UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

HOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD Y HOMOLOGÍA CÍCLICA

por

LAURA BETZABÉ LA ROSA OBANDO

Tesis para Optar
el Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMÁTICA

Prof. CHRISTIAN HOLGER VALQUI HAASE
Asesor

UNI, Julio del 2010.

RESUMEN

En el capítulo 1 hacemos las definiciones de categorías y funtores, en particular para Λ un anillo con unidad; consideramos las categorías de módulos a derecha $\mathfrak{M}_\Lambda$ e Izquierda ${}_\Lambda\mathfrak{M}$. Para $A \in \mathfrak{M}_\Lambda$ y $B \in {}_\Lambda\mathfrak{M}$; consideramos los funtores aditivos $F = A \otimes_\Lambda -$, que lleva la categoría ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ a la categoría de grupos abelianos Ab, y $G = - \otimes_\Lambda B$ que lleva la categoría $\mathfrak{M}_\Lambda$ a la categoría de grupos abelianos Ab. Es importante aclarar que en la tesis cuando nos referimos a los Λ-módulos estas son a izquierda.

Luego damos las definiciones de secuencias o sucesiones exactas e inexactas de Λ-módulos, que nos permiten dar la definición de un complejo, que es un objeto C de la categoría de módulos graduados $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ (izquierda) con un endomorfismo ∂ de grado -1 cuya sucesión es semi exacta ($\partial\partial = 0$), el conjunto de estos objetos definen la categoría de los complejos $Comp$.

Luego definimos la Homología de un Complejo, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $H_n(C) = \dfrac{\operatorname{Nu}\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}}$, el cual es un funtor aditivo de la categoría de $Comp$ a la categoría ${}_\Lambda\mathfrak{M}$. Definimos luego una sucesión exacta corta de complejos, que es una sucesión de morfismos de complejos $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ la sucesión $0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \longrightarrow 0$ es exacta corta. Para toda sucesión exacta corta de complejos existe una sucesión exacta larga en homología

$$\cdots \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(c) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

donde ∂ es llamado homomorfismo conectivo.

Luego definimos una resolución proyectiva del Λ-módulo A como un complejo exacto (C, ∂) donde $C_n = 0$ para $n < 0$ y $C_0 = A$, cuyo complejo reducido C_A es proyectivo, es decir, C_n proyectivo para $n \geq 1$. También se tiene que todo Λ-módulo admite una resolución proyectiva. Para $B \in {}_\Lambda\mathfrak{M}$ definimos el funtor derivado $Tor^\Lambda(A,B) = H_n(GC_A)$, donde C_A es una resolución proyectiva del Λ-módulo A y

G es el funtor $G = - \otimes_\Lambda B$.

Finalmente damos un manera de extender el funtor T definido sobre la categoría de álgebras con unidad con valores en grupos abelianos a la categoría de álgebras (no necesariamente con unidad). Para esto, sea A un k-álgebra sin unidad, podemos formar un k-álgebra con $A_+ = k \oplus A$. La definición de extensión de T a k-álgebras sin unidad es dada por $T(A) := \text{Conucleo}(T(k) \to T(A_+))$.

En el capitulo 2 definimos un A-bimódulo M, para luego definir el complejo de Hochschild de A con coeficientes en M denotado por $(C_*(A, M), b)$, donde $C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$ y b es llamado el borde de Hochschild, y la homología del complejo es llamada homología de Hochschild de A con coeficientes en M. Si $A = M$, se escribe $HH_*(A) = H_*(A, A)$, llamada homología de Hochschild de A. Se tiene para cada $n \in \mathbb{Z}$ que $H_n(A, -)$, $H_n(-, M)$ son funtores covariantes; además HH_* es un funtor covariante de las categoría de k-álgebras asociativas a la categoría de k-módulos graduados. Luego definimos la resolución barra $(C'_*(A), b')$. Para la k-álgebra proyectiva A y para todo A-bimódulo M y todo $n \geq 0$ se tiene $H_n(A, M) = Tor_n^{A \otimes A^{op}}(M, A)$. También definimos el complejo de Hochschild normalizado $(\bar{C}_*(A, M), b)$.

En el capítulo 3 damos la definición de bicomplejos, complejos totales de un bicomplejo y los grupos de homología de un bicomplejo. Además se define el complejo mixto $\mathcal{B}(A)$ y la homología cíclica del complejo mixto, que es la homología del complejo total del bicomplejo $\mathcal{B}(A)$; y la secuencia SBI para complejos mixtos. Damos dos definiciones de Homología cíclica de un k-álgebra asociativa A, la primera a partir del bicomplejo $CC(A)$ y el segundo a partir del bicomplejo $\mathcal{B}(A)$. Luego demostramos que coinciden con la homología cíclica definida a partir del complejo reducido $\bar{\mathcal{B}}(A)$.

En el capítulo 4, hacemos el cálculo de la homología cíclica de $T(V)$, el álgebra tensorial del k-módulo V, aplicando todos los resultados y propiedades vistas en los capítulos anteriores. En el último capítulo mencionamos algunas conclusiones.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Categorías y Funtores

Definición 1.1.1 *Una categoría $\mathfrak{C}$ consiste de:*

1. *Una clase cuyos elementos son llamados objetos $A, B, C, \ldots$.*

2. *Un conjunto $\mathfrak{C}(A, B)$ para cada par de objetos A, B de $\mathfrak{C}$; cuyos elementos son llamados morfismos de A en B.*
   Una ley de composición

$$\mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \longrightarrow \mathfrak{C}(A, C)$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

   tal que los objetos A, B, C de $\mathfrak{C}$, que satisfacen los siguientes axiomas:

   a) *Los conjuntos $\mathfrak{C}(A_1, B_1)$, $\mathfrak{C}(A_2, B_2)$ son disjuntos a menos que $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$.*

   b) *La composición es asociativa. Dadas $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, $g \in \mathfrak{C}(B, C)$ y $h \in \mathfrak{C}(C, D)$ entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   c) *Para cada objeto A, existe un único morfismo identidad $1_A \in \mathfrak{C}(A, A)$ tal que para cada $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{C}(C, A)$ se cumple*

$$f \circ 1_A = f \qquad 1_A \circ g = g$$

Definición 1.1.2 *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías.*
Un Funtor Covariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una aplicación que satisface:

i) Sea A un objeto de $\mathfrak{C}$ entonces FA es un objeto en $\mathfrak{D}$.

ii) Si $f \in \mathfrak{C}(A,B)$ entonces $Ff \in \mathfrak{C}(FA,FB)$.

iii) Si $f \in \mathfrak{C}(A,B)$, $g \in \mathfrak{C}(B,C)$ entonces $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.

iv) Para todo objeto A en $\mathfrak{C}$ se tiene $F1_A = 1_{FA}$.

Un Funtor Contravariante es la aplicación que satisface:

i') Sea A un objeto de $\mathfrak{C}$ entonces FA es un objeto en $\mathfrak{D}$.

ii') Si $f \in \mathfrak{C}(A,B)$ entonces $Ff \in \mathfrak{C}(FB,FA)$.

iii') Si $f \in \mathfrak{C}(A,B)$, $g \in \mathfrak{C}(B,C)$ entonces $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$.

iv') Para todo objeto A en $\mathfrak{C}$ se tiene $F1_A = 1_{FA}$.

Definición 1.1.3 *Una categoría $\mathfrak{C}$ es pre-aditiva si cada $Hom_{\mathfrak{C}}(A,B) = \{f \in \mathfrak{C}(A,B)/f$ es un homomorfismo$\}$ es un grupo abeliano (adición) y se satisface la ley distributiva cuando esta está definida.*

Al elemento neutro de $Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$ lo llamaremos morfismo nulo entre A y B y lo denotaremos por 0.

Definición 1.1.4 *Si $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son categorías pre-aditivas, entonces decimos que el funtor (contravariante o covariante) $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es aditivo si*

$$F(f+g) = Ff + Fg$$

para f, $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$, $\forall$ A y B.

Proposición 1.1.5 *Si el funtor (contravariante y covariante) $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es aditivo entonces $F(0) = 0$, donde $0 \in \mathfrak{C}(A,B)$ es el morfismo nulo.*

Demostración: Sea $f \in \mathfrak{C}(A,B)$ y $0 \in \mathfrak{C}(A,B)$ el morfismo nulo. Entonces $f+0 = f$ y como F es un funtor aditivo se tiene $F(f) = F(f+0) = F(f) + F(0)$. Luego tenemos $F(0) = 0$. ■

Definición 1.1.6 *Sean los funtores $T, L : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$. Una transformación natural $\tau : T \to L$ es una familia de morfismos $\{\tau_A\}_{A\in\mathfrak{C}}$, tal que para todo $f : A \to A'$ en $\mathfrak{C}$, el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\tau_A"'] & TA' \arrow[d, "\tau_{A'}"] \\ LA \arrow[r, "Lf"] & LA' \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.7 *Decimos que los funtores $T, L : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ son naturalmente equivalentes, si existe una transformación natural $\tau : T \to L$ tal que para cada $A \in \mathfrak{C}$, $\tau_A : TA \to LA$ es un isomorfismo.*

Definición 1.1.8 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y sean A, B dos objetos de $\mathfrak{C}$. El producto de A y B en $\mathfrak{C}$ consta de un objeto P en $\mathfrak{C}$ y dos morfismos, $p : P \to A$ y $q : P \to B$, tales que, para cualquier par de morfismos $f : X \to A$ y $g : X \to B$ en $\mathfrak{C}$, existe un único morfismo único $h : X \to P$ tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "!h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

es decir, $f = p \circ h$ y $g = q \circ h$.

Los morfismos p y q se llaman proyecciones. Se acostumbra escribir $P = A \times B$.

Proposición 1.1.9 *Seam P y P' dos productos para A y B objetos de $\mathfrak{C}$, entonces existe un único isomorfismo $h : P \to P'$.*

Demostración: Sean los productos de A y B, P y P' en $\mathfrak{C}$ y los morfismos, $p : P \to A$ y $q : P \to B$, $p' : P' \to A$ y $q' : P' \to B$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, "p'"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "q'"] & \\ A & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

Por ser P un producto, existe un único morfismo $h : P' \to P$ tal que $p' = p \circ h$ y $q' = q \circ h$. Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dr, "q"] & \\ A & P' \arrow[l, "p'"] \arrow[r, "q'"'] & B \end{tikzcd}$$

Como P' es un producto, existe un único morfismo $h' : P \to P'$ tal que $p = p' \circ h'$ y $q = q' \circ h'$. Luego tenemos el morfismo $h \circ h' : P \to P$ tal que

$p = p \circ (h' \circ h)$ y $q = q \circ (h' \circ h)$ tal como se puede ver el siguiente gráfico

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, bend right, "1_P"'] \arrow[d, "h' \circ h"] \arrow[dr, "q"] & \\ A & P \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

Además, $p = p \circ 1_P$ y $q = q \circ 1_P$. Luego por unicidad de la propiedad universal del producto se tiene que $h' \circ h = 1_P$. De manera análoga se prueba que $h \circ h' = 1_{P'}$. ■

Definición 1.1.10 *Una categoría aditiva $\mathfrak{C}$ es una categoría con objeto cero el cual para cualquier par de objetos poseen un producto y el conjunto de morfismos $\mathfrak{C}(A, B)$ es un grupo abeliano tal que la composición*

$$\mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \to \mathfrak{C}(A, C)$$

es bilineal.

Definición 1.1.11 *Sea Λ un anillo con unidad. Un Λ-módulo (a izquierda) graduado o $\mathbb{Z}$-graduado es una familia de Λ-módulos (a izquierda) $A = \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.*

Si A, B son Λ-módulos (a izquierda) graduados, un morfismo $f : A \to B$ de grado m es una familia de homomorfismos de Λ-módulos $\{f_i : A_n \to B_{n+m}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. La categoría así definida es denotada por $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ (izquierda). Obtenemos una categoría aditiva si nos restringimos a los morfismos de grado 0.

Proposición 1.1.12 *Sea Λ un anillo asociativo con unidad. Si $A \in \mathfrak{M}_\Lambda$, entonces podemos definir un funtor aditivo*

$$F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \longrightarrow Ab$$

por medio de $F(B) = A \otimes_\Lambda B$ en los objetos. Para el morfismo de Λ- módulos a izquierda $f : B \to B'$ se define

$$Ff = 1_A \otimes f.$$

Similarmente, para $B \in {}_\Lambda\mathfrak{M}$ fijo, existe un funtor aditivo $G : \mathfrak{M}_\Lambda \to Ab$ con $G(A) = A \otimes_\Lambda B$ y $Gg = g \otimes 1_B$, donde $g : A \to A'$ es un Λ-morfismo de Λ-módulos a derecha.

Demostración: Sea $a \otimes_\Lambda b$ un tensor elemental de $A \otimes_\Lambda B$

$$F(1_B)(a \otimes_\Lambda b) = (1_A \otimes_\Lambda 1_B)(a \otimes_\Lambda b) = 1_A(a) \otimes_\Lambda 1_B(b) = a \otimes_\Lambda b$$

es la identidad en $A \otimes_\Lambda B$.
Para probar que F preserva composición, cabe recordar que:

Observación 1.1.13 *Sean $f : A \to A'$ un Λ-morfismo de módulos a derecha y $g : B \to B'$ un morfismo de Λ- módulos a izquierda. Entonces existe un único homomorfismo $A \otimes_\Lambda B \to A' \otimes_\Lambda B'$ con $a \otimes_\Lambda b \mapsto f(a) \otimes_\Lambda g(b)$.*

Observación 1.1.14 *Sean $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ morfismos de Λ-módulos a derecha y $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$ morfismos de Λ-módulos a izquierda. Entonces*

$$(g' \otimes_\Lambda f') \circ (g \otimes_\Lambda f) = (g' \circ g) \otimes_\Lambda (f' \circ f).$$

Considerando $g = g' = 1_A$ se tiene que

$$F(f \circ f') = 1_A \otimes_\Lambda (f \circ f') = (1_A \circ 1_A) \otimes_\Lambda (f \circ f') = (1_A \otimes_\Lambda f) \circ (1_A \otimes_\Lambda f') = F(f) \circ F(f').$$

Finalmente, si $f, f' : B \to B'$ son morfismos de Λ-módulos a izquierda, entonces sobre un tensor elemental se tiene

$$\begin{aligned} F(f + f')(a \otimes_\Lambda b) &= 1_A(a) \otimes_\Lambda \big(f + f'\big)(b) \\ &= a \otimes_\Lambda \big(f(b) + f'(b)\big) \\ &= a \otimes_\Lambda f(b) + a \otimes_\Lambda f'(b) \\ &= \big(1_A \otimes_\Lambda f + 1_A \otimes_\Lambda f'\big)(a \otimes_\Lambda b) \\ &= \big(F(f) + F(f')\big) a \otimes_\Lambda b. \end{aligned}$$

De manera análoga se demuestra que G es un funtor aditivo. ■

1.2. Complejos

Definición 1.2.1 *Sean Λ un anillo con unidad, los Λ-módulos A, B, C y los morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$. Se dirá que la secuencia*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es

- *semiexacta en B, si $g \circ f = 0$.*
- *exacta en B, si* $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

Definición 1.2.2 *La secuencia*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es exacta corta, si es exacta en A, B y C.

