Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Transformaciones Temporales Aleatorias para Martingalas Locales Continuas

Por

José Javier Cerda Hernández

Tesis para optar el título profesional de

Licenciado en Matemática

Dr. Roger Javier Metzger Alván

Asesor

Octubre de 2008

A mis padres *Agustín y Catalina*.
Con eterno agradecimiento, es a
ellos a quien me debo.
A *Diana*, por su gran paciencia y
por su apoyo constante y confianza
de que lograré todos mis objetivos.

Agradecimientos

- Mi profundo y sincero agradecimiento a los profesores Dr. Johel Beltrán Ramírez y Dr. Roger Javier Metzger Alvan, por sus valiosos aportes con la orientación y corrección durante el desarrollo de la tesis. Es por quienes confirmo mi inclinación a la teoría de la probabilidad, debido a la didáctica y el amplio conocimiento de la misma que poseen.

- Al profesor Mg. William Carlos Echegaray Castillo por el apoyo incondicional que da a sus alumnos y por motivarlos a seguir haciendo matemática en la Universidad Nacional de Ingeniería.

- Agradezco a la Universidad Nacional de Ingeniería, alma mater, por la formación profesional que me ha brindado, de la que me siento muy orgulloso por su trascendencia y prestigio y de la que formo parte.

Resumen

El presente trabajo tiene como principal objetivo caracterizar al movimiento Browniano a través de su variación cuadrática, caracterización más importante del movimiento Browniano. Esta caracterización fue dada por primera vez por P. Lévy en 1948. Adicionalmente, con ayuda de la caracterización de Lévy para el movimiento Browniano y herramientas adicionales desarrolladas a lo largo del trabajo, se probará que para cualquier martingala local continua $\mathscr{M}$ se puede encontrar un cambio de tiempo aleatorio de tal manera que al componer la martingala con el tiempo aleatorio, este proceso se convierte en un movimiento Browniano. Finalmente probaremos una versión original del Teorema de Lévy para una martingala local continua con un tiempo de parada.

Índice general

Introducción

Los procesos estocásticos tienen en la actualidad una gran variedad de aplicaciones dentro y fuera de las ciencias matemáticas. Áreas aplicadas como finanzas, física, biología, ingeniería entre otros, utilizan, cada ves más, los procesos estocásticos para estudiar sus fenómenos. Uno de los procesos estocásticos más utilizados es el movimiento Browniano, por tal motivo es necesario estudiar sus propiedades.

La presente tesis tiene como principal objetivo estudiar la caracterización martingala que dio Paul Lévy en 1948 para movimiento Browniano, y con ayuda de esta caracterización dar una representación de las martingalas locales continuas vistas como un cambio de tiempo aleatorio de un movimiento Browniano. Finalmente probaremos una versión original del Teorema de Lévy para una martingala local continua con un tiempo de parada.

Para llegar a los resultados finales, primero desarrollaremos en las diversas secciones del primer capítulo, conceptos como: procesos estocástico, filtración de un espacio de probabilidad, tiempo de parada, el proceso martingala, la variación cuadrática de una martingala cuadrado integrable, la variación cruzada para martingalas cuadrado integrables, martingala local y finalmente, en este capítulo, definiremos el movimiento Browniano de una manera matemática y estudiaremos alguna de sus propiedades: Como la de ser martingala y tener como variación cuadrática a una función creciente que genera la medida de lebesgue en la recta. Todas estas propiedades nos sirven para exponer de forma clara y precisa, en la última sección, las caracterizaciones que se pretenden demostrar para el movimiento Browniano y para martingalas locales continuas.

En el segundo capítulo, comenzaremos contruyendo la integral estocástica para procesos simples respecto a una martingala cuadrado integrable M, y al igual que la integral de Lebesgue, construiremos la integral de un proceso X respecto a una martingala M, por aproximaciones de integrales de procesos simples, dando las condiciones suficientes para que dicha aproximación sea única. La elección del proceso a integrar no es tan arbitraria. Se eligen procesos que estén en $\mathscr{L}_2$ para martingalas. Estudiaremos algunas propiedades de la integral estocástica respecto a una martingala y extenderemos la definición de integral estocástica para proceso que están en $\mathscr{L}_2^{loc}$ cambiando martingalas por martingalas locales. Finalmente daremos el Teorema del cambio de variable o fórmula de Itô, para semi martingalas, herramienta indispensable para demostrar el Teorema de Lévy.

En el tercer capítulo demostraremos los tres teorema enunciados en la última sección del capitulo uno, usando todas las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores.

En el apéndice A se enuncia todos los resultados de teoría de la probabilidad usadas en la presente el presente trabajo, mientras que en el apéndice B el objetivo es más puntual, pues probaremos el Teorema de muestreo opcional, resultado que fue colocado como apéndice para no entorpecer ni tornar extensa la lectura, pues para llegar al Teorema de Lévy, resultado principal de la tesis, no es indispensable conocer la prueba del Teorema de muestreo opcional. Otro tema importante que se discute en el apéndice B es, bajo que condiciones existe la variación cuadrática para una submartingala local.

Capítulo 1

Caracterización de Lévy para el movimiento Browniano

En el siguiente capítulo se desarrollará las principales definiciones y propiedades para poder dar un enunciado claro y presiso de la caracterización de Lévy para el movimiento Browniano. Con ayuda de este resultado caracterizamos una martingala local continua de la siguiente manera: Buscamos una familia de tiempo de parada $\{\tau\}_t$, que puede verse como un cambio de tiempo, de tal manera al componer la martingala local con cada tiempo de parada τ_t, este se convierte en un movimiento Browniano. Para lograr dicho objetivo supondremos que se conocen algunos resultados de teoría de la probabilidad cuyos enunciados pueden ser encontrados en el apéndice A de este trabajo y las demostraciones en libros como [1], [2], [3].

1.1. Proceso Estocástico

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias indexadas por una variable (continua o discreta), que representa al tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.
La aleatoriedad es capturada por la introducción de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, llamado espacio de prueba. De este modo, un **Proceso Estocástico** puede ser representado matemáticamente como una colección de variables aleatorias $X = \{X_t \ : \ 0 \leq t < \infty\}$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, que toma valores en un segundo espacio medible $(S, \mathscr{L})$, llamado espacio de estados. Para el presente trabajo nuestro espacio de estados será un espacio Euclideano d-dimensional, equipado con el σ-álgebra de Borel, esto es, $S = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{L} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, donde $\mathscr{B}(U)$ denota al σ-álgebra más pequeño que contiene a todos los abiertos del espacio topológico U.
El índice $t \in [0, \infty)$ de la variable aleatoria X_t admite una interpretación de tiempo.

Fijado un punto $w \in \Omega$, la función $t \longmapsto X_t(w);\ t \geq 0$ es denominada la **trayectoria** de prueba del proceso X asociado a w.
Un proceso estocástico X puede verse como una función de dos variables que va del conjunto $[0,\infty) \times \Omega$ al conjunto $\mathbb{R}^d$, entonces el proceso debe tener, por lo menos, alguna condición de medibilidad, por tal motivo damos la siguiente definición:

Definición 1 *Un proceso X se dice que es medible si para cada $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, el conjunto $\{(t,w) : X_t(w) \in A\}$ pertenece al σ-algebra producto $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$, es decir, la aplicación $(t,w) \to X_t(w) : ([0,\infty) \times \Omega, \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ es medible.*

Definición 2 *Decimos que un proceso estocástico X es continuo si todas sus trayectorias son continuas.*

En lo que sigue de este trabajo consideraremos, siempre, el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Continuando con los procesos estocásticos, ahora debemos dar una definición que diferencie un proceso de otro, para esto podríamos definir igualdad de procesos de la siguiente manera: Dado dos procesos X, Y, decimos que son iguales si $X_t(w) = Y_t(w), \quad \forall\ t \in [0,\infty) \quad \forall\ w \in \Omega$, pero esta definición exige demasiado, ya que todas las trayectorias, según esta definición, deben ser iguales. La definición anterior se puede mejorar, en el sentido de hacerla más débil, usando la probabilidad del espacio, entonces es natural introducir una definición de igualdad donde se desprecian los conjuntos de medida nula.
Consiredemos X, Y dos procesos estocásticos definidos sobre un mismo espacio de probabilidad y que tiene el mismo espacio de estados.

Definición 3 *Decimos que Y es la modificación de X si, y sólo si, para todo $t \geq 0$, tenemos $P[X_t = Y_t] = 1$.*

Definición 4 *Decimos que X e Y son indistinguibles si, y sólo si $P[X_t = Y_t;\ \forall\ 0 \leq t < \infty] = 1$.*

Si dos procesos son indistinguible se ve fácilmente que uno es la modificación del otro, pero el recíproco no es verdad porque pueden existir procesos X, Y donde uno es modificación del otro pero sus trayectorias son muy diferentes como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:
Consiredemos T una variable aleatoria positiva con distribución continua, esto es, existe una función f tal que la función de distribución de T, es de la forma

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Definamos para todo $t \geq 0$, $X_t \equiv 0$ y $Y_t = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq T \\ 1 & , \quad t = T \end{cases}$. De ambas definiciones vemos que Y es una modificación de X, pues para cada $t \geq 0$ se tiene $P[X_t = Y_t] = P[T \neq t] = P[T^{-1}(\mathbb{R} - \{t\})] = F_T(\mathbb{R} - \{t\}) = 1$. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} P[X_t = Y_t, \ \ \forall\, t \geq 0] &= P[\bigcap_{t\geq 0}\{X_t = Y_t\}] = P[\bigcap_{t\geq 0}\{t \neq T\}] = P[\bigcap_{t\geq 0}\{T^{-1}(\mathbb{R} - \{t\})\}] \\ &= P[T^{-1}(\bigcap_{t\geq 0}\{\mathbb{R} - \{t\}\})] = P[T^{-1}((-\infty, 0))] = P[\phi] = 0. \end{aligned}$$

La siguiente proposición, da hipótesis suficientes para que ambas definiciones sean equivalentes.

Proposición 1 *Si Y es la modificación de X, y supongamos que ambos procesos tienen trayectorias continuas por la derecha en casi todas partes. Entonces X e Y son indistinguibles.*

Prueba: Sabemos que $\{X_t = Y_t; \ \forall\ 0 \leq t < \infty\} = \bigcap_{t\geq 0}\{X_t = Y_t\}$, probaremos que el conjunto del lado derecho tiene probabilidad 1.
Veamos: $\{X_t = Y_t; \ \forall\, t \in \mathbb{Q}^+\} = \bigcap_{t\in\mathbb{Q}^+}\{X_t = Y_t\}$, como $\{X_t = Y_t\}$ tiene probabilidad 1, para todo $t \in \mathbb{Q}^+$, entonces $P[\bigcap_{t\in\mathbb{Q}^+}\{X_t = Y_t\}] = 1$ (esto se sigue del siguiente resultado de teoria de la probabilidad: Sea $\{A_n\}$ tal que $P(A_n) = 1$, entonces $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$). De lo anterior se tiene $P[X_t = Y_t; \ \forall\, t \in \mathbb{Q}^+] = 1$. Ahora para extenderlo a todo $t \in [0, \infty)$ usaremos la continuidad por la redecha.
Denotemos por $D = [X_t \ \wedge \ Y_t$ son continuas por la derecha$]$
Por la continuidad por la derecha se tiene

$$[X_t = Y_t; \ \forall\, t \geq 0] \cap D = [X_t = Y_t; \ \forall\, t \in \mathbb{Q}^+] \cap D.$$

En efecto:
Sea $w \in [X_t = Y_t; \ \forall\ t \in \mathbb{Q}^+] \cap D$ entonces $X_t(w) = Y_t(w) \ \forall\ t \in \mathbb{Q}^+$. Sea $s \in [0, \infty) - \mathbb{Q}$ entonces existe $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}^+$ tal que $q_n \downarrow s$, luego se tendrá $X_{q_n}(w) = Y_{q_n}(w)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como las trayectorias son continuas a la derecha $X_s(w) = Y_s(w)$.
De lo anterior concluimos que el conjunto $[X_t = Y_t; \ \forall\, t \geq 0] \cap D$ tiene probabilidad 1.
Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} P[X_t = Y_t; \ \forall\, t \geq 0] &= P[(\{X_t = Y_t; \ \forall\, t \geq 0\} \cap D) \uplus (\{X_t = Y_t; \ \forall\, t \geq 0\} \cap D^c)] \\ &= P[\{X_t = Y_t; \ \forall\, t \geq 0\} \cap D] + P[\{X_t = Y_t; \ \forall\, t \geq 0\} \cap D^c] \\ &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad \square \end{aligned}$$

Nota: Que dos procesos sean indistinguibles, significa que todas sus trayectorias son iguales, salvo un conjunto de medida nula.
De las definiciones anteriores, evidentemente probar indistinguibilidad para procesos X, Y, es un poco más complicado que probar modificación, pero la Proposición 1 nos dice que si a los procesos X, Y le agregamos continuidad por la derecha, entonces para probar que X e Y son indistinguibles es suficiente probar que uno es modificación del otro. Este resultado nos induce a pensar que es muy conveniente tomar procesos continuos por la derecha para tener una mejor definición de igualdad de procesos, en el sentido de indistinguibilidad.

1.2. Filtración

Dado que un proceso estocástico es un modelo de un fenómeno aleatorio, la variable temporal nos induce pensar que en cada momento $t \geq 0$ podemos hablar de pasado, presente y futuro. Esto nos conduce a introducir en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un objeto que se interpreta como la información del proceso, acumulada hasta el tiempo t.

Definición 5 *Una familia $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ no decreciente de sub σ-algebras de $\mathscr{F}$ es llamada filtro o filtración de $\mathscr{F}$. A un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con un filtro se de denomina espacio filtrado.*

El que la familia sea no decreciente (i.e si $s < t \Rightarrow \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$) viene del hecho natural que la información en el tiempo t es mayor que la información acumulada en el tiempo s.
Ahora definimos

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{t \geq 0} \mathscr{F}_t\Big)$$

que puede ser interpretado como toda la información del proceso estocástico.

Sea $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ una filtración de $\mathscr{F}$. Definimos $\mathscr{F}_{t^-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s)$ y $\mathscr{F}_{t^+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathscr{F}_{t+\epsilon}$, con estas definiciones decimos que la filtración es continua a la derecha (resp. continua a la izquierda) si, y sólo si $\mathscr{F}_{t^+} = \mathscr{F}_t$ ($\mathscr{F}_{t^-} = \mathscr{F}_t$), para todo $t \geq 0$.

Definición 6 *Decimos que un filtro $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ cumple las condiciones usuales si es continua por la derecha y $\mathscr{F}_0$ contiene todos lo conjuntos de medida cero de $\mathscr{F}$.*

Ahora relacionamos el filtro de un espacio de probabilidad con un proceso estocástico X.

Definición 7 *Un proceso estocástico X es adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ si, y sólo si X_t es $\mathscr{F}_t$-medible, para todo $t \geq 0$.*

Una pregunta natural que el lector se puede hacer es, ¿Dado un proceso X, podemos generar, siempre, un filtro $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ con condiciones usuales para el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, de tal manera que X sea adaptado ? Afortunadamente la respuesta si, y la manera de asociar un filtro al proceso X es consiredar

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t), \qquad \forall \ t \geq 0.$$

que evidentemente es un filtro, denominado filtro inducido por X. Este filtro puede describirse como el σ-álgebra más pequeño respecto del cual X_s es medible, para todo $s \in [0,t]$. Este filtro aun no contiene los conjuntos de medida nula de $\mathscr{F}$. Para hacer esto consideremos

$$\mathscr{F}_t^{X_0} = \sigma(\mathscr{F}_t^X \cup N)$$

donde $N = \{F \in \mathscr{F} :\ \text{existe}\ G \in \mathscr{F}\ \text{con}\ F \subseteq G\ \ \text{y}\ \ P(G) = 0\}$
Finalmente, para hacerlo continuo por la derecha definimos

$$\widetilde{\mathscr{F}}_t^X = \mathscr{F}_{t^+}^{X_0} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\epsilon}^{X_0}.$$

Como X_t es $\mathscr{F}_t^{X_0}$-medible, también será $\mathscr{F}_{t+\epsilon}^{X_0}$-medible, para todo $\epsilon > 0$, por lo tanto $\widetilde{\mathscr{F}}_t^X$-medible.

Para ilustrar algunos conjuntos, veamos que ocurre con el evento A donde X es continua sobre $[0, t_0)$. Para esto, observemos que las discontinuidades pueden ser agrupadas en el conjunto

$$D = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right)$$

donde

$$D_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{s,r \in [0,t_0) \\ |s-r| < (1/m)}} \left\{ |X_s - X_r| > \frac{1}{n} \right\}$$

Los conjuntos D_n no son uniones numerables de conjuntos medibles, entonces puede darse el caso que el conjunto de puntos de discontinuidad no sea medible. Para ver si evitamos este inconveniente agregamos continuidad por la derecha en c.t.p. al proceso X, luego los D_n se convierten en

$$D_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{q_1,q_2 \in [0,t_0) \cap \mathbb{Q} \\ |q_1 - q_2| < (1/m)}} \left\{ |X_{q_1} - X_{q_2}| > \frac{1}{n} \right\} \cup N,$$

donde N representa al conjunto de puntos donde X no es continua por la derecha. Este conjunto sí está en $\mathscr{F}$ y tiene medida nula, es decir, $P[A] = 0$. Si sólo consideramos el filtro $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$, puede que los D_n no estén en $\mathscr{F}_{t_0}$, pues no se sabe si N está en $\mathscr{F}_{t_0}$, entonces puede que el conjunto de discontinuidades no pertenesca a $\mathscr{F}_{t_0}$. Un ejemplo sobre esta situación puede ser encontrarse en [6, pág 38-39]. Finalmente si el proceso X es continuo por la derecha, entonces $D \in \mathscr{F}_{t_0}$, por lo tanto $A = D^c \in \mathscr{F}_{t_0}$.

Usando un tratamiento muy similar podemos concluir, también, que el evento $[w : |X_s(w)| < \alpha \quad \forall\ s \in [0, t_0]] \in \mathscr{F}_{t_0}$, siempre que agregemos continidad por la derecha al proceso X. Para más detalle de lo expuesto arriba el lector puede revisar [6, pág 4-3].
La exposición anterior nuevamente nos muestra lo conveniente que es tomar procesos continuos por la derecha.
La definición de filtro parece no ser de mucha utilidad en un primer momento, pues a partir de un proceso dado se puede generar un filtro para el espacio de probabilidad, o incluso se puede tomar como filtro el trivial $\{\mathscr{F}_t = \mathscr{F} : t \geq 0\}$, pero como veremos en la siguiente sección el filtro es de mucha importancia en la definición de tiempo de parada y un tipo de proceso muy común: La martingala, pues ambas definiciones dependen del filtro que se utilize.

1.3. Tiempo de parada

De ahora en adelante interpretaremos al parámetro t como el tiempo , y al σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ (filtro) como la información acumulada hasta en tiempo t.
Ahora supongamos que estamos interesados en saber si cierto fenómeno, por ejemplo, que ocurra un sismo de cierta magnitud, ocurra en un tiempo dado $\tau(w)$. Para analizar esta situación ponemos nuestra atención en el instante $\tau(w)$ en que ocurre dicho fenómeno por primera vez. El evento $\{w : \tau(w) \leq t\}$ ocurre sí, y sólo si, dicho fenómeno ocurre antes del instante t, entonces para saber esto, el evento anterior tiene que ser parte de la información acumulada al instante t, y como la información acumulada esta siendo almacenada en el objeto matemático denominado filtro, definido anteriormente, se debe tener $\{w : \tau(w) \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.
Formulamos esta idea de la siguiente manera.

Definición 8 Un tiempo aleatorio *τ, es una función $\mathscr{F}$-medible, con valores en $[0, \infty]$, esto es $\tau : \Omega \to [0, \infty]$*

Definición 9 *Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un espacio medible con filtración $\{\mathscr{F}_t\}$. Un tiempo aleatorio τ es un* **tiempo de parada** *de la filtración, si el evento $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, para todo $t \geq 0$.*

Un tiempo aleatorio τ es un **tiempo opcional** *de la filtración si, $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$, para todo $t \geq 0$.*

Nota: La definición de tiempo de parada depende del filtro que se elija. Si cambiamos de filtro puede que el tiempo aleatorio τ anterior ya no sea tiempo de parada. Por ejemplo si tomamos $\mathscr{F}_t = \mathscr{F} \ \forall \ t \geq 0$, entonces obtenemos el caso extremo que todo tiempo aleatorio τ es tiempo de parada.

Dado un proceso estocástico $X = (X_t)$ y un tiempo de parada τ definimos la variable aleatoria

$$X_\tau(w) = X_{\tau(w)}(w)$$

Definición 10 *Sea τ un tiempo de parada de la filtración $\{\mathscr{F}_t\}$. El σ-álgebra $\mathscr{F}_\tau$ generado por el tiempo de parada τ es*

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F} : \forall \ t \in [0, \infty), \ A \cap [\tau \leq t] \in \mathscr{F}_t\}$$

Definición 11 *Sea τ un tiempo opcional de la filtración $\{\mathscr{F}_t\}$. El σ-álgebra $\mathscr{F}_{\tau^+}$ generado por el tiempo opcional τ es*

$$\mathscr{F}_{\tau^+} = \{A \in \mathscr{F} : \forall \ t \in [0, \infty), \ A \cap [\tau \leq t] \in \mathscr{F}_{t^+}\}$$

Proposición 2 *Si un tiempo aleatorio τ es una constante positiva entonces es un tiempo de parada. Todo tiempo de parada es opcional, y un tiempo opcional es tiempo de parada si el filtro es continuo por la derecha. Además, si $\tau(w) = t$, para todo $w \in \Omega$, entonces $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$*

Prueba:

i) Sea $\tau \equiv c > 0$, entonces se tiene el conjunto $\{w : \tau(w) \leq t\} = \{w : c \leq t\}$. Tenemos dos casos:

   a) Si $t \geq c$, entonces $\{w : \tau(w) \leq t\} = \Omega$

   b) Si $t < c$, entonces $\{w : \tau(w) \leq t\} = \phi$

   Entonces $\{w : \tau(w) \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, para todo $t \geq 0$

ii) $\{\tau < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau \leq t - \frac{1}{n}\}$, como $\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathscr{F}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathscr{F}_t$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$, entonces $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t \quad \forall \ t \in [0, \infty)$

iii) Si τ es opcional y $\{\mathscr{F}_t\}$ es continua por la derecha, se tiene

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \{\tau < t + \epsilon\} \in \mathscr{F}_{t^+} = \mathscr{F}_t$$

□

Nota: De la proposición anterior observamos que la definición de tiempo opcional y tiempo de parada son equivalentes si el filtro $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ es continuo por la derecha.

