

$$-k \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = q(x, t) \quad \text{para todo } x \in \Gamma_1, \quad \Gamma_1 \subset \Gamma \quad \text{y,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = g_2(x, t) \quad \text{para todo } x \in \Gamma \setminus \Gamma_1$$

siendo η el vector normal a la curva (o hipersuperficie) que representa la frontera del dominio. Físicamente este tipo de condición define el flujo de calor que atraviesa la frontera, que por ley de Fourier de la conducción del calor, es proporcional al gradiente de temperaturas.

- iii) **Especificar la función y su derivada en la frontera del dominio.** Se conoce como condición de tipo Robin (o mixto) y el problema asociado es un problema mixto (o de tercer tipo). Si consideramos por ejemplo el flujo de calor a través de las paredes de un conducto por el cual fluye un fluido:

$$-k \frac{\partial u}{\partial \eta} - h(u - u_\infty) = g(x) \quad \text{para todo } x \in \Gamma$$

siendo h un coeficiente de transporte de calor característico del material sólido del conducto que controla el flujo (de calor) en la frontera y u_∞ un valor conocido (dato del problema) de la temperatura ambiente alrededor del sistema. Este tipo de condiciones es muy realista pues expresa que el flujo de calor conductivo es proporcional a la diferencia de temperaturas entre las paredes del conducto y el exterior.

Otros tipos de condiciones de contorno son igualmente posibles. En los procesos de transporte de calor por radiación (por ejemplo en combustión o en procesos que se desarrollan a altas temperaturas) se aplica la ley de Stefan-Boltzmann para describir el mecanismo de transporte de calor entre superficies sólidas separadas por gases (que se asumen transparentes a la radiación). Otras condiciones se imponen en procesos de fusión o evaporación donde tienen lugar cambios de fase.

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA: TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN Y SU CONTROL TÉRMICO

El proceso de transferencia de calor por conducción en un cuerpo se basa en la **ley de Fourier**. Esta ley establece que: " El flujo térmico es proporcional al gradiente de temperatura ".

Luego, si consideramos un cuerpo que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n = 2, 3$; la distribución de la temperatura a través del cuerpo para un punto x del espacio en un instante de tiempo $t \in [0, T]$ ($T > 0$) esté representada por una función $u(x, t)$. El **flujo térmico** está descrito por la función vectorial $J : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$J(x) = -k(x)\nabla u, \quad k(x) \geq 0, \quad x \in \Omega$$

donde $k(x)$ es una característica de resistencia del material, denominada *conductividad térmica*. Si el medio es **isótropo**¹, k es una función escalar. En el caso de que el medio sea **anisótropo** (cuando no es isótropo), k es un tensor ² y el vector del flujo térmico J es el producto del tensor k por el vector $-\nabla u$. Nuestro estudio está dirigido solamente

¹Es el hecho de ciertas propiedades físicas de un cuerpo medibles que dan resultados idénticos con independencia de la dirección escogida para la medida

²Es cierta clase de entidad algebraica de varias componentes, que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido. Los tensores son de especial importancia en física.

para medios isótropos.

2.1. Ecuaciones de Transferencia de Calor por Conducción

Supongamos un material de densidad ρ que está sometido a fuentes de calor $F(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_T = \Omega \times [0, T] \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ siendo x la variable espacial y t el tiempo.

El operador ∇u definido por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

está dirigido en el sentido del flujo de calor y que desde las experiencias más cotidianas muestran que el flujo de calor siempre va de mayor(caliente) a menor(frío) temperatura. Ahora, consideremos como dominio de estudio a Ω , el cual se asume que su frontera $\partial\Omega$ es continua. Luego, la ley de Fourier ³ implica que la cantidad de calor que se intercambia entre Ω y su complementario a través de su frontera $\partial\Omega$ en el tiempo t es

$$Q_1 = \int_{\partial\Omega} \langle k\nabla u, \eta \rangle ds = \int_{\partial\Omega} k \frac{\partial u}{\partial \eta} ds$$

donde η denota el vector normal exterior y ds es el elemento de longitud en $\partial\Omega$ y por el teorema de la divergencia se obtiene

$$Q_1 = \int_{\Omega} \text{div}(k(x)\nabla u) dx.$$

Por otro lado, las fuentes de calor generan en Ω una cantidad de calor

$$Q_2 = \int_{\Omega} F(x, t) dx$$

en el instante t .

Sabemos que la razón de cambio de temperatura respecto al tiempo en cada punto x es medida por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$$

por tanto, para un intervalo Δt (segundos), la variación de la cantidad de calor en Ω es aproximado por

$$Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{\Omega} c(x)\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right) dt$$

³Establece que la tasa de transferencia de calor por conducción en una dirección dada es proporcional al área normal a la dirección del flujo y al gradiente de temperatura en esa misma dirección.

donde $c(x)$ es el *calor específico del medio* y ρ es la densidad del material en estudio.

Para que haya un balance de energía se debe de cumplir

$$Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} (Q_1 + Q_2) dt$$

de donde resulta que la transferencia de calor tiene por ecuación de equilibrio la siguiente expresión

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \left(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x,t)) + F(x,t) - c(x)\rho \frac{\partial u}{\partial t} u(x,t) \right) dx dt = 0 \quad (2.1)$$

Ahora, hacemos uso de un resultado clásico de análisis que se da en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces*

$$f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} f(y) dy$$

donde $|B_r(x_0)|$ denota el volumen de la bola $B_r(x_0)$ de radio r y centro x_0 .

Se puede demostrar a partir de la Proposición 2.1.1 y aplicando el teorema del valor medio para integrales [21] para las funciones de varias variables la siguiente igualdad

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x,t)) + F(x,t) - c(x)\rho \frac{\partial u}{\partial t} u(x,t) = 0 \quad (2.2)$$

a esta expresión se le conoce como **ecuación diferencial del calor**.

La ecuación en derivadas parciales obtenida es del tipo parabólica. Para resolver este tipo de ecuación se le adicionará condiciones de contorno y de valor inicial. La **condición inicial** es el valor de la función $u(x,t)$ que toma en el momento inicial, es decir, en nuestro caso $t = t_0 = 0$ y la condición de frontera Dirichlet, son los valores que tomará la función $u(x,t)$ en la frontera del dominio.

Entonces, el problema parabólico de **valor inicial y de frontera fija** para la conducción del calor en un medio homogéneo es expresado de la forma más sencilla en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ haciendo $c = c(x)$, $\rho = \rho(x)$ y $k = k(x)$ funciones constantes para todo $x \in \Omega$ y denotando por $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ para algún T fijo y $T > 0$ queda formulado a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \Delta u = f(x,t) & \text{en} & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,0) = u_0 & \text{en} & x \in \Omega \\ u(x,t) = g(x) = 0 & \text{sobre} & (x,t) \in \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \quad (2.3)$$

donde $\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$, se le conoce como el **término fuente** de la ecuación (2.3), u_0 es la condición inicial y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son conocidos y $u : \overline{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$ es la solución a encontrar para el problema (2.3). Nuestro objetivo es la resolución numérica de la ecuación de **transferencia de calor por conducción** dado en (2.3).

Un problema más complejo se presenta cuando las condiciones de contorno son desconocidas [8], en la siguiente sección se planteará este tipo problema, para ello sigamos considerando $u(x, t)$ como la temperatura que se distribuye sobre un cuerpo que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). Básicamente el problema consiste en controlar la temperatura en la frontera en cada punto $x \in \Gamma = \partial\Omega$ de modo que $u(x, t) \in [h_1, h_2]$, $x \in \Gamma$, para esto sería necesario colocar dos dispositivos (inyectores de calor) que permiten inyectar flujo de calor a través de la frontera permitiendo así que el valor de la temperatura en $x \in \Gamma$ varíe lo menos posible y permanezca dentro del rango deseado $[h_1, h_2]$. Dado que la efectividad de los inyectores de calor es limitada, aprovecharemos que el flujo de calor puede ser medido por $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ y haremos que esté contenido en el intervalo $[g_1, g_2]$ tal que $0 \in [g_1, g_2]$. Entonces, nuestro problema : ¿Cómo controlar éste fenómeno el cual está originado por el flujo de calor que se transmite hacia el cuerpo a través de la frontera de modo que la temperatura no salga del rango considerado ?.

Este fenómeno está gobernado por un conjunto de ecuaciones asociados al problema de contorno donde una de las condiciones no se conoce y serán planteadas en la siguiente sección.

2.2. Problema de control térmico

Para este problema de control térmico en estudio consideremos un cuerpo que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ donde Ω es un conjunto abierto con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular. Sean $h_1, h_2, g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ de modo que el flujo de calor inyectado a través de la frontera medido por $\frac{\partial u}{\partial \eta} \in [g_1, g_2]$ de modo que permita que el valor de la temperatura $u(x, t) \in [h_1, h_2]$ donde $x \in \Gamma$ y además $0 \in [g_1, g_2]$.

Entonces, el conjunto de ecuaciones para cada caso se plantean a continuación.

- i) Si $u(x, t) \in [h_1, h_2]$, entonces la temperatura se encuentra controlada, esto quiere decir que la condición de Newman es conocida y de tipo homogénea:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{2.4}$$

ii) Si $u(x, t) \notin [h_1, h_2]$, entonces se trata de una condición de tipo Newman no homogénea y desconocida. Para determinar esta incógnita más del problema se asume lo siguiente: que la temperatura es constante en tiempo para $t > 0$ y variable en espacio para $x \in \Omega$, es decir, el flujo de calor queremos que varíe en $[g_1, g_2]$ con $0 \in [g_1, g_2]$ el cual es controlado por la siguiente condición:

a) Si $u(x, t)$ tiende a h_2^+ :

$$\text{flujo de calor} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial \eta} = (u - h_2)k_2 & \text{cuando } (u - h_2)k_2 \leq g_2 \\ -\frac{\partial u}{\partial \eta} = g_2 & \text{cuando } (u - h_2)k_2 > g_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

b) Si $u(x, t)$ tiende a h_1^- :

$$\text{flujo de calor} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial \eta} = (u - h_1)k_1 & \text{cuando } (u - h_1)k_1 \geq g_1 \\ -\frac{\partial u}{\partial \eta} = g_1 & \text{cuando } (u - h_1)k_1 < g_1 \end{cases} \quad (2.6)$$

donde g_1 y g_2 son valores reales.

Denotando como la función $\phi(u)$ a la siguiente condición:

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta} = \phi(u) \quad (2.7)$$

se tiene a partir de (2.4), (2.5) y (2.6)

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta} = \phi(u) = \begin{cases} g_1 & \text{si } u \leq h_1 + \frac{g_1}{k_1} \\ (u - h_1)k_1 & \text{si } h_1 + \frac{g_1}{k_1} < u \leq h_1 \\ 0 & \text{si } h_1 \leq u \leq h_2 \\ (u - h_2)k_2 & \text{si } h_2 < u \leq h_2 + \frac{g_2}{k_2} \\ g_2 & \text{si } u \geq h_2 + \frac{g_2}{k_2} \end{cases} \quad (2.8)$$

La interpretación geométrica de (2.8) se muestra en la figura (2.1).

Nuestro problema en esta condición de contorno es que u es desconocida y quedaría determinada después que se resuelve el problema. A este tipo de problemas se le conoce como un **problema de frontera libre**. De la ecuación (2.2) y la condición de contorno

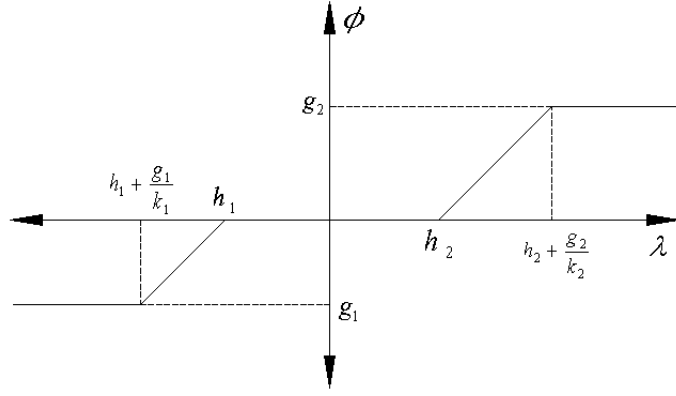


Figura 2.1: Gráfico de ϕ

(2.8) queda formulado el problema de frontera libre.

En particular al ser planteado de manera más sencilla en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado con frontera Γ , haciendo $c = c(x)$, $\rho = \rho(x)$ y $k = k(x)$ funciones constantes para todo $x \in \Omega$, denotando por $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ para algún T fijo y $T > 0$, las constantes $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ de modo que $g_1 < 0 < g_2$, $h_1 < h_2$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente tal que $g_1 \leq -\frac{\partial u}{\partial \eta} \leq g_2$ de modo que permita $u(x, t) \in [h_1, h_2]$, entonces el problema de control térmico consiste en encontrar una función u que satisfaga :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \Delta u = f(x, t) \quad \text{en } (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0 \quad \text{sobre } x \in \Omega \quad \text{es la condición inicial} \\ -\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = \phi(u(x, t)) \quad \text{en } x \in \Gamma \quad \text{y } t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (2.9)$$

donde : $\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$, se le conoce como el **término fuente** de la ecuación (2.9) y u_0 es la condición inicial. Recordemos que la primera ecuación de (2.9) es la que modela el valor de la temperatura en cada instante de tiempo, pero ahora está sujeta a las dos últimas condiciones, siendo la segunda una condición desconocida puesto que depende de u que es la que pretendemos encontrar en el proceso de solución y su comportamiento en la frontera Γ .

Definición 2.2.1 (Solución clásica o exacta)

Una función $u = u(x, t)$ tal que $(x, t) \in \Omega_T$ y $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T)) \cup C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$ donde

$$C^{2,1}(\Omega \times (0, T)) = \left\{ u : u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0(\Omega \times (0, T)) \quad \forall i, j \right\}$$

que satisface (2.3) (ó 2.9 respectivamente), es llamada **solución clásica** ó también **solución fuerte** de (2.3) (ó 2.9 respectivamente).

Capítulo 3

FORMULACIÓN VARIACIONAL

El objetivo de esta sección es buscar una solución explícita de los problemas enunciados (2.3) y (2.9), para ello utilizaremos la formulación variacional de tales problemas, luego resolveremos numéricamente los nuevos problemas obtenidos, se ha observado que ambos problemas son modelados por una ecuación en derivadas parciales de **tipo parabólico** diferenciándose en las condiciones de fronteras dadas, dependiendo de éstas, se puede aproximar en sentido débil el problema (2.3) como una **ecuación variacional parabólica EVP** y el problema (2.9) como una **inecuación variacional parabólica IVP**, ambos sobre espacios de Hilbert de dimensión infinita.

3.1. Formulación de las Ecuaciones Variacionales Parabólicas (EVP)

Dado el problema parabólico de transferencia de calor por conducción dado en (2.3), donde Ω es un subconjunto acotado abierto de \mathbb{R}^n con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular.

Ahora, denotando los siguientes conjuntos

$$\Omega_T = \Omega \times [0, T]$$

$$\Sigma_T = \Gamma \times [0, T]$$

supongamos una función $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular que verifica (2.3) y sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Luego multiplicamos la primera ecuación de (2.3) por v resultando

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

por la segunda identidad de Green y dado que $v \in H_0^1(\Omega)$ se obtiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad (3.1)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Hacemos $u : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $f : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega)$. De esta manera aprovechamos que a u se le puede asociar una distribución que denotamos de la misma forma, así se verifica

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx$$

reemplazando en (3.1) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad (3.2)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Recordando

$$(\phi, \psi)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \phi(x) \psi(x) dx \quad \text{para todo } \phi, \psi \in L_2(\Omega) \quad (3.3)$$

$$a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi dx \quad \text{para todo } \phi, \psi \in H^1(\Omega) \quad (3.4)$$

podemos reformular el problema de transferencia de calor por conducción dado en (2.3) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar una función } u : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega) \text{ de modo que se cumpla} \\ &\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.5) \\ &u(0) = u_0 \end{aligned}$$

donde $\frac{d}{dt}$ está en el sentido distribucional sobre $]0, T[$.

El problema de valor inicial (3.5) representa la **formulación variacional** o en el **sentido débil** del problema (2.3).

Definición 3.1.1 (Solución débil)

Una función u tal que

$$u \in L_2(0, T, H_0^1(\Omega)) \quad \text{con} \quad u' \in L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))$$

es una **solución débil** de la ecuación parabólica (2.3) siempre que satisfagan las condiciones iniciales y/o de frontera en sentido débil (o distribucional) dados en (3.5).

3.1.1. Existencia y unicidad de solución de la EVP

En lo que sigue daremos condiciones que permitan plantear el problema (3.5) en un marco más general y abstracto, para esto sean los espacios V , H y una forma bilineal $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes hipótesis:

H_1) Sean V y H espacios funcionales de Hilbert reales que forman una triple inclusión continua con $\dim V = \infty$ en el sentido de la Definición 1.9.8.

H_2) La forma bilineal $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, fuertemente positiva, la condición inicial $u_0 \in H$ y $f \in L_2(0, T, V^*)$ donde $T > 0$.

H_3) Dado el siguiente conjunto de funciones $\{w_1, w_2, \dots\}$ de modo que forman una base de V y $\{u_{n0}\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en H tal que $u_{n0} \rightarrow u_0$ cuando $n \rightarrow \infty$ donde $u_{n0} \in \text{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Entonces se debe encontrar $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ de modo que se cumpla:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{V^*, V} & \text{para todo } v \in V \\ u(0) = u_0 \in H \\ u \in W^{1,2}(0, T, V) \end{cases} \quad (3.6)$$

donde (3.6) representa la formulación variacional de (2.3) y es válido para casi todo punto $t \in]0, T[$.

Recuérdese que

$$(u(t), v)_H = \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx$$

$$a(u(t), v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

$$\langle f(t), v \rangle_{V^*, V} = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx .$$

Con la finalidad de predecir si existe solución del problema de valor inicial (3.6) se considera el siguiente teorema.

Por simplicidad de notación haremos uso de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para representar el producto dual dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*, V}$.

Teorema 3.1.1 (Existencia y Unicidad) *Dado el problema de valor inicial (3.6) que satisface las condiciones (H_1) , (H_2) y (H_3) ; entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *El problema (3.6) es equivalente al siguiente problema de valor inicial llamado problema de Cauchy.*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) & \text{en casi todo punto } t \in]0, T[\\ u(0) = u_0 \in H \\ u \in W^{1,2}(0, T, V) \end{cases} \quad (3.7)$$

donde el operador $A : V \rightarrow V^*$ es lineal, continua, fuertemente monótona y además:

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \text{para todo } u, v \in V \quad (3.8)$$

- 2) El problema de valor inicial (3.7) tiene solución.
- 3) El problema (3.7) tiene solución $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ única.
- 4) Convergencia débil de la sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ que se obtiene por el método de Galerkin a la solución $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ de (3.7) en $L_2(0, T, V)$.
- 5) Convergencia de la sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ que se obtiene por el método de Galerkin en el espacio $C(G, H)$, es decir

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - u(t)\|_H \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

donde $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ es la solución del problema (3.7).

- 6) Dados los datos iniciales $u_0 \in H$ y $f \in L_2(0, T, V^*)$ entonces la solución $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ de (3.7) es acotada, es decir, existe una constante $D > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,2}(0, T, V)} \leq D (\|u_0\|_H + \|f\|_{L_2(0, T, V^*)})$$

- 7) La sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge fuertemente a la solución $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ de (3.7) cuando $n \rightarrow \infty$ en el sentido siguiente

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } L_2(0, T, V) \quad (3.10)$$

Demostración:

- 1) (\Rightarrow) En efecto, consideremos $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ que satisface (3.6), recordando de la propiedad (1.40) se tiene

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H = \langle u'(t), v \rangle \quad \text{para todo } v \in V \quad (3.11)$$

donde d/dt denota la derivada distribucional sobre $]0, T[$ y (3.11) se verifica en casi todo punto $t \in G$. Luego, reemplazando (3.11) en (3.6) se obtiene

$$\langle u'(t) + Au(t) - f(t), v \rangle = 0 \quad \text{para todo } v \in V$$

y en casi todo punto $t \in]0, T[$. Así

$$u'(t) + Au(t) - f(t) = 0 \quad \text{en casi todo punto } t \in]0, T[$$

Efectuando recíprocamente se demuestra que el problema (3.7) implica el problema (3.6).

- 2) Asumiremos que la función $t \mapsto \langle f(t), v \rangle$ es continua sobre $[0, T]$ para todo $v \in V$.

Para probar la existencia de solución de (3.7) previamente utilizaremos el método variacional de Galerkin para discretizar con el método de elementos finitos el problema (3.6) lo cual se formula de la siguiente manera :

Supongamos $u_n(t)$ es solución finita de (3.6) donde "n" es la dimensión de la base del espacio de aproximación con el método de elementos finitos, entonces ésta se puede expresar de la siguiente forma

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{kn}(t)w_k, \quad u_{n0} = \sum_{k=1}^n \alpha_{kn}w_k \quad (t = 0) \quad (3.12)$$

reemplazando en (3.6) resulta la siguiente EVP:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n c'_{kn}(t)(w_k, w_j) + c_{kn}(t)a(w_k, w_j) = \langle f(t), w_j \rangle \\ c_{jn}(0) = \alpha_{jn} \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.13)$$

entonces para $n = 1, 2, \dots$ el problema de valor inicial (3.13) representa un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) con valores iniciales.

El sistema EDO'S como se puede ver en el apéndice (Teorema 7.1.2) se prueba que este problema de valores iniciales tiene solución única $u_n \in W^{1,2}(0, T, V)$.

Además se puede demostrar que la sucesión de soluciones u_n es acotada, es decir que exista un $K > 0$ tal que se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_0^T \| u_n(t) \|_V^2 dt \leq K \left(\| u_n(0) \|_H^2 + \int_0^T \| f(t) \|_{V^*}^2 dt \right) \quad (3.14)$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, para ello multiplicamos la ecuación (3.13) por c_{jn} y sumamos sobre j y obtenemos

$$(u'_n(t), u_n(t)) + a(u_n(t), u_n(t)) = \langle f(t), u_n(t) \rangle \quad (3.15)$$

aplicando la norma a $u_n(t)$ y derivando en el sentido distribucional en V y como V es un espacio de Hilbert entonces se tiene

$$\frac{d}{dt}(u_n(t), u_n(t)) = 2(u'_n(t), u_n(t))$$

aplicando este mismo resultado a la ecuación (3.15) se consigue

$$\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_H^2 + 2a(u_n(t), u_n(t)) = 2 \langle f(t), u_n(t) \rangle$$

e integrando de 0 a T resulta

$$\begin{aligned} & \|u_n(T)\|_H^2 - \|u_n(0)\|_H^2 + \\ & + 2 \int_0^T a(u_n(t), u_n(t)) dt = 2 \int_0^T \langle f(t), u_n(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Por hipótesis (H_2) se tiene que la forma bilineal a satisface que existe $c > 0$ de modo que

$$a(u_n(t), u_n(t)) \geq c \|u_n(t)\|^2$$

y también se cumple en \mathbb{R} la desigualdad clásica

$$2|xy| \leq c^{-1}x^2 + cy^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Con estas dos últimas relaciones se demuestra que la sucesión u_n es acotada, es decir :

$$\begin{aligned} \|u_n(T)\|_H^2 + 2c \int_0^T \|u_n(t)\|_H^2 dt & \leq \|u_n(0)\|_H^2 + \\ & + 2 \int_0^T \|f(t)\|_{V^*} \|u_n(t)\|_V dt \\ & \leq \|u_n(0)\|_H^2 + c^{-1} \int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt + \\ & + c \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt \end{aligned} \tag{3.16}$$

tomando $K = \max\{1/c, 1/c^2\} > 0$ la cual no depende de n .

3) Para demostrar la unicidad de la solución del problema (3.6) se puede proceder equivalentemente demostrando la unicidad de solución en el problema (3.7).

En efecto :

Supondremos que se tienen dos funciones u_1 y u_2 que satisfacen (3.7) y mostraremos

que su diferencia es igual a cero.

Para $j = 1, 2$ se verifica

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt}(t) + Au_j(t) &= f(t) \quad \text{en casi todo punto } t \in]0, T[\\ u_j(0) &= u_0 \in H \\ u_j &\in W^{1,2}(0, T, V) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) &= 0 \quad \text{en casi todo punto } t \in]0, T[\\ u(0) &= 0 \in H \\ u &\in W^{1,2}(0, T, V) \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $u = u_1 - u_2$.

A continuación se demuestra que

$$u(t) = 0 \quad \text{en casi todo punto } t \in]0, T[\quad (3.19)$$

de la hipótesis (H_2) se tiene que existe $c > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq c \|u\|_V^2 \quad \text{para todo } u \in V$$

con la relación anterior e integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 &= \int_0^T \langle u'(t), u(t) \rangle dt \\ &= - \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle dt = - \int_0^T a(u(t), u(t)) dt \\ &\leq -c \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \end{aligned}$$

esto implica que

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 + c \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \leq 0$$

desde que $u(0) = 0$ se concluye (3.19).

4) En lo que sigue analizaremos la convergencia débil de $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ en $L_2(0, T, V)$.

En efecto, de (3.14) la sucesión $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ es acotada sobre el espacio de Hilbert $L_2(0, T, V)$ desde que $u_n(0) \rightarrow u_0$ en H cuando $n \rightarrow \infty$, existe una subsucesión débilmente convergente $\{u_{n'}\}_{n'=0}^\infty$, es decir

$$u_{n'} \rightharpoonup u \quad \text{en } L_2(0, T, V) \quad \text{cuando } n' \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

Como u es una función que satisface el problema siguiente

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= f(t) \quad \text{en casi todo punto} \quad t \in]0, T[\\ u &\in W^{1,2}(0, T, V) \\ u(0) &= u_0 \in H \end{aligned} \tag{3.21}$$

por el paso 3, el problema de valor inicial (3.21) tiene exactamente una única solución, es decir, toda subsucesión débilmente convergente de $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ tiene el mismo límite u . Con esto queda probado la convergencia débil en $L_2(0, T, V)$.

Para probar que u satisface (3.21), se procede de la siguiente forma: multiplicando el problema (3.21) en $L_2(0, T, V)$ por una función $v \in V$ para luego integrar espacialmente en $L_2(0, T, V)$ y luego multiplicamos por una función real

$$\varphi \in C^1(G) \quad \text{tal que} \quad \varphi(T) = 0. \tag{3.22}$$

para integrar temporalmente. La forma integral resultante es

$$\begin{aligned} -(u_0, v)\varphi(0) - \int_0^T \langle u(t), v \rangle \varphi'(t) dt + \\ + \int_0^T \langle Au(t), v \rangle \varphi(t) dt = \int_0^T \langle f(t), v \rangle \varphi(t) dt \end{aligned} \tag{3.23}$$

Mediante el método de Galerkin u se puede aproximar por la sucesión (3.12) y (3.23) se tiene la siguiente forma integral

$$\begin{aligned} -(u_n(0), w_j)\varphi(0) - \int_0^T \langle u_n(t), w_j \rangle \varphi'(t) dt + \\ + \int_0^T a(u_n(t), w_j)\varphi(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \varphi(t) dt \end{aligned} \tag{3.24}$$

para todo $n \geq j$. Observar que

$$(u_n(t), w_j) = \langle u_n(t), w_j \rangle$$

aplicando la convergencia débil a la ecuación (3.24) se obtiene

$$\begin{aligned} -(u(0), w_j)\varphi(0) - \int_0^T \langle u(t), w_j \rangle \varphi'(t) dt + \\ + \int_0^T a(u(t), w_j)\varphi(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \varphi(t) dt \end{aligned} \tag{3.25}$$

para todo j .

Con la finalidad de justificar este último límite necesitamos verificar que el segundo y tercer término en (3.24) representen funcionales lineales continuos sobre el espacio de Hilbert $L_2(0, T, V)$ con respecto a u_n . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle u_n(t), w_j \rangle \varphi'(t) dt \right| &\leq C_1 \int_0^T \|u_n(t)\| \|w_j\| \|\varphi'(t)\|_H dt \\ &\leq C_2 \|w_j\| \left(\int_0^T \|u_n(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_2 \|w_j\| \|u_n\|_{L_2(0, T, V)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde C_1 y C_2 son constantes obtenidas por la desigualdad de Hölder. De modo análogo se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T a(u_n(t), w_j) \varphi(t) dt \right| &\leq C_1 \int_0^T \|u_n(t)\| \|w_j\| \|\varphi(t)\|_H dt \\ &\leq C_2 \|w_j\| \|u_n\|_{L_2(0, T, V)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como $v \in V$ y por la hipótesis (H_3) se puede concluir que existe una sucesión $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ tal que

$$v_n \rightarrow v \quad \text{en } V \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde cada v_n es una combinación lineal finita de ciertos elementos de la base w_j . Haciendo $n \rightarrow \infty$ observamos que la ecuación (3.25) también es válida si reemplazamos w_j con v , con lo que se prueba (3.21).

Previamente necesitamos el hecho que los términos en (3.25) representen funcionales lineales continuas sobre el espacio V con respecto a w_j . Esto se obtiene de (3.26), (3.27) y de la siguiente desigualdad

$$\left| \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle dt \right| \leq C \left(\int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|w_j\|.$$

Probaremos ahora que se verifica (3.21). En efecto, de (3.23) obtenemos

$$\left\langle - \int_0^T \varphi'(t) u dt + \int_0^T \varphi(t) (Au(t) - f(t)) dt, v \right\rangle = 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(G)$ y todo $v \in V$. De aquí

$$- \int_0^T \varphi'(t) u dt + \int_0^T \varphi(t) (Au(t) - f(t)) dt = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Esto muestra que $u(\cdot)$ tiene una derivada distribucional sobre $]0, T[$ tal que

$$u'(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{sobre }]0, T[$$

verificándose así la primera relación de (3.21).

Ahora, desde que $u \in L_2(0, T, V)$ y se verifica $\|v\|_{V^*} \leq C \|v\|$ para todo $v \in V$, entonces se cumple

$$\|Av\|_{V^*} \leq C \|v\| \quad \text{para todo } v \in V$$

de esta forma obtenemos

$$\int_0^T \|Au(t)\|_{V^*}^2 dt \leq C^2 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt, \quad (3.28)$$

es decir, $Au \in L_2(0, T, V^*)$. Desde que $f \in L_2(0, T, V^*)$ resulta $u' \in L_2(0, T, V^*)$, así $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ verificándose la segunda relación de (3.21).

Para verificar la última condición de (3.21), desde que $u \in W^{1,2}(0, T, V)$, podemos aplicar la fórmula de integración por partes (1.42), resultando

$$(u(T), \varphi(T)v) - (u(0), \varphi(0)v) = \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v \rangle + \langle u(t), \varphi'(t)v \rangle dt,$$

para todo $\varphi \in C^1(G)$ y todo $v \in V$. En particular, si $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(T) = 0$, la ecuación (3.23) con $u'(t) + Au(t) = f(t)$ queda como

$$(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \text{para todo } v \in V.$$

Desde que V es denso en H , concluimos que $u(0) = u_0$. Así queda demostrado la existencia de solución.

