UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Un método operacional para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes matriciales y su aplicación en la vibración de edificios

por

Julio Alfredo Sánchez Espinoza

Tesis para Optar
el Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMÁTICA

Prof. Fidel Jara Huanca
Asesor

UNI, abril del 2012.

Resumen

Para analizar la vibración de un edificio se requiere en primer lugar realizar una formulación en la que; se relacionan las diferentes componentes que actúan en el sistema, como son: la masa, la amortiguación, la rigidez y las fuerzas externas. Obtenido el modelo, tenemos diferentes formas de resolverlo, en la presente tesis se aborda la solución mediante el método operacional matricial, teniendo en cuenta la solución dinámica matricial.

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiamos la formulación de algunos modelos matemáticos obtenidos en la vibración de edificios, los cuales permiten obtener una ecuación diferencial vectorial de segundo orden con coeficientes matriciales de orden n,

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t).$$

Su solución se apoya en la solución dinámica matricial, el contenido del trabajo está estructurado como sigue.

En el Capítulo 1, describimos brevemente algunos conceptos utilizado en el estudio de vibraciones, y estará centrado en la obtención de la ecuación vibratoria básica (1.3), la cual es obtenida a partir de un sistema vibratorio lineal, usando las ecuaciones de Lagrange.

En el Capítulo 2, presentamos la teoría sobre las funciones matriciales, la cual basa su formulación haciendo una analogía al caso escalar. El resultado principal de la sección es el teorema de reducción polinomial, el cual expresa el valor de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ como un polinomio matricial de grado $n-1$, donde n es el orden de la matriz A.

En el Capítulo 3, utilizamos las funciones matriciales para presentar la solución de problemas de valor inicial con coeficientes matriciales de primer orden y segundo orden, y veremos el caso de las ecuaciones conservativas, es decir cuando la fuerza de amortiguamiento es nula, o sea $C = 0$.

En el Capítulo 4, presentamos diversos métodos para determinar la solución $u(t)$ de la ecuación $\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$, discutiendo el caso no conservativo, su desarrollo estará centrado en obtener la solución dinámica matricial.

En el Capítulo 5, presentamos la formulación de algunos modelos matemáticos en el análisis de la vibración de algunos edificios de n pisos, determinando su ecuación de movimiento.

Finalmente vamos a dar las conclusiones obtenidas en el presente trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación se enuncian conceptos relacionados al estudio de vibraciones, los cuales nos ayudará a interpretar los conceptos que se presentan en los siguientes capítulos de la presente tesis.

1.1. Vibración

Es un movimiento oscilatorio que aparece, por lo general, en los sistemas mecánicos sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo. Distinguiremos entre vibración y oscilación. La diferencia radica en que la vibración implica la existencia de energía potencial elástica, mientras que la oscilación no. La Figura 1.1 muestra un bloque con un movimiento vibratorio, mientras que el péndulo de la Figura 1.2 tiene un movimiento oscilatorio. Puesto que los movimientos vibratorios y oscilatorios se rigen por ecuaciones similares, es costumbre estudiarlos juntos y prescindir de la diferencia conceptual entre ambos [Ave06, pág. 187].

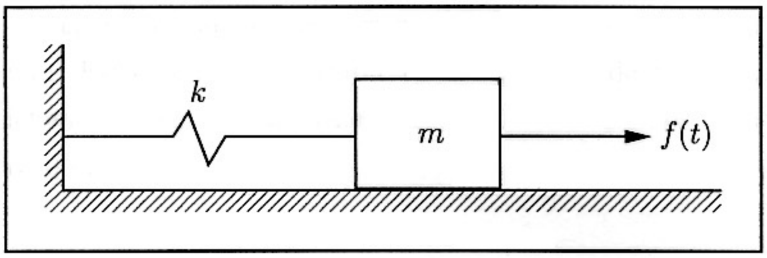

Figura 1.1: Sistema vibratorio.

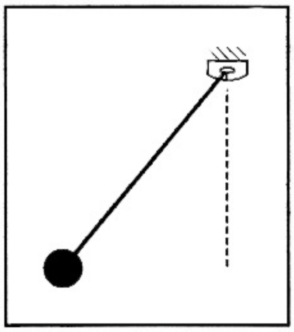

Figura 1.2: Sistema oscilatorio.

1.2. Grados de libertad

Son los parámetros necesarios para definir de forma unívoca la configuración del sistema vibratorio. Por ejemplo, el sistema de la Figura 1.3 tienen dos grados de libertad, que son las coordenadas x_1 y x_2 que definen la posición de cada uno de los bloques con respecto a sus posiciones de referencia [Ave06, pág. 187].

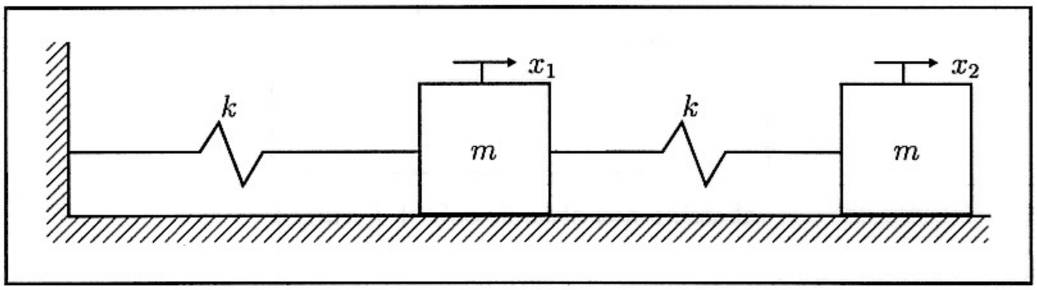

Figura 1.3: Sistema discreto de 2 grados de libertad.

Muchas estructuras físicas no pueden ser modelados con éxito utilizando un único grado de libertad. Esto es, para describir el movimiento de una estructura, varias coordenadas deben ser requeridas. Tales sistemas son referidos como sistemas de múltiples grados de libertad.

Un sistema es llamado de n grados de libertad, cuando son requeridas n coordenadas independientes para especificar las posiciones de las partículas de estos sistemas.

1.3. Coordenadas generalizadas

Un sistema de coordenadas que describe el movimiento general y reconoce las restricciones, se denomina *coordenadas generalizadas*. Por ejemplo en la Figura 1.4 la coordenada angular θ es la coordenada generalizada que reconoce la longitud fija del péndulo como una restricción del sistema. Las coordenadas lineales z e y no lo hacen así.

El número de coordenadas generalizadas de un sistema es siempre igual al número de grados de libertad del mismo.

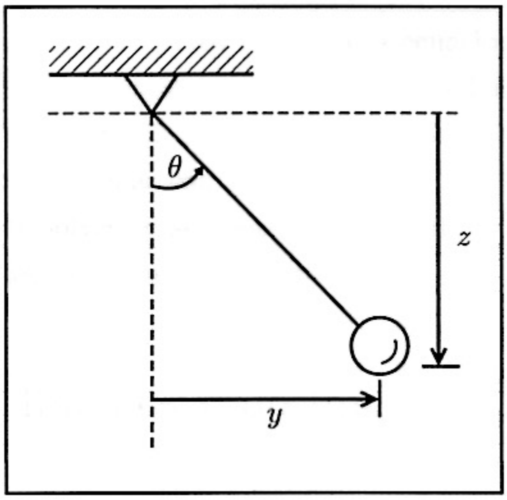

Figura 1.4: Coordenada generalizada.

1.4. Sistemas discretos y sistemas continuos

Se denominan sistemas discretos aquellos que pueden ser definidos mediante un número finito de grados de libertad y sistemas continuos aquellos que necesitan infinitos grados de libertad para ser exactamente definidos. Por ejemplo, el sistema de dos grados de libertad de la Figura 1.3 es un sistema discreto. En cambio, la viga de la Figura 1.5 es un sistema continuo pues para conocer su deformada es necesario especificar el desplazamiento vertical de cada uno de sus puntos, que viene dado por una función de la forma $y(x)$.

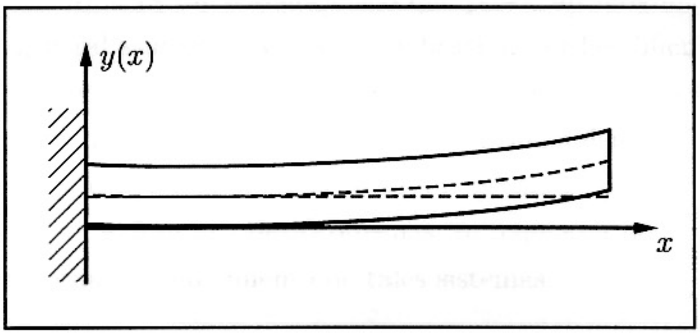

Figura 1.5: Sistema continuo.

Matemáticamente, los sistemas discretos conducen a ecuaciones diferenciales *ordinarias*, mientras que los sistemas continuos conducen a ecuaciones diferenciales en *derivadas parciales* [Ave06, pág. 188]. El movimiento vibratorio de los sistemas continuos, a excepción de unos pocos sistemas con geometrías sencillas, suele ser irresoluble con métodos analíticos. Para resolverlos, se suelen transformar en discretos por técnicas de discretización como el Método de los Elementos Finitos.

1.5. Sistemas lineales y no lineales

Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son los movimientos de un sistema mecánico donde actúan las fuerzas $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Dicho sistema se denomina lineal [Ave06, pág. 188] si a una fuerza $f_3(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ responde con un movimiento $x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$. Una de las características de los sistemas lineales es que en ellos se puede aplicar el principio de superposición, que establece que la respuesta a una excitación combinada se pueden obtener combinando las respuestas a cada una de las excitaciones simples. Si el sistema no es lineal, entonces será no lineal.

1.6. La ecuación de Lagrange

Una vibración se define en su forma más simple, como un movimiento oscilatorio. Físicamente una vibración aparece como consecuencia de una fuerza fluctuante, esto es, una fuerza que varía en magnitud y/o dirección; mas no de fuerzas constantes. Así un sistema vibratorio es un sistema físico que posee un movimiento denominado vibración. Por lo general siempre se evita una vibración por las dificultades que causa, así por ejemplo, en los sistemas de ingeniería, una vibración aumenta las tensiones en las piezas de una máquina, interfiere en su funcionamiento y en los próximos a ella, causa ruido y origina pérdida de energía mecánica debido a las fuerzas de amortiguamiento. Para enfrentar tales problemas, se requieren realizar estudios de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de tales sistemas.

Para analizar un sistema vibratorio, primeramente consideramos su simplificación en términos de *masa-rigidez y amortiguación*, los cuales representan al cuerpo, la elasticidad y la fricción del sistema, respectivamente. Enseguida procuramos determinar la solución y hacemos un análisis de las ecuaciones del movimiento, para llegar por último, a las conclusiones apropiadas.

El movimiento de un sistema vibratorio de n grados de libertad es representado mediante "n" ecuaciones diferenciales, los cuales son obtenidos a través de diversas técnicas, tales como: leyes de Newton, ecuaciones de Lagrange, métodos gráficos lineales, el método de elementos finitos [Inm01, pág. 29].

Consideremos un sistema vibratorio de k partículas. Sean $x_i, i = 1 : k$, las posiciones del sistema y $q_j, j = 1 : n$, un conjunto de coordenadas generalizadas, entonces:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \; i = 1 : k,$$

y las siguientes n ecuaciones llamadas ecuaciones de Lagrange para el sistema vibratorio, pueden ser obtenidas [Mei86, pág. 256]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_j}\right) - \frac{dL}{dq_j} + \frac{dC}{d\dot{q}_j} = Q_i, \ j = 1 : n, \tag{1.1}$$

donde $L = T - U$ es la función Lagrangiana del sistema, T es la energía cinética, U es la energía potencial, C es la energía de disipación y $Q_j, j = 1 : n$ son las fuerzas externas.

Generalmente en un sistema vibratorio lineal las diversas formas de energía están dadas por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \text{(energía cinética)} \\ U &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} k_{ij}q_iq_j \quad \text{(energía potencial)} \\ C &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} C_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \text{(energía de disipación)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.7. La ecuación vibratoria básica

Si sustituimos (1.2) en (1.1) obtenemos [Mei86, pág. 262]:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} k_{ij}q_i + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_i = Q_j, \ j = 1 : n,$$

que en forma matricial se representa mediante:

$$[m_{ij}]_{n\times n}\ddot{q}_{i_{n\times 1}} + [c_{ij}]_{n\times n}\dot{q}_{i_{n\times 1}} + [k_{ij}]_{n\times n}q_{i_{n\times 1}} = [Q_j]_{n\times 1}$$

Obteniendo así la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes matriciales, siendo esta la ecuación vibratoria básica, que abreviadamente se escribe:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f(t) \tag{1.3}$$

Donde M, C y K son matrices cuadradas de orden n que representan la masa, el amortiguamiento y la rigidez respectivamente, q es un vector columna de orden n de incógnitas que dependen de t, $\dot{q}$ y $\ddot{q}$ son la primera y la segunda derivada de q respectivamente, $f(t)$ es un vector columna de orden n de funciones que dependen de t que representa la excitación externa del sistema y n es un número entero mayor que 1. Cuando $C = 0$, el sistema es del tipo conservativo, pues $E = T + V$ es constante a través de una solución $q(t)$.