Corolario 1 *Sea τ un tiempo aleatorio, entonces τ es tiempo opcional de la filtración $\mathscr{F}_t$ si, y sólo si, τ es tiempo de parada de la filtración $\mathscr{F}_{t^+}$*

Observación: De la proposición y el corolario anterior se tiene que si τ es un tiempo de parada, entonces $\mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau^+}$.

La siguiente proposición da un ejemplo de tiempo de parada muy común en procesos estocásticos.

Proposición 3 *Sea $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ un filtro con las condiciones usuales, $X = (X_t)$ un proceso continuo por la derecha $\mathscr{F}_t$-adaptado y E un conjunto abierto. Entonces, el primer instante σ_E en llegar al conjunto E, definido por*

$$\sigma_E(w) = \inf\{t > 0 : X_t(w) \in E\}$$

es un tiempo de parada.

Prueba: Tenemos que verificar $\{\sigma_E(w) \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, $\forall\, t$. Sabemos que

$$\{\sigma_E(w) \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\sigma_E < t + \frac{1}{n}\}. \tag{1.1}$$

Una expresión para $\{\sigma_E(w) < t + \frac{1}{n}\}$, que es consecuencia de la continuidad por la derecha, es $\{\sigma_E(w) < t + \frac{1}{n}\} = \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r<t+\frac{1}{n}}} \{X_r(w) \in E\}$. En efecto:

Sea $p \in \{\sigma_E(w) < t + \frac{1}{n}\}$, entonces $\sigma_E(p) < t + \frac{1}{n}$, como $\sigma_E(p) = inf\{s > 0 : X_s(p) \in E\}$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ con $\sigma_E(p) < q < t + \frac{1}{n}$, tal que $X_q(p) \in E$, de aqui $p \in \{X_q(w) \in E\}$.

Recíprocamente, sea $p \in \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r<t+\frac{1}{n}}} \{X_r(w) \in E\}$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $p \in \{X_q(w) \in E\}$, es decir $X_q(p) \in E$, como E es abierto y $X = (X_t)$ es continuo por la derecha, existe $\delta > 0$, tal que, si $r \in [q, q + \delta)$ entonces $X_r(p) \in E$, entonces $\sigma_E(p) < t + \frac{1}{n}$, pues $\sigma_E(p) = \inf\{s > 0 : X_s(p) \in E\}$. Asi tenemos que $p \in \{\sigma_E < t + \frac{1}{n}\}$.

De lo anterior, reemplazando en 1.1, se tiene

$$\{\sigma_E \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r<t+\frac{1}{n}}} \{X_r(w) \in E\}$$

Denotemos por $D_n = \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r<t+\frac{1}{n}}} \{X_r(w) \in E\}$, entonces $D_n \in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$ y $D_{n+1} \subset D_n$, entonces

$\{\sigma_E \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathscr{F}_{t^+} = \mathscr{F}_t.$ $\square$

Corolario 2 *Sea $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ un filtro con las condiciones usuales, $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ $X = (X_t)$ un proceso estocástico, continuo por la derecha $\mathscr{F}_t$-adaptado y E un conjunto cerrado. Entonces, el primer instante σ_E en salir del conjunto E, definido por*

$$\sigma_E(w) = \text{ínf}\{t > 0 : X_t(w) \notin E\}$$

es un tiempo de parada.

Prueba: La prueba del corolario anterior es similar al de la proposición 3.

Lema 1 *Si τ es un tiempo opcional y θ una constante positiva, entonces $\tau + \theta$ es un tiempo de parada.*

Prueba: Si $0 \leq t < \theta$, entonces $\{\tau + \theta \leq t\} = \{\tau \leq t - \theta\} = \phi \in \mathscr{F}_t$. Si $t \geq \theta$, entonces $\{\tau + \theta \leq t\} = \{\tau \leq t - \theta\} \in \mathscr{F}_{(t-\theta)^+} \subseteq \mathscr{F}_t$. $\square$

Lema 2 *Sean $\sigma, \tau, \sigma_n,\ n = 1, 2, \ldots$ tiempos de parada. se cumple*

i) $\sigma \vee \tau$, $\sigma \wedge \tau$, $\sigma + \tau$ son tiempos de parada,

ii) $\sigma = \text{lím}_n\, \sigma_n$ es un tiempo de parada cuando $\sigma_n \uparrow \sigma$ ó $\sigma_n \downarrow \sigma$.

Prueba:

i) Dado que $\{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$ y $\{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}$, se tiene que $\sigma \vee \tau$ y $\sigma \wedge \tau$ son tiempos de parada.
Para $\sigma + \tau$:

$$\begin{aligned}\{\sigma + \tau > t\} \quad &= \quad \{\sigma = 0, \tau > t\} \cup \{\tau = 0, \sigma > t\} \cup \\ &\qquad \{\sigma \geq t, \tau > 0\} \cup \{0 < \sigma < t, \sigma + \tau > t\}.\end{aligned}$$

Los tres primeros conjuntos están en $\mathscr{F}_t$, pues son complemento de conjuntos que pertenecen a $\mathscr{F}_t$. Ahora para el último conjunto observemos que

$$\{0 < \sigma < t, \sigma + \tau > t\} = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q}^+ \\ 0 < r < t}} \{t > \sigma > r, \tau > t - r\}$$

y como cada $\{t > \sigma > r, \tau > t - r\} \in \mathscr{F}_t$, se tiene que $\sigma + \tau$ es un tiempo de parada.

ii) Supongamos que $\sigma_n \uparrow \sigma$, entonces $\{\sigma \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma_n \leq t\}$, y si $\sigma_n \downarrow \sigma$, hacemos $\{\sigma < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma_n < t\}$ y por el Corolario 1 de la Proposición 2, σ es un tiempo de parada. $\square$

Proposición 4 *Sean $\sigma, \tau, \sigma_n,\ n = 1, 2, \ldots$ tiempos de parada. Se cumple* *i) Si $\sigma \leq \tau$, entonces $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.*

ii) Si $\sigma_n \downarrow \sigma$, entonces $\bigcap\limits_n \mathscr{F}_{\sigma_n} = \mathscr{F}_\sigma$.

Prueba:

i) Sea $A \in \mathscr{F}_\sigma$, entonces $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Ahora observemos que

$$A \cap \{\tau \leq t\} = [(A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\sigma \leq t\}^c)] \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

entonces $A \in \mathscr{F}_\tau$

ii) Si $\sigma_n \downarrow \sigma$, entonces $\mathscr{F}_\sigma \subset \bigcap\limits_n \mathscr{F}_{\sigma_n}$ por (i). Sea $A \in \bigcap\limits_n \mathscr{F}_{\sigma_n}$, por la Proposición 2 $A \cap \{\sigma_n < t\} \in \mathscr{F}_t$, para cada $(t, n) \in [0, \infty) \times \mathbb{N}$. Luego $A \cap \{\sigma < t\} = A \cap (\bigcup\limits_n \{\sigma_n < t\}) = \bigcup\limits_n (A \cap \{\sigma_n < t\}) \in \mathscr{F}_t$, por lo tanto $A \in \mathscr{F}_\sigma$. □

Lema 3 *Sean σ y τ tiempos de parada. Entonces $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$*

Prueba: Por la Proposición 4 se tiene $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$.
Para la otra inclusión, sea $A \in \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$, y observemos que

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = A \cap [\{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}] = [A \cap \{\sigma \leq t\}] \cup [A \cap \{\tau \leq t\}] \in \mathscr{F}_t$$

entoces $\mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$. □

Para finalizar esta sección, damos dos proposiciones más. La primera dice que si componemos un proceso con un tiempo de parada, la variable aleatoria resultante sigue siendo medible, resultado que será muy utilizado de una manera directa en secciones posteriores, y finalmente la última proposición será util para elaborar la prueba del Teorema de muestro opcional.

Proposición 5 *Sea σ un tiempo de parada. Entonces se tiene lo siguiente*

i) $\sigma : \Omega \ni w \mapsto \sigma(w) \in [0, \infty]$ es $\mathscr{F}_\sigma - \mathscr{B}([0, \infty])$- medible.

ii) Si $X = (X_t)$ es medible, entonces la aplicación

$$X_\sigma : \Omega_\sigma = \{w : \sigma(w) < \infty\} \ni w \mapsto X_{\sigma(w)}(w) \in \mathbb{R}^d$$

es $\mathscr{F}_\sigma |_{\Omega_\sigma} - \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$- medible.

Prueba: La prueba de este resultado puede ser encontrado en el capítulo 1 de [9, Proposición 5.4].

Proposición 6 *Sean σ y τ tiempos de parada y X una variable aleatoria integrable. Entonces se tiene lo siguiente*

i) $E[I_{\{\sigma>\tau\}}X \mid \mathscr{F}_\tau] = I_{\{\sigma>\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}]$;

ii) $E[I_{\{\sigma\geq\tau\}}X \mid \mathscr{F}_\tau] = I_{\{\sigma\geq\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}]$;

iii) $E\{E[X \mid \mathscr{F}_\tau] \mid \mathscr{F}_\sigma\} = E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}]$.

Prueba:
Primero veamos que $\{\sigma > \tau\},\ \{\sigma \geq \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$

$$\{\sigma > \tau\} \cap \{\sigma\wedge\tau \leq t\} = \{\sigma > \tau,\ \tau \leq t\} = \{\sigma > t,\ \tau \leq t\} \cup \{\tau < \sigma \leq t\}$$

El primer evento esta en $\mathscr{F}_t$, pues

$$\{\sigma > t,\ \tau \leq t\} = \{\sigma > t\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$$

Para el segundo conjunto se tiene

$$\{\tau < \sigma \leq t\} = [\bigcup_{r\in\mathbb{Q},\ r<t} (\{\tau \leq r\} \cap \{r < \sigma\})] \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

por lo tanto $\{\sigma > \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$. Ahora cambiando σ por τ, se tiene que $\{\tau > \sigma\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$, entonces $\{\tau \geq \sigma\}, \{\sigma \geq \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$

i) Sea $A \in \mathscr{F}_\tau$, verificaremos que $A \cap \{\tau < \sigma\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$. Que $A \cap \{\tau < \sigma\}$ pertenece a $\mathscr{F}_\tau$ es evidente. Ahora

$$A \cap [\tau < \sigma] \cap \{\sigma \leq t\} = [A \cap \{\tau < t\}] \cap [\sigma \leq t] \cap [\tau\wedge t < \sigma\wedge t] \in \mathscr{F}_t$$

entonces $A \cap \{\tau < \sigma\} \in \mathscr{F}_\sigma$. Luego para probar (i) observemos que $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\tau$, entonces

$$\begin{aligned} \int_A I_{\{\sigma>\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}]dP &= \int_{A\cap\{\sigma>\tau\}} E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}]dP = \int_{A\cap\{\sigma>\tau\}} XdP \\ &= \int_A I_{\{\sigma>\tau\}}XdP = \int_A E[I_{\{\sigma>\tau\}}X \mid \mathscr{F}_\tau]dP \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene lo buscado.

ii) Análogamente. si $A \in \mathscr{F}_\tau$, se verifica que $A \cap \{\tau \leq \sigma\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ y

$$\begin{aligned} \int_A I_{\{\sigma\geq\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}]dP &= \int_{A\cap\{\sigma\geq\tau\}} E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}]dP = \int_{A\cap\{\sigma\geq\tau\}} XdP \\ &= \int_A I_{\{\sigma\geq\tau\}}XdP = \int_A E[I_{\{\sigma\geq\tau\}}X \mid \mathscr{F}_\tau]dP \end{aligned}$$

iii) Observar que $I_{\{\tau\leq\sigma\}}$ es $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$-medible. Usando las propiedades de la esperanza condicional y (ii), se tiene

$$\begin{aligned} I_{\{\sigma\geq\tau\}}E[E[X \mid \mathscr{F}_\tau] \mid \mathscr{F}_\sigma] &= E[I_{\{\sigma\geq\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_\tau] \mid \mathscr{F}_\sigma] = E[I_{\{\sigma\geq\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}] \mid \mathscr{F}_\sigma] \\ &= I_{\{\sigma\geq\tau\}}E[E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}] \mid \mathscr{F}_\sigma] = I_{\{\sigma\geq\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}] \end{aligned}$$

Análogamente, intercambiamos σ por τ y reemplazamos en la parte (i), también cambiamos X por $E[X \mid \mathscr{F}_\tau]$ en (i), obteniendo

$$I_{\{\sigma<\tau\}}E[E[X \mid \mathscr{F}_\tau] \mid \mathscr{F}_\sigma] = I_{\{\sigma<\tau\}}E[E[X \mid \mathscr{F}_\tau] \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}] = I_{\{\sigma<\tau\}}E[X \mid \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}].$$

Sumando las dos igualdades anteriores se tiene lo buscado. □

1.4. Martingala y martingala local en tiempo continuo

En esta sección desarrollaremos las propiedades básicas de las martingalas, dejando las demostraciones para una sección posterior para no entorpecer el primer objetivo que tenemos, enunciar claramente los teoremas a demostrar.

Cuando el parámetro de tiempo es $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ el proceso se denomida discreto, mientras que si $T = [0, \infty)$ se denomina proceso continuo. Dejaremos por el momento los procesos discretos, pues sólo servirán para demostrar propiedades de martingalas a tiempo continuo.

Consideremos $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ su filtro respectivo.

Definición 12 *Un proceso estocástico real $X = \{X_t : t \geq 0\}$ es denominado martingala (resp. submartingala, supermartingala) con respecto al filtro $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ si:*

i) X_t es integrable para cada $t \in [0, \infty)$.

ii) $X = \{X_t\}$ es $\{\mathscr{F}_t\}$-adaptado.

iii) $E[X_t \mid \mathscr{F}_s] = X_s$ (resp. $E[X_t \mid \mathscr{F}_s] \geq X_s$, $E[X_t \mid \mathscr{F}_s] \leq X_s$), para cada $t, s \in [0, \infty)$ tal que $s < t$.
Donde $E[X_t \mid \mathscr{F}_s]$ denota la esperanza de X_t condicionado al $\sigma-$álgebra $\mathscr{F}_s$. Para ver la definición y algunas propiedades de la esperanza condicional revisar el apéndice A.

Los teoremas más importantes para martingalas continuas son los expuestos a continuación.

Teorema 1 *Sea $X = \{X_t, \mathscr{F}_t :\ t \in [0, \infty)\}$ una submartingala. Tenemos lo siguiente:*

i) Existe $\Omega^* \in \mathscr{F}$ con $P[\Omega^*] = 1$, tal que para cada $w \in \Omega^*$ los límites

$$X_{t^+}(w) = \lim_{\substack{s\downarrow t \\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(w), \quad X_{t^-}(w) = \lim_{\substack{s\uparrow t \\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(w)$$

existen para todo $t \geq 0$(respectivamente $t > 0$).

ii) El límite en (i) satisface

$$\begin{array}{rclll} E[X_{t^+} \mid \mathscr{F}_t] & \geq & X_t & c.t.p, & \forall\, t \geq 0 \\ E[X_t \mid \mathscr{F}_{t^-}] & \geq & X_{t^-} & c.t.p, & \forall\, t > 0 \end{array}$$

iii) $\{X_{t^+}, \mathscr{F}_{t^+};\ 0 \leq t < \infty\}$ es una submartingala con trayectorias continuas por la derecha con límite por la izquierda en c.t.p.

Nota: A un proceso X con trayectorias continuas por la derecha con límite por la izquierda lo denominaremos (**cadlag**).

Teorema 2 *Sea $X = \{X_t, \mathscr{F}_t :\ 0 \leq t < \infty\}$ una submartingala cuyo filtro es continuo por la derecha. Entonces el proceso X tiene una modificación continua a la derecha si, y sólo si, la función $t \mapsto E[X_t]$ de $[0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ es continua a la derecha. Si ésta modificación continua por la derecha existe, se puede elegir cadlag y adaptada a $\{\mathscr{F}_t\}$, por lo tanto $\{X_t\}$ es una submartingala cadlag respecto a $\{\mathscr{F}_t\}$.*

El teorema 1 nos da un método para construir un proceso cadlag (que será submartingala), a partir de una submartingala X, mientras que el Teorema 2 nos la condición sufiente y necesaria para que dicho proceso cadlag sea una modificación del proceso inicial.
Para una martingala se tiene que la función $t \mapsto E[X_t] = E[X_0]$ es constante, por ende continua. Por lo tanto, toda martingala posee una modificación cadlag. En vista de esta observación podemos suponer, de ahora en adelante, que toda martingala utilizada en este trabajo es cadlag.

Decimos que un proceso X posee último elemento si $\lim_{t\to\infty} X_t(w)$ existe para todo $w \in \Omega$. Con esta definición tenemos:

Teorema 3 (Teorema del Muestreo Opcional) *Sea $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ una submartingala continua a la derecha con ultimo elemento X_∞, y sea $\sigma \leq \tau$ dos tiempos opcionales con la filtración $\{\mathscr{F}_t\}$. Entonces*

$$E[X_\tau \mid \mathscr{F}_{\sigma^+}] \geq X_\sigma$$

Si σ es un tiempo de parada, entonces $E[X_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma] \geq X_\sigma$. En particular, $E[X_\tau] \geq E[X_0]$ y para una martingala con último elemento tenemos $E[X_\tau] = E[X_0]$.

Corolario 3 *Sea $X = (X_t)_{t\in[0,\infty}$ una submartingala continua a la derecha respecto del filtro $\{\mathscr{F}_t\}$ y $(\sigma_t)_{t\in[0,\infty)}$ una familia de tiempos de parada tal que $P[\sigma_s \leq \sigma_t] = 1$ si $s \leq t$. Definamos $\hat{X}_t = X_{\sigma_t)}$ y $\hat{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{\sigma_t}$ para todo $t \in [0,\infty)$. Entonces $\{\hat{X}_t\}$ es una submartingala respecto a $(\hat{\mathscr{F}}_t)$.*

Corolario 4 *Sea $X = (X_t)_{t\in[0,\infty}$ una submartingala continua a la derecha respecto del filtro $\{\mathscr{F}_t\}$ y σ, τ dos tiempo de parada talque $\sigma \leq \tau$, entonces se cumple:*

i) $X^\tau = \{X_{\tau\wedge t}, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ *es una submartingala,*

ii) $E[X_{\tau\wedge t} \mid \mathscr{F}_\sigma] \geq X_{\sigma\wedge t}$

La demotración de los teoremas anteriores serán dados en el apéndice B del presente trabajo.

Continuando con esta sección, pasamos definir la variación cuadrática de una martingala, que será la pieza fundamental al momento de construir la integral estocástica.

Definición 13 *Sea $M = \{M_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ martingala continua a la derecha. Decimos que es cuadrado integrable si $E[M_t^2] < \infty$ para todo $t \geq 0$.*

Definición 14 *Para una martingala cuadrado integrable M, definimos la* **variación cuadrática** *de M, como el único proceso $\langle M\rangle_t$ adaptado, tal que*

i) $t \mapsto \langle M\rangle_t$ *es no decreciente y continuo c.t.p.*

ii) $\langle M\rangle_0 = 0$

iii) $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ *es una martingala*

Nota: La **existencia y unicidad** de la variación cuadrática para una martingala cuadrado integrable fue demostrada por primera vez por Doob & Meyer. El teorema de descomposición, desarrollado con más detalle en el apéndice B, hace que la definición de variación cuadrática en este trabajo esté bien definida.

Dado un proceso $X = \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$, fijamos $t > 0$ y sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, con $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, una partición del intervalo $[0,t]$. Comúnmente, en un curso de teoría de la medida, la p-ésima variación de X sobre la partición Π se define como

$$V_t^{(p)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p$$

Ahora si $V_t^{(p)}(\Pi)$ converge cuando $\parallel \Pi \parallel \to 0$, donde $\parallel \Pi \parallel = \max_{i=1,\dots,n}\{|t_i - t_{i-1}|\}$, lo denominamos simplemente la **p-ésima variación** de X sobre $[0,t]$ y cuando $p = 2$ se le denomina variación cuadrática.
La justificación de llamar variación cuadrática a $\langle X \rangle$, al igual que en teoría de la medida, viene dada por el siguiente teorema

Teorema 4 *Sea M una martingala continua, cuadrado integrable y Π una partición de $[0,t]$. Entonces $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(2)}(\Pi) = \langle X \rangle_t$ en probabilidad, esto es, para cada $\epsilon > 0, \eta > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\parallel \Pi \parallel < \delta$ entonces*

$$P[|V_t^{(2)} - \langle M \rangle_t| > \epsilon] < \eta$$

Prueba: La prueba de este teorema puede ser encontrada en el capítulo 1 de [6, Teorema 5.8].

Ahora definiremos la variación cruzada de dos martingalas . Sean X e Y dos martingalas cuadrado integrable, entonces $(X+Y)^2 - \langle X-Y \rangle$ y $(X-Y)^2 - \langle X-Y \rangle$ son martingalas y la diferencia $4XY - [\langle X+Y \rangle - \langle X-Y \rangle]$ también, entonces definimos la **variación cruzada** de X e Y por

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4}[\langle X+Y \rangle - \langle X-Y \rangle]. \tag{1.2}$$

Observar que $XY - \langle X, Y \rangle$ es una martingala y que $\langle X, X \rangle = \langle X \rangle$
Los calculos anteriores dan como conclusión la siguiente caracterización de la variación cruzada para dos martingalas continuas.

Teorema 5 *Sea $X = \{X_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ y $Y = \{Y_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ dos martingalas continuas con $X_0 = Y_0 = 0$ c.t.p. Entonces existe un único proceso $\{\mathscr{F}_t\}$-adaptado, continuo y de variación acotada $\{A_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ con $A_0 = 0$ c.t.p. tal que $\{X_t Y_t - A_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala. Este proceso está dado por la variación cruzada $\langle X, Y \rangle$ definada en (1.2)*

Prueba: La existencia ya está garantizada por 1.2, mientras que para la unicidad hagamos $A = \langle X, Y \rangle$ y supongamos que existe otro proceso B con las mismas características que A. Entonces

$$M = (XY - A) - (XY - B) = B - A$$

es una martingala continua que tiene primera variación finita, es decir, para todo $t \geq 0$ y $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$, partición de $[0,t]$, se tiene

$$M_t = \sup_{\pi} M_t^{\Pi} < \infty$$

donde $M_t^{\Pi} = \sum_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|$. Esto ocurre porque A y B son continuas y crecientes. Denotemos por V_t la variación de M sobre $[0,t]$ y definamos

$$\tau_n = \text{ínf}\{s : V_s \geq n\}$$

entonces $M^n = M^{\tau_n}$ es una martingala continua, acotada con variación finita, de este modo, denotemos por K la constante que acota a la martingala M^n.
Sea $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ una partición de $[0,t]$, tenemos

$$E[M^{n2}_t] = E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(M^{n2}_{t_{i+1}} - M^{n2}_{t_i})\right] = E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(M^n{}_{t_{i+1}} - M^n{}_{t_i})^2\right]$$

dado que M^n es una martingala. Tenemos

$$E[M^{n2}_t] \leq E\left[V^n{}_t(\sup_i |M^n{}_{t_{i+1}} - M^n{}_{t_i}|)\right] \leq KE[\sup_i |M^n{}_{t_{i+1}} - M^n{}_{t_i}|];$$

cuando $\parallel \Pi \parallel$ tiende para cero, tenemos que $E[M^{n2}_t]$ tambien va para cero, gracias a que M^n es continuo, entonces $M^n = 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$. Tomando límite se tiene que $M = 0$, por lo tanto $A = B$. $\square$

Para finalizar esta sección extendemos la definición de martingala, que tambien es conocida como técnica de localización y damos un equivalente al Teorema 5 para martingalas locales.

