UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

"PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA UN SISTEMA DISPERSIVO NO LINEAL DEL TIPO BENJAMIN BONA MAHONY"

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR:

DAVID ANDRÉS SUMIRE QQUENTA

ASESORES

Dr. JULIO CÉSAR ALCÁNTARA BODE
Asesor

Mg. ALDO ALCIDES MENDOZA URIBE

Co - Asesor

LIMA - PERÚ
2016

DEDICATORIA

A Dios,

A mis padres: Andrés y Candelaria,

A mis hermanos: Rebeca, Daniel y Esther,

A la juventud matemática estudiosa y trabajadora del Perú,

A todos los que creen en la verdad y se esfuerzan por llegar al éxito en su profesión u ocupación de bien y buscan superarse continuamente, brindando un servicio abnegado y óptimo al país, a la humanidad y a Dios.

A los propulsores del avance y desarrollo de la matemática en el Perú, en particular en la UNI y el IMCA,

A la Universidad Peruana Unión, por haberme acogido en sus aulas como catedrático y darme la oportunidad de crecer académicamente y profesionalmente.

Agradecimientos

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a mi asesor de tesis el profesor Mg. Aldo Alcides Mendoza Uribe, quien me dirigió y guió en la elaboración de este trabajo de investigación, que me da la oportunidad de continuar mis estudios en el campo del Análisis/Ecuaciones Diferenciales Parciales con proyecciones para las aplicaciones en las áreas de las Ciencias Naturales e Ingenierías.

Deseo agradecer a la Sección de posgrado de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería, mención Matemática Aplicada, por haberme acogido en sus aulas y a su plana docente por brindarme el conocimiento y la formación académica requerida para concluir con éxito la maestría en mención.

Deseo agradecer a Dios, por darme la vida, la salud y extenderme su amor y misericordia; y agradecer a mis queridos padres: Andrés y Candelaria y a mis hermanos: Rebeca, Daniel y Esther por su apoyo incondicional, en todo sentido y gran confianza depositados en mi persona.

Deseo agradecer a la Universidad Peruana Unión, por el apoyo económico brindados para poder concluir con satisfacción la tesis.

TABLA DE CONTENIDO

Resumen

En este trabajo de tesis, estudiaremos el sistema de ecuaciones no lineales dispersivas bajo el efecto de disipación

$$\begin{cases} (1-\mu\partial_x^2)\,\partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha\partial_x^3 v + u^p\partial_x u + v^p\partial_x v = 0 \\ (1-\mu\partial_x^2)\,\partial_t v + \alpha\partial_x^3 u + \partial_x^3 v + v^p\partial_x v + \partial_x\left(uv^p\right) = 0 \\ u\left(0\right) = \varphi \\ v\left(0\right) = \psi \end{cases} \tag{1}$$

donde $\mu > 0$, $|\alpha| < 1$ y $p \geq 1$ es un número entero.

Nuestro objetivo es demostrar que el sistema dispersivo o problema de Cauchy, esta bien formulado localmente y globalmente. Por esta razón vemos varias propiedades de las soluciones reales $u\left(x,t\right)$, $v\left(x,t\right)$ para $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

El problema de Cauchy (1) es un sistema acoplado de dos ecuaciones generalizadas de tipo Benjamin - Bona Mahony.

Abstract

In this work of investigation, we will study the equations nonlinear system of dispersive under the dissipation effect

$$\begin{cases} (1-\mu\partial_x^2)\,\partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha\partial_x^3 v + u^p\partial_x u + v^p\partial_x v = 0 \\ (1-\mu\partial_x^2)\,\partial_t v + \alpha\partial_x^3 u + \partial_x^3 v + v^p\partial_x v + \partial_x\left(uv^p\right) = 0 \\ u\left(0\right) = \varphi \\ v\left(0\right) = \psi \end{cases}$$

where $\mu > 0$, $|\alpha| < 1$ and $p \geq 1$, it is an integer number.

Our objective is to demonstrate that the dispersive system or the problem of Cauchy, is locally and globally good formulated. For this reason, we will see several properties of the real solutions $u\left(x,t\right)$, $v\left(x,t\right)$ for all $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

The problem of Cauchy (1) is a system coupling of two equations generalize of tipe Benjamin - Bona Mahony.

Notaciones

X, Y espacios de Banach.

X', Y' espacios duales de los espacios de Banach X e Y.

$\mathcal{L}(X,Y)$ espacio de operadores lineales acotados de X en Y.

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

$C([0,T],X)$ espacio de funciones continuas de $[0,T]$ en X.

$C^1([0,T],X)$ espacio de funciones continuamente diferenciables de $[0,T]$ en X.

$\mathcal{D}(A)$ dominio del operador lineal A.

$\mathcal{R}(A)$ rango del operador lineal A.

$\widehat{u}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x)\, dx$ transformada de Fourier en $\mathbb{R}$.

$\overset{\vee}{u}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} u(\xi)\, d\xi$ transformada inversa de Fourier en $\mathbb{R}$.

$C^k(\mathbb{R})$ espacio de las funciones continuas diferenciables de orden k en $\mathbb{R}$.

$C^\infty(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{k\geq 0} C^k(\mathbb{R})$ espacio de las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}$.

$C_0^k(\mathbb{R})$ espacio de funciones de clase C^k con soporte compacto.

$C_\infty^k(\mathbb{R})$ espacio de funciones de clase C^k tales que ella y sus derivadas hasta el orden k tienden a cero en el infinito.

$S(\mathbb{R})$ espacio de Schartz en $\mathbb{R}$.

$S'(\mathbb{R})$ espacio de las distribuciones temperadas en $\mathbb{R}$.

$L^p(\mathbb{R})$ espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}$ de orden p, $1 \leq p \leq \infty$.

$\|\cdot\|_{L^P}$ norma en $L^p(\mathbb{R})$

$L^\infty(\mathbb{R})$ espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas en $\mathbb{R}$.

$\|\cdot\|_{L^\infty}$ norma en $L^\infty(\mathbb{R})$.

J^s potencial de Bessel de orden $-s$, $\widehat{J^s u}(\xi) = \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi)$.

$D_x^s = (-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$ potencial de Riesz o derivada homognea de orden $-s$, $\widehat{D^s u}(\xi) = |\xi|^s \widehat{u}(\xi)$.

$H_p^s(\mathbb{R}) = J^{-s} L^p(\mathbb{R})$ espacio de Sobolev de orden s con base en $L^p(\mathbb{R})$.

$H^s(\mathbb{R}) = H_2^s(\mathbb{R}) = J^{-s} L^2(\mathbb{R})$ espacio de Sobolev de orden s con base en $L^2(\mathbb{R})$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ producto interno en $L^2(\mathbb{R})$.

$\|\cdot\|_s = \|J^s \cdot\|_{L^2}$ norma en $H^s(\mathbb{R})$.

$\|\cdot\|_{H_p^s} = \|J^s \cdot\|_{L^P}$ norma en $H_p^s(\mathbb{R})$.

1 Introducción

En ingeniería se estudian modelos físicos a escala que representan el movimiento del agua, bajo diferentes tipos de régimen (laminar, turbulento), donde se hace variar: la pendiente del canal, la rugosidad de las paredes y del fondo del mismo. Esto se realiza con el fin de determinar un modelo matemático que reproduzca con mayor precisión cada caso en estudio, pues tales modelos se pueden utilizar para diseñar obras como: canales, represas, etc.

En este trabajo estudiamos la buena formulación local, de la siguiente familia de ecuaciones dispersivas bajo el efecto de disipación

$$\begin{cases} \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha\partial_x^3 v + u^p\partial_x u + v^p\partial_x v = 0 \\ \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t v + \alpha\partial_x^3 u + \partial_x^3 v + v^p\partial_x v + \partial_x\left(uv^p\right) = 0 \\ u\left(0\right) = \varphi \\ v\left(0\right) = \psi \end{cases} \tag{P}$$

donde $\mu > 0$ y $|\alpha| < 1$ son constantes reales, $u = u\left(x,t\right)$ y $v = v\left(x,t\right)$ son funciones con valores reales para $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ y $p \geq 1$ es un número entero.

La ecuación del sistema (P) es una generalización de la ecuación de onda larga regularizada, denominada ecuación de Benjamín-Bona-Mahony

$$\left(1-\partial_x^2\right)\partial_t u + \partial_x u + u\partial_x u = 0,$$

que describe la propagación unidireccional de ondas largas de pequeña amplitud sobre la superficie del agua en un canal de fondo plano. Esta ecuación fue propuesta por T. Benjamín, J. Bona y J. Mahony, ver ([B-B-M]), como un modelo alternativo para la ecuación de Korteweg de Vries

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0,$$

derivada por D. Korteweg y G. de Vries para describir el mismo fenómeno.

Nuestro objetivo es estudiar varias propiedades de las soluciones reales $u\left(x,t\right)$, $v\left(x,t\right)$ del problema de Cauchy (P), en el espacio de Sobolev $\mathbb{H}^s\left(\mathbb{R}\right) = H^s\left(\mathbb{R}\right) \times H^s\left(\mathbb{R}\right)$, cuya norma es dada por

$$\|U\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R})} = \|(u,v)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R})} = \sqrt{\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})}^2}, \text{ para } s \geq 1.$$

En primer lugar, demostraremos que (P) es bien formulado localmente en el sentido de Hadamard, es decir, P1. *Existencia local de soluciones*: Se desea probar que existen $T \in \left]0, \overline{T}\right]$ y $U \in C\left([0,T], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ tal que satisface (P).

P2. *Unicidad*: Consiste en probar que existe a lo más una solución de (P) en alguna vecindad del origen.

P3. *Dependencia continua del dato inicial*: Consiste en estudiar y establecer, si es posible, la continuidad de la aplicación $\Phi \mapsto U$ en topologías convenientes.

Para la cual, usaremos el teorema del punto fijo de Banach para demostrar que la ecuación integral asociada con el sistema tiene solución y luego mostramos que tal solución es la única solución del problema de Cauchy (P).

En segundo lugar, probaremos que (P) es bien formulado globalmente, es decir, se satisfacen (P1.), (P2.) y (P3.) para $T = +\infty$, para ello usaremos algunas estimativas a priori.

2 Preliminares

En esta sección se enunciaran las definiciones y propiedades básicas de transformada de Fourier, espacios de Sobolev, semigrupo de operadores y algunas desigualdades útiles que usaremos a lo largo de este trabajo de investigación.

La demostración de los teoremas y proposiciones enunciados se pueden consultar en [A-B], [I-I], [LP], [Me] y [MP2].

2.1 Transformada de Fourier.

En esta sección estudiaremos la transformada de Fourier. Comenzamos estudiando tal concepto para funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$, posteriormente veremos que la transformada puede ser considerada en otros espacios, en los cuales ella posee propiedades particulares muy importantes.

2.2 La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definición 1 *Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. la transformada de Fourier de u, denotada por $\mathcal{F}(u)$ o $\widehat{u}$, es la función dada por*

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\, dx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ y $\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Veamos los siguientes resultados que caracterizan a la transformada de Fourier.

Teorema 2 *Sean $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $\widehat{u+v}(\xi) = \widehat{u}(\xi) + \widehat{v}(\xi)$ y $\widehat{\alpha u}(\xi) = \alpha\widehat{u}(\xi)$

2. El operador

$$\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \to C_\infty(\mathbb{R})$$

es una transformación lineal acotada con

$$\|\widehat{u}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L^1}.$$

Prueba. 1.) Evidente

2.) Como

$$|\widehat{u}(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-ix\xi} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L^1}$$

y $\widehat{u}$ es limitada, se sigue el resultado.

Teorema 3 *La transformada de Fourier de una función integrable es una función continua.*

Prueba. Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$. Para cada $\xi, h \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\xi+h) - \widehat{u}(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-ix\xi} - 1\right] e^{-ixh} u(x) \, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-ix\xi} - 1\right| |u(x)| \, dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que

$$\left|e^{-ix\xi} - 1\right| |u(x)| \leq 2 |u(x)|$$

y

$$\lim_{\xi \to 0} \left|e^{-ix\xi} - 1\right| = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

concluimos por el Teorema de la Convergencia Dominada

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-ix\xi} - 1\right| |u(x)| \, dx = 0.$$

Esto prueba la continuidad de $\widehat{u}$. ■

Teorema 4 *Si $u \in L^1(\mathbb{R})$, $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión en $L^1(\mathbb{R})$ y $\|u_n - u\|_{L^1} \to 0$ cuando $n \to +\infty$, entonces la sucesión $\{\widehat{u}_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $\widehat{u}$ sobre $\mathbb{R}$.*

Prueba. Primero notemos que

$$|\widehat{u}(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} u(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| \, dx.$$

Así, por el teorema 2

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{u}_n(\xi) - \widehat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x) - u(x)| \, dx,$$

probando el teorema. ■

Teorema 5 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Si* $u \in L^1(\mathbb{R})$ *entonces* $\lim_{|\xi|\to+\infty} |\widehat{u}(\xi)| = 0$.