Proposición 1.2.3 *Sean los homomorfismos de módulos $f : M' \to M$ y $g : M \to M''$*

- *f es inyectiva si y sólo si*

  $$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$$

  es exacta en M'.

- *g es sobreyectiva si y sólo si*

  $$M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

  es exacta en M''.

Demostración:

- **(⇒)** Se tiene que la aplicación $\mathbf{0} : 0 \to M'$ es definida como $\mathbf{0}(0) = 0 \in M'$, entonces $\operatorname{Im} \mathbf{0} = 0$ y por ser f inyectiva $\operatorname{Nu} f = 0$. De ello se tiene que la secuencia es exacta en M'.

  (⇐) Por ser la secuencia exacta en M' se tiene que $0 = \operatorname{Im} \mathbf{0} = \operatorname{Nu} f$, luego f es inyectiva.

- (⇒)La aplicación $\mathbf{0} : M'' \to 0$ se define como $\mathbf{0}(m'') = 0$, $\forall\, m'' \in M''$. Se tiene $\operatorname{Nu} \mathbf{0} = M''$, por ser g sobreyectiva $\operatorname{Im} g = M''$. De ello se tiene que la sucesión es exacta en M''.

  (⇐) Si la sucesión es exacta en M'' se tiene $\operatorname{Im} g = \operatorname{Nu} \mathbf{0} = M''$; con lo que g es sobreyectiva.

■

Ejemplo 1.2.4 *Sean los Λ-módulos M y N, la sucesión*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus N \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$$

es exacta corta, con la inyección dada por $i : m \mapsto (m, 0)$ y la proyección $\pi : (m, n) \mapsto n$.
Por ser i inyectiva y π sobreyectiva de (1.2.3) se tiene que la sucesión es exacta en M y N. Además

$$\operatorname{Nu} \pi = \{(m, n) \in M \oplus N / n = 0\} = \{(m, 0)/m \in M\} = \operatorname{Im} i$$

por lo tanto la sucesión es exacta en $M \oplus N$.

Lema 1.2.5 (Lema de los cinco) *Sea A un anillo. Consideremos el diagrama de sucesiones exactas de A-homomorfismos*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[r] \arrow[d, "f_5"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1' \arrow[r, "h_1"] & M_2' \arrow[r, "h_2"] & M_3' \arrow[r, "h_3"] & M_4' \arrow[r, "h_4"] & M_5' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmutativo, tal que f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos entonces f_3 es un isomorfismo.

Demostración:

1. Veamos la inyectividad de f_3:
   Sea $m_3 \in M_3$ tal que $f_3(m_3) = 0$. Como el diagrama es conmutativo se tiene
   $$f_4 \circ g_3(m_3) = h_3 \circ f_3(m_3) = h_3(0) = 0$$
   por ser f_4 inyectiva $g_3(m_3) = 0$, entonces $m_3 \in \mathrm{Nu}(g_3) = \mathrm{Im}(g_2)$, luego existe $m_2 \in M_2$ tal que $g_2(m_2) = m_3$.
   Por la conmutatividad del diagrama se tiene
   $$h_2 \circ f_2(m_2) = f_3 \circ g_2(m_2) = f_3(m_3) = 0$$
   entonces $f_2(m_2) \in \mathrm{Nu}(h_2) = \mathrm{Im}(h_1)$, por lo que existe $m_1 \in M_1'$ tal que $h_1(m_1') = f_2(m_2)$. Por ser f_1 sobreyectiva, existe un $m_1 \in M_1$ tal que $f_1(m_1) = m_1'$. Luego se tiene:
   $$f_2 \circ g_1(m_1) = h_1 \circ f_1(m_1) = h_1(m_1') = f_2(m_2)$$
   por la inyectividad de f_2 se tiene $g_1(m_1) = m_2$. Entonces:
   $$m_3 = g_2(m_2) = g_2(g_1(m_2)) = g_2 \circ g_1(m_2) = \mathbf{0}(m_2) = 0.$$

2. Veamos la sobreyectividad de f_3:
   Sea $m_3' \in M_3'$, entonces $h_3(m_3') \in M_4'$. Por ser f_4 sobreyectiva se tiene que existe $m_4 \in M_4$ tal que $f_4(m_4) = h_3(m_3')$, por la exactitud de la secuencia se tiene que g_3 es sobreyectiva, entonces existe un $m_3 \in M_3$ tal que $g_3(m_3) = m_4$.
   Por la conmutatividad del diagrama se tiene:
   $$h_3 \circ f_3(m_3) = f_4 \circ g_3(m_3) = f_4(m_4) = h_3(m_3')$$

se obtiene que $f_3(m_3) - m_3' \in \mathrm{Nu}(h_3) = \mathrm{Im}(h_2)$, entonces existe un $m_2' \in M_2'$ tal que $h_2(m_2') = f_3(m_3) - m_3'$.
Por ser f_2 sobreyectiva, existe un $m_2 \in M_2$ tal que $f_2(m_2) = m_2'$. Consideremos $m_3 - g_2(m_2) \in M_3$ obteniendo

$$\begin{array}{rclcl} f_3(m_3 - g_2(m_2)) & = & f_3(m_3) - f_3 \circ g_2(m_2) & = & f_3(m_3) - h_2 \circ f_2(m_2) \\ & = & f_3(m_3) - h_2(m_2') & = & f_3(m_3) - (f_3(m_3) - m_3') \\ & = & m_3. & & \end{array}$$

■

Definición 1.2.6 *Diremos que una sucesión exacta corta de Λ-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es escindible (o se escinde), si existe un homomorfismo $g' : M'' \to M$ tal que $g \circ g' = 1_{M''}$.

Proposición 1.2.7 *Si la sucesión exacta corta de Λ-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

es escindible entonces $M \cong M' \oplus M''$.

Demostración: Notemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M' \oplus M'' \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

con la inyección dada por $i : m' \mapsto (m', 0)$ y la proyección $\pi : (m', m'') \mapsto m''$, es escindible. En efecto, por (1.2.4) es exacta corta y para la inyección $i' : M'' \to M' \oplus M''$ dada por $i' : m'' \mapsto (0, m'')$ se tiene que $i' \circ \pi = 1_{M''}$; por lo tanto la sucesión es escindible.
Por ser la sucesión (1.1) escindible existe un homomorfismo $g' : M'' \to M$ tal que $g \circ g' = 1_{M''}$. Definamos el Λ-homomorfismo

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & M' \oplus M'' & \longrightarrow & M \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x) + g'(y) \end{array}$$

Veamos la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{M'}"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Para $(x, y) \in M' \oplus M''$ se tiene:

$$1_{M''} \circ \pi(x, y) = 1_{M''}(y) = y$$

$$g \circ \phi(x, y) = g(f(x) + g'(y)) = \underbrace{g \circ f}_{0}(x) + g \circ g'(y) = 1_{M''}(y) = y$$

entonces $1_{M''} \circ \pi = g \circ \phi$.
Sea $x \in M'$, entonces

$$\phi \circ i(x) = \phi(x, 0) = f(x) + g'(0) = f(x) = f \circ 1_{M'}(x)$$

entonces $\phi \circ i = f \circ 1_{M'}$.
Como $1_{M'}$ y $1_{M''}$ son isomorfismos, por el "Lema de los cinco" en (1.2.5) se tiene que ϕ es un isomorfismo; es decir, $M' \oplus M'' \cong M$. ■

Definición 1.2.8 *Se dice que un Λ-módulo P es proyectivo, si para cualquier sucesión exacta*

$$M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

de Λ-módulos y cualquier Λ-homomorfismo $P \to M''$ existe un Λ-homomorfismo $P \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Definición 1.2.9 *Sean S un conjunto y Λ un anillo unitario. Un Λ-módulo libre sobre S es un par (f, L) donde L es un Λ módulo y $f : S \to L$ una aplicación que verifica la siguiente propiedad universal:*
Para cada Λ-módulo y daca aplicación $g : S \to M$, existe un único homomorfismo de Λ-módulos $h : L \to M$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & L \arrow[d, dashed] \\ & M \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Teorema 1.2.10 *Todo módulo libre es proyectivo.*

Demostración: Sean (i, L) un modulo libre sobre S, $f : L \to M''$ un homomorfismo arbitrario. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[r, "i"] & L \arrow[d, "f"] & \\ & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sea $s \in S$, entonces $f \circ i(s) \in M''$. Como g es un epimorfismo, existe $m_s \in M$ tal que

$$g(m_s) = f \circ i(s)$$

(por el axioma de elección) elegimos una solo elemento m_s de la preimagen de s, para luego definir la aplicación:

$$\begin{aligned} k : S &\longrightarrow M \\ s &\longmapsto m_s \end{aligned}$$

tal que para cada $s \in S$:

$$g \circ k(s) = g(m_s) = f \circ i(s)$$

es decir $g \circ k = g \circ i$. Por ser (i, L) un módulo libre, existe un único homomorfismo $h : L \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & L \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir $h \circ i = k$.
Para $s \in S$

$$g \circ h \circ i(s) = g \circ (h \circ i)(s) = g \circ k(s) = g(m_s) = f \circ i(s)$$

lo que implica que $g \circ h \circ i = f \circ i$. Luego tenemos

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g\circ k"'] & L \arrow[dl, "g\circ h"'] \arrow[dl, bend left, "f"] \\ M'' & \end{tikzcd}$$

Por ser (i, L) módulo libre tenemos $g \circ h \circ i = g \circ k = f \circ i$, por la unicidad de homomorfismos se tiene $g \circ h = f$. ■

Lema 1.2.11 *Para todo Λ-módulo M existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde L es proyectivo.

Demostración: Sea $X \subseteq M$ tal que $\langle X \rangle = M$ (por ejemplo podemos tomar $X = M$). Consideremos el módulo libre generado por X denotado por L. Entonces la inclusión $i : X \to M$ se extiende a un homomorfismo $\phi : L \to M$. Como $X = i(X) \subseteq \phi(L)$, se tiene $M = \langle X \rangle \subseteq \langle \phi(L) \rangle = \phi(L)$. Luego $\phi : L \to M$ es un epimorfirmo; por el primer teorema fundamental de homomorfismos se tiene que:

$$M \cong \frac{L}{\operatorname{Nu}\phi}.$$

Es decir, existe un módulo libre L tal que $M \cong \dfrac{L}{N}$ donde $N = \operatorname{Nu}\phi$. Obtenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\ i\ } L \xrightarrow{\ \phi\ } M \longrightarrow 0$$

Como L es un módulo libre por (1.2.10) se tiene que L es proyectivo. ∎

Definición 1.2.12 *Una sucesión de homomorfismos de módulos*

$$\cdots \longrightarrow C_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} C_i \xrightarrow{f_i} C_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} C_{i-2} \xrightarrow{f_{i-2}} \cdots$$

es semiexacta (exacta) si

$$C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} C_i \xrightarrow{f_i} C_{i-1}$$

es semiexacta (exacta) en C_i para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.13 *Un complejo (C, ∂) sobre Λ denotado simplemente por C, es un objeto en $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ con un endomorfismo $\partial : C \to C$ de grado -1 con $\partial\partial = 0$. Es decir, consiste de una familia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de Λ-módulos y una familia de homomorfismos de Λ-módulos $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$*

$$C : \ \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tal que $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 1.2.14 *La sucesión de morfismos de módulos* (C, ∂) *es un complejo, si la sucesión*

$$C: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

es semiexacta.

El morfismo ∂ (con todos sus componentes ∂_n) es llamado operador diferencial o borde.

Definición 1.2.15 *Un morfismo de complejos* $f : (C, \partial) \to (C', \widetilde{\partial})$ *es un morfismo de grado* 0 *en* $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ *tal que* $f\partial = \widetilde{\partial} f$, *donde la aplicación* f *es una familia* $\{f_n : C_n \to C'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de homomorfismos, tal que para todo* n *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ C'_n \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"'] & C'_{n-1} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Observación 1.2.16 *Sea el complejo* $C = (C, \partial)$, *la condición* $\partial\partial = 0$ *implica que* $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Nu} \partial_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.2.17 *Si* C *es un complejo*

$$C: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

y F *un funtor covariante aditivo, entonces*

$$F(C): \cdots \longrightarrow FC_{n+1} \xrightarrow{F\partial_{n+1}} FC_n \xrightarrow{F\partial_n} FC_{n-1} \xrightarrow{F\partial_{n-1}} \cdots$$

también es un complejo.

Demostración: Como C es un complejo se cumple

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0, \qquad \forall\, n$$

y como F es un funtor aditivo se tiene

$$F(\partial_n)F(\partial_{n+1}) = F(\partial_n\partial_{n+1}) = F(0) = 0, \qquad \forall\, n$$

entonces se tiene que $F(C)$ es un complejo. ■

1.3. Homología

Podemos asociar al complejo (C, ∂) el módulo graduado

$$H_*(C) = \{H_n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C)$$

donde

$$H_n(C) = \frac{\operatorname{Nu}\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}}$$

es llamado n-ésimo **grupo de homología** de C. Los elementos de C_n son llamados n-cadenas, los elementos de $\operatorname{Nu}\partial_n$ son llamados n-ciclos y los elementos de $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ son llamados n-bordes. Denotemos por $Z_n = Z_n(C)$ a $\operatorname{Nu}\partial_n$ y $B_n = B_n(C)$ a $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$. Luego podemos escribir:

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$$

El morfismo de complejos $f : (C, \partial) \to (C', \partial')$ induce el morfismo

$$\begin{array}{rcl} H_n(f) : H_n(C) & \longrightarrow & H_n(C') \\ \overline{x} & \longmapsto & \overline{f(x)} \end{array}$$

usualmente denotado por f_*.
Veamos que f_* esta bien definida:
Sea $z \in \operatorname{Nu}\partial'_n$ un n-ciclo, entonces $\partial_n z = 0$, luego se tiene que

$$\partial'_n f_n z = f_{n+1}\partial_n z = f_{n+1}0 = 0,$$

por lo cual $f_n z \in Ker\partial_n$ es un n-ciclo.
Sea $z \in \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ entonces existe $c_{n+1} \in C_{n+1}$ tal que $\partial_{n+1}c_{n+1} = z$ luego

$$f_n z = f_n\partial_{n+1}c_{n+1} = \partial'_{n+1}f_{n+1}c_{n+1}$$

entonces $f_n z \in \operatorname{Im}\partial'_{n+1}$. Luego se tiene que f_* preserva los ciclos y bordes.

Teorema 1.3.1 *Para cada n, $H_n : Comp \to {}_\Lambda\mathfrak{M}$ es un funtor aditivo.*

Demostración:

- Veamos que H_n es un funtor:
  Todo objeto $(C, \partial) \in Comp$ es llevado por H_n a la un objeto en $H_n(C) \in {}_\Lambda\mathfrak{M}$ y todo morfismo de complejos $(C, \partial) \xrightarrow{f} (C', \partial')$ es llevado por H_n a un morfismo $f_* = H_n(f) : H_n(C) \to H_n(C')$.