Ejemplo 1.1.
Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar las matrices de masas, rigidez y amortiguamiento para el sistema de dos grados de libertad de la Figura 1.6 [Mei86, pág. 108]

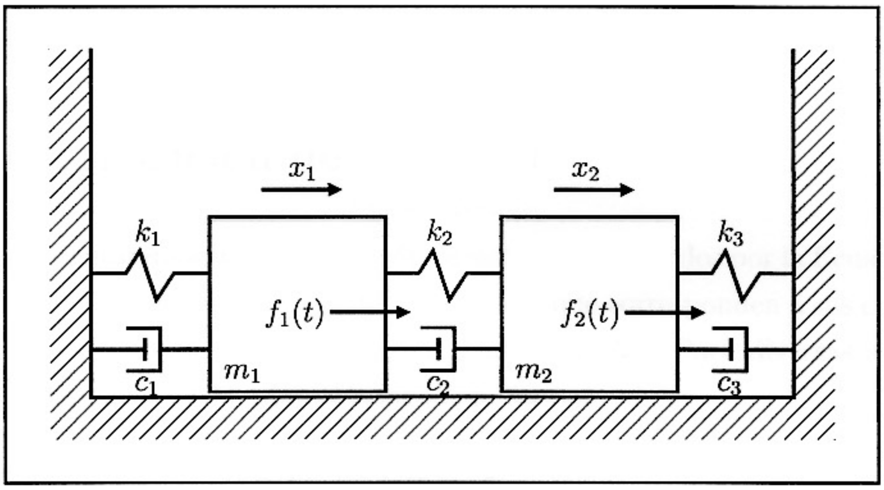

Figura 1.6: Gráfica del Ejemplo 1.1.

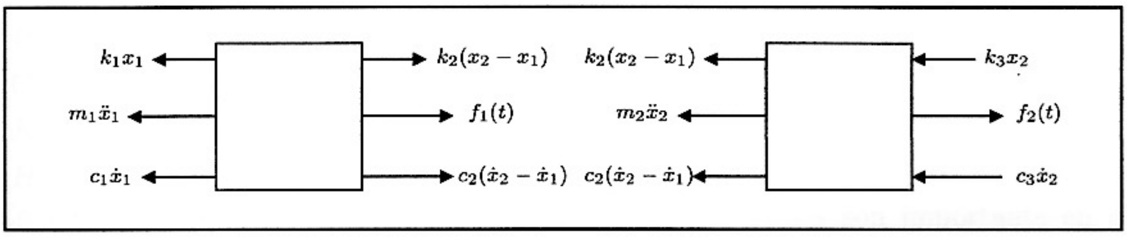

Figura 1.7: Diagramas de sólido libre.

Para hallar las ecuaciones de este sistema, basta con aplicar las ecuaciones de equilibrio a cada una de las dos masas. La Figura 1.7 muestra los diagramas de sólido libre, con todas las fuerzas actuantes. Sumando las fuerzas e igualando a cero se llega a:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = f_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 = f_2(t)$$

Reordenando términos, estas dos ecuaciones se pueden poner de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Identificando con la Ecuación (1.3) las matrices M, C y K resultan ser:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

1.8. Clasificación de sistemas

Enseguida presentaremos una clasificación de sistemas modelados por la Ecuación (1.3), de acuerdo a algunas características de las matrices que corresponden a sus coeficientes comúnmente encontrada en la literatura [Inm01, pág. 31]. Para diversas situaciones prácticas, la Ecuación (1.3) adopta la siguiente forma:

$$M\ddot{q} + (D + G)\dot{q} + (K + H)q = f,$$

donde q y f ya fueron definidas y
$M = M^T =$ matriz de inercia o masa
$D = D^T =$ matriz de masa viscosa
$G = -G^T$ matriz giroscópica
$K = K^T =$ matriz de rigidez
$H = -H^T$ matriz circulatoria
En muchos casos M, D, K son definidas positivas, las cuales son importante en el establecimiento de condiciones para la estabilidad del sistema.

Es bueno observar que, cada aplicación particular en la ingeniería puede tener una nomenclatura un poco diferente.

Se denomina *sistema conservativo* generalmente a los sistemas de la forma:

$$M\ddot{q} + Kq = f,$$

donde M y K son ambas simétricas y definidas positivas. Sin embargo el sistema:

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = f, \tag{1.4}$$

donde G es antisimétrica ($G^T = -G$) es también conservativo en el sentido de la conservación de la energía pero es referido como un *sistema conservativo giroscópico*, o un *sistema giroscópico.*

Tales sistemas surgen de forma natural cuando están presentes movimientos rotatorios, tales como, en un giroscopio o un satélite artificial.

Los sistemas de la forma:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f, \tag{1.5}$$

donde M, K y D son todos definidas positivas, son referidos como *sistemas no giroscópicos amortiguados.*

Sistemas con coeficientes matriciales simétricos y definidos positivos son, a su vez, referidos como *sistemas pasivos.*

Los sistemas de la forma:

$$M\ddot{q} + (K + H)q = f, \tag{1.6}$$

son referidos como *sistemas circulatorios.*

Combinando las Ecuaciones (1.4), (1.5) y (1.6) obtenemos el sistema más general

$$M\ddot{q} + (D + G)\dot{q} + (K + H)q = f. \tag{1.7}$$

Físicamente esta expresión representa fuerzas generadas que son consideradas en la literatura, como exceso de fuerzas externas. Matemáticamente, la ecuación (1.7) puede ser eventualmente clasificada en términos de las propiedades de los coeficientes matriciales, el cual no es de interés en este trabajo.

Capítulo 2

Funciones matriciales

En este capítulo presentamos la teoría sobre la funciones matriciales, la cual se basa su formulación haciendo una analogía al caso escalar, así las funciones escalares $f(z)$ que están definidas mediante serie de potencias $\sum c_k z^k$, originan una definición de funciones matriciales $f(A)$, mediante la sustitución de la variable z, por una matriz cuadrada A, esto es $\sum c_k A^k$. Este procedimiento será válido garantizando la convergencia de la serie matricial de potencias y disponer de propiedades que nos permita el cálculo efectivo de la matriz suma de la serie matricial. Así diremos que una serie matricial $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ converge si cada serie escalar $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_{ij}^k$ converge, siendo $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$. El resultado principal de la sección es el teorema de reducción polinomial, el cual expresa el valor de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ como un polinomio matricial de grado $n-1$, donde n es el orden de la matriz A, cuyos coeficientes son calculados por el proceso de *interpolación de Hermite.*

Para establecer la definición de función matricial, es necesario presentar la definición de la norma de una matriz cuadrada la cual nos garantizará la convergencia de la serie matricial de potencias.

2.1. Norma de una matriz cuadrada

En el siguiente trabajo usaremos la siguiente norma.

Definición 2.1. Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, se llama norma de la matriz A al número real no negativo:

$$\|A\| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Así la norma de la matriz nos permitirá tener una medida uniforme de comparación de los elementos de la matriz para fines de convergencia.

Proposición 2.1. Sean las matrices cuadradas $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ con α un escalar, k entero no negativo se tiene:

i) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

ii) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$,

iii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$,

iv) $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

Prueba.

i) $\|A + B\| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} \left(|a_{ij}| + |b_{ij}|\right)$

luego,

$$\|A + B\| \leq \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| + \max_{j=1:n} |b_{ij}|$$

entonces

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

ii) $\|\alpha A\| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha a_{ij}| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} \left(|\alpha||a_{ij}|\right) = |\alpha| \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

entonces

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$$

iii) Sea $C = AB$, con $C = [c_{ij}]_{n\times n}$, donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right| \\
&\leq \max_{j=1:n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}b_{kj}| \right) = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \right) \\
&= \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \right) = \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(|b_{kj}| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \right) \\
&\leq \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(|b_{kj}| \left(\max_{k=1:n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \right) \\
&= \max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} \left(|b_{kj}| \|A\| \right) = \|A\| \left(\max_{j=1:n} \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| \right) \\
&= \|A\|\|B\|
\end{aligned}
$$

con lo cual concluye la prueba de:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

iv) Mediante el uso repetido de la propiedad anterior y por inducción matemática se tiene

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k$$

□

Cuando en las funciones escalares $f(z)$ que están definidas mediante series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, tales como $\text{sen}(z), \cos(z), \exp(z)$, etc., se sustituye a la variable z por una matriz cuadrada A, es decir $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ originan una definición de funciones matriciales $f(A)$, de igual modo obtenemos las funciones matriciales $\text{sen}(A), \cos(A), \exp(A)$, etc.

El siguiente criterio de convergencia permite que la definición de función matricial sea simplemente una sustitución de variable de una función escalar, la cual está definida analíticamente por una serie de potencias.

2.2. Convergencia de una serie matricial

Lema 2.1. Sea la serie escalar $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, con radio de convergencia R, entonces la serie matricial $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ converge, para cualquier matriz cuadrada A, la cual satisface $\|A\| < R$.

Prueba. Sea $A^k = [a_{ij}^{(k)}]_{n\times n}$ para $k \geq 1$, con $A^0 = I = [\delta_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij}^{(0)}]_{n\times n}$. Entonces

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k, \ k \geq 0.$$

Por el criterio de comparación, tenemos que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k a_{ij}^{(k)}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k| \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \|A\|^k < \infty, \ \|A\| < R, \ \forall n \geq 0,$$

pues la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ converge absolutamente. Luego la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_{ij}^{(k)}$ converge, con $\|A\| < R$, para i, j arbitrarios y, por tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ converge. $\square$

Veamos ahora la definición de función matricial.

2.3. Función matricial

Sea $f(z)$ una función escalar que admite un desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

para $|z| < R$. Definimos la función matricial

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k,$$

para toda matriz cuadrada A de orden $n \times n$ con $\|A\| < R$.

2.3.1. Funciones matriciales básicas

Para toda matriz cuadrada A de orden $n \times n$ con $\|A\| < R$, tenemos por ejemplo las siguientes funciones matriciales básicas, las cuales son utilizadas frecuentemente:

1) $p(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, función polinomial,

2) $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, función exponencial,

3) $\operatorname{sen} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, función seno,

4) $\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$, función coseno.

2.3.2. Derivada de una función matricial

Una función escalar analítica, definida por una serie de potencias, posee derivadas de cualquier orden y sus derivadas son obtenidas derivando la serie término a término.

Asimismo, si $f(A)$ está bien definida, entonces también están las funciones "derivadas" $f^{(j)}(A)$, Por ejemplo:

$$f'(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} A^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} A^k$$

está bien definida.

Por otro lado, la función

$$F(t) = f(tz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k t^k,$$

donde $f(z)$ es entera ($R = \infty$), puede ser derivada con respecto a t, esto es,

$$\frac{d}{dt} f(tz) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} z^k t^{k-1} = z f'(tz),$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}f(tA) = Af'(tA)$$

2.3.3. Propiedades de una función matricial

A continuación se enuncian y se demuestran algunas propiedades de las funciones matriciales, cuyo uso se dan en diversas situaciones.

Proposición 2.2. Sean $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ funciones escalares definidas para $|z| < R$ y sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que $\|A\| < R$, con estas condiciones se cumple que:

1) Si $h(z) = f(z) + g(z)$, entonces $h(A) = f(A) + g(A)$.

2) Si $q(z) = f(z)g(z)$, entonces $q(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

3) Si P es una matriz no singular de orden $n \times n$, entonces $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$.

4) Si λ es un autovalor de A y v es el autovector asociado a λ, entonces $f(\lambda)$ es autovalor de $f(A)$ y v es un autovector asociado a $f(\lambda)$, esto es,

$$Av = \lambda v \Rightarrow f(A)v = f(\lambda)v.$$

5) Si w es un autovector generalizado de A correspondiente al autovalor λ, entonces

$$f(A)w = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(A - \lambda I)^j w,$$

donde $(A - \lambda I)^k w = 0$ para $k \geq s$.

6) Sean $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ldots, f_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ funciones escalares que convergen, para $|z| < R$, y sea $\varphi(x_1, x_2, \ldots, z_m)$ un polinomio en m variables tal que:

$$\varphi(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)) = 0$$

entonces

$$\varphi(f_1(A), f_2(A), \ldots, f_m(A)) = 0,$$

para cualquier matriz A de orden $n \times n$, tal que $\|A\| < R$.

Prueba.

1) Se tiene $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ con $|z| < R$ si A es una matriz de orden $n \times n$ con $|A| < R$, entonces por la definición de función matricial tenemos $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ y $g(A) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k a^K$, si

$$h(z) = f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k) z^k,$$

entonces

$$\begin{aligned} h(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k) A^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k A^k \,. \\ &= f(A) + g(A). \end{aligned}$$

2) Si

$$q(z) = f(z)g(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k,$$

donde $e_k = \sum_{r=0}^{k} c_r d_{k-r}$. Este producto es conocido como producto de Cauchy [Apo06, pág. 289]. Luego

$$q(A) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k A^k \right) = f(A)g(A).$$

Como

$$f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right) = g(z)f(z),$$

ya que $= \sum_{r=0}^{\infty} c_r d_{k-r} = \sum_{r=0}^{k} d_r c_{k-r} = e_k$, entonces

$$f(A)g(A) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \right) = g(A)f(A).$$

3) Si P es una matriz no singular de orden $n \times n$, entonces

$$\begin{aligned} f(P^{-1}AP) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (P^{-1}AP) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P^{-1}(c_k A^k)P = P^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k\Big)P \\ & P^{-1}f(A)P. \end{aligned}$$

4) Caso particular de 5).

5) Tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} f(A)w &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \big[(A-\lambda I) + \lambda I\big]^k w \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j w = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} c_k \binom{k}{j} \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j w \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=j}^{\infty} c_k j! \binom{k}{j}\lambda^{k-j}}{j!}(A-\lambda I)^j w = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(A-\lambda I)^j w, \end{aligned}$$

pues $(A-\lambda I)^j w = 0$, para $j \geq s$, y $f^{(j)}(\lambda) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k j! \binom{k}{j}\lambda^{k-j}$. Cuando $s = 1$ en

$$f(A)w = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(A-\lambda I)^j w,$$

se obtiene que $f(A)w = f(\lambda)w$ que viene a ser la prueba de 4).