- 5) A continuación se demuestra que la solución $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ de (3.7) obtenida es acotada, es decir, existe una constante $D > 0$ tal que:

$$\|u\|_{W^{1,2}(0, T, V)} \leq D (\|u_0\|_H + \|f\|_{L_2(0, T, V^*)})$$

En efecto, sabemos

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en } L_2(0, T, V) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

lo cual implica

$$\|u\|_{L_2(0, T, V)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(0, T, V)},$$

por la Proposición 1.1.1-(3). Luego, cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene de la estimación a priori (3.14) y de $u_n(0) \rightarrow u_0$ cuando $n \rightarrow \infty$ que

$$\|u\|_{L_2(0, T, V)} \leq K^{1/2} \left(\|u_0\|_H + \int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt \right).$$

empleando (3.28)

$$\| Au \|_{L_2(0,T,V^*)} \leq C \| u \|_{L_2(0,T,V)}. \quad (3.29)$$

Finalmente, de $u' + Au = b$ resulta

$$\| u \|_{W^{1,2}(0,T,V)} \leq D \left(\| u_0 \|_H^2 + \int_0^T \| f(t) \|_{V^*}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

6) Se analiza la convergencia de la solución débil construida con el método de Galerkin en $C(G, H)$, es decir

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| u_n(t) - u(t) \|_H \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

En efecto, sea $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ y $u_n \in W^{1,2}(0, T, V)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La inclusión $W^{1,2}(0, T, V) \subseteq C(G, H)$ implica

$$u, u_n \in C(G, H) \quad \text{para todo } n.$$

Sea $H_n = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, así $H_n \subseteq V \subseteq H$. Por la Proposición 1.9.8-(b) para cada $u \in W^{1,2}(0, T, V)$ y $\epsilon > 0$ existe un polinomio

$$p(t) = \sum_i t^i a_i$$

con coeficientes $a_i \in V$ y

$$\begin{aligned} \| u - p \|_{W^{1,2}(0,T,V)} &= \left(\int_0^T \| u(t) - p(t) \|_V^2 dt \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_0^T \| u'(t) - p'(t) \|_{V^*}^2 dt \right)^{1/2} < \epsilon \end{aligned}$$

esta desigualdad sigue siendo válida si cambiamos los coeficientes a_i un poco con respecto a la norma del espacio V . Desde que el conjunto $\bigcup_n H_n$ es denso en V , obtenemos un resultado más fuerte, que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\bigcup_n H_n$ es denso en el espacio $W^{1,2}(0, T, V)$. Es decir, existe una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ de polinomios $p_n : [0, T] \rightarrow H_n$ y además

$$p_n \rightarrow u \quad \text{en } W^{1,2}(0, T, V) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

La continuidad de la inclusión $W^{1,2}(0, T, V) \subseteq C(G, H)$ implica que existe una constante $K > 0$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| u(t) - p_n(t) \|_H \leq K \| u - p_n \|_{W^{1,2}(0,T,V,H)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (3.31)$$

ahora afirmamos que si $u_n \rightharpoonup u$ en $L_2(0, T, V)$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| u(t) - p_n(t) \|_H \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

En efecto, de $u_n(0) \rightarrow u(0)$ en H y (3.31) resulta

$$\| u_n(0) - p_n(0) \|_H \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (3.33)$$

de las ecuaciones (3.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle u'_n, u_n - p_n \rangle &= \langle b - Au_n, u_n - p_n \rangle \\ &= \langle u' + A(u - u_n), u_n - p_n \rangle. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La positividad de $a(\cdot, \cdot)$ implica

$$\langle A(u - u_n), u - u_n \rangle \geq 0.$$

Empleando (3.33), (3.34), la fórmula de integración por partes (1.42) y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\begin{aligned} &2^{-1} \| u_n(t) - p_n(t) \|_H^2 - 2^{-1} \| u_n(0) - p_n(0) \|_H^2 \\ &= \int_0^t \langle u'_n - p'_n, u_n - p_n \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle u' + A(u - u_n) - p'_n, (u_n - u) + (u - p_n) \rangle ds \\ &\leq \int_0^t \langle u' - p'_n, u_n - p_n \rangle + \langle A(u - u_n), (u - p_n) \rangle ds \\ &\leq \| u' - p'_n \|_{V^*} \| u_n - p_n \|_V + \| Au - Au_n \|_{V^*} \| u - p_n \|_V \\ &\leq M \| u - p_n \|_{W^{1,2}(0,T,V)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Notar que las sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^\infty$, $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ están acotadas en V y $\{Au_n\}_{n=0}^\infty$ está acotada en V^* debido a la convergencia débil de $\{u_n\}_{n=0}^\infty$, $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ en V y de (3.29) respectivamente.

7) Se analiza la convergencia fuerte sobre $L_2(0, T, V)$, es decir

$$\| u_n - u \|_{L_2(0,T,V)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

En efecto, desde que $u_n \rightharpoonup u$ en V cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que

$$Au_n \rightharpoonup u \quad \text{en } V^* \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

desde que $A : V \rightarrow V^*$ es lineal y continua por (3.29).

Entonces por la Proposición 1.9.2 se obtiene

$$\int_0^T \langle Au_n, u \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle Au, u \rangle dt \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

y

$$\int_0^T \langle f, u_n \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle f, u \rangle dt \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Luego, haciendo $n \rightarrow \infty$ resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle f - Au_n, u \rangle + \langle f - Au, u_n \rangle dt - (u_n(T), u(T)) + (u_n(0), u(0)) \\ & \rightarrow 2 \int_0^T \langle f - Au, u \rangle dt - \|u(T)\|_H^2 + \|u(0)\|_H^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Recordando $u' = f - Au$ y la fórmula de integración por partes (1.42) mostraremos que $u_n \rightarrow u$ en V cuando $n \rightarrow \infty$.

En efecto, de (1.42) se obtienen las siguientes dos relaciones

$$\begin{aligned} & 2^{-1} \|u(T) - u_n(T)\|_H^2 - 2^{-1} \|u(0) - u_n(0)\|_H^2 \\ & = \int_0^T \langle u'(t) - u'_n(t), u(t) - u_n(t) \rangle dt \\ & = \int_0^T \langle f - Au - u'_n, u - u_n \rangle dt \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (u_n(T), u(T)) - (u_n(0), u(0)) & = \int_0^T \langle u'_n(t), u(t) \rangle + \langle u'(t), u_n(t) \rangle dt \\ & = \int_0^T \langle u'_n, u \rangle + \langle f - Au, u_n \rangle dt. \end{aligned}$$

De la ecuación (3.13) resulta

$$\langle u'_n(t), u_n(t) \rangle + \langle Au_n(t), u_n(t) \rangle = \langle f(t), u_n(t) \rangle$$

como $a(., .)$ es fuertemente positiva, esto permite

$$\begin{aligned} c \|u - u_n\|_V^2 & \equiv c \int_0^T \|u(t) - u_n(t)\|^2 dt \\ & \leq \int_0^T \langle A(u - u_n), u - u_n \rangle dt + 2^{-1} \|u(T) - u_n(T)\|_H^2 \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
c \| u - u_n \|_V^2 &\leq 2^{-1} \| u(0) - u_n(0) \|^2 + \int_0^T \langle f - Au_n - u'_n, u - u_n \rangle dt \\
&\leq 2^{-1} \| u(0) - u_n(0) \|_H^2 + \int_0^T \langle f - Au_n - u'_n, u \rangle dt \\
&= 2^{-1} \| u(0) - u_n(0) \|_H^2 + \int_0^T \langle f - Au_n - u'_n, u \rangle dt \\
&= 2^{-1} \| u(0) - u_n(0) \|^2 + \int_0^T \langle f - Au_n, u \rangle dt + \\
&\quad + \int_0^T \langle f - Au_n, u_n \rangle dt - (u_n(T), u(T)) + (u_n(0), u(0)) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$ según (3.35). Esto implica $u_n \rightarrow u$ en V cuando $n \rightarrow \infty$.

Mediante este teorema se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución débil del problema de transferencia de calor por conducción dado en (2.3).

3.2. Formulación de las Inecuaciones Variacionales Parabólicas (IVP)

En esta sección realizaremos la formulación de la inecuación variacional parabólica asociado al problema de control térmico planteado en (2.9). Para esto, sea u solución de (2.9) y $v \in H^1(\Omega)$ entonces para cada $t \in [0, T]$ e integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(x, t)v dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} v \phi(u) d\Gamma
\end{aligned}$$

por lo tanto u es solución del siguiente problema:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in L_2(0, T, H^1(\Omega)) \text{ tal que} \\ (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Gamma} \phi(u)v d\Gamma = (f(t), v) \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

donde

1. Si $u \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$ entonces $u(t) \in H^1(\Omega)$ para todo $t \in (0, T)$

2. $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ para todo $u, v \in H^1(\Omega)$

3. (\cdot, \cdot) expresa el producto interno usual en $L_2(\Omega)$

Teniendo en cuenta la función ϕ definida por (2.8), introducimos la función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$\psi(\lambda) = \int_0^\lambda \phi(\xi) d\xi \tag{3.37}$$

es decir

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1) - \frac{g_1^2}{2k_1} & \text{si } \lambda \leq h_1 + \frac{g_1}{k_1} \\ \frac{1}{2}(\lambda - h_1)^2 k_1 & \text{si } h_1 + \frac{g_1}{k_1} \leq \lambda \leq h_1 \\ 0 & \text{si } h_1 \leq \lambda \leq h_2 \\ \frac{1}{2}(\lambda - h_2)^2 k_2 & \text{si } h_2 \leq \lambda \leq h_2 + \frac{g_2}{k_2} \\ g_2(\lambda - h_2) - \frac{g_2^2}{2k_2} & \text{si } \lambda \geq h_2 + \frac{g_2}{k_2} \end{cases}$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura (3.1).

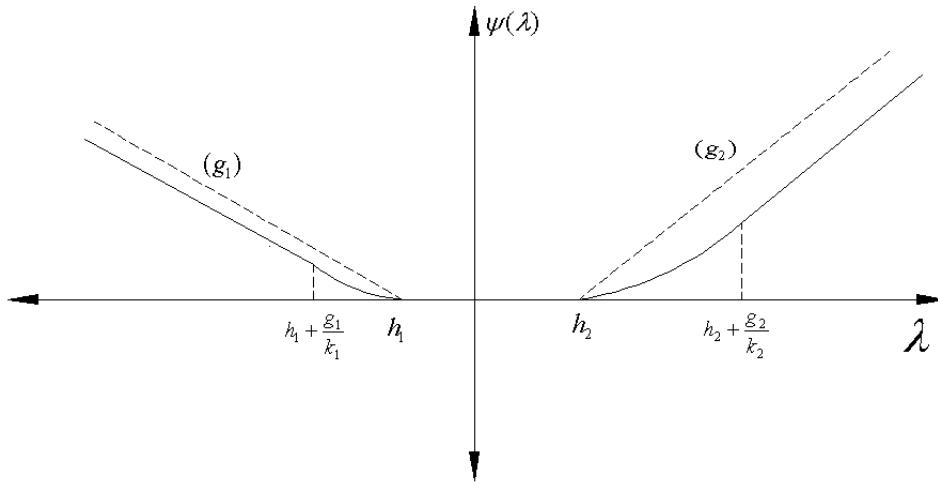


Figura 3.1: Gráfico de ψ

Observación 3.2.1

► Se puede observar que la ψ es una función convexa, para esto consideremos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$, luego se obtiene

$$\psi(z) - \psi(x) = \int_0^z \phi(\xi) d\xi - \int_0^x \phi(\xi) d\xi = \int_x^z \phi(\xi) d\xi \leq \phi(z)(z - x)$$

también

$$\psi(y) - \psi(z) = \int_0^y \phi(\xi) d\xi - \int_0^z \phi(\xi) d\xi = \int_z^y \phi(\xi) d\xi \geq \phi(z)(y - z)$$

entonces

$$\frac{\psi(z) - \psi(x)}{z - x} \leq \phi(z) \leq \frac{\psi(y) - \psi(z)}{y - z}$$

por lo tanto ψ es una función convexa.

A continuación introducimos la funcional $\Psi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Psi(v) = \int_{\Gamma} (\psi \circ v) d\Gamma \quad (3.38)$$

y probaremos en la siguiente proposición que es convexa y diferenciable.

Proposición 3.2.1 *La funcional $\Psi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (3.38) es convexa y diferenciable en todo su dominio.*

Demostración:

Probaremos la convexidad, en efecto dados $u, v \in C(\overline{\Omega})$ y $\lambda \in]0, 1[$ entonces

$$\Psi(\lambda u + (1 - \lambda)v) = \int_{\Gamma} \psi(\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)) d\Gamma$$

de la Observación 3.2.1 sabemos que ψ es convexa, luego tenemos que

$$\psi(\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)) \leq \lambda \psi(u(x)) + (1 - \lambda)\psi(v(x)) \quad \text{para todo } x \in \Gamma$$

por lo tanto al integrar

$$\int_{\Gamma} \psi(\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)) \leq \lambda \int_{\Gamma} \psi(u(x)) + (1 - \lambda) \int_{\Gamma} \psi(v(x))$$

de aquí

$$\Psi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda \Psi(u) + (1 - \lambda)\Psi(v) \quad \text{para todo } u, v \in C(\overline{\Omega})$$

por densidad, Teorema 1.7.1, se obtiene el resultado buscado.

La diferenciable la obtendremos de la siguiente manera calculando las derivadas direccionales:

$$\Psi(u+hv) - \Psi(u) - h \int_{\Gamma} \phi(u(x))v(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi(u(x)+hv(x)) - \psi(u(x)) - h\phi(u(x))v(x) d\Gamma$$

como $\psi'(u(x)) = \phi(u(x))$ entonces

$$\left| \Psi(u+hv) - \Psi(u) - h \int_{\Gamma} \phi(u(x))v(x) d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma} |\psi(u+hv) - \psi(u) - h\psi'(u)v| d\Gamma$$

pero

$$\psi(u(x) + hv(x)) = \psi(u(x)) + h\psi'(u(x))v(x) + \rho(u(x); hv(x))$$

donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\rho(u(x); h)}{h} \right| = 0$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\Psi(u + hv) - \Psi(u)}{h} - \int_{\Gamma} \phi(u(x))v(x) d\Gamma \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left| \frac{\rho(u(x); h)}{h} \right| d\Gamma$$

y por lo tanto

$$\Psi'(u) \cdot v = \int_{\Gamma} \phi(u(x))v(x) d\Gamma$$

En especial para $u \in L_2(\Gamma)$ tenemos que

$$\Psi'(u) = \phi(u) \text{ en } L_2(\Gamma) \quad (3.39)$$

lo que completa la demostración del teorema. ■

Proposición 3.2.2 *Sea $u \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$ una función que satisface el problema (3.36), entonces el problema de valor inicial (3.36) es equivalente al siguiente problema*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in L_2(0, T, H^1(\Omega)) \text{ tal que} \\ (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)), \forall v \in H^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Demostración :

(\Rightarrow) Veamos que (3.36) implica (3.40). En efecto, vemos que (3.45) implica:

$$\Psi(v) - \Psi(u(t)) - \int_{\Gamma} \Phi(u(t))(v - u(t)) d\Gamma \geq 0 \quad (3.41)$$

luego, de (3.36) resulta:

$$\begin{aligned} (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) &= \\ &= (f(t), v - u(t)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

de (3.42) y (3.41) se obtiene

$$\begin{aligned} (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) &\geq \\ &\geq (f(t), v - u(t)), \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.43)$$

(\Leftarrow) Haciendo

$$\Phi(\lambda) = \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} \quad (3.44)$$

por la convexidad de ψ (Observación (3.2.1)) se cumple

$$\psi(\mu) - \psi(\lambda) - \Phi(\lambda)(\mu - \lambda) \geq 0 \quad \text{para todo } \mu, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.45)$$

verificaremos que con estas condiciones, el problema (3.40) es equivalente a la ecuación variacional (3.36).

En efecto, veamos que (3.40) implica (3.36), para esto, sea $w \in H^1(\Omega)$ arbitrario y $\lambda > 0$. Reemplazamos:

$$v(t) = u(t) + \lambda w$$

en (3.40), para luego dividir entre λ y haciendo $\lambda \rightarrow 0$ se obtiene:

$$(u'(t), w) + a(u(t), w) + \int_{\Gamma} \Phi(u(t))w \, d\Gamma \geq (f(t), w)$$

cambiando w por $-w$ obtenemos la igualdad y además (3.36).

Con este resultado se ha obtenido la formulación variacional de la IVP para el problema de control térmico.

Definición 3.2.1 (Solución débil)

Una función $u \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$ que satisface la inecuación variacional parabólica (3.40) es llamada **solución débil** de (2.9).

Nuestro estudio para determinar la solución débil para un IVP de la forma:

$$(v' - f, v - u) + a(u, v - u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq 0$$

veremos bajo qué condiciones existe solución débil y también su unicidad. Daremos un *criterio de regularidad*, es decir, bajo qué hipótesis una solución débil resuelve su respectiva formulación fuerte. Restringiremos nuestro estudio al caso cuando $\Psi \equiv 0$, luego, la formulación débil queda como:

$$(v', v - u) + a(u, v - u) \geq (f, v - u)$$

3.2.1. Existencia y unicidad de solución de la IVP

A continuación daremos algunos resultados con los que se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución débil de las IVP. Recordemos la formulación débil de la IVP:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathcal{K} \text{ tal que} \\ (v', v - u) + (\mathcal{A}u, v - u) \geq (f, v - u), \\ \text{para todo } v \in \mathcal{K} \cap D\left(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*\right) \\ \text{donde } \mathcal{K} \text{ es un conjunto convexo cerrado de } \mathcal{V} \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

Ahora, para lograr el objetivo de este capítulo, debemos tener presente las siguientes hipótesis, llamadas **hipótesis de compatibilidad**:

- $\forall v \in \mathcal{K}$, existe una *sucesión regularizante* tal que:

$$\begin{cases} v_j \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*) \\ v_j \rightarrow v \text{ en } \mathcal{V} \text{ cuando } j \rightarrow \infty \\ \limsup_{j \rightarrow \infty} (v'_j, v_j - v) \leq 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

- Sean los espacios de Hilbert V y H con $V \subset H \subset V^*$ y los espacios:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= L_2(0, T, V) \\ \mathcal{H} &= L_2(0, T, H) \text{ y } \mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}^* \end{aligned} \quad (3.48)$$

por ejemplo, los espacios V , H , \mathcal{V} y \mathcal{H} pueden ser:

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega) \\ \mathcal{V} &= L_2(0, T, V) \\ H &= L_2(\Omega) \\ \mathcal{H} &= L_2(0, T, H) \end{aligned}$$

donde Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$).

- Un operador:

$$\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^* \text{ pseudomonótono y coercivo, es decir} \quad (3.49)$$

$$\exists v_0 \in \mathcal{K} \text{ tal que } \frac{(\mathcal{A}v, v - v_0)}{\|v\|} \rightarrow \infty \text{ si } \|v\| \rightarrow \infty \quad (3.50)$$

- Un operador Λ , donde:

$$-\Lambda = \frac{d}{dt} \text{ es el generador infinitesimal de un semigrupo} \quad (3.51)$$

$$t \rightarrow S(t) \text{ en } V, S(t) \text{ es de contracción en } \mathcal{H}.$$

- \mathcal{K} es un subconjunto convexo cerrado de \mathcal{V}

A continuación se dan algunos resultados con los que se pueden garantizar la existencia y unicidad de solución débil para la IVP, para esto tengamos en cuenta los siguientes teoremas:

Teorema 3.2.1 Si el conjunto convexo \mathcal{K} y el semigrupo $S(t)$ satisfacen:

$$S(t)\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (3.52)$$

entonces se cumple la hipótesis de compatibilidad (3.47).

La prueba de este teorema puede ser encontrada en [7]. ■

Teorema 3.2.2 (Existencia de una solución débil)

Supongamos que se cumplan las hipótesis (3.48), (3.51) y (3.49). Además \mathcal{A} es coerciva en el sentido de (3.50) con $v_0 \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*)$ y se cumple la hipótesis de compatibilidad (3.47). Entonces, para todo $f \in \mathcal{V}^*$ existe $u \in \mathcal{K}$ que resuelve la formulación variacional (3.46).

Demostración:

Primero mostraremos que existe $u_h \in \mathcal{K}$ tal que se cumpla:

$$\left(\frac{I - G(h)}{h} u_h, v - u_h \right) + (\mathcal{A}u_h, v - u_h) \geq (f, v - u_h), \quad \forall v \in \mathcal{K} \quad (3.53)$$

En efecto, basta aplicar el Teorema 1.2.2 con \mathcal{V} , \mathcal{K} en vez de V , K y el operador A es reemplazado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}^* \\ v &\mapsto \mathcal{B}v := \left(\frac{I - G(h)}{h} \right) v + \mathcal{A}v \end{aligned}$$

el cual también es pseudomonótono, y como:

$$\left(\frac{I - G(h)}{h} \varphi, \varphi \right) \geq 0 \quad (3.54)$$

luego:

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}v, v - v_0) &= (\mathcal{A}v, v - v_0) + \\ &+ \left(\frac{I - G(h)}{h} (v - v_0), v - v_0 \right) + \left(\frac{I - G(h)}{h} v_0, v - v_0 \right) \geq \\ &\geq (\mathcal{A}v, v - v_0) + \left(\frac{I - G(h)}{h} v_0, v - v_0 \right) \geq \\ &\geq (\mathcal{A}v, v - v_0) - c \|v\| \end{aligned}$$

de (3.50) resulta:

$$\frac{(\mathcal{B}v, v - v_0)}{\|v\|} \rightarrow \infty, \quad \text{si } \|v\| \rightarrow \infty \quad (3.55)$$

entonces de (3.55) se obtiene:

$$u_h \text{ se encuentra en un acotado de } \mathcal{V} \quad (3.56)$$

como \mathcal{A} está acotado, podemos extraer una subsucesión denotada también por u_h tal que:

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u \text{ débilmente en } \mathcal{V} \text{ cuando } h \rightarrow 0 \\ \mathcal{A}u_h &\rightarrow \chi \text{ débilmente en } \mathcal{V}' \text{ cuando } h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

se puede deducir de (3.53) que:

$$\left(\frac{I - G(h)}{h} v, v - u_h \right) + (\mathcal{A}u_h, v - u_h) \geq (f, v - u_h), \quad \forall v \in \mathcal{K} \quad (3.58)$$

en efecto, del primer miembro de (3.58) se obtiene:

$$\left(\frac{I - G(h)}{h} (v - u_h), v - u_h \right) + (\mathcal{A}u_h, v - u_h) + (\mathcal{A}u_h, v - u_h)$$

donde el resultado de aplicar (3.53) y (3.54) deducimos (3.58).

Luego, para todo $v \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*)$ se cumple

$$\limsup_{h \rightarrow 0} (\mathcal{A}u_h, u_h) \leq (v', v - u) + (\chi, v) - (f, v - u)$$

de aquí

$$\limsup_{h \rightarrow 0} (\mathcal{A}u_h, u_h - u) \leq (\chi - f, v - u) + (v', v - u) \text{ para todo } v \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*) \quad (3.59)$$

ó:

$$\inf_{v \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*)} [(\chi - f, v - u) + (v', v - u)] \leq \liminf [(x - f, u_j - u) + (u'_j, u_j - u)]$$

como u_j es una sucesión regularizante como en (3.47), entonces

$$\inf_{v \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*)} [(\chi - f, v - u) + (v', v - u)] \leq \liminf [(x - f, u_j - u) + (u'_j, u_j - u)] \leq 0$$

y (3.59) implica

$$\limsup_{h \rightarrow 0} (\mathcal{A}u_h, u_h - u) \leq 0 \quad (3.60)$$

desde que \mathcal{A} es pseudomonótono, resulta

$$\liminf_{h \rightarrow 0} (\mathcal{A}u_h, u_h - v) \geq (\mathcal{A}u, u - v) \text{ para todo } v \in \mathcal{K} \quad (3.61)$$

aplicando (3.58) se obtiene

$$\limsup_{h \rightarrow 0} (\mathcal{A}u_h, u_h - v) \leq (v', v - u) - (f, v - u) \text{ para todo } v \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*) \quad (3.62)$$

comparando (3.61) y (3.62) deducimos que u verifica (3.46). ■

Teorema 3.2.3 (Unicidad) *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.2 y que se verifica la siguiente condición*

$$\text{Para todo } u, v \in \mathcal{K}, \text{ si } (\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v) \leq 0 \text{ entonces } u = v \quad (3.63)$$

Entonces la inecuación variacional (3.46) admite una única solución.

Demostración:

Supongamos que hay dos soluciones u_1 y u_2 . Luego, se satisfacen:

$$\begin{aligned} (v', v - u_1) + (\mathcal{A}u_1, v - u_1) &\leq (f, v - u_1) \\ (v', v - u_2) + (\mathcal{A}u_2, v - u_2) &\leq (f, v - u_2) \end{aligned} \quad (3.64)$$

y esto para todo $v \in \mathcal{K} \cap D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*)$.

Ahora consideremos:

$$w = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad w \in \mathcal{K}$$

por (3.47) podemos considerar una sucesión regularizante w_j tal que $w_j \rightarrow w$. Reemplazando $v = w_j$ en (3.64) obtenemos:

$$(\mathcal{A}u_1, w_j - u_1) + (\mathcal{A}u_2, w_j - u_2) + 2(w_j', w_j - w) \geq 2(f, w_j - w)$$

entonces:

$$\limsup [(\mathcal{A}u_1, u_1 - w_j) + (\mathcal{A}u_2, u_2 - w_j)] \leq 2 \limsup [(w_j', w_j - w) - (f, w_j - w)] \leq 0$$

en consecuencia:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u_1, u_1 - w) + (\mathcal{A}u_2, u_2 - w) &\leq 0 \\ \Rightarrow (\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

donde (3.63) implica que $u_1 = u_2$. ■

Los resultados dados por los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3 garantizan la existencia y unicidad de solución débil. Luego, es natural preguntarse cuando una solución débil resuelve su respectiva formulación fuerte. Recordemos la formulación fuerte con $\Psi \equiv 0$, es decir, debemos:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \text{ tal que} \\ u \in \mathcal{K} \\ u \in D(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*) \\ (u' - f, v - u) + (\mathcal{A}u, v - u) \geq 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{K} \\ \text{además } f \in \mathcal{V}^* \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Para que una solución débil resuelva la formulación fuerte, debe de satisfacer hipótesis adicionales, como las que mencionamos a continuación:

$$\begin{aligned} &\text{Para } u \in \mathcal{K}, \text{ podemos elegir } g \in \mathcal{H} \text{ tal que para todo } \epsilon > 0 \text{ existe} \\ &u_\epsilon \in \mathcal{K} \cap D\left(\frac{d}{dt}, \mathcal{V}^*\right) \text{ verificando } \epsilon(u'_\epsilon + \mathcal{A}u_\epsilon) + u_\epsilon = u + \epsilon g \end{aligned} \quad (3.66)$$

veamos ahora el siguiente teorema de Regularidad:

Proposición 3.2.3 *Supongamos que \mathcal{V} es un espacio de Hilbert, $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ es lineal y coerciva. Supongamos además que se satisface (3.66). Entonces la solución u de (3.46) cumple:*

$$u' + \mathcal{A}u \in \mathcal{H} \quad (3.67)$$

Una consecuencia de este resultado es el siguiente:

Corolario 3.2.1 *Si se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.2.3, la solución débil de (3.46) resuelve la formulación fuerte en el sentido de (3.65).*

Para las demostraciones de estos dos últimos resultados recomendamos [7].

Ahora nuestro próximo objetivo es resolver numéricamente los problemas variacionales formulados en (2.3) y (2.9) que se detallan a continuación.

Capítulo 4

APROXIMACIÓN DE LAS EVP E IVP CON EL MEF

4.1. Aproximación de la EVP

A continuación daremos la metodología del método de Galerkin continuo con elementos finitos a problemas de tipo parabólico con condiciones iniciales y de contorno.

4.1.1. Método Variacional de Galerkin

El método de Galerkin consiste en suponer una solución U en espacios finito dimensionales generados por funciones linealmente independientes, es decir, una solución finita de la forma

$$U_N(x, y, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) \phi_j(x, y), \quad \phi_j \in V_N (j = 1, \dots, N) \quad (4.1)$$

de (4.1) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{dU_N}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{dc_j(t)}{dt} \phi_j(x, y) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial U_N}{\partial x} = \sum_{j=1}^N c_j \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial U_N}{\partial y} = \sum_{j=1}^N c_j \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} \quad (4.4)$$

entonces, para cada N podemos escribir la formulación variacional (3.5) en dimensión finita como sigue

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } U_N \in V_N \times C^1(G) \quad \text{tal que:} \\ \left(\frac{\partial U_N}{\partial t}, v \right) + a(U_N, v) = (f, v) \quad \text{para todo } v \in V_N \quad \text{y} \quad \text{todo } t \in G \end{aligned} \quad (4.5)$$

tal que

$$(U_N(\cdot, 0), v) = (u_0, v) \quad (4.6)$$

donde V_N , por lo general es algún espacio de polinomios. La existencia y unicidad de solución finita del problema anterior queda garantizado por el Teorema 3.1.1.

Por lo tanto, las ecuaciones de Galerkin en la semidiscretización de la Ecuación del Calor en dos dimensiones, se obtienen al reemplazar (4.2), (4.3) y (4.4) en la expresión (4.5), resultando la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N c'_j(t) \phi_j \phi_i \, dx \, dy + \alpha^2 \int \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) = \\ = \int \int_{\Omega} f \phi_i \, dx \, dy \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left(\int \int_{\Omega} \phi_j \phi_i \right) c'_j(t) + \\ + \sum_{j=1}^N \left[\alpha^2 \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) dx \, dy \right] c_j(t) = \int \int_{\Omega} f \phi_i \, dx \, dy \end{aligned} \quad (4.7)$$

y esto para todo $t > 0$. Óbserve que hemos reemplazado $v = \phi_i$ para $i = 1, \dots, N$; que es como sugiere el método de Galerkin.

4.1.2. Semidiscretización Espacial mediante el MEF

Para la discretización espacial del problema variacional (3.5) empleamos el método de elementos finitos, el cual nos permite trabajar con polinomios a trozos de grado no muy altos y para ello se tiene que utilizar un mallado de elementos triangulares sobre el dominio Ω .

A continuación damos unos conceptos necesarios básicos para la aplicación de este método. En lo que sigue, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal y $P_k(\mathbb{R})$ como el espacio de polinomios de grado menor o igual que k y con coeficientes en el conjunto de los números reales.

Definición 4.1.1 (Malla de elementos finitos)

Una **malla de elementos finitos** es una partición $\mathcal{T}_h(\Omega)$ del dominio Ω en un número finito de objetos $T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ los cuales tienen geometría simple (triángulos o rectángulos), los objetos T son llamados **elementos** y satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $T \subset \bar{\Omega}$ para todo $T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$
- ii) $\bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} T$
- iii) $\overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2 = \emptyset \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ con $T_1 \neq T_2$

además, para todo $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ con $T_1 \neq T_2$ se satisface sólo una de las siguientes condiciones:

- i) $T_1 \cap T_2 = \emptyset$
- ii) T_1 y T_2 tienen un sólo vértice común.
- iii) T_1 y T_2 tienen un sólo lado común.

además h denota la mayor longitud de los lados de los elementos del mallado.

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \left\{ \max_{p, q \in T} \{ \|p - q\| \} \right\}$$

Si h es constante para todo $T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$, diremos que $\mathcal{T}_h(\Omega)$ es una **malla de elementos finitos regular** de Ω .