Definición 15 *Sea $X = \{X_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ un proceso. Si existe una sucesión $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tiempos de parada de $\{\mathscr{F}_t\}$, tal que $X^{(n)} = \{X_t^{(n)} = X_{t\wedge\tau_n}, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala para cada $n \geq 1$ y $P[\text{lím}_{n\to\infty} \tau_n = \infty] = 1$, entonces decimos que X es una* **martingala local**.

Definición 16 *Para una martingala local, continua M, definimos la* **variación cuadrática** *de M, como el único proceso $\langle M\rangle_t$ adaptado, tal que*

i) $t \mapsto \langle M\rangle_t$ *es no decreciente y continuo c.t.p.*

ii) $\langle M\rangle_0 = 0$

iii) $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ *es una martingala local.*

Dado una martingala local X, si asumimos la existencia de la variación cuadrática para martingalas cuadrado integrable, uno puede construir un proceso $\langle X\rangle$, de tal manera que $X^2 - \langle X\rangle$ sea una martingala local, entonces la definición anterior no es más que una consecuencia de suponer que existe la variación cuadrática para martingalas cuadrado integrable. La manera de construir la variación cuadrática para martingalas locales se da en la siguiente proposición.

Teorema 6 *Sea X una martingala local continua con $X_0 = 0$ c.t.p. Entonces existe un único proceso continuo adaptado, no decreciente de variación acotada $\langle X\rangle$ satisfaciendo $\langle X\rangle_0 = 0$ c.t.p. tal que $X^2 - \langle X\rangle$ es una martingala local.*

Prueba: Como X e Y son martingalas locales, existen secuencias de tiempos de parada $\{\sigma_n\}$, $\{\tau_n\}$ tal que $\sigma_n \uparrow \infty$, $\tau_n \uparrow \infty$, y $X_t^n = X_{t\wedge\sigma_n}$, $Y_t^n = Y_{t\wedge\tau_n}$ son $\{\mathscr{F}_t\}$-martingalas. Definamos

$$\rho_n = \sigma_n \wedge \tau_n \wedge \operatorname{ínf}\{t \geq 0 : |X_t| = n \text{ o } |X_t| = n\}$$

y $\widetilde{X}_t^n = X_{t\wedge\rho_n}$, $\widetilde{Y}_t^n = Y_{t\wedge\rho_n}$. Observemos que $\rho_n \uparrow \infty$ c.t.p. Dado que $\widetilde{X}_t^n = X_{t\wedge\rho_n}$, lo mismo que $\widetilde{Y}_t^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ los procesos definidos anteriormente, por el Teorema 3 son $\{\mathscr{F}_t\}$-martingalas continuas cuadrado integrables.
Ahora, para $m > n$, $\widetilde{X}_t^n = \widetilde{X}_{t\wedge\rho_n}^m$ y

$$(\widetilde{X}_t^n)^2 - \langle\widetilde{X}^m\rangle_{t\wedge\rho_n} = (\widetilde{X}_{t\wedge\rho_n}^m)^2 - \langle\widetilde{X}^m\rangle_{t\wedge\rho_n}$$

es una martingala, entonces por el Teorema 5 tenemos $\langle\widetilde{X}^n\rangle_t = \widetilde{X}^m\rangle_{t\wedge\rho_n}$. Esta ecuación de compatibilidad nos permite definir el proceso $\langle X\rangle_t = \langle\widetilde{X}^n\rangle_t$, cuando $t \leq \rho_n$. El proceso definido anteriormente es adaptado, continuo, y no decreciente con $\langle X\rangle_0 = 0$ c.t.p.
Finalmente, como

$$X_{t\wedge\rho_n}^2 - \langle X\rangle_{t\wedge\rho_n} = (\widetilde{X}_t^n)^2 - \langle\widetilde{X}^n\rangle_t$$

es una martingala para cada n, tenemos que $X^2 - \langle X\rangle$ es una martingala local continua.
□

Al igual que el Teorema 5, se tiene la siguiente extensión para martingalas locales, resultado importante que será útil para extender la integral de Itô , en el Capítulo 3.

Teorema 7 *Sea X, Y dos martingalas locales continuas con $X_0 = 0, Y_0 = 0$ c.t.p. Entonces existe un único proceso continuo adaptado de variación acotada $\langle X, Y\rangle$ satisfaciendo $\langle X, Y\rangle_0 = 0$ c.t.p. tal que $XY - \langle X, Y\rangle$ es una martingala local. Si $X = Y$, escribimos $\langle X\rangle = \langle X, X\rangle$, y este proceso es no decreciente.*

Prueba: Para la existencia, definimos para dos martingalas locales X, Y, la variación cruzada $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{4}[\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle]$, entonces $XY - \langle X, Y\rangle$ es una martingala local. Para la cuestion de unicidad, supongamos que A, B satisfacen la condición de $\langle X, Y\rangle$, entonces $M = XY - A$ Y $N = XY - B$ son martingalas locales continuas, entonces al igual que el caso anterior podemos construir una secuencia de tiempos de parada $\{\rho_n\}$ tal que $\rho_n \uparrow \infty$ y $M_t^n = M_{t\wedge\rho_n}$, $N_t^n = N_{t\wedge\rho_n}$ son martingalas continuas. Cosecuentemente $M_t^n - N_t^n = B_{t\wedge\rho_n} - A_{t\wedge\rho_n}$ es una martingala continua con variación finita. Por el mismo argumento de la prueba del Teorema 5, se tiene que $A^n = B^n$. Por lo tanto $A = B$. □

1.5. El movimiento Browniano

El Movimiento Browniano es el proceso estocástico más importante. Tiene muchas aplicaciones en las ciencias físicas, ingeniería, así como en muchas ramas de las ciencias sociales. La primera aplicación importante del Movimiento Browniano fue hecha por L. Bachelier cuando utilizó el movimiento browniano para proveer un modelo del mercado financiero. En esta sección pretendemos dar algunas propiedades fundamentales del movimiento Browniano.

Definición 17 *Un proceso real X se dice que es un proceso Gaussiano si para cualquier familia finita de índices $(t_1, \ldots, t_n)$ de $[0, \infty)$, el vector $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es una Gaussiana, es decir, tiene distribución normal.*

Definición 18 *Un proceso estocástico $\{B_t : 0 \leq t < \infty\}$ es llamado* **Movimiento Browniano estandar 1-dimensional**, *si tiene las siguientes propiedades:*

i) $B_0 = 0$ *c.t.p.*

ii) Los incrementos de B_t son independientes; es decir, para cada conjunto finto $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ las variables aleatorias

$$B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

son independientes.

iii) Para cada $0 \leq s < t < \infty$ el incremento $B_t - B_s$ tiene distribución Gaussiana con media 0 y varianza $t - s$, mostrada con detalle se tiene:

$$P[w : B_t(w) - B_s(w) < x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du$$

iv) Para todo w, la función $t \to B_t(w)$ es continua c.t.p.

Proposición 7 *Sea $B = (B_t)$ un movimiento Browniano con el filtro $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t)$, entonces B es una martingala y $\langle B \rangle_t = t$.*

Prueba: Para probar esto, primero observemos que $E[B_t - B_s \mid \mathscr{F}_s] = E[B_t - B_s] = 0$, dado que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathscr{F}_s$, (por la condición (ii)), y que $E[B_s \mid \mathscr{F}_s] = B_s$ dado que B_s es $\mathscr{F}_s$-medible. Entonces, si $s < t$

$$E[B_t \mid \mathscr{F}_s] = E[B_t - B_s + B_s \mid \mathscr{F}_s] = E[B_t - B_s \mid \mathscr{F}_s] + E[B_s \mid \mathscr{F}_s] = 0 + B_s = B_s$$

Ahora, sea $s < t$, entonces
$t - s = E[(B_t - B_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = E[B_t^2 - 2B_tB_s + B_s^2 \mid \mathscr{F}_s] = E[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathscr{F}_s]$, de donde se tiene $E[B_t^2 - t \mid \mathscr{F}_s] = B_s^2 - s$, es decir, $\{B_t^2 - t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ es

una martingala y por el teorema 6, se tiene que $\langle B\rangle_t = t$ c.t.p. $\square$

Definimos la función covarianza $Cov(s,t)$, para un proceso cualquiera X, como

$$Cov(X_s, X_t) = E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])].$$

Si X es un movimiento Browniano, se tiene $Cov(X_s, X_t) = s \wedge t$.
El siguiente lema establece una caracterización para el movimiento Browniano en términos de la función covarianza.

Lema 4 *Si un proceso Gaussiano* $\{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ *tiene* $E[X_t] = 0$ *para todo* $0 \leq t < \infty$ *y si*

$$Cov(X_s, X_t) = s \wedge t \;\; \textit{para todo} \;\; 0 \leq s, t < \infty$$

entonces el proceso tiene incrementos independientes. Además, si el proceso tiene trayectorias continuas y $X_0 = 0$*, entonces es un movimiento browniano estandar sobre* $[0,\infty)$.

Antes de probar este lema, recordemos que la función característica de una variable aleatoria Gaussiana X con media μ y varianza σ^2, es

$$\varphi_X(t) = E[\exp(itX)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = e^{it\mu - t^2\sigma^2/2}.$$

Si X es un vector aleatorio Gaussiano, esto es, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ donde los X_i son procesos Gaussianos con media μ_i, definamos la media de X como $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, y la matriz de covarianza de X, como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \sigma_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)].$$

Con estas definiciones, la función característica de un vector aleatorio Gaussiano es

$$E[\exp(i\langle u, X\rangle)] = \exp(iu^T\mu - \frac{1}{2}u^T\Sigma u), \quad \forall \;\; u \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Prueba del lema 4: Sea $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$. Para verificar que X tiene incrementos independientes, es suficiente probar que la función característica φ_Y del vector aleatorio de incrementos independientes

$$Y = (X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

es

$$\varphi_Y(u) = \prod_{i=1}^{n-1} \varphi_{(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})}(u_i), \quad \forall \ u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Para esto, observemos que

$$\sigma_{ij} = E[(Y_i - \mu_i)(Y_j - \mu_j)] = E[Y_i Y_j] = E[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})],$$

de donde concluimos $\sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$, y $\sigma_{ii} = t_{i+1} - t_i$. Entonces de (1.3) tenemos

$$\varphi_Y(u) = \exp\left(-\frac{1}{2} u^T \Sigma u\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) u_i^2\right)\right) = \prod_{i=1}^{n-1} \varphi_{(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})}(u_i).$$

□

Dado un movimiento Browniano B, usando el Lema 4 se puede demostrar fácilmente que los procesos

- $Z_t = (t+1) B_{\frac{1}{t+1}} - B_1$
- $Z_t = -B_t$
- $Z_t = \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t = 0 \end{cases}$
- $Z_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$, donde c es una constante.

son movimientos Brownianos. Sólo se tiene que probar que $Cov(Z_t, Z_s) = t \wedge s$.

Finalmente extendemos la Proposición 7 para un vector Browniano B n-dimensional, esto es, $B = (B^1, \ldots, B^n)$.

Teorema 8 *Si $B = (B^1, \ldots, B^n)$ es un $\{\mathscr{F}_t\}$ vector Browniano n-dimensional, entonces para cada $t > s \geq 0$*

$$E[B_t^i - B_t^j \mid \mathscr{F}_s] = 0 \quad c.t.p. \quad y$$

$$E[(B_t^i - B_t^i)(B_t^j - B_t^j) \mid \mathscr{F}_s] = (t-s)\delta_{ij}$$

A un vector Browniano lo llamaremos movimiento Browniano n-dimensional.

Para finalizar este capítulo, en la siguiente sección, enunciamos el resultado principal que se pretende probar en este trabajo, que es una propiedad que caracteriza de manera única al movimiento Browniano. Haciendo uso de esta caracterización, estableceremos la relación que existe entre una martingala local continua y un movimiento Browniano.

1.6. Dos problemas de caracterización

Siendo el Movimiento Browniano un proceso estocástico muy importante, debería haber una propiedad que lo caracterize de manera única. Esta caracterización fue dada por Lévy en 1948.
Del Teorema 8 se puede concluir que si $X = (X^1, \ldots, X^n)$ es un movimiento Browniano, entonces $\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t$; $1 \leq i, j \leq n$. Lo que Lévy consiguió demostrar fue el recíproco de esta observación, es decir, el movimiento Browniano n-dimensional es la única martingala continua y adaptada con esta propiedad. Con notación matemática, tenemos el Teorema de caracterización de Lévy para el movimiento Browniano.

Teorema 9 *Sea $X = \{X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^n), \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ un proceso continuo y adaptado en $\mathbb{R}^n$ tal que para cada $1 \leq k \leq n$ el proceso*

$$M_t^k = X_t^k - X_0^k \quad 0 \leq t < \infty$$

es una martingala local continua relativa a $\{\mathscr{F}_t\}$ y variación cruzada dada por

$$\langle M^k, M^j \rangle_t = \delta_{kj} t \quad 1 \leq j, k \leq n$$

Entonces $\{X_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ es movimiento Browniano n-dimensional.

Sea M una martingala local continua, queremos ver si podemos transformarla en un movimiento Browniano bajo una secuencia de cambios de tiempo, es decir, una función $\tau : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $B_t = M_{\tau(t)}$ sea un movimiento Browniano. Supongamos que τ es la función que buscamos, luego $B_t = M_{\tau(t)}$ es un movimiento Browniano, entonces $\langle B \rangle_t = t$. Como M es una martingala local continua, entonces $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es uma martingala local continua, y por el teorema del Muestreo Opcional también lo es $M_{\tau(s)}^2 - \langle M \rangle_{\tau(s)} = B_s^2 - \langle M \rangle_{\tau(s)}$, entonces $\langle B \rangle_s = \langle M \rangle_{\tau(s)} = s$. Es justo esta última igualdad la que sugiere tomar

$$\tau(s) = \text{ínf}\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\}$$

Uno puede pensar que con la secuencia de $\{\tau(t)\}_{t \geq 0}$, que son tiempos de parada, el proceso $B_t = M_{\tau(t)}$ es un movimiento Browniano. Efectivamente estó es lo que demostraron Dambis, Dubins y Schwarz en 1965, cuya prueba será dada en el último capítulo de este trabajo. Ellos demostraron, con ayuda del teorema de Lévy, que el proceso B, definido anteriormente es un movimiento Browniano. Este resultado es enunciado a continuación.

Teorema 10 *Sea $M = \{M_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ una matingala local continua que satisface $\lim_{t \to \infty} \langle M \rangle_t = \infty$ c.t.p. Para cada $0 \leq s < \infty$, definimos*

$$\tau(s) = \text{ínf}\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\}$$

y el filtro $\mathscr{G}_s = \mathscr{F}_{\tau(s)}$, $s \geq 0$. Se cumple *i) Cada $\tau(s)$ es un $\{\mathscr{F}_t\}$-tiempo de parada y el proceso $\tau(t,w)$ es no decreciente y continuo a la derecha. $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ es continuo a la derecha, más aún $\langle M\rangle_s$ es un $(\mathscr{G}_t)$-tiempo de parada, para cada $s \geq 0$.*

ii) El proceso $B_s = M_{\tau(s)}$ es un movimiento Browniano sobre $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con filtro $(\mathscr{G}_s)$, satisfaciendo $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$ para todo $t \geq 0$.

El Teorema 10 dice que toda martingala continua (martingala local) es un movimiento Browniano salvo una modificación aleatoria del tiempo, pero observemos que esto no garantiza que toda martingala continua tenga las mismas propiedades que el MB, ya que el cambio de tiempo es aleatorio y no preserva ninguna propiedad del movimiento Browniano.
Ambos teoremas 9 y 10 serán demostrados en el último capítulo, pues primero construiremos la integral estocástica, que será una herramienta indispensable para demostrar, primero, el teorema 9, y con ayuda de este, el Teorema 10.

Un último teorema a demostrar, es una versión del teorema de Lévy hasta un tiempo de parada.

Teorema 11 *Sea τ un tiempo de parada, $\{B_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ un movimiento Browniano y $\{M_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ una martingala local tal que $\langle M\rangle_t = t \wedge \tau$. Entonces el proceso $\{X_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$, donde $X_t = M_t + (B_t - B_{t\wedge\tau})$ es un movimiento Browniano estandar.*

Capítulo 2

La Integral Estocástica

2.1. Construcción de la integral estocásticas

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathscr{F}_t\}$ una filtración de $\mathscr{F}$.

Definición 19 *Definimos* $\mathscr{M}_2 = \{X = (X_t) : X$ *es una martingala cuadrado integrable sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *con respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}$ *y* $X_0 = 0\}$ *y* $\mathscr{M}_2^c = \{X \in \mathscr{M}_2 : t \to X_t$ *es continua* $\}$.

Definición 20 *Para cada* $X \in \mathscr{M}_2$*, definimos* $[X]_T = E[X_T^2]^{1/2}$*,* $T > 0$ *y la norma*

$$[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}([X]_n \wedge 1)$$

Lema 5 $\mathscr{M}_2$ *es un espacio métrico completo con la métrica* $d(X,Y) = [X - Y]$*,* $X, Y \in \mathscr{M}_2$*, y* $\mathscr{M}_2^c$ *es un subespacio cerrado de* $\mathscr{M}_2$.

Prueba: Si $[X - Y] = 0 \Rightarrow [X - Y]_n = 0 \Rightarrow X_n = Y_n$ n=1,2,... c.t.p. , ahora $X_t = E[X_n \mid \mathscr{F}_t] = E[Y_n \mid \mathscr{F}_t] = Y_t \;\; \forall\, n \geq t$, luego por la continuidad por la derecha se concluye que $X = Y$(indistinguibles).
Para la completitud, sea $\{X^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de Cauchy, esto es, $\lim\limits_{n,m\to\infty}[X^n - X^m] = 0$. Para cada t fijo, la sucesión $\{X_t^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$, entonces tiene un límite X_t. Veamos que el límite es una martingala; sea $0 \leq s < t < \infty$ y $A \in \mathscr{F}_s$, tenemos por la convergencia en L^2 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz que $\lim_{n\to\infty} E[1_A(X_s^n - X_s)] = 0$ y $\lim_{n\to\infty} E[1_A(X_t^n - X_t)] = 0$. Como cada $X^n \in \mathscr{M}_2$ se tiene $E[1_A X_t^n] = E[1_A X_s^n]$, entonces se tiene que $E[1_A(X_t - X_s)] = E[1_A(X_t - X_t^n + X_t^n - X_s)] = E[1_A(X_t^n - X_t)] + E[1_A(X_s^n - X_s)] \Rightarrow E[1_A X_t] = E[1_A X_s]$. Por lo tanto $\{X_t\}$ es una martingala y, por el Teorema 2, se puede tomar una modificación cadlag tal que $X \in \mathscr{M}_2$. Tenemos, finalmente $\lim_{n\to\infty}[X^n - X] = 0$.

Para probar que $\mathscr{M}_2^c$ es cerrado, sea $\{X^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}_2^c$ con límite X en $\mathscr{M}_2$. Por la desigualdad de Doob, Teorema 22, se tiene

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} E[|X_T^n - X_T|] = \frac{1}{\epsilon^2}[X^n - X]_T^2 \to 0$$

cuando $n \to \infty$, $\epsilon > 0$. Tomamos $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$, entonces

$$\text{para todo } \ k > 0 \ : \quad \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t| \geq \frac{1}{2^k}\right] = 0.$$

Esto significa, que para cada k podemos elegir un n_k tal que

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n_k} - X_t| \geq \frac{1}{2^k}\right] \leq \frac{1}{2^k}$$

consecuentemente por el Lema de Borel-Cantelli, Proposición 19, tenemos que $X_t^{n_k}$ converge uniformemente a X_t sobre $[0,T]$, en c.t.p. Por lo tanto X es continua. $\square$

Sea $M \in \mathscr{M}_2$ y $\langle M\rangle$ su respectiva variación cuadrática.

Definición 21 *Definimos el conjunto* $\mathscr{L}_2(M) = \{\Phi = (\Phi(t,w))_{t\geq 0} : \Phi$ *es un proceso real* $\mathscr{F}_t -$ *predecible y para todo* $T > 0$

$$\| \Phi \|_{2,T}^M = E[\int_0^T \Phi^2(s,w) d\langle M\rangle_s] < \infty\}$$

Para cada $\Phi \in \mathscr{L}_2(M)$, definimos la norma

$$\| \Phi \|_2^M = \sum_{i=1}^{\infty} (\| \Phi \|_{2,n}^M \wedge 1)$$

Observación: $\| \cdot \|_2^M$ no es propiamente dicha una norma, porque pueden existir procesos X, X' tal que $\| X \|_2^M = \| X' \|_2^M$. Lo que se hace para convertirlo en norma, al igual que en teoría de la medida, es establecer la relación de equivalencia en $\mathscr{L}_2(M)$: $X \sim Y$ si, y sólo si $\| X \|_2^M = \| Y \|_2^M$ y extendemos la norma al conjunto $\dfrac{\mathscr{L}_2(M)}{\sim}$. Denotaremos de la misma manera al conjunto de las clases de equivalencia.

Definición 22 *Sea* $\mathscr{L}_0$ *la subcolección de procesos reales* $\Phi = \{\Phi(t,w)\} \in \mathscr{L}_2(M)$ *que tienen la siguiente propiedad: Existe una sucesión de números reales* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots < \infty$ *con* $t_n \to \infty$ *y una secuencia de variables aleatorias* $\{f_i(w)\}_{i=0}^{\infty}$ *tal que* f_i *es* $\mathscr{F}_{t_i}$*-medible,* $\sup_i \| f_i \|_\infty < \infty$ *y*

$$\Phi(t,w) = \begin{cases} f_0(w) & , \ si \ \ t = 0 \\ f_i(w) & , \ si \ \ t \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Claramente Φ puede escribirse como

$$\Phi(t,w) = f_0(w)I_{\{t=0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(w)I_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

Nota: Al conjunto $\mathscr{L}_0$ se le denomina conjunto de **procesos simples**.