6) Sea $\Gamma(z) = \varphi(f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z))$. Siendo φ un polinomio, la función $\Gamma(z)$ es una combinación de sumas y productos de series de potencias, por tanto también es una series de potencias. Asimismo podemos escribir $\Gamma(z)$ en la forma $\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, para algunas constantes $\alpha_k, k \geq 0$. Mas como $\Gamma(z) = 0$, para $|z| < R$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = 0$, para $|z| < R$.

De ahí concluimos que $\alpha_k = 0, \forall k \geq 0$. Luego $\Gamma(A) = \sum_{k=0}^{\infty} 0.A^k = 0$, por lo tanto $\varphi(f_1(A), f_2(A), \dots, f_m(A)) = 0$.

□

La existencia de divisores de cero en un álgebra de matrices, cuya consecuencia es el Teorema de Cayley-Hamilton, permite obtener el siguiente resultado central.

2.4. Reducción polinomial

Teorema 2.1. Sea $f(z)$ una función escalar definida por la serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ para $|z| < R$, entonces para cualquier matriz A cuadrada de orden n, con $|A| < R$, existen constantes $b_k, k = 0 : n-1$, tales que

$$f(A) = r(A) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k A^k,$$

donde $r(z) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k A^k$. Además de esto, los coeficientes $b_k, k = 0 : n-1$, son obtenidos a partir del siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$f^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_j),\ j = 0 : m_i - 1, i = 1 : s,$$

donde los $\lambda_i, i = 1 : s$, son los autovalores de A con multiplicidad m_i.

Prueba. Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de la matriz A, entonces

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}.$$

Observamos que para cada $i = 1 : s$ es válido:

$$P^{(j)}(\lambda_i) = \left.\frac{d^j p(z)}{dz^j}\right|_{z=\lambda i} = 0,\ 0 : m_i - 1. \tag{2.1}$$

Además de esto [Can95, pág. 10],

$$f(z) = q(z)p(z) + r(z), \tag{2.2}$$

donde $r(z)$ es un polinomio de grado $n-1$ dado por $r(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$, pues $p(z)$ es de grado n. De (2.2), tenemos que: $f(A) = r(A)$, ya que por el Teorema de Cayley-Hamilton, $p(A) = 0$. Usando la fórmula de Leibniz para el cálculo de la j-ésima derivada de (2.2), se tiene

$$f^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^{j} \binom{k}{j} q^{(j-k)}(z)p^{(k)}(z) + r^{(j)}(z)$$

y por (2.1), obtenemos que

$$r^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i),\ j = 0 : m_i - 1, i = 1 : s.$$

□

Podemos observar que para calcular $f(A)$, con el auxilio del teorema de reducción polinomial, es necesario conocer solamente los valores de $f(z)$ y de sus derivadas, para $z = \lambda_i, i = 1 : s$, donde λ_i es un autovalor de A. Esta observación importante permite ampliar la definición de una función matricial de la siguiente forma.

Definición 2.2. Sea $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ una matriz con autovalores $\lambda_i, k = 1 : s$ de multiplicidad m_k, respectivamente.

1. Una función escalar $f(z)$ está definida en el espectro de A si existen los valores

$$f^{(j)}(\lambda_k),\ j = 0 : m_k - 1$$

para cada autovalor $\lambda_k, k = 1 : s$.

2. Si $f(z)$ es una función escalar definida en el espectro de A, el polinomio $r(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$ es llamado un polinomio de interpolación para $f(z)$ si

$$r^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k),\ j = 0 : m_k - 1, k = 1 : s.$$

3. Si $f(z)$ es una función escalar definida en el espectro de A y $r(z)$ es un polinomio de interpolación para $f(z)$, definimos

$$f(A) = r(A) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k A^k. \tag{2.3}$$

Observaciones 2.1.

1. Las funciones $z^{m/n}$ y $\ln(z)$ con m y n números enteros, son funciones escalares

definidas en los espectros de matrices no singulares. Porque, estas son funciones de valores múltiples, pues si $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi$, entonces para $k = 0 : n-1$ tenemos

$$z^{m/n} = r^{m/n}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}\,\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right], \tag{2.4}$$

$$\ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \tag{2.5}$$

Si A es una matriz no singular, $A^{m/n}$ y $\ln(A)$ son matrices que resultan de (2.4) o (2.5), considerando $k = 0$, respectivamente. En ambos casos serán denominados valor principal.

2. Una función $f(z)$, definida por una serie de potencias, puede ser escrita como una integral de Cauchy, esto es,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z - z_0)^{-1} f(z)dz.$$

La correspondiente función matricial puede ser definida como [Hig08, pág. 8]:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (zI - A)^{-1} f(z)dz.$$

donde Γ es un contorno que contiene en su interior los autovalores de la matriz A, siendo la integración realizada para cada componente.

Capítulo 3

Sistemas Conservativos

En este capítulo se hace uso de las funciones matriciales para presentar la solución de los problemas de valor inicial con coeficientes matriciales de primer orden y segundo orden, la de primer orden será resuelta de manera análoga al caso escalar; la de segundo orden, en el caso homogéneo, será resuelta usando la técnica de Cauchy de las series de potencias y empleando la técnica de variación de parámetros en el caso general.

Dada la ecuación diferencial matricial (1.3),

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f(t),$$

donde M, C y K son matrices que representan la masa, el amortiguamiento y la rigidez respectivamente, q es un vector columna de incógnitas que depende de t, $f(t)$ es un vector columna que depende de t que representa la excitación externa del sistema.

Un sistema se llama conservativo si no existe energía de disipación, es decir la fuerza de amortiguamiento es nula, o sea $C = 0$.

3.1. La ecuación diferencial vectorial de primer orden $\dot{u} = Au + f(t)$

Teorema 3.1. El problema de valor inicial de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + f(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

con $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ una matriz, $f(t) = [f_i(t)]_{n\times 1}$ vector de funciones continuas, $u = [u_i]_{n\times 1}$ vector de incógnitas, $\dot{u} = [\dot{u}_i]_{n\times 1}$, y t_0 y u_0 dados, tiene como única solución a:

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \tag{3.2}$$

Prueba.
Existencia.
Consideremos la ecuación diferencial vectorial homogénea de primer orden

$$\dot{u} = Au. \tag{3.3}$$

En analogía al caso escalar ($\dot{u} = au$), consideremos

$$F(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k t^k,$$

cuya j-ésima derivada está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dt^j}F(t) = \frac{d^j}{dt^j}e^{At} &= \sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j} c_k A^k t^{k-j} \\ &= A^j \sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j} c_k (At)^{k-j} = A^j \frac{d^j}{dz^j}e^z\bigg|_{z=At} \\ &= A^j e^{At},\ j \geq 1. \end{aligned}$$

En particular, resulta

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Si $u(t) = e^{At}$ se tiene $\dot{u} = Au$. Empleando la condición inicial de la Ecuación (3.1):

$$u(t_0) = e^{At_0} = u_0,$$

luego

$$u(t) = e^{At - At_0 + At_0} = e^{A(t-t_0)}e^{At_0}$$

entonces

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0$$

es solución al problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Unicidad.

Sea $v(t)$ otra solución del problema de Cauchy (3.3), definimos

$$r(t) = e^{-At}v(t) \tag{3.5}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r(t) &= e^{-At}v'(t) - Ae^{-At}v(t) \\ &= e^{-At}[Av(t)] - Ae^{-At}v(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

como $\frac{d}{dt}r(t) = 0$, entonces $r(t) = k$, $k =$ constante. Así que $r(t) = r(t_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego de (3.5) y (3.4) se tiene

$$r(t) = e^{-At_0}v(t_0) = e^{-At_0}u_0,$$

es decir,

$$e^{-At}v(t) = e^{-At_0}u_0,$$

entonces

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{At}e^{-At_0}u_0 \\ &= e^{A(t-t_0)}u_0 \\ &= u(t) \end{aligned}$$

por lo tanto el problema de Cauchy homogéneo (3.4) tiene una única solución.

Vamos a resolver ahora el problema no homogéneo (3.1), tenemos

$$\dot{u} - Au = f(t)$$

entonces

$$e^{-At}\dot{u} - Ae^{-At}u = e^{-At}f(t).$$

Ahora, integrando entre t_0 y t y tomando en cuenta la condición inicial de (3.1), se tiene

$$\int_{t_0}^{t} e^{-At}\dot{u}dt - \int_{t_0}^{t} Ae^{-At}udt = \int_{t_0}^{t} e^{-At}f(t) \tag{3.6}$$

empleando integración por partes

$$\int_{t_0}^{t} e^{-At}\dot{u}dt = e^{-At}u\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t}(-A)e^{-At}udt. \tag{3.7}$$

Reemplazando (3.7) en (3.6), resulta

$$\begin{aligned} e^{-At}u(t) - e^{-At_0}u_0 + \int_{t_0}^{t} Ae^{-At}udt - \int_{t_0}^{t} Ae^{-At}udt &= \int_{t_0}^{t} e^{-As}f(s)ds \\ e^{-At}u(t) - e^{-At_0}u_0 &= \int_{t_0}^{t} e^{-As}f(s)ds, \end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

□

Observación 3.1. El Teorema 3.1 nos servirá para establecer la existencia y unicidad de la solución para los sistemas no conservativos.

3.2. La ecuación diferencial vectorial de segundo orden $\ddot{u} + Au = f(t)$

Consideremos la ecuación diferencial vectorial de segundo orden

$$\ddot{u} + Au = f(t) \tag{3.8}$$

3.2.1. Caso homogéneo

Teorema 3.2. El problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{u} + Au = 0, \\ u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = u_1; \end{cases} \tag{3.9}$$

donde $A = [a_{ij}]_{n\times n}, u = [u_i]_{n\times 1}$ es un vector de incógnitas que dependen de t y $\ddot{u} = [\ddot{u}_i]_{n\times 1}$, tiene como única solución a

$$u(t) = C(t-t_0)u_0 + D(t-t_0)u_1,$$

donde $C(t)$ y $D(t)$ están definidos como

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k, \qquad D(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}A^k,$$

simbólicamente,

$$u(t) = \cos\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)u_0 + \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)}{\sqrt{A}}u_1.$$

Prueba. Proponemos la solución de la ecuación diferencial (3.9) como una series de potencias

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \frac{(t-t_0)^k}{k!}, \tag{3.10}$$

donde v_k son vectores de orden $n \times 1$ que serán determinados.

Sustituyendo (3.10) en (3.9) y desarrollando convenientemente las sumas obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty}(v_{k+2} + Av_k)\frac{(t-t_0)^k}{k!} = 0.$$

Podemos concluir que los coeficientes vectoriales v_k deben satisfacer el problema vectorial en diferencias,

$$v_{k+2} + Av_k = 0,\ \forall k \geq 0.$$

Por inducción, obtenemos que

$$v_{2k} = (-1)^k A^k v_0, \qquad v_{2k+1} = (-1)^k A^k v_1,\ k \geq 0,$$

también de las condiciones iniciales de la ecuación (3.9) se tiene que $v_0 = u_0, v_1 = u_1$, de allí

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t-t_0)^{2k}}{(2k)!}A^k u_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t-t_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}A^k u_1$$

o simplemente

$$u(t) = C(t-t_0)u_0 + D(t-t_0)u_1, \tag{3.11}$$

donde

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k, \tag{3.12}$$

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}A^k. \tag{3.13}$$

Simbólicamente, escribimos

$$C(t) = \cos(\sqrt{A}t), \tag{3.14}$$

$$D(t) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}. \tag{3.15}$$

Las series $C(t)$ y $D(t)$ satisfacen la ecuación diferencial matricial

$$\ddot{E}(t) + AE(t) = 0, \tag{3.16}$$

siendo éstas linealmente independientes.

Finalmente reemplazando (3.15) y (3.14) en (3.11) obtenemos

$$u(t) = \cos\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)u_0 + \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{A}(t-t_0)\right)}{\sqrt{A}}u_1,$$

que viene a ser solución de la ecuación diferencial (3.9) y por la linealidad de la ecuación diferencial, ésta es única. □

3.2.2. Caso general

Teorema 3.3. El problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{u} + Au = f(t) \\ u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = u_1, \end{cases}$$

donde $A = [a_{ij}]_{n\times n}, f(t) = [f_i(t)]_{n\times 1}$ es un vector de funciones continuas, $u = [u_i]_{n\times 1}$ es un vector de incógnitas que dependen de $t, \ddot{u} = [\ddot{u}]_{n\times 1}$, y t_0, u_0, u_1 son dados, tiene como única solución

$$u(t) = C(t-t_0)u_0 + D(t-t_0)u_1 + \int_{t_0}^{t} D(t-s)f(s)ds,$$

donde $C(t)$ y $D(t)$ son las series definidas en (3.12) y (3.13) respectivamente. Simbólicamente,

$$u(t) = \cos\left[\sqrt{A}(t-t_0)\right]u_0 + \frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{A}(t-t_0)\right]}{\sqrt{A}}u_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{A}(t-s)\right]}{\sqrt{A}}f(s)ds.$$

Prueba. En seguida, consideremos el problema de valor inicial formado por la Ecuación (3.8), con $f(t)$ continua

$$\begin{cases} \ddot{u} + Au = f(t), \\ u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = u_1. \end{cases} \tag{3.17}$$

Vamos a procurar una solución particular de (3.17) usando el método de variación de parámetros, esto es, una solución de la forma

$$u(t) = C(t - t_0)a(t) + D(t - t_0)b(t), \tag{3.18}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son vectores que dependen de t. Derivando $u(t)$, obtenemos

$$\dot{u}(t) = \dot{C}(t - t_0)a(t) + C(t - t_0)\dot{a}(t) + \dot{D}(t - t_0)b(t) + D(t - t_0)\dot{b}(t). \tag{3.19}$$

Haciendo $C(t - t_0)\dot{a}(t) + D(t - t_0)\dot{b}(t) = 0$, y derivando (3.19), se obtiene

$$\ddot{u}(t) = \ddot{C}(t - t_0)a(t) + \dot{C}(t - t_0)\dot{a}(t) + \ddot{D}(t - t_0)b(t) + \dot{D}(t - t_0)\dot{b}(t). \tag{3.20}$$