En este trabajo consideraremos la malla de elementos finitos con elementos triangulares cuyos nodos son los vértices del triángulo, por lo cual los polinomios de interpolación asociados a esta malla son de $P_1(\mathbb{R})$.

Definición 4.1.2 (Espacio de Elementos Finitos) Definimos el espacio de elementos finitos correspondiente a la malla de elementos finitos $\mathcal{T}_h(\Omega)$:

$$X_h^k = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_k(\mathbb{R}) \quad \text{para todo } T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$$

donde $P_k(\mathbb{R})$ denota el conjunto de polinomios de grado menor o igual a k y escogemos sobre cada T un conjunto de puntos(nodos) $\{p_i\}_{i=1}^I$ con $I = \dim(P_k(T))$ de tal manera que cualquier $v \in P_k(\mathbb{R})$ esté unívocamente determinado por sus valores en los nodos.

Definición 4.1.3 (Interpolación) Sea $\{p_i\}_{i=1}^{N_h}$ el conjunto de nodos de $\mathcal{T}_h(\Omega)$ y X_h^k un espacio de elementos finitos, definimos el operador Π_h^k de interpolación para cada $v \in C(\bar{\Omega})$ del modo que sigue

$$\begin{cases} \Pi_h^k : C(\bar{\Omega}) \rightarrow X_h^k \\ v \mapsto \Pi_h^k v(p_i) := v(p_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, N_h\} \quad \forall v \in C(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

El siguiente teorema el cual es probado en [15] nos brinda una estimación del error en la interpolación.

Teorema 4.1.1 Sea $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(\Omega)$ una malla de elementos finitos regular del dominio Ω ; $T \in \mathcal{T}_h$; $m = 0, 1$ y $k \geq 1$. Entonces existe una constante $C = C(m, k, T)$ tal que

$$|v - \Pi_h^k v|_{H^m(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2(k+1-m)} |v|_{H^{k+1}(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para todo } v \in H^{k+1}(\Omega)$$

En particular

$$|v - \Pi_h^k v|_{H^m(\Omega)} \leq ch^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad \text{para todo } v \in H^{k+1}(\Omega) \quad (4.8)$$

En lo que sigue aplicaremos este método, para esto consideremos una malla de elementos finitos regular \mathcal{T}_h del dominio poligonal $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ y definimos el subespacio finito dimensional V_h definido por

$$V_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_k(\mathbb{R}), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap H^1_\Gamma(\Omega) \quad (k \geq 1) \quad (4.9)$$

y sobre él planteamos

Encontrar $U_h \in V_h \times C^1(G)$ tal que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_h(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(U_h(t), v_h) &= \int_{\Omega} f(t)v_h(x) d\Omega \quad \text{para todo } v_h \in V_h \quad (4.10) \\ u_h(0) &= u_{oh} \end{aligned}$$

el problema (4.10) es la semidiscretización de (3.5) porque la variable temporal todavía no ha sido discretizada.

4.1.3. Aplicación del MEF a la EVP

Por simplicidad de notación eliminamos el subíndice h y tenemos que (4.10) puede ser descompuesto en la forma

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy + \int_T \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \right) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f v \, dx dy \quad (4.11)$$

y (4.11) se cumple para todo $v_h \in V_h$ lo que facilita el cálculo en cada elemento.

La ecuación (4.7) puede ser escrita de manera matricial para cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$, al que denotaremos por $\Omega^{(e)}$, el sistema matricial queda expresada como

$$M^{(e)} C'^{(e)}(t) + A^{(e)} C^{(e)}(t) = b^{(e)}(t) \quad (4.12)$$

donde los coeficientes de las matrices A , M y b quedan formulados por :

$$A_{i,j}^{(e)} = a(\phi_i, \phi_j) = \alpha^2 \int \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.13)$$

$$M_{i,j}^{(e)} = (\phi_i, \phi_j) = \int \int_{\Omega^{(e)}} \phi_i \phi_j dx dy \quad (4.14)$$

$$b_i^{(e)}(t) = \int \int_{\Omega^{(e)}} f \phi_i dx dy \quad (4.15)$$

El vector C está dado por

$$C = (c_1, \dots, c_N)$$

así

$$C' = (c_1, \dots, c_N)'$$

Para la condición inicial, se obtiene

$$\int \int_{\Omega^{(e)}} \left(\sum_{j=1}^N c_j(0) \phi_j \right) \phi_i dx dy = \int \int_{\Omega^{(e)}} u_0 \phi_i dx dy$$

el cual puede ser escrito como

$$\sum_{j=1}^N \left(\int \int_{\Omega^{(e)}} \phi_j \phi_i dx dy \right) c_j(0) = \int \int_{\Omega^{(e)}} u_0 \phi_i dx dy = \mathbf{u}^{(e)}_0 \quad (4.16)$$

la forma matricial de (4.16) viene dado por

$$M^{(e)} C^{(e)}(0) = \mathbf{u}^{(e)}_0 \quad (4.17)$$

Para obtener los coeficientes de $A_{i,j}^{(e)}$, $M_{i,j}^{(e)}$, $b_i^{(e)}$ y $\mathbf{u}^{(e)}_0$ se utiliza un método de integración numérica, que en este caso se ha considerado el método de cuadratura gaussiana el cual se describe en el apéndice y puede consultarse con más detalle en [10]. Para este método se emplea como funciones de peso a los polinomios ortogonales de Legendre.

Luego, para cada elemento $\Omega^{(e)}$ se realiza el siguiente procedimiento :

- Cálculo de las matrices $M^{(e)}$, $A^{(e)}$ y $b^{(e)}$ en cada elemento $\Omega^{(e)}$ de la malla del dominio Ω :

$$A_{i,j}^{(e)} = a(\phi_i, \phi_j) = \alpha^2 \int \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.18)$$

$$M_{i,j}^{(e)} = (\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega^{(e)}} \phi_j \phi_i dx dy \quad (4.19)$$

$$b_i^{(e)}(t) = \int_{\Omega^{(e)}} f \phi_i dx dy \quad (4.20)$$

$$\mathbf{u}^{(e)}_0 = \int_{\Omega^{(e)}} u_0 \phi_i dx dy \quad (4.21)$$

Si $\Omega^{(e)}$ es cualquier elemento triangular del mallado de vértices $P_i = (x_i, y_i)$, $P_j = (x_j, y_j)$ y $P_k = (x_k, y_k)$, las integrales en cada elemento pueden calcularse empleando el elemento triangular estándar Ω_0 dado por

$$\Omega_0 = \{(\xi, \eta) / 0 < \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\} \quad (4.22)$$

se tiene que

$$\int_{\Omega^{(e)}} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_0} f(T(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta$$

donde T es una transformación afin definida del modo siguiente

$$T : \Omega_0 \rightarrow \Omega^{(e)}$$

$$(\xi, \eta) \mapsto T(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \xi - \eta)x_i + \xi x_j + \eta x_k \\ (1 - \xi - \eta)y_i + \xi y_j + \eta y_k \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

siendo $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ el **jacobiano** de la transformación T calculado como

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = (x_i - x_j)(y_i - y_k) - (x_i - x_k)(y_i - y_j) \quad (4.24)$$

- Eligiéndose como funciones base $\hat{\phi}_i$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\hat{\phi}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\hat{\phi}_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\hat{\phi}_3(\xi, \eta) = \eta$$

se tiene que

$$A_{i,j}^{(e)} = \alpha^2 \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| \left(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial \eta} \right) d\eta d\xi \quad (4.25)$$

$$M_{i,j}^{(e)} = \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j d\eta d\xi \quad (4.26)$$

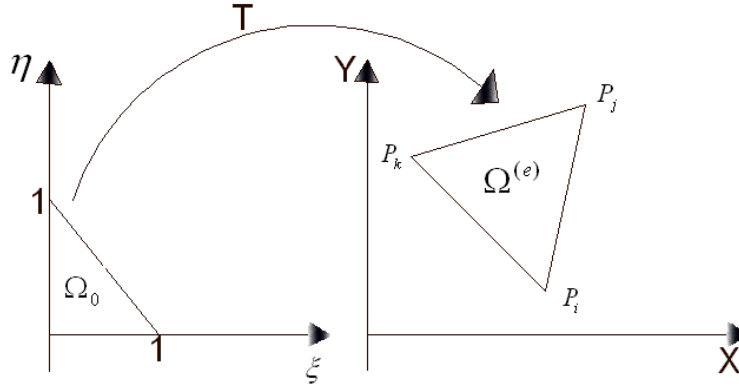


Figura 4.1: Transformación T de Ω_0 a $\Omega^{(e)}$.

$$b_i^{(e)}(t) = \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| f(T(\xi, \eta)) \hat{\phi}_i d\eta d\xi \quad (4.27)$$

además, obsérvese que $A_{i,j}^{(e)} = A_{j,i}^{(e)}$ y $M_{i,j}^{(e)} = M_{j,i}^{(e)}$.

- Para hallar la matriz A se tienen los siguientes valores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \xi} &= -1 & \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \eta} &= -1 \\ \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \eta} &= 1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

- Para el cálculo de la matriz M se emplea el siguiente resultado

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{\phi}_1^u \hat{\phi}_2^v \hat{\phi}_3^t d\eta d\xi = \frac{u! v! t!}{(u + v + t + 2)!} \quad (4.29)$$

- Para el cálculo del vector $b_i(t)$ se emplea la cuadratura gaussiana de 3 puntos dado por

$$Q = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(x, y) d\eta d\xi = \frac{1}{6} g(1/2, 1/2) + \frac{1}{6} g(1/2, 0) + \frac{1}{6} g(0, 1/2) \quad (4.30)$$

- Ensamblamos las matrices $M^{(e)}$, $A^{(e)}$, $b^{(e)}$ y $\mathbf{u}^{(e)0}$ obtenidas en cada elemento para obtener el sistema global:

$$\begin{cases} MC'(t) + AC(t) = b(t) \\ MC'(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (4.31)$$

- En particular, si consideramos un elemento $\Omega^{(e)}$ triangular de vértices $P_i = (0, 0)$, $P_j = (1, 0)$ y $P_k = (1, 1)$ con $\alpha^2 = 1$ se tienen los siguientes resultados:

El valor del Jacobiano lo calculamos empleando (4.24), obteniéndose

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = 1$$

Para calcular los elementos de la matriz $A^{(e)}$ haremos uso de (4.28), de este modo resulta:

$$A_{11}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (-1)(-1) + (-1)(-1) d\eta d\xi = 2$$

$$A_{12}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (-1)(1) + (-1)(0) d\eta d\xi = -1 = A_{21}^{(e)}$$

$$A_{13}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (-1)(0) + (-1)(1) d\eta d\xi = -1 = A_{31}^{(e)}$$

$$A_{22}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1)(1) + (0)(0) d\eta d\xi = 1$$

$$A_{23}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1)(0) + (0)(1) d\eta d\xi = 0 = A_{32}^{(e)}$$

$$A_{33}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (0)(0) + (1)(1) d\eta d\xi = 1$$

Entonces la matriz $A^{(e)} = [A_{ij}^{(e)}]_{i,j=1,2,3}$ está asociada al elemento $\Omega^{(e)}$.

Empleando (4.29) pueden calcularse los elementos de la matriz $M^{(e)}$

$M_{ij}^{(e)}$	u	v	t	I
$M_{11}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{\phi}_1^2 d\eta d\xi$	2	0	0	1/12
$M_{12}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 d\eta d\xi = M_{21}^{(e)}$	1	1	0	1/24
$M_{13}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_3 d\eta d\xi = M_{31}^{(e)}$	1	0	1	1/24
$M_{22}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{\phi}_2^2 d\eta d\xi$	0	2	0	1/12
$M_{23}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 d\eta d\xi = M_{32}^{(e)}$	0	1	1	1/24
$M_{33}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{\phi}_3^2 d\eta d\xi$	0	0	2	1/12

Por lo que la matriz M queda como

$$M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando $f(x, y, t) = x + y + t$ y las relaciones dadas en (4.23) se tiene que

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)x_i + \xi x_j + \eta x_k = \xi \\ y &= y(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)y_i + \xi y_j + \eta y_k = \eta \end{aligned}$$

el resultado anterior reemplazamos en f para luego aplicarle la integración numérica por medio de la regla de cuadratura de Gauss dado en (4.30), resultando:

$g(\xi, \eta)$	$g(1/2, 1/2)$	$g(1/2, 0)$	$g(0, 1/2)$	$b_i^{(e)}(t) = Q$
$(\xi + \eta + t)\hat{\phi}_1(\xi, \eta)$	0	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t$	$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + t \right)$
$(\xi + \eta + t)\hat{\phi}_2(\xi, \eta)$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t$	0	$\frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} + t \right)$
$(\xi + \eta + t)\hat{\phi}_3(\xi, \eta)$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$	0	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t$	$\frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} + t \right)$

Con los resultados obtenidos, el **sistema local** para el elemento $\Omega^{(e)}$ queda como sigue

$$\begin{pmatrix} 1/12 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/12 & 1/24 \\ 1/24 & 1/24 & 1/12 \end{pmatrix} C'(t) + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} C(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + t \\ \frac{3}{4} + t \\ \frac{3}{4} + t \end{pmatrix}$$

este procedimiento se hace para cada elemento $\Omega^{(e)}$ del mallado de Ω .

De las ecuaciones (4.12) y (4.17) concluimos que mediante el método de elementos finitos y después de ensamblar las matrices $A^{(e)}$, $M^{(e)}$, $b^{(e)}$ y $u_0^{(e)}$ sobre todo el dominio Ω (ver [17]), nos lleva de manera natural a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial, expresado por:

$$\begin{cases} MC'(t) + AC(t) = b(t) \\ MC'(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.32)$$

las matrices A y M son denominadas **matriz de rigidez** y **matriz de masa** respectivamente, que junto con b y u_0 representan las matrices ensambladas en todo el dominio Ω .

4.1.4. Discretización Temporal - Método de Crank Nicholson

En la sección anterior, después de aplicar el método de Galerkin y la discretización espacial por elementos finitos a la formulación variacional (3.5) se ha llegado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial dado por

$$\begin{cases} MC'(t) + AC(t) = b(t) \\ MC(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (4.33)$$

donde las componentes de las matrices globales M , A , b y \mathbf{u}_0 vienen dados por (4.13), (4.14), (4.15) y (4.16) en cada elementos $\Omega^{(e)}$ para posteriormente ser ensamblados.

A continuación se procede a resolver el sistema de EDO'S (4.33) mediante un método numérico adecuado, en este trabajo se ha utilizado el método implícito de Crank-Nicholson realizando el siguiente procedimiento: particionamos el intervalo de tiempo $G = [0, T]$ en N subintervalos de igual longitud Δt , es decir

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T \quad (4.34)$$

de modo que

$$t_{i+1} - t_i = \Delta t = \frac{t_N - t_0}{N} \quad \text{para todo } i = 0, 1, \dots, N - 1$$

además el método de Crank - Nicholson necesita un punto inicial que lo calculamos del modo siguiente

$$C_0 = M^{-1}\mathbf{u}_0$$

Luego, con $\theta = \frac{1}{2}$ y para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ se procede como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= M + A\theta\Delta t \\ \hat{A} &= M - (1 - \theta)A\Delta t \\ F_{i+1,i} &= \theta F_{i+1} + (1 - \theta) F_i \end{aligned}$$

Conociendo la solución en i , resolver iterativamente:

$$\hat{M} C_{i+1} = F_{i+1,i}\Delta t + \hat{A}C_i$$

para conocer la solución en el paso $i + 1$ y su error relativo respectivo, el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene para calcular C_{i+1} se resuelve empleando el método iterativo de Gauss-Seidel con el Error Relativo (ER) en cada iteración r dado por

$$ER^r = \frac{\| C_{i+1}^r - C_{i+1}^{r-1} \|_\infty}{\| C_{i+1}^{r-1} \|_\infty}$$

4.1.5. Convergencia del Método de Crank-Nicholson

Dado el problema de valor inicial como en (4.33), una partición regular del intervalo $[0, T]$ como en (4.34), $C(t_n)$ valor real de la solución y C_h^n la solución obtenida por el método de Crank-Nicholson y un mallado de elementos finitos regular \mathcal{T}_h . La convergencia de este método está garantizado por el siguiente resultado.

Teorema 4.1.2 *Suponiendo que u_0 , f y la solución exacta "u" del problema variacional (3.5), u_h^n es la solución aproximada en el instante de tiempo t_n y es obtenida para el problema discreto obtenido por el MEF. Entonces se cumple la siguiente estimación del error para todo $n \geq 1$*

$$\| u(t_n) - u_h^n \| + 2c\Delta t \sum_{j=1}^n \| u(t^j) - u_h^j \|_V^2 \leq C(u_0, f, u)(\Delta t^{P(\theta)} + h^{2k})$$

donde

$$P(\theta) = \begin{cases} 2 & \text{si } \theta \neq \frac{1}{2} \\ 4 & \text{si } \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

además, la constante C sólo depende de u_0 , f y u siendo también independiente de h y Δt .

Estimación del Error

A continuación nos centramos en los problemas (3.5) y (4.10) donde "u" y "u_h" representan sus soluciones para cada uno de ellos respectivamente. En lo que sigue, probaremos la convergencia de "u_h" a "u" para alguna norma adecuada.

Siguiendo la metodología hecha en [15], vemos lo siguiente, desde que la forma bilineal "a" es coerciva, entonces

$\exists c > 0$ tal que

$$c \| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq a(u - u_h, u - u_h) \\ = a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \quad \text{para todo } v_h \in V_h$$

Haciendo $w_h = v_h - u_h$ y restando (3.5) menos (4.10) se obtiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(u - u_h)}{\partial t} (v_h - u_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$$

por simplicidad de notación estamos considerando $u := u(t)$. Luego

$$c \| u - u_h \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u - u_h, u - v_h) - \left(\frac{\partial(u - u_h)}{\partial t}, (v_h - u_h) \right) \quad (4.35)$$

a continuación analizamos cada término del lado derecho de (4.35)

i) Por la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - v_h) &\leq M \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{c}{2} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{M^2}{2c} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

ii) Como $w_h = v_h - u_h = (v_h - u) + (u - u_h)$, entonces

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial(u - u_h)}{\partial t}, v_h - u_h \right) &= - \left(\frac{\partial(u - u_h)}{\partial t}, (v_h - u) + (u - u_h) \right) \\ &= - \left(\frac{\partial(u - u_h)}{\partial t}, v_h - u \right) - \left(\frac{\partial(u - u_h)}{\partial t}, u - u_h \right) \\ &= + \left(\frac{\partial(u - u_h)}{\partial t}, u - v_h \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - u_h\|_{L_2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

reemplazando estas dos expresiones últimas en (4.35) se obtiene

$$\frac{c}{2} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - u_h\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{M^2}{2c} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(\frac{\partial(u - u_h)}{\partial t}, u - v_h \right)$$

a este último resultado lo multiplicamos por 2 e integramos de 0 a t , resultando

$$\begin{aligned} c \int_0^t \| (u - u_h)(s) \|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \frac{d}{dt} \| (u - u_h)(s) \|_{L_2(\Omega)}^2 ds &\leq \\ &\leq \frac{M^2}{c} \int_0^t \| u(s) - v_h \|_{H^1(\Omega)}^2 ds + 2 \int_0^t \left(\frac{\partial(u - u_h)(s)}{\partial t}, u(s) - v_h \right) ds \end{aligned} \quad (4.36)$$

para el segundo término del lado derecho de la desigualdad obtenida, integramos por partes y resulta

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial(u - u_h)(s)}{\partial t}, u(s) - v_h \right) ds &\leq \int_0^t \left((u - u_h)(s), \frac{\partial(u(s) - v_h)}{\partial t} \right) ds + \\ &+ ((u - u_h)(t), u(t) - v_h) - ((u - u_h)(0), u(0) - v_h) \end{aligned}$$

aplicamos convenientemente la desigualdad de Schwartz y la desigualdad de Young a este resultado obtenido y luego reemplazamos en (4.36), el resultado que se obtiene es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| (u - u_h)(t) \|_{L_2(\Omega)}^2 + c \int_0^t \| (u - u_h)(s) \|_{H^1(\Omega)}^2 ds &\leq \\ &\leq \frac{M^2}{c} \int_0^t \| u(s) - v_h \|_{H^1(\Omega)}^2 ds + 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial(u(s) - v_h)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 ds + \\ &+ 2 \| u(t) - v_h \|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \| (u - u_h)(0) \|_{L_2(\Omega)} \| u(0) - v_h \|_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \| (u - u_h)(s) \|_{L_2(\Omega)}^2 ds + \| (u - u_h)(0) \|_{L_2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Como V_h es el espacio de elementos finitos de grado k dado en (4.9), entonces, elegimos para cada t su interpolante en V_h respectivo, es decir, $v_h = \Pi_h^k(u(t))$ (en el sentido de la Definición 4.1.3). Ahora, debido a (4.8) y asumiendo que u es suficientemente regular, se tiene

$$h \| u - \Pi_h^k(u) \|_{H^1(\Omega)} + \| u - \Pi_h^k(u) \|_{L_2(\Omega)} \leq C_2 h^{k+1} \| u \|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Ahora, por comodidad expresamos las cotas de los términos del segundo miembro de (4.37) del siguiente modo

$$E_1 = \frac{M^2}{c} \int_0^t \| u(s) - v_h \|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq C_1 h^{2k} \int_0^t \| u(s) \|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 ds$$

$$E_2 = 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial(u(s) - v_h)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_2 h^{2k} \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s) \right\|_{H^k(\Omega)}^2 ds$$

$$E_3 = 2 \| u(t) - v_h \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_3 h^{2k} \| u \|_{H^k(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} E_4 &= \| (u - u_h)(0) \|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \| (u - u_h)(0) \|_{L_2(\Omega)} \| u(0) - v_h \|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq C_4 h^{2k} \| u(0) \|_{H^k(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

A partir de E_1, E_2, E_3 y E_4 se consigue

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \leq Ch^{2k} N(u)$$

donde $N = N(u)$ es una constante que depende de u y $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Con lo obtenido hasta ahora, a partir de (4.37) resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| (u - u_h)(t) \|_{L_2(\Omega)}^2 + c \int_0^t \| (u - u_h)(s) \|_{H^1(\Omega)}^2 ds &\leq Ch^{2k} N(u) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \| (u - u_h)(s) \|_{L_2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (4.38)$$

Finalmente, a partir de (4.38) y la desigualdad de Gronwall obtenemos el siguiente resultado

$$\| (u - u_h)(t) \|_{L_2(\Omega)}^2 + 2c \int_0^t \| (u - u_h)(s) \|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq Ch^{2k} N(u) \exp(t)$$

obteniendo una estimación para el error de manera anticipada. Obsérvese que la cota obtenida para el error es de tipo exponencial, esto quiere decir que para valores grandes de t el error crece demasiado rápido pero decrece cuadráticamente cuanto más pequeño es el valor de h (longitud del lado del triángulo equilátero de la triangulación realizada

por el MEF). Otras estimaciones pueden encontrarse en [14].

Es decir, la solución aproximada que se obtiene al resolver el sistema EDO converge a la solución débil de (3.5) esto se puede garantizar mediante los teoremas dados en el apéndice (Teorema 7.1.2).

4.2. Aproximación de la IVP

4.2.1. Semidiscretización Espacial mediante el MEF

Para la discretización espacial del problema variacional (3.40) empleamos nuevamente el método de elementos finitos, donde también vamos a emplear una triangulación regular $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(\Omega)$ de elementos triangulares sobre el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$ para obtener una buena aproximación. Nuevamente, para aplicar este método, definimos sobre $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ el subespacio finito dimensional V_h como sigue

$$V_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_k(\mathbb{R}), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap H^1(\Omega) \quad (k \geq 1) \quad (4.39)$$

La aproximación discreta del Problema de Control Térmico es planteado de la forma siguiente:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h \in L_2(0, T, H^1(\Omega)) \text{ tal que} \\ (u_h'(t) - f_h(t), v_h - u_h(t)) + a(u_h(t), v_h - u_h(t)) + \Psi(v_h) - \Psi(u_h(t)) \geq 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ u_h(0) = u_{0h} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

4.2.2. Discretización temporal - Método de Euler Implícito

Sea $N \geq 1$ y $k > 0$ tal que $Nk = T$ ($N = N(k)$). Definimos los intervalos E_i^k ($i = 0, 1, \dots, N$) como

$$E_i^k = [ik, (i + k)[\quad \text{para todo } i = 0, 1, \dots, N \quad (4.41)$$

Obsérvese que

$$\bigcup_{i=0}^N E_i^k = [0, T + k[$$

y por lo tanto

$$[0, T] \subset \bigcup_{i=0}^{N_1} E_i^{k_1} \subset \bigcup_{i=0}^{N_2} E_i^{k_2} \text{ si } k_1 < k_2$$

Sea V_h un subespacio $H^1(\Omega)$, $v_h^i \in V_h$, $i \in \overline{0, N}$ y χ_k^i la función característica de E_i , definimos $v_{h,k}$ como

$$v_{h,k} = \sum_{i=0}^N \chi_k^i v_h^i$$

Aproximamos el operador $v \mapsto v' = \frac{dv}{dt}$ por:

$$\delta v_{h,k}(t) = \frac{v_{h,k}(t+k) - v_{h,k}(t)}{k}$$

o por

$$\bar{\delta} v_{h,k}(t) = \frac{v_{h,k}(t) - v_{h,k}(t-k)}{k}$$

observe que $\delta v_{h,k}(t-k) = \bar{\delta} v_{h,k}(t)$.

Planteamos el siguiente problema discreto

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_{h,k} = \sum_{i=0}^N \chi_k^i u_h^i \text{ tal que para todo } t \in [k, T] \\ (\bar{\delta} u_{h,k} - f_{h,k}, v_h - u_{h,k}) + a(u_{h,k}, v_h - u_{h,k}) + \Psi(v_h) - \Psi(u_{h,k}) \geq 0, \forall v_h \in V_h \\ u_h^0 = u_{0h} \end{array} \right. \quad (4.42)$$

Es decir, hemos aproximado $u'_{h,k}(t^{i+1})$ por el método de Euler implícito dado del modo siguiente

$$u'_{h,k}(t^{i+1}) = \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k}$$

Omitiéndose por simplicidad de notación el sub-índice k y denotando $u_h^i = u_h(t^i)$, se tiene de este modo que (4.42) puede ser escrito como

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h^i \in V_h, i = 0, 1, \dots, N-1 \text{ tal que} \\ \left(\frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} - f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1} \right) + a(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) + \Psi(v_h) - \Psi(u_h^{i+1}) \geq 0 \\ \text{para todo } v_h \in V_h. \\ u_h^0 = u_{0h} \end{array} \right. \quad (4.43)$$

o de una forma más conveniente

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h^i \in V_h, i = 0, 1, \dots, N-1 \text{ tal que} \\ b(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) + \Psi(v_h) - \Psi(u_h^{i+1}) \geq \left(\frac{u_h^i}{k} + f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1} \right), \forall v_h \in V_h \\ u_h^0 = u_{0h} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

donde $b(u_h, v_h) = \left(\frac{u_h}{k}, v_h\right) + a(u_h, v_h)$ es un bilineal, simétrica pues $a(\cdot, \cdot)$ lo es. Esto quiere decir que conocido u_h^i podemos calcular u_h^{i+1} como solución del problema variacional:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h^{i+1} \in V_h, \text{ tal que} \\ b(u_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}) + \Psi(v_h) - \Psi(u_h^{i+1}) \geq \left(\frac{u_h^i}{k} + f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1}\right), \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (4.45)$$

La existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial (4.44) se tendría garantizado con la coercividad de $b(\cdot, \cdot)$.

El interés en este trabajo es obtener la solución explícita del problema (4.44), una forma de hacerlo es llevándolo a un problema de optimización introduciendo un funcional J^i a partir de (4.45) para así determinar la solución buscada de (4.44) mediante el método de Uzawa.

4.2.3. Método de Uzawa

Ahora para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ podemos resolver (4.45) mediante el problema de minimización siguiente

$$\min_{v_h \in V_h} J^i(v_h) \quad (4.46)$$

donde

$$J^i(v_h) = \left\{ \frac{1}{2} b(v_h, v_h) - \left(\frac{u_h^i}{k} + f_h^{i+1}, v_h\right) \right\} + \Psi(v_h) \quad (4.47)$$

Por definición, el conjugado de Ψ , $\Psi^* : (H^1(\Omega))^* \rightarrow]-\infty, +\infty]$ viene dado por

$$\Psi^*(q) = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \{ \langle q, v \rangle - \Psi(v) \}$$

como $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert se tiene

$$\Psi^*(q) = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \{ (q, v)_{H^1(\Omega)} - \Psi(v) \}$$

como Ψ' está definido sobre $L_2(\Gamma)$, restringimos $v \in H^1(\Omega)$ al espacio $L_2(\Gamma)$ mediante el operador traza dada en la Definición 1.7.2, luego.

$$\Psi^*(q) = \sup_{v \in L_2(\Gamma)} \{ (q, v)_\Gamma - \Psi(v) \}$$

entonces, por la Proposición 1.3.3 resulta

$$\Psi^*(q) = (q, v)_\Gamma - \Psi(v) \quad \text{para todo } q \in \partial\Psi(v)$$

Por (3.39) se tiene que $\partial\Psi(v) = \{\phi(v)\}$, entonces

$$\Psi^*(q) = (q, v)_\Gamma - \Psi(v) \quad \text{si } q = \phi(v) \quad (4.48)$$

es decir

$$\Psi^*(q) = (q, v)_\Gamma - \int_\Gamma \psi(v) d\Gamma \quad \text{si } q = \phi(v)$$

donde ϕ viene dado por (2.8).

Ahora emplearemos el espacio auxiliar $W_h \subset L^2(\Gamma)$ para encontrar el punto de silla de $\mathcal{L} : V_h \times W_h \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\mathcal{L}(v_h, p_h) = \frac{1}{2}b(v_h, v_h) - \left(\frac{u_h^i}{k} + f_h^{i+1}, v_h \right) + (p_h, v_h)_\Gamma - \Psi^*(p_h) \quad (4.49)$$

además (4.49) está definido para todo $v_h \in V_h$ y todo $p_h \in W_h$.

Si (u_h, q_h) es un punto de silla de \mathcal{L} entonces

$$\text{Para todo } p_h \in W_h \quad \mathcal{L}(u_h, p_h) \leq \mathcal{L}(u_h, q_h) \leq \mathcal{L}(v_h, q_h) \quad \text{para todo } v_h \in V_h \quad (4.50)$$

De la desigualdad derecha de (4.50) se tiene que u_h es solución del problema de minimización:

$$\min_{v_h \in V_h} \frac{1}{2}b(v_h, v_h) - \left(\frac{u_h^i}{k} + f_h^{i+1}, v_h \right) + (q_h, v_h)_\Gamma \quad (4.51)$$

y de la desigualdad izquierda de (4.50) se observa que q_h satisface

$$(q_h, u_h)_\Gamma - \Psi^*(q_h) \geq (p_h, u_h)_\Gamma - \Psi^*(p_h) \quad \text{para todo } p_h \in W_h$$

esto es

$$u_h \in \partial\Psi^*(q_h)$$

o en forma equivalente, si $\rho > 0$

$$q_h + \rho u_h \in (I + \rho\partial\Psi^*)(q_h)$$

entonces

$$q_h = J_\rho(q_h + \rho u_h) \quad (4.52)$$

donde J_ρ es el resolvente del operador $\partial\Psi$.