Prueba. Puesto que $e^{-i\xi x} = -e^{-i\xi x - i\pi}$, tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x - i\pi} u(x)\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\left(x+\frac{\pi}{\xi}\right)} u(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u\left(x-\frac{\pi}{\xi}\right) dx.\end{aligned}$$

donde se usó el cambio de variable $t = x + \frac{\pi}{\xi}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x)\, dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u\left(x-\frac{\pi}{\xi}\right) dx\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\left[u(x) - u\left(x-\frac{\pi}{\xi}\right)\right] dx.\end{aligned}$$

De esto tenemos

$$\begin{aligned}|\widehat{u}(\xi)| &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\left[u(x) - u\left(x-\frac{\pi}{\xi}\right)\right] dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u(x) - u\left(x-\frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx.\end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u(x) - u\left(x-\frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx = 0,$$

tenemos $\lim_{|\xi|\to+\infty} |\widehat{u}(\xi)| = 0$. ■

Teorema 6 *Si* u *es una función continua seccionalmente diferenciable,* $u, u' \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$, *entonces*

$$\widehat{u'}(\xi) = i\xi\widehat{u}(\xi).$$

Prueba. Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{u'}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)\, e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left.u(x)\, e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - (-i\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, e^{-i\xi x} dx\right] \\ &= i\xi\widehat{u}(\xi),\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

Corolario 7 *Si* u *es continua* n*-veces seccionalmente diferenciable,* $u, u', \ldots, u^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $\lim_{|x|\to+\infty} u^{(k)}(x) = 0$ *para* $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *entonces*

$$\widehat{u^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n\, \widehat{u}(\xi).$$

Además de las operaciones de espacio vectorial, $L^1(\mathbb{R})$ tiene una multiplicación que lo convierte en un álgebra de Banach. Esta operación se define como sigue.

Definición 8 *Si* $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, *definimos su convolución por*

$$(u * v)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)\, v(y)\, dy, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

La convolución es conmutativa y asociativa. Además

Proposición 9 *.Si* $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\widehat{u * v}(\xi) = \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi).$$

Prueba. Sean $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u * v \in L^1(\mathbb{R})$, por el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u * v(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-\eta)\, v(\eta)\, d\eta \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x-\eta)\, dx \right) v(\eta)\, d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(x+\eta)} u(x)\, dx \right) v(\eta)\, d\eta \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi \eta} v(\eta)\, d\eta \right) \\
&= \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi),
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

2.3 La transformada de Fourier en el espacio de Schwartz

En esta subsección introducimos el espacio de funciones "muy bien comportadas" para estudiar la aplicación $f \longmapsto \widehat{f}$, tal espacio es conocido como el espacio de Schwartz que definiremos a continuación. Antes de definir dicho espacio estableceremos algunas notaciones.

Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ el conjunto de los números naturales. En vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es denominado un multi-índice. Si α es un multi-índice y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos el orden de α y x^α por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

y la derivada de orden α es definida por

$$D_x^{\alpha}u(x)=\left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\right)\dots\left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right)u(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}u(x).$$

Ahora podemos definir propiamente el espacio de Schwartz o de las funciones $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ rapidamente decrecientes.

Definición 10 *El espacio de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es la colección de las funciones $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ tales que $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^{\alpha}\partial_x^{\beta}\varphi(x)\right|<\infty \tag{3}$$

para todo par de multiíndices $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$. Es decir

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)=\left\{\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}):\|\varphi\|_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi(x)\right|<\infty\right\}.$$

La definición (10) nos informa que los elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tienden mas rápido a cero que el inverso de cualquier polinomio, cuando $|x|\to\infty$. Para más detalles ver [I-I].

El conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial sobre los complejos y tiene una topología natural inducida por la familia de seminormas (3), mas precisamente, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio métrico completo, con la métrica definida por

$$d(\varphi,\phi)=\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}}\frac{\|\varphi-\phi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\varphi-\phi\|_{\alpha,\beta}}.$$

Definición 11 *Sea $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces $\varphi_n\to 0$ cuando $n\to\infty$ si para todo $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$, se tiene $\|\varphi_n\|_{\alpha,\beta}\to 0$ cuando $n\to\infty$.*

Observaciones. De la definición de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

1. Si φ_1, $\varphi_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $p,q\in\mathbb{R}$ entonces $p\varphi_1+q\varphi_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. Si φ_1, $\varphi_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\varphi_1\varphi_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3. Sobre $\mathbb{R}$, si φ es una función temperada, $\|\varphi\|_{m,n}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)\right|\leq C_{n,m}<\infty$, tomando $n=0$ y $m=2$ resulta que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^2\varphi(x)|\leq C$ o $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(1+|x|^2\right)\varphi(x)\right|\leq M$, entonces
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx\leq M\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}<\infty,$$
es decir ϕ es integrable.

4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, pues $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto, es un subespacio de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; en tanto estos subespacios son diferentes, pues por ejemplo la función $\varphi(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ más no pertenece a pues $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, en consecuencia
$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es definida de manera análoga al de los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$, es decir,

Definición 12 *La transformada de Fourier de la función $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}u$ o $\widehat{u}$, es la función*
$$\widehat{u}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} u(x)\, dx.$$

Se tiene el siguiente

Teorema 13 *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

1. $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

2. $\partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}(x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi)$ y $\widehat{\partial^\alpha \varphi}(\xi) = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$

3. para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para todo multiíndice α
$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
igualdad de Plancherel.

4. vale la fórmula de inversión, $\varphi(x) = (\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi)(-x)$, es decir
$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\, e^{i\xi\cdot x} d\xi \tag{4}$$
para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5. $\lim\limits_{|\xi|\to 0} |\widehat{\varphi}(\xi)| = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, (lema de Riemann-Lebesgue)

6. La aplicación $\varphi \to \widehat{\varphi}$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en si mismo.

   En consecuencia $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está naturalmente asociado a la transformada de Fourier.

   El resultado (4) nos da la transformada inversa, $\mathcal{F}^{-1}$, definida por
$$\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(x) = \varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\, e^{i\xi\cdot x} d\xi.$$

2.4 Distribuciones temperadas

Definición 14 *Una distribución temperada f es un funcional lineal y continuo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir, decimos que $\psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ define una distribución temperada si:*

1. *ψ es lineal.*

2. *ψ es continua en relación a la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, esto es, si $\varphi_k \overset{\mathcal{S}}{\to} \varphi$ cuando $n \to \infty$, entonces la sucesión numérica $\psi(\varphi_n) \to \psi(\varphi)$ cuando $n \to \infty$.*

Denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ al espacio de las distribuciones temperadas, es decir,

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{\psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \text{ tal que } \psi \text{ es lineal y continua}\}.$$

Representaremos, como de costumbre, el valor de $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ aplicado a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por la expresión $\langle \psi, \varphi \rangle$.

Es fácil ver que cualquier función acotada f define una distribución temperada ψ_f por

$$\langle \psi_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$$

para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Análogamente, dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. La fórmula

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

define un elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En efecto

1. i) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\langle T_f, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi_1 + \varphi_2)(x)\, dx = \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \langle T_f, \varphi_2 \rangle$$

ii) Sea $\phi_k \overset{\mathcal{S}}{\to} \phi$. Aplicando la desigualdad de Holder, tenemos

$$\langle T_f, \varphi_k - \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi_k - \varphi)(x)\, dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi_k - \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

cuando $k \to \infty$.

O también, T_f es acotada, pues

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Luego de i) y ii) tenemos que $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ es lineal y continua, es decir, $T_f \in B(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathbb{R}) = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Definición 15 *La transformada de Fourier directa e inversa de $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es definida como*

$$\left\langle \widehat{\psi}, \varphi \right\rangle = \langle \psi, \widehat{\varphi} \rangle$$

y

$$\left\langle \overset{\vee}{\psi}, \varphi \right\rangle = \left\langle \psi, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle$$

para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La topología en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ puede ser descrita de la siguiente manera.

Definición 16 *Sea $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Entonces $\psi_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene que $\langle \psi_n, \varphi \rangle \to 0$.*

Proposición 17

1. Si $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, entonces

$$\widehat{\partial_x^\alpha \psi} = (i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\psi}$$

$$\partial_\xi^\alpha \widehat{\psi} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \psi}(\xi).$$

2. La aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es un isomorfismo topológico, es decir, es biyectiva, continua con inversa continua.

   Prueba. Para la primera parte, basta usar la definición (15) e imitar el corolario (7).

De esta manera, damos la siguiente

Definición 18 *Si α es un multiíndice y $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos la α-ésima derivada de f, es decir, $\partial_x^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por*

$$\langle \partial_x^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial_x^\alpha \varphi \rangle,$$

para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.5 Espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Ellos miden la diferenciabilidad de las funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y son una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Antes damos la siguiente

Definición 19 *Para $s \in \mathbb{R}$, sea $J^s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dado por*

$$\widehat{J^s u}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{u}(\xi)$$

*para todo $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Llamamos a J^s el **potencial de Bessel de orden** s.*

Observación. Notemos que

$$\widehat{J^s u}(\xi) = J^s \widehat{u}(\xi).$$

En efecto,

$$\widehat{J^s u}(\xi) = \left[\left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} u\right]^{\wedge}(\xi) = \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi) = J^s \widehat{u}(\xi).$$

Definición 20 *El **espacio de Sobolev de orden** $s \in \mathbb{R}$, **modelado en** $L^2(\mathbb{R}^n)$, el cual denotamos por $H^s(\mathbb{R}^n)$, es el siguiente subconjunto de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s u = \left(1 + |\cdot|^2\right)^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

El espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, es de Hilbert bajo el producto interno,

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \langle J^s u, J^s v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi.$$

Así, la norma correspondiente es

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Así, vía la transformada de Fourier $H^s(\mathbb{R}^n)$ es igual a $L^2\left(\mathbb{R}^n : \left(1 + |\xi|^2\right)^s d\xi\right)$, es decir,

$$\widehat{H^s(\mathbb{R}^n)} = L^2\left(\mathbb{R}^n, \left(1 + |\xi|^2\right)^s d\xi\right).$$

En particular $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. A menudo usaremos la notación $\|u\|_s$ en vez de $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

Teorema 21 .

1. Si $0 \leq s < t$ entonces $H^t(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$. Además, la inclusión es continua y densa.

2. Si $r \leq s \leq t$ con $s = (1-\theta) r + \theta t$ y $\theta \in [0,1]$, entonces
$$\|u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^r}^{1-\theta} \|u\|_{H^t}^{\theta}.$$

3. Para todo $s \in \mathbb{R}$ el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

4. Para todo $k \in \mathbf{N}^+$ las normas $\|u\|_k$ y $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}$ son equivalentes.

Prueba. Notemos que $s \leq t$ implica $\left(1+|\xi|^2\right)^s \leq \left(1+|\xi|^2\right)^t$. Por tanto, si $u \in H^t(\mathbb{R}^n)$ entonces, puesto que $1+\xi^2 \geq 1$ y $0 \leq s \leq t$, tenemos
$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^t |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \|u\|_s^2 < \infty,$$
por lo tanto $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, y queda probado que $H^t(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ con inclusión continua. Para obtener la densidad, basta mostrar que
$$H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} H^r(\mathbb{R}^n)$$
es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$, cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}$. Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y consideremos la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ definida para cada $n \in \mathbf{N}^+$ por
$$\widehat{u_n}(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{n}} \widehat{u}(\xi).$$
Entonces $u_n \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $n \in \mathbf{N}^+$. En efecto,
$$\|u_n\|_r^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^r |\widehat{u_n}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{r-s} \left(1+|\xi|^2\right)^s e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$
Como $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $v(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{r-s} e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}}$, es una función de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ cualesquiera sean $r, s \in \mathbb{R}$, entonces $\|v\|_{L^\infty} = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left[\left(1+|\xi|^2\right)^{r-s} e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}}\right] < +\infty$, y
$$\|u_n\|_r^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|v\|_{L^\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_s < \infty.$$
Ahora observemos que
$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u_n}(\xi) - \widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left| e^{-\frac{2\xi^2}{n}} \widehat{u}(\xi) - \widehat{u}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left(1 - e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}}\right)^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \to 0
\end{aligned}$$
cuando $n \to +\infty$, por el teorema de la convergencia dominada.