Sustituyendo (3.20) en la Ecuación (3.17) y usando el dato que $C(t)$ y $D(t)$ es solución de la Ecuación (3.16) obtenemos

$$\dot{C}(t - t_0)\dot{a}(t) + \dot{D}(t - t_0)\dot{b}(t) = f(t).$$

Este procedimiento da origen al sistema de ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} C(t - t_0)\dot{a}(t) + D(t - t_0)\dot{b}(t) &= 0 \\ \dot{C}(t - t_0)\dot{a}(t) + \dot{D}(t - t_0)\dot{b}(t) &= f(t), \end{aligned}$$

el cual eliminando, para obtener $\dot{a}(t)$ y $\dot{b}(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Big(D(t - t_0)\dot{C}(t - t_0) - \dot{D}(t - t_0)C(t - t_0)\Big)\dot{a}(t) &= D(t - t_0)f(t) \\ \Big(C(t - t_0)\dot{D}(t - t_0) - \dot{C}(t - t_0)D(t - t_0)\Big)\dot{b}(t) &= C(t - t_0)f(t). \end{aligned}$$

Por otro lado, las expresiones entre paréntesis son identidades matriciales trigonométricas y, consecuentemente, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -D(t - t_0)f(t) \\ \dot{b}(t) &= C(t - t_0)f(t). \end{aligned}$$

Integrando las dos últimas igualdades y sustituyendo en la Ecuación (3.18) los valores obtenidos, resulta

$$u(t) = C(t-t_0)\left[a(t_0) - \int_{t_0}^{t} D(s-t_0)f(s)ds\right] + D(t-t_0)\left[b(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(s-t_0)f(s)ds\right],$$

esto es,

$$u(t) = C(t-t_0)a(t_0)+D(t-t_0)b(t_0)+\int_{t_0}^{t} \left[D(t-t_0)C(s-t_0)-C(t-t_0)D(s-t_0)\right]f(s)ds.$$

Empleando (3.17),(3.18) y (3.19) y aplicando la identidad trigonométrica del seno de una diferencia, se tiene:

$$u(t) = C(t-t_0)\dot{u}(0) + D(t-t_0)\dot{u}(0) + \int_{t_0}^{t} D(t-s)f(s)ds. \tag{3.21}$$

$\square$

Observaciones 3.1.

1. En la literatura, frecuentemente, la demostración de la Fórmula (3.21) anterior es hecha utilizando la reducción de Hamilton. Este proceso consiste en transformar el problema de segundo orden

$$\begin{cases} \ddot{u} + Au = f(t), \\ u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = u_1 \end{cases} \tag{3.22}$$

en un sistema de primer orden, mediante un cambio de variables

$$\begin{cases} \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} = Bv + f(t), \\ v(t_0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Enseguida se emplea la fórmula de variación de parámetros (3.2), observando que la exponencial $e^{B(t-t_0)}$, donde B es una matriz, la llamada matriz compañera

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix},$$

es simplemente la matriz

$$\begin{bmatrix} C(t-t_0) & D(t-t_0) \\ \dot{C}(t-t_0) & \dot{D}(t-t_0) \end{bmatrix}$$

2. Las matrices $C(t)$ y $D(t)$ satisfacen la ecuación diferencial matricial

$$\ddot{E}(t) + AE(t) = 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} C(0) &= I, & \dot{C}(0) &= 0, \\ D(0) &= 0, & \dot{D}(0) &= I, \end{aligned}$$

son denominados las soluciones fundamentales del Problema (3.22). Cabe destacar que la solución denotada por $D(t)$ será de particular interés, y la llamaremos la solución dinámica. Además de esto, la solución dinámica $D(t)$ satisface el problema matricial de valor inicial

$$\left\{ \ddot{D}(t) + AD(t) = 0, \dot{D}(0) = I, D(0) = 0, \right.$$

y que $C(t) = \dot{D}(t)$. Entonces, de acuerdo con el Teorema 3.3, la solución de (3.22) es

$$u(t) = \dot{D}(t-t_0)u_0 + D(t-t_0)u_1 + \int_{t_0}^{t} D(t-s)f(s)ds.$$

Por lo tanto, concluimos que la solución dinámica $D(t)$ contiene toda la información necesaria par resolver la ecuación conservativa vectorial de segundo orden

$$\ddot{u} + Au = f(t).$$

Capítulo 4

Sistemas no conservativos

En este capítulo se presenta el método matricial operacional para determinar la solución $u(t)$ de la ecuación

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t),$$

donde las matrices M, C y K son arbitrarias de orden n. Si M es no singular, premultiplicamos la ecuación por M^{-1} transformándola en:

$$\ddot{u} + C_1\dot{u} + K_1u = f_1(t).$$

Los resultados presentados en este capítulo, son siguiendo la teoría de Claeyssen [Cla90], y están fundamentados en el concepto de solución dinámica matricial.

4.1. El método matricial operacional

Consideremos la ecuación diferencial vectorial

$$\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t). \tag{4.1}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la Ecuación (4.1) obtenemos:

$$\mathcal{L}(\ddot{u}) + C\mathcal{L}(\dot{u}) + K\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(f(t)),$$

de donde

$$\big[\lambda^2 u(\lambda) - \dot{u}(0) - \lambda u(0)\big] + C\big[\lambda u(\lambda) - u(0)\big] + Ku(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda).$$

Ordenando,

$$\big[\lambda^2 I + C\lambda + K\big]u(\lambda) = \dot{u}(0) + (\lambda I + C)u(0) + \mathcal{F}(\lambda)$$

o de manera más compacta, resulta la ecuación operacional

$$\Delta(\lambda)u(\lambda) = \mathcal{H}(\lambda) + \mathcal{F}(\lambda), \tag{4.2}$$

donde: $\Delta(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda C + K$,
$\mathcal{H}(\lambda) = \dot{u} + (\lambda I + C)u(0)$,
$u(\lambda)$ y $\mathcal{F}(\lambda)$ son las transformadas de Laplace de u y de $f(t)$ respectivamente.

Ahora introduciremos formalmente el concepto de solución dinámica (ya mencionada el Capítulo 3), que es la base para la obtención de la solución $u(t)$ de (4.1).

Definición 4.1. La solución matricial al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{D} + C\dot{D} + KD = 0, \\ \dot{D}(0) = I, \ D(0) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

se denomina solución dinámica asociada a la Ecuación (4.1).

A continuación presentamos el teorema en el que se asocian las ecuaciones diferenciales dadas en (4.1) y (4.3).

Teorema 4.1. La solución al problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t), \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \ u(0) = u_0, \end{cases}$$

es dada por:

$$u(t) = D(t)\dot{u}_0 + \Big(\dot{D}(t) + D(t)C\Big)u_0 + \int_0^t D(t-s)f(s)ds,$$

donde $D(t)$ es la solución dinámica, o sea, la solución al problema matricial

$$\begin{cases} \ddot{D} + C\dot{D} + KD = 0, \\ \dot{D}(0) = I, D(0) = 0. \end{cases}$$

Prueba. Procediendo de manera análoga a la obtención de la ecuación operacional (4.2), de (4.3) resulta

$$\Delta(\lambda)\mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{H}(\lambda) + \mathcal{F}(\lambda),$$

donde: $\Delta(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda C + K$,

$\mathcal{H}(\lambda) = \dot{D}(0) + (\lambda I + C)D(0)$,

Como $F = 0$, $\dot{D}(0) = I$, $D(0) = 0$, se obtiene la ecuación

$$\Delta(\lambda)\mathcal{D}(\lambda) = I, \tag{4.4}$$

siendo $\mathcal{D}(\lambda)$ la transformada de Laplace de $D(t)$ y es referida como la matriz de transferencia del sistema (4.1).

Vemos de (4.4) que $\Delta^{-1}(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda)$. Tomando en cuenta esta igualdad y premultiplicando (4.2) por $\Delta^{-1}(\lambda)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\lambda) &= \mathcal{D}(\lambda)\mathcal{H}(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)\mathcal{F}(\lambda) \\ &= \mathcal{D}(\lambda)\dot{u}(0) + \big(\lambda\mathcal{D}(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)C\big)u(0) + \mathcal{D}(\lambda)\mathcal{F}(\lambda) \end{aligned}$$

y tomando la transformada inversa de Laplace obtenemos

$$u(t) = D(t)\dot{u}(0) + \big(\dot{D}(t) + D(t)C\big)u(0) + \int_0^t D(t-s)f(s)ds. \tag{4.5}$$

$\square$

La Ecuación (4.5) indica que para conocer la respuesta (solución) del sistema (4.1) es suficiente conocer la solución dinámica asociada al mismo.

4.2. Obtención de la solución dinámica

Veamos, brevemente, dos alternativas teóricas para la obtención de la solución dinámica $D(t)$. Por un lado, si consideramos la ecuación

$$\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0. \tag{4.6}$$

Las soluciones de la forma $u(t) = e^{\lambda t}v$ (llamadas soluciones propias) de (4.6) son obtenidos resolviendo el sistema

$$(\lambda^2 I + \lambda C + K)v = 0, \quad v \neq 0, \tag{4.7}$$

lo que equivale a hallar las raíces (autovalores de (4.6)) del polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \lambda C + K) = \sum_{i=0}^{2n} b_i \lambda^{2n-i} \tag{4.8}$$

y determinar los autovectores v. Además de eso, como

$$D(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) = \frac{\mathrm{adj}\Delta(\lambda)}{p(\lambda)},$$

los polos de $D(\lambda)$ son los autovalores de (4.6) y, como existe un número finito de ellos, la integral de Bromwich para la transformada inversa de Laplace se reduce a una integral de contorno limitado.

$$D(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma D(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \tag{4.9}$$

donde Γ es una circunferencia que encierra los autovalores de (4.6). Por otro lado cuando la solución dinámica es escrita como una serie de Taylor, o sea

$$D(t) = \sum_{j=0}^{\infty} D_j \frac{t^j}{j!}, \tag{4.10}$$

donde $D_j = D^{(j)}(0)$ y es sustituida en la Ecuación (4.3), da origen al problema matricial en diferencias

$$\begin{cases} D_{j+2} + CD_{j+1} + KD_j = 0, \\ D_1 = I, \ D_0 = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Se observa que en el cálculo de la Fórmula (4.9) es necesario conocer la matriz de transferencia, además para (4.11) no es fácil generar las matrices D_j para j muy grande.

En la sección siguiente, veremos un método alternativo para calcular la solución dinámica.

4.2.1. Método de cálculo para la solución dinámica

Teorema 4.2. La solución dinámica $D(t)$ asociada a la ecuación $\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$ es dada por

$$D(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{2n-j},$$

donde $b_i, i = 0 : 2n$ son los coeficientes del polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \lambda C + K)$, la función $d(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_{j+2} + CD_{j+1} + KD_j = 0, & j = 0 : 2n-3 \\ D_1 = 0, \; D_0 = 0 \end{cases}$$

Prueba. El sistema $\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$ puede ser escrito como

$$\dot{w} = Ew,$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

y cuya solución es $w(t) = e^{Et} w(0)$. Además de esto,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}(t) \\ \ddot{D}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}(t) \\ -kD(t) - C\dot{D}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = e^{Et} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la igualdad $\frac{d}{dt} e^{Et} = Ee^{Et}$ obtenemos

$\lambda\varepsilon(\lambda) - I = E\varepsilon(\lambda)$, esto es

$$(\lambda I - E)\varepsilon(\lambda) = I, \tag{4.13}$$

donde $\varepsilon(\lambda)$ es la transformada de Laplace de e^{Et}. Entonces de (4.13) se tiene que

$$\varepsilon(\lambda) = (\lambda I - E)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\lambda I - E)}{\det(\lambda I - E)}. \tag{4.14}$$

Podemos verificar que $\det(\lambda I - E) = \det(\lambda^2 I + \lambda C + K) = p(\lambda)$, en efecto la matriz

$$E = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}$$

es cuadrada de orden $2n$, donde aplicando determinante de matrices por bloques en el proceso siguiente se obtiene

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - E) &= \det \begin{bmatrix} \lambda I & -I \\ K & \lambda I + C \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 0 & -I \\ K + \lambda^2 I + C\lambda & \lambda I + C \end{bmatrix} \\
&= (-1)^n \det \begin{bmatrix} K + \lambda^2 I + C\lambda & \lambda I + C \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\
&= (-1)^n \det[K + \lambda^2 I + C\lambda] \det[-I] \\
&= (-1)^n \det[K + \lambda^2 I + C\lambda](-1)^n \det[I] \\
&= \det[K + \lambda^2 I + C\lambda] \\
&= p(\lambda)
\end{aligned}$$

donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico ya definido en (4.8). Por otro lado, también tenemos la siguiente igualdad para la matriz adjunta [Col05, págs. 47-50].

$$\operatorname{adj}(\lambda I - E) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1} E^{2n-j},$$

y, de (4.14), obtenemos que

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1} E^{2n-j}}{p(\lambda)}.$$

Utilizando la integral de Bromwich para determinar la inversa de la transformada de Laplace, tenemos que

$$e^{Et} = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{\operatorname{adj}(\lambda I - E)}{p(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda = \sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j-i} b_i \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^{j-i-1}\frac{e^{\lambda t} d\lambda}{p(\lambda)}\right) E^{2n-j}, \qquad (4.15)$$

siendo Γ una circunferencia que encierra todas las raíces de $p(\lambda)$.