Sean $(C,\partial) \xrightarrow{f} (C',\partial') \xrightarrow{g} (C'',\partial'')$ morfismos de complejos y $\overline{z} \in H_n(C)$, entonces

$$(gf)_*(\overline{z}) = \overline{gf(z)} = g_*(\overline{fz}) = g_*f_*(\overline{z}).$$

Sea $(C,\partial) \in Comp$ y el morfismo identidad $1_C : (C,\partial) \longrightarrow (C,\partial)$, entonces $H_n(1_C) : H_n(C) \to H_n(C)$, tal que para cada $\overline{x} \in H_n(C)$ se tiene que

$$H_n(1_C)(\overline{x}) = \overline{1_C(x)} = \overline{x} = 1_{H_n(C)}(\overline{x}).$$

- Veamos que H_n es aditivo:
  Sean $f,g : (C,\partial) \to (C',\partial')$ morfismos de complejos entonces el morfismo $f+g : (C,\partial) \to (C',\partial')$ induce el morfismo $H_n(f+g) : H_n(C) \to H_n(C')$; luego para $\overline{x} \in H_n(C)$ se tiene:

$$\begin{array}{rcccc} H_n(f+g)(\overline{x}) & = & \overline{(f+g)(x)} & = & \overline{f(x)+g(x)} \\ & = & \overline{f(x)} + \overline{g(x)} & = & H_n(f)(\overline{x}) + H_n(g)(\overline{x}) \ . \\ & = & (H_n(f)+H_n(g))(\overline{x}) & & \end{array}$$

■

Proposición 1.3.2 *Sean los complejos (C,∂) y (C',∂'). Entonces*

$$H_n(C \oplus C') \cong H_n(C) \oplus H_n(C').$$

Demostración: Dados los complejos (C,∂) y (C',∂'), consideremos la sucesión $(C \oplus C', \widehat{\partial})$ donde $(C \oplus C')_n = C_n \oplus C'_n$ con operador diferencial $\widehat{\partial}_n = (\partial_n, \partial'_n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Esta sucesión es un complejo. En efecto, se verifica que

$$\widehat{\partial}_n \circ \widehat{\partial}_{n+1} = (\partial_n, \partial'_n) \circ (\partial_{n+1}, \partial'_{n+1}) = (\partial_n \circ \partial_{n+1}, \partial'_n \circ \partial'_{n+1}) = (0,0).$$

Veamos que $\operatorname{Nu} \widehat{\partial}_n = \operatorname{Nu} \partial_n \oplus \operatorname{Nu} \partial'_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Nu} \widehat{\partial}_n & = & \{(c,c') \in C_n \oplus C'_n / \widehat{\partial}_n(c,c') = (0,0)\} \\ & = & \{(c,c') \in C_n \oplus C'_n / (\partial_n, \partial'_n)(c,c') = (\partial_n(c), \partial'_n(c')) = (0,0)\} \\ & = & \{(c,c') \in C_n \oplus C'_n / \partial_n(c) = 0 \wedge \partial'_n(c') = 0\} \\ & = & \{(c,c') \in C_n \oplus C'_n / c \in \operatorname{Nu} \partial_n \wedge c' \in \operatorname{Nu} \partial'_n\} \\ & = & \operatorname{Nu} \partial_n \oplus \operatorname{Nu} \partial'_n. \end{array}$$

Veamos que $\operatorname{Im}\widehat{\partial}_n = \operatorname{Im}\partial_n \oplus \operatorname{Im}\partial'_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\widehat{\partial}_n &= \{\widehat{\partial}_n(c,c')/(c,c') \in C_n \oplus C'_n\} \\
&= \{(\partial_n,\partial'_n)(c,c')/(c,c') \in C_n \oplus C'_n\} \\
&= \{(\partial_n(c),\partial'_n(c'))/(c,c') \in C_n \oplus C'_n\} \\
&= \{(\partial_n(c),\partial'_n(c'))/c \in C_n \wedge c' \in C'_n\} \\
&= \operatorname{Im}\partial_n \oplus \operatorname{Im}\partial'_n.
\end{aligned}$$

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned}
\varphi : \quad \frac{\operatorname{Nu}\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}} \oplus \frac{\operatorname{Nu}\partial'_n}{\operatorname{Im}\partial'_{n+1}} &\longrightarrow \frac{\operatorname{Nu}\partial_n \oplus \operatorname{Nu}\partial'_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1} \oplus \operatorname{Im}\partial'_{n+1}} \\
(\overline{a},\overline{a'}) &\longmapsto \overline{(a,a')}
\end{aligned}$$

- Veamos que φ está bien definida:
  Sea $(\overline{a},\overline{a'}) = (\overline{b},\overline{b'})$ entonces

  $$(\overline{a}-\overline{b},\overline{a'}-\overline{b'}) = (\overline{a-b},\overline{a'-b'}) = (\overline{0},\overline{0})$$

  Luego se tiene $a-b \in \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ y $a'-b' \in \operatorname{Im}\partial'_{n+1}$. Esto implica que $(a-b,a'-b') \in \operatorname{Im}\partial_{n+1} \oplus \operatorname{Im}\partial'_{n+1}$, entonces $\overline{(a-b,a'-b')} = \overline{(a,a')-(b,b')} = \overline{(0,0)}$. Por lo que $\overline{(a,a')} = \overline{(b,b')}$, lo que equivale a $\varphi(\overline{a},\overline{a'}) = \varphi(\overline{b},\overline{b'})$.

- φ es inyectiva:
  Sea $(\overline{a},\overline{a'}) \in \operatorname{Nu}\varphi \Rightarrow \varphi(\overline{a},\overline{a'}) = \overline{(a,a')} = \overline{(0,0)}$. Luego se tiene que $(a,a') \in \operatorname{Im}\partial_{n+1} \oplus \operatorname{Im}\partial'_{n+1}$, entonces $a \in \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ y $a' \in \operatorname{Im}\partial'_{n+1}$. Por lo tanto $(\overline{a},\overline{a'}) = (\overline{0},\overline{0})$.

- φ es sobreyectiva:
  Sea $\overline{(a,a')} \in \dfrac{\operatorname{Nu}\partial_n \oplus \operatorname{Nu}\partial'_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1} \oplus \operatorname{Im}\partial'_{n+1}} \Rightarrow (a,a') \in \operatorname{Nu}\partial_n \oplus \operatorname{Nu}\partial'_n$ lo que implica $a \in \operatorname{Nu}\partial_n$ y $a' \in \operatorname{Nu}\partial'_n$ entonces $(\overline{a},\overline{a'}) \in \dfrac{\operatorname{Nu}\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}} \oplus \dfrac{\operatorname{Nu}\partial'_n}{\operatorname{Im}\partial'_{n+1}}$.
  Luego $\varphi(\overline{a},\overline{a'}) = \overline{(a,a')}$.

Con ello probamos que φ es un isomorfismo. ■

Definición 1.3.3 *Dos morfismos de complejos $f,g : C \to C'$ son homotópicos si existe un morfismo de grupos graduados $h : C \to C'$ de grado 1, llamado **homotopía** tal que:*

$$f - g = h\partial + \widetilde{\partial}h$$

o equivalentemente

$$f_n - g_n = h_{n-1}\partial_n + \widetilde{\partial}_{n+1} h_n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

como se puede apreciar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] \\
C'_{n+1} \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"'] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Lema 1.3.4 *Si* $f, g : C \longrightarrow C'$ *son homotópicas, entonces* $f_* = g_* : H_n(C) \to H_n(C')$.

Demostración: Sea $x \in Z_n(C)$, h una homotopía entre f y g entonces:

$$\begin{aligned}
(f_n - g_n)(x) &= (h_{n-1}\partial_n + \widetilde{\partial}_{n+1} h_n)(x) \\
&= h_{n-1}\partial_n(x) + \widetilde{\partial}_{n+1} h_n(x) \\
&= h_{n-1}(\partial_n(x)) + \widetilde{\partial}_{n+1}(h_n(x))
\end{aligned}$$

Como $x \in Z_n(C) = \mathrm{Nu}\,\partial_n$ tenemos que $\partial_n(x) = 0$

$$\begin{aligned}
(f_n - g_n)(x) &= h_{n-1}(0) + \widetilde{\partial}_{n+1}(h_n(x)) \\
&= \widetilde{\partial}_{n+1}(h_n(x))
\end{aligned}$$

luego tenemos para $\overline{x} \in H_n(C)$

$$\begin{aligned}
(f_* - g_*)(\overline{x}) &= \overline{f_n - g_n(x)} \\
&= \overline{\widetilde{\partial}_{n+1}(h_n(x))} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $f_* = g_*$ ■

Un caso particular sucede cuando $C = C'$, $f = Id_C$, $g = 0$. Entonces, si Id_C es homotópico a 0 se dice que C es *contractible* (y la homotopía es una *homotopía contractante*).

Definición 1.3.5 *Una aplicación de complejos* $C \longrightarrow C'$ *es un casi-isomorfismo si* $H_n(C) \cong H_n(C')$, $\forall\, n$.

Definición 1.3.6 *Un complejo C*

$$C: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

es exacto, si $\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Nu} \partial_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.3.7 *Sea*

$$C: \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

La siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow \text{Conúcleo}(\partial_{n+1}) \xrightarrow{(\partial_n)_*} \operatorname{Im}(\partial_n) \longrightarrow 0.$$

Demostración:
Para cada n se tiene $H_n(C) = \dfrac{Z_n(C)}{B_n(C)} \subseteq \dfrac{C_n}{B_n(C)} = \text{Conúcleo}(\partial_{n+1})$.
Definimos

$$(\partial_n)_* : \frac{C_n}{B_n(C)} \longrightarrow \operatorname{Im}(\partial_n)$$

$$[x] \longmapsto \partial_n(x)$$

Veamos que la aplicación está bien definida:
Sean x, $y \in C_n$ tales que $[x] = [y]$, entonces $x - y \in \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$; luego existe $z \in C_{n+1}$ tal que $x - y = \partial_{n+1} z$, entonces $\partial_n(x-y) = \partial_n \circ \partial_{n+1} z$, luego $\partial_n(x) = \partial_n(y) + \underbrace{\partial_n \circ \partial_{n+1}}_{0} z = \partial_n(y)$. Por lo tanto $(\partial_n)_*$ está bien definido.

Veamos que $\operatorname{Nu}\big((\partial_n)_*\big) = H_n(C) = \dfrac{Z_n}{B_n}$.
Es claro que $\dfrac{Z_n}{B_n} \subset \operatorname{Nu}\big((\partial_n)_*\big)$.
Si $[x] \in \operatorname{Nu}\big((\partial_n)_*\big)$, entonces $0 = (\partial_n)_*[x] = \partial_n(x)$. Por lo tanto $x \in Z_n$. ■

Definición 1.3.8 *Una sucesión corta de morfismos de complejos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se dirá exacta si para cada $n \in \mathbb{Z}$ *la sucesión*

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \longrightarrow 0$$

es exacta.

Teorema 1.3.9 (Sucesión exacta larga) *Si*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos, entonces existe una sucesión exacta de módulos

$$\cdots \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} \cdots.$$

Equivalentemente se puede describir esto como un triángulo exacto

$$\begin{tikzcd} H_*(A) \arrow[rr, "f_*"] & & H_*(B) \arrow[dl, "g_*"] \\ & H_*(C) \arrow[ul, "\partial_*"] & \end{tikzcd}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{llcl} (\partial_*)_n : & H_n(C) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) \\ & \overline{z} & \longmapsto & \overline{f_{n-1}^{-1}\partial_n x} \end{array}$$

con $g_n(x) = z$, es llamado homomorfismo conectivo.

Demostración:

1. Veamos la existencia de $(\partial_*)_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$:
   Para cada $n \in \mathbb{Z}$ consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   Sea $c_n \in C_n$ y $\partial''_n c_n = 0$. Como g_n es sobreyectiva, existe $b_n \in B_n$ tal que $c_n = g_n(b_n)$. Luego se tiene que $\partial_n b_n \in B_{n-1}$. Por la conmutatividad se tiene

$$0 = \partial''_n c_n = (\partial''_n g_n) b_n = g_{n-1}\partial_n b_n$$

   entonces $\partial_n b_n \in \operatorname{Nu} g_{n-1} = \operatorname{Im} f_{n-1}$; por ser f_{n-1} inyectivo existe un único $a_{n-1} \in A_{n-1}$ tal que $\partial_n b_n = f_{n-1}a_{n-1}$. Luego se tiene

que $f_{n-1}^{-1}\partial_n b_n$ esta bien definido. Supongamos que para c_n existe otro $\widehat{b}_n \in B_n$, obteniéndose de manera análoga al proceso anterior un único $\widehat{a}_{n-1} \in A_{n-1}$ tal que $f_{n-1}\widehat{a}_{n-1} = \partial_n\widehat{b}_n$.
De ello se tiene

$$\partial_n(b_n - \widehat{b}_n) = f_{n-1}(a_{n-1} - \widehat{a}_{n-1})$$

Como $b_n - \widehat{b}_n \in \operatorname{Nu} g_n = \operatorname{Im} f_n$ y por ser f_n inyectivo existe un único $a_n \in A_n$ tal que $b_n - \widehat{b}_n = f_n a_n$. Luego tenemos

$$f_{n-1}(a_{n-1} - \widehat{a}_{n-1}) = \partial_n f_n a_n = f_{n-1}\partial'_n a_n.$$

Por la inyectividad de f_{n-1}, se tiene $a_{n-1} - \widehat{a}_{n-1} = \partial'_n a_n \in \operatorname{Im}\partial'_n$.
Así esta bien definido el homomorfismo

$$Z_n(C) \to A_{n-1}/\operatorname{Im}\partial'_n.$$

Veamos que esta aplicación lleva $\operatorname{Im}\partial''_{n+1}$ en 0:
Sea $c_n \in \operatorname{Im}\partial''_{n+1} \subseteq C_n$, entonces existe $c_{n+1} \in C_{n+1}$ tal que $\partial''_{n+1}c_{n+1} = c_n$. Por ser g_n sobreyectiva, existe $b_{n+1} \in B_{n+1}$ tal que $g_{n+1}b_{n+1} = c_{n+1}$; luego

$$c_n = \partial''_{n+1}g_{n+1}b_{n+1} = g_n\partial_{n+1}b_{n+1}.$$

Como $g_n(\partial_{n+1}b_{n+1}) = c_n$ entonces

$$\partial_*(\overline{c_n}) = \overline{f_{n-1}^{-1}\underbrace{\partial_n\partial_{n+1}}_{0}b_{n+1}} = \overline{0}.$$

Sea $\overline{z} \in H_n(C)$, veamos que $f_{n-1}^{-1}\partial_n x$, donde $g_n(x) = z$, es un n-ciclo:

$$\partial'_{n-1}(f_{n-1}^{-1}\partial_n x) = \underbrace{\partial'_{n-1}\partial'_n}_{0} f_n^{-1}x = 0.$$

2. Veamos que la sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

- $\operatorname{Im} f_* \subseteq \operatorname{Nu} g_*$:

$$g_*f_* = (gf)_* = 0_* = 0.$$

- $\mathrm{Nu}\, g_* \subseteq \mathrm{Im}\, f_*$:
  Sea $\overline{z} \in \mathrm{Nu}\, g_* \Rightarrow g_*(\overline{z}) = \overline{g_n z} = 0$ entonces $g_n z \in \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}$, luego existe $c_{n+1} \in C_{n+1}$ tal que $g_n(z) = \partial''_{n+1} c_{n+1}$. Por ser g_{n+1} sobreyectivo existe $b_{n+1} \in B_{n+1}$ tal que $c_{n+1} = g_{n+1} b_{n+1}$. Luego se tiene que $g_n z = \partial''_{n+1} g_{n+1} b_{n+1} = g_n \partial_{n+1} b_{n+1}$, entonces $z - \partial_{n+1} b_{n+1} \in \mathrm{Nu}\, g_n = \mathrm{Im}\, f_n$, existiendo un único $a_n \in A_n$ tal que $z - \partial_{n+1} b_{n+1} = f_n a_n$, donde $\partial_n f_n a_n = \partial_n z - \underbrace{\partial_n \partial_{n+1}}_{0} b_{n+1}$.