De esta forma $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$, cualquiera sea $s \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, veamos 2., de la definición de norma en $H^s(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^{(1-\theta)r} \left(1+\xi^2\right)^{\theta t} |\widehat{u}(\xi)|^{2(1-\theta)+2\theta} \, d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^{(1-\theta)r} |\widehat{u}(\xi)|^{2(1-\theta)} \left(1+\xi^2\right)^{\theta t} |\widehat{u}(\xi)|^{2\theta} \, d\xi,
\end{aligned}$$

y por la desigualdad de Hlder,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s}^2 &\leq \left[\int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^r |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right]^{1-\theta} \left[\int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^t |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right]^{\theta} \\
&= \|u\|_{H^r}^{2(1-\theta)} \|u\|_{H^t}^{2\theta}.
\end{aligned}$$

Luego $\|u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^r}^{1-\theta} \|u\|_{H^t}^{\theta}$.

Para el resto de la prueba, consultar en ([I-I]).

Proposición 22 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $s \in \mathbb{R}$, D^k es un operador acotado sobre $H^s(\mathbb{R})$ hacia $H^{s-k}(\mathbb{R})$. Además,*

$$\left\|D^k u\right\|_{H^{s-k}} \leq c \|u\|_{H^s}.$$

de la desigualdad de la última proposición es claro que

$$\left\|D^k u\right\|_{H^s} \leq c \|u\|_{H^{s+k}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Prueba. Sea $u \in H^s(\mathbb{R})$, entonces como

$$\begin{aligned}
\left\|D^k u\right\|_{s-k}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s-k} \left|\widehat{\partial_x^k u}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s-k} \left|(i\xi)^k \,\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s-k} \left(1+\xi^2\right)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \|u\|_s^2
\end{aligned}$$

luego se tiene el resultado.

El siguiente teorema permite relacionar "derivadas débiles en $L^2(\mathbb{R}^n)$" con derivadas en el sentido clásico.

Teorema 23 (de Inmersión de Sobolev) *Si $s > \frac{1}{2} + k$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está contenido continuamente en el espacio $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ de las funciones con k derivadas continuas que se anulan en el infinito, y*

$$\|u\|_{C^k} \leq c_s \|u\|_s .$$

Prueba.

Primera etapa. Cuando $k = 0$. Primero probaremos que si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con

$$\|\widehat{u}\|_{L^1} \leq c_s \|u\|_s \text{ si } s > n/2.$$

Usando la desigualdad de Holder, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)| \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}} d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|\xi|^2\right)^s} d\xi\right)^{1/2} \\
&\leq \|u\|_s \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_s \|u\|_s . \qquad (5)
\end{aligned}$$

Luego

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{u}\|_{L^1} \leq c_s \|u\|_{H^s} .$$

Segunda etapa. Cuando $k \geq 1$. Usando el mismo argumento tenemos que si $u \in H^s(\mathbb{R})$ con $s > \frac{1}{2} + k$, entonces $\alpha \in \mathbf{N}^+$ se tiene que $d^k \widehat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\left\|u^{(k)}\right\|_{L^\infty} \leq \left\|\widehat{u^{(k)}}\right\|_{L^1} = \left\|i^k (\cdot)^k \widehat{u}\right\|_{L^1} \leq c_s \|u\|_{H^s} .$$

El siguiente teorema permite relacionar "derivadas débiles en $L^2(\mathbb{R}^n)$" con derivadas en el sentido clásico.

Teorema 24 *Sea $s > \frac{1}{2}$, $s \in \mathbb{R}$. Entonces, $H^s(\mathbb{R})$ es un algebra conmutativa con relación a las operaciones de multiplicación puntual de funciones , esto es, para todo $u, v, w \in H^s(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos*

$$u \cdot v \in H^s(\mathbb{R})$$

$$u \cdot v = v \cdot u$$

$$(u+v) \cdot w = u \cdot v + v \cdot w$$

$$\alpha (u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v$$

es decir, la operación de arriba es una aplicación bilineal continua de $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ en $H^s(\mathbb{R})$ en la topología de la norma, y, secuencialmente continua en la topología débil, o sea , existe una constante $c = c(s,n)$ tal que

$$\|u\cdot v\|_s \leq c\,\|u\|_s\,\|v\|_s$$

para todo $u, v \in H^s(\mathbb{R})$.

Prueba. Por la desigualdad triangular tenemos que para todo $\xi, \eta \in \mathbf{R}$

$$\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \leq 2^s\left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}}+\left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}}\right].$$

Usando esto vemos que

$$\begin{aligned}
|J^s uv(\xi)| &= \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\left|\widehat{uv}(\xi)\right| = \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\left|\widehat{u}*\widehat{v}(\xi)\right| \\
&= \frac{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbf{R}}\widehat{u}(\xi-\eta)\,\widehat{v}(\eta)\,d\eta\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi-\eta)\,\widehat{v}(\eta)\,d\eta\right| \\
&= \frac{2^s}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbf{R}}\left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}}+\cdots\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.\cdots+\ \left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}}\right]\widehat{u}(\xi-\eta)\,\widehat{v}(\eta)\,d\eta\right| \\
&= \frac{2^s}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbf{R}}\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi-\eta)\,\widehat{v}(\eta)\,d\eta+\cdots\right. \\
&\qquad\qquad \left.\cdots+\int_{\mathbf{R}}\left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi-\eta)\,\widehat{v}(\eta)\,d\eta\right| \\
&= \frac{2^s}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\mathbf{R}}\left|J^s u(\xi-\eta)\right|\left|\widehat{v}(\eta)\right|\,d\eta+\cdots\right. \\
&\qquad\qquad \left.\cdots+\int_{\mathbf{R}}\left|\widehat{u}(\xi-\eta)\right|\left|J^s v(\eta)\right|\,d\eta\right] \\
&\leq 2^s\left|J^s u\right|*\left|\widehat{v}\right|(\xi)+2^s\left|\widehat{u}\right|*\left|J^s v\right|(\xi).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|uv\|_{H^s} &= \|J^s uv\|_{L^2} \\
&= \left\|2^s\left|J^s u\right|*\left|\widehat{v}\right|+2^s\left|\widehat{u}\right|*\left|J^s v\right|\right\|_{L^2} \\
&\leq 2^s\left\|\left|J^s u\right|*\left|\widehat{v}\right|\right\|_{L^2}+2^s\left\|\left|\widehat{u}\right|*\left|J^s v\right|\right\|_{L^2} \\
&\leq 2^s\left\|J^s u\right\|_{L^2}\left\|\widehat{v}\right\|_{L^1}+2^s\left\|\widehat{u}\right\|_{L^1}\left\|J^s v\right\|_{L^2} \\
&\leq 2^s\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^r}+2^s\|u\|_{H^r}\|v\|_{H^s}
\end{aligned}$$

siempre que $r > \frac{1}{2}$. Tomando $r = s$ obtenemos

$$\|uv\|_{H^s} \leq c_s \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}$$

cualesquiera sean $u, v \in H^s(\mathbb{R})$. ■

2.6 Desigualdades útiles.

Lema 25 *Para cada $r \in \mathbb{R}$ existen constantes positivas $c_1 = c_1(r)$ y $c_2 = c_2(r)$ tales que*

$$c_1\left(1 + \xi^{2r}\right) \leq \left(1 + \xi^2\right)^r \leq c_2\left(1 + \xi^{2r}\right)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Prueba. Para demostrar la segunda desigualdad, definimos

$$f(x) = \frac{(1+x)^r}{(1+x^r)},\ x \geq 0.$$

Como f es continua y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, entonces f es acotada. Así, $c_2 = c_2(r)$ tal que

$$(1+x)^r \leq c_2(1+x^r).$$

Análogamente se prueba la primera desigualdad.

Proposición 26 . *Sean $k \in L^1([a,b])$, $k(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y $f \in C([a,b])$ tal que*

$$f(t) \leq C + \int_a^t k(s) f(s)\, ds,\ \ a \leq t \leq b \tag{6}$$

entonces

$$f(t) \leq C \exp\left[\int_a^t k(s)\, ds\right],\ \ a \leq t \leq b$$

Prueba. Multiplicamos (6) por $k(t) \geq 0$, entonces

$$k(t) f(t) \leq k(t)\left(C + \int_a^t k(s) f(s)\, ds\right),$$

pero $\dfrac{d}{dt}\left(C + \int_a^t k(s) f(s)\, ds\right) = k(t) f(t)$, luego

$$\frac{d}{dt}\left(C + \int_a^t k(s) f(s)\, ds\right) \leq k(t)\left(C + \int_a^t k(s) f(s)\, ds\right)$$

por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}\ln\left(C + \int_a^t k(s) f(s)\, ds\right) \leq k(t).$$

Finalmente, integrando de a hasta t y usando (6) conseguimos el resultado.

Proposición 27 . *Si* $s > \frac{n}{2} + 1$ *y* $t \geq 1$ *entonces, existe* $C_s = C(s,n,t) > 0$ *tal que*

$$|\langle u, v\partial_x u\rangle_t| \leq C_s \left\{ \|\partial_x v\|_{s-1} \|u\|_t^2 + \|\partial_x v\|_{t-1} \|u\|_s \|u\|_t \right\}.$$

Prueba. Ver ([Me]).

2.7 Teoría de semigrupos.

Definición 28 *Un* semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X *es una familia* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *tal que*

i.) $\forall t \geq 0 : W(t) \in \mathcal{L}(X)$

ii.) $W(0) = I$, el operador identidad sobre X,

iii.) $\forall s, t \in [0, \infty\rangle : W(s+t) = W(s)W(t)$ y

iv.) Para cada $x \in X$ fijo, $W(\cdot)x : [0, +\infty[\to X$ es continua.

En adelante, X será un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$.

Proposición 29 *Sea* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo sobre* X. *Entonces existen* $w \geq 0$ *y* $M \geq 1$ *tales que*

$$\forall t \geq 0 : \|W(t)\|_X \leq Me^{wt}.$$

Prueba. Ver [Pa], pág. 4.

Definición 30 *El* generador *(*infinitesimal*) del semigrupo* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre* X *es la aplicación* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ *definida por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{W(t)x - x}{t} \text{ existe en } X \right\}$$

y

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{W(t)x - x}{t} = \partial_t^+ W(t)x\big|_{t=0}.$$

Es claro que $\mathcal{D}(A)$ es no vacio ya que $0 \in \mathcal{D}(A)$. Un hecho notable es que $\mathcal{D}(A)$ es bastante grande.

Proposición 31 . *Si* A *es el generador de un semigrupo* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *en* X, *entonces para todo* $x \in \mathcal{D}(A)$ *tenemos que* $W(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *para todo* $t \geq 0$, *y*

$$\frac{d}{dt}W(t)x = AW(t)x = W(t)Ax.$$

Prueba. Ver [Pa], pág. 4.

Proposición 32 . *Sean X e Y espacios de Banach. Si $A : Y \subseteq X \to X$ es el generador del semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $\varphi \in Y$ la función $u : [0, +\infty[\to Y$, definida por $u(t) = W(t)\varphi$ es la única solución del problema de Cauchy lineal*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = \varphi, \end{cases}$$

Además,

$$u \in C([0, +\infty[: Y) \cap C^1([0, +\infty[: X).$$

Prueba. Ver [Pa], pág 104.

Observación. Si en la definición (28), i.) y iii.) se verifican para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y en iv.), el dominio de la aplicación $W(\cdot)x$ es el conjunto de los números reales, la familia $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ define un grupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X. En este caso decimos que el grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es de tipo (M, w) si existen $M \geq 1$ y $w \geq 0$ tales que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \|W(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{w|t|}.$$

Por otro lado, si en la definición (30), el límite se toma cuando $t \to 0$, los teoremas (31) y (32) son válidos para todo $t \in \mathbb{R}$.

3 Estudio local del sistema BBM

3.1 El Problema Lineal

Ahora consideremos el problema lineal asociado con (P)

$$\begin{cases} (1 - \mu\partial_x^2)\,\partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha\partial_x^3 v = 0 \\ (1 - \mu\partial_x^2)\,\partial_t v + \alpha\partial_x^3 u + \partial_x^3 v = 0 \\ u(0) = \varphi \\ v(0) = \psi \end{cases} \tag{PL}$$

o en forma vectorial

$$\begin{cases} L\partial_t U(t) + MU(t) = 0 \\ U(0) = \Phi. \end{cases} \tag{PL}$$

donde L es el operador definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = \mathbb{H}^s(\mathbb{R}), \ s \in \mathbb{R} \\ LU = (u - \mu\partial_x^2 u, v - \mu\partial_x^2 v), \ U = (u,v) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.1}$$

y M es el operador que será definido en (3.6).