Programa 4.2.1 (Algoritmo de Uzawa)

Con esta caracterización y el lagrangiano dado en (4.49), planteamos el siguiente algoritmo iterativo

Paso 1 Escoger $q_h^0 \in W_h$

Paso 2 Para $j \geq 0$, conocido $q_h^j \in W_h$ calcular $z_h^j \in V_h$ solución de

$$\min_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} b(v_h, v_h) - \left(\frac{u_h^i}{k} + f_h^{i+1}, v_h \right) + (q_h^j, v_h)_\Gamma \right\} \quad (4.53)$$

Paso 3 Conocido z_h^j hacemos

$$q_h^{j+1} = J_\rho(q_h^j + \rho z_h^j) \quad (4.54)$$

Paso 4 Si $\|z_h^j - z_h^{j+1}\| \leq \text{tol}$ hacemos $u_h^{i+1} = z_h^{j+1}$ de lo contrario volver al Paso 2.

Puede observarse en el algoritmo anterior que es necesario poder calcular el resolvente Yosida J_ρ , que en general no es sencillo de hacerlo.

Para el problema de control térmico (3.40) se tiene lo siguiente:

Definimos el conjunto $K^* \subset L_2(\Gamma)$ como

$$K^* = \{\phi(v), v \in L_2(\Gamma)\}$$

Para cada $q \in K^*$ definimos el conjunto $K^*(q) \subset L_2(\Gamma)$ tal que

$$K^*(q) = \{v \in L_2(\Gamma) | q = \phi(v)\}$$

denotaremos como v_q a los elementos de $K^*(q)$.

Sean $q \in K^*$, probaremos que $K^*(q) = \partial\Psi^*(q)$.

- En efecto para $p \in K^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \Psi^*(p) - \Psi^*(q) &= (p, v_p)_\Gamma - (q, v_q)_\Gamma - \Psi(v_p) + \Psi(v_q) \\ &\geq (p, v_p)_\Gamma - (q, v_q)_\Gamma + (\phi(v_p), v_q - v_p)_\Gamma \\ &= (p, v_p)_\Gamma - (q, v_q)_\Gamma + (p, v_q)_\Gamma - (p, v_p)_\Gamma \\ &= (p - q, v_q)_\Gamma \end{aligned}$$

es decir $v_q \in \partial\Psi^*(q)$

- Del mismo modo si $v \in \partial\Psi^*(q)$ entonces $q \in \partial\Psi(v)$ es decir $q = \phi(v)$ por lo tanto $v = v_q$

Si $\phi^* : [g_1, g_2] \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ es tal que

$$\phi^*(y) = \begin{cases}] - \infty, h_1 + \frac{y}{k_1}] & y = g_1 \\ \left\{ h_1 + \frac{y}{k_1} \right\} & g_1 < y < 0 \\ [h_1, h_2] & y = 0 \\ \left\{ h_2 + \frac{y}{k_2} \right\} & 0 < y < g_2 \\ [h_2 + \frac{g_2}{k_2}, +\infty[& y = g_2 \end{cases}$$

y $\rho > 0$ entonces

$$(I + \rho\phi^*)(y) = \begin{cases} y + \rho] - \infty, h_1 + \frac{g_1}{k_1}] & y = g_1 \\ y + \rho \left\{ h_1 + \frac{y}{k_1} \right\} & g_1 < y < 0 \\ y + \rho[h_1, h_2] & y = 0 \\ y + \rho \left\{ h_2 + \frac{y}{k_2} \right\} & 0 < y < g_2 \\ y + \rho[h_2 + \frac{g_2}{k_2}, +\infty[& y = g_2 \end{cases}$$

por lo tanto

$$J_\rho(x) \equiv (I + \rho\phi^*)^{-1}(x) = \begin{cases} g_1 & x \leq g_1 + \rho \left(h_1 + \frac{g_1}{k_1} \right) \\ (x - \rho h_1) / \left(1 + \frac{\rho}{k_1} \right) & g_1 + \rho \left(h_1 + \frac{g_1}{k_1} \right) < x < \rho h_1 \\ 0 & \rho h_1 \leq x \leq \rho h_2 \\ (x - \rho h_2) / \left(1 + \frac{\rho}{k_2} \right) & \rho h_2 < x < g_2 + \rho \left(h_2 + \frac{g_2}{k_2} \right) \\ g_2 & x \geq g_2 + \rho \left(h_2 + \frac{g_2}{k_2} \right) \end{cases}$$

por lo tanto si $q \in C(\Gamma, [g_1, g_2])$:

$$J_\rho(q(x) + \rho y) = q(x), \quad \text{con } y \in \mathbb{R} : q(x) = \phi(y)$$

por continuidad

$$J_\rho = (I + \rho\partial\Psi^*)^{-1}$$

es decir, para este caso ha sido posible calcular el resolvente.

Ahora, el problema (4.53) puede ser resuelto de la siguiente manera:

- Suponemos V_h y W_h de dimensión finita, con bases $\{\varphi_l\}_{l \in \overline{1, d}}$ y $\{\omega_l\}_{l \in \overline{1, m}}$ respectivamente ($\dim V_h = d$, $\dim W_h = m$).
- Expresamos (4.53) como una ecuación variacional

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dados } u_h, f_h, q_h \text{ encontrar } z_h \in V_h, \text{ tal que} \\ b(z_h, v_h) = \left(\frac{u_h}{k} + f_h, v_h \right) - (q_h, v_h)_\Gamma \quad \text{para todo } v_h \in V_h \end{array} \right.$$

- Hacemos $z_h = \sum_{l=1}^d z_l \varphi_l$, $q_h = \sum_{l=1}^m q_l \omega_l$ y $v_h = \varphi_s$, $s \in \overline{1, d}$, esto nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{l=1}^d z_l b(\varphi_l, \varphi_s) = \left(\frac{u_h}{k} + f_h, \varphi_s \right) - \sum_{l=1}^m q_l (\omega_l, \varphi_s)_\Gamma \quad \text{para todo } s \in \overline{1, d}$$

Si definimos las matrices

$$B_{d \times d} = (b_{l,s}), \quad b_{l,s} = b(\varphi_s, \varphi_l)$$

$$G_{d \times m} = (g_{l,s}), \quad g_{l,s} = (\omega_s, \varphi_l)_\Gamma$$

y los vectores

$$z \in \mathbb{R}^d, z = (z_l), \quad q \in \mathbb{R}^m, q = (q_l), \quad w \in \mathbb{R}^d, w = \left(\left(\frac{u_h}{k} + f_h, \varphi_s \right) \right)$$

obtenemos la ecuación matricial que define z_h^j

$$Bz = w - Gq$$

Además si expresamos u_h y f_h como sigue

$$u_h = \sum_{l=1}^d u_l \varphi_l \quad \text{y} \quad f_h = \sum_{l=1}^d f_l \varphi_l$$

entonces:

$$\begin{aligned} w_s &= \left(\frac{u_h}{k} + f_h, \varphi_s \right) \\ &= \frac{1}{k} (u_h, \varphi_s) + (f_h, \varphi_s) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{l=1}^d u_l (\varphi_l, \varphi_s) + \sum_{l=1}^d f_l (\varphi_l, \varphi_s) \end{aligned}$$

Definimos la matriz

$$C_{d \times d} = (c_{l,s}), \quad c_{l,s} = (\varphi_s, \varphi_l)$$

entonces

$$w = C \left(\frac{1}{k} u + f \right)$$

finalmente se tiene

$$Bz = C \left(\frac{1}{k} u + f \right) - Gq$$

Como en el caso de las EVP, si $\Omega^{(e)}$ es cualquier elemento triangular del mallado como sigue

- Las integrales en cada elemento pueden calcularse empleando el elemento triangular estandar Ω_0 dado en (4.22) que después de un cambio de coordenadas adecuado, $T(\xi, \eta) = (x, y)$, donde:

$$\int_{\Omega^{(e)}} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_0} f(T(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta$$

y $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ denota el Jacobiano de la transformación T .

- Elegimos como funciones base: φ_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\varphi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = \eta$$

- Calculamos las matrices $B^{(e)}$, $G^{(e)}$ y $C^{(e)}$ en cada elemento $\Omega^{(e)}$ de la malla del dominio Ω :

$$B_{d \times d}^{(e)} = b(\varphi_s, \varphi_l) = \left(\frac{u_h}{k}, \varphi_s \right) + \alpha^2 \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.55)$$

$$G_{d \times m}^{(e)} = (\omega_s, \varphi_l)_\Gamma \quad (4.56)$$

$$C_{d \times d}^{(e)} = (\varphi_s, \varphi_l) \quad (4.57)$$

- Ensamblar las matrices $B^{(e)}$, $G^{(e)}$ y $C^{(e)}$ obtenidas en cada elemento para obtener el sistema global:

$$Bz^j = C \left(\frac{1}{k} u^j + f^{j+1} \right) - Gq^j \quad (4.58)$$

y conocido z^j hacemos

$$q^{j+1} = J_\rho(q^j + \rho z^j) \quad (4.59)$$

que particionando el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de longitud Δt , luego para $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, conociendo la solución en j podemos calcular la solución en $j+1$.

De esta manera logramos un versión vectorial del Algoritmo 4.2.1.

Programa 4.2.2 (Versión matricial) Conocidos $u^i, f^{i+1} \in \mathbb{R}^d$

Paso 1 Escoger $q^0 \in \mathbb{R}^m$

Paso 2 Para $j \geq 0$, conocido $q^j \in \mathbb{R}^m$ calcular $z^j \in \mathbb{R}^d$ solución de

$$Bz^j = C \left(\frac{1}{k} u^i + f^{i+1} \right) - Gq^j \quad (4.60)$$

Paso 3 Conocido z^j hacemos

$$q^{j+1} = J_\rho(q^j + \rho z^j) \quad (4.61)$$

Paso 4 Si $\|z^j - z^{j+1}\| \leq tol$ hacemos $u^{i+1} = z^{j+1}$ de lo contrario volver al Paso 2.

4.2.4. Convergencia del Método de Uzawa

En lo que sigue comprobaremos que el Algoritmo 4.2.1 descrito converge en el sentido siguiente

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \| u_h^i - u \|_{V_h} = 0 \quad (4.62)$$

donde u_h^i es la solución del problema (4.51) y u es la solución de (4.47).

Haremos uso de una notación más sencilla de la forma siguiente: $u^i = u_h^i$, $V = V_h$ y $W = W_h$ y además

$$J_0(v) = \frac{1}{2}b(v, v) - (f^{i+1} + \frac{u^i}{k}, v)$$

Luego, de (4.51) y (4.54) se tiene

$$\begin{aligned} \langle J'_0(v), v - u^i \rangle + (q^i, v - u^i) &\geq 0 \\ \langle J'_0(v), v - u \rangle + (q^i, v - u) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde $J'_0(v)$ denota la derivada de Gateaux de J_0 en el punto v .

Tomando $v = u^i$ y $v = u$ en (4.63) respectivamente y sumando las desigualdades, resulta

$$\langle J'_0(u^i) - J'_0(u), u^i - u \rangle + (q - q^i, u^i - u) \geq 0 \quad (4.64)$$

dado que la forma bilineal b es coercivo, es decir, existe $c > 0$ tal que

$$b(v, v) \geq c \| v \|_V^2 \quad \text{para todo } v \in V$$

luego

$$(q - q^i, u^i - u) \geq \langle J'_0(u) - J'_0(u^i), u - u^i \rangle \geq c \| u - u^i \|_V^2 \quad (4.65)$$

La desigualdad (4.65) será aprovechada en los pasos siguientes.

Observar lo siguiente:

$$\| q^i - q \|_W \leq \| J_\rho(q^i + \rho u^i) - J_\rho(q + \rho u) \|_W$$

como el resolvente J_ρ es lipchitziano de orden 1

$$\leq \| (q^i + \rho u^i) - (q + \rho u) \|_W$$

$$\leq \| (q^i - q) + \rho (u^i - u) \|_W$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$\leq \| (q^i - q) \|_W^2 + \| \rho^2 (u^i - u) \|_W^2 + 2\rho (q^i - q, u^i - q)_W$$

aprovechando (4.65) resulta

$$\leq \| (q^i - q) \|_W^2 + (\rho^2 - 2c\rho) \| u^i - u \|_V^2 \quad (4.66)$$

Imponemos ahora que

$$\rho^2 - 2c\rho < 0 \tag{4.67}$$

Luego, la sucesión $\{\|q^i - q\|_W\}$ es decreciente y acotada inferiormente por tanto converge cuando $i \rightarrow \infty$, por lo tanto se cumple (4.62), es decir, la sucesión u_h^i se aproxima a la solución "u" de (4.47).

Capítulo 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1. Resultados numéricos para la EVP

En esta sección resolveremos el problema que modela la transferencia de calor por conducción planteado en el Capítulo 2 y para el cual se ha probado la existencia y unicidad de solución débil en el Capítulo 3, esto es debido a que obtener la solución clásica requiere que $u(t) \in C^2(\Omega) \quad t \in [0, T]$ ($T > 0$), mientras que en la formulación débil no necesitamos de esta condición [20] razón por la cual se procedió a debilitar condiciones acerca de la función u que representa la temperatura y se realizó su aproximación discreta en el Capítulo 4. En lo que sigue, damos los datos para un problema en particular en placas de sólidos de vidrio y aluminio así como los resultados que se obtienen con las rutinas implementadas en Matlab.

5.1.1. Pre Proceso: Datos de Entrada

- Tolerancia para resolver el sistema de ecuaciones lineales: $tol = 10^{-2}$
- Tiempo máximo en segundos: $T = 10$
- Número máximo de puntos en el tiempo: $N = 10, 20, 30, 40$
- Tamaños de paso de tiempo en el intervalo $[0, T]$ son:

$$\Delta t = 1, 0.5, 0.33, 0.25$$

- Región de la placa sólida en metros cuadrados: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

- Constante de Conductividad Térmica:

$$\alpha_{\text{Vidrio}}^2 = 0.80 \frac{W}{m K}, \quad \alpha_{\text{Aluminio}}^2 = 205 \frac{W}{m K}$$

- Parámetro θ :

$$\theta = \frac{1}{2} \quad (\text{Método de Crank-Nicholson})$$

- Condición Inicial:

$$u(x, y, 0) = u_0 \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

- Término Fuente:

$$f(x, y, t) = 2tx^2(x-1)^2y^2(y-1)^2 - \\ - ((12x^2 - 12x + 2)y^2(y-1)^2 + (12y^2 - 12y + 2)x^2(x-1)^2)t^2$$

- Condición de Frontera:

$$u(x, y, t) = g(x, y, t) = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \partial\Omega \quad \text{y } t \in [0, T]$$

5.1.2. Proceso computacional para las EVP

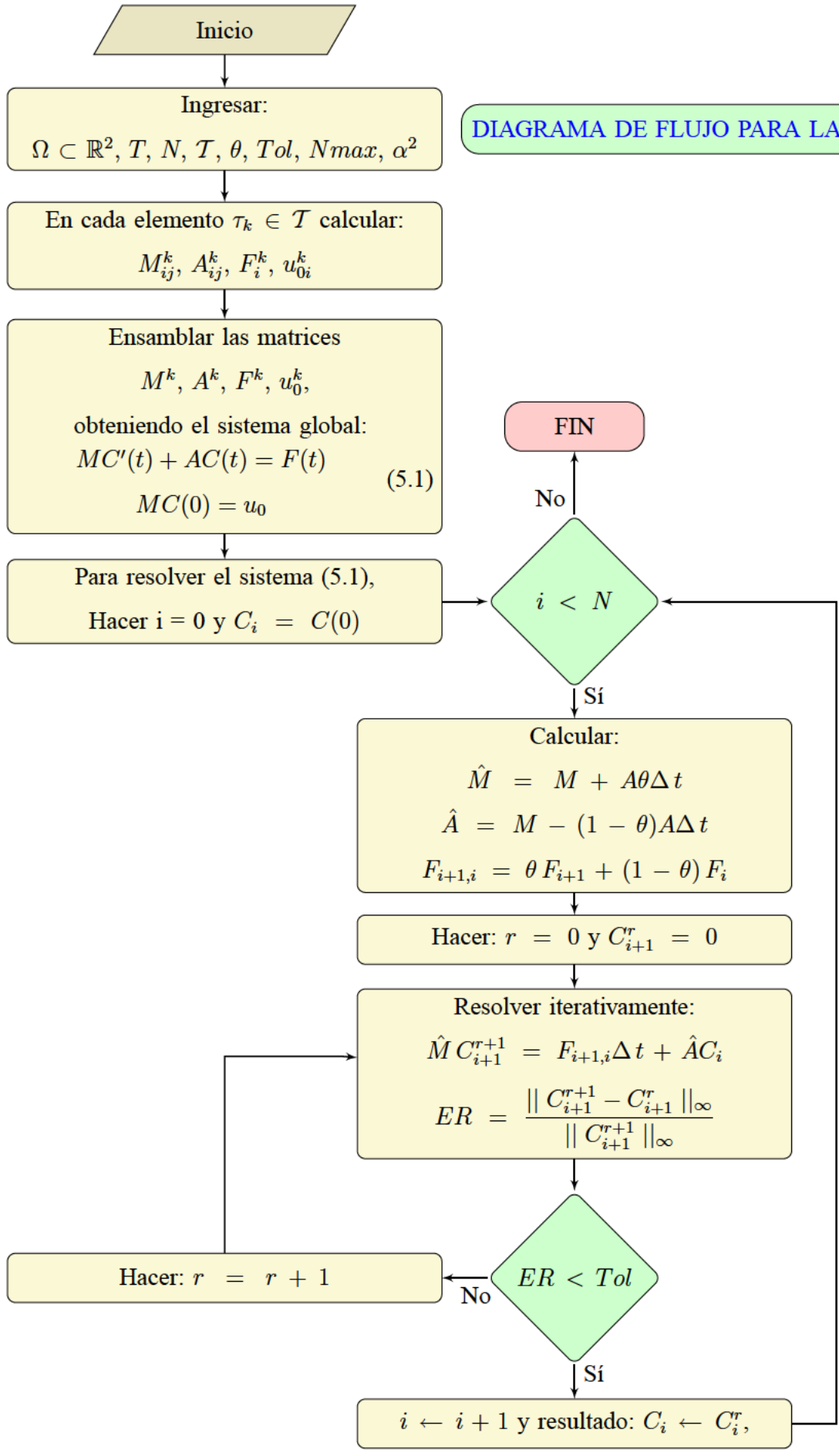
- Número de puntos en la dirección x : 5, 10.
- Número de puntos en la dirección y : 5, 10.

Entonces

	Malla N° 1	Malla N° 2
Número de Nodos Totales	25	100
Número de Nodos Internos	9	65
Número de Nodos en la Frontera	16	35
Número de Elementos	32	162

- En el siguiente diagrama de flujo para las EVP, se muestra el proceso de la implementación computacional, el cual sirve para la experimentación numérica para resolver nuestro problema modelo de transferencia de calor por conducción.