  Por ser z un ciclo se tiene
  $$f_{n-1} \partial'_n a_n = \partial_n f_n a_n = 0$$
  Como f_{n-1} es inyectivo, $\partial'_n a_n = 0$, entonces $a_n \in \mathrm{Nu}\, \partial'_n = Z_n(A)$ y además
  $$f_*(\overline{a_n}) = \overline{f_n a_n} = \overline{z - \partial_{n+1} b_{n+1}} = \overline{z}.$$
- $\mathrm{Im}\, g_* \subseteq \mathrm{Nu}\, \partial$:
  Sea $\overline{z} \in H_n(B)$, denotemos $w = g_n(z)$. Luego
  $$\partial_* g_*(\overline{z}) = \partial_*(\overline{g_n z}) = \partial_*(\overline{w}) = \overline{f_{n-1}^{-1} \partial_n z},$$
  y por ser z un n-ciclo se tiene $\partial_* g_*(\overline{z}) = \overline{0}$.
- $\mathrm{Nu}\, \partial_* \subseteq \mathrm{Im}\, g_*$:
  Sea $\overline{z} \in \mathrm{Nu}\, \partial_*$, entonces $\partial_*(\overline{z}) = \overline{f_{n-1}^{-1} \partial_n x} = \overline{0}$, donde $g_n x = z$. Luego $f_{n-1}^{-1} \partial_n x \in \mathrm{Im}\, \partial'_n$ entonces existe $a_n \in A_n$ tal que $\partial'_n a_n = f_{n-1}^{-1} \partial_n x$. Entonces $\partial_n f_n a_n = f_{n-1} \partial'_n a_n = \partial_n x \Rightarrow \partial_n(x - f_n a_n) = 0$, obteniendo que $x - f_n a_n \in \mathrm{Nu}\, \partial_n$. Además
  $$g_*(\overline{x - f_n a_n}) = \overline{g_n(x - f_n a_n)} = \overline{g_n x - g_n f_n a_n} = \overline{g_n x} = \overline{z}.$$
- $\mathrm{Im}\, \partial_* \subseteq \mathrm{Nu}\, f_*$:
  Sea $\overline{w} \in \mathrm{Im}\, \partial_* \subseteq H_{n-1}(A)$ luego existe $\overline{z} \in H_n(C)$ tal que $\overline{w} = \partial_*(\overline{z}) = \overline{f_{n-1}^{-1} \partial_n x}$, con $g_n x = z$ entonces
  $$f_*(\overline{w}) = \overline{f_{n-1} w} = \overline{f_{n-1} f_{n-1}^{-1} \partial_n x}.$$
  Como $f_*(\overline{w}) \in H_{n-1}(B)$ se tiene
  $$f_*(\overline{w}) = \overline{\partial_n x} = \overline{0}.$$
- $\mathrm{Nu}\, f_* \subseteq \mathrm{Im}\, \partial_*$:
  Sea $\overline{z} \in \mathrm{Nu}\, f_*$ entonces $f_*(\overline{z}) = \overline{f_{n-1} z} = \overline{0}$. Luego $f_{n-1} z \in \mathrm{Im}\, \partial_n$, entonces existe $b_n \in B_n$ tal que $f_{n-1} z = \partial_n b_n$ luego
  $$\partial''_n g_n b_n = g_{n-1} \partial_n b_n = g_{n-1} f_{n-1} z = 0.$$

Denotemos por $w = g_n b_n \in \mathrm{Nu}\, \partial''_n$ luego se tiene

$$\partial_*(\overline{w}) = \overline{f_{n-1}^{-1}\partial_n b_n} = \overline{z}.$$

■

Corolario 1.3.10 (Naturalidad de ∂_*) *Consideremos el diagrama conmutativo de complejos con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "j"'] & B' \arrow[r, "q"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces f, g y h definen un morfismo de cadenas entre las secuencias largas en homología:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(B) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"] & H_n(C) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "h_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "j_*"] & H_n(B') \arrow[r, "q_*"] & H_n(C') \arrow[r, "\partial'_*"] & H_{n-1}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración: La exactitud de las filas es dada por el teorema (1.3.9). Los primeros cuadrados conmutan por ser H_n un funtor. Veamos la conmutatividad del tercer cuadrado:
Sea $\overline{z} \in H_n(C)$ entonces

$$f_*\partial_*(\overline{z}) = f_*(\overline{i_{n-1}^{-1}\partial_n x}) = \overline{f_{n-1}i_{n-1}^{-1}\partial_n x}, \text{ con } p_n(x) = z$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & B_{n+1} \arrow[rr, "p_{n+1}"] \arrow[dl, "\partial_{n+1}"'] \arrow[dd] & & C_{n+1} \arrow[dl, "\partial''_{n+1}"'] \arrow[dd, "h_{n+1}"] \\
 & A_n \arrow[rr, "i_n"] \arrow[dl, "\partial'_n"'] \arrow[dd] & & B_n \arrow[rr, "p_n"] \arrow[dl, "\partial_n"'] \arrow[dd, "g_n"] & & C_n \arrow[dd, "h_n"] & \\
A_{n-1} \arrow[rr, "i_{n-1}"] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & & B_{n-1} \arrow[dd, "g_{n-1}"] & & B'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dl, "\widehat{\partial}_{n+1}"'] & & C'_{n+1} \arrow[dl, "\widehat{\partial}''_{n+1}"'] \\
 & A'_n \arrow[rr] \arrow[dl, "\widehat{\partial}'_n"'] & & B'_n \arrow[rr, "q_n"] \arrow[dl, "\widehat{\partial}_n"'] & & C'_n \arrow[dl, "\widehat{\partial}''_n"'] & \\
A'_{n-1} \arrow[rr, "j_{n-1}"] & & B'_{n-1} \arrow[rr, "q_{n-1}"] & & C'_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

Del diagrama se tiene :

$$\begin{aligned}
&g_{n-1}i_{n-1} = j_{n-1}f_{n-1} \quad \Rightarrow \quad f_{n-1}i_{n-1}^{-1} = j_{n-1}^{-1}g_{n-1} \\
&g_{n-1}\partial_n = \widehat{\partial}_n g_n \\
&q_n g_n = h_n p_n
\end{aligned}$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}
f_*\partial_*(\overline{z}) &= \overline{f_{n-1}i_{n-1}^{-1}\partial_n x} = \overline{j_{n-1}^{-1}g_{n-1}\partial_n x} \\
&= \overline{j_{n-1}^{-1}\widehat{\partial}_n g_n x} = \overline{j_{n-1}^{-1}\widehat{\partial}_n y}, \text{ donde } y = g_n(x)
\end{aligned}$$

Como $q_n y = q_n g_n x = h_n p_n x = h_n z$ se tiene

$$f_*\partial_*(\overline{z}) = \partial_*(\overline{h_n z}) = \partial_* h_*(\overline{z}).$$

■

Definición 1.3.11 *Sea C el complejo de la forma*

$$C: \ \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

El complejo obtenido al suprimir M

$$C_M: \ \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

es llamado el complejo reducido de C.

Definición 1.3.12 *Un complejo de la forma*

$$C: \ \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

con $C_n = 0$ para $n < 0$, es llamado proyectivo si C_n es proyectivo para todo $n \geq 0$.

Definición 1.3.13 *Una resolución proyectiva de A es un complejo exacto*

$$P: \ \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

donde el complejo reducido P_A es proyectivo.

Lema 1.3.14 *Para todo módulo M existe una resolución proyectiva.*

Demostración: De (1.2.11) se tiene que para M existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_0 \xrightarrow{i_0} L_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

con L_0 proyectivo. Aplicando para N_0 el lema (1.2.11), existe la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{i_1} L_1 \xrightarrow{\phi_1} N_0 \longrightarrow 0$$

con L_1 proyectivo. Por inducción, para N_{n-1} se tiene por (1.2.11) que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_n \xrightarrow{i_n} L_1 \xrightarrow{\phi_n} N_{n-1} \longrightarrow 0$$

con L_n proyectivo. Así, sucesivamente tenemos:

$$\cdots \longrightarrow N_n \xrightarrow{i_n} L_1 \xrightarrow{\phi_n} N_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{i_1} L_1 \xrightarrow{\phi_1} N_0 \xrightarrow{i_0} L_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

Considerando $\partial_n = i_{n-1} \circ \phi_n$, $n \geq 1$, obtenemos la sucesión de módulos

$$\cdots \longrightarrow L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{\partial_2} L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\phi_0} M \qquad (1.2)$$

Como para cada $n \geq 1$ se tiene que i_n es un monomorfismo e ϕ_n epimorfismo, entonces

$$\mathrm{Nu}\,\partial_n = \mathrm{Nu}\,\phi_n = \mathrm{Im}\,i_n = \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$$

y

$$\phi_0 \circ \partial_1 = \phi_0 \circ (i_0 \circ \phi_1) = (\phi_0 \circ i_0) \circ \phi_1 = 0$$

luego la sucesión (1.2) es exacta. ■

Lema 1.3.15 *Para toda sucesión exacta corta de* Λ*-módulos*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \longrightarrow 0$$

se puede obtener el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r] \arrow[d] & P'_n \oplus P''_n \arrow[r] \arrow[d] & P''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P'_{n-1} \oplus P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d] & P'_1 \oplus P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas y las columnas son resoluciones proyectivas de A', A y A'' respectivamente.

Demostración: Por el lema (1.2.11) para los módulos A' y A'' existen las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow N'_0 \xrightarrow{i'} P'_0 \xrightarrow{\phi'} A' \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N''_0 \xrightarrow{i''} P''_0 \xrightarrow{\phi''} A'' \longrightarrow 0$$

donde $N'_0 = \mathrm{Nu}(\phi')$, $N''_0 = \mathrm{Nu}(\phi'')$ y P''_0, P''_0 son proyectivos .
Consideremos la inclusión $j_0 : P'_0 \to P'_0 \oplus P''_0$ dada por $j_0 : m'_0 \mapsto (m'_0, 0)$ y la proyección $\pi_0 : P'_0 \oplus P''_0 \to P''_0$ dada por $\pi_0 : (m'_0, m''_0) \mapsto m''_0$. Por (1.2.4) la sucesión

$$0 \longrightarrow P'_0 \xrightarrow{j_0} P'_0 \oplus P''_0 \xrightarrow{\pi_0} P''_0 \longrightarrow 0$$

es exacta corta.
Por ser P''_0 proyectivo existe un homomorfismo $\sigma : P''_0 \to A$ tal que $\psi \circ \sigma = \phi''$.
Se obtiene el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, "\varphi\circ\phi'"] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] \arrow[dl, "\sigma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Definimos:

$$\begin{aligned} \phi: \qquad P_0' \oplus P_0'' &\longrightarrow A \\ (x,y) &\longmapsto \varphi \circ \phi'(x) + \sigma(y). \end{aligned}$$

En el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "\phi'"] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\phi"] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por ser ϕ' y ϕ'' epimorfismos se tiene que ϕ es un epimorfismo. Además el diagrama conmuta, ya que se satisfacen:

$$\phi \circ j_0(x) = \phi(x,0) = \varphi \circ \phi'(x) + \sigma(0) = \varphi \circ \phi'(x)$$
$$\phi'' \circ \pi_0(x,y) = \phi''(y) = \psi \circ \sigma(y) = \underbrace{(\psi \circ \varphi)}_{0} \circ \phi'(x) + \psi \circ \sigma(y)) = \psi \circ \phi(x,y).$$

Veamos que $j_0(\mathrm{Nu}(\psi')) \subseteq \mathrm{Nu}(\psi)$:
Sea $x \in \mathrm{Nu}(\psi')$, entonces $\psi'(x) = 0$. Calculemos

$$\psi \circ j_0(x) = \varphi \circ \psi'(x) = \varphi(0) = 0$$

entonces $j_0(x) \in \mathrm{Nu}(\psi)$.
Veamos que $\pi_0(\mathrm{Nu}(\psi)) \subseteq \mathrm{Nu}(\psi'')$:
Sea $z \in \mathrm{Nu}(\psi)$, entonces $\psi(z) = 0$. Calculemos

$$\psi'' \circ \pi_0(z) = \phi \circ \psi'(x) = \phi(0) = 0$$

entonces $\pi_0(z) \in \mathrm{Nu}(\phi'')$.
Luego se tiene la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nu}(\phi') \xrightarrow{j_0} \mathrm{Nu}(\phi) \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Nu}(\phi'') \longrightarrow 0.$$

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\phi') \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "i'"] & \mathrm{Nu}(\phi) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "i"] & \mathrm{Nu}(\phi'') \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "\phi'"] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\phi"] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Para la siguiente sucesión exacta corta repetimos el proceso anterior:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nu}(\phi') \xrightarrow{j_0} \mathrm{Nu}(\phi) \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Nu}(\phi'') \longrightarrow 0,$$

se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\phi'_1) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "i'_1"] & \mathrm{Nu}(\phi_1) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "i_1"] & \mathrm{Nu}(\phi''_1) \arrow[r] \arrow[d, "i''_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\phi'_1"] & P'_1 \oplus P''_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi''_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\phi') \arrow[r, "j_0"] & \mathrm{Nu}(\phi) \arrow[r, "\pi_0"] & \mathrm{Nu}(\phi'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De manera inductiva, aplicamos el mismo proceso para la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nu}(\phi'_{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} \mathrm{Nu}(\phi_{n-1}) \xrightarrow{\pi_{n-1}} \mathrm{Nu}(\phi''_{n-1}) \longrightarrow 0,$$

se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\phi'_n) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "i'_n"] & \mathrm{Nu}(\phi_n) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "i_n"] & \mathrm{Nu}(\phi''_n) \arrow[r] \arrow[d, "i''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "\phi'_n"] & P'_n \oplus P''_n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & P''_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\phi'_{n-1}) \arrow[r, "j_{n-1}"] & \mathrm{Nu}(\phi_{n-1}) \arrow[r, "\pi_{n-1}"] & \mathrm{Nu}(\phi''_{n-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definimos

$$\partial'_n = i'_{n-1} \circ \phi'_n,$$
$$\partial_n = i_{n-1} \circ \phi_n,$$
$$\partial''_n = i''_{n-1} \circ \phi''_n,$$

para todo $n > 1$ y

$$\partial'_1 = i' \circ \phi'_1,$$
$$\partial_1 = i \circ \phi_1,$$
$$\partial''_1 = i'' \circ \phi''_1.$$

Obteniendo así el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_n"] & P'_n \oplus P''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & P''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_{n-1}"] & P'_{n-1} \oplus P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n-1}"] & P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & P'_{n-2} \oplus P''_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & P''_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_1"] & P'_1 \oplus P''_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1"] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

■

Teorema 1.3.16 (Teorema de comparación) *Sean dos complejos C, C' y $f : A \to A'$*

$$
\begin{tikzcd}
C : \ldots \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, dotted] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, dotted] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
C' : \ldots \arrow[r] & C'_2 \arrow[r, "\partial'_2"] & C'_1 \arrow[r, "\partial'_1"] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde en el primer complejo cada C_n es proyectivo y el segundo complejo es exacto. Entonces existe una aplicación de complejos $\overline{f} : C_A \to C'_{A'}$ tal que completando el diagrama esta conmuta. Además $\overline{f}$ es única salvo homotopías.