La función

$$d(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{p(\lambda)} d\lambda, \qquad (4.16)$$

es de clase C^∞ y sus derivadas son dadas por

$$d^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\lambda^m e^{\lambda t}}{p(\lambda)} d\lambda. \qquad (4.17)$$

Al evaluar la integral de línea dada por la Ecuación (4.17) se consigue obtener [Col05, pág. 51],

$$d^{(2n-i)}(0) = 1,\ d(0) = d'(0) = \cdots = d^{(2n-2)}(0) = 0. \qquad (4.18)$$

Además de (4.16), aplicando la fórmula integral de Bromwich se tiene que la transformada de Laplace de la función es

$$\mathcal{L}[d(t)] = \frac{1}{p(\lambda)}.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
1 &= P(\lambda)l[d] \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{2n} b_i\lambda^{2n-i}\Big)l\{d(t)\} \\
&= \frac{b_0\lambda^{2n} + b_1\lambda^{2n-1} + b_2\lambda^{2n-2} + \cdots + b_{N-1}\lambda + b_N}{p(\lambda)} \\
&= b_0\left(\frac{\lambda^{2n}}{p(\lambda)}\right) + b_1\left(\frac{\lambda^{2n-1}}{p(\lambda)}\right) + b_2\left(\frac{\lambda^{2n-2}}{p(\lambda)}\right) + \cdots + b_N\left(\frac{1}{p(\lambda)}\right) \\
&= 1 + b_0(\lambda^{2n}l\{d(t)\} - 1) + b_1(\lambda^{2n-1}l\{d(t)\}) + b_2(\lambda^{2n-2}l\{d(t)\}) + \cdots + b_N(l\{d(t)\}),
\end{aligned}
$$

se sumó y restó 1 ya que $b_0 = 1$

$$
= 1 + b_0(\lambda^{2n}l\{d(t)\} - 1) + b_1(\lambda^{2n-1}l\{d(t)\}) + b_2(\lambda^{2n-2}l\{d(t)\}) + \cdots + b_N(l\{d(t)\}).
$$

Empleando (4.18) la última igualdad la podemos expresar como desarrollos de la transformada de Laplace de derivadas, es decir

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 + b_0\big(\lambda^{2n}l\{dt\} - \lambda^{2n-1}d(0) - \lambda^{2n-2}d'(0) - \cdots - \lambda d^{(2n-2)}(0) - d^{(2n-1)}(0)\big) + \\
&\quad b_1\big(\lambda^{2n-1}l\{dt\} - \lambda^{2n-2}d(0) - \lambda^{2n-3}d'(0) - \cdots - \lambda d^{(2n-2)}(0)\big) + \cdots + \\
&\quad b_{2n-1}\big(\lambda l\{d(t)\} - d(0)\big) + b_{2n}\big(l\{d(t)\}\big) \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{2n} b_i l\big\{d^{(2n-i)}(t)\big\},
\end{aligned}
$$

de donde se concluye que $\sum_{i=0}^{2n} b_i l\big\{d^{(2n-i)}(t)\big\} = 0$.

Por la linealidad de la transformada de Laplace se tiene

$$
l\Big(\sum_{i=0}^{2n} b_i d^{(2n-i)}(t)\Big) = 0. \tag{4.19}
$$

De (4.18) y de (4.19) se logra establecer que la función $d(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{2n} b_i d^{(2n-i)}(t) = 0, \\ d^{(2n-i)}(0) = 1, \ d(0) = d'(0) = \cdots = d^{(2n-2)}(0) = 0, \end{cases}$$

Sustituyendo (4.17) en (4.15) obtenemos,

$$e^{Et} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-i} b_i d^{(j-i-1)}(t) E^{2n-j}. \tag{4.20}$$

De (4.12), tenemos que

$$\frac{d^k}{dt^k} \begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = E^k e^{Et} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

y en $t = 0$

$$\begin{bmatrix} D^{(k)}(0) \\ D^{(k+1)}(0) \end{bmatrix} = E^k \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} D_k \\ D_{k+1} \end{bmatrix} = E^k \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad k \geq 0. \tag{4.21}$$

A través de (4.12) y (4.20), podemos escribir

$$\begin{bmatrix} D(t) \\ \dot{D}(t) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) E^{2n-j} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-i} b_i d^{(j-i-1)}(t) \begin{bmatrix} D_{2n-j} \\ D_{2n-j+1} \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

donde la última igualdad fue obtenida de (4.21). De este modo, tendremos una fórmula para la solución dinámica

$$D(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{2n-j}$$

donde los coeficientes matriciales $D_{2n-j}, j = 1 : 2n$ pueden ser determinados recursivamente por la aplicación de (4.11). □

Para efecto numérico, enfatizamos la segunda igualdad obtenida a partir de (4.22), o sea

$$\dot{D}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{2n-j+1}.$$

Estos resultados fueron establecidos por J. R. Claeyssen, [Cla90, pág. 76].

4.3. Interpretación física de la solución dinámica

Consideremos un sistema físico con n componentes, cuyas respuestas $u_i, i = 1 : n$ son determinadas a partir del siguiente P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0, \\ \dot{u}(0) = e_j, \ u(0) = 0, \end{cases} \tag{4.23}$$

donde C y K son matrices cualesquiera, $u = [u_i]_{n\times 1}$ es el vector columna de desplazamientos y $e_j = [\delta_{ij}]_{n\times 1}$ es el j-ésimo vector de la base canónica.

La solución de (4.23) de acuerdo con (4.5), está dada por

$$u(t) = D(t)\dot{u}(0) + \big(\dot{D}(t) + D(t)C\big)u(0) + \int_0^t D(t-s)f(s)ds.$$

Como $\dot{u}(0) = e_j, u(0) = 0, f(t) = 0$, tenemos

$$u(t) = D(t)e_j$$

y la k-ésima componente es

$$u_k(t) = e_k^T u(t) = e_k^T D(t) e_j = D_{kj}(t).$$

De este modo, podemos afirmar que el elemento $D_{kj}(t)$ de la solución dinámica $D(t)$ es la respuesta de la k-ésima componente del sistema, debido a una fuerza unitaria concentrada en la j-ésima componente.

Capítulo 5

Aplicación de sistemas no conservativos: modelación de sistemas con N grados de libertad para edificios

En este capítulo se presentan algunos modelos de sistemas no conservativos, es decir sistemas en la cual la energía del sistema disminuye en el tiempo, razón por la cual un movimiento producido por alguna perturbación inicial, no continúa para siempre. Varios factores contribuyen para este amortiguamiento. El más común es la fricción viscosa.

A continuación consideramos sistemas constituidos por edificios de varios pisos, que al ser modelados, se obtiene una formulación matricial de la forma $M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx = h(t)$.

5.1. Formulación de un modelo básico

Un edificio puede ser considerado como un sistema de elementos con masa distribuida y elasticidad. Pero hay elementos que son masivos y duros (pisos) y están conectados con otros miembros que poseen masa relativamente pequeña pero de gran flexibilidad (paredes, columnas).

En una estructura idealizada de N pisos que se muestra en la Figura 5.1 las ecuaciones de movimiento puedes ser descritas en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= k_{i+1}(x_{i+1}-x_i)-k_i(x_i-x_{i-1})+c_{i+1}(\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_i) \\ &\quad -c_i(\dot{x}_i-\dot{x}_{i-1})+u_i+w_i,\ i=1:N-1 \\ m_N\ddot{x}_N &= -k_N(x_N-x_{N-1})-c_N(\dot{x}_N-\dot{x}_{N-1})+u_N+w_N, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde m_i, c_i y k_i son la masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez del i-ésimo piso respectivamente, u la fuerza de control y w la carga externa ejercida sobre el i-ésimo piso. Por tanto las Ecuaciones (5.1) pueden ser escritas también en forma matricial

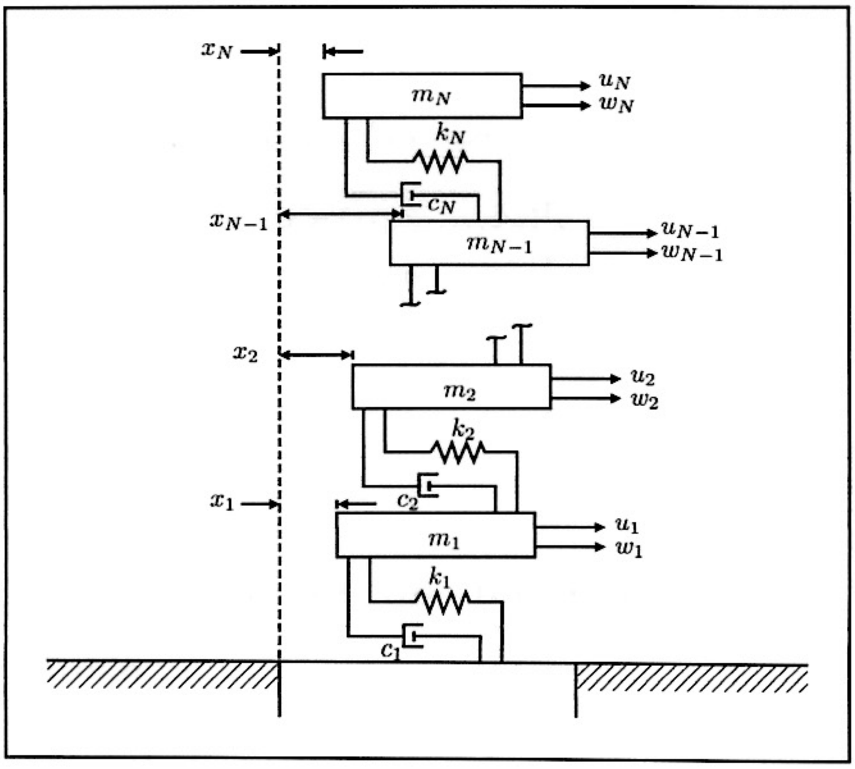

Figura 5.1: El modelo básico.

como sigue

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=u+w, \tag{5.2}$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_N \end{bmatrix},$$

son las matrices de masa, amortiguación y rigidez respectivamente.

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T,$$
$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T,$$
$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^T,$$

son el vector desplazamiento relativo a la base, el vector fuerza de control y el vector de carga externa respectivamente.

5.2. Formulación de un modelo con excitación sísmica

Tenemos el movimiento de una estructura lineal elástica (Figura 5.2) con N grados de libertad y amortiguamiento viscoso, sujeta a una aceleración $\dot{X}_g(t)$ en la base, la cual satisface las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{z} &= k_{i+1}(z_{i+1}-z_i)-k_i(z_i-z_{i-1})+c_{i+1}(\dot{z}_{i+1}-\dot{z}_i) \\
&\quad -c_i(\dot{z}_i-\dot{z}_{i-1}),\ i=1:N-1 \\
m_N\ddot{z}_N &= -k_N(z_N-z_{N-1})-c_N(\dot{z}_N-\dot{z}_{N-1})
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

donde m_i, c_i y k_i son la masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez del i-ésimo piso respectivamente, y z_i es el desplazamiento absoluto de la i-ésima masa. Por lo

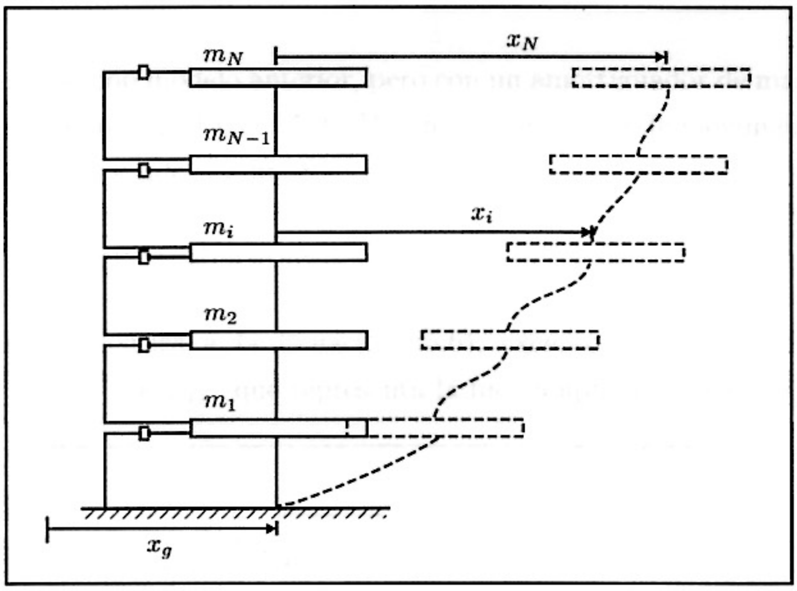

Figura 5.2: Edificio sin amortiguador de masa regulada.

tanto, si el desplazamiento absoluto z_i es sustituido por el desplazamiento relativo x_i, se establece las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{cases}
x_i = z_i - X_g \\
\dot{x}_i = \dot{z}_i - \dot{X}_g \\
\ddot{x}_i = \ddot{z}_i - \ddot{X}_g.
\end{cases}
\tag{5.4}
$$

Reemplazando las Ecuaciones (5.4) en las Ecuaciones (5.3), obtenemos

$$
\begin{aligned}
m_i(\ddot{x}_i+\ddot{X}_g) &= k_{i+1}(x_{i+1}-x_i)-k_i(x_i-x_{i-1})+c_{i+1}(\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_i) \\
&\quad -c_i(\dot{x}_i-\dot{x}_{i-1}),\ i=1:N-1 \\
m_N(\ddot{x}_N+\ddot{X}_g) &= -k_N(x_N-x_{N-1})-c_N(\dot{x}_N-\dot{x}_{N-1}),
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Finalmente las ecuaciones dadas en (5.5) también pueden ser escritas como una ecuación diferencial matricial de segundo orden como sigue,

$$M(\ddot{x} + v\ddot{x}_g) + C\dot{x} + Kx = 0, \tag{5.6}$$

donde M, C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez ya conocidas, $v = (1, 1, \ldots, 1)^T$ es un vector N dimensional, y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$, es el vector de desplazamientos relativo.