El siguiente lema nos menciona qué conjunto puede ser aproximado por procesos simples, para poder construir la integral estocástica sobre él, partiendo por procesos simples.

Lema 6 *El conjunto $\mathscr{L}_0$ es denso en $\mathscr{L}_2(M)$ con respecto a la métrica $d(X,Y) = \| X - Y \|_2^M$*

La prueba de este importante resultado, el cual no se incluye en el presente trabajo debido a su tecnicismo, puede ser encontrada en la parte A de la sección 2 del capítulo 3 de [6].
El lema anterior dice que cualquier proceso en $\mathscr{L}_2(M)$ se puede aproximar por procesos simples.
En vista del lema 6, el lector puede intuir que la definición de la integral estocástica será hecha por aproximaciones de procesos simples. Entonces primero definamos la integral de un procesos simple:
Sea $\Phi \in \mathscr{L}_0$, $M \in \mathscr{M}_2$ y $\langle M \rangle$ su respectiva variación cuadrática, entonces existe $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $t_i \uparrow \infty$ y

$$\Phi(t,w) = f_0(w)I_{\{t=0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(w)I_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

Definimos

$$I^M(\Phi)_t = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(w)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + f_n(M_t - M_{t_n})$$

con $t \in [t_n, t_{n+1})$ y $n \in \mathbb{N}$. Como

$$E[I^M(\Phi)_t \mid \mathscr{F}_s] = \sum_{i=0}^{n-1} E[f_i(w)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mid \mathscr{F}_s] + E[f_n(M_t - M_{t_n}) \mid \mathscr{F}_s] = I^M(\Phi)_s$$

para $0 \leq s < t < \infty$, entonces $(I^M(\Phi)_t)_{t \geq 0} \in \mathscr{M}_2$, es decir, la integral de un proceso simple es una martingala cuadrado integrable.
Observación: Si $M \in \mathscr{M}_2^c$ entonces $I^M(\Phi) \in \mathscr{M}_2^c$ para todo $\Phi \in \mathscr{L}_0$.

Ahora calculemos $E[I^M(\Phi)_t^2]$, antes obsevemos que si Φ es simple, puede ser escrito de la forma

$$I^M(\Phi)_t = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i})$$

entonces

$$E[I^M(\Phi)_t^2] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})\right)^2\right]$$

antes de proseguir observemos que si $M \in \mathscr{M}_2$ y $0 \leq s < t \leq u < v$, entonces

$$\begin{aligned} E[(M_v - M_u)(M_t - M_s)] &= E\{E[(M_v - M_u)(M_t - M_s) \mid \mathscr{F}_u]\} \\ &= E\{E[(M_v - M_u) \mid \mathscr{F}_u](M_t - M_s)\} = 0 \end{aligned}$$

y

$$E[(M_t - M_s)^2] = E\{E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_s]\} = E\{E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathscr{F}_s]\} = E[\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s]$$

entonces

$$E[I^M(\Phi)_t^2] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} f_i^2(\langle M\rangle_{t\wedge t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})\right].$$

En la expresión anterior vemos que la igualdad es independiente de la partición $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ de $[0, t]$, entonces

$$E[I^M(\Phi)_t^2] = E[\int_0^t \Phi_u^2 d\langle M\rangle_u] \quad \forall\, t \geq 0 \ \text{ y } \ \forall\, \Phi \in \mathscr{L}_0$$

por lo tanto se obtiene

$$[I^M(\Phi)] = \parallel \Phi \parallel_2^M \qquad \forall\, \Phi \in \mathscr{L}_0$$

La ecuación anterior, dice que la aplicación $\Phi \in \mathscr{L}_0 \to I^M(\Phi) \in \mathscr{M}_2$ es una isometría, denominada la **isometría de Itô** .

Proposición 8 *Sea $\Phi \in \mathscr{L}_0$ y $M \in \mathscr{M}_2$, entonces se tiene:*

$$I^M(\Phi)_0 = 0 \quad c.t.p; \tag{2.1}$$

$$E[I^M(\Phi)_t \mid \mathscr{F}_s] = I^M(\Phi)_s; \tag{2.2}$$

$$E[I^M(\Phi)_t^2] = E\left[\int_0^t \Phi_u^2 d\langle M\rangle_u\right]; \tag{2.3}$$

$$[I^M(\Phi)] = \parallel \Phi \parallel_2^M; \tag{2.4}$$

$$I^M(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha I^M(\Phi) + \beta I^M(\Psi). \tag{2.5}$$

Prueba: La prueba de estos resultados para procesos simples, es muy similar a la realizada para obtener la isometría de Itô anteriormente.

Del mismo modo se puede obtener igualdad

$$E[(I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = E\left[\int_s^t \Phi_u^2 d\langle M\rangle_u \mid \mathscr{F}_s\right] \tag{2.6}$$

Esta igualdad dice que el proceso $\left\{I^M(\Phi)_t^2 - \int_0^t \Phi_u^2 d\langle M\rangle_u\right\}_{t\geq 0}$ es una martingala, y por el Teorema 29 se tiene

$$\langle I^M(\Phi)\rangle_t = \int_0^t \Phi_u^2 d\langle M\rangle_u \tag{2.7}$$

Ahora, sea $\Phi \in \mathscr{L}_2(M)$, por el Lema 6 existe $\{\Phi^n\} \subset \mathscr{L}_0$ tal que $\| \Phi^n - \Phi \|_2^M \to 0$ cuando $n \to \infty$. De las ecuaciones (2.4) y (2.5) se sigue que

$$[I^M(\Phi^n) - I^M(\Phi^m)] = [I^M(\Phi^n - \Phi^m)] = \| \Phi^n - \Phi^m \|_2^M \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$, entonces $\{I^M(\Phi^n)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{M}_2$, entonces existe un proceso, denotado por $\{I^M(\Phi)_t\}_{t\geq 0}$ tal que $[I^M(\Phi^n) - I^M(\Phi)] \to 0$ cuando $n \to \infty$. Este proceso esta bien definido, pues si $\{X^n\}_{n=1}^\infty$ e $\{Y^n\}_{n=1}^\infty$ son dos sucesiones tal que $\| X^n - \Phi \|_2^M \to 0$ y $\| Y^n - \Phi \|_2^M \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$[I^M(X^n) - I^M(Y^n)] \leq [I^M(X^n) - I^M(\Phi)] + [I^M(Y^n) - I^M(\Phi)] \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

Definición 23 *Para $\Phi \in \mathscr{L}_2(M)$, la integral estocásticas de Φ con respecto a $M \in \mathscr{M}_2$ es la única martingala cuadrado integrable $I^M(\Phi) = \{I^M(\Phi)_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ que satisface $\lim_{n\to\infty} [I^M(X^n) - I^M(\Phi)] = 0$, para toda sucesión $\{X^n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathscr{L}_0$ con $\lim_{n\to\infty} \| X^n - \Phi \|_2^M = 0$. Escribimos*

$$I^M(\Phi)_t = \int_0^t \Phi_s dM_s; \quad 0 \leq t < \infty.$$

Observación: Al igual que para los procesos simples, si $M \in \mathscr{M}_2^c$ entonces $I^M(\Phi) \in \mathscr{M}_2^c$ para todo $\Phi \in \mathscr{L}_2(M)$, esto ocurre gracias a que $\mathscr{M}_2^c$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{M}_2$.

Proposición 9 *La integral estocástica $I^M(\Phi)$, $\Phi \in \mathscr{L}_2(M)$ y $M \in \mathscr{M}_2$, tiene las siguientes propiedades:*

i) $I^M(\Phi)_0 = 0$ *c.t.p*

ii) *Para cada* $t > s \geq 0$, *se tiene*

$$E[I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s \mid \mathscr{F}_s] = 0 \;\; c.t.p. \tag{2.8}$$

y

$$E[(I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = E\left[\int_s^t \Phi_u^2 d\langle M\rangle_u \mid \mathscr{F}_s\right] \;\; c.t.p. \tag{2.9}$$

(2.8) y (2.9) pueden generalizarse, sea σ *y* τ *dos tiempos de parada de la filtración* $(\mathscr{F}_t)$ *tal que* $\tau \geq \sigma$ *c.t.p. entonces para cada* $t > 0$

$$E[I^M(\Phi)_{t\wedge\tau} - I^M(\Phi)_{t\wedge\sigma} \mid \mathscr{F}_\sigma] = 0 \;\; c.t.p. \tag{2.10}$$

y

$$E[(I^M(\Phi)_{t\wedge\tau} - I^M(\Phi)_t \wedge \sigma)^2 \mid \mathscr{F}_\sigma] = E\left[\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\tau} \Phi_u^2 d\langle M\rangle_u \mid \mathscr{F}_\sigma\right] \;\; c.t.p. \tag{2.11}$$

iii) *Si* $\Phi, \Psi \in \mathscr{L}_2(M)$ *entonces*

$$E[(I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s)(I^M(\Psi)_t - I^M(\Psi)_s) \mid \mathscr{F}_s] = E\left[\int_s^t (\Phi\Psi)_u d\langle M\rangle_u \mid \mathscr{F}_s\right] \tag{2.12}$$

y

$$\begin{aligned} &E[(I^M(\Phi)_{t\wedge\tau} - I^M(\Phi)_{t\wedge\sigma})(I^M(\Psi)_{t\wedge\tau} - I^M(\Psi)_{t\wedge\sigma}) \mid \mathscr{F}_s] \\ &\quad = E\left[\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\tau} (\Phi\Psi)_u d\langle M\rangle_u \mid \mathscr{F}_\sigma\right] \; c.t.p \end{aligned} \tag{2.13}$$

iv) *Si* σ *es un* $\mathscr{F}_t$*- tiempo de parada, entonces*

$$I^M(\Phi)_{t\wedge\sigma} = I^M(\Phi')_t \qquad para \;\; t \geq 0 \tag{2.14}$$

donde $\Phi'_t = I_{\{\sigma \geq t\}}\Phi_t$

Prueba: Todas estas propiedades de la integral son demostradas fácilmente tomando aproximaciones por procesos simples y usando el Teorema del muestreo opcional, Teorema 3. Para ilustrar esto, demostremos (iv).
Sea $\Phi \in \mathscr{L}_0$. Sea $\{s_i^n\}_{i=0}^\infty (n = 1, 2, \ldots)$ un refinamiento de $\{t_i\}_{i=0}^\infty$ y $\{i2^{-n}\}_{i=0}^\infty$, entonces

$$\Phi(t, w) = f_0(w)I_{t=0} + \sum_i f_i^n(w) I_{[s_i^n, s_{i+1}^n)}(t) \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots.$$

Definamos $\sigma^n(w) = s_{i+1}^n$ si $\sigma(w) \in [s_i^n, s_{i+1}^n)$, σ^n es un $\mathscr{F}_t$-tiempo de parada para todo n, y $\sigma^n \downarrow \sigma$ y como

$$\Phi_n^{'}(s, w) = \Phi(s, w) I_{\{\sigma^n \geq s\}}, \text{ entonces } \Phi_n \in \mathscr{L}_0.$$

Observemos tambien que $I_{\{\sigma^n \geq s\}} = I_{\{\sigma > s_i^n\}}$ si $s \in [s_i^n, s_{i+1}^n)$, entonces

$$\| \Phi_n^{'} - \Phi' \|_{2,t}^2 = E\left[\int_0^t \Phi^2(s,w) I_{\{\sigma^n > s > \sigma\}} d\langle M\rangle_s\right] \to 0$$

de donde obtenemos $I^M(\Phi_n^{'}) \to I^M(\Phi')$ en $\mathscr{M}_2$. Pero $I^M(\Phi_n^{'})_t = \int_0^{t\wedge\sigma^n} \Phi(s,w)dM_s$ entonces $I^M(\Phi')_t = \lim_{n\to\infty} I^M(\Phi_n^{'})_t = \int_0^{t\wedge\sigma} \Phi(s,w)dM_s = I^M(\Phi)_{t\wedge\sigma}$.
Para el caso general, sea $\{\Phi_n\} \subset \mathscr{L}_0$ tal que $\Phi_n \to \Phi$ en $\mathscr{L}_2$, entonces $I^M(\Phi_n) \to I^M(\Phi)$ en $\mathscr{M}_2$. Como

$$I^M(\Phi_n^{'})_t = I(\Phi_n)_{t\wedge\sigma} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$I^M(\Phi_n^{'})_t \to I^M(\Phi^{'})_t$ y $I^M(\Phi_n)_{t\wedge\sigma} \to I^M(\Phi)_{t\wedge\sigma}$ se concluye que $I^M(\Phi^{'})_t = I^M(\Phi)_{t\wedge\sigma}$. □

Ahora sea $M, N \in \mathscr{M}_2,\ \Phi \in \mathscr{L}_2(M)$ y $\Psi \in \mathscr{L}_2(N)$ entonces tenemos :

Proposición 10 *Para cada $t > s \geq 0$,*

$$\begin{aligned} &E[(I^M(\Phi)_t - I^M(\Phi)_s)(I^N(\Psi)_t - I^N(\Psi)_s) \mid \mathscr{F}_s] \\ &= E\left[\int_s^t (\Phi\Psi)_u d\langle M, N\rangle_u \mid \mathscr{F}_\sigma\right] \ c.t.p \end{aligned} \tag{2.15}$$

Prueba: La prueba se obtiene fácilmente primero para $\Phi, \Psi \in \mathscr{L}_0$ y luego extendiéndola con la isometría de Itô a $\mathscr{L}_2$. □

De la ecuación 2.15 se puede concluir que

$$\langle I^M(\Phi), I^N(\Psi)\rangle_t = \int_0^t (\Phi\Psi)_u d\langle M, N\rangle_u$$

y como caso particular tenemos otra propiedad importante de la integral estocástica

$$\langle I^M(\Phi), N\rangle_t = \int_0^t \Phi_u d\langle M, N\rangle_u \tag{2.16}$$

2.2. Integración respecto a una martingala local

Del item (iv) de la Proposición 9 observamos que la integral estocástica esta determinada por los valores locales del integrador M y el integrando Φ. Este hecho nos permite ampliar la clase de integrador e integrando.

Definición 24 *Definimos los conjuntos $\mathscr{M}^{loc} = \{M = (M_t) : M$ es una $\mathscr{F}_t-$martingala local y $M_0 = 0$ c.t.p $\}$ y $\mathscr{M}^{c,loc} = \{M \in \mathscr{M}^{loc} : t \mapsto M_t,$ es continua en c.t.p.$\}$.*

Definición 25 *Sea $M \in \mathscr{M}^{loc}$. Definimos $\mathscr{L}_2^{loc}(M) = \{\Phi = (\Phi_t)_{t\geq 0} : \Phi$ es un proceso real , $\mathscr{F}_t -$ predecible sobre Ω tal que existe una sucesión de $\mathscr{F}_t$-tiempos de parada σ_n tal que $\sigma_n \uparrow \infty$ c.t.p y*

$$E\left[\int_0^{t\wedge\sigma_n} \Phi_s^2 d\langle M\rangle_s\right] < \infty \tag{2.17}$$

para cada $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ $\}$

Sea $M \in \mathscr{M}^{loc}$ y $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M)$. Claramente podemos elegir una sucesión σ_n de $\mathscr{F}_t$-tiempos de parada tal que $\sigma_n \uparrow \infty$ c.t.p , $M^{\sigma_n} = (M_{t\wedge\sigma_n}) \in \mathscr{M}_2$ y 2.17 es satisfecho. Definamos $\Phi_n = I_{\{\sigma_n \geq t\}}\Phi_t \in \mathscr{L}_2$ y $M_n = M^{\sigma_n} \in \mathscr{M}_2$ entonces existe $I^{M_n}(\Phi_n)$, además, si $m < n$ se tiene la relación de compatibilidad $I^{M_m}(\Phi_m)_t = I^{M_n}(\Phi_n)_{t\wedge\sigma_m}$. De este modo existe un único proceso $I^M(\Phi)_t$ tal que $I^{M_n}(\Phi_n)_t = I^M(\Phi)_{t\wedge\sigma_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Claramente $I^M(\Phi) \in \mathscr{M}^{loc}$.

Definición 26 *El proceso $I^M(\Phi)$ es llamado la integral estocástica de $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M)$ con respecto a $M \in \mathscr{M}^{loc}$. $I^M(\Phi)_t$ es denotado por $\int_0^t \Phi_s dM_s$.*

Observación: Las Proposiciónes 9, 10 pueden ser extendidas fácilmente para $M \in \mathscr{M}^{loc}$ y $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M)$. De igual manera, si $M, N \in \mathscr{M}^{loc}$ y $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M)$ se tiene

$$\langle I^M(\Phi), N\rangle_t = \int_0^t \Phi_u d\langle M, N\rangle_u$$

La siguiente proposición da una caracterización para la integral estocástica.

Proposición 11 *Sea $M \in \mathscr{M}_2$, y $\Phi \in \mathscr{L}_2$(o $M \in \mathscr{M}^{loc}$, y $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}$). Entonces $X = I^M(\Phi) \in \mathscr{M}_2(\mathscr{M}^{loc})$ es el único proceso tal que*

$$\langle X, N\rangle_t = \int_0^t \Phi_u d\langle M, N\rangle_u$$

para todo $N \in \mathscr{M}_2(N \in \mathscr{M}^{loc})$ y para todo $t \geq 0$.

Prueba: Solo falta probar la unicidad. Sea $X, X' \in \mathscr{M}_2$ tal que $\langle X - X', N\rangle = 0$ para todo $N \in \mathscr{M}_2$, tomando $N = X - X'$, se tiene que $\langle X - X'\rangle = 0$. Entonces $X = X'$. $\square$

Finalmente tenemos la última proposición

Proposición 12 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

i) Sea $M, N \in \mathscr{M}^{loc}$ y $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M) \cap \mathscr{L}_2^{loc}(N)$. Entonces $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M + N)$ y

$$\int_0^t \Phi_s d(M + N)_s = \int_0^t \Phi_s dM_s + \int_0^t \Phi_s dN_s \tag{2.18}$$

ii) Sea $M \in \mathscr{M}^{loc}$ y $\Phi, \Psi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M)$. Entonces

$$\int_0^t (\Phi + \Psi)_s dM_s = \int_0^t \Phi_s dM_s + \int_0^t \Psi_s dM_s \tag{2.19}$$

iii) Sea $M \in \mathscr{M}^{loc}$ y $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}(M)$. Sea $N = I^M(\Phi)$ y $\Psi \in \mathscr{L}_2^{loc}(N)$. Entonces $\Phi\Psi \in \mathscr{M}^{loc}$ y

$$\int_0^t (\Phi\Psi)_s dM_s = \int_0^t \Psi_s dN_s$$

2.3. La Fórmula de Itô

Una herramienta importante en el estudio de los procesos estocásticos es la *fórmula de cambio de variable o regla de Itô*. Esta regla de cálculo es la que usaremos como herramienta fundamental para probar el Teorema de Lévy y la caracterización de una martingala local continua, problemas planteados en la sección 6 del capítulo 1.

Definición 27 *Una* **semimartingala** $X = \{X_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ *es un proceso adaptado con la descomposición,*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t; \quad 0 \leq t < \infty \tag{2.20}$$

donde $M = \{M_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\} \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$ y $A = \{A_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ es un proceso de variación acotada $\mathscr{F}_t$-adaptado con $A_0 = 0$.

Teorema 12 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y sea $X = \{X_t, \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ una semimartingala con descomposición (2.20). Entonces*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s \tag{2.21}$$

Prueba: Si tomamos

$$\tau_n = \begin{cases} 0 \;\;, \;\; \text{si } |X(0)| > n \\ \text{ínf}\{t : |M_t| \geq n \;\text{ o }\; A_t \geq n \;\text{ o }\; \langle M \rangle_t \geq n\}; \;\; \text{si } |X(0)| \leq n \end{cases}$$

Claramente $\tau_n \uparrow \infty$ cuando $n \to \infty$, si probamos 2.21 para $X_{t \wedge \tau_n}$ sobre el conjunto $\{\tau_n > 0\}$, tomando límite $n \uparrow \infty$ obtenemos 2.21 para el proceso X. Entonces por el argumento anterior podemos supoder que $X_0, M_t, A_t, \langle M \rangle_t$ son acotados en (t, w) y que f es una función $\mathcal{C}^2$ con soporte compacto.

Ahora, fijemos un punto $t > 0$ y tomemos la partición $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t\}$. Por la expansión de Taylor para f, se tiene

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^{n}\{f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}})\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \end{aligned}$$

donde $\eta_k(w) = X_{t_{k-1}} + \theta_k(w)(X_{t_k}(w) - X_{t_{k-1}}(w))$ para algún $\eta_k(w)$ apropiado tal que $0 \leq \eta_k(w) \leq 1$, $w \in \Omega$. Entonces

$$f(X_t) - f(X_0) = J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + \frac{1}{2}J_3(\Pi)$$

donde

$$J_1(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f'(X_{t_{k-1}})(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})$$

$$J_2(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f'(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - A_{M_{k-1}})$$

$$J_3(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

Se ve sin dificultad que si $\parallel \Pi \parallel = \max_k |t_k - t_{k-1}| \to 0$, entonces $J_1(\Pi) \to \int_0^t f'(X_s)dA_s$. Ahora, aproximemos $Y_s(w) = f'(X_s(w))$, por procesos simples de la forma

$$Y_s^{\Pi}(w) = f'(X_0(w))I_{\{0\}}(S) + \sum_{k=1}^{n} f'(X_{t_{k-1}}(w))I_{(t_{k-1},t_k]}(s)$$

entonces tenemos $[I^M(Y^{\Pi} - Y)] = \parallel Y^{\Pi} - Y \parallel_2^M \to 0$ cuando $\parallel \Pi \parallel \to 0$, es decir

$$J_2(\Pi) = \int_0^t Y_s^{\Pi} dM_s \to \int_0^t Y_s dM_s = \int_0^t f'(X_s)dM_s$$

Para ver a que $J_3(\Pi)$ converge dividámoslo en

$$J_3(\Pi) = J_4(\Pi) + J_5(\Pi) + J_6(\Pi)$$

donde

$$J_4(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})^2$$

$$J_5(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})$$

$$J_6(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$$

Pero como A tiene variación total acotada, supongamos que es acotada por R, entonces

$$|J_4(\Pi)| + |J_5(\Pi)| \leq 2R \parallel f'' \parallel_\infty \left(\max_{1\leq k\leq n} |A_{t_k} - A_{t_{k-1}}| + \max_{1\leq k\leq n} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| \right)$$

y como los procesos A y M son continuos, se concluye que $J_4(\Pi) \to 0$ y $J_5(\Pi) \to 0$ cuando $\parallel \Pi \parallel \to 0$.