Demostración:

1. Existencia de $\overline{f}$:
   Demostraremos por inducción sobre n.

Si $n = 0$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_0 \arrow[r, dotted, "\varepsilon"] \arrow[dl, dashed, "\overline{f}_0"'] \arrow[d, "f\varepsilon"] & A \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "f"] & 0 \\
C_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como ε' es sobreyectivo y C_0 es proyectivo, existe una aplicación $\overline{f}_0 : C_0 \to C_0'$ tal que $\varepsilon' \overline{f}_0 = f\varepsilon$.
Para el paso inductivo consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\overline{f}_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "\overline{f}_{n-1}"] \\
C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Si mostramos que $\operatorname{Im}(\overline{f}_n \partial_{n+1}) \subset \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$ tendremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & C_{n+1} \arrow[dl, dashed, "\overline{f}_{n+1}"'] \arrow[d, "\overline{f}_n \partial_{n+1}"] & \\
C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por la proyectividad de C_{n+1} se tiene que existe $\overline{f}_{n+1} : C_{n+1} \to C'_{n+1}$ tal que $\partial'_{n+1} \overline{f}_{n+1} = \overline{f}_n \partial_{n+1}$.

2. Veamos $\operatorname{Im}(\overline{f}_n \partial_{n+1}) \subset \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$:
   Como el segundo complejo es exacto, se tiene que $\operatorname{Im} \partial'_{n+1} = \operatorname{Nu} \partial'_n$.
   Entonces es suficiente probar que $\partial'_n \overline{f}_n \partial_{n+1} = 0$.
   Por hipótesis inductiva tenemos que $\partial'_n \overline{f}_n = f'_{n-1} \partial_n$, luego:

$$\begin{aligned}
\partial'_n \overline{f}_n \partial_{n+1} &= (f'_{n-1} \partial_n) \partial_{n+1} \\
&= f'_{n-1} (\partial_n \partial_{n+1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. La unicidad de $\overline{f}$ salvo homotopías:
   Sea $h : C_A \to C_{A'}$ una segundo morfismo de complejos que satisface

$\varepsilon' h_0 = f\varepsilon$.
Construyamos la homotopía s por inducción.
Definamos $s_{-1} : C_{-1} \to C_0$ donde $s_{-1} = 0$ con $C_{-1} = 0$. Supongamos que hemos hallado $s_{-1}, s_0, s_1, \cdots .s_n$ de grado $+1$ tales que $\partial'_j s_j + s_{j-1}\partial_{j-1} = h_j - f_j$ para $j = 0, \cdots, n$.
Afirmamos que $\operatorname{Im}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n\partial_{n+1}) \subset \operatorname{Im}\partial'_{n+2}$, obteniéndose el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C_{n+1} \arrow[dl, dashed, "s_{n+1}"'] \arrow[d, "h_{n+1}-\overline{f}_{n+1}-s_n\partial_{n-1}"] & \\
C'_{n+2} \arrow[r, "\partial'_{n+2}"'] & \operatorname{Im}\partial'_{n+2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por ser C_{n+1} proyectivo, existe una aplicación $s_{n+1} : C_{n+1} \to C'_{n+2}$ que satisface $\partial'_{n+2}s_{n+1} = h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n\partial_{n+1}$.
Ahora demostraremos la inclusión $\operatorname{Im}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n\partial_{n+1}) \subset \operatorname{Im}\partial'_{n+2}$:
Por ser el segundo complejo exacto $\operatorname{Im}\partial'_{n+2} = \operatorname{Nu}\partial'_{n+1}$, es suficiente probar que $\partial'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n\partial_{n+1}) = 0$, luego:

$$\begin{aligned}
\partial'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n\partial_{n+1}) &= \partial'_{n+1}h_{n+1} - \partial'_{n+1}\overline{f}_{n+1} - \partial'_{n+1}s_n\partial_{n+1} \\
&= \partial'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1}) - \partial'_{n+1}s_n\partial_{n+1}
\end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva sabemos $\partial'_{n+1}s_n = h_n - \overline{f}_n - s_{n-1}\partial_n$ reemplazando en lo anterior:

$$\begin{aligned}
& \partial'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1}) - (h_n - \overline{f}_n - s_{n-1}\partial_n)\partial_{n+1} \\
= \; & \partial'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1}) - (h_n - \overline{f}_n)\partial_{n+1} - s_{n-1}\underbrace{\partial_n\partial_{n+1}}_{0} \\
= \; & \partial'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1}) - (h_n - \overline{f}_n)\partial_{n+1} \\
= \; & \underbrace{\partial'_{n+1}h_{n+1} - h_n\partial_{n+1}}_{0} + \underbrace{\partial'_{n+1}\overline{f}_{n+1} - \overline{f}_n\partial_{n+1}}_{0} \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

■

Definición 1.3.17 *Si $\phi : C_A \to C_{A'}$ es un morfismo de complejos tal que*

$$f\varepsilon = \varepsilon'\phi_0$$

diremos que ϕ es un morfismo de complejos sobre f.

1.4. Funtores Derivados

Dado un funtor aditivo T describiremos el funtor derivado L_nT para cada módulo A, donde C es una de todas las resoluciones proyectivas de A y C_A su correspondiente complejo reducido .

Definición 1.4.1 *Para cada módulo A*

$$(L_nT)A := H_n(TC_A) = \frac{\operatorname{Nu} T\partial_n}{\operatorname{Im} T\partial_{n+1}}.$$

Para completar la definición de L_nT, describiremos su acción sobre $f : A \to B$, con C una resolución proyectiva de A y C' una resolución proyectiva de B.

$$\begin{tikzcd}
C: & \cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, dotted, "f_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, dotted, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"] & 0 \\
C': & \cdots \arrow[r] & C'_2 \arrow[r, "\partial'_2"] & C'_1 \arrow[r, "\partial'_1"] & C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el teorema de comparación, existe un morfismo de complejos $\overline{f} : C_A \to C'_B$ sobre f. Definimos $(L_nT)(f) : (L_nT)A \to (L_nT)B$ por

$$(L_nT)(f) = H_n(T\overline{f}) = (T\overline{f})_*$$

Teorema 1.4.2 *Dado un funtor T aditivo, entonces L_nT es un funtor aditivo para todo n.*

Demostración:
Veamos que $(L_nT)(f)$ esta bien definida para $f : A \to B$.
Supongamos que existe otro morfismo de complejos $f' : C_A \to C'_B$ sobre f. Por el teorema de comparación se tiene que $\overline{f}$ y $\overline{f'}$ son homotópicos, de ello existe una homotópia s tal que

$$\overline{f'}_n - \overline{f}_n = \partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n.$$

Aplicando el funtor aditivo T se tiene

$$T(\overline{f'}_n - \overline{f}_n) = T(\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n)$$

$$T\overline{f'}_n - T\overline{f}_n = T\partial'_{n+1}Ts_n + Ts_{n-1}T\partial_n$$

obteniéndose que Ts es una homotopía entre $T\overline{f}$ y $T\overline{f'}$, luego del lema (1.3.4) tenemos que

$$(T\overline{f})_* = (T\overline{f'})_*.$$

Para probar que L_nT es un funtor, probaremos sólo una de las condiciones; las demás se dejan para el lector.

Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismos de complejos; por ser T y H_n funtores, se tiene que:

$$\begin{aligned}(L_nT)(g \circ f) &= H_n(T\overline{g \circ f}) = H_n(T\overline{g} \circ \overline{f}) \\ &= H_n(T\overline{g} \circ T\overline{f}) = H_n(T\overline{f}) \circ H_n(T\overline{g}) \\ &= (L_nT)(g) \circ (L_nT)(f).\end{aligned}$$

Para probar que (L_nT) es aditivo, consideremos $f, g : A \to B$ morfismos de módulos. Se verifica que $\overline{f+g}$ es un morfismo de complejos sobre $f+g$, es decir $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$. Por ser H_n un funtor aditivo se tiene que:

$$\begin{aligned}(L_nT)(f+g) &= H_n(T\overline{f+g}) = H_n(T(\overline{f}+\overline{g})) \\ &= H_n(T\overline{f} + T\overline{g}) = H_n(T\overline{f}) + H_n(T\overline{g}) \\ &= (L_nT)(f) + (L_nT)(g).\end{aligned}$$

■

Vemos hasta ahora que L_nT depende de la resolución proyectiva elegida. Consideremos otra resolución proyectiva de A

$$\widehat{P}_A : \cdots \longrightarrow \widehat{P}_2 \xrightarrow{d_2'} \widehat{P}_1 \xrightarrow{d_1'} \widehat{P}_0 \xrightarrow{d_0'} A \longrightarrow 0$$

obteniendo el funtor $\widehat{L_n}T$ denotado así provisionalmente. Mostraremos que L_nT y $\widehat{L_n}T$ son esencialmente los mismos.

Teorema 1.4.3 *Para todo funtor aditivo T, los funtores derivados L_nT y $\widehat{L_n}T$ son naturalmente equivalentes. Es decir, son independientes de la resolución proyectiva de A elegida.*

Demostración: Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P : \cdots \arrow[r] \arrow[d, bend right, "i"'] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\ \widehat{P} : \cdots \arrow[r] & \widehat{P}_2 \arrow[r, "d_2'"] & \widehat{P}_1 \arrow[r, "d_1'"] & \widehat{P}_0 \arrow[r, "d_0'"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde la fila superior es la resolución proyectiva de A usada para definir L_nT y la fila inferior es usada para definir $\widehat{L_n}T$. Por el teorema de comparación existe un morfismo de complejos $i : P_A \longrightarrow \widehat{P}_A$ sobre 1_A (salvo homotopías).

Aplicando el funtor T se obtiene la una aplicación $Ti : TP_A \longrightarrow T\widehat{P}_A$ sobre 1_{TA}, esta induce una aplicación (para cada n)

$$\tau_A = (Ti)_* : (L_nT)A \longrightarrow (\widehat{L}_nT)A.$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widehat{P} : \cdots \arrow[r] \arrow[d, bend right, "j"'] & \widehat{P}_2 \arrow[r, "d'_2"] & \widehat{P}_1 \arrow[r, "d'_1"] & \widehat{P}_0 \arrow[r, "d'_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
P : \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

por el teorema de comparación obtenemos una aplicación $j : \widehat{P}_A \longrightarrow P_A$ sobre 1_A. Aplicando el funtor T se obtiene la aplicación $Tj : T\widehat{P}_A \longrightarrow TP_A$ sobre 1_{TA}, esta induce una aplicación (para cada n)

$$\widehat{\tau}_A = (Tj)_* : (\widehat{L}_nT)A \longrightarrow (L_nT)A.$$

Como las composiciones $ji : P_A \longrightarrow P_A$ y $1_{P_A} : P_A \longrightarrow P_A$ son morfismos de complejos sobre 1_A, por el teorema de comparación se tiene que ji y 1_{P_A} son homotópicas, entonces $1 = (1_{\widehat{P}_A})_* = (ji)_* = j_*i_*$. De manera análoga obtenemos $i_*j_* = (1_{P_A})_* = 1$; es decir que i_* es un isomorfismo.
Además se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & = & (T1)_* & = & (Tij)_* & = & (TiTj)_* & = & (Ti)_*(Tj)_* & = & \tau_A\widehat{\tau}_A \\
1 & = & (T1)_* & = & (Tji)_* & = & (TjTi)_* & = & (Tj)_*(Ti)_* & = & \widehat{\tau}_A\tau_A
\end{array}$$

de ello se tiene $\tau_A = (Ti)_*$ es un isomorfismo.
Veamos que el isomorfismo τ_A constituye una transformación natural. Sea $f : A \to B$ un morfismo de módulos; veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(L_nT)A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "(L_nT)f"'] & (\widehat{L}_nT)A \arrow[d, "(\widehat{L}_nT)f"] \\
(L_nT)B \arrow[r, "\tau_B"] & (\widehat{L}_nT)B
\end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P : \arrow[d, bend right, "i"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\widehat{P} : \arrow[d, bend right, "\overline{f}"'] & \cdots \arrow[r] & \widehat{P}_1 \arrow[r] & \widehat{P}_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\widehat{Q} : & \cdots \arrow[r] & \widehat{Q}_1 \arrow[r] & \widehat{Q}_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donde P y $\widehat{P}$ resoluciones proyectivas de A y $\widehat{Q}$ una resolución proyectiva de B. Aplicando el teorema de comparación se tiene los morfismos de complejos $i : P_A \to \widehat{P}_A$ sobre 1_A, $\overline{f} : \widehat{P}_A \to \widehat{Q}_B$ sobre f.
Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P: \arrow[d, bend right, "\widehat{f}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
Q: \arrow[d, bend right, "j"'] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
\widehat{Q}: & \cdots \arrow[r] & \widehat{Q}_1 \arrow[r] & \widehat{Q}_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el teorema de comparación se obtiene el morfismo de complejos $\widehat{f} : P_A \to Q_B$ sobre f, como consecuencia del teorema de comparación se tiene que $\overline{f}$ y $\widehat{f}$ son homotópicas. Además los morfismos $\overline{f}i$ sobre $f1_A = f$ y $j\widehat{f}$ sobre $1_B f = f$ son homotópicos. Luego se tiene:

$$(L_nT)(f1_A) = (L_nT)(f) = (L_nT)(1_Bf)$$

Como

$$(L_nT)(f1_A) = H_n(T\overline{f}i) = H_n(T\overline{f}Ti) = H_n(T\overline{f})H_n(Ti) = L_nT(f)\tau_A$$

y

$$(L_nT)(1_Bf) = H_n(Tj\widehat{f}) = H_n(TjT\widehat{f}) = H_n(Tj)H_n(T\widehat{f}) = \tau_B L_nT(f)$$

entonces $L_nT(f)\tau_A = \tau_B L_nT(f)$. ■

Definición 1.4.4 *Para el funtor $G = -\otimes_\Lambda B$ definimos $Tor_n^\Lambda(-, B) := L_nG$. En particular*

$$Tor_n^\Lambda(A, B) = \frac{\mathrm{Nu}(\partial_n \otimes 1)}{\mathrm{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1)}$$

donde

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de A.