Considerando el mismo modelo anterior, pero con un amortiguador de masa regulada y colocado en el último piso (Figura 5.3). Entonces la ecuación de movimiento del nuevo sistema de múltiples grados de libertad es:

$$M(\ddot{x} + v\ddot{X}_g) + C\dot{x} + Kx - f = 0.$$

Esta ecuación es idéntica a la Ecuación (5.6), excepto por la adición del vector $f = (0, 0, 0, \ldots, c_d x_d + k_d x_d)^T$ que representa la fuerza aplicada a los pisos.

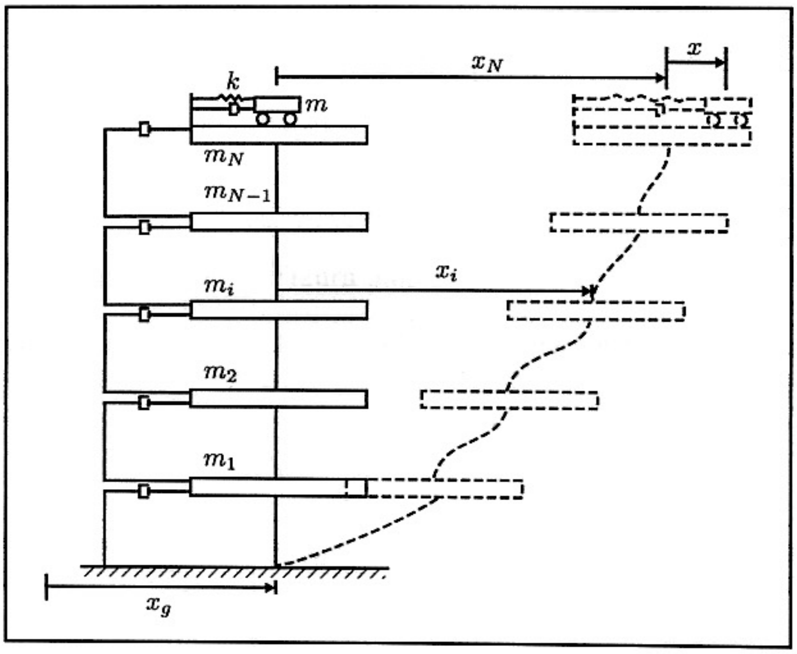

Figura 5.3: Edificio con amortiguador de masa regulada.

De la Figura 5.4 tenemos:

x_d, es el deplazamiento del vibrador absorbente relativo,

k_d, es la rigidez de la fuerza y c_d es el coeficiente de amortiguamiento.

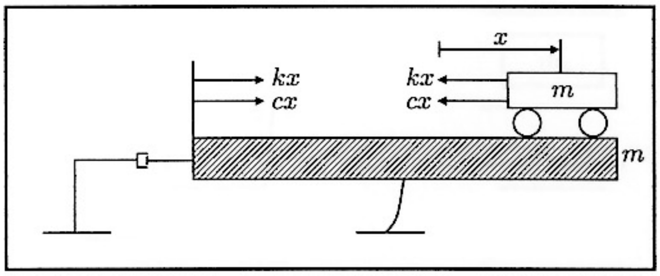

Figura 5.4: Amortiguador de masa regulada.

5.3. Vibración horizontal de un edificio de 4 pisos

Consideremos un modelo de vibración horizontal de un edificio de cuatro pisos [Inm01, págs. 282-283], expuesto a vientos que ocasionan un desplazamiento inicial de

$$u(0) = \begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,020 \\ 0,010 \\ 0,001 \end{bmatrix} \text{m},$$

tal como está representado en la Figura 5.5.

La ecuación diferencial vectorial de segundo orden con coeficientes matriciales de orden 4 es como sigue:

$$\begin{gathered} M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t) \\ u(0) = \begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,020 \\ 0,010 \\ 0,001 \end{bmatrix} \text{m}, \quad \dot{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m/s}, \end{gathered} \tag{5.7}$$

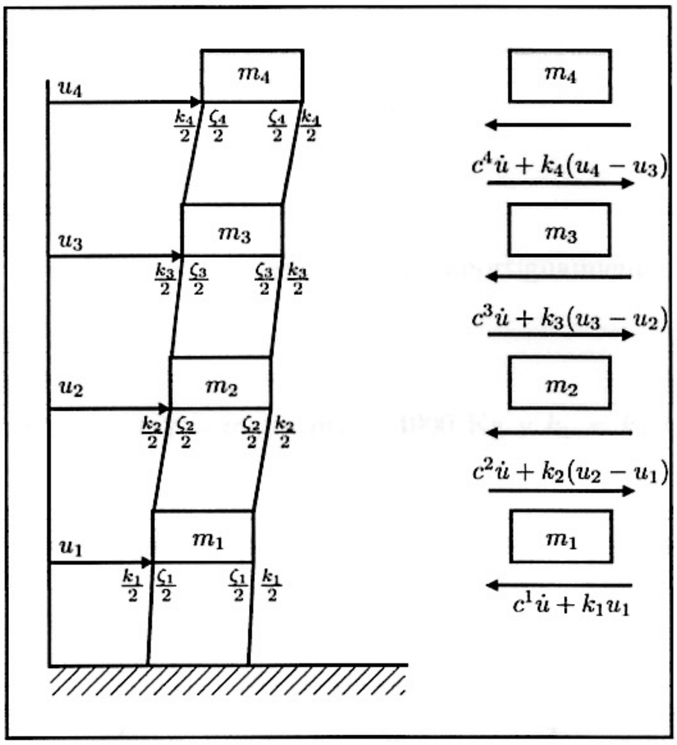

Figura 5.5: Modelo de vibración horizontal de un edificio de cuatro pisos y las fuerzas restauradoras aplicadas en cada masa (piso).

donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \text{Kg},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \text{N/m},$$

y la matriz

$$C = \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \\ c^4 \end{bmatrix}$$

es consecuencia de la suposición de determinado amortiguamiento ζ_i, en cada modo del sistema.

Consideraremos que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 4000$ Kg y $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 5000$ N/m. De este modo,

$$M = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4000 \end{bmatrix} \text{Kg},$$

$$K = \begin{bmatrix} 10000 & -5000 & 0 & 0 \\ -5000 & 10000 & -5000 & 0 \\ 0 & -5000 & 10000 & -5000 \\ 0 & 0 & -5000 & 5000 \end{bmatrix} \text{N/m},$$

Suponemos que existe un amortiguamiento de $\zeta_i = 0,01,\ i = 1:4$, en cada modo. Estos datos dan origen a la matriz [Can95, pág. 47].

$$C = \begin{bmatrix} 121,3652 & -349576 & -6,2651 & -3,0352 \\ -34,9576 & 115,1000 & -37,9928 & -44,2579 \\ -6,2651 & -37,9928 & 112,0649 & -44,2579 \\ -3,0352 & -9,3003 & -44,2579 & 77,1073 \end{bmatrix} \text{N-s/m}.$$

Por otro lado vamos a suponer que se tiene la fuerza externa

$$F(t) = 4000 \begin{bmatrix} e^{-0,5t} \cos 8t \\ e^{-0,25t} \operatorname{sen} 8t \\ e^{-0,1t} \cos 10t \\ e^{-0,05t} \operatorname{sen} 10t \end{bmatrix} \text{N}$$

Reescribiendo la Ecuación (5.7) en la forma

$$\ddot{u} + A_1\dot{u} + A_2 u = f(t)$$

se tiene

$$\begin{aligned}
A_1 &= M^{-1}.C \\
&= \begin{bmatrix} \frac{303413}{10000000} & -\frac{43697}{5000000} & -\frac{62651}{40000000} & -\frac{1897}{2500000} \\ -\frac{43697}{5000000} & \frac{1151}{40000} & -\frac{47491}{5000000} & -\frac{93003}{40000000} \\ -\frac{62651}{40000000} & -\frac{47491}{5000000} & \frac{1120649}{40000000} & -\frac{442579}{40000000} \\ -\frac{1897}{2500000} & -\frac{93003}{40000000} & -\frac{442579}{40000000} & \frac{771073}{40000000} \end{bmatrix} \\
A_2 &= M^{-1}.K \\
&= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$f(t) = \begin{bmatrix} e^{-0,5t}\cos 8t \\ e^{-0,25t}\operatorname{sen} 8t \\ e^{-0,1t}\cos 10t \\ e^{-0,05t}\operatorname{sen} 10t \end{bmatrix} \text{N}.$$

Su polinomio característico asociado $p(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_2)$ es,

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = \lambda^8 &+ 0{,}1064093499\lambda^7 + 8{,}753911474\lambda^6 + 0{,}6159559004\lambda^5 + 23{,}45006228\lambda^4 \\
&+ 0{,}8854267010\lambda^3 + 19{,}53736167\lambda^2 + 0{,}2211687011\lambda + 2{,}44140625
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación característica, $p(\lambda) = 0$, se obtiene los siguientes resultados

$$\lambda_1 = -0{,}003882885493 - 0{,}3882697145i,$$
$$\lambda_2 = -0{,}003882885493 + 0{,}3882697145i,$$
$$\lambda_3 = -0{,}01712927403 - 1{,}7128418i,$$
$$\lambda_4 = -0{,}01712927403 + 1{,}7128418i,$$
$$\lambda_5 = -0{,}02101216964 - 2{,}101111514i,$$
$$\lambda_6 = -0{,}02101216964 + 2{,}101111514i,$$
$$\lambda_7 = -0{,}01118034583 - 1{,}117978085i,$$
$$\lambda_8 = -0{,}01118034583 + 1{,}117978085i.$$

Por tanto los coeficientes del polinomio característico son los $b_i, i = 0 : 2n$, es decir,

$$b_0 = 1,$$
$$b_1 = 0{,}1064093499,$$
$$b_2 = 0{,}8753911474,$$
$$b_3 = 0{,}6159559004,$$
$$b_4 = 23{,}45006228,$$
$$b_5 = 0{,}8854267010,$$
$$b_6 = 19{,}53736167,$$
$$b_7 = 0{,}2211687011,$$
$$b_8 = 2{,}44140625.$$

A continuación obtenemos la solución dinámica escalar $d(t)$ resolviendo el sistema:

$$\sum_{j=0}^{8} b_j d^{(8-j)}(t) = 0$$
$$d(0) = 0 = d^{(1)}(0) = d^{(2)}(0) = d^{(3)}(0) = d^{(4)}(0) = d^{(5)}(0) = d^{(6)}(0) = 0; \; d^{(7)}(0) = 1$$

Reemplazando los b_i y desarrollando la sumatoria, se tiene la ecuación diferencial homogénea de octavo orden con valores iniciales

$$
\begin{aligned}
d^{(8)} &+ 0,1064093499d^{(7)} + 8,753911474d^{(6)} + 0,6159559004d^{(5)} + 23,45006228d^{(4)} \\
&+ 0,8854267010d^{(3)} + 19,53736167d^{(2)} + 0,2211687011d + 2,44140625 = 0
\end{aligned}
$$

$$
d(0) = 0 = d^{(1)}(0) = d^{(2)}(0) = d^{(3)}(0) = d^{(4)}(0) = d^{(5)}(0) = d^{(6)}(0) = 0;\ d^{(7)}(0) = 1
$$

La ecuación característica de la solución dinámica escalar $d(t)$ es

$$
\begin{aligned}
r^8 &+ 0,1064093499r^7 + 0,8753911474r^6 + 0,6634469004r^5 + 0,2345261577r^4 \\
&+ 1,087872240r^3 + 19,54258219r^2 + 0,4240720214r + 2,44140625 = 0,
\end{aligned}
$$

cuyas raíces son

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -0{,}003882885493 - 0{,}3882697145i, \\
r_2 &= -0{,}003882885493 + 0{,}3882697145i, \\
r_3 &= -0{,}01712927403 - 1{,}7128418i, \\
r_4 &= -0{,}01712927403 + 1{,}7128418i, \\
r_5 &= -0{,}02101216964 - 2{,}101111514i, \\
r_6 &= -0{,}02101216964 + 2{,}101111514i, \\
r_7 &= -0{,}01118034583 - 1{,}117978085i, \\
r_8 &= -0{,}01118034583 + 1{,}117978085i.
\end{aligned}
$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$
\begin{aligned}
d(t) =& e^{-0{,}0038882885493t}\big(a_1 \cos(-0{,}3882697145t) + a_2 \operatorname{sen}(-0{,}3882697145t)\big) \\
&+ e^{-0{,}0038882885493t}\big(a_3 \cos(0{,}3882697145t) + a_4 \operatorname{sen}(0{,}3882697145t)\big) \\
&+ e^{-0{,}01712927403t}\big(a_5 \cos(-1{,}7128418t) + a_6 \operatorname{sen}(-1{,}7128418t)\big) \\
&+ e^{-0{,}01712927403t}\big(a_7 \cos(1{,}7128418t) + a_8 \operatorname{sen}(1{,}7128418t)\big) \\
&+ e^{-0{,}02101216964t}\big(a_9 \cos(-2{,}101111514t) + a_{10} \operatorname{sen}(-2{,}101111514t)\big) \\
&+ e^{-0{,}02101216964t}\big(a_{11} \cos(2{,}101111514t) + a_{12} \operatorname{sen}(2{,}101111514t)\big) \\
&+ e^{-0{,}011180345583t}\big(a_{13} \cos(-1{,}117978085t) + a_{14} \operatorname{sen}(-1{,}117978085t)\big) \\
&+ e^{-0{,}011180345583t}\big(a_{15} \cos(1{,}117978085t) + a_{16} \operatorname{sen}(1{,}117978085t)\big)
\end{aligned}
$$

al reducir resulta

$$\begin{aligned}
d(t) =&e^{-0{,}0038828885493t}\big(c_1\cos(0{,}3882697145t)+c_2\,\mathrm{sen}(0{,}3882697145t)\big)\\
&+e^{-0{,}01712927403t}\big(c_3\cos(1{,}7128418t)+c_4\,\mathrm{sen}(1{,}7128418t)\big)\\
&+e^{-0{,}02101216964t}\big(c_5\cos(2{,}101111514t)+c_6\,\mathrm{sen}(2{,}101111514t)\big)\\
&+e^{-0{,}011180345583t}\big(c_7\cos(1{,}117978085t)+c_8\,\mathrm{sen}(1{,}117978085t)\big)
\end{aligned}$$