DIAGRAMA DE FLUJO PARA LAS EVP



5.1.3. Post Proceso: Visualización Gráfica de los Resultados

Mallas de Elementos Finitos de 32 y 162 elementos

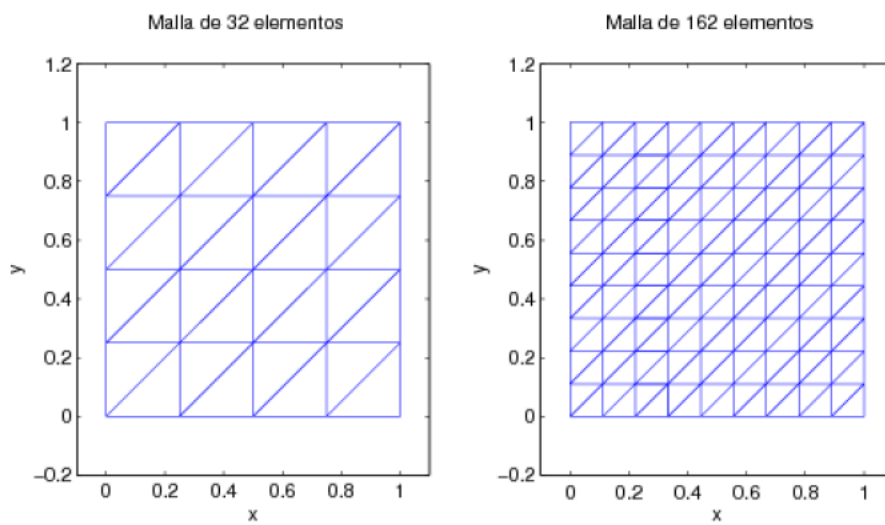


Figura 5.1: Mallas de Elementos Finitos Triangular

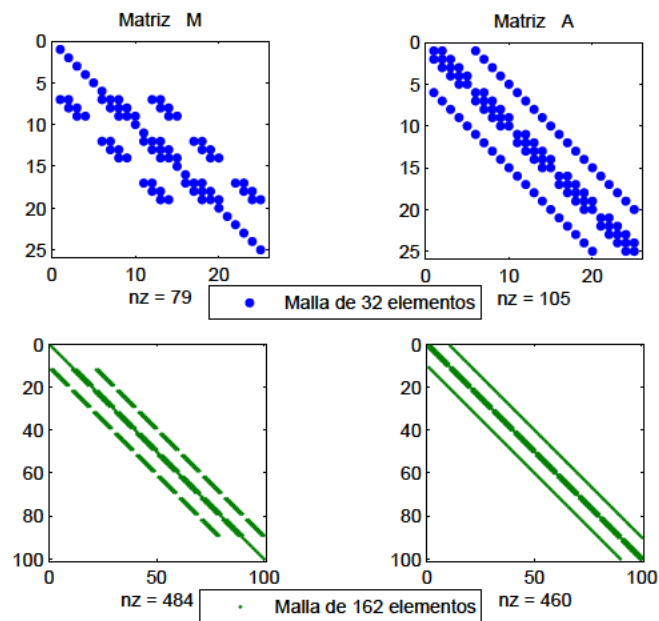


Figura 5.2: Densidad de los coeficientes no nulos de las matrices M y A

Para un mallado de 32 elementos de una placa de Vidrio

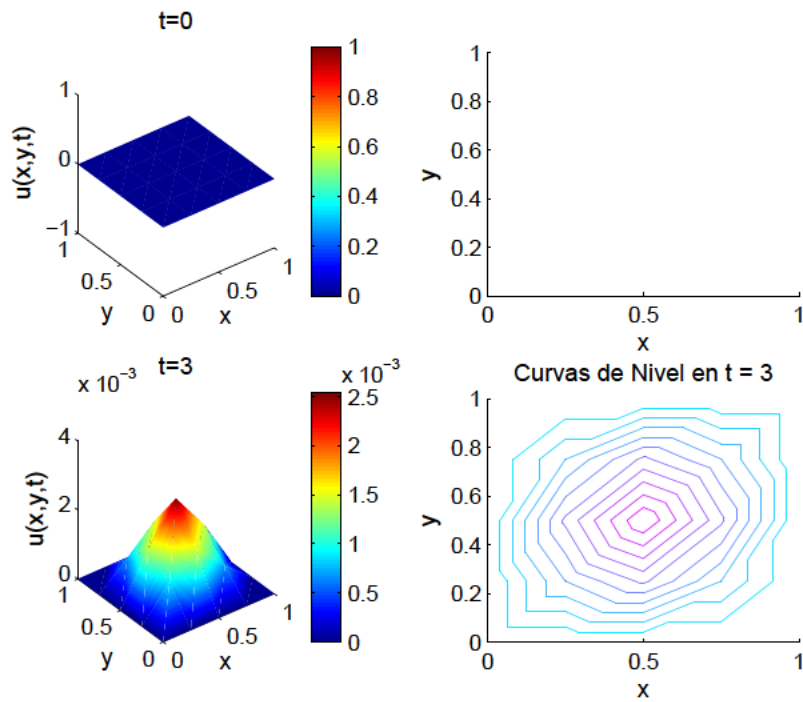


Figura 5.3: Evolución de u en $t = 0$ y en $t = 3$ segundos

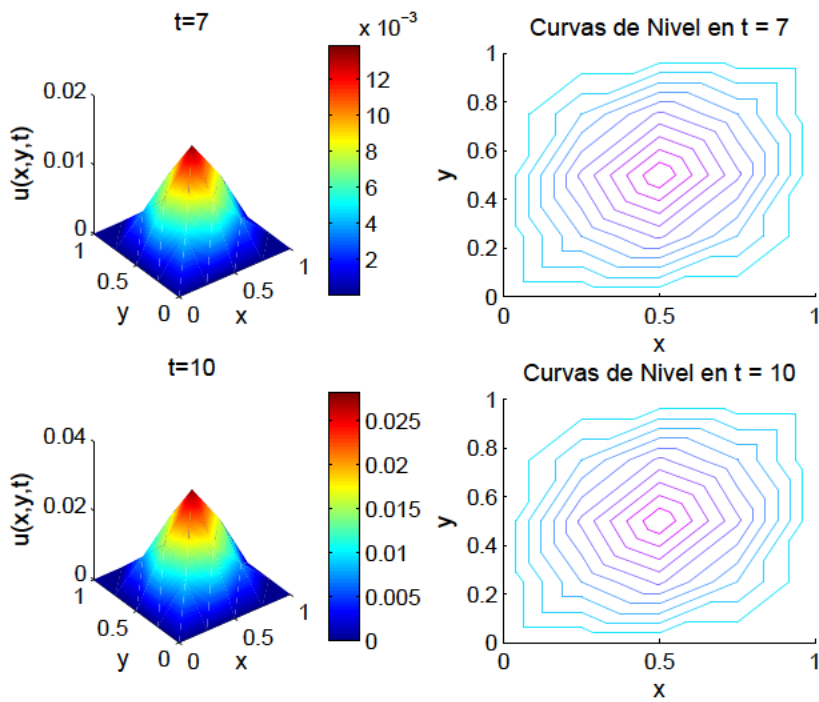


Figura 5.4: Evolución de u en $t = 7$ y en $t = 10$ segundos

Para un mallado de 162 elementos de una placa de Vidrio

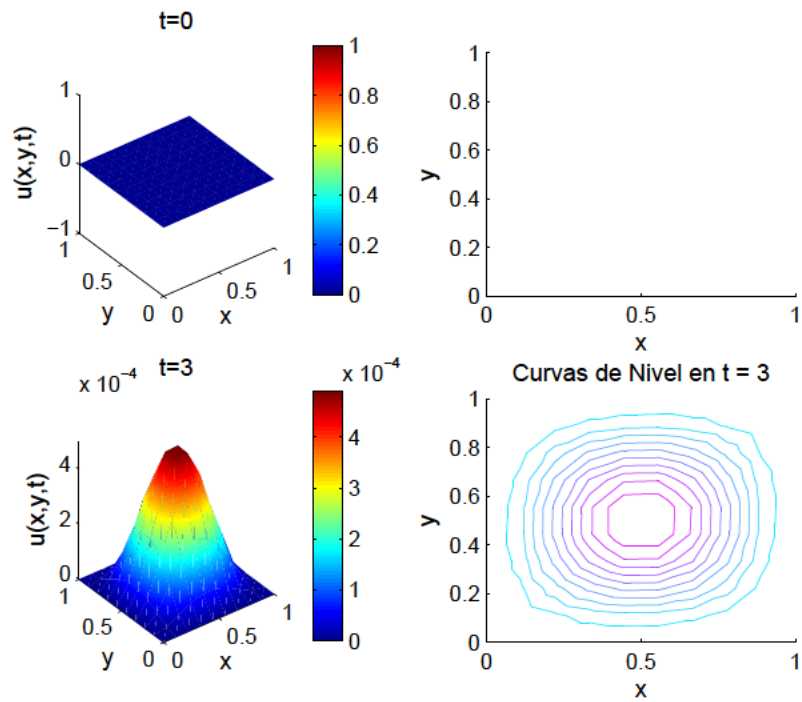


Figura 5.5: Evolución de u en $t=0$ y en $t=3$ segundos

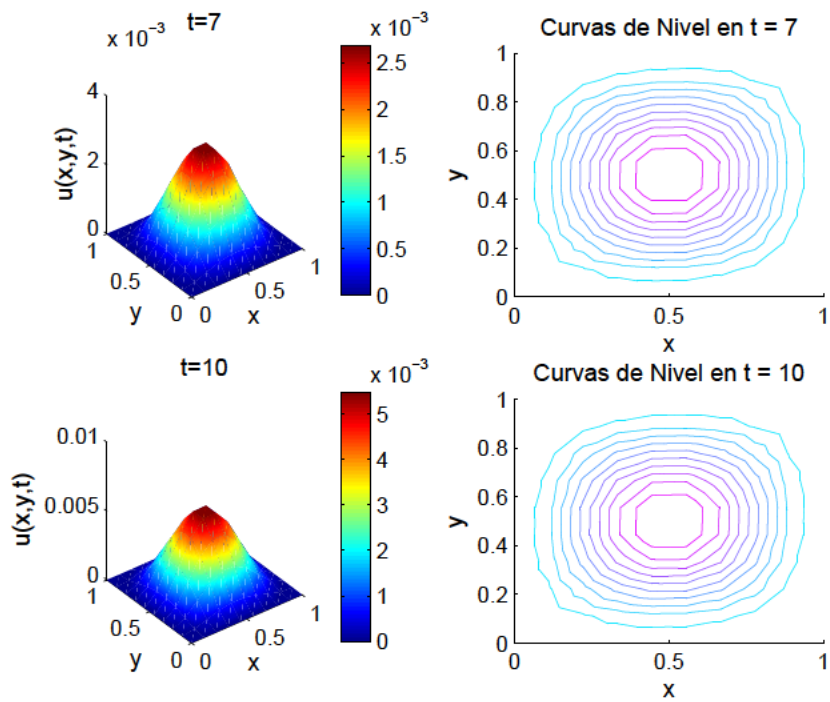


Figura 5.6: Evolución de u en $t=7$ y en $t=10$ segundos

Para un mallado de 32 elementos de una placa de Aluminio

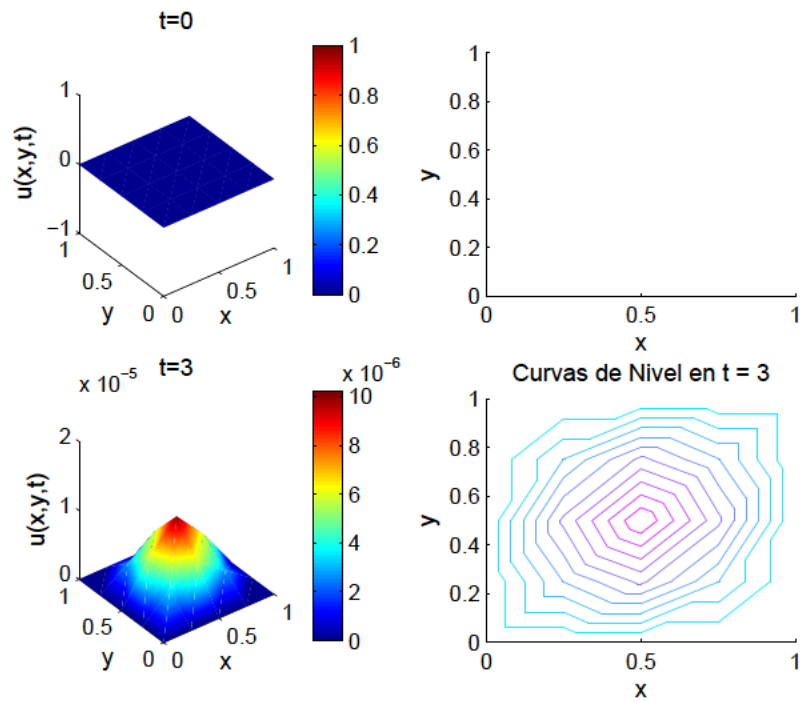


Figura 5.7: Evolución de u en $t=0$ y en $t=3$ segundos

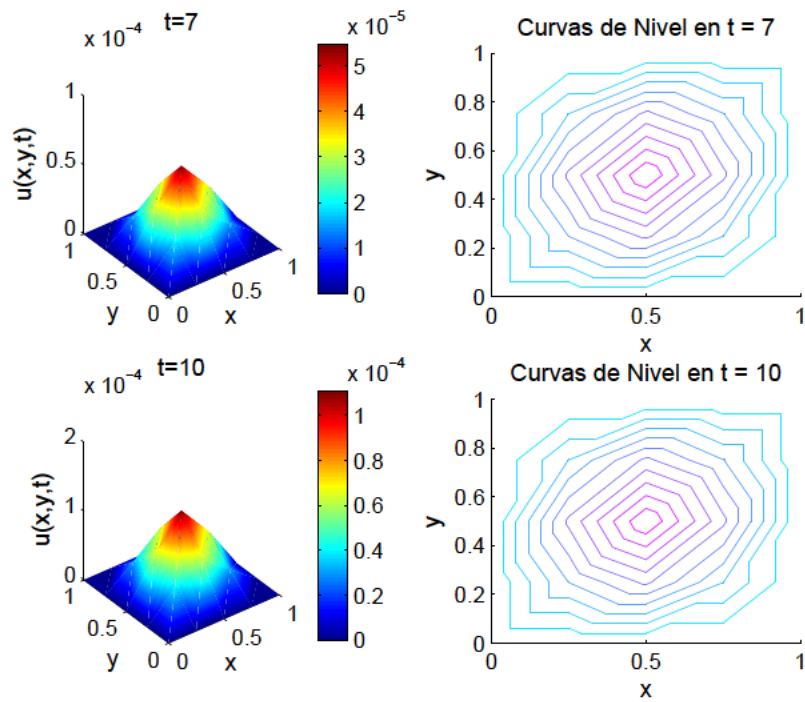


Figura 5.8: Evolución de u en $t=7$ y en $t=10$ segundos

Para un mallado de 162 elementos de una placa de Aluminio

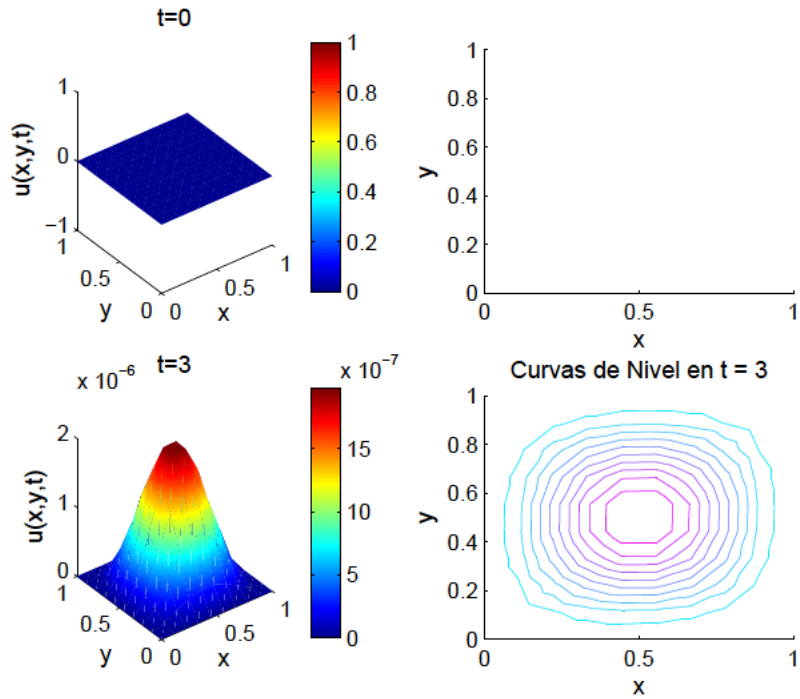


Figura 5.9: Evolución de u en $t=0$ y en $t=3$ segundos

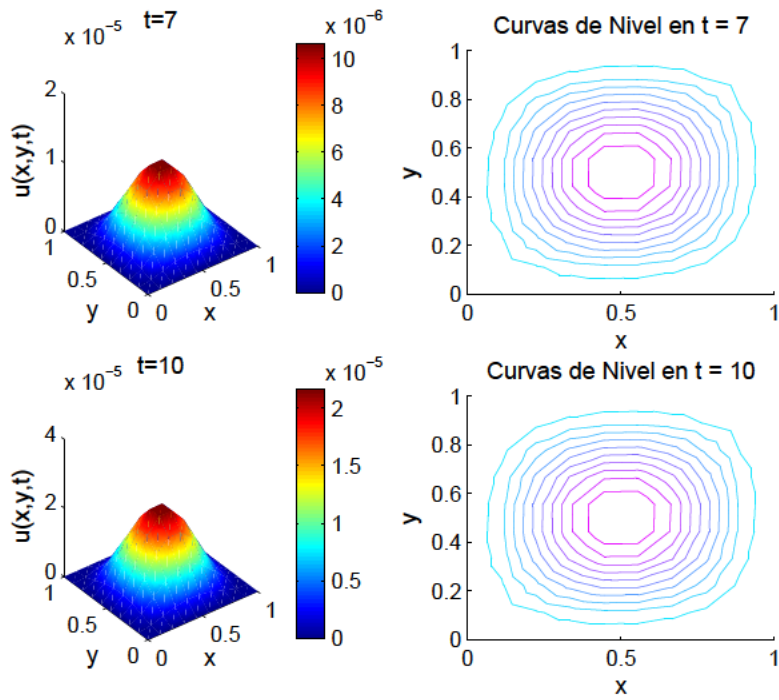


Figura 5.10: Evolución de u en $t=7$ y en $t=10$ segundos

Tiempo de Proceso Computacional - TPC (segundos)

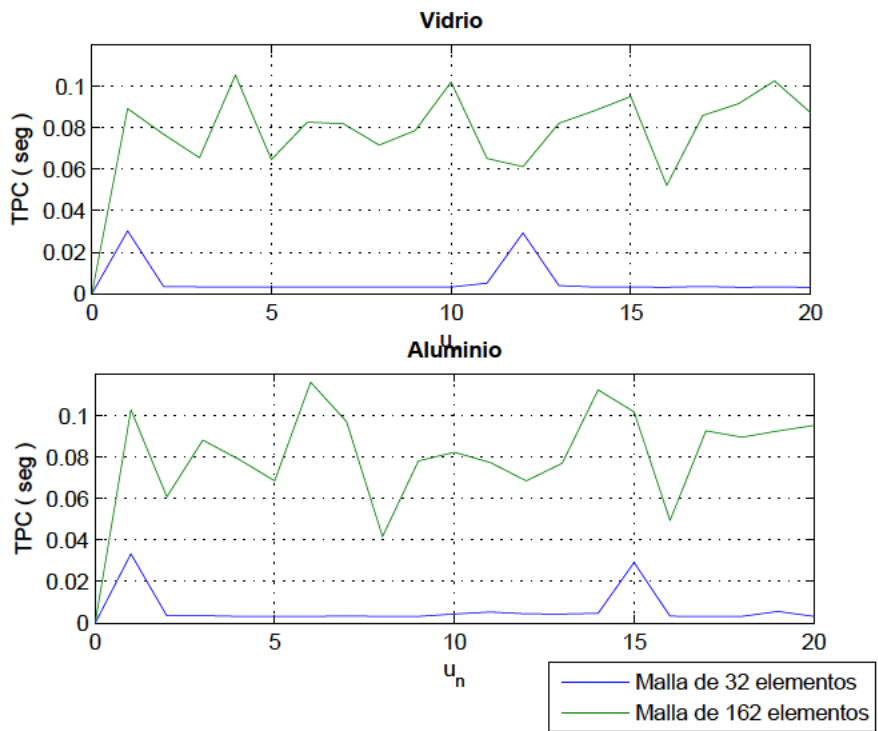


Figura 5.11: u_n vs TPC ($n = 0, 1, 2, \dots, 20$)

Estabilidad en una placa de Vidrio

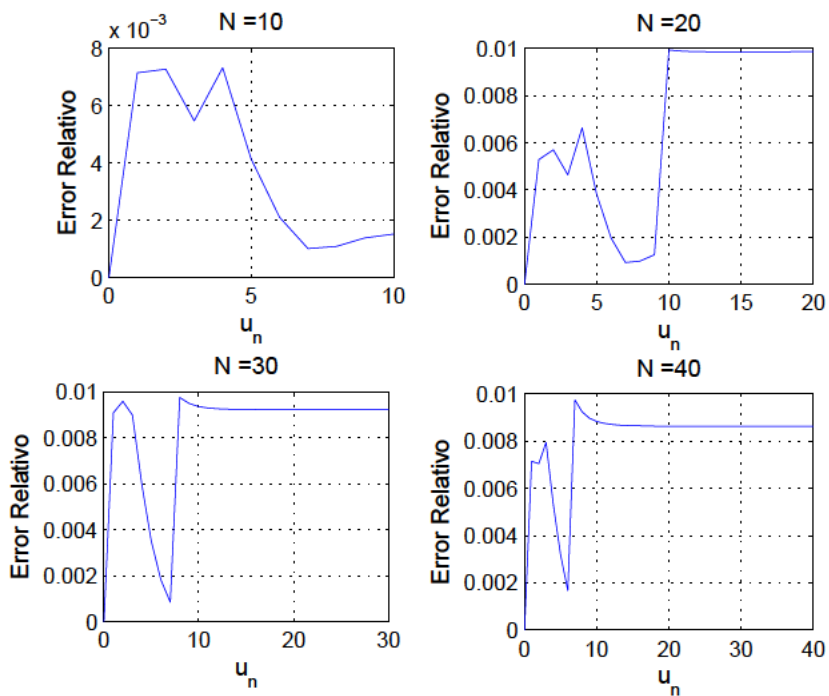


Figura 5.12: Malla N°1 : u_n vs Error Relativo

Estabilidad en una placa de Vidrio

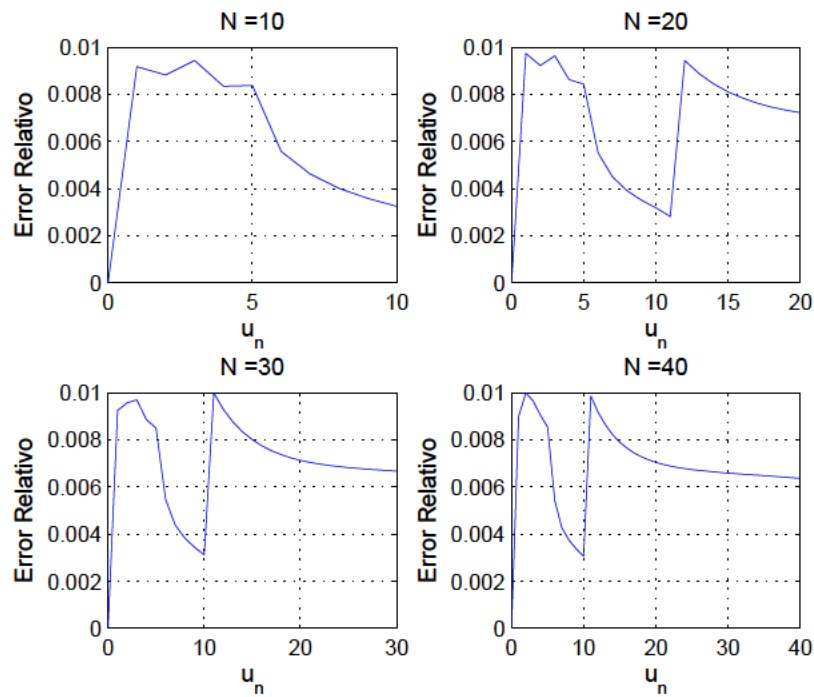


Figura 5.13: Malla N°2 : u_n vs Error Relativo

Estabilidad en una placa de Aluminio

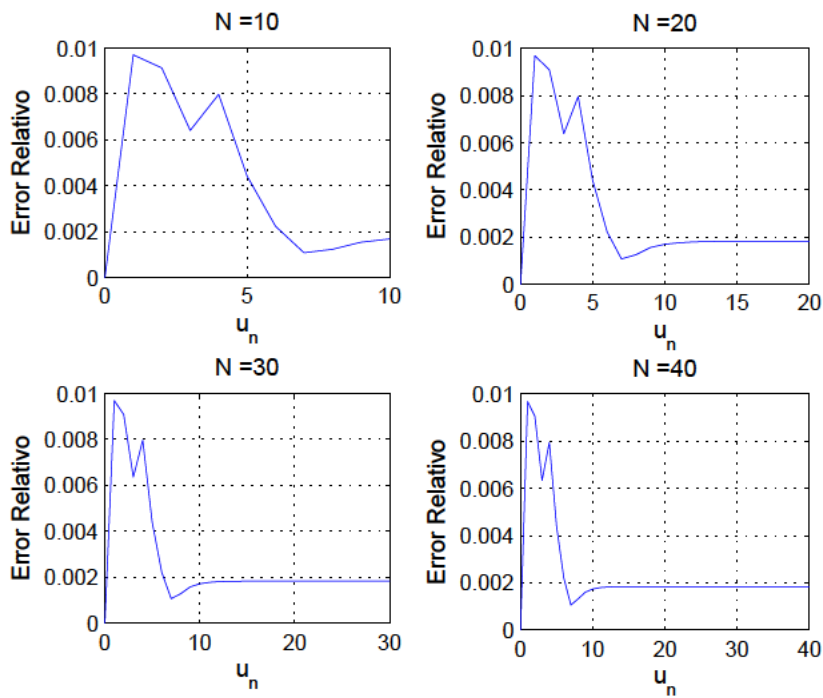


Figura 5.14: Malla N°1 : u_n vs Error Relativo

Estabilidad en una placa de Aluminio

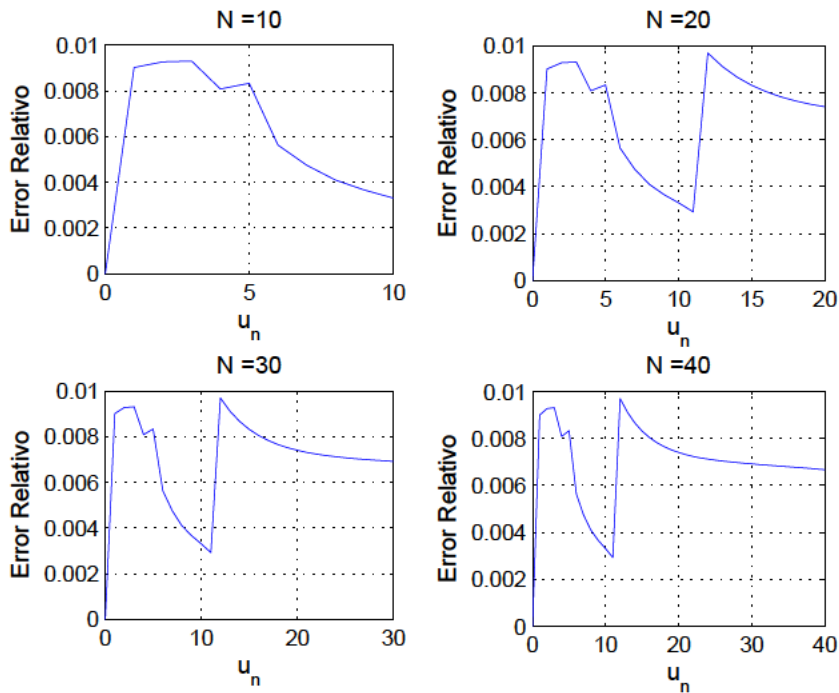


Figura 5.15: Malla N°2 : u_n vs Error Relativo

5.2. Resultados numéricos para la IVP

El problema que modela el control térmico a través de la frontera de una placa sólida planteado en el Capítulo 2 cuya solución clásica requiere que $u(t) \in C^2(\Omega)$ en un intervalo de tiempo de $[0, T]$, ($T > 0$). Por ello, se procedió a debilitar condiciones de la función u que representa la temperatura y obtener una nueva formulación del problema original como una IVP y para el cual se ha probado la existencia y unicidad de solución débil en el Capítulo 3. Su aproximación discreta se realizó en el Capítulo 4, en lo que sigue, damos los datos para un problema en particular y los resultados que se obtienen con las rutinas implementadas en Matlab para el aluminio y el vidrio.

5.2.1. Pre Proceso: Datos de entrada

- Tolerancia para resolver el sistema de ecuaciones lineales: $tol = 10^{-2}$
- Tiempo máximo en segundos: $T = 10$
- Número máximo de puntos en el tiempo: $N = 10, 20, 30, 40$

- Tamaños de paso de tiempo en el intervalo $[0, T]$ son:

$$\Delta t = 1, 0.5, 0.33, 0.25$$

- Región de la placa sólida en metros cuadrados: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$
- Constante de Conductividad Térmica:

$$\alpha_{\text{Vidrio}}^2 = 0.80 \frac{W}{m K}, \quad \alpha_{\text{Aluminio}}^2 = 205 \frac{W}{m K}$$

- Condición Inicial: $u(x, y, 0) = u_0 \equiv 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$
- Intervalo de Control de Temperatura: $h_1 = -1, h_2 = 1$
- Intervalo de variación en la frontera libre $\phi(u)$: $g_1 = -2, g_2 = 2$
- Constantes de proporcionalidad: $k_1 = k_2 = 1$
- Término Fuente:

$$f(x, y, t) = 2tx^2(x-1)^2y^2(y-1)^2 - ((12x^2 - 12x + 2)y^2(y-1)^2 + (12y^2 - 12y + 2)x^2(x-1)^2)t^2$$

- Condición de Frontera:

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, y, t) = \phi(u(x, y, t)) \quad \text{para todo } (x, y) \in \partial \Omega \quad \text{y } t \in [0, T]$$

donde ϕ es dado por (2.8).

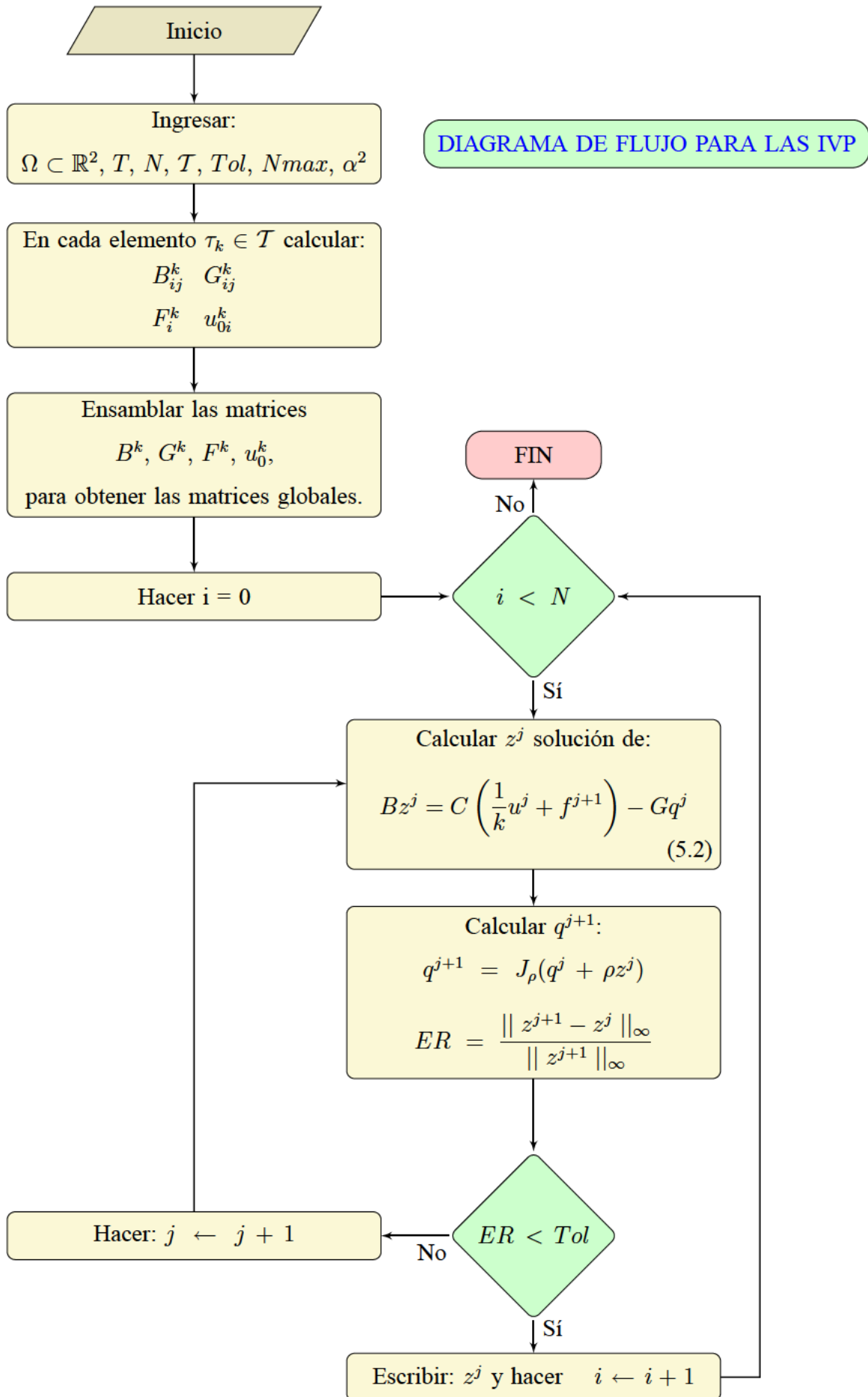
5.2.2. Proceso computacional para las IVP

- Número de puntos en la dirección x : 5, 10.
- Número de puntos en la dirección y : 5, 10.

Entonces

	Malla N° 1	Malla N° 2
Número de Nodos Totales	25	100
Número de Nodos Internos	9	65
Número de Nodos en la Frontera	16	35
Número de Elementos	32	162

- En el siguiente diagrama de flujo para las IVP, se muestra el proceso de la implementación computacional, el cual sirve para la experimentación numérica para resolver nuestro problema modelo de control térmico.



5.2.3. Post Proceso: Visualización Gráfica de los Resultados

Mallas de Elementos Finitos de 32 y 162 elementos

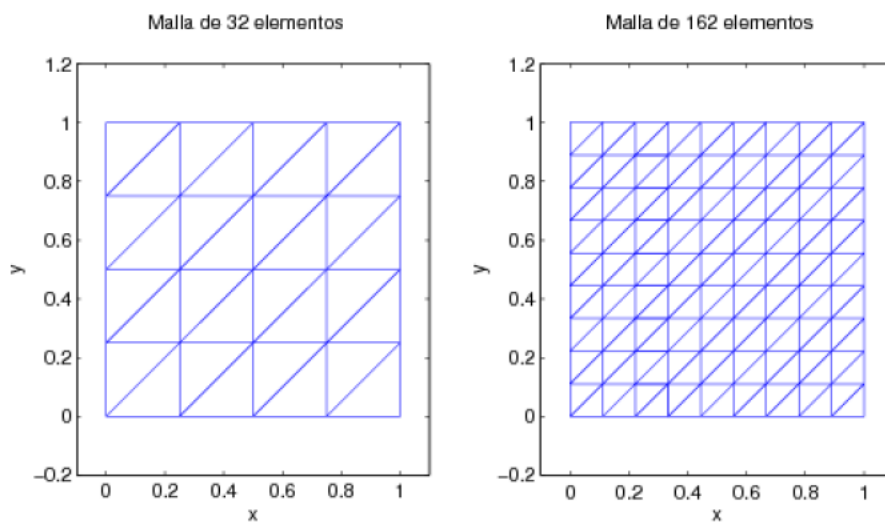


Figura 5.16: Mallas de Elementos Finitos Triangular

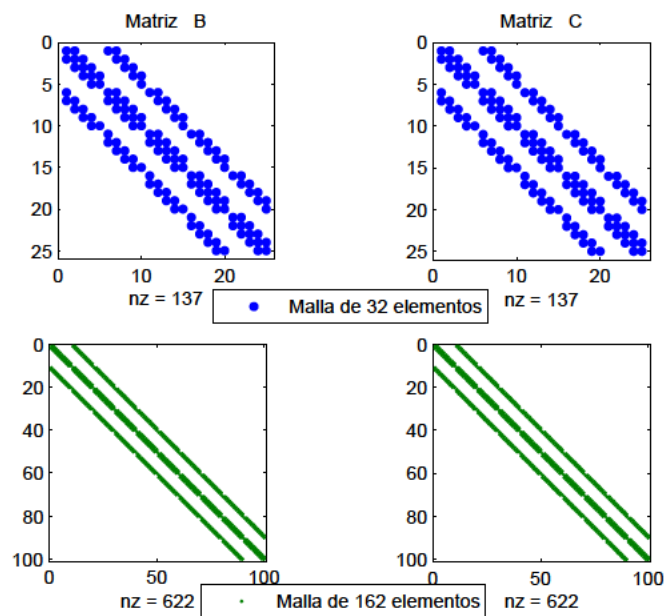


Figura 5.17: Densidad de los coeficientes no nulos de las matrices B y C

Para un mallado de 32 elementos de una placa de Vidrio

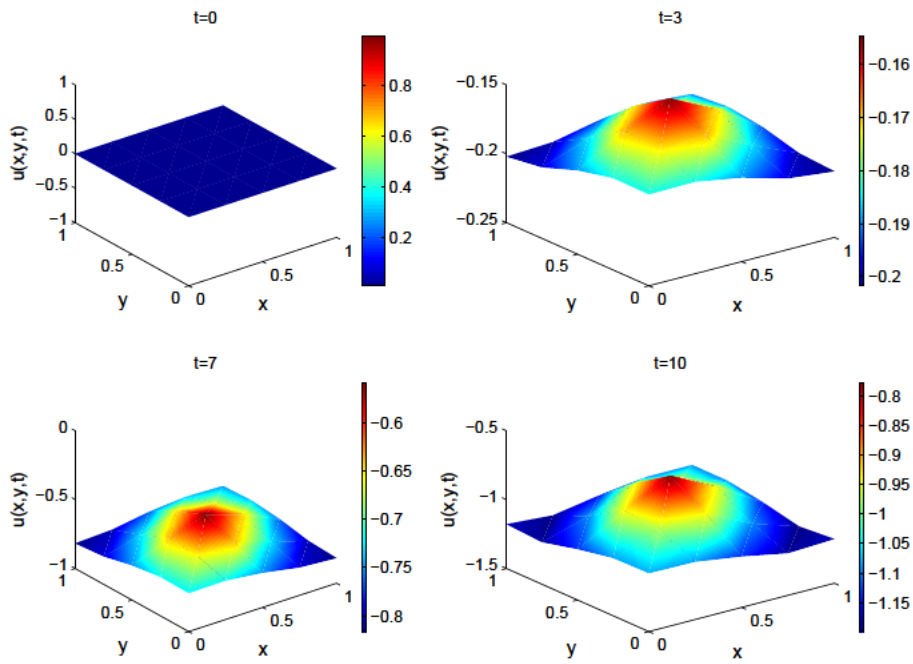


Figura 5.18: Evolución de u para $t= 0, 3, 7$ y 10 segundos

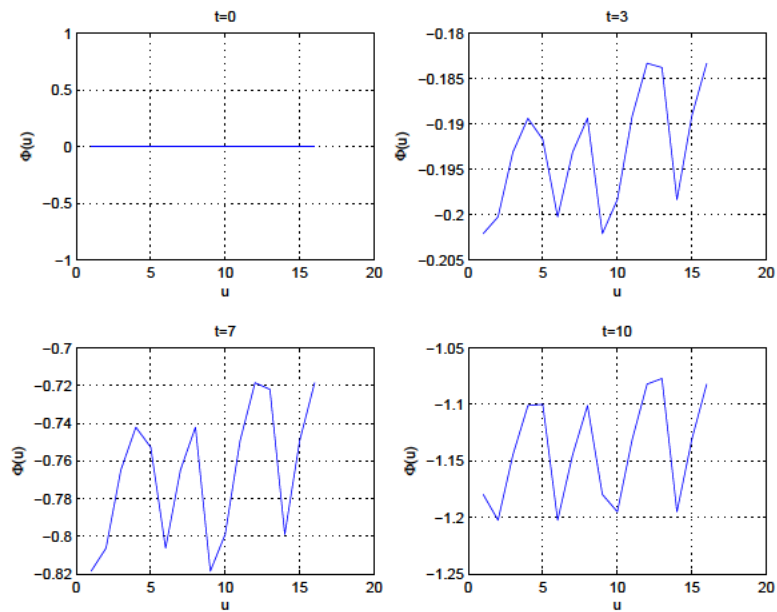


Figura 5.19: Evolución de de la frontera libre u vs $\phi(u)$ en $t = 0, 3, 7$ y 10 segundos

Para un mallado de 162 elementos de una placa de Vidrio

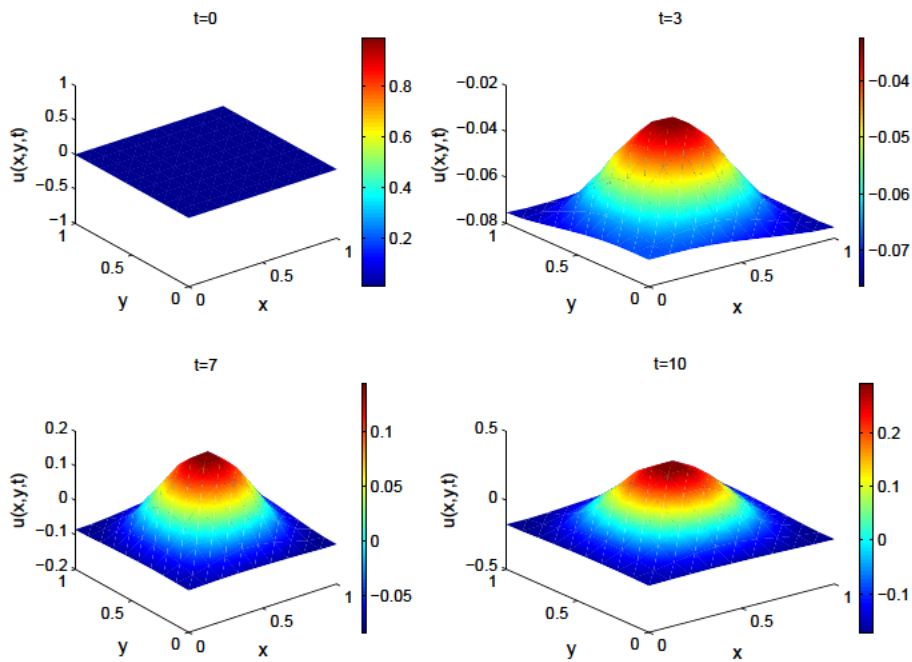


Figura 5.20: Evolución de u para $t = 0, 3, 7$ y 10 segundos

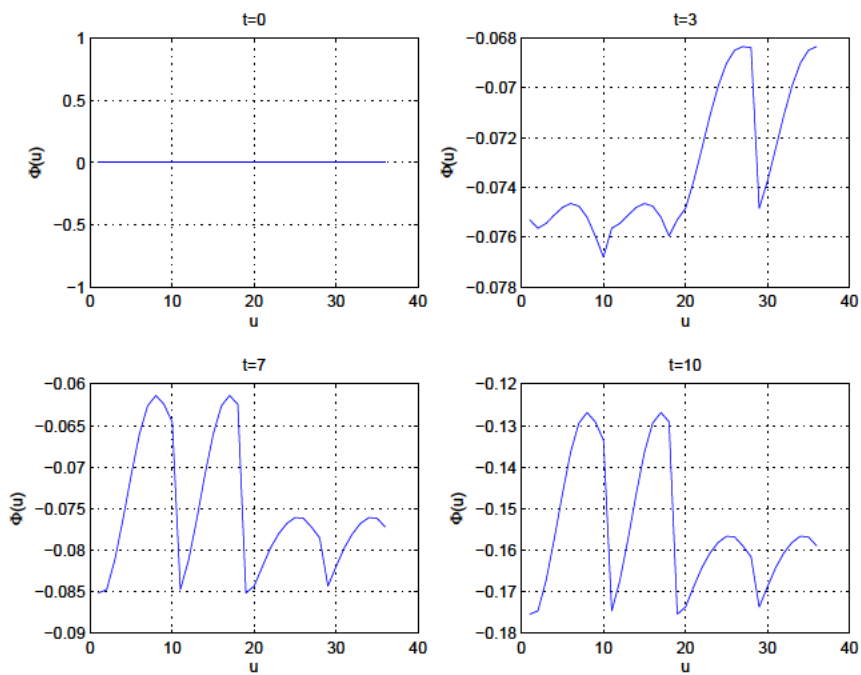


Figura 5.21: Evolución de de la frontera libre u vs $\phi(u)$ en $t = 0, 3, 7$ y 10 segundos