Por (1.4.3) la definición de $Tor_n^\Lambda(A, B)$ es independiente de la resolución proyectiva de A elegida.

Definición 1.4.5 *Para el funtor* $F = B\otimes_\Lambda -$ *definimos* $\overline{Tor}_n^\Lambda(B,-) := L_nF$. *En particular*

$$\overline{Tor}_n^\Lambda(B,A) = \frac{\mathrm{Nu}(1\otimes\partial_n)}{\mathrm{Im}(1\otimes\partial_{n+1})}$$

donde

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de A.

Por (1.4.3) la definición de $\overline{Tor}_n^\Lambda(A,B)$ es independiente de la resolución proyectiva de A elegida.

Observación 1.4.6 *Para cada* Λ*-bimódulo* A *la aplicación* $\tau_A : (L_nG)A \to (L_nF)A$ *definida por* $\overline{a\otimes b} \mapsto \overline{b\otimes a}$ *es un isomorfismo, es decir,* $Tor_n^\Lambda(A,B) \cong \overline{Tor}_n^\Lambda(B,A)$.

- *Veamos que* τ_A *es inyectiva:*
  Sea $\overline{a\otimes b} \in (L_nG)A = Tor_n^\Lambda(A,B)$ *tal que* $\tau_A(\overline{a\otimes b}) = \overline{b\otimes a} = \overline{0\otimes 0}$, *entonces* $b\otimes a \in \mathrm{Im}(1\otimes\partial_{n+1})$, *por lo que existe* $x\otimes y \in A\otimes_\Lambda P_{n+1}$ *tal que* $b\otimes a = (1\otimes\partial_{n+1})(x\otimes y) = 1x\otimes\partial_{n+1}y = x\otimes\partial_{n+1}y \in A\otimes_\Lambda P_n$, *por ser* $P_n\otimes_\Lambda A \cong A\otimes_\Lambda P_n$ *se tiene que* $a\otimes b = \partial_{n+1}y\otimes 1x = (\partial_{n+1}\otimes 1)(y\otimes x)$. *Por lo que* $a\otimes b \in \mathrm{Im}(\partial_{n+1}\otimes 1)$, *entonces* $\overline{a\otimes b} = \overline{0\otimes 0}$.

- *Veamos que* τ_A *es sobreyectiva:*
  Sea $x\otimes y \in \mathrm{Nu}(1\otimes\partial_n)$ *entonces* $(1\otimes\partial_n)(x\otimes y) = 1x\otimes\partial_n y = 0\otimes 0$, *por ser* $A\otimes_\Lambda P_n \cong P_n\otimes_\Lambda A$ *se tiene* $\partial_n y\otimes x = (\partial_n\otimes 1)(y\otimes x) = 0\otimes 0$ *entonces* $y\otimes x \in \mathrm{Nu}(\partial_n\otimes 1)$. *Luego* $\overline{y\otimes x} \in (L_nG)A$ *tal que* $\tau_A(\overline{y\otimes x}) = \overline{x\otimes y}$.

Teorema 1.4.7 *Sea* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de* Λ*-módulos y* M *un* Λ*-módulo derecha entonces para cada* n *se tiene:*

$$Tor_n^\Lambda(M,A) \cong Tor_n^\Lambda(M,A') \oplus Tor_n^\Lambda(M,A'').$$

Demostración: Para la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

por (1.3.15) existe el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r] \arrow[d] & P'_n \oplus P''_n \arrow[r] \arrow[d] & P''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P'_{n-1} \oplus P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d] & P'_1 \oplus P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas y las columnas son resoluciones proyectivas de A', A y A'' respectivamente.
Denotaremos por $P'_{A'}$, P_A, $P''_{A''}$ las resoluciónes proyectivas reducidas de A', A y A'' respectivamente. Se obtiene la sucesión exacta corta de cadenas

$$0 \longrightarrow P'_{A'} \xrightarrow{\ i\ } P_A \xrightarrow{\ \pi\ } P''_{A''} \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

escindible, ya que la inclusión de cadenas $i' : P''_{A''} \to P_A$ satisface $\pi \circ i' = 1_{P''_{A''}}$.
Aplicamos el funtor $T = M \otimes_\Lambda -$ a la sucesión exacta corta (4.8) se obtiene la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow TP'_{A'} \xrightarrow{\ Ti\ } TP_A \xrightarrow{\ T\pi\ } TP''_{A''} \longrightarrow 0.$$

que es también escindible, pues $T\pi \circ Ti' = T(\pi \circ i') = T(1_{P''_{A''}}) = 1_{TP''_{A''}}$ entonces por el teorema (1.2.7) se tiene que

$$TP_A \cong TP'_{A'} \oplus TP''_{A''}.$$

Por (1.3.2) se tiene:

$$H_n(TP_A) \cong H_n(TP'_{A'} \oplus TP''_{A''}) \cong H_n(TP'_{A'}) \oplus H_n(TP''_{A''})$$

Es decir:

$$L_nT(A) \cong L_nT(A') \oplus L_nT(A'')$$

Equivalentemente

$$Tor_n^\Lambda(M, A) \cong Tor_n^\Lambda(M, A') \oplus Tor_n^\Lambda(M, A'')$$

■

Corolario 1.4.8 *Sean A', $A'' \in {}_\Lambda\mathfrak{M}$ y $M \in \mathfrak{M}_\Lambda$, entonces*

$$Tor_n^\Lambda(M, A' \oplus A'') \cong Tor_n^\Lambda(M, A') \oplus Tor_n^\Lambda(M, A'').$$

Demostración: Aplicamos (1.4.7) a la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A' \oplus A'' \longrightarrow A' \longrightarrow 0.$$

■

1.5. Extensión para Álgebras sin unidad

Existe una manera estándar de extender un funtor T definido sobre la categoría de álgebras con unidad con valores en grupos abelianos a la categoría de álgebras (no necesariamente con unidad), siempre y cuando T conmute con el producto.
Sea A una k-álgebra sin unidad, podemos formar una k-álgebra con unidad $A_+ = k \oplus A$, que es un k-módulo y con una estructura de multiplicación dada por

$$(\lambda, u)(\mu, v) = (\lambda\mu, \lambda v + u\mu + uv)$$

donde la unidad es $(1, 0)$, se acostumbra a escribir $\lambda \cdot 1 + u$ en vez de (λ, u).
Por definición la extensión de T a k-álgebras sin unidad está dada por

$$T(A) := \text{Conúcleo}(T(k) \longrightarrow T(A_+)).$$

Supongamos que T conmuta con el producto de álgebras con unidad A y A'; es decir la aplicación $T(A \times A') \longrightarrow T(A) \times T(A')$ inducida por las dos proyecciones es un isomorfismo. Para un álgebra unitaria A tenemos el isomorfismo de álgebras con unidad

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & A_+ & \longrightarrow & k \times A \\ & \lambda \cdot 1 + u & \longmapsto & (\lambda, \lambda \cdot 1_A + u) \end{array}$$

por lo tanto $A_+ \cong k \times A$. Sean las inclusiones canónicas $i_k : k \to k \times A$, $i_A : A \to k \times A$, por ser $T(k) \times T(A)$ isomorfo a $T(k \times A)$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T(k) \arrow[dr, "i_{T(k)}"'] \arrow[drr, "T(i_k)"] & & \\
& T(k) \times T(A) \arrow[r, "\cong"] & T(k \times A) \\
T(A) \arrow[ur, "i_{T(A)}"] \arrow[urr, "T(i_A)"'] & &
\end{tikzcd}$$

obteniéndose el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(k) \arrow[r, "="] \arrow[d, "i_{T(k)}"'] & T(k) \arrow[d, "T(i_k)"] \\
T(k) \times T(A) \arrow[r, "\cong"] & T(k \times A)
\end{tikzcd}$$

de donde se obtiene

$$\text{Conúcleo}(T(k) \longrightarrow T(A_+)) \cong \text{Conúcleo}(T(k) \longrightarrow T(k) \times T(A)) \cong T(A)$$

Por lo tanto la nueva definición de T como Conúcleo coincide con la definición original de T para álgebras con unidad.

Capítulo 2

Homología de Hochschild

En lo que resta del capítulo, k es un anillo conmutativo con unidad y A es una k-álgebra asociativa con unidad. Salvo mención contraria, el producto tensorial es denotado por $\otimes$, y se efectúa sobre el anillo k.

2.1. Bimódulo

Definición 2.1.1 *Un bimódulo M sobre A es un A-módulo a derecha y a izquierda que cumple:*

- $(am)a' = a(ma')$, $\forall\, a, a' \in A\ \forall\, m \in M$.
- $(\lambda a)m = \lambda(am) = a(\lambda m)\ \forall\, \lambda \in K$, $\forall\, a \in A$, $\forall\, m \in M$

Se denota A^{op} a la k-álgebra para la cual el k-módulo subyacente es A y la multiplicación en A^{op} verifica

$$a.b = ba$$

Se tiene una estructura de k-álgebra asociativa sobre $A \otimes A^{op}$.

Proposición 2.1.2
1. *Todo A-bimódulo M puede ser provisto de una estructura de $A \otimes A^{op}$-módulo a derecha (respectivamente a izquierda).*
2. *Todo $A \otimes A^{op}$-módulo a derecha (respectivamente a izquierda) puede ser provisto de una estructura de bimódulo sobre A.*

Demostración:

1. Definiendo sobre los tensores elementales la siguiente aplicación

$$m(a \otimes a') = a'ma$$

se prueba fácilmente que el A-bimódulo M posee una estructura de $A \otimes A^{op}$-módulo a derecha. De la misma manera se demuestra que M posee una estructura de $A \otimes A^{op}$-módulo a izquierda mediante la siguiente aplicación

$$(a \otimes a')m = ama'$$

2. Sea M un $A \otimes A^{op}$-módulo a derecha, definiremos la estructura de bimódulo sobre M a través de las siguientes operaciones

$$ma = m(a \otimes 1)$$

$$am = m(1 \otimes a)$$

■

Observación 2.1.3 *Para $M = A$ el producto nos provee una estructura de A-bimódulo, de allí obtenemos una estructura de $A \otimes A^{op}$-módulo a derecha y a izquierda sobre A.*

2.2. Complejo de Hochschild

Sea M un A-bimódulo, para $n \geq 0$ se considera el k-módulo

$$C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$$

(donde $\otimes = \otimes_k$ y $A^{\otimes n} = A \otimes A \ldots \otimes A$, n veces) y la aplicación k-lineal

$$b_n : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M), \quad \text{si} \quad n \geq 1$$

dada por:

$$\begin{aligned} b_n(m \otimes a_1 \otimes a_2 \ldots \otimes a_n) &= ma_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n + \\ & (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

donde $m \in M$ y $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$.

Lema 2.2.1 *$b_n \circ b_{n+1} = 0$, $\forall\, n$.*

Demostración: Definamos para cada $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq n-1$ los operadores

$$M \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{d_i^n} M \otimes A^{\otimes n-1} \xrightarrow{d_j^{n-1}} M \otimes A^{\otimes n-2}$$

dados por

$$d_i^n(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \begin{cases} ma_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n, & i = 0 \\ m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n, & 1 \leq i < n \\ a_n m \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}, & i = n \end{cases}$$

con esta notación tenemos

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$$

de ello tenemos:

$$\begin{aligned} b_{n-1} \circ b_n &= (\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j d_j^{n-1}) \circ (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} d_j^{n-1} \circ d_i^n \end{aligned}$$

Afirmación 2.2.1.1 *Para $j < i$ se tiene $d_j^{n-1} \circ d_i^n = d_{i-1}^{n-1} \circ d_j^n$.*

Demostraremos la afirmación sobre los tensores elementales, siendo estos de la forma $a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ donde $a_0 \in M$ y $a_i \in A$ para $1 \leq i \leq n$. Consideremos los siguientes casos:

I: $0 \leq j < i$ e $i < n$

- $j < i - 1$

$$\begin{aligned} d_j^{n-1} \circ d_i^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_j^{n-1}(d_i^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\ &= d_j^{n-1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{i-1}^{n-1} \circ d_j^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_{i-1}^{n-1}(d_j^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\ &= d_{i-1}^{n-1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \end{aligned}$$

- $j = i - 1$

$$\begin{aligned} d_j^{n-1} \circ d_i^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_{i-1}^{n-1}(d_i^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\ &= d_{i-1}^{n-1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}(a_i a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{i-1}^{n-1} \circ d_j^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_{i-1}^{n-1}(d_{i-1}^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\ &= d_{i-1}^{n-1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} a_i \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= a_0 \otimes \ldots \otimes (a_{i-1} a_i) a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \end{aligned}$$

II: $0 \leq j < i$ y $i = n$

- $j < n - 1$

$$\begin{aligned} d_j^{n-1} \circ d_n^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_j^{n-1}(d_n^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\ &= d_j^{n-1}(a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}) \\ &= a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{n-1}^{n-1} \circ d_j^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_{n-1}^{n-1}(d_j^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\ &= d_{n-1}^{n-1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= a_n a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

- $j = n - 1$

$$\begin{aligned} d_j^{n-1} \circ d_n^n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_{n-1}^{n-1}(d_n^n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes a_n)) \\ &= d_{n-1}^{n-1}(a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}(a_n a_0) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{n-1}^{n-1} \circ d_j^n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) &= d_{n-1}^{n-1}(d_{n-1}^n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes a_n)) \\ &= d_{n-1}^{n-1}(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-2} \otimes a_{n-1} a_n) \\ &= (a_{n-1} a_n) a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-2} \end{aligned}$$

De ello tenemos:

$$\begin{aligned}
b_{n-1}\circ b_n &= \sum_{i=0}^{n}[\sum_{j<i}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n + \sum_{j\geq i}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n]\\
&= \sum_{i=0}^{n}[\sum_{j<i}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n] + \sum_{i=0}^{n}[\sum_{j\geq i}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n]\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n] + \sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n]\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}d_{i-1}^{n-1}\circ d_j^n] + \sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n].
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable en la primera parte de la suma tenemos

$$\begin{aligned}
b_{n-1}\circ b_n &= \sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^{k+j+1}d_k^{n-1}\circ d_j^n] + \sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n]\\
&= -\sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^{k+j}d_k^{n-1}\circ d_j^n] + \sum_{j=0}^{n-1}[\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}d_j^{n-1}\circ d_i^n].
\end{aligned}$$

Los términos de la primera parte se cancelan con los términos de la segunda parte, con ello demostramos el lema. ■

Definición 2.2.2 *El complejo $(C_*(A,M),b)$ es llamado* ***Complejo de Hochschild*** *de A con coeficientes en M. La aplicación b es llamada el* ***borde de Hochschild****.*

En el caso $M = A$ el complejo de Hochschild $C_*(A) = (C_*(A,A),b)$ es llamado complejo de Hochschild de A.