Despejando $\partial_t U(t)$, la ecuación dada en (PL) es equivalente a

$$\begin{cases} \partial_t U(t) = -L^{-1}MU(t) \\ U(0) = \Phi. \end{cases}$$

cuya solución es $U(t) = e^{-tL^{-1}M}\Phi$.

Para justificar la última igualdad, debemos analizar el operador $L^{-1}M$.

Teorema 33 . *Si $s \geq 0$, entonces $L : \mathbb{H}^s(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ es un operador lineal biyectivo y para todo $V \in \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$*

$$\widehat{L^{-1}V}(\xi) = k(\xi)\widehat{V}(\xi) \tag{3.2}$$

donde $k(\xi) = \dfrac{1}{1+\mu\xi^2}$.

Prueba. Es claro que L es un operador lineal. Si $U = (u,v) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, $s \geq 0$, entonces usando integración por partes y la inclusión continua

$$\begin{aligned} \|LU\|_{\mathbb{H}^{s-2}}^2 &= \left\|u - \mu\partial_x^2 u\right\|_{s-2}^2 + \left\|v - \mu\partial_x^2 v\right\|_{s-2}^2 \\ &= \|u\|_{s-2}^2 + \mu^2\left\|\partial_x^2 u\right\|_{s-2}^2 - 2\mu\left\langle u, \partial_x^2 u\right\rangle_{s-2} \\ &\quad + \|v\|_{s-2}^2 + \mu^2\left\|\partial_x^2 v\right\|_{s-2}^2 - 2\mu\left\langle v, \partial_x^2 v\right\rangle_{s-2} \\ &\leq \|u\|_{s-2}^2 + \mu^2\|u\|_s^2 + 2\mu\|\partial_x u\|_{s-2}^2 \\ &\quad + \|v\|_{s-2}^2 + \mu^2\|v\|_s^2 + 2\mu\|\partial_x v\|_{s-2}^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ continuamente y $\partial_x : \mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ es un operador acotado, tenemos

$$\begin{aligned} \|LU\|_{\mathbb{H}^{s-2}}^2 &\leq \left(1+\mu^2\right)\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) + 2\mu\left(\|u\|_{s-1}^2 + \|v\|_{s-1}^2\right) \\ &\leq \left(1+\mu^2\right)\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) + 2\mu\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) \\ &= (1+\mu)^2\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) \\ &= C\|U\|_{\mathbb{H}^s}^2 < \infty, \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{R}(L) \subseteq \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$. Además, el operador L es inyectivo pues $\ker(L) = \{0\}$. Veamos la suryectividad del operador L, es decir, mostremos que dado $V = (u,v) \in$

$\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ existe $U=(u_1,v_1)\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ tal que $LU=V$. En efecto, de $(u_1-\mu\partial_x^2u_1, v_1-\mu\partial_x^2v_1)=(u,v)$, aplicando la transformada de Fourier respecto de la variable espacial se tiene $\widehat{u_1}(\xi)=\dfrac{\widehat{u}(\xi)}{1+\mu\xi^2}$ y $\widehat{v_1}(\xi)=\dfrac{\widehat{v}(\xi)}{1+\mu\xi^2}$. Así,

$$\widehat{U}(\xi)=\left(\frac{\widehat{u}(\xi)}{1+\mu\xi^2},\frac{\widehat{v}(\xi)}{1+\mu\xi^2}\right)=\frac{1}{1+\mu\xi^2}\left(\widehat{u}(\xi),\widehat{v}(\xi)\right)\equiv\frac{\widehat{V}(\xi)}{1+\mu\xi^2}. \tag{3.4}$$

Vamos a probar que $U\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$. Por la definición de norma en $\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ y k, tenemos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathbb{H}^s}^2 &= \frac{1}{2\pi}\left(\|k*u\|_s^2+\|k*v\|_s^2\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^s\left(\left|\widehat{k}(\xi)\,\widehat{u}(\xi)\right|^2+\left|\widehat{k}(\xi)\,\widehat{v}(\xi)\right|^2\right)d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{\left(1+\xi^2\right)^s}{\left(1+\mu\xi^2\right)^2}\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi.\end{aligned}$$

Si $0<\mu<1$, entonces $\dfrac{1}{1+\mu\xi^2}<\dfrac{1}{\mu\left(1+\xi^2\right)}$ y

$$\|U\|_{\mathbb{H}^s}^2<\frac{1}{\mu^2}\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s-2}\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi=\frac{1}{\mu^2}\|V\|_{\mathbb{H}^{s-2}}^2<\infty,$$

y cuando $\mu\geq 1$ se tiene $\dfrac{1}{1+\mu\xi^2}\leq\dfrac{1}{1+\xi^2}$ y

$$\|U\|_{\mathbb{H}^s}^2\leq\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s-2}\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi=\|V\|_{\mathbb{H}^{s-2}}^2<\infty.$$

De lo anterior, existe $L^{-1}:\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})\to\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ y para $V\in\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ de (3.4) se tiene

$$\widehat{L^{-1}V}(\xi)=k(\xi)\,\widehat{V}(\xi)$$

en donde $k(\xi)=\dfrac{1}{1+\mu\xi^2}$. ■

Teorema 34 . *Si $s\geq 1$, el operador lineal $L^{-1}\partial_x:\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\to\mathbb{H}^{s+1}(\mathbb{R})$ es acotado, es decir, existe $C>0$ tal que*

$$\left\|L^{-1}\partial_xU\right\|_{\mathbb{H}^{s+1}}\leq C\|U\|_{\mathbb{H}^s}. \tag{3.5}$$

Prueba. Si $U=(u,v)\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|L^{-1}\partial_xU\right\|_{\mathbb{H}^{s+1}}^2 &= \left\|k\widehat{\partial_xu}\right\|_{s+1}^2+\left\|k\widehat{\partial_xv}\right\|_{s+1}^2\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s+1}|k(\xi)|^2\left(\left|\widehat{\partial_xu}(\xi)\right|^2+\left|\widehat{\partial_xv}(\xi)\right|^2\right)d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{\left(1+\xi^2\right)^{s+1}}{\left(1+\mu\xi^2\right)^2}\xi^2\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi.\end{aligned}$$

Del mismo modo que en la demostración del teorema 33 tenemos que

$$\frac{\left(1+\xi^{2}\right)^{s+1}}{\left(1+\mu\xi^{2}\right)^{2}}<\frac{\left(1+\xi^{2}\right)^{s+1}}{\mu^{2}\left(1+\xi^{2}\right)^{2}}=C\left(1+\xi^{2}\right)^{s-1}$$

donde $C=\dfrac{1}{\mu^{2}}$ si $0<\mu<1$ y $C=1$ cuando $\mu\geq 1$. Por lo tanto, como $\xi^{2}<1+\xi^{2}$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|L^{-1}\partial_{x}U\right\|_{\mathbb{H}^{s+1}}^{2} &\leq C\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^{2}\right)^{s-1}\xi^{2}\left(\left|\widehat{u}\left(\xi\right)\right|^{2}+\left|\widehat{v}\left(\xi\right)\right|^{2}\right)d\xi\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^{2}\right)^{s}\left(\left|\widehat{u}\left(\xi\right)\right|^{2}+\left|\widehat{v}\left(\xi\right)\right|^{2}\right)d\xi\\ &\leq C\left\|U\right\|_{\mathbb{H}^{s}}^{2}.\end{aligned}$$

Como $\mathbb{H}^{s}\left(\mathbb{R}\right)\hookrightarrow\mathbb{H}^{s-1}\left(\mathbb{R}\right)$ continuamente, queda demostrada la desigualdad (3.5). ■

Consideremos ahora el operador

$$\begin{cases}\mathcal{D}\left(M\right)=\mathbb{H}^{s}\left(\mathbb{R}\right),\ s\in\mathbb{R}\\ MU=\left(\partial_{x}^{3}u+\alpha\partial_{x}^{3}v,\alpha\partial_{x}^{3}u+\partial_{x}^{3}v\right),\ U=\left(u,v\right)\in\mathbb{H}^{s}\left(\mathbb{R}\right).\end{cases}\tag{3.6}$$

Teorema 35 . *El operador lineal M definido en (3.6) tiene rango $\mathcal{R}\left(M\right)$ contenido en $\mathbb{H}^{s-3}\left(\mathbb{R}\right)$.*

Prueba. Tenemos que $M:\mathbb{H}^{s}\left(\mathbb{R}\right)\rightarrow\mathcal{R}\left(M\right)=\mathbb{H}^{s-3}\left(\mathbb{R}\right)$ pues

$$\begin{aligned}\left\|MU\right\|_{\mathbb{H}^{s-3}}^{2} &= \left\|\partial_{x}^{3}u+\alpha\partial_{x}^{3}v\right\|_{s-3}^{2}+\left\|\alpha\partial_{x}^{3}u+\partial_{x}^{3}v\right\|_{s-3}^{2}\\ &= \left\|\partial_{x}^{3}u\right\|_{s-3}^{2}+\alpha^{2}\left\|\partial_{x}^{3}v\right\|_{s-3}^{2}+2\alpha\left\langle\partial_{x}^{3}u,\partial_{x}^{3}v\right\rangle_{s-3}\\ &\quad+\alpha^{2}\left\|\partial_{x}^{3}u\right\|_{s-3}^{2}+\left\|\partial_{x}^{3}v\right\|_{s-3}^{2}+2\alpha\left\langle\partial_{x}^{3}u,\partial_{x}^{3}v\right\rangle_{s-3}\\ &\leq \left(1+\alpha^{2}\right)\left(\left\|u\right\|_{s}^{2}+\left\|v\right\|_{s}^{2}\right)+2\alpha\left(\left\|\partial_{x}^{3}u\right\|_{s-3}^{2}+\left\|\partial_{x}^{3}v\right\|_{s-3}^{2}\right)\\ &\leq \left(1+\alpha^{2}\right)\left(\left\|u\right\|_{s}^{2}+\left\|v\right\|_{s}^{2}\right)+2\alpha\left(\left\|u\right\|_{s}^{2}+\left\|v\right\|_{s}^{2}\right)\\ &\leq \left(1+\alpha\right)^{2}\left(\left\|u\right\|_{s}^{2}+\left\|v\right\|_{s}^{2}\right)\\ &= C\left\|U\right\|_{\mathbb{H}^{s}}^{2}<\infty,\end{aligned}$$

así que $\mathcal{R}\left(M\right)\subseteq\mathbb{H}^{s-3}\left(\mathbb{R}\right)$. ■

Teorema 36 . *El operador $-L^{-1}M:\mathbb{H}^{s}\left(\mathbb{R}\right)\rightarrow\mathbb{H}^{s-1}\left(\mathbb{R}\right)$ con $s\geq 1$ definido como multiplicador de Fourier por*

$$-\widehat{L^{-1}MU}\left(\xi\right)=A\left(\xi\right)\widehat{U}\left(\xi\right)$$

donde

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{i\xi^3}{1+\mu\xi^2} & \dfrac{i\alpha\xi^3}{1+\mu\xi^2} \\ \dfrac{i\alpha\xi^3}{1+\mu\xi^2} & \dfrac{i\xi^3}{1+\mu\xi^2} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

genera un semigrupo fuertemente continuo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre* $\mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$W(t)U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (S^+(t)+S^-(t))u + (S^+(t)-S^-(t))v \\ (S^+(t)-S^-(t))u + (S^+(t)+S^-(t))v \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

para todo $U=(u,v)\in\mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R})$*, en donde* $S^{\pm}(t)$ *son los multiplicadores de Fourier definidos por*

$$\widehat{S^{\pm}(t)\,v}(\xi) = e^{\lambda^{\pm}(\xi)t}\widehat{v}(\xi) \quad \textit{con } \lambda^{\pm}(\xi) = \frac{i\xi^3}{1+\xi^2}(1\pm|\alpha|).$$

Además, cualquiera sea $\Phi\in\mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R})$ *la función*

$$W_0(\cdot)\Phi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R})$$

es la única solución del problema de valor inicial (PL).