Ahora probaremos que $J_6(\Pi) \to \displaystyle\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$. Para esto nos ayudaremos del siguiente lema cuya demostración puede ser en contrada en el capítulo 2 de [9, Lema 5.1].

Lema 7 *Sea $C > 0$ una constante tal que $|M_s| \leq C,\ s \in [0, t]$. Sea*

$$V_l^2(\Pi) = \sum_{k=1}^{l} \{M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\}^2, \quad l = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces $E[V_n^2(\Pi)] \leq 12C^4$

El lema anterior dice que si el proceso es acotado, entonces su variación cuadrática tambien lo es.

Regresando a la prueba, definamos

$$J_6^*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f''(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$$

que al compararlo con $J_6(\Pi)$ se tiene

$$|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| \leq V_t^2(\Pi) \max_{1\leq k\leq n} |f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})|$$

y aplicando la desigualda de Cauchy-Schwarz tenemos

$$E|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| \leq \sqrt{6K^4}\sqrt{E\left(\max_{1\leq k\leq n} |f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})|\right)^2}$$

donde k es la constante que acota a la martingala M. Entonces $E|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| \to 0$ cuando $\parallel \Pi \parallel \to 0$.

Definamos

$$J_7(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f''(X_{t_{k-1}})(\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})$$

que claramente se tiene $E[|J_7(\Pi) - \int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s|] \to 0$ cuando $\parallel \Pi \parallel \to 0$. Finalmente si probamos que $J_6^*(\Pi)$ y $J_7(\Pi)$ tiene el mismo límite, entonces se tendrá $J_3(\Pi) \to \int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$. Entonces

$$E[|J_6^*(\Pi) - J_7(\Pi)|^2] = E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} f''(X_{t_{k-1}})\{(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})\}\right]^2\right\}$$

pero

$$E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} f''(X_{t_{k-1}})\{(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})\}\right]^2\right\} \leq$$

$$\| f'' \|_\infty^2 \, (E[V_t^2(\Pi)^2])^{1/2} \left(E\left[\max_{1\leq k\leq n} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^4\right]\right)^{1/2} +$$

$$\| f'' \|_\infty^2 \, E[\max_{1\leq k\leq n} (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})\langle M\rangle_t]$$

Por la continuidad del proceso M, se tiene que la expresión anterior tiende a cero cuando $\| \Pi \| \to 0$. Esto prueba que $J_3(\Pi) \to \int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$ en $\mathscr{L}_1(\Omega)$. $\square$.

Finalmente tenemos la versión multidimensional para la regla de Itô.

Teorema 13 *Sea $\{M_t = (M_t^1, M_t^2, \ldots, M_t^d), \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ un vector de martingalas locales en $\mathscr{M}^{c,loc}$, $\{A_t = (A_t^1, A_t^2, \ldots, A_t^d), \mathscr{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ un vector de procesos adaptados de variación total acotada con $A_0 = 0$, y sea $X_t = X_0 + M_t + A_t,\ \ 0 \leq t < \infty$, donde X_0 es un vector aleatorio $\mathscr{F}_0$-medible en $\mathbb{R}^d$. Sea $f(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de clase $C^{1,2}$. Entonces*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s)ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s, X_s)dA_s^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s, X_s)dM_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(s, X_s)d\langle M^i, M^j\rangle_s \end{aligned} \tag{2.22}$$

para todo $0 \leq t < \infty$.

Prueba: La prueba de este teorema se realiza aplicando la fórmula de Taylor multidimensional de f para la partición $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t\}$ de $[0,t]$, y viendo a donde convergen los términos de la expresión de Taylor de manera análoga al caso unidimensional. $\square$

Ejemplo 2:

Sea $B = (B_t)$ un movimiento Browniano, hallemos $I = \displaystyle\int_0^t B_s dB_s$. Definamos $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$, entoces por la fórmula de Itô

$$g(t, B_t) = g(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(s, B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(s, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(s, B_s)d\langle B\rangle_s$$

$$\frac{1}{2}B_t^2 = g(t, B_t) = g(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(s, B_s) ds = \int_0^t B_s dB_s + \frac{t}{2}$$

Por lo tanto $I = \displaystyle\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.

Ahora calculemos $\displaystyle\int_0^t s dB_s$, hacemos $g(t, x) = tx$ y aplicamos la regla de Itô, obteniendo

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

que es idéntica a la fórmula de integración por partes para la integral de Riemann, entonces usando la función $g(t, x) = xf(t)$, para una función $f \in C^2(\mathbb{R})$, se obtiene el siguiente corolario

Corolario 5 *Supongamos que $f(s, w) = f(s)$ depende sólo de s y que f es continua y de variación acotada en $[0, t]$. Entonces*

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s$$

Capítulo 3

Demostración de los Teoremas Principales

3.1. Prueba del Teorema 9

Dado que X es continua por hipótesis, sólo tenemos que probar que el incremento $X_t - X_s$ tiene distribución normal multivariante con media cero y matriz de covarianza $C = (t-s)I$ y que $X_t - X_s$ es independiente del σ-álgebra $\mathscr{F}_s$, para todo s, t con $0 \leq s < t$.
Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y definamos la función $\phi_\alpha \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1})$ como sigue:

$$\phi_\alpha(t,x) = \exp\left(i\alpha \cdot x + \frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 t\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R},\ (i^2 = -1).$$

Notemos que $\partial \phi_\alpha / \partial x_j = i\alpha_j \phi_\alpha$ y $\partial^2 \phi_\alpha / \partial x_j^2 = -\alpha_j^2 \phi_\alpha$, para todo $1 \leq j \leq n$. Dado que $\partial \phi_\alpha / \partial t = \frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 \phi_\alpha$ se tiene

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_j^2} = 0. \tag{3.1}$$

Definamos $Y_t = \phi_\alpha(t, X_t)$. Usando la fórmula de Itô, Teorema 13, tenemos

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\phi_\alpha(v,X_v)dv + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}\phi_\alpha(v,X_v)dM_v^j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\phi_\alpha(v,X_v)d\langle M^k, M^j\rangle_v$$

como $\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{ij} t$ tenemos

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\phi_\alpha(v,X_v)dv + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j}\phi_\alpha(v,X_v)dM_v^j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\phi_\alpha(v,X_v)dv.$$

Usando la ecuación (3.1) tenemos

$$Y_t = Y_0 + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_\alpha(v, X_v) dM_v^j.$$

De la ecuación anterior se tiene que Y es una martingala local.

Ahora usaremos los resultados anteriores para demostrar que X es un movimiento Browniano. Sea $0 \leq s < t$. Probaremos que $X_t - X_s$ tiene distribución normal con media cero y matriz de covarianza $(t-s)I$ en términos de la función característica, pues recordemos que la función característica determina la distribución, y viceversa, esto es: $\varphi_X = \varphi_Y \;\Leftrightarrow\; F_X = F_Y$ (ver [1, pág 226]), entonces para probar que $X_t - X_s$ tiene distribución normal con media cero y matriz de covarianza $(t-s)I$ sólo tenemos que demostrar que $\varphi_{X_t - X_s}(\alpha) = \exp(-\frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 (t-s))$. Veamos. Por la propiedad de martingala de Y se tiene

$$E[\exp(i\alpha \cdot X_t + \frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 t) | \mathscr{F}_s] = E[Y_t | \mathscr{F}_s] = Y_s = \exp(i\alpha \cdot X_s + \frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 s).$$

Multiplicando por $\exp(-i\alpha \cdot X_s + \dfrac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 t)$ en la igualdad anterior y dado que esta variable aleatoria es $\mathscr{F}_s$-medible, se tiene

$$E[\exp(i\alpha \cdot (X_t - X_s)) | \mathscr{F}_s] = \exp(-\frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 (t-s)).$$

Dado que el lado derecho de la igualdad anterior es independiente de $w \in \Omega$, podemos integrar sobre Ω obteniendo así

$$\varphi_{X_t - X_s}(\alpha) = E[\exp(i\alpha \cdot (X_t - X_s))] = \exp(-\frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 (t-s)).$$

Ahora sólo falta demostrar que $X_t - X_s$ es independiente de $\mathscr{F}_s$, que es equivalente a demostrar que $X_t - X_s$ es independiente de toda variable Z $\mathscr{F}_s$-medible. Para esto es suficiente demostrar que la función característica del vector aleatorio $(X_t - X_s, Z)$ es $\varphi_{(X_t - X_s, Z)}(\alpha, \beta) = \varphi_{X_t - X_s}(\alpha)\varphi_Z(\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$. Veamos

$$\begin{aligned}
\varphi_{(X_t - X_s, Z)}(\alpha, \beta) &= E[\exp(i(X_t - X_s, Z) \cdot (\alpha, \beta))] \\
&= E[\exp(i\beta Z + i\alpha \cdot (X_t - X_s))] \\
&= E[E[e^{i\beta Z} \exp(i\alpha \cdot (X_t - X_s)) | \mathscr{F}_s]] \\
&= E[e^{i\beta Z} E[\exp(i\alpha \cdot (X_t - X_s)) | \mathscr{F}_s]] \\
&= E[e^{i\beta Z} \exp(-\frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 (t-s))] \\
&= \exp(-\frac{1}{2} \parallel \alpha \parallel^2 (t-s)) E[e^{i\beta Z}] \\
&= \varphi_{X_t - X_s}(\alpha)\varphi_Z(\beta).
\end{aligned}$$

De lo anterior se prueba el teorema.

3.2. Prueba del Teorema 10

Antes de probar el Teorema 10, damos las siguientes proposiciones que nos ayudarán a probar la continuidad del proceso $B_s = M_{\tau(s)}$.

Proposición 13 *Sea* $\tau : [0, \infty) \times \Omega \to [0, \infty)$ *es un proceso estocástico no decreciente tal que cada* $\tau(s)$ *es un* $(\mathscr{F}_t)$*-tiempo de parada, para cada* $s \geq 0$*. Si* τ *es continua a la derecha entonces* $\{\mathscr{F}_{\tau(t)}\}$ *tambien los es.*

Prueba: Sea τ continua a la derecha. Para cada $s \geq 0$ sea $\{s_n\}$ tal que $s_n \downarrow s$, entonces $\tau(s_n) \downarrow \tau(s)$ y por la Proposición 4 tenemos que $\mathscr{F}_{\tau(s_n)} \downarrow \mathscr{F}_{\tau(s)}$. $\square$

Proposición 14 *Sea* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *una función continua y no decreciente con* $f(0) = 0$ *y* $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \infty$*. Sea* $\tau(s) = \inf\{t \geq 0 : f(t) > s\}$*,* $s \geq 0$*. Entonces*

i) τ *es no decreciente, continua a la derecha y satisface* $f(\tau(s)) = s$*(i.e* τ *es la inversa por la izquierda de* f*) y* $\tau(f(s)) \geq s$*.*

ii) Si $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *es una función continua que satisface*

$$0 \leq a < b, \;\; f(a) = f(b) \;\; \Rightarrow \;\; \phi(a) = \phi(b)$$

entonces $\phi(\tau(s))$ *es continua y tenemos que* $\phi(\tau(f(s))) = \phi(s)$

Prueba:

i) Sea $0 \leq s < r$ y elijamos $t_n \downarrow \tau(r)$ tal que $f(t_n) > r$. Por la continuidad de f tenemos $f(\tau(r)) = \lim_n f(t_n) \geq r$. Para la otra desigualdad, si $f(t) > r$, entonces $\tau(r) \leq t$ y como f es no decreciente, $f(\tau(r)) \leq f(t)$. Ahora, como se tomo $f(t) > r$, tomamos ínfimo entre los t que cumplan esta condición, teniendo así $f(\tau(r)) \leq \inf\{f(t) : f(t) > r\}$, y como f es continua y no decreciente, se tendrá $f(\tau(r)) \leq \inf\{f(t) : f(t) > r\} = r$.

Como $f(t_n) > r > s$ tenemos $\tau(s) \leq t_n$ y también $\tau(s) \leq \inf_n t_n = \tau(r)$, con esto se prueba que τ es no decreciente.
Para probar la desigualdad $\tau(f(r)) \geq r$, elijamos una suceción $\{q_n\}$ tal que $q_n \downarrow \tau(f(r))$ con $f(q_n) > f(r)$ (dicha suceción existe por la definición de τ para el punto $f(r)$) y como f es no decreciente, se tiene $q_n > r$. Entonces $\tau(f(r)) = \inf_n q_n \geq r$.

Para probar la continuidad por la derecha de τ, tomemos $s_n \downarrow s$, como τ es no decreciente tenemos $\tau(s_n) \downarrow x = \inf_n \tau(s_n) \geq \tau(s)$, para algún punto x. Sólo falta probar que $x \leq \tau(s)$. Para ésto elijamos $t_m \downarrow \tau(s)$ con $f(t_m) > s$. Fijemos un m, y elijamos un $n \geq 1$ tal que $f(t_m) > s_n$. Entonces $x \leq \tau(s_n) \leq t_m$. Tomando límite $m \to \infty$ concluimos que $x \leq \tau(s)$.

ii) Como ϕ es continua y τ es continua por la derecha, se tiene que $\phi(\tau(s))$ es continua por la derecha. Sólo falta probar continidad por la izquierda. Sea $s_n \uparrow s$ y sea $r = \sup_n \tau(s_n)$, entonces $\tau(s_n) \uparrow r$ y consecuentemente $\phi(\tau(s_n)) \to \phi(r)$, entonces sólo falta probar que $\phi(r) = \phi(\tau(s))$, pero usando la condición

$$0 \leq a < b, \;\; f(a) = f(b) \;\; \Rightarrow \;\; \phi(a) = \phi(b)$$

de la proposición, es sificiente probar que $f(r) = f(\tau(s))$, es decir $f(r) = s$ (por la conclución de la parte (i)).

Dado que $\tau(s_n) \uparrow r$, la continuidad de f y la parte (i), tenemos $s_n = f(\tau(s_n)) \to f(r)$, esto es, $f(r) = \lim_n s_n = s$. Esto prueba la continuidad de $\phi(\tau(s))$.

Finalmente, para probar $\phi(\tau(f(s))) = \phi(s)$, es suficiente probar $f(\tau(f(s))) = f(s)$, pero ésto se sigue de manera inmediata de $f(\tau(s)) = s$, probado en (i), y reemplazando s por $f(s)$. □

Proposición 15 *Se cumple:*

i) Si $M \in \mathscr{M}_2^c$, entonces $E[M_\tau^2] = E[\langle M\rangle_\tau]$, para cada tiempo de parada $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ acotada.

ii) Si $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$, entonces $E[M_\tau^2] \leq E[\langle M\rangle_\tau]$, para cada tiempo de parada $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ satisfaciendo $P[\tau < \infty] = 1$.

Prueba:

i) Si $M \in \mathscr{M}_2^c$, entonces $N_t = M_t^2 - \langle M\rangle_t$, es una martingala y por el Teorema del muestreo opcional, Teorema 3, se tiene $E[N_\tau] = E[N_0] = 0$, obteniendo así $E[M_\tau^2] = E[\langle M\rangle_\tau]$.

ii) Ahora asumamos que $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$, y sea $\{\tau_n\}$ una secuencia de tiempos de parada con $\tau_n \uparrow \infty$ tal que $M_t^n = M_{t\wedge\tau_n}$ es una martingala cuadrado integrable. Si τ es un tiempo de parada acotado, por (i) tenemos

$$E\left[(M_\tau^n)^2\right] = E[\langle M^n\rangle_\tau],$$

para todo $n \geq 1$. Dado que la variación cuadrática $\langle M\rangle$ es un proceso no decreciente, tenemos $0 \leq \langle M^n\rangle_\tau = \langle M\rangle_\tau^n = \langle M\rangle_{\tau\wedge\tau_n} \uparrow \langle M\rangle_\tau$ y tambien

$$E[\langle M^n\rangle_\tau] \uparrow E[\langle M\rangle_\tau]$$

por la convergencia monótona. También se tiene que $M_\tau^n \to M_\tau$, y usando el Lema de Fatou

$$E[M_\tau^2] = E\left[\liminf_{n\to\infty}(M_\tau^n)^2\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E[(M_\tau^n)^2] = \liminf_{n\to\infty} E[\langle M^n\rangle_\tau] = E[\langle M\rangle_\tau] \tag{3.2}$$

Lo anterior prueba (ii) cuando τ es un tiempo de parada acotado. Si tenemos la condición $P[\tau < \infty] = 1$ entonces tomamos $\tau_n = \tau \wedge n$, ahora cada τ_n ya es acotado, y vale (3.2). Tomando límite cuando $n \uparrow \infty$ se tiene $E[M_\tau^2] \leq E[\langle M\rangle_\tau]$. $\square$

Proposición 16 *Sea X una martingala local continua. Entonces existe $\Omega^* \subset \Omega$ con $P(\Omega^*) = 1$, tal que para todo $0 \leq a < b$, $\langle X\rangle_a(w) = \langle X\rangle_b(w) \Leftrightarrow \quad X_t(w) = X_a(w)$, $\forall\, t \in [a, b]$.*

Prueba: Si se cumple $X_t(w) = X_a(w), \quad \forall\ t \in [a, b]$ entonces es evidente que $\langle X\rangle_a(w) = \langle X\rangle_b(w)$. Para la recíproca, definamos $N_t = X_{t+a} - X_a$, entonces para cada partición Π de $[0, t]$, tenemos $N_t - N_s = X_{t+a} - X_{s+a}$, de donde $V_t^2(\Pi)(N) = V_t^2(a + \Pi)(X)$, entonces

$$\langle N\rangle_t = \langle X\rangle_a^{a+t}, \text{ para todo } t \geq 0 \tag{3.3}$$

Ahora consideremos el tiempo de parada

$$\tau = \text{ínf}\{s > 0 : \langle N\rangle_s > 0\}$$

entonces $\langle N^\tau\rangle = \langle N\rangle^\tau = 0$. De este modo N^τ es constante en el tiempo,y dado que $N_0^\tau = N_0 = 0$ entonces $N^\tau = 0$. Lo anterior dice que la curva $t \mapsto X_t(w)$ es constante sobre intervalo $[a, a + \tau(w)]$. Consideremos w tal que cumpla 3.3 y hacemos $t = b - a$ entonces $0 = \langle X\rangle_a^b(w) = \langle N\rangle_{b-a}(w)$, entonces $\tau(w) \geq b - a$ y consecuentemente la curva $t \mapsto X_t(w)$ es constante sobre el intervalo $[a, b]$.

Prueba del Teorema 10 :

(i) Por la definición de $\langle M\rangle$ y la propiedad de ser no decreciente se tiene $\{\tau(s) < t\} = \{\langle M\rangle_t > s\} \in \mathscr{F}_t$. Aplicando la Proposición 14 a $f(s) = \langle M\rangle_s(w)$, se sigue que la curva $s \mapsto \tau(s, w)$ es no decreciente y continua a la derecha y de la proposición 13 se sigue que $(\mathscr{G}_s)$ es continua a la derecha.
Para ver que $\langle M\rangle_t : \Omega \to [0, \infty)$ es un $(\mathscr{G}_s)$-tiempo de parada solo tenemos que mostrar que $\{\langle M\rangle_t < s\} \in \mathscr{G}_s = \mathscr{F}_{\tau(s)}$, entonces tenemos que asegurar que $D = \{\langle M\rangle_t < s\} \cap \{\tau(s) < r\} \in \mathscr{F}_r$ para todo $r \geq 0$.
Para esto usamos $\{\tau(s) < r\} = \{\langle M\rangle_r > s\} \in \mathscr{F}_r$, entonces $D = \{\langle M\rangle_t < s\} \cap \{\langle M\rangle_r > s\}$. Si $t \geq r$ entonces $D = \phi \in \mathscr{F}_r$, si $t < r$ entonces $D \in \mathscr{F}_r$, pues $\{\langle M\rangle_t < s\}, \{\langle M\rangle_r > s\} \in \mathscr{F}_r$. Esto prueba (i) del Teorema 10.

(ii) El proceso $B_s = M_{\tau(s)}$ es $(\mathscr{G}_s)$-adaptado continuo por la derecha (gracias a la continuidad de M y τ). Para probar que B es un Movimiento Browniano, es sificiente probar que $\langle B\rangle_t = t$, por el teorema 9.
Para probar la continuidad de B. fijemos $w \in \Omega$ y definamos $\phi(t) = M_t(w)$ y consideremos la curva $s \mapsto B_s(w) = M_{\tau(s)(w)}(w) = \phi(\tau(s)(w))$. Usando la Proposición 14 con $f(t) = \langle M\rangle_t(w)$, se tiene la continuidad de $s \mapsto \phi(\tau(s)(w)) = B_s(w)$, y como M cumple las hipótesis de la Proposición 16, es decir,

$$0 \leq a < b, \ \ f(a) = \langle M\rangle_a(w) = \langle M\rangle_b(w) = f(b) \ \ \Rightarrow \ \ \phi(a) = M_a(w) = M_b(w) = \phi(b)$$

con probabilidad 1, concluimos que $\phi(\tau(s)(w)) = B_s(w)$ es continua c.t.p.

Ahora veamos que B es una martingala cuadrado integrable. Para esto fijemos $r > 0$ y definamos $N_t = M_{t\wedge\tau(r)}$, esto es, $N = M^{\tau(r)}$, entonces N es una martingala local continua(por el corolario 5 del Teorema del muestreo opcional) respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)$, con $N_0 = M_0 = 0$. Además

$$\langle N\rangle_t = \langle M\rangle_t^{\tau(r)} = \langle M\rangle_{t\wedge\tau(r)} \leq r,$$

pues $\langle M\rangle_{t\wedge\tau(r)} \leq \langle M\rangle_{\tau(r)} = r$, para todo $t \geq 0$, entonces $\langle N\rangle_\infty \leq r$. Por el Teorema 7 el proceso $N_t^2 - \langle N\rangle_t$ es una martingala local.
Dado que $\{\tau(t)\}_{t\in[0,r]}$ es una familia creciente de $(\mathscr{F}_t)$-tiempos de parada, entonces por el Teorema del muestreo opcional, tenemos que

$$B_t = M_{\tau(t)} = M_{\tau(t)\wedge\tau(r)} = N_{\tau(t)}, \ \ t \in [0, r]$$

es una $\mathscr{G}_t$-martingala, donde $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{\tau(t)}$.
Si $t \in [0, r]$, entonces por la Proposición 15,

$$E[B_t^2] = E[N_{\tau(t)}^2] \leq E[\langle N\rangle_{\tau(t)}] \leq r < \infty.$$

Esto es $(B_t, \mathscr{G}_t)_{t\in[0,r]}$ es una martingala cuadrado integrable. Más aún

$$\langle N\rangle_{\tau(t)} = \langle M^{\tau(r)}\rangle_{\tau(t)} = \langle M\rangle_{\tau(t)}^{\tau(r)} = \langle M\rangle_{\tau(t)\wedge\tau(r)} = \langle M\rangle_{\tau(t)} = t$$

Finalmente veamos que $\{B_t^2 - t\}$ es una martingala. Sea $0 \leq s < r$, entonces

$$\begin{aligned} E[B_r^2 - r \mid \mathscr{G}_s] &= E[N_{\tau(r)}^2 - r \mid \mathscr{F}_{\tau(s)}] = E[N_{\tau(r)}^2 - \langle N\rangle_{\tau(r)} \mid \mathscr{F}_{\tau(s)}] \\ &= N_{\tau(s)}^2 - \langle N\rangle_{\tau(s)} = B_s^2 - s \end{aligned}$$

Por el Teorema 29 se tiene $\langle B\rangle_t = t$, y por la caracterización de Lévy, Teorema 9, concluimos que $B = \{B_s = M_{\tau(s)}\}_{s\geq 0}$.