Definición 2.2.3 *La Homología del complejo $(C_*(A,M),b)$ es llamada la Homología de Hochschild de A con coeficientes en M y se denota por*

$$H_*(A,M) = \bigoplus_{n\geq 0} H_n(A,M)$$

donde

$$H_n(A,M) = H_n(C_*(A,M),b)$$

Observación 2.2.4

- *Si $M = A$, escribiremos $HH_*(A) = H_*(A,A) = (HH_n(A))$ y la llamamos Homología de Hochschild de A.*

- *Si A es conmutativo, cada $H_n(A, M)$ es un A-módulo.*

Lema 2.2.5 *Sean $g : A \to A'$ un morfismo de k-álgebras asociativas y $f : M \to M'$ un morfismo de A'-bimódulos. Estos inducen el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} C_n(A,M) \arrow[r] \arrow[d, "b_n"'] & C_n(A',M') \arrow[d, "b_n"] \\ C_{n-1}(A,M) \arrow[r] & C_{n-1}(A',M') \end{tikzcd}$$

Por lo tanto tenemos una aplicación de k-módulos graduados

$$h_* : \quad \begin{array}{ccc} H_n(A,M) & \longrightarrow & H_n(A',M') \\ \overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n} & \longmapsto & \overline{f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_n)} \end{array} .$$

Demostración: Por medio de g se puede dar a M y M' una estructura de A- bimódulos mediante las aplicaciones:

$$a \cdot m = g(a)m \qquad m \cdot a = mg(a)$$

$$a \cdot m' = g(a)m' \qquad m' \cdot a = m'g(a)$$

Además:

$$f(a \cdot m) = f(g(a)m) = g(a)f(m)$$
$$f(m \cdot a) = f(mg(a)) = f(m)g(a)$$

Luego el morfismo de $f : M \to M'$ de A-bimódulos y $g : A \to A'$ induce el morfismo de complejos $h : (C(A,M), b) \to (C(A',M'), b)$ mediante

$$h_n : \quad \begin{array}{ccc} C_n(A,M) & \longrightarrow & C_n(A',M') \\ m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \longmapsto & f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_n) \end{array} .$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C_n(A,M) \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "b_n"'] & C_n(A',M') \arrow[d, "b_n"] \\ C_{n-1}(A,M) \arrow[r, "h_{n-1}"'] & C_{n-1}(A',M') \end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
b_n \circ h_n(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= b_n[h_n(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)] \\
&= b_n\Big(f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_n)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i\Big(f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_n)\Big) \\
&= f(m)g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_n) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \Big(f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_i)g(a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes g(a_n)\Big) + \\
&\quad (-1)^n g(a_n)f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_{n-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{n-1} \circ b_n(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= h_{n-1}[b_n(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)] \\
&= h_{n-1}\Big[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_{n-1} \circ d_i(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \\
&= f(m \cdot a_1) \otimes g(a_2) \otimes \ldots \otimes g(a_n) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \Big(f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_i a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes g(a_n)\Big) + \\
&\quad (-1)^n f(a_n \cdot m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_{n-1}) \\
&= f(m)g(a_1) \otimes g(a_2) \otimes \ldots \otimes g(a_n) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \Big(f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_i)g(a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes g(a_n)\Big) + \\
&\quad (-1)^n g(a_n)f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_{n-1})
\end{aligned}
$$

Esto induce una aplicación de k-módulos graduados

$$
\begin{array}{rccc}
h_* : & H_n(A, M) & \longrightarrow & H_n(A', M') \\
& \overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n} & \longmapsto & \overline{f(m) \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_n)}
\end{array}
.
$$

■

Proposición 2.2.6 *Para cada n, $H_n(A, -)$ es un funtor covariante.*

Demostración: Consideremos $f : M \to M'$ un morfismo de A-bimódulos y $g = Id : A \to A$ en el lema (2.2.5). Estos inducen un morfismo de complejos

$\overline{f} : (C(A,M),b) \to (C(A,M'),b)$ y la aplicación de k-módulos graduados

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}_* : & H_n(A,M) & \longrightarrow & H_n(A,M') \\ & \overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n} & \longmapsto & \overline{f(m) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n} \end{array}.$$

Sean $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$ morfismos de A-bimódulos, se tiene que

$$\begin{aligned} (\overline{gf})_*(\overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n}) &= \overline{gf(m) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n} \\ &= \overline{g}_*(\overline{f(m) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n}) \\ &= \overline{g}_*\overline{f}_*(\overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n}). \end{aligned}$$

■

Proposición 2.2.7 *Para cada n, $H_n(-,M)$ es un funtor covariante.*

Demostración: Consideremos $f = Id : M \to M$ y el morfismo de k-álgebras $g : A \to A'$, en el lema (2.2.5). Se tiene una aplicación de k-módulos graduados

$$\begin{array}{cccc} \overline{g}_* : & H_n(A,M) & \longrightarrow & H_n(A',M) \\ & \overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n} & \longmapsto & \overline{m \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes g(a_n)} \end{array}.$$

Sean $A' \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ morfismos de k-álgebras y M un A''-bimódulo, se verifica que

$$\begin{aligned} (\overline{gf})_*(\overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n}) &= \overline{m \otimes gf(a_1) \otimes \ldots \otimes gf(a_n)} \\ &= \overline{g}_*(\overline{m \otimes f(a_1) \otimes \ldots \otimes f(a_n)}) \\ &= \overline{g}_*\overline{f}_*(\overline{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n}). \end{aligned}$$

■

Corolario 2.2.8 *HH_* es un funtor covariante de la categoría de k-álgebras asociativas con unidad a la categoría de k-módulos graduados.*

Demostración: Para este caso consideremos $A = M$, $A' = M'$ y el morfismo de k-álgebras $h : A \to A'$, por el lema (2.2.5) se tiene el morfismo de k-módulos graduados

$$\begin{array}{cccc} h_* : & HH_n(A) & \longrightarrow & HH_n(A') \\ & \overline{a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n} & \longmapsto & \overline{h(a_0) \otimes h(a_1) \otimes \ldots \otimes h(a_n)} \end{array}$$

Sean $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ morfismos de k-álgebras, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (gf)_*(\overline{a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n}) & = & \overline{gf(a_0) \otimes gf(a_1) \otimes \ldots \otimes gf(a_n)} \\ & = & g_*(\overline{f(a_0) \otimes f(a_1) \otimes \ldots \otimes f(a_n)}) \\ & = & g_* f_*(\overline{a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n}). \end{array}$$

■

Ejemplo 2.2.9 (Cálculo de $H_0(A, M)$) *Por definición* $C_0(A, M) = M$, $C_1(A, M) = M \otimes A$ *y* $b(m \otimes a) = ma - am$, *de ello tenemos que:*

$$H_0(A, M) = \frac{M}{\{ma - am / a \in A, m \in M\}}$$

Sea el k*-módulo* $[A, A] = \{aa' - a'a / a, a' \in A\}$, *los conmutadores de* A. *Tenemos que:*

$$HH_0(A) = \frac{A}{[A, A]}.$$

Ejemplo 2.2.10 *Si* A *es conmutativo, entonces* $HH_0(A) = A$.
Cuando $A = k$ *y por ser* $k^{\otimes n} \cong k$ *se tiene que*

$$b_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cong [1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i + (-1)^n] a_0 a_1 \cdots a_n$$

de ello se tiene

$$b_n = \begin{cases} 1, & n \text{ es par} \\ 0, & n \text{ es impar} \end{cases}$$

obteniendo el complejo de Hochschild para $M = k$

$$\cdots \longrightarrow k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} \cdots \longrightarrow k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k \,.$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} HH_0(k) & = & k, \\ HH_n(k) & = & \dfrac{\operatorname{Nu} b_n}{\operatorname{Im} b_{n+1}} = 0, \quad n > 0. \end{array}$$

2.3. Resolución Barra

Para cada $n \geq 0$ denotemos $C'_n(A) = A^{\otimes(n+2)}$; la cual posee una estructura de A-bimódulo con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \alpha(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) &= \alpha a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \\ (a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})\alpha' &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}\alpha' \end{aligned}$$

Además $C'_n(A)$ posee una estructura de $A \otimes A^{op}$-módulo con la siguiente operación:

$$(a \otimes a')(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = aa_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}a'.$$

Definimos la aplicación de $A \otimes A^{op}$-módulos $b'_n : C'_n(A) \to C'_{n-1}(A)$ como:

$$b'_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots a_{n+1}$$

utilizando las notaciones definidas en la demostración del lema (2.2.1) tenemos para $M = A$

$$A \otimes A^{\otimes n+1} \xrightarrow{d_i^{n+1}} A \otimes A^{\otimes n}$$

obteniéndose

$$b'_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^{n+1} : C'_n(A) \to C'_{n-1}(A).$$

Luego:

$$\begin{aligned} b'_{n-1} \circ b'_n &= (\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j d_j^n) \circ (\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^{n+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j} d_j^n \circ d_i^{n+1} \end{aligned}$$

procediendo de manera análoga a la demostración del lema (2.2.1) se tiene que $b'_{n-1} \circ b'_n = 0$. Definimos $\mu : C'_0 = A \otimes A \to A$ por $\mu(a \otimes a') = aa'$ si $a, a' \in A$.

Además para $b' : C'_1(A) \to C'_0(A)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mu b'(a_0 \otimes a_1 \otimes a_3) &= \mu[b'(a_0 \otimes a_1 \otimes a_3)] \\ &= \mu(a_0 a_1 \otimes a_3 - a_0 \otimes a_2 a_3) \\ &= \mu(a_0 a_1 \otimes a_3) - \mu(a_0 \otimes a_2 a_3) \\ &= (a_0 a_1)a_3 - a_0(a_2 a_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así,

$$C'_*(A): \qquad \cdots \xrightarrow{b'_2} C'_1(A) \xrightarrow{b'_1} C'_0(A) \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

es un complejo sobre A.

Proposición 2.3.1 *$(C'_*(A), b')$ es una resolución del $A \otimes A^{op}$-módulo A.*

Demostración: Vemos que el siguiente complejo es una resolución de A

$$C'_*(A): \qquad \cdots \xrightarrow{b'_2} C'_1(A) \xrightarrow{b'_1} C'_0(A) \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

para ello verificaremos que la homología del complejo es nula.
Construimos una homotopía contractante s de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s_{-1}: \qquad & A \longrightarrow C'_0(A) \\ & a \longmapsto 1 \otimes a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s_n: \qquad & C'_n(A) \longrightarrow C'_{n+1}(A) \\ & a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \longmapsto 1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

que verifican:

$$\mu s_{-1}(a) = \mu[s_{-1}(a)] = \mu(1 \otimes a) = 1a = Id_A(a)$$

$[s_{n-1}b'_n + b'_{n+1}s_n](a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$

$$\begin{aligned}
&= s_{n-1}[b'_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})] + b'_{n+1}[s_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})] \\
&= s_{n-1}[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1})] + b'_{n+1}(1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_{n-1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + b'_{n+1}(1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i 1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1} + b'_{n+1}(1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i 1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1} + a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} + \\
&\qquad \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}(1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i 1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1} + a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1})$$
$$= a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1} = Id_{C'_n(A)}(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Luego tenemos que $Id_* = 0_*$, entonces $Id_*(H_n(C_*)) = H_n(C_*) = 0_*(H_n(C_*))) = 0$, $\forall\, n$. ■

Definición 2.3.2 *$(C'_*(A), b')$ se llama la Resolución Barra o Resolución de Hochschild de A como $A\otimes A^{op}$-módulo.*

Lema 2.3.3 *Para todo A-bimódulo M los complejos $(M\otimes_{A\otimes A^{op}} C'_*(A), Id_M\otimes_{A\otimes A^{op}} b')$ y $(C_*(A,M), b)$ son isomorfos.*

Demostración: Definimos

$$\begin{array}{lrcl}\Theta: & M\otimes_{A\otimes A^{op}} C'_*(A) & \longrightarrow & C_*(A,M)\\ & m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) & \longmapsto & a_{n+1}ma_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\\ \Psi: & C_*(A,M) & \longrightarrow & M\otimes_{A\otimes A^{op}} C'_*(A)\\ & m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n & \longmapsto & m\otimes_{A\otimes A^{op}}(1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes 1)\end{array}$$

Probaremos

1. $\Psi\Theta = Id$, $\Theta\Psi = Id$.
2. $\Theta[Id\otimes_{A\otimes A^{op}} b']\Psi = b$.

El A-bimódulo M posee una estructura de $A\otimes A^{op}$-módulo a derecha con la siguiente operación:

$$m(a\otimes a') = a'ma$$

Para cada n y sobre los tensores elementales tenemos que se verifican:

$$\begin{aligned}\Psi\Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1})] &= \Psi(\Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1})])\\ &= \Psi[a_{n+1}ma_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n]\\ &= a_{n+1}ma_0\otimes_{A\otimes A^{op}}(1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes 1)\\ &= [m(a_0\otimes a_{n+1})]\otimes_{A\otimes A^{op}}(1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes 1)\\ &= m\otimes_{A\otimes A^{op}}[(a_0\otimes a_{n+1})(1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes 1)]\\ &= m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_01\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_{n+1}\cdot 1)\\ &= m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_{n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta\Psi[m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n] &= \Theta(\Psi[m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n])\\
&= \Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes 1)])]\\
&= 1m1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\\
&= m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta[Id\otimes_{A\otimes A^{op}} b'_n]\Psi(m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) &= \Theta[Id\otimes_{A\otimes A^{op}} b'_n[\Psi(m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n)]]\\
&= \Theta[Id\otimes_{A\otimes A^{op}} b'_n(m\otimes 1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes 1)]\\
&= \Theta[Id(m)\otimes_{A\otimes A^{op}} b'_n(1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes 1)]
\end{aligned}$$

Ponemos $a_0 = a_{n+1} = 1$.

$$\begin{aligned}
\Theta[Id\otimes_{A\otimes A^{op}} b'_n]\Psi(m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) &= \Theta[Id(m)\otimes_{A\otimes A^{op}} b'_n(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_{n+1})]\\
&= \Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1})]\\
&= \Theta[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1})]
\end{aligned}$$

esto es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&= \Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0a_1\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1})\\
&\qquad + m\otimes_{A\otimes A^{op}}((-1)^n a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n a_{n+1})]\\
&= \Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0a_1\otimes\ldots\otimes a_{n+1})] + \Theta[\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1})]\\
&\qquad + \Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}((-1)^n a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n a_{n+1})]\\
&= \Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0a_1\otimes\ldots\otimes a_{n+1})] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}(a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{n+1})]\\
&\qquad + \Theta[m\otimes_{A\otimes A^{op}}((-1)^n a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n a_{n+1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{n+1}ma_0a_1\otimes\ldots\otimes a_n \quad + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_{n+1}ma_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n\\
&\qquad + a_n a_{n+1}m(-1)^n a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}
\end{aligned}$$

reemplazando $a_0 = a_{n+1} = 1$ tenemos

$$\begin{array}{rll} = & 1m1a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & +\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i 1m1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \\ & & +(-1)^n a_n 1m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \\ = & ma_1 \otimes \ldots \otimes a_n & +\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \\ & & +(-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \\ = & b_n(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n). & \end{array}$$