Prueba. Como $M:\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\to\mathbb{H}^{s-3}(\mathbb{R})$ es sobreyectivo y $L^{-1}:\mathbb{H}^{s-3}(\mathbb{R})\to\mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R})$ pues $s\geq 1$, entonces $L^{-1}M:\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\to\mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R})$. Sea $U=(u,v)\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, entonces por el teorema 34 tenemos

$$\begin{aligned} \left\|L^{-1}MU\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} &= \left\|L^{-1}\left(\partial_x^3u+\alpha\partial_x^3v,\alpha\partial_x^3u+\partial_x^3v\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\ &= \left\|L^{-1}\partial_x\left(\partial_x^2u+\alpha\partial_x^2v,\alpha\partial_x^2u+\partial_x^2v\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\ &\leq C\left\|\left(\partial_x^2u+\alpha\partial_x^2v,\alpha\partial_x^2u+\partial_x^2v\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s-2}}. \end{aligned}$$

Usando la definición de norma en $\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ y sus propiedades obtenemos,

$$\begin{aligned} \left\|L^{-1}MU\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}}^2 &\leq C\left\|\partial_x^2u+\alpha\partial_x^2v\right\|_{s-2}^2 + C\left\|\alpha\partial_x^2u+\partial_x^2v\right\|_{s-2}^2 \\ &= C\left(1+\alpha^2\right)\left(\left\|\partial_x^2u\right\|_{s-2}^2+\left\|\partial_x^2v\right\|_{s-2}^2\right) + 4\alpha C\left\langle\partial_x^2u,\partial_x^2v\right\rangle_{s-2} \\ &\leq C\left(1+\alpha^2\right)\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right) + 2\alpha C\left\|\partial_x^2u\right\|_{s-2}^2\left\|\partial_x^2v\right\|_{s-2}^2 \\ &\leq C(1+\alpha)^2\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right) \\ &= C\|U\|_{\mathbb{H}^s}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L^{-1}M$ es acotado, entonces $-L^{-1}M$ es el generador de un semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R})$.

Para demostrar (3.8), resolvemos el problema de valor inicial (PL) tomando la transformada de Fourier en la variable espacial, obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en t,

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{U}(\xi,t) = -\widehat{L^{-1}M}(\xi)\,\widehat{U}(\xi,t) \\ \widehat{U}(\xi,0) = \widehat{\Phi}(\xi) \end{cases}$$

donde $\widehat{U}(\xi,t) = \begin{pmatrix} \widehat{u}(t) \\ \widehat{v}(t) \end{pmatrix}$ y $\widehat{\Phi}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix}$.

Como los valores propios de $A(\xi)$ son

$$\lambda^{\pm}(\xi) = \frac{i\xi^3}{1+\mu\xi^2}\left(1 \pm |\alpha|\right)$$

y los vectores propios asociados son

$$v^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Entonces, si J es la forma canónica de Jordan de $A(\xi)$, obtenemos

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda^{+}(\xi)t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^{-}(\xi)t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\widehat{U}(\xi,t) = e^{A(\xi)t}\widehat{\Phi}(\xi) = Ce^{Jt}C^{-1}\widehat{\Phi}(\xi)$$

donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\widehat{U}(\xi,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\lambda^{+}(\xi)t} + e^{\lambda^{-}(\xi)t} & e^{\lambda^{+}(\xi)t} - e^{\lambda^{-}(\xi)t} \\ e^{\lambda^{+}(\xi)t} - e^{\lambda^{-}(\xi)t} & e^{\lambda^{+}(\xi)t} + e^{\lambda^{-}(\xi)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix}.$$

Definiendo $\widehat{S^{\pm}v}(\xi,t) = e^{\lambda^{\pm}(\xi)t}\widehat{v}(\xi)$, por la proposición 6.1 de [MP2], obtenemos (3.8) y la última afirmación del teorema. ∎

3.2 Buena formulación local del problema (P).

El problema de valor inicial (P) lo escribimos en forma vectorial

$$\begin{cases} L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U(0) = \Phi; \end{cases} \tag{P}$$

donde $U=(u,v)$, $\Phi=(u_0,v_0)$, donde L y M son los operadores definidos en (3.1) y (3.6), y

$$F(U(t))=\left(\frac{u^{p+1}(t)+v^{p+1}(t)}{p+1},\frac{v^{p+1}(t)}{p+1}+u(t)\,v^{p}(t)\right).$$

En esta sección demostraremos que el problema de valor inicial (P) es localmente bien formulado en $\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ si $s\geq 1$.

Notemos que si U es solución de (P), definiendo

$$G(\tau)=W(t-\tau)\,U(\tau)$$

donde $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por $-L^{-1}M$, teorema 35, y derivando el segundo miembro respecto de τ, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{d\tau}(\tau) &= \partial_\tau W(t-\tau)\,U(\tau)+W(t-\tau)\,\partial_\tau U(\tau)\\
&= W(t-\tau)\,L^{-1}MU(\tau)\\
&\quad +W(t-\tau)\left[-L^{-1}MU(\tau)-L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right]\\
&= -W(t-\tau)\,L^{-1}\partial_x F(U(\tau)).
\end{aligned}$$

Integrando desde 0 hasta t, tenemos

$$G(t)-G(0)=-\int_0^t W(t-\tau)\,L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau.$$

Como $G(0)=W(t)\,\Phi$ y $G(t)=U(t)$, entonces U es solución de la ecuación integral

$$U(t)=W(t)\,\Phi-\int_0^t W(t-\tau)\,L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau. \tag{EI}$$

Por lo tanto, toda solución de (P) es solución de (EI). Nos interesa saber si toda solución de (EI) es solución de (P), para esto, aplicaremos el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 37 . *Si $\Phi\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ con $s\geq 1$, existen $\overline{T}=\overline{T}\left(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)>0$ y una función*

$$U\in C\left(\left[0,\overline{T}\right],\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$$

única solución real de la ecuación integral (EI).

Prueba. Para la demostración usaremos la secuencia utilizada en [JM].

Sea $\Phi\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, con $s\geq 1$ y $\Phi\neq 0$, $T\geq 0$ y $R>0$ definimos

$$\mathcal{E}(T,R)=\left\{V\in C([0,T],\mathbb{H}^s(\mathbb{R})):\sup_{t\in[0,T]}\|V(t)-W(t)\,\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\leq R\right\}$$

con la métrica

$$d(U,V) = \sup_{t\in[0,T]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathbb{H}^s}.$$

Es fácil ver que $(\mathcal{E}(T,R), d)$ es un espacio métrico completo. Para $\Phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ fijo, definimos la aplicación Θ por

$$\Theta U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{4.1}$$

cualquiera sea $U \in \mathcal{E}(T,R)$. Tenemos las siguientes propiedades de la aplicación Θ definida sobre $\mathcal{E}(T,R)$.

1. Cualesquiera sean $T > 0$ y $R > 0$, la aplicación Θ está bien definida por (EI). En efecto, si $\Phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ entonces $W(t)\Phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ pues por el teorema 36 $\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ es el dominio del operador $-L^{-1}M$. Por otro lado, como $U(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ entonces, desde que $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach pues $s \geq 1$, tenemos que u^{p+1}, v^{p+1}, uv^p y sus productos por escalares pertenecen a $H^s(\mathbb{R})$, de donde $F(U(\tau)) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ y $L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \in \mathbb{H}^{s+1}(\mathbb{R})$; por lo tanto, del teorema 36, $W(t-\tau)\partial_x F(U(\tau)) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ dado que $\mathbb{H}^{s+1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$. De ahí que $\int_0^t W_\mu(t-\tau) F(U(\tau))\, d\tau \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ y por lo tanto $\Theta U(t) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ cualquiera sea $t \in [0,T]$.

2. La función $\Theta U : [0,T] \to \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ es continua. Para $t_0 \in]0,T]$ supongamos que $t < t_0$, de esta forma

$$\begin{aligned}
\|\Theta U(t) - \Theta U(t_0)\|_{\mathbb{H}^s} &\leq \|W(t)\Phi - W(t_0)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t_0} W(t_0-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \right\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \|W(t)\Phi - W(t_0)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\quad + \int_0^t \left\| [W(t-\tau) - W(t_0-\tau)] L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^t \left\| W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Por la continuidad fuerte del semigrupo de contracciones $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} &\leq \sup_{0\leq t\leq t_0} \left\| W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq t_0} \left\| L^{-1}\partial_x F(U(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq t_0} \|F(U(\tau))\|_{\mathbb{H}^s},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\|\Theta U(t)-\Theta U(t_0)\|_{\mathbb{H}^s} &\leq \|W(t)\Phi - W(t_0)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \\ &\quad + \int_0^t \left\| [W(t-\tau) - W(t_0-\tau)] L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\ &\quad + |t-t_0| \sup_{0\leq t\leq t_0} \left\| W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^s}. \quad (4.3)\end{aligned}$$

El primer sumando del segundo miembro de (4.3) converge a cero cuando $t \to t_0^-$ por la continuidad de la aplicación $W(\cdot)\Phi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ mostrada en el teorema 36. Lo mismo sucede con el segundo sumando de (4.3) por la misma razón y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. El último sumando converge trivialmente a cero cuando $t \to t_0^-$. Esto nos demuestra la continuidad de ΘU a la izquierda de t_0. La continuidad a la derecha de t_0, y de ahí la continuidad de ΘU en t_0, sigue de manera análoga.

3. Existen $T_0 = T_0(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}) > 0$ y $R_0 = R_0(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}) > 0$ tales que la aplicación Θ definida sobre $\mathcal{E}(T_0, R_0)$ tiene rango $\mathcal{R}(\Theta)$ contenido en $\mathcal{E}(T_0, R_0)$. Sean $T_0 > 0$, $R_0 > 0$ y $U \in \mathcal{E}(T_0, R_0)$, entonces para $0 \leq t \leq T_0$

$$\begin{aligned}\|\Theta U(t) - W(t)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} &\leq \int_0^t \left\| W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|F(U(\tau))\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \quad (4.4)\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\|FU(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} &= \frac{1}{p+1}\left\|u^{p+1}(\tau) + v^{p+1}(\tau)\right\|_s + \frac{1}{p+1}\left\|v^{p+1}(\tau) + (p+1)u(\tau)v^p(\tau)\right\|_s \\ &\leq \frac{1}{p+1}\left[\|u(\tau)\|_s^{p+1} + 2\|v(\tau)\|_s^{p+1} + (p+1)\|u(\tau)\|_s \|v(\tau)\|_s^p\right]\end{aligned}$$

y por la definición del espacio $\mathcal{E}(T_0, R_0)$

$$\|u(\tau)\|_s \leq \|u(\tau) - W(\tau)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} + \|W(\tau)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \leq R_0 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \quad (4.5)$$

y del mismo modo

$$\|v(\tau)\|_s \leq R_0 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}, \quad (4.6)$$

entonces

$$\|FU(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \frac{p+4}{p+1}\left(R_0 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^{p+1}.$$

Luego, en (4.4) resulta

$$\|\Theta U(t) - W(t)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \leq \frac{p+4}{p+1}\left(R_0 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^{p+1} t \leq \frac{p+4}{p+1}\left(R_0 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^{p+1} T_0.$$

Eligiendo $R_0 = \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}$ y $T_0 = \dfrac{p+1}{2^{p+1}\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}^p (p+4)}$, obtenemos

$$\|\Theta U(t) - W(t)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \leq R_0$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Por lo tanto,

$$\sup_{0\leq t\leq T_0} \|\Theta U(t) - W(t)\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \leq R_0$$

de donde $\mathcal{R}(\Theta) \subseteq \mathcal{E}(T_0, R_0)$.