Hallando las constante $c_i, i = 1:8$, y como se conoce que se cumple

$$\begin{aligned}
d(0) &= 0,\\
d^{(1)}(0) &= 0,\\
d^{(2)}(0) &= 0,\\
d^{(3)}(0) &= 0,\\
d^{(4)}(0) &= 0,\\
d^{(5)}(0) &= 0,\\
d^{(6)}(0) &= 0,\\
d^{(7)}(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Se forma un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los $c_i, i = 1:8$. Al resolver obtenemos:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -0{,}002363208786,\\
c_2 &= -0{,}1974090656,\\
c_3 &= -0{,}003143974041,\\
c_4 &= -0{,}08405060837,\\
c_5 &= 0{,}0009749474756,\\
c_6 &= 0{,}02379281549,\\
c_7 &= 0{,}004532235352,\\
c_8 &= 0{,}1526093158.
\end{aligned}$$

Por tanto la solución dinámica escalar es:

$$
\begin{aligned}
d(t) =& e^{-0{,}003882885493t}(-0{,}002363208786\cos(0{,}3882697145t) - 0{,}1974090656\operatorname{sen}(0{,}3882697145t)) \\
&+ e^{-0{,}01712927403t}(-0{,}003143974041\cos(1{,}7128418t) + 0{,}08405060837\operatorname{sen}(1{,}7128418t)) \\
&+ e^{-0{,}02101216964t}(0{,}0009749474756\cos(2{,}101111514t) - 0{,}02379281549\operatorname{sen}(2{,}101111514t)) \\
&+ e^{-0{,}01118034583t}(0{,}004532235352\cos(1{,}117978085t) - 0{,}1526093158\operatorname{sen}(1{,}117978085t)),
\end{aligned}
$$

cuya gráfica es dada en la Figura 5.6.

Hallando las matrices $D_2, D_3, \ldots, D_7$ del problema matricial en diferencias

$$
\begin{gathered}
D_{j+2} + A_1 D_{j+1} + A_2 D_j = 0,\ j = 0:5 \\
D_1 = I, \quad D_0 = 0,
\end{gathered}
$$

se tiene

$$
D_2 = \begin{bmatrix}
-0{,}03034129999 & 0{,}008739399999 & 0{,}001566274999 & 0{,}0007588 \\
0{,}008739399999 & -0{,}028775 & 0{,}009498199999 & 0{,}002325074999 \\
0{,}001566274999 & 0{,}009498199999 & -0{,}028016225 & 0{,}01106447499 \\
0{,}0007588 & 0{,}002325074999 & 0{,}01106447499 & -0{,}01927682499
\end{bmatrix}
$$

$$
D_3 = \begin{bmatrix}
-2{,}498999999 & 1{,}2495 & 3{,}602404086 \times 10^{-10} & -4{,}622143602 \times 10^{-10} \\
1{,}2495 & -2{,}499 & 1{,}249499999 & -4{,}384667924 \times 10^{-11} \\
3{,}60240513 \times 10^{-10} & 1{,}249499999 & -2{,}498999999 & 1{,}249499999 \\
-4{,}622144192 \times 10^{-10} & -4{,}384707172 \times 10^{-11} & 1{,}249499999 & -1{,}249499999
\end{bmatrix}
$$

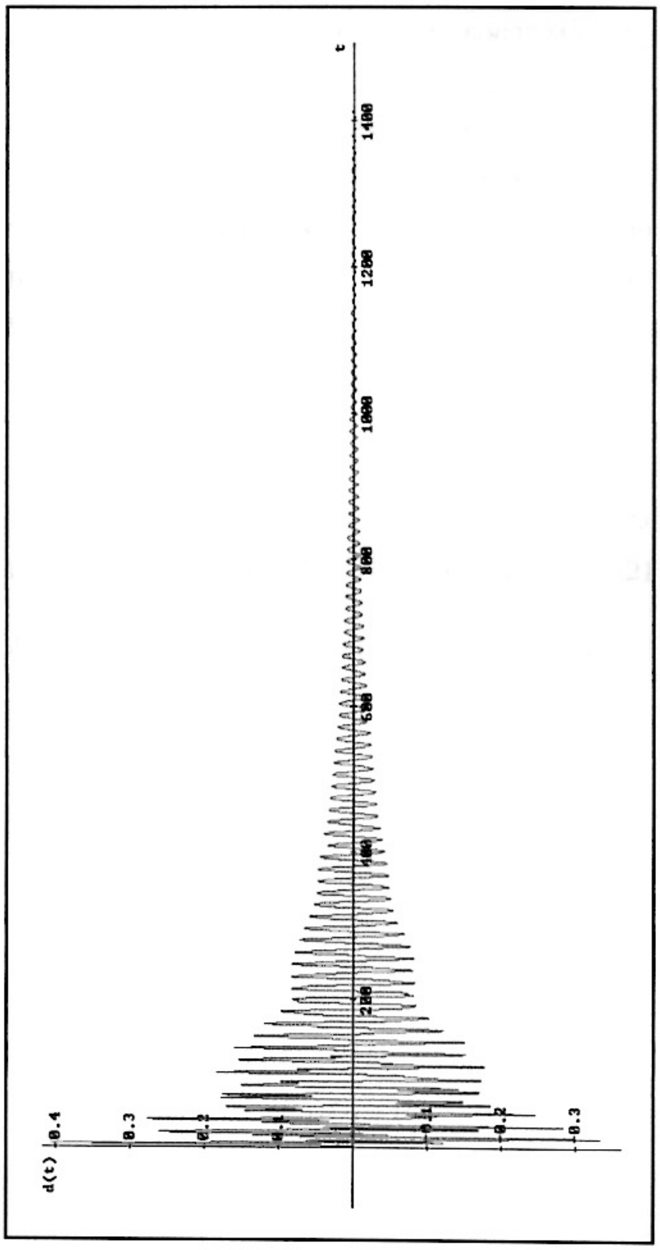

Figura 5.6: Gráfica de la solución dinámica escalar $d(t)$.

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0{,}1735202889 & -0{,}1156114043 & 0{,}01591094216 & 0{,}002018283775 \\ -0{,}1156114043 & 0{,}1419401062 & -0{,}1135931205 & 0{,}01792922593 \\ 0{,}01591094216 & -0{,}1135931205 & 0{,}1914495149 & -0{,}09768220964 \\ 0{,}002018283775 & 0{,}01792922593 & -0{,}09768220964 & 0{,}07583807933 \end{bmatrix}$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} 7{,}803126246 & -6{,}242500998 & 1{,}560625245 & 3{,}156013554 \times 10^{-9} \\ -6{,}242500999 & 9{,}363751503 & -6{,}242500996 & 1{,}560625248 \\ 1{,}560625245 & -6{,}242500996 & 9{,}363751493 & -4{,}681875747 \\ 3{,}156013533 \times 10^{-9} & 1{,}560625248 & -4{,}681875747 & 3{,}121250497 \end{bmatrix}$$

$$D_6 = \begin{bmatrix} -0{,}8671833172 & 0{,}7884632882 & -0{,}2725622655 & 0{,}02604005111 \\ 0{,}7884632882 & -1{,}139745036 & 0{,}8145033394 & -0{,}2465222143 \\ -0{,}2725622655 & 0{,}8145033394 & -1{,}11370557 & 0{,}5419412688 \\ 0{,}02604005111 & -0{,}2465222143 & 0{,}5419412688 & -0{,}3252420872 \end{bmatrix}$$

$$D_7 = \begin{bmatrix} -27{,}27814684 & 27{,}27814686 & -11{,}69063433 & 1{,}948439042 \\ 27{,}27814686 & -38{,}96878125 & 29{,}2265859 & -9{,}742195295 \\ -11{,}69063433 & 29{,}2265859 & -37{,}02034213 & 17{,}53595153 \\ 1{,}948439042 & -9{,}742195295 & 17{,}53595153 & -9{,}742195299 \end{bmatrix}$$

Finalmente la solución dinámica $D(t)$ asociada a la ecuación

$$\ddot{u} + A_1\dot{u} + A_2u = f(t)$$

es dada por

$$D(t) = \sum_{j=1}^{8}\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{8-j}.$$

Es decir,

$$D(t) = (b_0 d(t))D_7 + (b_0 d^{(1)}(t) + b_1 d^{(0)}(t))D_6 + (b_0 d^{(2)}(t) + b_1 d^{(1)}(t) + b_2 d^{(0)}(t))D_5$$
$$\cdots + (b_0 d^{(6)}(t) + b_1 d^{(5)}(t) + \cdots + b_6 d^{(0)}(t))D_1 + (b_0 d^{(7)}(t) + b_1 d^{(6)}(t) + \cdots + b_7 d^{(0)}(t))D_0,$$

donde

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 1 \\
b_1 &= 0{,}1064093499 \\
b_2 &= 0{,}8753911474 \\
b_3 &= 0{,}6159559004 \\
b_4 &= 23{,}45006228 \\
b_5 &= 0{,}8854267010 \\
b_6 &= 19{,}53736167 \\
b_7 &= 0{,}2211687011 \\
b_8 &= 2{,}44140625
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
d(t) =& e^{-0{,}0038828854 93t}\big(-0{,}002363208786\cos(0{,}3882697145t) + 0{,}1974090656\,\mathrm{sen}(0{,}3882697145t)\big) \\
&+ e^{-0{,}017129274 03t}\big(-0{,}003143974041\cos(1{,}7128418t) + 0{,}08405060837\,\mathrm{sen}(1{,}7128418t)\big) \\
&+ e^{-0{,}021012169 64t}\big(0{,}0009749474756\cos(2{,}101111514t) - 0{,}02379281549\,\mathrm{sen}(2{,}101111514t)\big) \\
&+ e^{-0{,}011180345 83t}\big(0{,}004532235352\cos(1{,}117978085t) - 0{,}1526093158\,\mathrm{sen}(1{,}117978085t)\big)
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución del problema es

$$
u(t) = D(t)\dot{u}_0 + (\dot{D}(t) + D(t)A_1)u_0 + \int_0^t D(t-s)f(s)ds,
$$

donde:

$$\dot{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_0 = M^{-1} \begin{bmatrix} 0{,}025 \\ 0{,}02 \\ 0{,}01 \\ 0{,}001 \end{bmatrix}$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} e^{-0{,}5t}\cos(8t) \\ e^{-0{,}25t}\operatorname{sen}(8t) \\ e^{-0{,}1t}\cos(10t) \\ e^{-0{,}05t}\operatorname{sen}(10t) \end{bmatrix}$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & D_{13}(t) & D_{14}(t) \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) & D_{23}(t) & D_{24}(t) \\ D_{31}(t) & D_{32}(t) & D_{33}(t) & D_{34}(t) \\ D_{41}(t) & D_{42}(t) & D_{43}(t) & D_{44}(t) \end{bmatrix}$$

La solución dinámica matricial $D(t)$ y la solución vectorial

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

donde cada componente es:

- Primera componente:

$$\begin{aligned}
u_1(t) =& e^{-0{,}0038828885493t}(0{,}002016065092\cos(0{,}3882697144t) + 0{,}07148238292\,\mathrm{sen}(0{,}3882697144t))\\
&+ e^{-0{,}011180345583t}(0{,}004957534491\cos(1{,}117978084t) + 0{,}01018707891\,\mathrm{sen}(1{,}117978084t))\\
&+ e^{-0{,}017129274402t}(0{,}003199685151\cos(1{,}7128418t) + 0{,}007454400083\,\mathrm{sen}(1{,}7128418t))\\
&+ e^{-0{,}02101216964t}(0{,}005927141677\cos(2{,}101111514t) - 0{,}02191391552\,\mathrm{sen}(2{,}101111514t))\\
&+ e^{-0{,}05t}(7{,}407847419\times 10^{-7}\cos(10t) + 3{,}22633917\times 10^{-8}\,\mathrm{sen}(10t))\\
&- e^{-0{,}1t}(1{,}64381331\times 10^{-6}\cos(10t) + 1{,}480457742\times 10^{-6}\,\mathrm{sen}(10t))\\
&+ e^{-0{,}25t}(0{,}0003293261777\,\mathrm{sen}(8t) - 2{,}196019571\times 10^{-5}\cos(8t))\\
&- e^{-0{,}5t}({,}01607131318\cos(8t) + 0{,}002035849891\,\mathrm{sen}(8t))
\end{aligned}$$

cuya gráfica es dada en la Figura 5.7.

- Segunda componente:

$$\begin{aligned}
u_2t =& e^{-0{,}0038828885493t}(0,003788963069\cos(0,3882697144t) + 0,1343429353\,\mathrm{sen}(0,3882697144t))\\
&+ e^{-0{,}011180345583t}(0,004957534491\cos(1,117978084t) + 0,01018707892\,\mathrm{sen}(1,117978084t))\\
&+ e^{-0{,}017129274402t}(0,001111238959\cos(1,7128418t) + 0,002588885857\,\mathrm{sen}(1,7128418t))\\
&+ e^{-0{,}021012169964t}(0,03357406614\,\mathrm{sen}(2,101111514t) - 0,009080908357\cos(2,101111514t))\\
&+ e^{-0{,}05t}(2,169948373\times 10^{-6}\cos(10t) - 1,632793049\times 10^{-6}\,\mathrm{sen}(10t))\\
&+ e^{-0{,}1t}(0,0001317074205\cos(10t) - 5,318792266\times 10^{-6}\,\mathrm{sen}(10t))\\
&+ e^{-0{,}25t}(0,000995662599\cos(8t) - 0,01622714077\,\mathrm{sen}(8t))\\
&+ e^{-0{,}5t}(0,0003211097011\cos(8t) + 6,386967822\times 10^{-5}\,\mathrm{sen}(8t))
\end{aligned}$$

cuya gráfica es dada en la Figura 5.8.