Para un mallado de 32 elementos de una placa de Aluminio

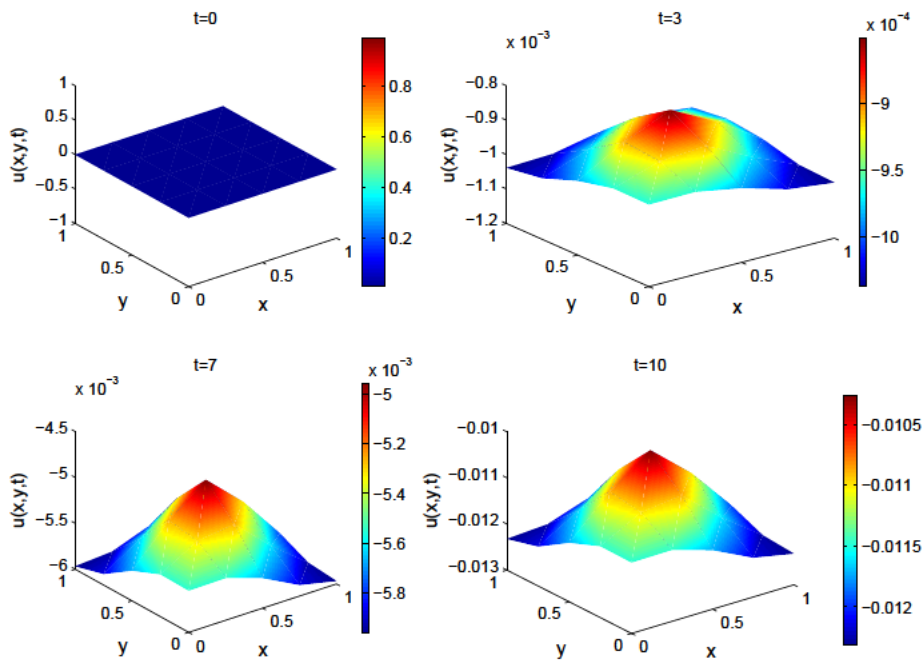


Figura 5.22: Evolución de u para $t= 0, 3, 7$ y 10 segundos

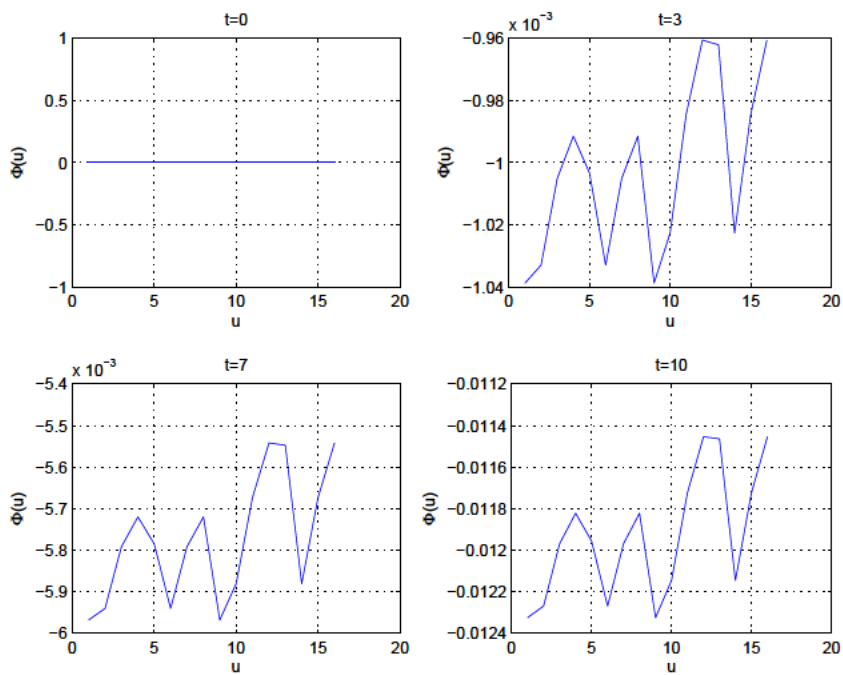


Figura 5.23: Evolución de de la frontera libre u vs $\phi(u)$ en $t = 0, 3, 7$ y 10 segundos

Para un mallado de 162 elementos de una placa de Aluminio

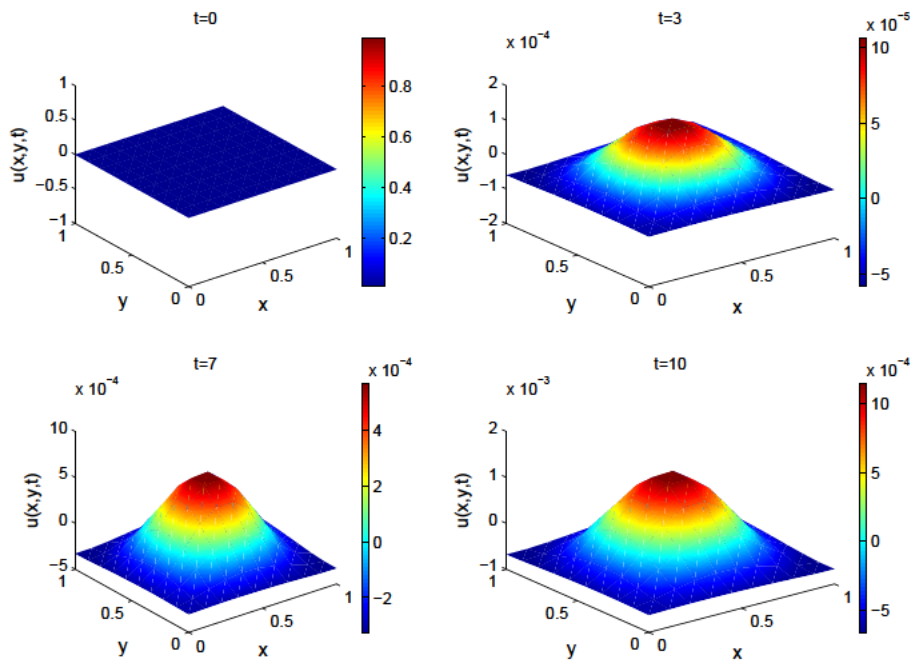


Figura 5.24: Evolución de u para $t= 0, 3, 7$ y 10 segundos

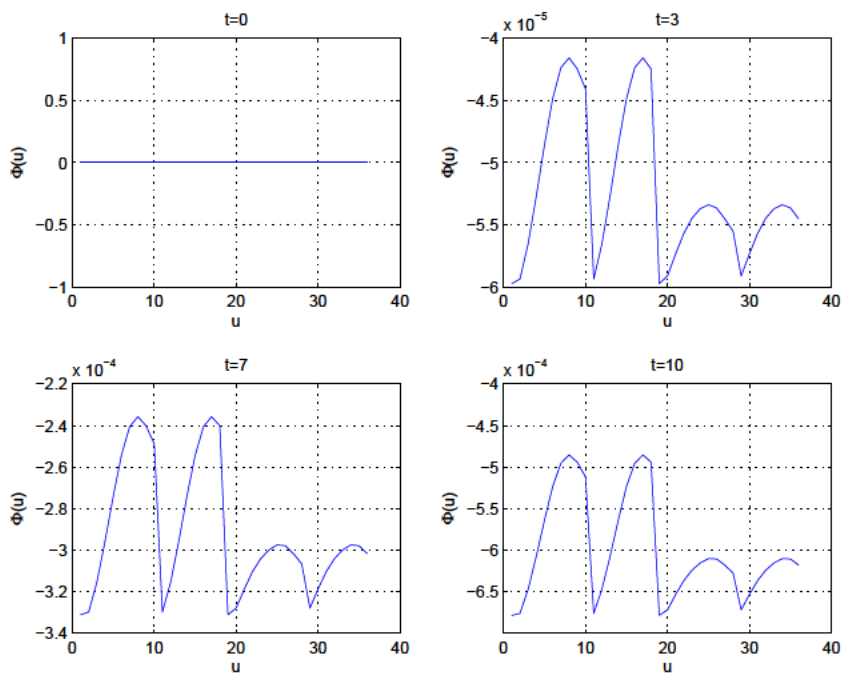


Figura 5.25: Evolución de de la frontera libre u vs $\phi(u)$ en $t = 0, 3, 7$ y 10 segundos

Tiempo de Proceso Computacional - TPC (segundos)

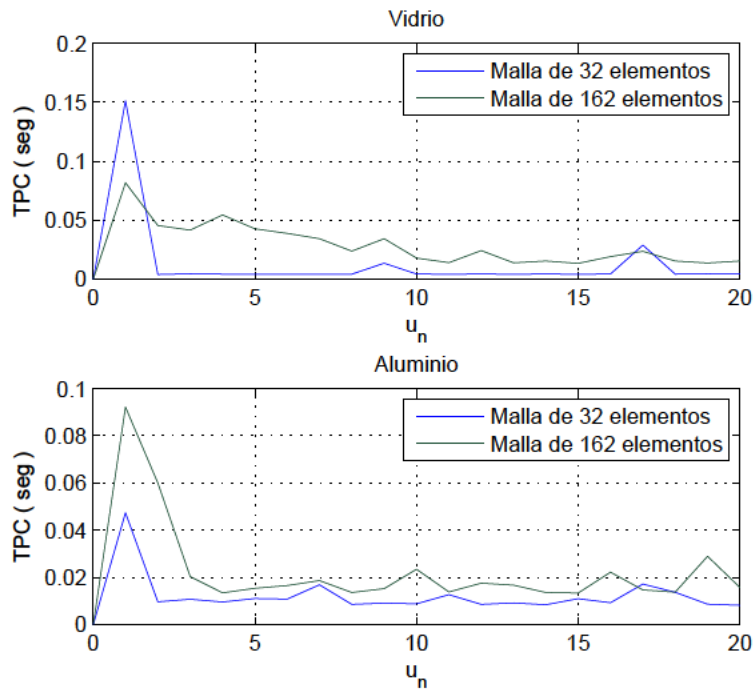


Figura 5.26: u_n vs TPC ($n = 0, 1, 2, \dots, 20$)

Estabilidad en una placa de Vidrio

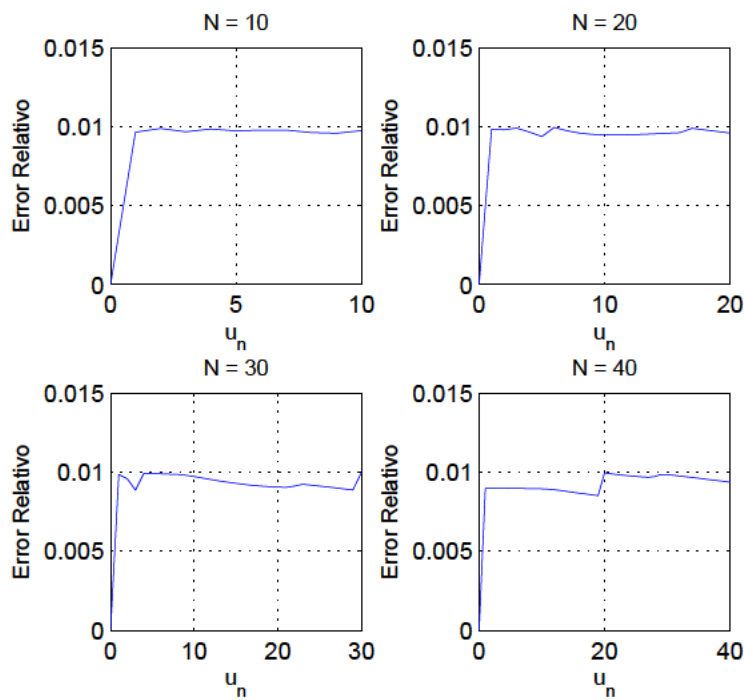


Figura 5.27: Malla N°1 : u_n vs Error Relativo

Estabilidad en una placa de Vidrio

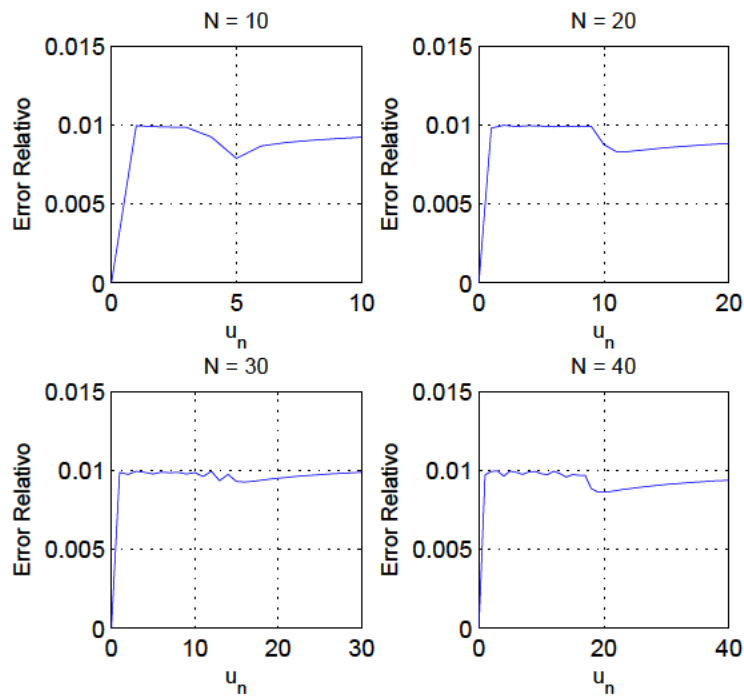


Figura 5.28: Malla N°2 : u_n vs Error Relativo

Estabilidad en una placa de Aluminio

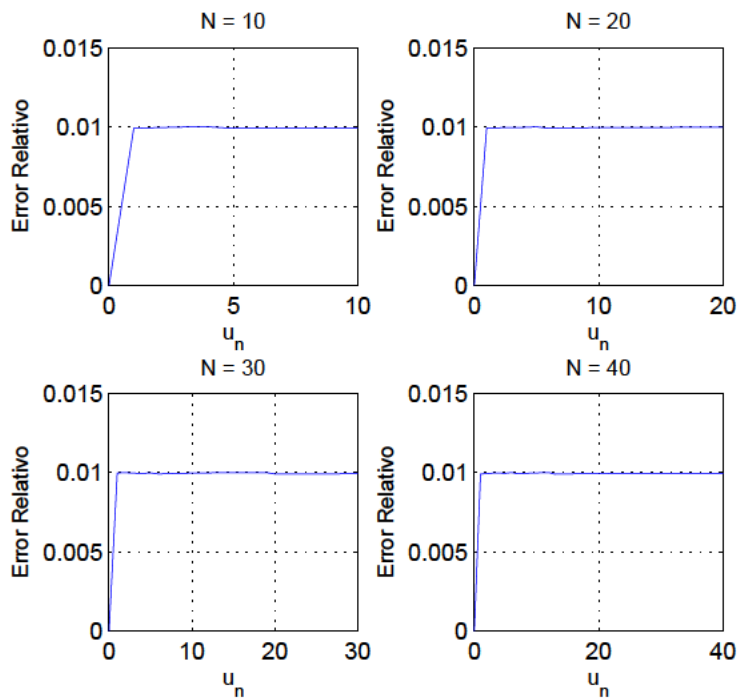


Figura 5.29: Malla N°1 : u_n vs Error Relativo

Estabilidad en una placa de Aluminio

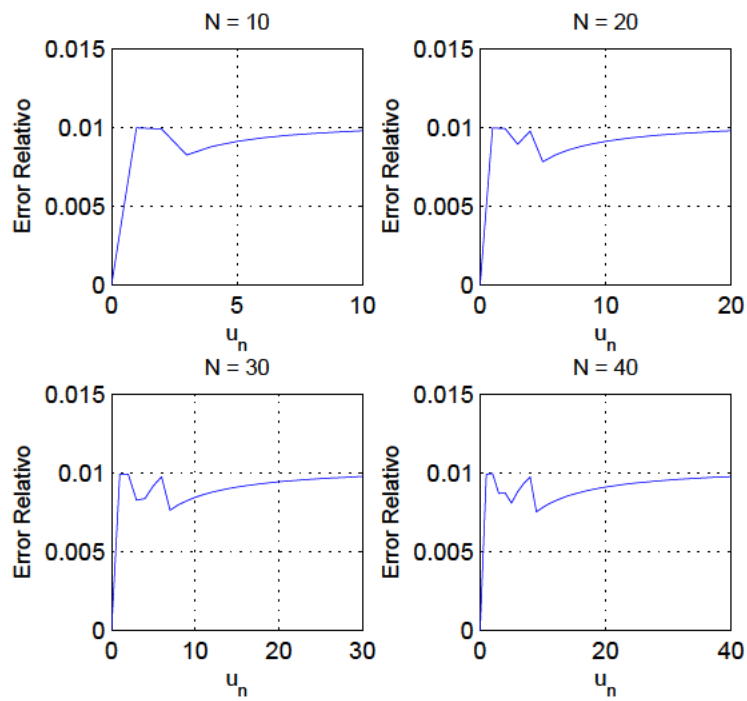


Figura 5.30: Malla N°2 : u_n vs Error Relativo

Capítulo 6

CONCLUSIONES

1. En la literatura matemática actual existen pocos resultados sobre un proceso numérico para una inecuación variacional parabólica y aún no existen resultados numéricos evolutivamente y bidimensionales por lo cual se considera que se ha contribuido con este trabajo de desarrollo numérico de estos problemas.
2. La formulación variacional para las EVP y las IVP es un medio que facilita la búsqueda de solución explícita del problema de transferencia de calor por conducción y del control térmico.
3. En este el caso de las IVP, aplicar el método de Uzawa será factible cuando sea posible encontrar explícitamente el resolvente Yosida. He aquí la mayor dificultad para aproximar la solución débil de la IVP.
4. En el método de Uzawa, la sucesión $\{u_h^i\}$ converge a la solución débil u de la IVP aún cuando la sucesión $\{q^i\}$ pueda no converger. En [5] se dan algunas condiciones para que $\{q^i\}$ sea una sucesión convergente a q , en cuyo caso, el punto (u, q) será un punto silla de \mathcal{L} .
5. En ambos casos, EVP e IVP, se concluye que el Tiempo de Proceso Computacional crece ligeramente conforme aumenta el número de puntos en la malla del dominio Ω .
6. Para las IVP y EVP, en las matrices M , A , C y B se observa que los elementos no nulos se concentran en la diagonal y representan un bajo porcentaje respecto al número total de elementos de las matrices respectivas.

7. Para la implementación numérica de las EVP y las IVP se ha tomado en cuenta para la convergencia a la solución la norma infinito de \mathbb{R}^n .
8. En este trabajo se ha podido observar la importancia de la convergencia del MEF en problemas evolutivos lo cual sería conveniente plantear su estudio más detallado como un futuro trabajo de investigación.
9. En las figuras (5.18), (5.19), (5.20) y (5.21) puede observarse una mejor suavidad en la distribución de la temperatura a través del dominio Ω , así como en el comportamiento de la frontera libre para el Vidrio. De manera análoga puede observarse el mismo comportamiento para el Aluminio en las figuras (5.22), (5.23), (5.24) y (5.25).
10. Para las EVP, en ambos materiales, el error relativo se estabiliza a partir de $n = 10$ pues permanece constante o va decreciendo conforme pasa el tiempo ($n \geq 10$).
11. Para las IVP, en el caso del aluminio, en las figura (5.30) se observa una pequeña inestabilidad cuando el mallado es más grande y el tamaño de paso en el intervalo de tiempo se hace más pequeño.
12. Se contribuye con una metodología basada en técnicas modernas del análisis numérico para la construcción e implementación de algoritmos que sirvan para resolver EVP e IVP de otros campos de la ciencia e ingeniería.
13. Extender estos resultados para profundizar su investigación de las IVP con otras metodologías modernas tales como el MEF con Galerkin Discontinuo y Mallas adaptativas con las cuales se llegarían a nuevos resultados.

Capítulo 7

APÉNDICE

7.1. Generalidades sobre sistemas EDO'S

Sea el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias, dados por:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\y_2' &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\&\vdots \\y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n)\end{aligned}\tag{7.1}$$

para n funciones reales desconocidas $y_i(t)$ de una variable real. El sistema (7.1) puede ser escrito en forma vectorial y de manera más concisa como:

$$y' = f(t, y)\tag{7.2}$$

donde:

$$y' := \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}\tag{7.3}$$

y

$$f(t, y) := \begin{bmatrix} f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{bmatrix}\tag{7.4}$$

su respectiva condición inicial está dada por:

$$y(t_0) = y_0 := \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

que expresándolo de manera matricial:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (7.6)$$

donde y' , f e y_0 están dados por las relaciones (7.3), (7.4) y (7.5), así también consideraremos una norma matricial $\| \cdot \|$ tal que para la matriz identidad I se tiene $\| I \| = 1$.

Existencia y unicidad de solución

Veremos ahora que condiciones debe de cumplir f para que el problema dado por (7.6) tenga solución única.

Teorema 7.1.1 Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ continua sobre la franja:

$$S = \{(t, y) / a \leq t \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}$$

con a y b finitas. Además, sea L una constante tal que:

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \| \quad (7.7)$$

para todo $t \in [a, b]$ y para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $t_0 \in [a, b]$ y para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe exactamente una función $y(t)$ tal que:

1. $y(t)$ es continua y diferenciable para $t \in [a, b]$.
2. $y' = f(t, y(t))$ para $t \in [a, b]$.
3. $y(t_0) = y_0$

Observación 7.1.1

► Cuando una función f cumple la relación (7.7), decimos que f cumple la **condición de Lipschitz** respecto a su segunda variable.

En lo que sigue extenderemos el teorema de existencia y unicidad de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias planteado en espacios de Banach, para esto, sea $y : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow V$ una aplicación en un espacio de Banach V y como antes, consideremos el problema de valor inicial siguiente

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (7.8)$$

donde $y_0 \in V$, la norma del espacio V es denotada por $\| \cdot \|$, además

$$Y = C([t_0 - c, t_0 + c], V) \quad 0 < c < \infty$$

es decir, Y es el espacio de todas las funciones continuas $y : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow V$ y en Y definimos la norma

$$\| y \|_Y = \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \| y(t) \|$$

Para garantizar la existencia y unicidad de solución de (7.8) damos los siguientes resultados que son dados en [26].

Teorema 7.1.2 (Teorema generalizado de Picard - Lindelöf) Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in V$ y definamos el conjunto siguiente

$$Q_b = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times V : |t - t_0| \leq a, \| y - y_0 \| \leq b\}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ fijos de modo que $a, b > 0$. Supongamos que $f : Q_b \rightarrow V$ es continua y

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \quad \text{para todo } (t, x), (t, y) \in Q_b$$

y

$$\| f(t, y) \| < K \quad \text{para todo } (t, y) \in Q_b$$

donde $L \geq 0$ y $K > 0$ son números reales fijos. Elijamos c tal que $0 < c < a$ y $Kc < b$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- a) El problema de valor inicial (7.8) tiene exactamente una solución continuamente diferenciable $y(t)$ en el intervalo $[t_0 - c, t_0 + c]$.
- b) La sucesión z_n generada por

$$\begin{aligned} z_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z_n(s)) ds \\ z_0(t) &= y_0 \end{aligned}$$

converge uniformemente en $[t_0 - c, t_0 + c]$ cuando $n \rightarrow \infty$ a la solución "y".

c) La solución "y" depende continuamente sobre el valor inicial y_0 respecto a la norma en $C([t_0 - c, t_0 + c], V)$.

Corolario 7.1.1 Sea V un espacio de Banach con norma $\| \cdot \|$ y $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times V$ para un número positivo "a" fijo. Sea $f : Q \rightarrow V$ de modo que

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \quad \text{para todo } (t, x), (t, y) \in Q$$

y $L \geq 0$ fijo. Entonces, el problema de valor inicial (7.8) tiene exactamente una solución continuamente diferenciable sobre $[t_0 - a, t_0 + a]$ para cada valor inicial $y_0 \in V$.

7.2. Resolución numérica de un sistema EDO

A continuación mostraremos dos métodos numéricos para la resolución del sistema (7.1) sujeto a la condición inicial (7.5).

7.2.1. Método θ -aproximación - M. Crank-Nicholson

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$MC'(t) + AC(t) = F(t), \quad 0 < t \leq T \quad (7.9)$$

generamos una familia de θ -aproximaciones por interpolación lineal en dos instantes de tiempo del siguiente modo:

$$\theta C'_{n+1} + (1 - \theta)C'_n = \frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t_{n+1}} \quad (7.10)$$

donde el sub-índice n indica el paso y evaluación en el n -ésimo paso de tiempo, es decir:

$$\begin{aligned} C'_{n+1} &= C'(t_{n+1}) & C'_n &= C'(t_n) \\ C_{n+1} &= C(t_{n+1}) & C_n &= C(t_n) \\ \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} \end{aligned}$$

combinando convenientemente (7.9) con (7.10) se tiene:

$$\begin{aligned} \theta M C'_{n+1} + \theta A C_{n+1} &= \theta F_{n+1} \\ (1 - \theta) M C'_n + (1 - \theta) A C_n &= (1 - \theta) F_n \end{aligned}$$

sumando estas dos últimas ecuaciones y teniendo en cuenta (7.10) para despejar C_{n+1} se obtiene:

$$\hat{M} C_{n+1} = \hat{A} C_n + F_{n+1,n} \Delta t_{n+1} \quad (7.11)$$

donde:

$$\begin{aligned}\hat{M} &= M + A\theta \Delta t_{n+1} \\ \hat{A} &= M - A(1 - \theta) \Delta t_{n+1} \\ F_{n+1,n} &= \theta F_{n+1} + (1 - \theta) F_n\end{aligned}$$

de la ecuación (7.11) se observa que se puede calcular la solución en el tiempo t_{n+1} en términos de la solución en el tiempo t_n la cual es conocida para un problema de valor inicial y el vector $F_{n+1,n}$ es conocido en todos los tiempos. Para obtener C_{n+1} es necesario resolver el sistema de ecuaciones lineales dado en (7.11) ya sea por métodos directos o métodos iterativos, dependiendo de las características de la matriz \hat{M} y de los recursos computacionales que se dispongan.

Ahora, dependiendo de la elección de θ se obtendrán diferentes esquemas de aproximación, los valores más usuales y conocidos de θ son:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{Esq. de diferencias hacia adelante de Euler} & \text{Condicionamente estable} \\ \frac{1}{2} & \text{Esq. de Crank-Nicolson} & \text{Incondicionalmente estable} \\ \frac{2}{3} & \text{Esq. de Galerkin} & \text{Incondicionalmente estable} \\ 1 & \text{Esq. de diferencias regresivas} & \text{Condicionamente estable} \end{cases} \quad (7.12)$$

7.3. Integración numérica - Cuadratura Gaussiana

En lo que sigue discutiremos un método de aproximación para calcular una integral definida. Estudiaremos aproximaciones de la forma:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + \cdots + A_nf(x_n) + E[f] \quad (7.13)$$

tales fórmulas se denominan **fórmulas de cuadratura**.

Los x_i ($i = 1, \dots, n$) son llamados **puntos** o **nodos** de la fórmula, los A_i ($i = 1, \dots, n$) son los **coeficientes** o **pesos** de la fórmula y $E[f]$ es el **error cometido** en la aproximación.

La importancia de la función w en la fórmula (7.13) para diferentes fórmulas de cuadratura, motiva la siguiente definición.

Definición 7.3.1 La función no negativa $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **función de peso**.

En lo que sigue asumiremos que $w(x) = 0$ en un número finito de puntos de $[a, b]$. También consideraremos $[a, b]$ como un intervalo finito en (7.13) de la recta real. La función de peso es una función "conocida". En muchos casos la función de peso será la función $w(x) \equiv 1$. Entre otras consideraciones, asumiremos que $w(x)$ y $[a, b]$ son tales que las integrales:

$$\int_a^b w(x)x^m dx \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

existen y son números finitos. También asumiremos que $f(x)$ es tal que su integral existe y está definida para x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Existen varios métodos y criterios para la elección de los puntos x_i y de los coeficientes A_i para $i = 1, 2, \dots, n$. Pero lo apropiado, es elegir los x_i y A_i tal que el error cometido, en algún sentido sea "lo más pequeño posible". Usualmente, se sabe elegir los x_i y A_i , tal que (7.13) sea exacta para una cierta clase de polinomios. Luego:

Definición 7.3.2 Diremos que la fórmula de aproximación :

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + \dots + A_nf(x_n) + E[f]$$

tiene grado "q" si es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que "q" y no es exacta para los polinomios de grado "q + 1".

Segun la definición anterior, hay tres tipos de fórmulas de esta naturaleza, las cuales son:

1. Fórmulas de Newton - Cotes.
2. Fórmulas de Gauss.
3. Fórmulas de Romberg.

Centraremos nuestro estudio a las fórmulas de Gauss, por ser éstas, las que nos proporcionan mayor precisión. Ahora, a partir de (7.13), de manera natural surge la siguiente pregunta: ¿Existen fórmulas exactas para polinomios?, cuya respuesta afirmativa nos lo proporciona el siguiente teorema.

Teorema 7.3.1 Dado cualquier "n" puntos distintos x_1, x_2, \dots, x_n ; podemos encontrar constantes A_1, A_2, \dots, A_n tal que la fórmula:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + \dots + A_nf(x_n) + E[f] \quad (7.14)$$

es exacta, esto es $E[f] = 0$, siempre que $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que "n - 1".