4. Existen $T_1 = T_1(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}) > 0$ y $R_1 = R_1(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}) > 0$ tales que la aplicación $\Theta : \mathcal{E}(T_1, R_1) \to \mathcal{E}(T_1, R_1)$ es una contracción. Sean $U = (u_1, v_1)$ y $V = (u_2, v_2)$

$$\begin{aligned}
\|(\Theta U)(t) - (\Theta V)(t)\|_{\mathbb{H}^s} &= \left\| -\int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(V(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\leq \int_0^t \left\| W(t-\tau) L^{-1}\partial_x [F(V(\tau)) - F(U(\tau))] \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\leq \int_0^t \left\| L^{-1}\partial_x [F(V(\tau)) - F(U(\tau))] \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\leq C\int_0^t \|F(V(\tau)) - F(U(\tau))\|_{\mathbb{H}^{s-1}}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
& \|F(V(\tau)) - F(U(\tau))\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
= {}& \frac{1}{p+1}\left\| u_2^{p+1}(\tau) + v_2^{p+1}(\tau) - u_1^{p+1}(\tau) - v_1^{p+1}(\tau)\, , \right. \\
& \qquad \left. v_2^{p+1}(\tau) - v_1^{p+1}(\tau) + (p+1)(u_2(\tau) v_2^p(\tau) - u_1(\tau) v_1^p(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
= {}& \frac{1}{p+1}\left\| u_1^{p+1}(\tau) - u_2^{p+1}(\tau) + v_1^{p+1}(\tau) - v_2^{p+1}(\tau) \right\|_{s-1} \\
& + \frac{1}{p+1}\left\| v_1^{p+1}(\tau) - v_2^{p+1}(\tau) + (p+1)(u_1(\tau) v_1^p(\tau) - u_2(\tau) v_2^p(\tau)) \right\|_{s-1}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

estimamos

$$
\begin{aligned}
&\left\|u_1^{p+1}(\tau)-u_2^{p+1}(\tau)+v_1^{p+1}(\tau)-v_2^{p+1}(\tau)\right\|_{s-1} \\
\leq\ & \left\|u_1^{p+1}(\tau)-u_2^{p+1}(\tau)\right\|_s+\left\|v_1^{p+1}(\tau)-v_2^{p+1}(\tau)\right\|_s \\
\leq\ & \left\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right\|_s\left\|\sum_{j=0}^{p}u_1^{p-j}(\tau)\,u_2^{j}(\tau)\right\|_s+\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\left\|\sum_{j=0}^{p}v_1^{p-j}(\tau)\,v_2^{j}(\tau)\right\|_s \\
\leq\ & C\left\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left(R+\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^p+C\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left(R+\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^p \\
=\ & C(p+1)\left(R+\|\Phi\|_s\right)^p\left(\left\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right\|_s+\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\right) \\
=\ & C(p+1)\left(R+\|\Phi\|_s\right)^p\left\|U(\tau)-V(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^s} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

en donde se ha considerado (4.5) y (4.6). Además

$$
\begin{aligned}
&\left\|v_1^{p+1}(\tau)-v_2^{p+1}(\tau)+(p+1)\left(u_1(\tau)\,v_1^p(\tau)-u_2(\tau)\,v_2^p(\tau)\right)\right\|_{s-1} \\
\leq\ & \left\|v_1^{p+1}(\tau)-v_2^{p+1}(\tau)+(p+1)\left(u_1(\tau)\,v_1^p(\tau)-u_2(\tau)\,v_2^p(\tau)\right)\right\|_s \\
\leq\ & \left\|v_1^{p+1}(\tau)-v_2^{p+1}(\tau)\right\|_s+\left\|(p+1)\left(u_1(\tau)\,v_1^p(\tau)-u_2(\tau)\,v_2^p(\tau)\right)\right\|_s \\
\leq\ & \left\|v_1^{p+1}(\tau)-v_2^{p+1}(\tau)\right\|_s+(p+1)\left\|v_1^p(\tau)-v_2^p(\tau)\right\|_s\left\|u_1(\tau)\right\|_s \\
&\qquad +(p+1)\left\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right\|_s\left\|v_2^p(\tau)\right\|_s \\
\leq\ & C\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left\|v_1(\tau)\right\|_s^{p-j}\left\|v_2(\tau)\right\|_s^{j} \\
&\qquad +C(p+1)\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p-1}\left\|v_1(\tau)\right\|_s^{p-1-j}\left\|v_2(\tau)\right\|_s^{j}\left\|u_1(\tau)\right\|_s \\
&\qquad +C(p+1)\left\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\right\|_s\left\|v_2(\tau)\right\|_s^{p} \\
\leq\ & C\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left(R+\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^p \\
&\qquad +C(p+1)\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s\sum_{j=0}^{p-1}\left(R+\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^p \\
&\qquad +C(p+1)\left\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\right\|_s\left(R+\|\Phi\|_s\right)^p \\
\leq\ & C_p(p+1)\left(R+\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^p\left[\left\|v_1(\tau)-v_2(\tau)\right\|_s+\left\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\right\|_s\right] \\
=\ & C_p(p+1)\left(R+\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)^p\left\|U(\tau)-V(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^s} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.7) y (4.8) en (4.6), obtenemos

$$\|F(U(\tau)) - F(V(\tau))\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq C(R + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s})^p \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} \tag{4.10}$$

de donde

$$\begin{aligned} \|\Theta U(t) - \Theta V(t)\|_{\mathbb{H}^s} &\leq C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s})^p t \|U(t) - V(t)\|_{\mathbb{H}^s} \\ &\leq C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s})^p t d(U, V). \end{aligned}$$

Eligiendo $\overline{R} = \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}$ y tomando el supremo en $[0, T_1]$ obtenemos

$$d(\Theta U, \Theta V) = \sup_{0 \leq t \leq T_1} \|\Theta U(t) - \Theta V(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s})^p T_1 d(U, V).$$

Como

$$C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s})^p T_1 \to 0 \text{ cuando } T_1 \to 0^+,$$

se sigue la existencia de $\overline{T} = \overline{T}(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}) \in]0, T_1]$ tal que

$$0 < \lambda = C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbb{H}^s})^p \overline{T} < 1.$$

Así, concluimos que

$$d(\Theta U, \Theta V) \leq \lambda d(U, V) \text{ con } 0 < \lambda < 1,$$

y nos permite afirmar que lo que Θ es una contracción.

Por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única $U \in \mathcal{E}\left(\overline{T}, \overline{R}\right) \subseteq C\left(\left[0, \overline{T}\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ tal que $\Theta U = U$, es decir,

$$W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1} \partial_x F(U(\tau))\, d\tau = U(t)$$

para todo $t \in \left[0, \overline{T}\right]$. ■

A continuación demostraremos que la función U obtenida en el teorema 37, solución de la ecuación integral (EI), es la única solución de (P).

Teorema 38 . *Si $\Phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 1$, entonces existen $\overline{T} = \overline{T}(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}) > 0$ y una función $U \in C\left(\left[0, \overline{T}\right], H^s(\mathbb{R})\right)$ con $\partial_t U \in C^1\left(\left[0, \overline{T}\right], H^s(\mathbb{R})\right)$ tales que U es solución del problema (P).*

Prueba. Dado $\Phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, consideramos

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau.$$

Hagamos $U_L(t) = W(t)\Phi$ y $U_P(t) = \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau$. Luego, por el teorema 36, $U_L(t)$ es solución del problema lineal

$$\begin{cases} L\partial_t U_L(t) + MU_L(t) = 0 \\ U_L(0) = \Phi. \end{cases}$$

y $U_P(t)$ es solución de

$$\begin{cases} L\partial_t U_P(t) + MU_P(t) + \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U_P(0) = 0. \end{cases}$$

En efecto, es claro que $U_P(0) = 0$. Sea $h > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{U_P(t+h) - U_P(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} W(t+h-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t W(t+h-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \right.\\
&\qquad + \int_t^{t+h} W(t+h-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\\
&\qquad \left. - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\right]\\
&= \frac{1}{h}\int_0^t (W(t+h-\tau) - W(t-\tau)) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\\
&\qquad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\\
&= \frac{1}{h}\int_0^t (W(h) - I) W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\\
&\qquad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\\
&= \frac{W(h) - I}{h}\int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\\
&\qquad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando el limite cuando $h \to 0^+$, usando propiedades de limites y el teorema del valor medio para integrales de Bochner en el intervalo $[t, t+h]$ con $c_h \in [t, t+h]$, resulta

$$\begin{aligned}
\partial_t^+ U_P(t) &= -L^{-1}M \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau + L^{-1}\partial_x F(U(t)) \\
&= -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).
\end{aligned}$$

Para $h < 0$, procediendo de manera similar, se obtiene que

$$\partial_t^- U_P(t) = -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).$$

Entonces, $\partial_t^- U_P(t) = \partial_t^+ U_P(t)$, así que

$$\partial_t U_P(t) = -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).$$

Por lo tanto, U_P es solución de la ecuación

$$L\partial_t U_P(t) \ + MU_P(t) - \partial_x F(U(t)) = 0.$$

Así, $U = U_L - U_P$ es solución del problema de Cauchy (P). En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
L\partial_t U(t) &= L\partial_t U_L(t) + L\partial_t U_P(t) \\
&= -MU_L(t) + [MU_P(t) - \partial_x F(U(t))] \\
&= -M[U_L(t) - U_P(t)] - \partial_x F(U(t)) \\
&= -MU(t) - \partial_x F(U(t)).
\end{aligned}$$

Además $U(0) = U_L(0) - U_P(0) = \Phi$.

Veamos que $U \in C\left(\left[0, \overline{T}\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ con $\partial_t U \in C\left(\left[0, \overline{T}\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$. En efecto, por lo mostrado en la primera etapa de la prueba del teorema 37 y la forma como se define, $U = \Theta U$, tenemos que $U \in C\left(\left[0, \overline{T}\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$. Por otro lado, dado que U es solución de la ecuación diferencial en (P), tenemos

$$\partial_t U(t) = -L^{-1}MU(t) - L^{-1}\partial_x F(U(t))$$

y hemos mostrado en la primera etapa de la prueba del teorema 37 que $L^{-1}MU(t) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ y $-L^{-1}\partial_x F(U(t)) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, lo cual nos indica que $\partial_t U(t) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$. Por el Teorema de Inmersión de Sobolev, se cumple $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbf{C}_\infty^0(\mathbb{R})$, de ahí que $\partial_t U \in C\left(\left[0, \overline{T}\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$. ■

Es claro que obtuvimos existencia local, pero la unicidad vale solamente en $\mathcal{E}\left(\overline{T}, \overline{R}\right)$ y no en $C\left(\left[0, \overline{T}\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$. Para esto, así como para obtener la dependencia continua con respecto al dato inicial, vamos a probar el siguiente resultado.

Teorema 39 . *Sean $\Phi, \Psi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 1$, $T > 0$ y $U, V \in C([0,T], \mathbb{H}^s(\mathbb{R}))$ soluciones de (P) tales que $U(0) = \Phi$ y $V(0) = \Psi$. Entonces*

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbb{H}^s} e^{CT} \tag{4.11}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Prueba. Debido al teorema 38, existen $\overline{T}_\Phi > 0$ y $\overline{T}_\Psi > 0$ tales que $U \in C\left(\left[0, \overline{T}_\Phi\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ y $V \in C\left(\left[0, \overline{T}_\Psi\right], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ satisfacen

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau$$

y

$$V(t) = W(t)\Psi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(V(\tau))\, d\tau$$

para todo $t \in [0,T]$ siendo $T = \min\left\{\overline{T}_\Phi, \overline{T}_\Psi\right\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|U(t) - V(t)\|_{\mathbb{H}^s} &\leq \|W(t)\Phi - W(t)\Psi\|_{\mathbb{H}^s} + \int_0^t \left\|W(t-\tau) L^{-1}\partial_x \left[F(U(\tau)) - F(V(\tau))\right]\right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbb{H}^s} + \int_0^t \|F(U(\tau)) - F(V(\tau))\|_{\mathbb{H}^{s-1}} d\tau. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Si $U = (u_1, v_1)$ y $V = (u_2, v_2)$, como en (4.5) y (4.6) tenemos

$$\|u_1(\tau)\|_s \leq 2\|\Phi\|_s \leq 2N$$

donde $N = \max\{\|\Phi\|_s, \|\Psi\|_s\}$, y del mismo modo

$$\|v_1(\tau)\|_s \leq 2N, \qquad \|u_2(\tau)\|_s \leq 2N \quad \text{y} \quad \|v_2(\tau)\|_s \leq 2N.$$

Procediendo como en (4.7), (4.8) y (4.9)

$$\begin{aligned}
& \|F(U(\tau)) - F(V(\tau))\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
\leq\; & \frac{1}{p+1}\left\|u_1^{p+1}(\tau) - u_2^{p+1}(\tau) + v_1^{p+1}(\tau) - v_2^{p+1}(\tau)\right\|_{s-1} \\
& + \frac{1}{p+1}\left\|v_1^{p+1}(\tau) - v_2^{p+1}(\tau) + (p+1)\left(u_1(\tau)v_1^p(\tau) - u_2(\tau)v_2^p(\tau)\right)\right\|_{s-1} \\
\leq\; & 2^p N^p C_s \left(\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_s + \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_s\right. \\
& \left. + \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_s + \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\|_s\right) \\
\leq\; & 2^{p+1}(p+1) N^p C_s \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}.
\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en (4.12),

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbb{H}^s} + 2^{p+1}N^p C_s \int_0^t \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\, d\tau,$$

Usando la desigualdad de Gronwall se tiene

$$\begin{aligned} \|U(t)-V(t)\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \|\Phi-\Psi\|_{\mathbb{H}^s}\exp\left(2^{p+1}N^pC_st\right) \\ &\leq \|\Phi-\Psi\|_{\mathbb{H}^s}e^{CT}, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema.