3.3. Prueba del Teorema 11

Queremos probar que $X_t = M_t + (B_t - B_{t\wedge\tau})$ es un movimiento Browniano, donde B es un movimiento Browniano y $M \in \mathscr{M}^{loc}$ con $\langle M\rangle_t = t \wedge \tau$.
Sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sigma_n \uparrow \infty$ y $M^{\sigma_n} \in \mathscr{M}_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veremos que $X^n = \{X^n_t = X_{t\wedge\sigma_n} : 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala, es decir

$$E[X^n_t \mid \mathscr{F}_s] = X^n_s.$$

Como $M^n, B^n, B^{n,\tau}$ son martingalas y usando la Proposición 6, se tiene $E[X^n_t|\mathscr{F}_s] = E[M^n_t + (B^n_t - B^n_{t\wedge\tau})|\mathscr{F}_s] = M^n_s + (B^n_s - B^n_{s\wedge\tau}) = X^n_s$. Por lo anterior se tiene que X es una martingala local.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que M es una martingala, pues la prueba que hagamos para M cuando es martingala será la misma para M^n, entonces $X^2_t = M^2_t + (B_t - B_{t\wedge\tau})^2 + 2M_t(B_t - B_{t\wedge\tau})$ y $E[(B_t - B_{t\wedge\tau})^2 - (t - t\wedge\tau)|\mathscr{F}_s] = (B_s - B_{s\wedge\tau})^2 - (s - s\wedge\tau)$, entonces $\langle B_t - B_{t\wedge\tau}\rangle = t - t\wedge\tau$. Con lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} E[X^2_t - t|\mathscr{F}_s] &= E[X^2_t - \{t\wedge\tau + t - t\wedge\tau\}|\mathscr{F}_s] \\ &= E[(M^2_t - t\wedge\tau) + ((B_t - B_{t\wedge\tau})^2 - t + t\wedge\tau) + 2M_t(B_t - B_{t\wedge\tau})|\mathscr{F}_s]. \end{aligned}$$

Para obtener $E[X^2_t - t|\mathscr{F}_s] = X^2_s - s$, sólo hace falta verificar que $M_t(B_t - B_{t\wedge\tau})$ es una martingala. Para ésto nos ayudamos de la Proposición 6. Sea σ un tiempo de parada acotado y denotemos por $D_t = M_t(B_t - B_{t\wedge\tau})$, entonces

$$\begin{aligned} E[D_\sigma] &= E[M_\sigma(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})] = E[M_\sigma(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})(I_{\{\tau\geq\sigma\}} + I_{\{\tau\leq\sigma\}})] \\ &= E[M_\sigma(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})I_{\{\tau<\sigma\}}]. \end{aligned}$$

Si $w \in N = \{w : \tau(w) < \sigma(w)\}$, entonces $\langle M\rangle_{\tau(w)}(w) = \langle M\rangle_{\sigma(w)}(w)$, por la Proposición 16, concluimos que

$$M_\sigma I_{\{\tau<\sigma\}} = M_\tau I_{\{\tau<\sigma\}},$$

entonces

$$\begin{aligned} E[D_\sigma] = E[M_\tau I_{\{\tau<\sigma\}}(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})] &= E[M_{\tau\wedge\sigma} I_{\{\tau<\sigma\}}(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})] \\ &= E[E[M_{\tau\wedge\sigma} I_{\{\tau<\sigma\}}(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}]] \\ &= E[M_{\tau\wedge\sigma} I_{\{\tau<\sigma\}} E[(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}]]. \end{aligned}$$

y por el Teorema del muestreo opcional, se tiene que $E[(B_\sigma - B_{\tau\wedge\sigma})|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}]] = 0$, entonces $E[D_\sigma] = 0$ para todo tiempo de parada acotado. Por lo tanto D es una martingala.
Del análisis anterior se tiene que $E[X^2_t - t|\mathscr{F}_s] = X^2_s - s$, y por el Teorema de Lévy concluimos que el proceso $X_t = M_t + (B_t - B_{t\wedge\tau})$ es un movimiento Browniano.

Conclusiones

El único (unicidad en ley) proceso M que es martingala local continuo y cuya variación cuadrática genera la medida de Lebesgue es el movimiento Browniano, Teorema 9. Este resultado caracteriza de manera única al movimiento Browniano a través de la propiedad de ser martingala.
La relación que existe entre una martingala local continua M y el movimiento Browniano, es que uno puede modificar el tiempo de una manera aleatoria de tal forma que el nuevo proceso generado sea un movimiento Browniano, es decir, podemos encontrar una familia de tiempos de parada $\{\tau_t\}$, tal que $\{M_{\tau_t}\}$ es una movimiento Browniano. Esta familia de tiempos de parada se construye usando la variación cuadrática de M, por eso la importancia de definir $\langle M \rangle$.
El nexo que existe entra prueba de los Teoremas 9 y 10 es la integral estocástica y fórmula de Itô.

Apéndice A

Resultados de Probabilidad

En este apéndice se desarrollarán algunos tópicos de teoría de la probabilidad que han sido utilizados a lo largo de este trabajo.

A continuación introducimos un importante concepto, muy utilizado en teoría de la probabilidad: "Independencia"
Consiredemos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ es otro espacio medible y $X : \Omega \to \Omega_1$ es una función medible, definimos la probabilidad μ_X inducida por X, sobre $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, como

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)) \ , \ \forall \ B \in \mathcal{F}_1$$

Dos eventos aleatorios $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Extendamos la definición de independencia para sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$, sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$, son independientes si, y sólo si, para cualquiera $A_i \in \mathcal{G}_i, \ i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Ahora extendemos esta definición para variables aleatorias, pues los criterios de independencia, dados en esta sección, nos ayudarán a construir el movimiento Browniano en el Capítulo 2.

Decimos que las variables aleatorias reales $\{X_i \ : \ 1 \leq i \leq n\}$ (i.e $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\forall \ i = 1, \ldots, n$) son indenpendientes si, y sólo si, para $\{B_i \ : \ 1 \leq i \leq n\}$, conjuntos Borelianos de $\mathbb{R}$, se tiene:

$$P\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i)\} = P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$$

Una familia infinita de variables aleatorias, se dice que son independientes si, y sólo si, toda subfamilia finita es independiente.
Ahora estableceremos un criterio de independencia para variables aleatorias. Sea μ^n la medida inducida, sobre $\mathbb{R}^n$, por el vector aleatorio $Y = (X_1, \ldots, X_n)$, y $\mu_i,\ 1 \leq i \leq n$, las medidas inducidas, sobre $\mathbb{R}$, por los $X_i,\ 1 \leq i \leq n$, entonces tenemos:

Proposición 17 *Sean $\{B_i\ :\ 1 \leq i \leq n\}$ conjuntos Borelianos. Si las variables aleatorias $\{X_i\ :\ 1 \leq i \leq n\}$ son independientes, entonces*

$$\mu^n(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(B_i)$$

La proposición anterior puede ser mejorada si la enunciamos en términos de sus funciones de distribución. Para eso estableceremos primero, algunas definiciones previas.
Definimos la función de distribución de un vector aleaorio $Y = (X_1, \ldots, X_n)$ como la función

$$F_Y(x_1, \ldots, x_n) = P(X_i \leq x_i,\ 1 \leq i \leq n)$$

A continuación damos el criterio de independencia:

Proposición 18 (Criterio de independencia)

(i) Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, entonces

$$F_Y(x_1, \ldots, x_n) = \mu^n((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

Para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Recíprocamente, si exiten funciones $F_1, \ldots, F_n$ tales que $\lim_{x\to\infty} F_i(x) = 1$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$ y

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i),\ \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

entonces $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y $F_i = F_{X_i},\ \forall\ i = 1, \ldots, n$.

La demostración de las proposiciones anteriores pueden ser encontradas en [1, Prop 2.4] [3, Teorema 3.3.3].
La esperanza de una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, denotada por $E[X]$, se define como

$$E[X] = \int_{\Omega} X(w)P(dw)$$

Más generalmente, para cada $\Lambda \in \mathcal{F}$, definimos

$$E[X : \Lambda] = \int_{\Lambda} X(w)P(dw) = E[X, 1_{\Lambda}]$$

Si la variable aleatoria X es cuadrado integrable, entonces se define la varianza de X como

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[(X - E[X])^2]$$

Sea X una variable aleatoria y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ un σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Entonces $\mu(B) = E[X : B] = \int_B X(w)P(dw), \quad B \in \mathcal{G}$ define una función σ-aditiva sobre $\mathcal{G}$, que claramente es absolutamente continua respecto a $\nu = P \mid_{\mathcal{G}}$. Por el Teorema de Radon-Nikodym existe una única variable aleatoria Y que es $\mathcal{G}$-medible, tal que $\mu(B) = E[X : B] = \int_B X(w)P(dw) = \int_B Y(w)\nu(dw)$. A la variable aleatoria Y, se le denota por $E[X \mid \mathcal{G}]$, entonces se tiene $E[E[X \mid \mathcal{G}] : B] = E[X : B]\ , \ \forall\, B \in \mathcal{G}$

Definición 28 *Sea X una variable aleatoria tal que $E[|X|] < \infty$. Definimos la esperanza condicional de X dado $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$, denotado por $E[X \mid \mathcal{G}]$, como la única variable aleatoria que satisface*

(1) $E[X \mid \mathcal{G}]$ *es $\mathcal{G}$-medible.*

(2) $\int_B E[X \mid \mathcal{G}]P(dw) = \int_B X(w)P(dw)$

La existencia de la esperanza condicional está garantizada gracias al Teorema de Radon-Nikodym.
Las principales propiedades de la esperanza condicional son:

Teorema 14 *Sea $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ otra variable aleatoria con $E[|Y|] < \infty$ y $a, b \in \mathbb{R}^n$. Entonces:*

a) $E[aX + bY \mid \mathcal{G}] = aE[X \mid \mathcal{G}] + bE[Y \mid \mathcal{G}]$.

b) $E[E[X \mid \mathcal{G}]] = E[X]$.

c) $E[X \mid \mathcal{G}] = X$, *si X es $\mathcal{G}$-medible.*

d) $E[X \mid \mathcal{G}] = E[X]$, *si X es independiente de $\mathcal{G}$.*

e) $E[Y \cdot X \mid \mathcal{G}] = Y \cdot E[X \mid \mathcal{G}]$, *si Y es $\mathcal{G}$-medible, donde $\cdot$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 15 *Sea $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ sub σ-algebras de $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Entonces*

$$E[X \mid \mathcal{H}] = E[E[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}].$$

Teorema 16 (Desigualdad de Jensen) *Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una funcion convexa y $E[|\phi(X)|] < \infty$ entonces*

$$\phi(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[\phi(X) \mid \mathcal{G}].$$

Corolario 6 *i)* $|E[X \mid \mathcal{G}]| \leq E[|X| \mid \mathcal{G}]$

ii) $|E[X \mid \mathcal{G}]|^2 \leq E[|X|^2 \mid \mathcal{G}]$

Ahora introduciremos el concepto de integrabilidad uniforme, que fue útil en la teoría de martingalas que se usó en la sección 4 del Capítulo 1.

Definición 29 *Una familia de variables aleatorias* $\{X_t\}$, $t \in T$, *donde* T *es un conjunto arbitrario de índices, se dice que es* **uniformemente integrable o equi-integrable** *si, y sólo si*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{|X_t| > \lambda} |X_t| dP = 0$$

uniformemente en $t \in T$.
La definición anterior también puede expresarse como

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_t \int_{|X_t| > \lambda} |X_t| dP = 0$$

Teorema 17 *La familia* $\{X_t\}$ *es uniformemente integrable si, y sólo si, se satisfacen las dos condiciones:*

i) $E[|X_t|]$ *es acotada en* $t \in T$;

ii) Para cada $\epsilon > 0$, *existe* $\delta(\epsilon) > 0$ *tal que para cada* $A \in \mathscr{F}$:

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_t| dP < \epsilon, \quad \textit{para cada} \;\; t \in T$$

Prueba: La prueba de (i) es trivial de la definición de integrabilidad uniforme. Ahora sea $A \in \mathscr{F}$ y definamos el conjunto $A_t = \{w : |X_t(w)| > \lambda\}$. Entonces tenemos

$$\int_A |X_t| dP = (\int_{A \cap A_t} + \int_{A - A_t})|X_t| dP \leq \int_{A_t} |X_t| dP + \lambda P(A)$$

Dado $\epsilon > 0$, existe un $\lambda = \lambda(\epsilon)$ tal que la integral del lado derecho de la desigualdad es menor que $\epsilon/2$ para cada $t \in T$. Ahora, si elegimos $\delta = \dfrac{\epsilon}{2\lambda}$, se obtiene (ii) apartir de la última desigualdad.
Recíprocamente, supongamos que (i) y (ii) se cumple. Entonces por la desigualdad de Chebyshev, tenemos para todo t

$$P[|X_t| > \lambda] \leq \frac{E[|X_y|]}{\lambda} \leq \frac{M}{\lambda}$$

donde M es la cota dada por (i). Si $\lambda > \dfrac{M}{\delta}$, entonces $P[A_t] < \delta$, y por la condición (ii) se tiene que

$$\int_{A_t} |X_t| dP < \epsilon$$

de donde se obtiene $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \int_{|X_t| > \lambda} |X_t| dP = 0$.

Teorema 18 *Sea* $0 < r < \infty$, $X_n \in \mathscr{L}^r$, *y* $X_n \to X$ *en probabilidad. Entonces las siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

i) $\{|X_n|^r\}$ *es equi-integrable;*

ii) $X_n \to X$ *en* $\mathscr{L}^r$*;*

iii) $E[|X_n|^r] \to E[|X|^r]$.

Prueba: La prueba de este teorema puede ser encontrada en [3].

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una familia $\mathscr{S} \subset \mathscr{F}$ es llamado **sistema Dynkin o d-sistema** si se verifica:

i) $\Omega \in \mathscr{S}$.

ii) $A, B \in \mathscr{S},\ A \subset B \Rightarrow B - A \in \mathscr{S}$.

iii) $A_n \in \mathscr{S},\ A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathscr{S}$

Lema 8 *Sea* $\mathscr{S} \subset \mathscr{F}$ *una familia cerrada por intersecciones finitas y denotemos por* $d[\mathscr{S}]$ *el d-sistema más pequeño que contiene a* $\mathscr{S}$*. Entonces* $d[\mathscr{S}] = \sigma[\mathscr{S}]$.

Para finalizar este apéndice hablaremos sobre el Lema de Borel-Cantelli, que es útil para afirmar que $\mathscr{M}_2^c$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{M}_2$.
Sea $A_1, A_2, \ldots$ una secuencia de eventos de Ω, definimos el límite superior de la secuencia como

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

y el límite inferior por

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

El evento $\limsup A_n$ es el evento "ocurrencia de un número infinito de los A_n". por la siguiente razón:
si $w \in \limsup A_n$, entonces

$$w \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall\ n.$$

Como $w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, existe algún k_1, tal que $w \in A_{k_1}$. Nuevamente como $w \in \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} A_k$, existe $k_2 > k_1$ tal que $w \in A_{k_2}$. De esta manera obtenemos una secuencia creciente de enteros poistivos $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ que dependen de w, tales que $w \in A_{k_n}\ \forall\ n$. Por lo tanto w pertenece a un número infinito de los A_n. Recíprocamente, si w pertenece a un número infinito de los A_n, entonces

$$w \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall\, n.$$

de modo que $w \in \limsup A_n$.

Antes de enunciar el Teorema de Borel-Cantelli definimos el conjunto

$$[A_n \text{ infinitas veces}] = \{w \in \Omega : \text{ existen infinitos índices } n \text{ tal que } w \in A_n\}.$$

Pudiendose demostrar que

$$\limsup A_n = [A_n \text{ infinitas veces}].$$

Con esta notación tenemos:

Proposición 19 (Lema de Borel-Cantelli) *Sean* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *una secuencia de eventos aleatorios en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] < \infty$ *entonces* $P[A_n \textit{ infinitas veces}] = 0$.

ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] = \infty$ *y si los* A_n *son independientes, entonces* $P[A_n \textit{ infinitas veces}] = 1$.

La prueba de este lema puede ser encontrado en [3, Teoremas 4.2.1 y 4.2.4],[1, Prop 5.2].

Un uso del Lema de Borel-Cantelli es el siguiente resultado

Teorema 19 $X_n \to 0$ *en c.t.p. si, y sólo si*

$$\forall\, \epsilon > 0 : \quad P[|X_n| > \epsilon \textit{ infinitas veces }] = 0.$$

Apéndice B

Dos Teoremas importantes

La revisión de este apéndice puede ser obviado en una primera lectura de la tesis, porque no es indispensable para el desarrollo de todo el trabajo, pues los único objetivos de este apéndice son probar el Teorema del muestreo opcional, herramienta indispensable en la teoría de proceso estocásticos y dar las hipótesis más generales a un proceso estocástico para el cual existe la variación cuadrática de manera única.

B.1. El Teorema del muestreo opcional

En esta sección desarrollaremos primero una teoría de procesos estocásticos a tiempo discreto, pues para llegar a la prueba del Teorema del muestreo opcional a tiempo continuo, Teorema 3, tomamos límite, a una sucuencia de variable aleatorias, que puede entenderse como el límite de un proceso estocástico a tiempo discreto.

Definición 30 *El proceso estocástico a tiempo discreto $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con filtro $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se denomina martingala(resp. submartingala, supermartingala) si*

i) $E[|X_n|] < \infty, \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$

ii) X_n *es* $\mathscr{F}_n$*-medible*

iii) $X_n = E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]$ *(resp.* $E[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] \geq X_n$*,* $E[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] \leq X_n$*) c.t.p.*

Ejemplo 3:
Supongamos que formamos parte de un juego de azar, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda. Sea $\eta_1, \eta_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias, donde η_k es lo que gana o pierde en el k-esimo juego por unidad de apuesta (es decir, si gana, le asignamos +1 y si pierde, le asigmanos -1, entonces si apuesta α en el k-esimo juego puede ganar $+\alpha$ o perder $-\alpha$), entonces la ganancia total despues del n-esimo juego será

$$\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$$

Tomemos las filtración $\mathscr{F}_n = \sigma(\eta_1, \dots, \eta_n)$, y coloquemos por comodidad $\xi_0 = 0$ y $\mathscr{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$

Cada ξ_n es integrable y, se ve con facilidad que el proceso es adaptado al filtro $\mathscr{F}_n$. Ahora

i) Si $P[\eta_n = 1] = P[\eta_n = -1] = \dfrac{1}{2} \quad \forall\ n = 1, 2, \dots$, es decir se tiene la misma probabilidad de ganar y de perder (es un juego justo), entonces

$$E[\eta_n] = \int_\Omega \eta_n dP = \int_{\eta_n=1} \eta_n dP + \int_{\eta_n=-1} \eta_n dP = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

es decir, la esperanza de ganar en cada juego es la misma, independiente de los resultados previos. Ahora

$$E[\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = E[\eta_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] + E[\xi_n \mid \mathscr{F}_n] = E[\eta_{n+1}] + \xi_n = \xi_n$$

es decir, (ξ_n) es una martingala.

ii) Despues de la $n-1$- jugada, la información acumulada está representada por el σ-álgebra $\mathscr{F}_{n-1}$. Si manipulamos las probabilidades de tal manera que la probabilidad de ganar sea mayor a la de perder en la n-ésima jugada, el juego será favorable para el apostador. Lo descrito anteriormente queda plasmado matemáticamente en la expresión

$$E[\xi_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] \geq \xi_{n-1}, \text{ (submartingala).}$$

Si las probabilidades se acomodan, de tal manera que la probabilidad de perder sea mayor a la de ganar en la n-ésima jugada, el juego será desfavorable para el apostador, es decir, se tendrá $E[\xi_n] \leq E[\xi_{n-1}]$. Lo descrito anteriormente es representado por

$$E[\xi_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \xi_{n-1}, \text{ (supermartingala)}$$

Proposición 20 *Sea* (X_n) *una martingala* (*submartingala*) *con respecto a la filtración* $(\mathscr{F}_n)$ *y* H_n, $n = 1, 2, \dots$ *un proceso positivo acotado tal que* H_n *es* $\mathscr{F}_{n-1}$*-medible para* $n > 1$. *Entonces el proceso*

$$Y_0 = X_0, \qquad Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1})$$

es una martingala.

Prueba: Observar que $Y_n,\ X_n,\ X_{n-1}$ son $\mathscr{F}_n$-medible, como (X_n) es martingala entonces $E[X_n - X_{n-1} \mid \mathscr{F}_n] = E[X_n \mid \mathscr{F}_n] - E[X_{n-1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n - X_n = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] &= E[Y_n + H_n(X_n - X_{n-1}) \mid \mathscr{F}_n] = E[Y_n \mid \mathscr{F}_n] + E[H_n(X_n - X_{n-1}) \mid \mathscr{F}_n] \\ &= Y_n + H_n E[X_n - X_{n-1} \mid \mathscr{F}_n] = Y_n \end{aligned}$$

Al proceso Y lo denotamos por $Y = H \cdot X$. □

Proposición 21 *Sea* (X_n) *una martingala(submartingala) con respecto a la filtración* $(\mathscr{F}_n)$ *y* τ *un tiempo de parada. Entonces* $X^\tau = (X_{\tau\wedge n})$ *es una martingala(submartingala).*

Prueba: Sea $H_n = I_{n\leq\tau}, n = 1,2,\ldots$ entonces H_n es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible, pues $\{n \leq \tau\} = [\bigcup_{k=0}^{n-1}\{\tau = k\}]^c \in \mathscr{F}_{n-1}$. Ahora probaremos que $Y = H \cdot X = X^\tau$. Procedemos por inducción:
Si $n = 1$, entonces $Y_1 = Y_0 + H_1(X_1 - X_0) = X_0 + I_{1\leq\tau}(X1 - X_0) = X_{\tau\wedge 1}$.
Supongamos que $Y_n = X_{\tau\wedge n}$ (Hipótesis inductiva), entonces

$$Y_{n+1} = Y_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) = X_{\tau\wedge n} + I_{n+1\leq\tau}(X_{n+1} - X_n)$$

i) Si $\tau(w) < n+1$

$$Y_{n+1}(w) = Y_n(w) = X_{\tau(w)\wedge n}(w) = X_{\tau(w)}(w) = X_{\tau(w)\wedge n+1}$$

ii) Si $\tau(w) \geq n+1$

$$Y_{n+1}(w) = X_{\tau(w)\wedge n}(w) + X_{n+1}(w) - X_n(w) = X_{n+1}(w) = X_{\tau(w)\wedge n+1}(w).$$

□

El proceso X^τ es obtenido al parar el proceso X en el tiempo τ, que también es una martingala por la proposición anterior.