Demostración:

Mostraremos que x_i ($i = 1, \dots, n$), podemos encontrar los coeficientes A_i tal que la fórmula (7.14) es exacta para los monomios:

$$f(x) = x^m \quad m = 0, 1, \dots, n - 1 \tag{7.15}$$

porque las operaciones de integración y sumatoria son lineales y además, la fórmula (7.14) ha de ser exacta para cualquier combinación lineal de los monomios dados en (7.15); esto es:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

como (7.14) tiene que ser exacta para los monomios dados en (7.15), entonces el siguiente sistema de ecuaciones debe ser satisfecho:

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_2 + \dots + A_n &= \int_a^b w(x) dx \\
 A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n &= \int_a^b w(x)x dx \\
 A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \dots + A_nx_n^2 &= \int_a^b w(x)x^2 dx \\
 \dots & \\
 A_1x_1^{n-1} + A_2x_2^{n-1} + \dots + A_nx_n^{n-1} &= \int_a^b w(x)x^{n-1} dx
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Dado que los x_i son conocidos, el sistema (7.16) es un sistema lineal de "n" ecuaciones para "n" variables A_i . Luego, si el determinante:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

es no nulo, la solución del sistema existe y es único. Pero es bien conocido que:

$$D_n = \prod_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)$$

y desde que los x_i son distintos, entonces $D_n \neq 0$ y esto último completa la prueba.

Las fórmulas de Gauss son muy importantes, pues nos brindan la mayor precisión posible que se puede obtener para la integral conociéndose x_1, x_2, \dots, x_n ; y el cual nos da la fórmula de mayor grado que se obtiene con "n" puntos. Asumiremos que $w(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$ y que $w(x) = 0$ solamente en un número finito de puntos de $[a, b]$.

Daremos a continuación algunas definiciones cuyo uso se da en las fórmulas de cuadratura gaussianas, para luego demostrar que las fórmulas de Gauss con "n" puntos distintos elegidos adecuadamente, tiene grado "2n - 1", y que éste es el mayor grado posible que se puede obtener.

Definición 7.3.3 Un polinomio de grado "n", $P_n(x)$, es llamado **ortogonal** sobre el intervalo $[a, b]$ con respecto a la función de peso $w(x)$ si para todos los polinomios de grado menor o igual que "n - 1" se cumple:

$$\int_a^b w(x)P_n(x)Q_{n-1}(x) dx = 0$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que "n - 1".

Observación 7.3.1

► Si tenemos una sucesión de polinomios ortogonales, $P_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) tales que:

$$\int_a^b w(x)P_n(x)P_m(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

diremos que es una sucesión de **polinomios ortonormales**.

Para ciertos intervalos especiales y funciones de peso adecuadas, los polinomios ortogonales, $P_n(x)$, reciben nombres especiales, como lo muestra la siguiente tabla:

Nombres de algunos polinomios ortogonales especiales		
Intervalo	Función de peso	Nombre del polinomio
$[-1, 1]$	1	Polinomio de Legendre
$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$	Polinomio de Chebyshev de primera especie.
$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$	Polinomio de Chebyshev de segunda especie.
$[-1, 1]$	$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ $\alpha > -1, \beta > -1$	Polinomio de Jacobi
$[-\infty, \infty]$	e^{-x^2}	Polinomio de Hermite
$[0, \infty]$	e^{-x}	Polinomio de Laguerre

Propiedades de los polinomios ortogonales

Consideremos ahora la sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ que son ortogonales sobre $a \leq x \leq b$ con respecto a la función de peso no negativa $w(x)$.

Veremos a continuación algunas propiedades de estos polinomios.

Teorema 7.3.2 *Las raíces x_j para todo $j = 1, 2, \dots, n$ de $P_n(x) = 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$ son todos reales y están en el intervalo abierto $a < x_j < b$.*

Demostración:

Asumamos que $P_n(x)$ tiene $r \leq n$ ceros distintos. Entonces podemos escribir $P_n(x)$ de la forma siguiente:

$$P_n(x) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_r)^{m_r}$$

donde los m_i representan la multiplicidad de x_i respectivamente y:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$$

Además podemos asumir que x_1, x_2, \dots, x_k con $k \leq r$ son los ceros reales que están en (a, b) , en los cuales $P_n(x)$ cambia de signo. En otras palabras x_1, x_2, \dots, x_k tienen multiplicidad impar y son los únicos ceros de $P_n(x)$ en (a, b) de multiplicidad impar.

Si $k = n$ entonces todos los ceros de $P_n(x)$ son reales, distintos y contenidos en (a, b) . Mostraremos que $k < n$ nos lleva a una contradicción.

Asumamos que $k < n$ y consideremos el polinomio:

$$Q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)$$

si $k = 0$ definimos $Q_0(x) \equiv 1$. Entonces $Q_k(x)$ cambia de signo en los mismos puntos de $P_n(x)$. Además el producto $P_n(x)Q_k(x)$ no cambia de signo en (a, b) . Luego:

$$\int_a^b P_n(x)Q_k(x)w(x) dx \neq 0 \quad (7.17)$$

pero, desde que $k < n$ y como $P_n(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual que $n - 1$, se sigue que:

$$\int_a^b P_n(x)Q_k(x)w(x) dx = 0$$

lo cual contradice (7.17). Por lo tanto, $k < n$ es imposible y esto completa la prueba.

★

Teorema 7.3.3 *Tres polinomios ortonormales consecutivos están relacionados por:*

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - c_n P_{n-1}(x)$$

si a_k y b_k representan los coeficientes de los términos de grado k y $k - 1$ en $P_k(x)$ entonces:

$$A_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, B_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n} \right), c_n = \frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2} \quad (7.18)$$

Demostración:

Con A dado por (7.18), definimos:

$$Q_n(x) \equiv P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x) \quad (7.19)$$

el cual es un polinomio de grado a lo más "n". De aquí, $Q_n(x)$ puede ser expresado como:

$$Q_n(x) = \alpha_n P_n(x) + \dots + \alpha_0 P_0(x)$$

y de la ortogonalidad de los $P_n(x)$, tenemos que:

$$\alpha_k = \int_a^b Q_n(x)P_k(x)w(x) dx \quad (7.20)$$

y al reemplazar (7.19) en (7.20) obtenemos:

$$\alpha_k = \int_a^b P_{n+1}(x)P_k(x)w(x) dx - A_n \int_a^b xP_n(x)P_k(x)w(x) dx$$

Luego, si $k = 0, 1, \dots, n - 2$, entonces $\alpha_k = 0$ y si $k = n - 1$, tenemos que:

$$\alpha_{n-1} = -A_n \int_a^b xP_n(x)P_{n-1}(x)w(x) dx$$

Luego:

$$xP_{n-1}(x) \equiv \frac{a_{n-1}}{a_n}P_n(x) + q_{n-1}(x)$$

donde $q_{n-1}(x)$ es de grado a lo más $n - 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= -A_n \int_a^b P_n(x) \left[\frac{a_{n-1}}{a_n}P_n(x) + q_{n-1}(x) \right] w(x) dx \\ &= -A_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \int_a^b P_n^2(x)w(x) dx - A_n \int_a^b P_n(x)q_{n-1}(x)w(x) dx \end{aligned}$$

y de la ortonormalidad de los $P_n(x)$ se sigue que:

$$\alpha_{n-1} = -A_n \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

y los coeficientes c_n se obtienen fácilmente al igualar los coeficientes de los términos de grado n dados en (7.18). Por lo tanto, definimos:

$$B_n = \alpha_n \quad \text{y} \quad -c_n = \alpha_{n-1}$$

así la prueba está completa. ★

Por el Teorema 7.3.2 sabemos que los ceros de un polinomio ortogonal definido en $[a, b]$ son todos distintos, simples y reales. Veremos a continuación, que con éstos ceros de $P_n(x)$ podemos encontrar una fórmula de cuadratura de grado $2n - 1$.

Teorema 7.3.4 *Si x_1, x_2, \dots, x_n denotan los ceros de un polinomio ortogonal de grado n , $P_n(x)$ para $[a, b]$ y $w(x)$. Asuma que los coeficientes A_1, A_2, \dots, A_n son encontrados tal que:*

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + E[f] \quad (7.21)$$

es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que $n - 1$. Entonces la fórmula (7.21) es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que $2n - 1$.

Demostración:

Desde que los coeficientes son determinados en (7.21) y ésta es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que $n-1$, debemos solamente mostrar que la fórmula es exacta para todos los polinomios $Q_s(x)$ de grado s tal que $n \leq s \leq 2n-1$.

Entonces, sea $Q_s(x)$ un polinomio cualquiera tal que $n \leq s \leq 2n-1$. Dividimos ahora $Q_s(x)$ entre $P_n(x)$ para obtener:

$$Q_s(x) = V_{s-n}(x)P_n(x) + R_{n-1}(x)$$

Aquí $V_{s-n}(x)$ es el cociente y tiene grado $s-n$ donde $0 \leq s-n \leq n-1$; $R_{n-1}(x)$ es el residuo y tiene grado menor o igual que $n-1$. Además notemos que en los ceros de $P_n(x)$, los polinomios $Q_s(x)$ y $R_{n-1}(x)$ tienen los mismos valores, esto es:

$$Q_s(x_i) = V_{s-n}(x_i)P_n(x_i) + R_{n-1}(x_i) = V_{s-n}(x_i)(0) + R_{n-1}(x_i)$$

de aquí:

$$Q_s(x_i) = R_{n-1}(x_i) \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n \quad (7.22)$$

de la ortogonalidad de $P_n(x)$ se obtiene:

$$\int_a^b w(x)V_{s-n}(x)P_n(x) dx = 0 \quad (7.23)$$

también sabemos que:

$$\int_a^b w(x)R_{n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i R_{n-1}(x_i) \quad (7.24)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)Q_s(x) dx &= \int_a^b w(x)[V_{s-n}(x)P_n(x) + R_{n-1}(x)] dx \\ &= \int_a^b w(x)V_{s-n}(x)P_n(x) dx + \int_a^b w(x)R_{n-1}(x) dx \\ &= \int_a^b w(x)R_{n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i R_{n-1}(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n A_i Q_s(x_i) \end{aligned}$$

y esto completa la prueba. ★

Teorema 7.3.5 *La fórmula (7.21) tiene grado $2n-1$.*

Demostración:

Para probar que la fórmula (7.21) tiene grado $2n - 1$, debemos de mostrar que por lo menos para un polinomio de grado $2n$ la fórmula mencionada no es exacta. Entonces, sea $P_n(x)$ un polinomio ortogonal para $[a, b]$ y $w(x)$, luego consideremos el polinomio:

$$[P_n(x)]^2 = (x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2$$

el cual es un polinomio de grado $2n$, y si la fórmula fuese exacta, entonces tendríamos:

$$\int_a^b w(x)[P_n(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^n A_i [P_n(x_i)]^2 = 0$$

sin embargo, esto último es imposible, pues:

$$\int_a^b w(x)[P_n(x)]^2 dx > 0$$

y ésto completa la prueba. ★

Ahora, consideremos lo siguiente: Dados $[a, b]$ y $w(x)$, nos preguntamos lo siguiente: La fórmula de cuadratura ¿ es única ?

Teorema 7.3.6 *Si la fórmula:*

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i^* f(x_i^*) + E[f] \quad (7.25)$$

es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que $2n - 1$, entonces los puntos en esta fórmula, deben de ser los ceros del polinomio ortogonal $P_n(x)$ para $[a, b]$ y $w(x)$.

Demostración:

Asumamos que la fórmula (7.25) es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que $2n - 1$ y consideremos el polinomio:

$$U_n(x) = (x - x_1^*)(x - x_2^*) \dots (x - x_n^*)$$

si $Q_{n-1}(x)$ es cualquier polinomio de grado menor o igual que $n - 1$, entonces sabemos que la fórmula (7.25) es exacta para $U_n(x)Q_{n-1}(x)$. Además:

$$\int_a^b U_n(x)Q_{n-1}(x)w(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i U_n(x_i^*)Q_{n-1}(x_i^*) = 0 \quad (7.26)$$

porque $U_n(x_i^*) = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Y así, la ecuación (7.26) muestra que $U_n(x)$ es ortogonal para todos los polinomios de grado menor o igual que $n - 1$ y de la unicidad de

los polinomios ortogonales para $[a, b]$ y $w(x)$, nosotros concluimos que $U_n(x) \equiv P_n(x)$.
 Esto completa la prueba. ★

A continuación, mostraremos que los coeficientes A_i ($i = 1, \dots, n$) en la fórmula de Gauss son positivos.

Teorema 7.3.7 *En las fórmulas de Gauss (7.21), todos los coeficientes A_i ($i = 1, \dots, n$) son positivos.*

Demostración:

Sea j un entero tal que $1 \leq j \leq n$. Consideremos ahora el polinomio de grado $2n - 2$ siguiente:

$$[Q_{n-1,j}(x)]^2 = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - x_i^2)$$

y desde que la fórmula de Gauss es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que $n - 1$, entonces:

$$\int_a^b w(x)[Q_{n-1,j}(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^n A_i [Q_{n-1,j}(x_i)]^2 \quad (7.27)$$

pero:

$$[Q_{n-1,j}(x_i)]^2 = \begin{cases} 0 & , \text{ si } i \neq j \\ > 0 & , \text{ si } i = j \end{cases}$$

entonces, de (7.27) se obtiene:

$$\int_a^b w(x)[Q_{n-1,j}(x)]^2 dx = A_j [Q_{n-1,j}(x_j)]^2$$

luego:

$$A_j = \frac{1}{[Q_{n-1,j}(x_j)]^2} \int_a^b w(x)[Q_{n-1,j}(x)]^2 dx > 0 \quad (7.28)$$

y esto completa la prueba. ★

Teorema 7.3.8 (Teorema de aproximación de Weirestrass)

Sea f cualquier función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un entero $n = n(\epsilon)$ y un polinomio $P_n(x)$ de grado a lo más n tal que:

$$| f(x) - P_n(x) | < \epsilon$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demostración:(Ver [10])

Teorema 7.3.9 Consideremos la sucesión de fórmulas de Gauss para un intervalo finito $[a, b]$:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_{i,n}f(x_{i,n}) + E[f] \quad n = 2, 3, \dots \quad (7.29)$$

si $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces esta sucesión de fórmulas converge al verdadero valor de la integral.

Demostración:

Debemos de probar que $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N$ se cumple que:

$$\left| \int_a^b w(x)f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_{i,n}f(x_{i,n}) < \epsilon \right|$$

Para ello definimos:

$$c = \int_a^b w(x) dx = \sum_{i=1}^n A_{i,n}$$

y consideremos: $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2c}$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, para un ϵ_1 dado podemos encontrar un N y un polinomio $Q_n(x)$ de grado N tal que:

$$| f(x) - Q_n(x) | < \epsilon_1 \quad \forall x \in [a, b]$$

si $n > N$ entonces la fórmula de Gauss de n puntos es exacta para $Q_n(x)$. Además, para $n > N$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b w(x)f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_{i,n}f(x_{i,n}) \right| &= \left| \int_a^b w(x)f(x) dx - \int_a^b w(x)Q_N(x) dx + \right. \\ &= \left. \sum_{i=1}^n A_{i,n}Q_N(x_{i,n}) - \sum_{i=1}^n A_{i,n}f(x_{i,n}) \right| \\ &\leq \left| \int_a^b w(x)f(x) dx - \int_a^b w(x)Q_N(x) dx \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^n A_{i,n}Q_N(x_{i,n}) - \sum_{i=1}^n A_{i,n}f(x_{i,n}) \right| \\ &= \left| \int_a^b w(x)[f(x) - Q_N(x)] dx \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b w(x) |f(x) - Q_N(x)| dx + \\
&+ \sum_{i=1}^n A_{i,n} |Q_N(x_{i,n}) - f(x_{i,n})| \\
&\leq \epsilon_1 \int_a^b w(x) dx + \epsilon_1 \sum_{i=1}^n A_{i,n} \\
&\leq \epsilon_1 c + \epsilon_1 c = 2c \left(\frac{\epsilon}{2c}\right) = \epsilon
\end{aligned}$$

y así, el teorema queda demostrado. ★

Ahora, veremos la cuadratura gaussiana para un caso particular de polinomios ortogonales.

Definición 7.3.4 (Polinomios de Legendre) *Los polinomios de Legendre $P_i(x)$, $i \geq 0$, son polinomios de grado i en x , y se definen en forma recurrente como sigue:*

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0, \quad \forall n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

con:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x$$

Antes de proseguir con un ejemplo de la cuadratura gaussiana, es interesante mencionar algunas propiedades de los polinomios de Legendre:

1. Satisfacen la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)L_i''(x) - 2xL_i'(x) + i(i+1)L_i(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad i \geq 0$$

2. La normalización:

$$L_i(1) = 0, \quad i \geq 0$$

3. La relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 L_i(x)L_j(x) dx = \frac{2}{2i+1} \begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. La condición de simetría:

$$L_i(-x) = (-1)^i L_i(x), \quad i \geq 0$$

5. La fórmula de diferenciación:

$$L'_{i+1}(x) = (2i+1)L_i(x) + L'_{i-1}(x), \quad \forall i \geq 1$$

A continuación mostramos los seis primeros polinomios de Legendre:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$L_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

$$L_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{2}$$

$$L_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}$$

Observación 7.3.2

► La propiedad (3) es una propiedad de varias otras funciones importantes, como por ejemplo $\{\cos(nx), \quad n = 0, 1, \dots\}$ cumple que:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ > 0 & \text{si, } n = m \end{cases}$$

es decir, son ortogonales sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

Observación 7.3.3

► Cualquier polinomio de grado n puede escribirse como una suma de los polinomios de Legendre, es decir:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_i(x)$$

Presentamos ahora, algunos valores para la cuadratura gaussiana:

Número de términos	valores de x_i	Factor de Ponderación A_i	Válido hasta el grado
2	-0.57735027	1.0	3
	0.57735027	1.0	
3	-0.77459667	0.55555555	5
	0	0	
	0.77459667	0.55555555	
4	-0.86113631	0.34785485	7
	-0.33998104	0.65214515	
	0.33998104	0.65214515	
	0.86113631	0.34785485	
5	-0.90617975	0.23692689	9
	-0.53846931	0.47862867	
	0	0.56888889	
	0.53846931	0.47862867	
	0.90617975	0.23692689	

Aplicación:

Evalúe:

$$I = \int_{0.2}^{1.5} e^{-x^2} dx$$

aplicando la fórmula gaussiana de 3 términos.

Resolución:

Haciendo el cambio de variable:

$$x = \frac{(1.5 - 0.2)t + 1.5 + 0.2}{2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1.5 - 0.2}{2} \int_{-1}^1 e^{-(0.65t-0.85)^2} dt \\
 &= 0.65 [0.555...e^{-[0.65(-0.774...) + 0.85]^2} + 0.888...e^{-[0.65(0.0) + 0.85]^2} + \\
 &\quad 0.555...e^{-[0.65(-0.774...) + 0.85]^2}] = 0.65860
 \end{aligned}$$

y el valor exacto de la integral es 0.65882.

Daremos a continuación un teorema que nos informa acerca del error que se comete al aproximar la integral por medio de la cuadratura gaussiana.

Teorema 7.3.10 Si $f \in C^{2n}([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\psi)}{(2n)!} \int_a^b w(x)P_n^2(x) dx$$

para algún $\psi \in (a, b)$.

Demostración: (Ver [10])

Cálculo de integrales dobles

Consideramos el caso en que los límites de integración son constantes. En cálculo, se aprendió que una integral doble puede evaluarse como una integral iterada, esto es:

$$\int_A f(x, y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

donde la región rectangular A está acotada por las rectas:

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

Al calcular las integrales iteradas, x se mantiene constante mientras se integra con respecto a y (o viceversa en el segundo caso).

Recordemos que cualquiera de las fórmulas de cuadratura es simplemente una combinación lineal de valores de la función, evaluada en valores diferentes de la variable independiente. En otras palabras, una fórmula de cuadratura es simplemente una suma ponderada de ciertos valores de la función. Así, la integral interior, manteniendo constante la otra variable, queda como sigue:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dx dy = \sum_{i=1}^n A_i \int_{-1}^1 f(x, y)dy$$

luego, se suma una adición ponderada de estas sumas, es decir:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N A_i A_j f(x_i, y_j) \quad (7.30)$$

y la estimación del error se sigue del análisis unidimensional.

Observación 7.3.4

► *No debemos de confiarnos en las fórmulas dadas por (7.30), pues éstas pueden no ser óptimas, en el sentido de usar " muy pocas " evaluaciones funcionales de la función para un orden dado. Por ejemplo, la integración exacta para un polinomio de quinto*

grado requerirá $n = 3$ o un total de 9 puntos. Un polinomio de quinto grado en dos dimensiones tiene 21 términos monomiales, esto es, una fórmula de la forma:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i y_i)$$

sería exacta solamente con 7 puntos. Los 21 coeficientes A_i , x_i y y_i para $(i = 1, \dots, 7)$ serían determinados integrando exactamente todos los términos monomiales.

En general, las reglas de cuadratura son obtenidas por un método de coeficientes indeterminados, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Considere la regla de cuadratura de un punto:

$$\int \int_{\Omega_0} f(x, y) dx dy = A_1 f(x_1, y_1) + E \quad (7.31)$$

donde $\Omega_0 = \{(x, y) / 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$, y desde que hay 3 variables desconocidas A_1 , x_1 y y_1 , esperamos que (7.31) sea exacta para cualquier polinomial lineal, y como la integral es un operador lineal, de aquí, es suficiente que (7.31) sea exacta para los monomios 1, x e y . Es decir:

- Si $f(x, y) = 1$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 1 dy dx = \frac{1}{2} = A_1$$
- Si $f(x, y) = x$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \frac{1}{6} = A_1 x_1$$
- Si $f(x, y) = y$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} y dy dx = \frac{1}{6} = A_1 y_1$$

y la solución de este sistema es:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \\ x_1 &= y_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

luego, la regla de cuadratura de un punto es:

$$\int \int_{\Omega_0} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + E \quad (7.32)$$

y como esperamos, el punto de evaluación óptimo es el centroide del triángulo y una cota superior para el error puede ser obtenido por la expansión de $f(x, y)$ en su serie de Taylor cerca de algún punto conveniente $(x_0, y_0) \in \Omega_0$.

7.4. Implementación Computacional del Software para las EVP

1. Programa Principal: EVP.m

2. Subprogramas

- geomrect.m
- Malla.m
- phi_i.m
- matriz_A.m
- matriz_M.m
- frontera.m
- Gauss_Seidel2.m
- cond_inicial.m
- vector_F.m
- ensamble_F.m

EVP.m

Programa principal que resuelve numéricamente el **problema de transferencia de calor por conducción**.

```
%Programa Principal EVP.m
clear all;
clc;
%Para el vidrio
%alpha2 = 0.80;
%Para el aluminio
alpha2 = 205;
%Elementos Finitos para resolver la ecuación discreta:
%  $MC'(t) + AC(t) = b(t)$ ;
%%% Variables de discretizacion %%%%%%%%%%%
m = 9;% numero de elementos en la direccion x
n = 9;% numero de elementos en la direccion y
```

```

figure(1)
[p,e,t] = malla(m,n);
% Número de elementos de la triangulación:
nel = size(t,2);
%N : Numero de particiones en el tiempo
%T : Tiempo maximo del intervalo de tiempo
%dt: Longitud del subintervalo
%Nmax : Numero maximo de iteraciones para
%      el metodo de Gauss-Seidel
N = 20;
T = 10;
dt = T/N;
Nmax = 300;
%Ensamblaje de las matrices elementales
%del sistema de ecuaciones diferenciales
%       $MC'(t) + AC(t) = F(t)$ 
%Para todo " t " las matrices A y M son las mismas
A = zeros(size(p,2));
M = zeros(size(p,2));
for k=1:nel
    Aij = matriz_A(p,t,k);
    for i=1:3
        for j=1:3
             $A(t(i,k),t(j,k)) = A(t(i,k),t(j,k)) +$ 
                Aij(i,j);
        end
    end;
    Mij = matriz_M(p,t,k);
    for i=1:3
        for j=1:3
             $M(t(i,k),t(j,k)) = M(t(i,k),t(j,k)) +$ 
                Mij(i,j);
        end
    end;
end;

```



```

end
%Matriz ensamblada
A = alpha2*A;
%Matriz ensamblada
M;
%Encontrando la condicion inicial MC(0) = C0
%Ingresar la CONDICION INICIAL en
%la funcion " COND_INICIAL"
%uxy = 0;
C0 = zeros(size(p,2),1); %Vector Columna
%Ensamblaje de la condicion inicial C0
for k=1:nel
    C0_j = Cond_Inicial(p,t,k);
    for j=1:3
        C0(t(j,k)) = C0(t(j,k)) + C0_j(j);
    end
end
end

%Imposición de la condicion de frontera Dirichtlet
[M,C0] = frontera(p,M,C0)
[Co,iter,ER] = Gauss_Seidel2(M,C0,zeros(size(p,2),1),
                                size(p,2));
%iter: numero de iteraciones en que se alcanzo
%    la solucion inicial Co
%Co : Condicion inicial
%Se calcula el vector F(t) para cada tiempo " t " en
%cada elemento del mallado y procedemos luego a ensamblar
tiempito = 0; %Tiempo inicial = 0
w = Co; %vector columna
u = [Co]; % Matriz de Soluciones en cada
        % instante de tiempo t = tiempito
tempo = tiempito;
theta = 1/2; %Método de Crank Nicholson
Ms = M + A*theta*dt;

```

```

As = M - A*(1 - theta)*dt;
medidas = zeros(N+1,5);
%      Indice instante_d_tiempo N°_d_iter  ER  TPC
GS = [ 1      tiempito      0      0  0 ];
for time =1:N
    %Resolucion Numerica del Sistema de
    %Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
    %          MC'(t) + AC(t) = F(t);
    tic; %Contador temporal
    tempo = tiempito + dt;
    F = ensamble_F(p,t,tempo,nel);
    Fnm = theta*F;
    tempo = tiempito;
    F = ensamble_F(p,t,tempo,nel);
    Fnm = Fnm + (1 - theta)*F;
    %Imposición de la condicion de frontera Dirichtlet
    [Ms,C00] = frontera(p,Ms,(As*Co + Fnm*dt))
    [Co,iter,ER] = Gauss_Seidel2(Ms,(As*Co + Fnm*dt),...
                                zeros(size(p,2),1),size(p,2));
    %Fin reloj para cada la solucion en cada tiempo: TPC
    TPC = toc; % Finalización temporal
    if (iter == Nmax)
        fprintf('El metodo de Gauss-Seidel fracaso\n')
        fprintf('en la iteracion %3.1i\n',time)
        fprintf('que calcula en el tiempo %8.3f\n\n',time*dt)
        fprintf('I M P O S I B L E      S E G U I R\n\n')
        break
    end
    tiempito = tiempito + dt;
    GS = [GS;time+1 tiempito iter ER  TPC];
    u = [u Co];
    fprintf('Solucion %3.0i encontrada en el ...
            tiempo t = %5.3f\n\n',time,time*dt);
end %time

```

```

%Imprimiendo medidas solicitadas GS
fprintf('Matriz de Resultados\n\n ')
medidas = GS
fid = fopen('N_10.txt', 'wt');
fprintf(fid, '%3.1i %6.3f %3.1i %12.8f %8.4f\n', medidas');
fclose(fid)

j1 = 1; j2 = 4; j3 = 8; j4 = 11;
figure(2)
subplot(2,2,1)
pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,j1),'zdata',u(:,j1),'mesh','off')
title(['t=',num2str(0)],'fontsize',11)
colormap jet
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
zlabel('u(x,y,t)','fontsize',11)
colorbar('location','EastOutside')
subplot(2,2,2),pdecont(p,t,u(:,j1))
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
subplot(2,2,3)
pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,j2),'zdata',u(:,j2),'mesh','off')
title(['t=',num2str(3)],'fontsize',11)
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
zlabel('u(x,y,t)','fontsize',11)
colorbar('location','EastOutside')
subplot(2,2,4),pdecont(p,t,u(:,j2))
title('Curvas de Nivel en t = 3','fontsize',11)
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
colormap jet
figure(3)
subplot(2,2,1)
pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,j3),'zdata',u(:,j3),'mesh','off')

```

```

title(['t=', num2str(7)], 'fontsize', 11)
xlabel('x', 'fontsize', 11)
ylabel('y', 'fontsize', 11)
zlabel('u(x,y,t)', 'fontsize', 11)
colorbar('location', 'EastOutside')
subplot(2,2,2), pdecont(p,t,u(:,j3))
title('Curvas de Nivel en t = 7', 'fontsize', 11)
xlabel('x', 'fontsize', 11)
ylabel('y', 'fontsize', 11)
colormap jet
subplot(2,2,3)
pdeplot(p,e,t, 'xydata', u(:,j4), 'zdata', u(:,j4), 'mesh', 'off')
title(['t=', num2str(10)], 'fontsize', 11)
xlabel('x', 'fontsize', 11)
ylabel('y', 'fontsize', 11)
zlabel('u(x,y,t)', 'fontsize', 11)
colorbar('location', 'EastOutside')
subplot(2,2,4)
pdecont(p,t,u(:,j4))
title('Curvas de Nivel en t = 10', 'fontsize', 11)
xlabel('x', 'fontsize', 11)
ylabel('y', 'fontsize', 11)
colormap jet
%Representacion de los elementos no nulos de la matriz M y A.
figure(4)
subplot(1,2,1)
spy(M)
subplot(1,2,2)
spy(A)

```

geomrect.m

Programa que permite definir la geometría $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ del problema.

```

function [bs,t]=geomrect(accion,x,y,hx,hy,segm,p1,p2),
bs = 0;

```

```

h=0.1;
if nargin<1,
accion='crear';
end;
if strcmp(accion,'crear'),
if nargin==0,
x=0; y=0; hx=1; hy=1;
end;
S = [ x x+hx x+hx x      x
      y y      y+hy y+hy y];
n_seg = size(S,2)-1;
t = n_seg;
bs=ones([5,n_seg]);
% 4 lados es decir 4 columnas o 4 segmentos
bs(1:2,:) = [0  hx      hx+hy  2*hx+hy;
             hx hx+hy 2*hx+hy 2*(hx+hy)];
% introducimos la parametrizacion para cada segmento
bs(4,:) = zeros([1,n_seg]);
% fila 1 : valor del parámetro inicial.
% fila 2 : valor del parámetro final.
% fila 3 : etiqueta de la region a mano izquierda
           (con respecto a la dirección dada por la fila 1 y 2).
% fila 4 : etiqueta de la region a mano derecha.
% fila 5 : tipo de frontera
%           0==interior, 1==dirichlet, -1==newmann
return;
else
S = [ x x+hx x+hx x      x
      y y      y+hy y+hy y];
n_seg = size(S,2)-1;
t = n_seg;
if strcmp(accion,'dibujar'),
i=1;
X=geomrect('segmento',x,y,hx,hy,i);