Corolario 40 . *Si* $\Phi\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, $s\geq 1$, *existen* $T=T\left(\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}\right)>0$ *y* $U\in C\left([0,T],\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ *con* $\partial_tU\in C\left([0,T],\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$, *única solución de* (P).

Prueba. Consideremos dos soluciones U y V del problema (P), con datos iniciales $U(0)=\Phi=V(0)$. Entonces, en (4.11) tenemos

$$\|U(t)-V(t)\|_{\mathbb{H}^s}\leq\|\Phi-\Phi\|_{\mathbb{H}^s}e^{CT}=0$$

para todo $t\in[0,T]$. Así queda probada la unicidad local.

4 Buena formulación Global del problema (P).

En el teorema 38 y en el corolario 40, hemos visto que si $\Phi\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ con $s\geq 1$, el problema

$$\begin{cases} L\partial_tU(t)+MU(t)+\partial_xF(U(t))=0 \\ U(0)=\Phi \end{cases} \tag{P}$$

tiene única solución local $U\in C\left([0,T],\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$. En la primera parte de esta sección, para el problema no lineal (P) mostraremos que tal solución se puede extender a una solución global siempre que $\Phi\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ con $s\geq 2$; para esto, mostraremos en la proposición (42) que$\|U(\cdot,t)\|_{\mathbb{H}^s}$ es acotada en $[0,T]$. Luego, en la segunda parte, usando la idea de T. Benjamin, J. Bona y J. Mahomy [B-B-M], demostraremos en el teorema (44) la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial.

4.1 Existencia y unicidad de la solución Global.

Iniciamos esta primera parte notando lo siguiente.

Proposición 41 *Sean* $\Phi\in\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, *con* $s\geq 2$, *y* U *solución del problema* (P) *definida sobre* $[0,T]$. *Entonces*

$$\|U(t)\|_{\mathbb{H}^1}^2\leq C(\mu)\|\Phi\|_{\mathbb{H}^s}^2 \tag{5.2}$$

para cada $t\in[0,T]$.

Prueba. Para $t \in [0,T]$ tenemos

$$\langle U(t), L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbb{L}^2} = 0,$$

de donde

$$\langle U(t), L\partial_t U(t) \rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle U(t), MU(t) \rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle U(t), \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbb{L}^2} = 0. \tag{5.3}$$

Pero

$$\frac{d}{dt} \langle U(t), LU(t) \rangle_{\mathbb{L}^2} = 2 \langle U(t), \partial_t LU(t) \rangle_{\mathbb{L}^2} = 2 \langle U(t), L\partial_t U(t) \rangle_{\mathbb{L}^2}, \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \langle U(t), MU(t) \rangle_{\mathbb{L}^2} &= \left\langle (u,v), \left(\partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v, \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v \right) \right\rangle_{\mathbb{L}^2} \\ &= \left\langle u, \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} + \left\langle v, \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle u, \partial_x^3 u \right\rangle_{L^2} + \alpha \left\langle u, \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} + \alpha \left\langle v, \partial_x^3 u \right\rangle_{L^2} + \left\langle v, \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} \\ &= 0 + \alpha \left\langle u, \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} - \alpha \left\langle \partial_x^3 v, u \right\rangle_{L^2} + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

y

$$\begin{aligned} \langle U(t), \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbb{L}^2} &= \langle (u,v), (u^p \partial_x u + v^p \partial_x v, v^p \partial_x v + \partial_x (uv^p)) \rangle_{\mathbb{L}^2} \\ &= \langle u, u^p \partial_x u + v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + \langle v, v^p \partial_x v + \partial_x (uv^p) \rangle_{L^2} \\ &= \langle u, u^p \partial_x u \rangle_{L^2} + \langle u, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + \langle v, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + \langle v, \partial_x (uv^p) \rangle_{L^2} \\ &= 0 + \langle u, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + 0 - \langle \partial_x v, uv^p \rangle_{L^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde hemos usado

$$\langle u, u^p \partial_x u \rangle_{L^2} = \left\langle u^{p+1}, \partial_x u \right\rangle_{L^2} = - \left\langle \partial_x u^{p+1}, u \right\rangle_{L^2} = -(p+1) \langle u^p \partial_x u, u \rangle_{L^2}$$

por lo tanto

$$\langle u, u^p \partial_x u \rangle_{L^2} = 0$$

y del mismo modo $\langle v, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} = 0$.

Reemplazando (5.4), (5.5) y (5.6) en (5.3) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \langle U(t), LU(t) \rangle_{\mathbb{L}^2} = 0.$$

Integrando la última expresión, para $t \in [0,T]$, resulta

$$0 = \int_0^t \frac{d}{dr} \langle U(r), LU(r) \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle U(t), LU(t) \rangle_{\mathbb{L}^2} - \langle \Phi, L\Phi \rangle_{\mathbb{L}^2}. \tag{6.8}$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\langle U(t), LU(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} &= \left\langle (u,v), \left(u-\mu\partial_x^2 u, v-\mu\partial_x^2 v\right)\right\rangle_{\mathbb{L}^2} \\
&= \left\langle u, \left(1-\mu\partial_x^2\right)u\right\rangle_{L^2} + \left\langle v, \left(1-\mu\partial_x^2\right)v\right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \widehat{u}, \left(1+\mu\left|\cdot\right|^2\right)\widehat{u}\right\rangle_{L^2} + \left\langle \widehat{v}, \left(1+\mu\left|\cdot\right|^2\right)\widehat{v}\right\rangle_{L^2} \\
&\geq C\left\langle \widehat{u}, \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)\widehat{u}\right\rangle_{L^2} + C\left\langle \widehat{v}, \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)\widehat{v}\right\rangle_{L^2} \\
&= C\left\langle \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{u}, \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{u}\right\rangle_{L^2} + C\left\langle \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{v}, \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\rangle_{L^2} \\
&= C\left\langle \widehat{J^1u}, \widehat{J^1u}\right\rangle_{L^2} + C\left\langle \widehat{J^1v}, \widehat{J^1v}\right\rangle_{L^2} \\
&= C\left\|J^1u\right\|_{L^2}^2 + C\left\|J^1u\right\|_{L^2}^2 \\
&= \left\|u\right\|_{H^1}^2 + \left\|v\right\|_{H^1}^2 \\
&= \left\|U\right\|_{\mathbb{H}^1}^2 .
\end{aligned}
$$

donde se usó que para todo $\mu > 0$ y cualquier $\xi \in \mathbb{R}$ se cumple que $1+\mu\xi^2 \geq C\left(1+\xi^2\right)$.

Tambien

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi, L\Phi\rangle_{\mathbb{L}^2} &= \left\langle (\varphi,\psi)\ , \left(\varphi-\mu\partial_x^2\varphi, \psi-\mu\partial_x^2\psi\right)\right\rangle_{\mathbb{L}^2} \\
&= \left\langle \varphi, \varphi-\mu\partial_x^2\varphi\right\rangle_{L^2} + \left\langle \psi, \psi-\mu\partial_x^2\psi\right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \widehat{\varphi}, \left(1+\mu\left|\cdot\right|^2\right)\widehat{\varphi}\right\rangle_{L^2} + \left\langle \widehat{\psi}, \left(1+\mu\left|\cdot\right|^2\right)\widehat{\psi}\right\rangle_{L^2} \\
&\leq \mu\left\langle \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}, \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}\right\rangle_{L^2} + \mu\left\langle \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{\psi}, \left(1+\left|\cdot\right|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{\psi}\right\rangle_{L^2} \\
&= \mu\left\langle \widehat{J^s\varphi}, \widehat{J^s\varphi}\right\rangle_{L^2} + \mu\left\langle \widehat{J^s\psi}, \widehat{J^s\psi}\right\rangle_{L^2} \\
&= \mu\left(\left\|J^s\varphi\right\|_s^2 + \left\|J^s\psi\right\|_s^2\right) \\
&= \mu\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 ,
\end{aligned}
$$

donde usamos: $1+\mu\xi^2 \leq \mu+\mu\xi^2 = \mu\left(1+\xi^2\right) \leq \mu\left(1+\xi^2\right)^s$ si $\mu \geq 1$ y $s \geq 1$.

En consecuencia, teniendo en cuenta (6.8) y las dos últimas acotaciones obtenemos

$$
\left\|U\right\|_{\mathbb{H}^1}^2 \leq \langle U(t), LU(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle \Phi, L\Phi\rangle_{\mathbf{L}^2} \leq \mu\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^2
$$

de donde resulta (5.2). ■

Proposición 42 . *Sean $\Phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 2$, y U la solución del problema (P) en $[0,T]$. Entonces $\left\|U(t)\right\|_{\mathbb{H}^s}$ es acotada sobre $[0,T]$.*

Prueba. Para $t \in [0,T]$ tenemos

$$
\langle LU(t), L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t))\rangle_{\mathbb{L}^2} = 0,
$$

entonces

$$\langle LU(t), L\partial_t U(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle LU(t), MU(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle LU(t), \partial_x F(U(t))\rangle_{\mathbb{L}^2} = 0 \tag{5.7}$$

pero

$$\frac{d}{dt}\|LU\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \frac{d}{dt}\langle LU(t), LU(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} = 2\langle LU(t), \partial_t LU(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} = 2\langle LU(t), L\partial_t U(t)\rangle_{\mathbb{L}^2},$$

así

$$\langle LU(t), L\partial_t U(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|LU\|_{\mathbb{L}^2}^2 \tag{5.8}$$

también

$$\begin{aligned}
& \langle LU(t), MU(t)\rangle_{\mathbb{L}^2} \\
= \; & \left\langle \left(u-\mu\partial_x^2 u, v-\mu\partial_x^2 v\right), \left(\partial_x^3 u+\alpha\partial_x^3 v, \alpha\partial_x^3 u+\partial_x^3 v\right)\right\rangle_{\mathbb{L}^2} \\
= \; & \left\langle u-\mu\partial_x^2 u, \partial_x^3 u+\alpha\partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} + \left\langle v-\mu\partial_x^2 v, \alpha\partial_x^3 u+\partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} \\
= \; & \left\langle u, \partial_x^3 u\right\rangle_{L^2} + \alpha\left\langle u, \partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} - \mu\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x^3 u\right\rangle_{L^2} - \mu\alpha\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} \\
& +\alpha\left\langle v, \partial_x^3 u\right\rangle_{L^2} + \left\langle v, \partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} - \mu\alpha\left\langle \partial_x^2 v, \partial_x^3 u\right\rangle_{L^2} - \mu\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x^3 u\right\rangle_{L^2} \\
= \; & \alpha\left\langle u, \partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} - \mu\alpha\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} + \alpha\left\langle v, \partial_x^3 u\right\rangle_{L^2} - \mu\alpha\left\langle \partial_x^2 v, \partial_x^3 u\right\rangle_{L^2} \\
= \; & \alpha\left\langle u, \partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} - \mu\alpha\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x^3 v\right\rangle_{L^2} - \alpha\left\langle \partial_x^3 v, u\right\rangle_{L^2} + \mu\alpha\left\langle \partial_x^3 v, \partial_x^2 u\right\rangle_{L^2} \\
= \; & 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

y

$$\begin{aligned}
& \left|\langle LU(t), \partial_x F(U(t))\rangle_{\mathbb{L}^2}\right| \\
= \; & \left|\left\langle \left(u-\mu\partial_x^2 u, v-\mu\partial_x^2 v\right), \left(u^p\partial_x u+v^p\partial_x v, v^p\partial_x v+\partial_x(uv^p)\right)\right\rangle_{\mathbb{L}^2}\right| \\
\leq \; & \left|\left\langle u-\mu\partial_x^2 u, u^p\partial_x u+v^p\partial_x v\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle v-\mu\partial_x^2 v, v^p\partial_x v+\partial_x(uv^p)\right\rangle_{L^2}\right| \\
\leq \; & \left\|u-\mu\partial_x^2 u\right\|_{L^2}\left\|u^p\partial_x u+v^p\partial_x v\right\|_{L^2} + \left\|v-\mu\partial_x^2 v\right\|_{L^2}\left\|v^p\partial_x v+\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2} \\
\leq \; & \frac{1}{2}\left(\left\|u-\mu\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 + \left\|u^p\partial_x u+v^p\partial_x v\right\|_{L^2}^2\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(\left\|v-\mu\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2 + \left\|v^p\partial_x v+\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}^2\right) \\
\leq \; & \left\|u-\mu\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 + \left\|v-\mu\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2 + \left\|u^p\partial_x u+v^p\partial_x v\right\|_{L^2}^2 + \left\|v^p\partial_x v+\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}^2 \\
= \; & \|LU\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_x F(U)\|_{\mathbb{L}^2}^2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