- Tercera componente:

$$\begin{aligned}
u_3(t) =& e^{-0{,}0038828885493t}(0,005104855334\cos(0,3882697144t) + 0,180999747\,\mathrm{sen}(0,3882697144t))\\
&+ e^{-0{,}011180345583t}(2,755298523\times 10^{-12}\,\mathrm{sen}(1,117978084t) - 7,707047248\times 10^{-11}\cos(1,117978084t))\\
&+ e^{-0{,}017129274402t}(0,002813755785\cos(1,7128418t) + 0,006555289369\,\mathrm{sen}(1,7128418t))\\
&+ e^{-0{,}021012169964t}(0,07985616221\cos(2,101111514t) - 0,02952453858\,\mathrm{sen}(2,101111514t))\\
&+ e^{-0{,}05t}(9,449843173\times 10^{-6}\cos(10t) + 0,0001299728661\,\mathrm{sen}(10t))\\
&+ e^{-0{,}1t}(0,0102573235\cos(10t) + 0,0001805150932\,\mathrm{sen}(10t))\\
&+ e^{-0{,}25t}(0,0003295876122\,\mathrm{sen}(8t) - 2,056543769\times 10^{-5}\cos(8t))\\
&+ e^{-0{,}5t}(5,776596433\times 10^{-6}\cos(8t) + 4,918437299\times 10^{-6}\,\mathrm{sen}(8t))
\end{aligned}$$

cuya gráfica es dada en la Figura 5.9.

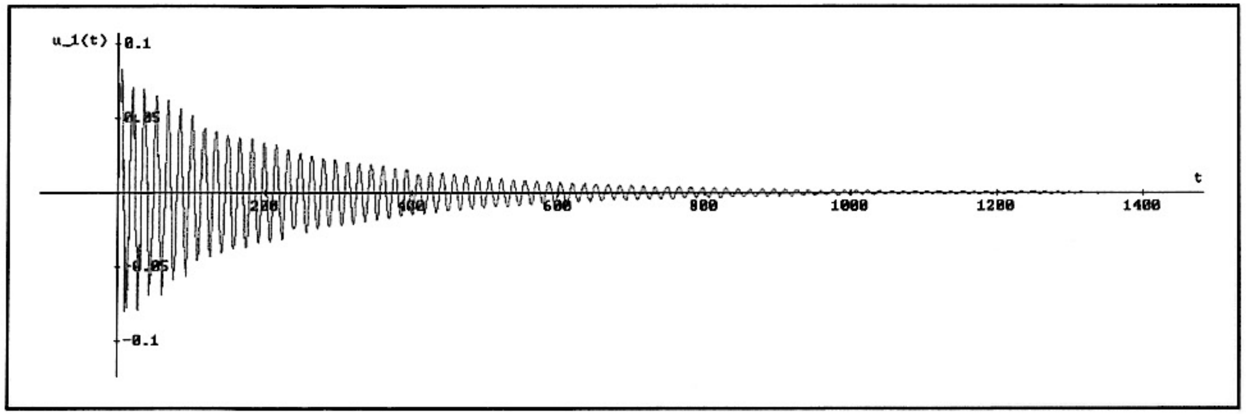

Figura 5.7: Gráfica de la ecuación de movimiento de la primera componente de $u(t)$.

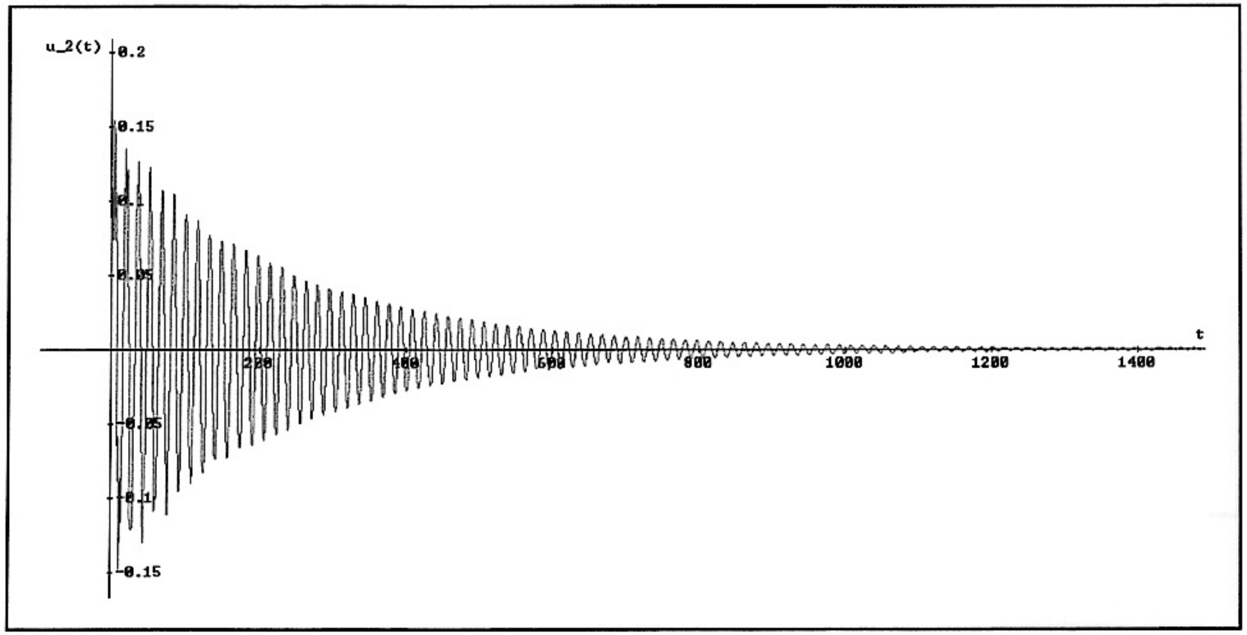

Figura 5.8: Gráfica de la ecuación de movimiento de la segunda componente de $u(t)$.

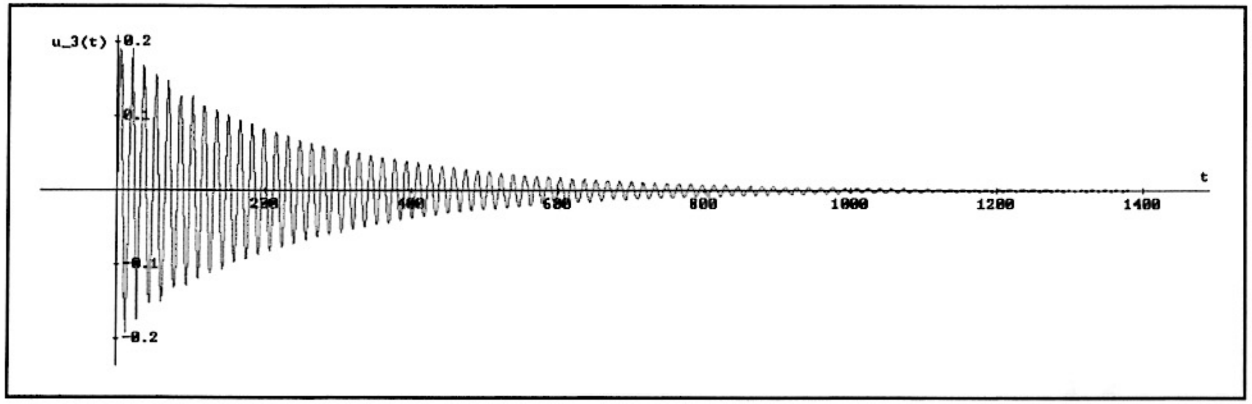

Figura 5.9: Gráfica de la ecuación de movimiento de la tercera componente de $u(t)$.

- Cuarta componente:

$$\begin{aligned}
u_4(t) =& e^{-0,,003882885493t}(0,005805026965\cos(0,3882697144t) + 0,2058253179\,\mathrm{sen}(0,3882697144t)) \\
&+ e^{-0,011180034583t}(0,04957534657\cos(1,117978084t)0,01018707902\,\mathrm{sen}(1,117978084t)) \\
&+ e^{-0,01712927402t}(0,002088446097\cos(1,7128418t) + 0,004865514181\,\mathrm{sen}(1,7128418t)) \\
&+ e^{-0,02101216964t}(0,01166015079\,\mathrm{sen}(2,101111514t) - 0,003153766083\cos(2,101111514t)) \\
&+ e^{-0,05t}(8,252532941 \times 10^{-5}\cos(10t) - 0,01012769853\,\mathrm{sen}(10t)) \\
&+ e^{-0,1t}(0,0001300636085\cos(10t) - 6,799250541 \times 10^{-6}\,\mathrm{sen}(10t)) \\
&+ e^{-0,25t}(5,111560134 \times 10^{-6}\cos(8t) - 6,128641958 \times 10^{-6}\,\mathrm{sen}(8t)) \\
&+ e^{-0,5t}(3,771807528 \times 10^{-7}\cos(8t) - 1,339245808 \times 10^{-6}\,\mathrm{sen}(8t))
\end{aligned}$$

cuya gráfica es dada en la Figura 5.10.

En el Apéndice A se presenta los cálculos previos de estos resultados.

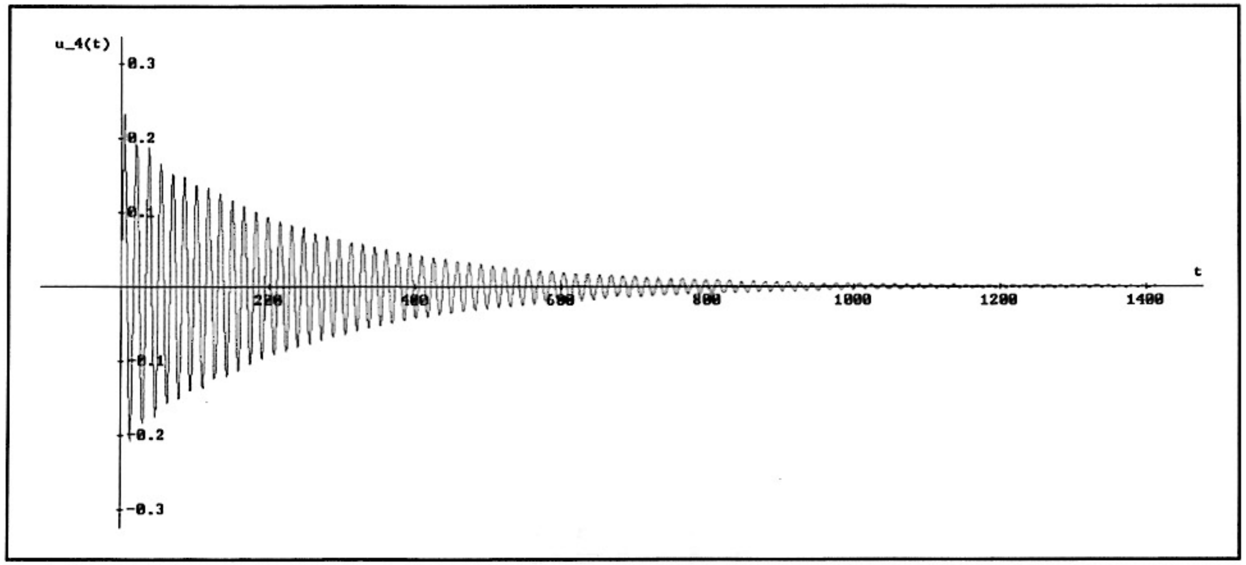

Figura 5.10: Gráfica de la ecuación de movimiento de la cuarta componente de $u(t)$.

Conclusiones

El modelo matemático siguiente $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$, donde M, C y K son matrices arbitrarias de $n \times n$, ha sido obtenido mediante una formulación en la que se relacionan las diferentes componentes que actúan en el sistema, en el que se analiza la vibración de un edificio.

Para obtener la solución de la ecuación diferencial vectorial, una de las alternativas es el método operacional matricial, el cual evita su solución en la variable temporal.

Para su solución se requiere la llamada solución dinámica, la que permite determinar la respuesta en el dominio temporal, evitando la necesidad de alguna forma diagonal o de la forma canónica de Jordan.

La solución dinámica $D(t)$ nos permite dar una interpretación física acerca de cada uno de los elementos (pisos) del movimiento de un edificio, el cual sometido a un sismo, nos permite afirmar que su elemento $D_{kj}(t)$ es la respuesta de la k-ésima componente del sistema, debido a una fuerza unitaria concentrada en la j-ésima componente.

Bibliografía

[Apo06] T. Apostol. *Análisis Matemático.* Reverté S.A., 2006.

[Ave06] A. Avello. *Teoría de Máquinas.* Universidad de Navarra, 2006.

[Can95] G. Canagualpa. A solução dinámica em sistemas mecánicos amortecidos. Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, 1995.

[Cla90] J. Claeyssen. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1):73–84, 1990.

[Col05] A. Collante. Controlabilidad y observabilidad en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes matriciales. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, 2005.

[Faz77] R. Fazlollah. *Los Espacios Lineales en la Ingeniería.* Reverté S. A., 1977.

[Gra00] S. Graham. *Fundamentals of Mechanical Vibrations.* Mc Graw-Hill, 2000.

[Hig08] N. Higham. *Functions of matrices Theory and computation.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[Inm01] D. Inman. *Engineering Vibration.* Prentice Hall, Inc., 2001.

[Mei86] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis.* Mc Graw-Hill, Inc., 1986.

[Spr05] M. Sproviero. *Transformadas de Laplace y de Fourier.* Nueva librería, Buenos aires, 2005.