Teorema 20 (Teorema del Muestreo Opcional) *Sea* $X = (X_n)$ *una martingala (resp. submartingala, supermartingala) relativa a* $(\mathscr{F}_n)$ *y sean* τ, σ *dos tiempos de parada acotados tal que* $\sigma(w) \leq \tau(w)$ *para todo* w*, entonces*

$$E[X_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma] = X_\sigma \qquad (resp. \geq,\ \leq)\ \ c.t.p \tag{B.1}$$

En particular

$$E[X_\tau] = E[X_\sigma] \qquad (resp. \geq,\ \leq) \tag{B.2}$$

Prueba: Como τ es acotado, existe M tal que $\tau(w) \leq M, \ \forall\ w$. Sea $H_n = I_{\{n\leq\tau\}} - I_{\{n\leq\sigma\}}\ \forall\, n > M$, entonces

$$(H \cdot X)_n - X_0 = X_{\tau\curlywedge n} - X_{\sigma\curlywedge n}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(H \cdot X)_n &= X_0 + \textstyle\sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1}) &= X_0 + \sum_{k=1}^n (I_{k\leq\tau} - I_{k\leq\sigma})(X_k - X_{k-1}) \\ & &= X_0 + X_{\tau\curlywedge n} - X_{\sigma\curlywedge n}\end{aligned}$$

en particular, si $n > M$

$$(H \cdot X)_n - X_0 = X_\tau - X_\sigma$$

como $H \cdot X$ es una martingala, entonces $E[(H \cdot X)_n] = E[X_0], \ \ \forall\, n$, de donde se obtiene

$$E[X_\tau] = E[X_\sigma]$$

Para demostrar la ecuación B.1 definamos los tiempos de parada $\sigma^B = \sigma I_B + M I_{B^c}$ y $\tau^B = \tau I_B + M I_{B^c}$, donde $B \in \mathscr{F}_\sigma$, entonces $\sigma^B \leq \tau^B$. Por la ecuación B.2 se tiene $E[\sigma^B] = E[\tau^B]$, de donde

$$E[X_\tau : B] + E[X_M : B^c] = E[\sigma^B] = E[\tau^B] = E[X_\sigma : B] + E[X_M : B^c]$$

entonces $E[X_\tau : B] = E[X_\sigma : B] \ \forall \ B \in \mathscr{F}_\sigma$, y como $E[X_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma]$ es el único que verifica $E[X_\tau : B] = E[E[X_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma] : B] \ \forall \ B \in \mathscr{F}_\sigma$, entonces $X_\sigma = E[X_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma]$ c.t.p. □

A continuación daremos algunos resultados sobre convergencia de martingalas, submartingalas y supermartingalas bajo ciertas condiciones. La importancia de saber si una martingala (resp. submartingala, supermartingala) converge o no, radica en la necesidad de conocer el comportamiento de proceso estocástico, por ejemplo si tenemos un proceso (X_t) y **se conoce** alguna variable aleatoria Y, que verifique

$$X_t = E[Y \mid \mathscr{F}_t], \ \ \forall\, t \in [0, \infty)$$

donde $(\mathscr{F}_t)$ es el filtro del proceso, entonces podemos interpretar cada X_t simplemente como el resultado de observaciones de la variable aleatoria Y para cada $t \in [0, \infty)$.
Una herramienta necesaria en el estudio de convergencia de martingalas es la desigualdad de Doob en tiempo discreto.

Teorema 21 (Desigualdad de Doob) *Sea $X = (X_n)$ una submartingala, entonces para $\lambda > 0$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$\lambda P[\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda] \leq E[X_N : \max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda] \leq E[X_N^+] \leq E[|X_N|] \tag{B.3}$$

y

$$\lambda P[\min_{0 \leq n \leq N} X_n \leq -\lambda] \leq -E[X_0] + E[X_N : \min_{0 \leq n \leq N} X_n > -\lambda] \leq E[|X_0|] + E[|X_N|] \tag{B.4}$$

Prueba: Para probar la desigualdad B.3 definamos el tiempo de parada

$$\tau = \begin{cases} min\{n \leq N; X_n \geq \lambda\} & , \ \text{si este conjunto es no vacío} \\ N & ; \ \text{otro caso.} \end{cases}$$

claramente se tiene $\tau \leq N$, entonces por el teorema anterior

$$\begin{aligned} E[X_n] &\geq E[X_\tau] = E[X_\tau I_{\{\max\limits_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda\}}] + E[X_\tau I_{\{\max\limits_{0 \leq n \leq N} X_n < \lambda\}}] \\ E[X_n] &\geq E[X_\tau I_{\{\max\limits_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda\}}] + E[X_N : \{\max_{0 \leq n \leq N} X_n < \lambda\}] \end{aligned}$$

Ahora

$$E[X_\tau I_{\{\max\limits_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}}] = \int_\Omega X_\tau I_{\{\max\limits_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}} dP = \int_{\{\max\limits_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}} X_\tau dP$$

si $w \in \{\max\limits_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}$ se tiene $X_\tau(w) = X_{\tau(w)}(w) \ge \lambda$ pues $\tau(w) \le N$, entonces

$$\int_{\{\max\limits_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}} X_\tau dP \ge \lambda \int_{\{\max\limits_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}} dP = \lambda P[\max_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda]$$

por lo tanto

$$\lambda P[\max_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda] + E[X_N : \{\max_{0\le n\le N} X_n < \lambda\}] \le E[X_n]$$

$$\lambda P[\max_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda] \le E[X_n] - E[X_N : \{\max_{0\le n\le N} X_n < \lambda\}] = E[X_N : \max_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda]$$

y como $X_N \le X_N^+ \le |X_N|$ se tiene la desigualdad B.3 completa.
Para probar la desigualdad B.4, sólo tomamos el tiempo de parada

$$\tau = \begin{cases} min\{n \le N; X_n \le -\lambda\} & , \text{ si este conjunto es no vacío} \\ N & ; \text{ otro caso.} \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $E[X_0] \le E[X_\tau]$. □

Corolario 7 *Sea $X = (X_n)$ una martingala tal que $E[|X_n|^p] < \infty$, $\forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$ y $p \ge 1$. Entonces para cada N se tiene*

$$P[\max_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda] \le \frac{E[|X_N|^p]}{\lambda^p} \tag{B.5}$$

y si $p > 1$ se tiene

$$E[|X_N|^p] \le E[\max_{0\le n\le N} |X_n|^p] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p] \tag{B.6}$$

Prueba: Por la desigualdad de Jensen, $n \to |X_n|^p$ es una submartingala, y por el Teorema 21 se tiene la desigualdad B.5. Para probar la desigualdad B.6 hacemos $Y = \max\limits_{0\le n\le N} |X_n|$ y por el Teorema 21 se tiene

$$\lambda P[Y \ge \lambda] \le E[|X_N| : \max_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda] = \int_\Omega I_{\{Y\le\lambda\}} |X_N| dP$$

Luego

$$\begin{aligned} E[Y^p] &= \int_\Omega dP \int_0^Y p\lambda^{p-1} d\lambda = \int_\Omega dP \int_0^\infty I_{\{Y\ge\lambda\}} p\lambda^{p-1} d\lambda \\ &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} P[Y \ge \lambda] d\lambda \le p \int_0^\infty \int_\Omega \lambda^{p-2} I_{\{Y\le\lambda\}} |X_N| dP d\lambda \\ &\le \frac{p}{p-1} \int_\Omega Y^{p-1} |X_N| dP = \frac{p}{p-1} E[Y^{p-1}|X_N|] \end{aligned}$$

usando la desigualdad de Hölder se tiene

$$E[Y^p] \leq \frac{p}{p-1} E[|X_N|^p]^{\frac{1}{p}} E[Y^p]^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces

$$E[Y^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p]$$

y como $E[Y^p] = E[\max\limits_{0\leq n\leq N} |X_n|^p]$, se tiene $E[\max\limits_{0\leq n\leq N} |X_n|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p]$. La otra desigualdad es trivial. □

El resultado anterior puede extenterse para un intervalo $[0,T]$ de la siguiente manera, Sea $\{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$ una ordenación de $D = [0,T] \cap \mathbb{Q}$, y denotemos por D_n los n primeros racionales de dicha ordenación, entonces $\bigcup_n D_n = D$. Ahora aplicamos el Corolario 7 a cada D_n, obteniendo

$$\lambda^p P[\sup_{t\in D_n} |X_t| \geq \lambda] \leq \sup_{t\in D_n} E[|X_t|^p], \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y si $p > 1$ se tiene

$$E[\sup_{t\in D_n} |X_n|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in D_n} E[|X_t|^p], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

tomando límite en n y observando que $E[|X_t|^p]$ es creciente en t, se tiene

$$\lambda^p P[\sup_{t\in D} |X_t| \geq \lambda] \leq \sup_{t\in D} E[|X_t|^p], \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{B.7}$$

y si $p > 1$ se tiene

$$E[\sup_{t\in D} |X_t|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in D} E[|X_t|^p], \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{B.8}$$

Observar que el resultado anterior es verdad sin ninguna hipótesis para el filtro o algún tipo de continuidad para el proceso, sólo se requerían las hipótesis del Corolario 7. Ahora, para pasar al conjunto continuo $[0,T]$, evidentemente necesitamos una hipótesis de continuidad para procesos. El siguiente teorema es la versión continua del Corolario 7.

Teorema 22 *Si X es una martingala continua a la derecha o submartingala positiva indexada por el intervalo $[0,T]$, entonces si $X^* = \sup\limits_t |X_t|$, para $p \geq 1$*

$$\lambda^p P[X^* \geq \lambda] \leq \sup_t E[|X_t|^p]$$

y si $p > 1$ se tiene

$$\| X^* \|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_t \| X_t \|_p$$

Prueba: El resultado es inmediato usando B.7 y B.8 y observando que la continuidad por la derecha da la igualdad $X^* = \sup_{t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}} |X_t|$. $\square$

Ahora presentaremos una nueva desigualdad que será una herramienta muy útil para demostrar el teorema principal de convergencia de una martingala. Para este propósito daremos previamente una definición que nos ayudará a comprender bajo que condición ocurre la convergencia.

Sea $a < b$. El número de veces ν que cruza la secuencia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ el intervalo $[a, b]$ se define de la siguiente manera:

$$\alpha_1 = min\{j : 1 < j \leq n, x_j \leq a\}$$

$$\alpha_2 = min\{j : \alpha_1 < j \leq n, x_j \geq b\}$$

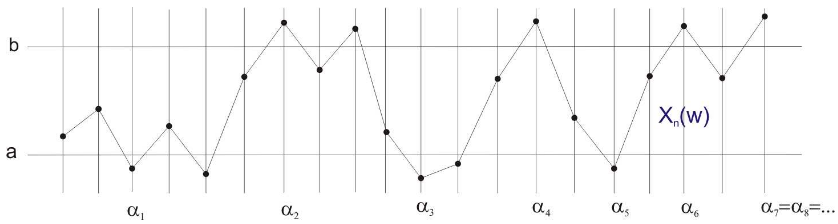
Si alguno de los α_1 o α_2 no está definido por que no existe dicho j, definimos $\nu = 0$. En general, para $k \geq 2$ se tiene

$$\alpha_{2k-1} = min\{j : \alpha_{2k-2} < j \leq n, x_j \leq a\}$$

$$\alpha_{2k} = min\{j : \alpha_{2k-1} < j \leq n, x_j \geq b\}$$

Sea α_l el último de los $\alpha' s$ definidos, con $l = 0$ si α_1 no está definido, entonces $\nu = \left[\!\left[\frac{l}{2}\right]\!\right]$

La defición anterior puede aplicarse a una martingala (X_n), aplicada en un punto w, donde $x_j = X_j(w)$, entonces en el siguiente gráfico se observa la definición de una manera más clara:



Teorema 23 *Sea* $\{X_j, \mathscr{F}_j : j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}\}$ *una submartingala y* $-\infty < a < b < \infty$. *Sea* $\nu_N^X[a, b](w)$ *el número de veces que la secuencia* $\{X_j(w) : j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}\}$ *cruza el intervalo* $[a, b]$. *Entonces tenemos*

$$E\{\nu_N^X[a, b]\} \leq \frac{E[(X_N - a)^+ - (X_0 - a)^+]}{b - a}$$

Prueba: Por la desigualdad de Jensen, $Y = (Y_n)$, donde $Y_n = (X_n - a)^+,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ es también una submartingala y $\nu_N^X[a, b] = \nu_N^Y[0, b-a]$. Observar que $Y_{\alpha_j}(w) = 0$ si j es impar, donde $\alpha_j = \alpha_j(w)$ es definido como en la parte superior, con $x_j = X_j(w)$. Para cada w, la secuencia $\alpha_j(w)$ esta definido sólo para $j \leq l(w)$, donde $l(w) \leq N$. Ahora vamos a extender la definición de los α_j para $1 \leq j \leq N$, donde $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_j = N$ para $j \geq l(w) + 1$. Ahora

$$Y_N - Y_0 = Y_{\alpha_N} - Y_{\alpha_0} = \sum_{j=0}^{N-1} (Y_{\alpha_{j+1}} - Y_{\alpha_j}) = \sum_{j\ par} + \sum_{j\ impar} \tag{B.9}$$

i) Si j es impar y $j + 1 \leq l(w)$, entonces

$$Y_{\alpha_{j+1}}(w) \geq b - a > 0 = Y_{\alpha_j}(w)$$

i) Si j es impar y $j = l(w)$, entonces

$$Y_{\alpha_{j+1}}(w) = Y_{\alpha_N}(w) \geq Y_{\alpha_j}$$

i) Si j es impar y $l(w) < j$, entonces

$$Y_{\alpha_{j+1}}(w) = Y_{\alpha_N}(w) = Y_{\alpha_j}$$

De todos los casos anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j\ impar} (Y_{\alpha_{j+1}}(w) - Y_{\alpha_j}(w)) &\geq \sum_{\substack{j\ impar \\ j+1 \leq l(w)}} (Y_{\alpha_{j+1}}(w) - Y_{\alpha_j}(w)) \\ &\geq \left[\!\left[\frac{l(w)}{2} \right]\!\right] (b - a) = \nu_N^X[a, b](w)(b - a) \end{aligned} \tag{B.10}$$

Continuando, observe que $\{\alpha_j : 0 \leq j \leq N\}$ cumple con $0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_l \leq \alpha_{l+1} = \cdots \alpha_N = N$ y forman una secuencia creciente de tiempos de parada, entonces por el Teorema 20, $\{X_{\alpha_j}\}$ es una submartingala, entonces se tiene $E[X_{\alpha_{j+1}} - X_{\alpha_j}] \geq 0$ y consecuentemente

$$E[\sum_{j\ par} (Y_{\alpha_{j+1}} - Y_{\alpha_j})] \geq 0$$

De las desigualdades (B.9) y (B.10) se tiene que

$$E[Y_N - Y_0] \geq E[\nu_N^X[a, b]](b - a)$$

y como $E[Y_N - Y_0] = E[(X_N - a)^+ - (X_0 - a)^+]$ se tiene la desigualdad buscada. □

Teorema 24 *Si $X = (X_n)$ es una submartingala tal que*

$$\sup_n E[X_n^+] < \infty \tag{B.11}$$

entonces $X_\infty = \lim n \to \infty X_n$ existe c.t.p. y X_∞ es integrable.

Prueba: Dado que $E[|X_n|] = 2E[X_n^+] - E[X_n] \leq 2E[X_n^+] - E[X_0]$, tenemos que $\sup\limits_n E[|X_n|] < \infty$ por (B.11). Si X_n convergiera se tendría que X_∞ es integrable. Para probar que (X_n) converge en c.t.p. basta probar que el conjunto $\{w : \liminf_{n\to\infty} X_n(w) < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n(w)\}$ tiene medida cero. Para este propósito observemos que $\nu_\infty^X[a,b] = \lim\limits_{N\to\infty} \nu_N^X[a,b]$ y

$$\{w : \liminf_{n\to\infty} X_n(w) < \limsup_{n\to\infty} X_n(w)\} = \bigcup_{\substack{r,r'\in\mathbb{Q}\\ r<r'}} \{w : \nu_\infty^X[r,r'](w) = \infty\}. \qquad \text{(B.12)}$$

La última igualdad de conjuntos es clara, puesto que si w pertenece al conjunto del lado derecho de la última igualdad, se tiene que la secuencia $\{X_j(w)\}$ esta por debajo y por encima del intervalo (r,r'), para algunos $r,r' \in \mathbb{Q}$, esto quiere decir que la sucesión $\{X_j(w)\}$ oscila, es decir no converge. Ahora por el Teorema 23

$$\begin{aligned} E[\nu_\infty^X[r,r']] &= \lim N \to \infty E[\nu_N^X[r,r']] \\ &\leq \frac{1}{r-r'} \lim_{N\to\infty} E[(X_N - r)^+ - (X_0 - r)^+] \end{aligned}$$

y por (B.11) tenemos que $E[\nu_\infty^X[r,r']] < \infty$ para todo $r,r' \in \mathbb{Q}$ con $r < r'$, esto quiere decir que el conjunto $\{w : \nu_\infty^X[r,r'](w) = \infty\}$ casi nunca ocurre, es decir $P[w : \nu_\infty^X[r,r'](w) = \infty] = 0$ y como $\bigcup\limits_{\substack{r,r'\in\mathbb{Q}\\ r<r'}} \{w : \nu_\infty^X[r,r'](w) = \infty\}$ es una unión numerable, se (B.12) se concluye que $P[\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n] = 0$. $\square$

Teorema 25 *Sea $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ una submartingala satisfaciendo la condición (B.11) y sea $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$. Para que $\overline{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{\infty\}}$ sea una submartingala, esto es, $X_n \leq E[X_\infty \mid \mathscr{F}_n]$, $n = 0,1,2,\ldots$, es necesario y suficiente que $\{X_n^+\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sea equi-integrable.*

Prueba: Si $X_n \leq E[X_\infty \mid \mathscr{F}_n]$, por la desigualdad de Jensen tenemos $X_n^+ \leq E[X_\infty^+ \mid \mathscr{F}_n]$ entonces $E[X_n^+ : X_n^+ > \lambda] \leq E[X_\infty^+ : X_n^+ > \lambda]$. Por la desigualdad de Chebyshev tenemos $P[X_n^+ > \lambda] \leq \dfrac{E[X_n^+]}{\lambda} \leq \dfrac{E[X_\infty^+]}{\lambda}$, es decir $P[X_n^+ > \lambda] \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$, entonces

$$\int_{\{X_n^+>\lambda\}} X_n^+ dP \leq \int_{\{X_n^+>\lambda\}} X_\infty^+ dP$$

entonces $\lim\limits_{\lambda\to 0} \displaystyle\int_{\{X_n^+>\lambda\}} X_n^+ dP = 0$.

Recíprocamente, si $\{X_n^+\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ es equi-integrable entonces $\lim\limits_{n\to\infty} X_n^+ = X_\infty^+$ existe en c.t.p. y $\lim\limits_{n\to\infty} X_n^+ \vee (-a) = X_\infty^+ \vee (-a)$. Dado que $(X_n^+ \vee (-a))$ es una submartingala, tenemos

$$E[X_\infty^+ \vee (-a) \mid \mathscr{F}_n] = \lim_{m\to\infty} E[X_m^+ \vee (-a) \mid \mathscr{F}_n] \geq X_n^+ \vee (-a)$$

haciendo $a \uparrow \infty$, se tiene $X_n \leq E[X_\infty \mid \mathscr{F}_n]$. $\square$

Para el caso de martingalas se tiene el siguiente teorema

Teorema 26 *Para $Y \in \mathscr{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definamos $X_n = E[Y \mid \mathscr{F}_n]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces (X_n) es una martingala equi-integrable y $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ existe c.t.p. y esta en $\mathscr{L}_1(\Omega)$. Además se tiene*

$$X_\infty = E[Y \mid \mathscr{F}_\infty] \tag{B.13}$$

donde $\mathscr{F}_\infty = \sigma[\bigcup\limits_n \mathscr{F}_n]$.

Prueba: Puesto que $|X_n| \leq E[|Y| \mid \mathscr{F}_n]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ por el Teorema 25 se tiene que $\{X_n\}$ es equi-integrable. También (X_n) es una martingala, porque $E[X_m \mid \mathscr{F}_n] = E[E[Y \mid \mathscr{F}_m] \mid \mathscr{F}_n] = E[Y \mid \mathscr{F}_n] = X_n$. Para probar B.13, consideremos $\mathscr{C} = \{B \in \mathscr{F} : E[X_\infty : B] = E[Y : B]\}$. Si $B \in \mathscr{F}_n$, entonces $E[Y : B] = E[X_n : B] = E[X_\infty : B]$ entonces $\mathscr{C} \supset \bigcup\limits_n \mathscr{F}_n$. Además $\mathscr{C}$ es un d-sistema cerrado por intersecciones finitas, usando el Lema 8, del apéndice A, se tiene $\mathscr{C}\sigma[\bigcup\limits_n \mathscr{F}_n] = \mathscr{F}_\infty$, esto prueba (B.13). $\square$

Corolario 8 *Sea $X = (X_n)$ una martingala equi-integrable. Entonces existe una variable aleatoria integrable Y tal que $X_n = E[Y \mid \mathscr{F}_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba: Basta tomar el $Y = X_\infty$, que sabemos que existe por el teorema 26, entonces sólo falta probar que $X_n = \widehat{X}_n$ c.t.p. donde $\widehat{X}_n = E[X_\infty \mid \mathscr{F}_n]$, pero la prueba de esta afirmación esta incluida en la prueba del Teorema 26. $\square$

Ahora consideremos, por el momento, una martingala con el tiempo invertido. Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathscr{F}_n)_{n=0,-1,-2,\ldots}$ una familia de sub σ-álgebras de $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}_0 \supset \mathscr{F}_{-1} \supset \mathscr{F}_{-2} \supset \cdots$. $X = (X_n)_{n=0,-1,-2,\ldots}$ es llamada martingala (supermartingala, submartingala) si X_n es integrable, $\mathscr{F}_n$-medible tal que $E[X_n \mid \mathscr{F}_m] = X_m$ (resp. $\leq, \geq$), para cada $n, m \in \{0, -1, -2, \ldots\}$ satisfaciendo $n > m$. Entonces se tiene el siguiente teorema que es una versión análoga a la del Teorema 26.