```

```

for i=2:n_seg,
X=[X(:,1:size(X,2)-1),geomrect('segmento',x,y,hx,hy,i)];
end;
if nargin==5, segm='-' ; end;
    plot(X(1,:),X(2,:),segm);
bs=X;
return;
elseif strcmp(accion,'segmento'),
% se consideran tambien los extremos;
if segm<=n_seg,
bs = lineprmt(S(:,segm),S(:,segm+1),segm-1,segm,h);
else
fprintf(['Error: ;;;el rectangulo solo
        tiene ',num2str(n_seg), ' segmentos!!!']);
return;
end;
return;
elseif strcmp(accion,'localizar')
    % hay que tener cuidado con las fronteras!!!!
% usamos una parametrizacion del rectangulo (x1,y1,x2,y2):
% la frontera dirichlet es cerrada,
% por tanto la frontera newmman sera "abierta".
% (x,y)=(x1+t*(x2-x1),y2), 0<=t<1 _____3_____
% (x,y)=(x2,y2+(t-1)*(y1-y2)), 1<=t<2 |           | \
% (x,y)=(x2+(t-2)*(x2-x1),y1), 2<=t<3 4_____2 |
% (x,y)=(x1,y1+(t-4)*(y2-y1)), 3<=t<4 ->1
    % localizamos en que segmento está y a que
    % parametro corresponde.
sf=segm;
    k=size(p1,2);
bs=zeros(1,k);
t=zeros(1,k);
for i=1:k,
if (abs(p2(i)-y)/hy<=0.05)&(p1(i)>=x)&(p1(i)<=x+hx)

```

```

    %suponemos dirichlet
bs(i) = 1; t(i) = (p1(i)-x)/hx;
if ((p1(i)==x)|(p1(i)==x+hx))&(sf(1,bs(i))==-1)
    %si es newmann
if (p1(i)==x)&(sf(1,4)==1), bs(i) = 4; end;
if (p1(i)==x+hx)&(sf(1,2)==1), bs(i) = 2; end;
end;
elseif (abs(p1(i)-hx-x)/hx<=0.05)&(p2(i)>=y)&(p2(i)<=y+hy),
    bs(i) = 2; t(i) = 1 + (p2(i)-y)/hy;
if ((p2(i)==y)|(p2(i)==y+hy))&(sf(1,bs(i))==-1)
    %si es newmann
if (p2(i)==y)&(sf(1,1)==1), bs(i) = 1; end;
if (p2(i)==y+hy)&(sf(1,3)==1), bs(i) = 3; end;
end;
elseif (abs(p2(i)-y-hy)<=0.05)&(p1(i)>=x)&(p1(i)<=x+hx),
bs(i) = 3; t(i) = 2 + (x+hx-p1(i))/hx;
if ((p1(i)==x)|(p1(i)==x+hx))&(sf(1,bs(i))==-1)
    %si es newmann
if (p1(i)==x)&(sf(1,4)==1), bs(i) = 4; end;
if (p1(i)==x+hx)&(sf(1,2)==1), bs(i) = 2; end;
end;
elseif (abs(p1(i)-x)/hx<=0.05)&(p2(i)>=y)&(p2(i)<=y+hy),
bs(i) = 4; t(i) = 3+(y+hy-p2(i))/hy;
if ((p2(i)==y)|(p2(i)==y+hy))&(sf(1,bs(i))==-1)
    %si es newmann
if (p2(i)==y)&(sf(1,1)==1), bs(i) = 1; end;
if (p2(i)==y+hy)&(sf(1,3)==1), bs(i) = 3; end;
end;
end;
end;
return;
end;
end;

```

mallam

Este programa realiza el mallado de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

```
function [p,e,t]=malla(m,n)
% inicializa la malla
% parametros de entrada
%%% Variables geometricas %%%
x1 = 0; % origen del rectangulo (x1,y1)
y1 = 0;
a = 1; % ancho en el eje x
b = 1; % alto en el eje y
%%% Variables de discretizacion %%%
m = 2; % numero de elementos en la direccion x
n = 3; % numero de elementos en la direccion y
sf = geomrect;
% calcula el numero de triangulos y vertices
nel = m*n*2;
nnod = (n+1)*(m+1);
% calcula el incremento paso de la triangulacion segun ox,y oy
deltax=a/m;
deltay=b/n;
t=zeros(3,nel);
p=zeros(3,nnod);
% calcula la numeracion de los vertices de los triangulos
for j=1:m,
    for i=1:n,
        t(1,i+2*(j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1);
        t(2,i+2*(j-1)*n)=(n+1)+(j-1)*(n+1)+i+1;
        t(3,i+2*(j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1)+1;

        t(1,i+(2*j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1);
        t(2,i+(2*j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1)+(n+1);
        t(3,i+(2*j-1)*n)=(n+1)+(j-1)*(n+1)+(i+1);
    end
end
```



```

        end
% calcula coordenadas de los vertices
for j=1:m+1,
    for i=1:n+1,
p(1:2,i+(j-1)*(n+1))=[x1+(j-1)*deltax;y1+(i-1)*deltay];
    end
end
% se construye el vector e
e = zeros(7,2*(m+n));
for i=1:n,
e(1,i) = n-i+2;
e(2,i) = n-i+1;
e(3,i) = (i-1)*deltay;
e(4,i) = i*deltay;
e(5,i) = 4;
e(6,i) = 1;
e(7,i) = 0;
end;
% lado inferior
for j=1:m,
e(1,n+j) = (j-1)*(n+1)+1 ;
e(2,n+j) = j*(n+1)+1 ;
e(3,n+j) = b+(j-1)*deltax;
e(4,n+j) = b+j*deltax;
e(5,n+j) = 1;
e(6,n+j) = 1;
e(7,n+j) = 0;
end;
% lado derecho
for i=1:n
    %Aquí construye el punto inicial y el punto final
e(1,n+m+i) = m*(n+1)+i;
e(2,n+m+i) = m*(n+1)+i+1;
e(3,n+m+i) = a+b+(i-1)*deltay;

```

```

e(4,n+m+i) = a+b+i*deltay;
e(5,n+m+i) = 2;
e(6,n+m+i) = 1;
e(7,n+m+i) = 0;
end;
% lado superior
for j=1:m
e(1,2*n+m+j) = (n+1)*(m-j+2) ;
e(2,2*n+m+j) = (n+1)*(m-j+1) ;
e(3,2*n+m+j) = 2*b+a+(j-1)*deltax;
e(4,2*n+m+j) = 2*b+a +j*deltax;
e(5,2*n+m+j) = 3;
e(6,2*n+m+j) = 1;
e(7,2*n+m+j) = 0;
end;
for i=1:nnod,
    if ( p(1,i) == x1), p(3,i) = sf(5,4);
    elseif ( p(1,i) == x1+a), p(3,i) = sf(5,2);
    elseif ( p(2,i) == y1), p(3,i) = sf(5,1);
    elseif ( p(2,i) == y1+b), p(3,i) = sf(5,3);end,
end;
%grafica la malla
plot(p(1,t),p(2,t));
axis equal

```

Phi i.m

Esta función evalúa las funciones base ϕ_i ($i = 1, 2, 3$)

```

function Phi = Phi_i(i,e,n)
switch i
    case 1
        Phi = 1 - e - n;
    case 2
        Phi = e;
    case 3

```

```
Phi = n;
```

```
end
```

matriz_A.m

Obtiene la matriz A del sistema de ecuaciones diferenciales a resolver:

$$MC'(t) + AC(t) = F(t)$$

```
function A = matriz_A(p,t,k)
%p: Matriz con las coordenadas de los puntos del mallado.
%t: Indices(por columnas) de los puntos de P que forman
% un triangulo del mallado en sentido antihorario.
%k: indica el numero del elemento triangular(columna k de t)
x1 = p(1,t(1,k));    y1 = p(2,t(1,k));
x2 = p(1,t(2,k));    y2 = p(2,t(2,k));
x3 = p(1,t(3,k));    y3 = p(2,t(3,k));
Area_k = abs((x1*y2 + x2*y3 + x3*y1) -
              (x2*y1 + x3*y2 + x1*y3))/2;
%d(phi)/(e n)
dphi = [-1 -1 ;
        1  0 ;
        0  1];
ex = (y3 - y1)/(2*Area_k);    ey = - (x3 - x1)/(2*Area_k);
nx = -(y2 - y1)/(2*Area_k);    ny = (x2 - x1)/(2*Area_k);
J = abs(ny*ex - ey*nx);
A = zeros(3,3);
for i=1:3
    for j=1:3
        A(i,j) = (dphi(i,1)*ex + dphi(i,2)*nx)*(dphi(j,1)*ex +
            dphi(j,2)*nx) + (dphi(i,1)*ey + dphi(i,2)*ny)*
            (dphi(j,1)*ey + dphi(j,2)*ny);
        A(i,j) = J*A(i,j)/2;
    end
end
end
```

matriz_M.m

Obtiene la matriz M del sistema de ecuaciones diferenciales a resolver:

$$MC'(t) + AC(t) = F(t)$$

```
function M = matriz_M(p,t,k)
% Calculo de la matriz elemental Mij para un elemento
% k del mallado.
% t: Matriz de indices(por columna) de los puntos que
% forman un triangulo
% p: Coordenadas de los puntos que forman un triangulo
% dados en una columna
%   de t
x1 = p(1,t(1,k));    y1 = p(2,t(1,k));
x2 = p(1,t(2,k));    y2 = p(2,t(2,k));
x3 = p(1,t(3,k));    y3 = p(2,t(3,k));
Area_k = abs((x1*y2 + x2*y3 + x3*y1) -
              (x2*y1 + x3*y2 + x1*y3))/2;
ex = (y3 - y1)/(2*Area_k);    ey = - (x3 - x1)/(2*Area_k);
nx = -(y2 - y1)/(2*Area_k);  ny = (x2 - x1)/(2*Area_k);
J = abs(ny*ex - ey*nx);
M = zeros(3,3);
for i=1:3
    for j =1:3
        if (i==j)
            u = 0;
            v = 2;
            t = 0;
        else
            u = 1;
            v = 0;
            t = 1;
        end
        M(i,j) = J*factorial(u)*factorial(v)*
                factorial(t)/factorial(u +v+ t +2);
    end
end
```

end

frontera.m

Imposición de las condiciones de frontera

```
function [A,x] = frontera(p,M,C)

n = size(p,2);
I = eye(n,n);
for i=1:n
    if (p(3,i)==1.0)
        M(i,:) = I(i,:);
        C(i) = 0; %Condicion de frontera para todo t
    end
end

A = M;
x = C;
```

Gauss_Seidel2.m

Programa que resuelve un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ empleando el método iterativo de Gauss - Seidel.

```
function [x,iter,ER] = Gauss_Seidel2(A,b,x0,n);
%x0: vector columna
%x : Respuesta del sistema lineal Ax = b;
%iter: Numero de iteraciones en que se alcanzo la solucion
%tol = 1e-4; %Tolerancia permitida para el vidrio
tol = 1e-2; %Tolerancia permitida para el aluminio
Nmax = 300; %Numero maximo de iteraciones
k = 0;
x = zeros(n,1); % Vector Columna
x1 = ones(n,1); % Vector Columna
ER = norm(x1-x0,'inf')/norm(x1,'inf');
while (k<Nmax) & (ER>tol)
    k = k + 1;
    x1 = x0;
```

```

for i=1:n
    s1 = 0;
    for j=1:(i-1)
        s1 = s1 + A(i,j)*x(j);
    end
    s2 = 0;
    for j=(i+1):n
        s2 = s2 + A(i,j)*x1(j);
    end
    x(i) = (b(i) - s1 - s2)/A(i,i);
end
ER = norm(x-x1,'inf')/norm(x,'inf');
x0 = x;
end
x = x0;
iter = k;

```

Cond_Inicial.m

Este subprograma calcula la condición inicial a partir de

$$MC(0) = u_0$$

empleando el método de Gauss Seidel.

```

function C0 = Cond_Inicial(P,T,K)
%P: Matriz con las coordenadas de los puntos del mallado.
%T: Indices(por columnas) de los puntos de P que forman
%   un triangulo del mallado en sentido antihorario.
%K: indica el numero del elemento triangular(columna k de t)
x1 = P(1,T(1,K));
y1 = P(2,T(1,K));
x2 = P(1,T(2,K));
y2 = P(2,T(2,K));
x3 = P(1,T(3,K));
y3 = P(2,T(3,K));
Area_k = abs((x1*y2 + x2*y3 + x3*y1) - (x2*y1 + x3*y2 + x1*y3))/2;

```

```

ex = (y3 - y1)/(2*Area_k);      ey = - (x3 - x1)/(2*Area_k);
nx = -(y2 - y1)/(2*Area_k);    ny = (x2 - x1)/(2*Area_k);
J = abs(ny*ex - ey*nx);
e = sym('e');
n = sym('n');
x = sym('x');
y = sym('y');
%AQUI SE INGRESA LA CONDICION INICIAL : u(x,y,t=0);
uxy = 0*x + 0*y ;
%Transformacion de coordenadas
x = (1 - e - n)*x1 + e*x2 + n*x3;
y = (1 - e - n)*y1 + e*y2 + n*y3;
%La condicion inicial queda una funcion de "e" y " n "
u_en = eval(uxy);
Phi(1) = 1 - e - n;
Phi(2) = e;
Phi(3) = n;
F = zeros(3,1);
for i=1:3
    gent = Phi(i)*u_en;
    gen = int(gent,n,0,1-e);
    ge = int(gen,e,0,1);

    C0(i) = double(J*ge);
end

```

vector F.m

Obtiene el vector F del sistema de ecuaciones diferenciales a resolver:

$$MC'(t) + AC(t) = F(t)$$

para un elemento dado.

```

function F = vector_F(P,T,K,time)
%f: Termino fuente f(x,y,t)
%P: Matriz con las coordenadas de los puntos del mallado.

```

```

%T: Indices(por columnas) de los puntos de P que forman un
% triangulo del mallado en sentido antihorario.
%K: indica el numero del elemento triangular(columna k de t)
x1 = P(1,T(1,K));
y1 = P(2,T(1,K));
x2 = P(1,T(2,K));
y2 = P(2,T(2,K));
x3 = P(1,T(3,K));
y3 = P(2,T(3,K));
Area_k = abs((x1*y2 + x2*y3 + x3*y1) - ...
              (x2*y1 + x3*y2 + x1*y3))/2;
ex = (y3 - y1)/(2*Area_k);      ey = - (x3 - x1)/(2*Area_k);
nx = -(y2 - y1)/(2*Area_k);    ny = (x2 - x1)/(2*Area_k);
J = abs(ny*ex - ey*nx);
t = time;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Valores para la integracion numerica por regla de
% cuadratura de 3 puntos
w = [1/3 1/3 1/3];
L = [1/2 1/2;
     1/2 0;
     0 1/2];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
F = zeros(3,1);
for i=1:3
    I = 0;
    for j = 1:3
        e = L(j,1);
        n = L(j,2);
        Phi = Phi_i(i,e,n); %Evalua las funciones base
        %Transformacion de coordenadas
        x = (1 - e - n)*x1 + e*x2 + n*x3;
        y = (1 - e - n)*y1 + e*y2 + n*y3;
        %AQUI SE INGRESA EL TERMINO FUENTE

```



```

%f1 = 2*t*x^2*(x - 1)^2*y^2*(y - 1)^2 -
% - ((12*x^2 - 12*x + 2)*y^2*(y - 1)^2 +
%           + (12*y^2 - 12*y + 2)*x^2*(x - 1)^2)*t^2;
f1 = 2*t*x^2*(x - 1)^2*y^2*(y - 1)^2 - ...
      ((12*x^2 - 12*x + 2)*y^2*(y - 1)^2 + ...
      (12*y^2 - 12*y + 2)*x^2*(x - 1)^2)*t^2;
I = I + f1*Phi;
end
F(i) = I/2;
end

```

ensamble_F.m

Esta función ensambla el vector F del sistema de ecuaciones diferenciales a resolver:

$$MC'(t) + AC(t) = F(t)$$

para todo el mallado.

```

function F = ensamble_F(p,t,T,nel)
F = zeros(size(p,2),1);
for k=1:nel
    %Ingresar el TERMINO FUENTE en la funcion " vector_F"
    %f(x,y,t) = x + y + t;
    Fj = vector_F(p,t,k,T);
    for j=1:3
        F(t(j,k)) = F(t(j,k)) + Fj(j);
    end
end
end
%Vector ensamblado
F;

```

7.5. Implementación Computacional del Software para las IVP

1. Programa Principal: IVP.m

2. Subprogramas

- geomrect.m
- Malla.m
- L2P1.m
- KP1S.m
- u0.m
- f.m
- Gauss_Seidel2.m
- Jrho.m

IVP.m

Programa Principal que resuelve numéricamente el problema de Control Térmico.

```
%Programa Principal IVP.m
clear all;
clc;
%%% Variables geometricas %%%%%%%%%%
% origen del rectangulo (x1,y1)
global x1;    global y1;
%Ancho y Largo del rectangulo
global a;    % ancho en el eje x
global b;    % alto en el eje y
%%% Variables de discretizacion %%%%%%%%%%
global mm;% numero de elementos en la direccion x
global nn;% numero de elementos en la direccion y
global nel;    global nnod;    global sf;
global rho;    global k;    global N;
%%% Variables del problema continuo %%%%%%%%%%
global h1;    global h2;
global g1;    global g2;
global k1;    global k2;
global T;
% Inicializacion de las variables del problema continuo
```

```

h1=-1;      h2=1;
g1=-2;      g2=2;
k1=1;      k2=1;
f_fuente= 'feval(''f'',[x;y],tt)' ;
T=10;
%Para el vidrio
%alpha2 = 0.80;
%Para el aluminio
alpha2 = 205;
% Inicializacion de la geometria
a = 1;
b = 1;
x1 = 0;
y1 = 0;
Nmax = 300;
% Inicializacion de la discretizacion
N=20;
k=T/N;
rho = 10;
mm = 9; % numero de elementos en la direccion x
nn = 9; % numero de elementos en la direccion y
sf = geomrect;
sf(5,:) = [-1 -1 -1 -1]; % todas son frontera newmann
[p,e,t] = malla(x1,y1,a,b,mm,nn,sf);
nnod = size(p,2);
nel = size(t,2);
fprintf(['\n h=',num2str(a/mm),'\n']);
for i=1:nnod,
if ( p(1,i) == x1),    p(3,i) = sf(5,4);
    elseif ( p(1,i) == x1+a), p(3,i) = sf(5,2);
elseif ( p(2,i) == y1),    p(3,i) = sf(5,1);
    elseif ( p(2,i) == y1+b), p(3,i) = sf(5,3);
end,
end;

```

```

%construimos un indice para la frontera newmann
m=2*(mm+nn); % dimension de Wh
fr=zeros([m ,1]);
for j=1:mm+1,
% lado inferior del rectangulo
fr(mm+2-j) = (nn+1)*(mm-j+2) ;
% lado superior del rectangulo
fr(nn +2 + 2*mm - j) = (j-1)*(nn+1)+1 ;
end;
for i=2:nn,
% lado derecho del rectangulo
fr(mm+ i) =mm*(nn+1)+i;
% lado izquierdo del rectangulo
fr(m+2-i)= i;
end;
C = L2P1(p,t);
B = C/k+ alpha2*KP1S(p,t);
u = zeros(nnod,N+1);
u(:,1) = u0(p);
q_j = ones(m,N+1);
%z_j_1 = ones(nnod,1);
z_j = ones(nnod,1);
tt=0;
% Indice instante_d_tiempo N°_d_iter ER TPC
GS = [ 1 0 0 0 0 ];
for i=1:N
tic;
f_i_1=f([p(1,:);p(2,:);(tt+k)*ones(1,nnod)]) ;
q_j(:,i+1)=q_j(:,i);
%% resolvermos un problema eliptico
%q_j = ones(m,1);
% integramos q_n calculamos el vector Gq_n
Gq=zeros(size(p,2),1);
for bs=1:size(e,2);

```

```

% buscamos sobre todos los segmentos de frontera
if sf(size(sf,1),e(5,bs))== -1 % si el segmento es newmann
ll = [ p(2,e(2,bs))-p(2,e(1,bs)) , p(1,e(1,bs)) - p(1,e(2,bs))];
ds = norm(ll);
for jj=[e(1,bs),e(2,bs)] %fprintf(['\nj=',num2str(j),'\n'])
if p(3,jj)==1
Gq(jj) = 0;
else
aux=0;
for ii=[e(1,bs),e(2,bs)]
aux = aux + q_j(find(fr==ii),i)*ds/(6-3*(ii==jj));
end;
Gq(jj) = Gq(jj)+aux;
end;
end;
end;
end;
% Inicio del Metodo de Uzawa
[z_j,iter,ER] = Gauss_Seidel2(B,(C*(u(:,i)/k + f_i_1))...
- Gq,zeros(size(p,2),1),size(p,2));
q_j(:,i+1) = Jrho((q_j(:,i+1) + rho *z_j (fr))');
% Fin del Metodo de Uzawa
TPC = toc;
if (iter == Nmax)
fprintf('El metodo de Gauss-Seidel fracaso\n')
fprintf('en la iteracion %3.1i\n',i)
fprintf('que calcula en el tiempo %8.3f\n\n',i*k)
fprintf('I M P O S I B L E      S E G U I R\n\n')
break
end
tt=tt+k;
GS = [GS;i+1 tt iter ER TPC];
u(:,i+1)=z_j;
fprintf(['Iteración terminada en ',num2str(iter),'...

```

```

        iter. con rho=',num2str(rho),' con un error de ',...
                num2str(ER),' t=', num2str(tt+k),'\n']),
end;
%Imprimiendo medidas solicitadas GS
fprintf('Matriz de Resultados\n\n ')
medidas = GS
figure(1)
subplot(2,2,1)
pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,1),'zdata',u(:,1),'mesh','off')
title(['t=',num2str(0.0)])
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
zlabel('u(x,y,t)','fontsize',11)
colorbar
subplot(2,2,2)
pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,7),'zdata',u(:,7),'mesh','off')
title(['t=',num2str(3)]),
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
zlabel('u(x,y,t)','fontsize',11)
colorbar
subplot(2,2,3)
pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,15),'zdata',u(:,15),'mesh','off')
title(['t=',num2str(7)]),
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
zlabel('u(x,y,t)','fontsize',11)
colorbar
subplot(2,2,4)
pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,21),'zdata',u(:,21),'mesh','off')
title(['t=',num2str(10)]),
xlabel('x','fontsize',11)
ylabel('y','fontsize',11)
zlabel('u(x,y,t)','fontsize',11)

```

```

colorbar
colormap('jet')
figure(2)
subplot(2,2,1),plot(u(fr,1)),title(['t=',num2str(0.0)]),
xlabel('u')
ylabel('\Phi(u)')
grid on
subplot(2,2,2),plot(u(fr,7)),title(['t=',num2str(3)]),
xlabel('u')
ylabel('\Phi(u)')
grid on
subplot(2,2,3),plot(u(fr,15)),title(['t=',num2str(7)]),
xlabel('u')
ylabel('\Phi(u)')
grid on
subplot(2,2,4),plot(u(fr,21)),title(['t=',num2str(10)]),
xlabel('u')
ylabel('\Phi(u)')
grid on

```

L2P1.m

```

function K=L2P1(p,t),
% Uso : K=L2P1(p,t),
% calcula la matriz asociada a  $[K]_{ij} = (u,v)_{L2}$ 
K = zeros(size(p,2));
% Calculo de la matriz K
mael = zeros([3,3]);
for k=1:size(t,2),
    a11=p(1,t(1,k)); a21=p(1,t(2,k));
    a31=p(1,t(3,k)); a12=p(2,t(1,k));
    a22=p(2,t(2,k)); a32=p(2,t(3,k));
    r=a21-a11;%x2-x1|
    s=a31-a11;%x3-x1
    q=a22-a12;%y2-y1

```

```

v=a32-a12;%y3-y1
div = abs(q*s-r*v);
mael(1,1)= div/12.0;
mael(1,2)= div/24.0;
mael(1,3)= div/24.0;
mael(2,2)= div/12.0;
mael(2,3)= div/24.0;
mael(3,3)= div/12.0;
mael(2,1)= mael(1,2);
mael(3,1)= mael(1,3);
mael(3,2)= mael(2,3);
for i=1:3,
for j=1:3,
K(t(i,k),t(j,k)) = K(t(i,k),t(j,k)) + mael(i,j);
end%for
end;%for
end;%for

```

KP1S.m

```

function K=KP1S(p,t),
%function [K,KS]=KP1S(p,t),
% Uso : function K=KP1S(p,t),
%  cálcula la matriz asociada a [K]ij = ( 1,grad u.grav v )
K = zeros(size(p,2));
% Calculo de la matriz K
% matriz elemental asociada a la parte
% simétrica ( 1,grad u.grav v )
mell = zeros(3);
for k=1:size(t,2),
    a11=p(1,t(1,k)); a21=p(1,t(2,k));
a31=p(1,t(3,k)); a12=p(2,t(1,k));
a22=p(2,t(2,k)); a32=p(2,t(3,k));
r=a21-a11;
s=a31-a11;

```



```

q=a22-a12;
v=a32-a12;
div = abs(q*s-r*v);
x = (a11+a21+a31)/3;
y = (a12+a22+a32)/3;
mel1(1,1)= ((q-v)^2+(s-r)^2)/(2*div);
mel1(1,2)= (v*(q-v)+s*(r-s))/(2*div);
mel1(1,3)= (q*(v-q)+r*(s-r))/(2*div);
mel1(2,2)= (v^2+s^2)/(2*div) ;
mel1(2,3)= (-q*v-s*r)/(2*div);
mel1(3,3)= (q^2+r^2)/(2*div) ;
mel1(2,1)= mel1(1,2);
mel1(3,1)= mel1(1,3);
mel1(3,2)= mel1(2,3);
for i=1:3,
for j=1:3,
K(t(i,k),t(j,k)) = K(t(i,k),t(j,k)) + mel1(i,j);
end%for
end;%for
end;%for

```

u0.m

Se calcula la condición inicial.

```

function z=u0(x)
global a b
n=size(x,2);
z=zeros([n,1]);
for i=1:n,
    z(i)=0;
end;
return;
end

```

f.m

Calcula el término fuente.

```

function z=f(x)
global a b
n=size(x,2);
z=zeros([n,1]);
for i=1:n,
    xx=x(1,i);    yy=x(2,i);    tt =x(3,i);
    txx = (xx-1)^2*xx^2;
    tyy = (yy-1)^2*yy^2;
    uxx = (12*xx^2-12*xx+2)*tyy*tt^2;
    uyy = (12*yy^2-12*yy+2)*txx*tt^2;
    ut = 2*tt*txx*tyy;
    z(i)=ut - (uxx+uyy);
end
return;
end

```

Jrho.m

Se implementa el método de Uzawa.

```

function z=Jrho(x)
global g1
global g2
global h1
global h2
global k1
global k2
global rho
n=size(x,2);
z=zeros(n,1);
for i=1:n
    xx= x(1,i);
    if ( xx <= g1 + rho* ( h1 + g1/k1 ) )
        z(i) = g1;
    elseif ( xx < rho * h1)
        z(i) = ( xx - rho*h1)/(1+ rho/k1 );
    end
end

```

```
elseif ( xx <= rho * h2)
z(i)=0;
elseif ( xx < g2 + rho* ( h2 + g2/k2 ))
    z(i) = ( xx - rho*h2)/(1+ rho/k2 );
else
z(i) = g2;
    end;
end;
return
end
```

Bibliografía

- [1] HOFFMAN, KENNETH; KNNZE RAY - Álgebra Lineal
Editorial Prentice/Hall Internacional, 2° Edición 1973
- [2] BRÉZIS, HAIM - Análisis Funcional - Teoría y Aplicaciones
Alianza Editorial, París 1984
- [3] BRÉZIS, HAIM - Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels
en dualité
Annales del'institut Fourier, tome 18, N°1 - 1968, pag. 115 - 175
- [4] BURDEN, RICHARD; DOUGLAS, FAIRES - Análisis Numérico
Youngstown State University
Ediciones Thomson - Learning Séptima Edición, 2002
- [5] CIARLET, PHILIPPE G. - Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimiza-
tion
Cambridge University Press, 1989
- [6] EKELAND, IVAR - TÉMAN, ROGER - Convex Analysis and Variational Problems
Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM Phyladelphia, 1976
- [7] J.L. LIONS - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non
linéaires
Dunod - Gauthier - Villars, París 1969
- [8] G. DUVAUT - J.L. LIONS - Inequalities in Mechanics and Phisics
Springer - Verlag, 1976
- [9] GATICA N., GABRIEL - Algunos Aspectos Básicos del Método de Elementos
Finitos
Universidad de Concepción - Chile, 2002

- [10] ISSACSON, EUGENE - Analysis of Numerical Methods
John Wiley and Sons, Inc., New York[London] Sydney, 1966
- [11] LAWRENCE C. EVANS - Partial Differential Equations
American Mathematical Society
Providence, Rhode Island, 1997
- [12] GLOWINSKI, ROLAND - LOUIS LIONS, JACQUES - RAYMOND TRÉMOLIÈRES
- Numerical Analysis of Variational Inequalities
North - Holland Publishing Company, 1981
Amsterdam - New York - Oxford
- [13] GLOWINSKI, ROLAND - Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems
North - Holland Publishing Company, 1980
Amsterdam - New York - Oxford
- [14] QUARTERONI, ALFIO - Numerical Approximation of Partial Differential Equations
Springer Verlag, 1994
- [15] QUARTERONI, ALFIO - Numerical Models for Differential Problems - Volume 2
Springer Verlag, Cuarta Edición - 2008
- [16] RAINER, KRESS - Numerical Analysis
Editorial Board, 1998
- [17] REDDY, J.N. - An Introduction to the Finite Element Method
Mc. Graw - Hill Book Company, 1984
- [18] STOER, J. BULIRSCH, R. - Introduction to Numerical Analysis
Third Edition - Springer, 2002
- [19] TIJONOV A., SAMARSKY A. - Ecuaciones de la Física Matemática
Editorial MIR, Primera Edición. Moscú 1972
- [20] S. KESAVAN - Topics in Functional Analysis and Applications
School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research
Bangalore, India. John Wiley & Sons, 1988
- [21] MATHEW RUDD AND KLAUS SCHMITT - Variational Inequalities of Elliptic and
Parabolic Type
Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 6 N°3, pp. 287 - 322, Setiembre 2002

- [22] MATHEW RUDD - Weak and Strong Solvability of Parabolic Variational Inequalities in Banach Spaces
Journal of Evolution Equations, Birkhäuser Verlag, Basel 2004
- [23] MANTILLA NÚÑEZ, IRLA - ROCA GALINDO, LUIS - Estudio Numérico de la solución para el problema del Dique
TECNIA, Vol. 13 N°1, Julio 2003, ISBN 98 - 3622
- [24] MANTILLA NÚÑEZ, IRLA - ROCA GALINDO, LUIS - Inecuaciones Variacionales y Quasivariacionales con aplicación a un problema de filtración a través de un Dique mallado con elementos finitos
TECNIA, Vol. 15 N°2, Diciembre 2005, ISBN 0375 - 7765
- [25] EBERHAD, ZEIDLER - Nonlinear Functional Analysis and its Applications
II/A : Linear Monotone Operators
Springer Verlag, 1990
- [26] EBERHAD, ZEIDLER - Nonlinear Functional Analysis and its Applications
I : Fixed Point Theorems
Springer Verlag, 1990
- [27] RAFAEL IÓRIO JÚNIOR - VALÉRIA DE MAGALHÃES IÓRIO - Ecuaciones Diferenciales Parciales: Uma Introdução
Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988
- [28] FRANCIS W., SEARS - MARK W., SEMANSKY - Física Universitaria
Addison - Wesley Longman, 1996