reemplazando (5.8), (5.9) y (5.10) en (5.7) se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|LU\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|LU\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_x F(U(t))\|_{\mathbb{L}^2}^2 \tag{5.11}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x F\left(U\left(t\right)\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \left\|u^p\partial_x u + v^p\partial_x v\right\|_{L^2}^2 + \left\|v^p\partial_x v + \partial_x\left(uv^p\right)\right\|_{L^2}^2 \\
&= \left\|u^p\partial_x u\right\|_{L^2}^2 + \left\|v^p\partial_x v\right\|_{L^2}^2 + 2\left\langle u^p\partial_x u, v^p\partial_x v\right\rangle_{L^2} \\
&\quad + \left\|v^p\partial_x v\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_x\left(uv^p\right)\right\|_{L^2}^2 + 2\left\langle v^p\partial_x v, \partial_x\left(uv^p\right)\right\rangle_{L^2} \\
&\leq \left\|u^p\partial_x u\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|v^p\partial_x v\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|u^p\partial_x u\right\|_{L^2}\left\|v^p\partial_x v\right\|_{L^2} \\
&\quad + \left\|\partial_x\left(uv^p\right)\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|v^p\partial_x v\right\|_{L^2}\left\|\partial_x\left(uv^p\right)\right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

pero, usando la proposición 41, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|u^p\partial_x u\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|u\right|^{2p}\left|\partial_x u\right|^2 dx \leq \left\|u\right\|_{L^\infty}^{2p}\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left\|u\right\|_{H^1}^{2p}\left\|u\right\|_{H^1}^2 \leq \left\|U\right\|_{\mathbb{H}^1}^{2p+2} \leq C\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2},
\end{aligned}$$

análogamente

$$\left\|v^p\partial_x v\right\|_{L^2}^2 \leq C\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2}$$

y, por ser $H^1\left(\mathbb{R}\right)$ un álgebra de Banach, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x\left(uv^p\right)\right\|_{L^2} &\leq \left\|uv^p\right\|_{H^1} \leq \left\|u\right\|_{H^1}\left\|v\right\|_{H^1}^p \\
&\leq \left\|U\right\|_{\mathbb{H}^1}\left\|U\right\|_{\mathbb{H}^1}^p = \left\|U\right\|_{\mathbb{H}^1}^{p+1} \\
&\leq C\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{p+1}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left\|\partial_x F\left(U\left(t\right)\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2} \tag{5.12}$$

luego, reemplazando (5.12) en (5.11) se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|LU\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \left\|LU\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + C\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2}$$

integrando de 0 a t, para $t \in [0, T]$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\left\|LU\left(t\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \left\|L\Phi\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\right) \leq \int_0^t \left\|LU\left(r\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 dr + C\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2} t$$

equivalentemente

$$\left\|LU\left(t\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \left\|L\Phi\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 2CT\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2} + 2\int_0^t \left\|LU\left(r\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 dr \tag{5.13}$$

aplicando la desigualdad de Gronwall en (5.13) se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|LU\left(t\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq \left(\left\|L\Phi\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 2CT\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2}\right)\exp\left(\int_0^t 2dr\right) \\
&= \left(\left\|L\Phi\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 2CT\left\|\Phi\right\|_{\mathbb{H}^s}^{2p+2}\right)\exp\left(2t\right) \\
&\leq Ke^{2T}. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\|LU(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \left\|\left(u-\mu\partial_x^2 u, v-\mu\partial_x^2 v\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\
&= \left\|u-\mu\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 + \left\|v-\mu\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{u}(\xi)-\mu\widehat{\partial_x^2 u}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{v}(\xi)-\mu\widehat{\partial_x^2 v}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\mu\xi^2\right)^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} \left(1+\mu\xi^2\right)^2 |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi \\
&\geq C\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{u}(\xi,t)|^2 d\xi + C\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{v}(\xi,t)|^2 d\xi \\
&= C\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 + C\|v(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \\
&= \|U(t)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R})}^2 . \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Luego de (5.14) y (5.15) resulta que

$$\|U(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq Ce^T$$

lo que prueba que $\|U(t)\|_{\mathbb{H}^s}$ es acotada sobre $[0,T]$. ■

Teorema 43 . *Si $\Phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R})$, para $s \geq 2$, entonces existe una función $U \in C^1([0,+\infty[\,,\mathbb{H}^s(\mathbb{R}))$ única solución del problema (P).*

Como la norma $\|U\|_{\mathbb{H}^s}^2$ no crece con el tiempo, podemos extender la solución del problema (P) a cualquier intervalo de tiempo $[0,T]$ en un número finito de pasos, como lo mostramos a continuación:

Sabemos por el teorema 38, existe U solución del problema (P), en efecto, sean t y h tales que t, $t+h \in [0,T[$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\|U(x,t+h)-U(x,t)\|_{\mathbb{H}^s} \\
\leq\ & \|[W(t+h)-W(t)]\Phi\|_{\mathbb{H}^s} \\
&+\left\|\int_0^{t+h} W(t+h-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr - \int_0^t W(t-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr\right\|_{\mathbb{H}^s} \\
\leq\ & \|[W(t+h)-W(t)]\Phi\|_{\mathbb{H}^s} + \int_t^{t+h} \left\|W(t+h-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr\right\|_{\mathbb{H}^s} \\
&+\left\|(W(h)-I)\int_0^t W(t-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr\right\|_{\mathbb{H}^s}
\end{aligned}
$$

Luego

$$\|U(x,t+h)-U(x,t)\|_{\mathbb{H}^s} \to 0,$$

cuando $h \to 0$. En consecuencia $U \in C\left([0,T[\,,\mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ y puede, por lo tanto, ser extendida a $[0,T]$. Ahora consideremos el problema

$$\begin{cases} L\partial_t V(t) + MV(t) + \partial_x F(V(t)) = 0 \\ \\ V(x,0) = U(x,T), \end{cases} \tag{P'}$$

por el teorema 38, existe $T^* > 0$ y una única $V \in C\left([0,T^*], \mathbb{H}^s(\mathbb{R})\right)$ satisfaciendo (P'), definimos

$$\widetilde{U}(x,t) = \begin{cases} U(x,t) \ , \ 0 \leq t \leq T \\ \\ V(x,t-T), \quad T \leq t \leq T + T^* \end{cases}$$

observemos que $\widetilde{U}(0) = U(0) = \Phi$ y $\widetilde{U}(T) = V(0) = \Phi = U(T)$, $\widetilde{U}$ satisface las condiciones de (P'), de donde

$$L\partial_t \widetilde{U} + M\partial_x \widetilde{U} + \partial_x F\left(\widetilde{U}(t)\right) = 0,$$

si $t \in [0,T[\, \cup\,]0,T^*]$. Además debido a la continuidad de $U(.,t)$ en $[0,T]$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{U}(x,T) - \widetilde{U}(x,T-h)}{h} &= \frac{U(x,T) - U(x,T-h)}{h} \\ &= \frac{W(T)\Phi - W(T-h)\Phi}{h} - \frac{1}{h}\int_0^T W(T-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \\ &\quad + \frac{1}{h}\int_0^{T-h} W(T-h-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \\ &= W(T)\frac{I - W(-h)}{h}\Phi + \frac{W(-h) - I}{h}\int_0^{T-h} W(T-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} W(T-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $h \to 0^+$, usando propiedades de límite y el teorema del valor medio para integrales de Bochner en el intervalo $[T-h,T]$ con $C_h \in [T-h,T]$ resulta

$$\begin{aligned} \partial_t^+ \widetilde{U}(T) &= -W(T) L^{-1} M\Phi + L^{-1}M\int_0^T W(T-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau - L^{-1}\partial_x F(U(T)) \\ &= -L^{-1}M\left[W(T)\Phi - \int_0^T W(T-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau\right] - L^{-1}\partial_x F(U(T)) \\ &= -L^{-1}MU(T) - L^{-1}\partial_x F(U(T)). \end{aligned}$$

Para $h < 0$, procediendo de manera similar, se obtiene que

$$\partial_t^- \widetilde{U}(T) = -L^{-1}MU(T) - L^{-1}\partial_x F(U(T)).$$

Entonces $\partial_t^+ \widetilde{U}(T) = \partial_t^- \widetilde{U}(T)$, así que

$$\partial_t \widetilde{U}(x,T) + L^{-1} M \partial_x \widetilde{U}(x,T) + L^{-1} \partial_x F\left(\widetilde{U}(x,T)\right) = 0.$$

Esto muestra que U puede ser extendida como solución de (P) al intervalo $[0, T + T^*]$.

4.2 Dependencia Continua de la solución respecto al dato inicial.

Según el teorema 38, si $\Phi \in \mathbb{H}^s$, para $s \geq 2$, para cada $T > 0$ existe una función $U \in C^1([0,T], \mathbb{H}^s(\mathbb{R}))$ única solución del problema (P) con dato inicial Φ. Esta observación nos conduce a la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial, como se muestra a continuación.

Teorema 44 . *Si $\Phi \in \mathbb{H}^s$, para $s \geq 2$, la única solución $U \in C^1([0,+\infty[, \mathbb{H}^s(\mathbb{R}))$ del problema (P) con dato inicial Φ depende continuamente de Φ. Es decir, si $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ convergente a Φ en $\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $U_n \in C^1([0,+\infty[, \mathbb{H}^s(\mathbb{R}))$ es la única solución del problema (P) con dato inicial Φ_n, entonces para cada $T > 0$ se cumple*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|U_n(t) - U(t)\|_{\mathbb{H}^s} = 0. \tag{6.1}$$

Prueba. Por el teorema 43, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $T > 0$, las funciones U_n y U pertenecen a la clase $C^1([0,T], \mathbb{H}^s(\mathbb{R}))$, entonces por la proposición 39, para todo $t \in [0,T]$ tenemos

$$\|U_n(t) - U(t)\|_s \leq \|\Phi_n - \Phi\|_s e^{KT},$$

de donde se sigue (6.1).

Conclusiones

Como hemos visto el problema de valor inicial (P) es bien formulado localmente, es decir, demostramos: existencia local de soluciones, unicidad y dependencia continua de la solución respecto del dato inicial.

Además, se probó que el problema de Cauchy (P) es bien formulado globalmente, es decir, se satisfacen: existencia local de soluciones, unicidad y dependencia continua de la solución respecto del dato inicial pata $T = +\infty$.

Tambien una pregunta importante que se debe responder en el estudio de (P), esta relacionado con el comportamiento asintótico, que consiste en estudiar si es que la solución global del problema (P) decae o explota cuando $t \to +\infty$, la respuesta a esta pregunta es un poco extensa, por lo que, la diferimos para otro trabajo de investigación.

Referencias

[A1] J. Albert. *Dispersion of low energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahomy equation.* J. Differential Equations 63 (1986), 117-134.

[A-B] T. Arbogast, J. Bona. *Methods of applied mathematics.* The university of Texas at Austin, (2005).

[B-B-M] T. Benjamin, J. Bona y J. Mahomy. *Model equatios for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A **272** (1972), 47-78.

[B-M] V. Bisobnin, G. Perla Menzala. *Decay rates of the solutions of nonlinear dispersive equations.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **124A**, (1231-1246), 1994.

[I-I] R. J. Iório, V. Iório. *Equacoes diferenciais parciais: una introducao.* Rio de Janeiro, IMPA/CNPq (1998).

[MP2] J. Montealegre, S. Petrozzi. *Semigrupos de contracción y ecuaciones de evolución lineales.* Reporte de investigación, N°6 Serie B, PUCP (1999).

[JM] J. Montealegre. La ecuación de Benjamin - Bona - Mahomy generalizada. Existencia de soluciones. Revista PRO - MATHEMATICA, PUCP, Volumen IX, N°6, 17-18 (1995).

[Me] A. Mendoza Uribe. *Estudio Local del Problema de Valor Inicial Asociado con la Ecuación de Kortewegh-de Vries.* Tesis de Maestría, PUCP 2003

[LP] Felipe Linares, Gustavo Ponce. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. publicacoes matemáticas, segunda edición - IMPA (2006)

[K4] T. Kato. Quase-linear equations of evolution with application to partial differential equations, Spectral theory and differential equations, lectures notes in mathematics, Springer Verlag 448 (1975), 25-70.

[WV] Wagner Vieira Leite Nunes. *O Problema de Cauchy global para ecuaciones dispersivas con coeficientes dependientes del tiempo.* Tesis presentada para obtener del título de doctor en ciencias. Rio de Janeiro. IMPA- Brasil (1991).

[Pa] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematica Sciences, 44. Springer - Verlag, New York,1983.