Teorema 27 *Sea $X = (X_n)_{0,-1,-2,\ldots}$ una submartingala tal que*

$$\inf_n E[X_n] > -\infty \tag{B.14}$$

Entonces X es equi-integrable y $\lim n \to -\infty X_n = X_{-\infty}$ *existe en c.t.p. y pertenece a $\mathscr{L}_1(\Omega)$.*

Prueba: Dado que $E[X_n]$ es decreciente y por (B.14) se tiene $\lim_{n\to-\infty} E[X_n]$ existe. Dado un $\epsilon > 0$ existe k_0 tal que $E[X_{k_0}] - \lim_{n\to-\infty} E[X_n] < \epsilon$. Entonces si $n \leq k_0$

$$\begin{aligned} E[|X_n| : |X_n| > \lambda] &= E[X_n : X_n > \lambda] + E[X_n : X_n \geq -\lambda] - E[X_n] \\ &\leq E[X_k : X_n > \lambda] + E[X_k : X_n \geq -\lambda] - E[X_k] + \epsilon \\ &\leq E[|X_k| : |X_k| > \lambda] + \epsilon \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} P[|X_n| > \lambda] &\leq \frac{1}{\lambda} E[|X_n|] = \frac{1}{\lambda}(2E[X_n^+] - E[X_n]) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}(2E[X_0^+] - \lim_{n\to-\infty} E[X_n]) \end{aligned}$$

de estas 2 desigualdades se concluye la equi-integrabilidad, de la misma forma que en el Teorema 25. La demostración que $\lim_{n\to-\infty} X_n$ converge c.t.p. es similar a la del Teorema 26. □

A continuación daremos una extensión de la consecuencia (B.13) del Teorema 26. Sea $\bar{N}$ el conjunto de índices de todos los enteros, esto es

$$\bar{N} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Sea $\{\mathscr{F}_n\}$ un filtro creciente sobre $\bar{N}$, esto es, $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_m$ si $n \leq m$. Adicionemos a este filtro

$$\mathscr{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathscr{F}_n, \qquad \mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathscr{F}_n)$$

Sea $\{Y_n\}_{n\in\bar{N}}$ con su respectivo filtro $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\bar{N}}$. Si $\{Y_n, \mathscr{F}\}$ está definido sólo para N o $-N$, extendemos trivialmente a $\bar{N}$ haciendo $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_1$, $Y_n = Y_1$ para todo $n \leq 0$, o $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_{-1}$, $Y_n = Y_{-1}$, para todo $n \geq 0$. Entonces adoptando estas notaciones se tiene el siguiente resultado

Teorema 28 *Supongamos que los Y_n son dominados por una variable aleatoria Z, esto es:*

$$\sup_n |Y_n| \leq Z$$

y existen $\lim_n Y_n = Y_\infty$ o $Y_{-\infty}$ cuando $n \to \infty$ o $-\infty$. Entonces tenemos

$$\lim_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathscr{F}_n] = E[Y_\infty \mid \mathscr{F}_\infty]; \tag{B.15}$$

$$\lim_{n\to-\infty} E[Y_n \mid \mathscr{F}_n] = E[Y_{-\infty} \mid \mathscr{F}_{-\infty}]. \tag{B.16}$$

En particular, para una variable aleatoria fija Y, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} E[Y \mid \mathscr{F}_n] = E[Y \mid \mathscr{F}_\infty]; \tag{B.17}$$

$$\lim_{n\to -\infty} E[Y \mid \mathscr{F}_n] = E[Y \mid \mathscr{F}_{-\infty}]. \tag{B.18}$$

donde la convergencia tambien se da en $\mathscr{L}^1$ *en ambos casos.*

Prueba: La prueba de este teorema es consecuencia directa de los Teoremas 26, 27 y el Corolario 8. $\square$

Prueba del Teorema 1:

(i) Sea $T > 0$ y $\{r_1, r_2, \ldots\}$ una enumeración del conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, T]$. Para cada N, sea $\{s_1, s_2, \ldots s_N\}$ la ordenación natural de $[r_1, r_2, \ldots, r_N]$, entonces definamos $Y_i = X_{s_i},\ i = 1, 2, \ldots, N$, que es una submartingala. Definamos $\hat{Y} = (Y_i)_{i=0}^{N+1}$ donde $Y_0 = X_0$ y $Y_{N+1} = X_T$ que tambien es una submartingala. Ahora por el teorema 20 y el teorema 23, tenemos

$$P[\max_{1\leq i\leq N} |Y_i| > \lambda] \leq \frac{1}{\lambda}\{E[|X_0|] + E[|X_T|]\}$$

y

$$E[\nu_N^Y[a, b]] \leq \frac{1}{b-a} E[(Y_N - a)^+] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_T - a)^+]$$

Dado que ambas desigualdades se verifican para todo N, se tenemos

$$P[\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]} |X_t| > \lambda] \leq \frac{1}{\lambda}\{E[|X_0|] + E[|X_T|]\}$$

y

$$E[\nu_\infty^{X|_{\mathbb{Q}\cap[0,T]}}[a, b]] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_T - a)^+]$$

para todo λ y $a < b$ par de números racionales.
De ambas desigualdades se concluye que el evento

$$A^n_{a,b} = \{w \in \Omega :\ \nu^X_{[0,n]\cap\mathbb{Q}}[a, b](w) = \infty\},\ n \geq 1,\ a < b$$

tiene medida cero, y como $A^n = \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b\in\mathbb{Q}}} A^n_{a,b}$, entonces A^n tiene medida cero para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto se tiene que $X_{t^+}(w)$ y $X_{t^-}(w)$ existe para $w \in \Omega^* = \bigcup_n A^n$ y $P[\Omega^*] = 1$.

(ii) Sea $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión decreciente de racionales en (t, ∞), tal que $t_n \to t$. Entonces $\{X_{t_n}, \mathscr{F}_{t_n} :\ n \geq 1\}$ es una submartingala inversa, como la del Teorema 27, y la secuencia $\{E[X_{t_n}]\}_{n=1}^\infty$ es decreciente, acotada inferiormente por $E[X_t]$. Por el Teorema 27 se tiene que $\{X_{t_n}, \mathscr{F}_{t_n} :\ n \geq 1\}$ es equi-integrable. Por la propiedad de submartingala tenemos $\int_A X_t dP \leq \int_A X_{t_n} dP$, para todo $n \geq 1$ y $A \in \mathscr{F}_t$, como

$\{X_{t_n}\}$ es equi-integrable, por el Teorema 26 del Apéndice A, también converge en $\mathscr{L}^1$. Luego, haciendo $n \to \infty$ tenemos $\int_A X_t dP \leq \int_A X_{t^+} dP = \int_A E[X_{t^+} \mid \mathscr{F}_t]$, para todo $A \in \mathscr{F}_t$ obteniendo así la primera desigualdad de (ii).

Para la otra desigualdad, tomamos una sucesión $\{t_n\} \subset (0,t) \cap \mathbb{Q}$ tal que $t_n \downarrow t$. Por la propiedad de submartingala se tiene $E[X_t \mid \mathscr{F}_{t_n}] \geq X_{t_n}$ c.t.p. por el Teorema 28 podemos hacer $n \to \infty$ obteniendo la segunda desigualdad de (ii).

iii) Tomemos una sucesión decreciente $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de racionales tal que $0 \leq s < s_n < t$, $\forall\ n \geq 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Por la primera desigualdad de (ii) se tiene $E[X_{t^+} \mid \mathscr{F}_{s_n}] \geq X_{s_n}$, tomando límite y usando el Teorema 28 se tiene $E[X_{t^+} \mid \mathscr{F}_{s^+}] \geq X_{s^+}$. Para probar la continuidad por la derecha de $t \mapsto \hat{X}_t = \lim\limits_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s$ observar que $\lim\limits_{\substack{r\downarrow t\\ r\in\mathbb{Q}}} \hat{X}_r(w) = \lim\limits_{\substack{r\downarrow t\\ r\in\mathbb{Q}}}(\lim\limits_{\substack{s\downarrow r\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(w)) = \hat{X}_t(w),\ w \in \Omega^*$, donde Ω^* es el conjunto dado por la parte (i) del teorema. Por lo tanto $\{\hat{X}_t = X_{t^+}\}$ es continua por la derecha.

$\square$

Prueba del Teorema 2:

Supongamos que $t \mapsto E[X_t]$ es continua a la derecha; veremos que $\{X_{t^+}, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ definido como en la parte (i) del Teorema 1, es una modificación de X.

Sea $\{\epsilon_n\}$ una sucesión de números racionales tal que $\epsilon_n \downarrow 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} X_{t+\epsilon_n} = X_{t^+}$ c.t.p. entonces se tiene que $\{X_{t+\epsilon_n}\}$ es equi-integrable. Ahora por la equi-integrabilidad se tiene que $E[X_{t^+}] = \lim\limits_{n\to\infty} E[X_{t+\epsilon_n}]$, pues $\{X_{t+\epsilon_n} - X_{t^+}\}$ es equi-integrable, entonces converge en $\mathscr{L}^1$, obteniendo $|\int (X_{t+\epsilon_n} - X_{t^+}) dP| \leq \int |X_{t+\epsilon_n} - X_{t^+}| dP \to 0$, y como $t \mapsto E[X_t]$ es continuo a la derecha se tiene que $E[X_{t^+}] = E[X_t]$. Ahora por el Teorema 1, parte (ii), se tiene $X_t \leq E[X_{t^+} \mid \mathscr{F}_t] \Rightarrow E[X_t : B] \leq E[X_{t^+} : B]\ \forall\ B \in \mathscr{F}_t$ entonces $X_t \leq X_{t^+}$ en c.t.p. por lo tanto $X_{t^+} = X_t$ en c.t.p.

Recíprocamente, supongamos que $\{\tilde{X}_t :\ 0 \leq t < \infty\}$ es una modificación continua a la derecha de X. Fijamos un t y tomamos una sucesión $\{t_n\}$ tal que $t_n \downarrow t$. Entonces $P[X_t = \tilde{X}_t, X_{t_n} = \tilde{X}_{t_n} :\ n \geq 1] = 1$ (pues, intersección de eventos de probabilidad 1, es un evento de probabilidad 1) y $\lim_{n\to\infty} \tilde{X}_{t_n} = \tilde{X}_t$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} X_{t_n} = X_t$ y como $\{X_{t_n}\}$ es equi-integrable tenemos $E[X_t] = \lim_{n\to\infty} E[X_{t_n}]$. Con esto se tiene la continuidad por la derecha de $t \mapsto E[X_t]$. $\square$

Ahora ya tenemos todas la herramientas necesarias para demostrar el Teorema del muestreo opcional.

Prueba del Teorema 3:
Consideremos la sucesión de tiempos de parada

$$\sigma_n(w) = \begin{cases} \sigma(w) & ; \; si \;\; \sigma(w) = +\infty \\ \dfrac{k}{2^n} & ; \; si \;\; \dfrac{k-1}{2^n} \leq \tau(w) < \dfrac{k}{2^n} \end{cases}$$

similarmente definimos la sucesión $\{\tau_n\}$. Sea $w \in \Omega$ y $\tau_n(w) = \dfrac{k}{2^n} \Rightarrow \sigma(w) \leq \tau(w) < \dfrac{k}{2^n} \Rightarrow \sigma(w) < \dfrac{k}{2^n}$, por lo tanto $\sigma_n(w) \leq \tau_n(w)\ \forall\ n \geq 1$. Por el Teorema del muestreo opcional discreto , se tiene que $E[X_{\tau_n} \mid \mathscr{F}_{\sigma_n}] \geq X_{\sigma_n}$ y

$$\int_A X_{\tau_n} dP \geq \int_A X_{\sigma_n} dP \quad \text{para todo } \ A \in \mathscr{F}_{\sigma_n} \tag{B.19}$$

Ahora afirmamos que $\mathscr{F}_{\sigma^+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\sigma_n}$, en efecto:

Sea $A \in \mathscr{F}_{\sigma^+}$, escribimos $A = [A \cap \{\sigma < \infty\}] \cup [A \cap \{\sigma = \infty\}]$, pero $[A \cap \{\sigma < \infty\}] = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [A \cap \{\sigma < r < \sigma_n\}]$ pues si $w \in [A \cap \{\sigma < \infty\}] \Rightarrow \sigma(w) < \infty \Rightarrow \exists\ k$ tal que $\frac{k-1}{2^n} \leq \sigma(w) < \frac{k}{2^n} \Rightarrow \sigma(w) < \sigma_n(w) \Rightarrow \exists\ r \in \mathbb{Q}$ tal que $\sigma(w) < r < \sigma_n(w)$, obteniendo asi $[A \cap \{\sigma < \infty\}] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [A \cap \{\sigma < r < \sigma_n\}]$. La otra inclusión es evidente. Ahora como $A \cap \{\sigma < r < \sigma_n\} = A \cap \{\sigma < r\} \cap \{\sigma_n > r\} \in \mathscr{F}_{\sigma_n}$, por que $A \cap \{\sigma < r\} \in \mathscr{F}_r$ y $A \cap \{\sigma < r\} \cap \{\sigma_n > r\} \cap \{\sigma_n \leq t\} \in \mathscr{F}_t\ \forall\ t \geq 0$.
Tambien $[A \cap \{\sigma = \infty\}] = [A \cap \{\sigma = \infty\}] \cap \{\sigma_n = \infty\} \in \mathscr{F}_{\sigma_n}$, por lo tanto se tiene $\mathscr{F}_{\sigma^+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\sigma_n}$.
Para probar la otra inclusión, tenemos que $\mathscr{F}_{\sigma^+} \subset \mathscr{F}_{\sigma_n^+} \Rightarrow \mathscr{F}_{\sigma^+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\sigma_n^+}$. Sea A un evento tal que $A \cap \{\sigma_n < t\} \in \mathscr{F}_t$ para todo $t \geq 0$ y $n \geq 1$, entonces $A \cap \{\sigma < t\} = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\sigma_n < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\sigma_n < t\} \in \mathscr{F}_t$, por lo tanto $A \in \mathscr{F}_{\sigma^+}$.
Entonces, por lo anterior (B.19) se convierte en

$$\int_A X_{\tau_n} dP \geq \int_A X_{\sigma_n} dP \quad \text{para todo } \ A \in \mathscr{F}_{\sigma^+} \tag{B.20}$$

Por último $\{X_{\sigma_n}, \mathscr{F}_{\sigma_n} : n \geq 1\}$ es una submartingala inversa, como la utilizada en el Teorema 27, con $\{E[X_{\sigma_n}]\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión decreciente y acotada por $E[X_0]$, entonces por el Teorema 27, $\{X_{\sigma_n}\}$ es equi-integrable y lo mismo ocurre para $\{X_{\tau_n}\}_{n=1}^{\infty}$, como el proceso es continuo a la derecha se tiene $X_\sigma(w) = \lim_{n\to\infty} X_{\sigma_n}(w)$ y $X_\tau(w) = \lim_{n\to\infty} X_\tau(w)$ en c.t.p. De la equi-integrabilidad se tiene que X_σ, X_τ son integrables y se puede tomar límite en (B.20), obteniendo

$$\int_A X_\tau dP \geq \int_A X_\sigma dP \quad \text{para todo } \ A \in \mathscr{F}_{\sigma^+}$$

de donde se concluye $E[X_\tau \mid \mathscr{F}_{\sigma^+}] \geq X_\sigma$. $\square$

B.2. Descomposición de Doob-Meyer

En esta sección daremos las condiciones para que ciertas submartingalas se puedan descomponer como la suma de una martingala y un proceso creciente.

Para este propósito veamos primero que para el caso discreto no es un problema tan complicado, y que toda submartingala $X = (X_n)$ con respecto al filtro $(\mathscr{F}_n)$ se descompone como

$$X_n = M_n + A_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $M = (M_n)$ es una martingala con respecto a $(\mathscr{F}_n)$ y $A = (A_n)$ es un proceso creciente que puede ser elegido predecible, es decir A_n es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible con $A_0 = 0$ c.t.p. Para esto definamos

$$\begin{cases} A_0 &= 0 \\ A_n &= A_{n-1} + E[X_n - X_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}] \end{cases}$$

que es predecible y creciente. Claramente $M_n = X_n - A_n$ es una martingala. Para la unicidad, sean $X_n = M_n + A_n = M_n' + A_n'$ dos descomposiciones, entonces $M_n - M_n' = A_n' - A_n$ es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible y dado que $M_n - M_n' = E[M_n - M_n' \mid \mathscr{F}_{n-1}] = M_{n-1} - M_{n-1}'$. Dado que $M_0 - M_0' = X_0 - X_0 = 0$, se tiene que $M_n = M_n'$ para todo n.

En lo que sigue hallaremos la descomposicion de Doob-Meyer para el caso continuo.

Definición 31 *Decimos que un proceso integrable $A = (A_t)$ es creciente si:*

i) A *es* $\mathscr{F}_t$*-adaptado.*

ii) $A_0 = 0$*,* $t \mapsto A_t$ *es continuo por la derecha y no decreciente c.t.p.*

iii) $E[A_t] < \infty$

Definición 32 *Un proceso creciente $A = (A_t)$ es llamado natural si para toda martingala acotada $M = (M_t)$*

$$E[\int_0^t M_s dA_s] = E[\int_0^t M_{s^-} dA_s]$$

Para $a > 0$ denotamos por $\mathscr{S}_a$ al conjunto de todos los tiempos de parada σ tal que $\sigma \leq a$ c.t.p.

Definición 33 *Una submartingala $X = (X_t)$ se dice de clase* **DL** *si para cada $a > 0$ la familia de variables aleatorias $\{X_\sigma : \sigma \in \mathscr{S}_a\}$ es equi-integrable.*

Nota: Cada martingala $M = (M_t)$ es de clase **DL** porque, por el Teorema del muestreo opcional se tiene

$$\int_{|M_\sigma|>c} |M_\sigma| dP \leq \int_{|M_\sigma|>c} |M_a| dP, \qquad \sigma \in S_a$$

y

$$\sup_{\sigma \in S_a} P[|M_\sigma| > c] \leq \sup_{\sigma \in S_a} \frac{E[|M_\sigma|]}{c} \leq \frac{E[|M_a|]}{c}$$

El siguiente teorema, debido a Boob & Meyer, da las hipótesis suficientes para que una submartingala pueda descomponerse como suma de una martingala y un proceso creciente.

Teorema 29 (Descomposición de Doob-Meyer) *Si $X = (X_t)$ es una submartingala de clase* **DL**, *entonces existe una martingala $M = (M_t)$ y un proceso integrable creciente $A = (A_t)$ tal que $X_t = M_t + A_t$ para todo $t \geq 0$. El proceso A puede ser elegido natural y , bajo esta condición la descomposición es única.*

Prueba: La prueba de este resultado no fue escrita debido a que es bastante extensa y técnica y su lectura puede generar confusión , pero el lector interesado la puede encontrar en [6, Teorema I.4.10], [9, Teorema I.6.12].

Finalmente estableceremos la descomposición de Doob-Meyer para el cuadrado de una martingala X. Para esto, sólo tenemos que probar que el cuadrado de una martingala cuadrado integrable es una submartingala de clase DL. Por la desigualdad de Jensen $X^2 = \{X_t^2, \mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ es una submartingala no negativa. Tomemos $a > 0$, entonces

$$\int_{\{X_\sigma^2 > \lambda\}} X_\sigma^2 dP \leq \int_{\{X_\sigma^2 > \lambda\}} X_a^2 dP \qquad \text{y} \qquad P[X_\sigma^2 > \lambda] \leq \frac{E[X_\sigma^2]}{\lambda} \leq \frac{E[X_a^2]}{\lambda}$$

para todo $\sigma \in \mathscr{S}_a$ y $\lambda > 0$, entonces obtenemos

$$\sup_{\sigma \in \mathscr{S}_a} \int_{\{X_\sigma^2 > \lambda\}} X_\sigma^2 dP \leq \frac{E[X_a^2]}{\lambda}$$

Tomando límite cuando $\lambda \to \infty$, concluimos que $\{X_\sigma^2 : \sigma \in \mathscr{S}_a\}$ es equi-integrable, entonces X^2 es clase **DL**, por lo tanto X^2 tiene una única descomposición de Doob-Meyer (Teorema 29)

$$X_t^2 = M_t + A_t$$

donde $M = \{M_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala continua a la derecha y $A = \{A_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un proceso natural adaptado no decreciente.
Es gracias al Teorema de Boob & Meyer que se garantiza la buena definición de la variación cuadrática de una martingala cuadrado integrable.

Definición 34 *Para una martingala cuadrado integrable X, definimos la* **variación cuadrática** *de X al proceso $\langle X \rangle_t = A_t$, donde A es el proceso natural adaptado no decreciente de la descomposición de Doob-Meyer de X^2.*

Nota: La varaición cuadrática $\langle X \rangle$ es el único proceso natural, adaptado no decreciente, tal que $\langle X \rangle_0 = 0$ c.t.p. y $X^2 - \langle X \rangle$ es una martingala.

Bibliografía

[1] Barry James, “Probabilidade: Um curso em nível intermedio”, Impa. Rio de Janeiro, 2006.

[2] Billingsley Patrick, “Probability and Measure”. John Wiley, 1995.

[3] Chung Kai Lai , “ A course in probability theory”, Academic Press. New York, 1974.

[4] Chung K.L. y Doob J.L, “ Fields, Optionality and Measurability”. Amer. J. Math, 1965.

[5] Halmos Paul, “Measure Theory”. Springer Velarg, New York, 1974.

[6] Karatzas Ioannis, Shevere Steven, “Brownian Motion and Stocastic Calculus” . Springer, New York , 2000.

[7] Oksendal Bernt, “Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications”. Springer, 2000.

[8] Rebuz Daniel, Yor Marc, “ Continuous Martingales and Brownian Motion”. Springer, 1999.

[9] Watanabe Shinzo, Ikeda Nobuyuki, “Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes”. Kodansha Scientific Books, New York, 1989.

[10] Zastawniak Tomasz , Zdzislaw Brzeźniak, “Basic Stochastic Processes”, Springer, 2000.