■

Teorema 2.3.4 *Si el álgebra A es proyectiva sobre k, entonces para todo A-bimódulo M y para todo $n \geq 0$ se tiene los isomorfismos*

$$H_n(A, M) = Tor_n^{A\otimes A^{op}}(M, A)$$

Demostración:
Como A es k-proyectiva entonces $A^{\otimes n}$ es k-proyectivo. Demostraremos que $C'_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ es $A \otimes A^{op}$-proyectivo. Para esto consideramos el siguiente $A \otimes A^{op}$-homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} g: & A^{\otimes n} & \rightarrow & C'_n(A) \\ & x & \mapsto & 1 \otimes x \otimes 1 \end{array}$$

y una sucesión exacta de $A \otimes A^{op}$-módulos

$$C \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$

y además un $A \otimes A^{op}$-homomorfismo $f : C'_n(A) \rightarrow B$ tal que se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A^{\otimes n} \arrow[r, "g"] & C'_n(A) \arrow[d, "f"] & \\ & C \arrow[r, "\varepsilon"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como C, B son $A \otimes A^{op}$-módulos, también son k-módulos mediante la siguiente aplicación:

$$\lambda.x = (\lambda \otimes 1')x$$

Luego $f \circ g : A^{\otimes n} \to B$ es un k-homomorfismo, ya que verifica:

$$f \circ g(\alpha x) = f(1 \otimes \alpha x \otimes 1) = f(\alpha \otimes x \otimes 1) = f[(\alpha \otimes 1')(1 \otimes x \otimes 1)] = (\alpha \otimes 1')f(1 \otimes x \otimes 1) = \alpha . f \circ g(x)$$

Por ser $A^{\otimes n}$ k-proyectivo existe un k-homomorfismo $h : A^{\otimes n} \to C$ tal que $\varepsilon \circ h = f \circ g$.

$$\begin{tikzcd}
 & A^{\otimes n} \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f \circ g"] & \\
C \arrow[r, "\varepsilon"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definamos el $A \otimes A^{op}$-homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} H : & C'_n(A) & \to & C \\ & a \otimes x \otimes b & \mapsto & ah(x)b \end{array}$$

$$\begin{aligned} H[(a' \otimes b')(a \otimes x \otimes b)] &= H(a'a \otimes x \otimes bb') = (a'a)h(x)(bb') = a'(ah(x)b)b' \\ &= (a' \otimes b')(ah(x)b) = (a' \otimes b')H(a \otimes x \otimes b). \end{aligned}$$

H hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes n} \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "h"'] & C'_n(A) \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "H"] & \\
C \arrow[r, "\varepsilon"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon H(a \otimes x \otimes b) &= \varepsilon(ah(x)b) = a\varepsilon(h(x)b) = a\varepsilon(h(x))b = a\varepsilon h(x)b = afg(h)b \\ &= f(ag(x)b) = f(a(1 \otimes x \otimes b)a) = f(a \otimes x \otimes b) \end{aligned}$$

Entonces $C'_n(A)$ es $A \otimes A^{op}$-proyectivo. Luego $(C'_*(A), b')$ es una resolución $A \otimes A^{op}$-proyectiva de A.
Para el bimódulo M por (1.1.12) definimos el funtor aditivo $T = M \otimes_{A \otimes A^{op}} -$:

$$Tor_n^{A \otimes A^{op}}(M, A) = \frac{KerTb'_n}{ImTb'_{n+1}} = \frac{Ker(1 \otimes b'_n)}{Im(1 \otimes b'_{n+1})} = H_n(M \otimes_{A \otimes A^{op}} C'_*(A), 1 \otimes b').$$

Por el lema (2.3.3) $M \otimes_{A \otimes A^{op}} C'_*(A)$ es isomorfo a $C_*(A, M)$. Luego

$$H_n(M \otimes_{A \otimes A^{op}} C_*(A), 1 \otimes b') = H_n(C_*(A, M), b) = H_n(A, M).$$

■

2.4. Complejo de Hochschild Normalizado

Consideremos $C_n(A,M) = M \otimes A^{\otimes n}$ y $D_n \subset C_n(A,M)$ donde D_n es generado por

$$\{m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n / m \in M, a_i \in A \text{ tal que } \exists\, i \in \{1,\ldots,n\} \text{ con } a_i = 1\}$$

Veamos que $b(D_n) \subset D_{n-1}$

Sea $(m \otimes a_1 \otimes a_2 \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n) \in Dn$ tal que $1 \leq i \leq n$

1. Caso: $i = 1$

$$\begin{aligned} b_n(m \otimes 1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) &= m \cdot 1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n + \\ &\quad (-1)^1 m \otimes 1 \cdot a_2 \otimes \ldots \otimes a_n + \\ &\quad \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i m \otimes 1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n + \\ &\quad (-1)^n a_n m \otimes 1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \\ &= \underbrace{\sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i m \otimes 1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n +}_{\in D_{n-1}} \\ &\quad \underbrace{(-1)^n a_n m \otimes 1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}}_{\in D_{n-1}} \end{aligned}$$

2. Caso: $1 < i < n$

$b_n(m \otimes a_1 \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n) =$

$$\begin{aligned} &= m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n + \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n + \\ &\quad (-1)^{i-1} m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} \cdot 1 \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n + \\ &\quad (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \cdot a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n + \\ &\quad \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n + \\ &\quad (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \underbrace{m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n}_{\in D_{n-1}} + \\
& \underbrace{\sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n +}_{\in D_{n-1}} \\
& \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_n +}_{\in D_{n-1}} \\
& \underbrace{(-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \ldots a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \ldots \otimes a_{n-1}}_{\in D_{n-1}}
\end{aligned}
$$

3. Caso: $i = n$

$$
\begin{aligned}
b_n(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes 1) \quad = \quad & m a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes 1 + \\
& \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes 1 + \\
& (-1)^{n-1} m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-2} \otimes a_{n-1} \cdot 1 + \\
& (-1)^n 1 \cdot m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \\
= \quad & \underbrace{m a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes 1}_{\in D_{n-1}} + \\
& \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes 1}_{\in D_{n-1}}
\end{aligned}
$$

El complejo $\left(D_* = \bigoplus_{n \geq 0} D_n, b\right)$ es un subcomplejo de $(C_*(A, M), b)$.

Observación 2.4.1 *Denotando* $\overline{A} = \dfrac{A}{k}$ *se tiene que:*

$$
\overline{C_n}(A, M) = \frac{C_n(A, M)}{D_n} = \frac{M \otimes A^{\otimes n}}{D_n} \simeq M \otimes \overline{A}^{\otimes n}.
$$

Definición 2.4.2 $(\overline{C_*}(A, M), b)$ *es llamado el* ***Complejo de Hoshcshild Normalizado****.*

Proposición 2.4.3 *Para todo* n*,* $H_n(D_*, b) = 0$ *y la aplicación* $C_n(A, M) \longrightarrow \overline{C_n}(A, M)$ *es un casi-isomorfismo de complejos.*

Demostración: La prueba puede verse en [2, prop.1.1.15].■

Teorema 2.4.4 *Sean A' y A dos k-álgebras asociativas con unidad y k-proyectivas, entonces*

$$HH(A' \oplus A'') \cong HH(A') \oplus HH(A'').$$

Demostración: Denotamos por $B = A' \oplus A''$ y consideremos el anillo $\Lambda = B \otimes B^{op}$. Como A' y A'' son B-bimódulos con las operaciones definidas de la siguiente manera para $(a', a'') \in B$, $c' \in A'$ y $c'' \in A''$:

$$(a', a'') \cdot c' = a'c' \quad \text{y} \quad c' \cdot (a', a'') = c'a'$$

$$(a', a'') \cdot c'' = a''c'' \quad \text{y} \quad c \cdot (a', a'') = c''a'',$$

tenemos que A, A' son Λ-módulos. De (1.4.8) se tiene que:

$$Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A' \oplus A'') \cong Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A') \oplus Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A'').$$

Por ser A' y A'' k-proyectivos se tiene que $A' \oplus A''$ es k-proyectivo. Por el teorema (2.3.4) se tiene que para cada n

$$H_n(A' \oplus A'', A' \oplus A'') \cong Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A' \oplus A'').$$

Por lo tanto

$$HH_n(A' \oplus A'') = Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A' \oplus A'') \cong Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A') \oplus Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A'').$$

Afirmación 2.4.4.1 $Tor_n^{\Lambda}(A' \oplus A'', A') \cong Tor_n^{A' \otimes A'^{op}}(A', A')$.

Por (1.3.14) para A' y A'' existen resoluciones proyectivas como $A' \otimes A'^{op}$-módulos y $A'' \otimes A''^{op}$-módulos respectivamente. Estos poseen una estructura de Λ-módulos mediante la siguientes aplicaciones:

$$\Lambda \longrightarrow A' \otimes A'^{op}$$

$$(a', a'') \otimes (\widehat{a}', \widehat{a}'') \longmapsto a' \otimes \widehat{a}'$$

$$\Lambda \longrightarrow A'' \otimes A''^{op}$$

$$(a', a'') \otimes (\widehat{a}', \widehat{a}'') \longmapsto a'' \otimes \widehat{a}''$$

Observación 2.4.5 *Si P_n es proyectivo como $A'\otimes A'^{op}$-módulo, es proyectivo como Λ-módulo, donde $\Lambda = B \otimes B^{op}$ con $B = A' \oplus A''$.*

Como P_n es proyectivo como $A'\otimes A'^{op}$-módulo, existe un $A'\otimes A'^{op}$-módulo M tal que $P_n \oplus M \cong \bigoplus_{i\in I}(A' \otimes A'^{op})_i$.
Mediante la siguiente aplicación los $A' \otimes A'^{op}$-módulos poseen una estructura de Λ-módulos

$$\begin{aligned} \Lambda &\longrightarrow A' \otimes A'^{op} \\ (a', a'') \otimes (\widehat{a}', \widehat{a}'') &\longmapsto a' \otimes \widehat{a}' \end{aligned}$$

Como

$$\Lambda = (A'\otimes A'')\otimes(A'^{op}\otimes A''^{op}) \cong (A'\otimes A'^{op})\oplus(A'\otimes A''^{op})\oplus(A''\otimes A'^{op})\oplus(A''\otimes A''^{op})$$

Por ser el Λ-módulo $A' \otimes A'^{op}$ sumando directo de Λ se tiene que $A' \otimes A'^{op}$ es proyectivo como Λ-módulo.
Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I}(A' \otimes A'^{op})_i$ es proyectivo como Λ-módulo, luego se tiene que P'_n es proyectivo como Λ-módulo.

Por la observación anterior como los P'_n proyectivos como $A' \otimes A'^{op}$-módulos, también son proyectivos como Λ-módulos. De la misma manera, por ser los P''_n proyectivos como $A'' \otimes A''^{op}$-módulos, también son proyectivos como Λ-módulos.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son resoluciones proyectivas de Λ-módulos

$$\begin{tikzcd}
C_{A'}: \cdots \arrow[r] & P'_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d] & P'_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & A' \arrow[d, "\varphi"] \\
C_{A'\oplus A''}: \cdots \arrow[r] & P'_n \oplus P''_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P'_1 \oplus P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & A' \oplus A'' \arrow[d, "\psi"] \\
C_{A''}: \cdots \arrow[r] & P''_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P''_1 \arrow[r] & P''_0 \arrow[r, dashed] & A''
\end{tikzcd}$$

Consideremos los funtores $T := - \otimes_{A'\otimes A'^{op}} A'$ y $L := - \otimes_\Lambda A'$. Aplicando los funtores T y L a las resoluciones reducidas $C_{A'}$ y $C_{A'\oplus A''}$ respectivamente; se tiene los complejos $(TC_{A'}, \partial' \otimes_{A'\otimes A'^{op}} 1_{A'})$ y $(LC_{A'\oplus A''}, (\partial', \partial'') \otimes_\Lambda 1_{A'})$.
Se tiene que $P'_n \oplus P''_n \otimes_\Lambda A' \cong P'_n \oplus \{0\} \otimes_\Lambda A'$, pues se verifica:

$$\begin{aligned} (p', p'') \otimes_\Lambda a' &= (p', p'') \otimes_\Lambda a' \cdot 1 \\ &= (p', p'') \otimes_\Lambda [(a', 0) \otimes (1, 0)] \cdot 1 \\ &= [(a', 0) \otimes (1, 0)] \cdot (p', p'') \otimes_\Lambda 1 \\ &= (a'p', 0) \otimes_\Lambda 1 = (p', 0) \otimes_\Lambda a'. \end{aligned}$$

De ello se tiene que $(LC_{A'\oplus A''},(\partial',\partial'')\otimes_\Lambda 1_{A'}) = (LC_{A'\oplus A''},(\partial',0)\otimes_\Lambda 1_{A'})$. Definamos la aplicación:

$$\phi: \qquad (TC_{A'},\partial'\otimes_{A'\otimes A'^{op}} 1_{A'}) \longrightarrow (LC_{A'\oplus A''},(\partial',0)\otimes_\Lambda 1_{A'})$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_n: \qquad P'_n\otimes_{A'\otimes A'^{op}} A' &\longrightarrow P'_n\oplus P''_n\otimes_\Lambda A' \\ p'_n\oplus_{A'\otimes A'^{op}} a' &\longmapsto (p'_n,0)\otimes_\Lambda a'. \end{aligned}$$

Veamos que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P'_n\otimes_{A'\otimes A'^{op}} A' \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, "\partial'\otimes_{A'\otimes A'^{op}}1_{A'}"] & P'_n\oplus P''_n\otimes_\Lambda A' \arrow[d, "(\partial',0)\otimes_\Lambda 1_{A'}"] \\ P'_{n-1}\otimes_{A'\otimes A'^{op}} A' \arrow[r, "\phi_{n-1}"] & P'_{n-1}\oplus P''_{n-1}\otimes_\Lambda A' \end{tikzcd}$$

$[\big((\partial',0)\otimes_\Lambda 1_{A'}\big)\circ\phi_n](p'_n\oplus_{A'\otimes A'^{op}}a') = [(\partial',0)\otimes_\Lambda 1_{A'}]\big((p'_n,0)\otimes_\Lambda a'\big) = (\partial' p'_n,0)\otimes_\Lambda a'$.
$[\phi_{n-1}\circ\big(\partial'\otimes_{A'\otimes A'^{op}1_{A'}}\big)](p'_n\oplus_{A'\otimes A'^{op}}a') = \phi_{n-1}(\partial' p'_n\oplus_{A'\otimes A'^{op}}a') = (\partial' p'_n,0)\otimes_\Lambda a'$.
Definamos la aplicación

$$\psi: \qquad (LC_{A'\oplus A''},(\partial',0)\otimes_\Lambda 1_{A'}) \longrightarrow (TC_{A'},\partial'\otimes_{A'\otimes A'^{op}} 1_{A'})$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_n: \qquad P'_n\oplus P''_n\otimes_\Lambda A' &\longrightarrow P'_n\otimes_{A'\otimes A'^{op}} A' \\ (p'_n,p''_n)\otimes_\Lambda a' &\longmapsto p'_n\oplus_{A'\otimes A'^{op}} a' \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que ψ es la inversa de ϕ. Por lo tanto se tiene que los complejos $(TC_{A'},\partial'\otimes_{A'\otimes A'^{op}} 1_{A'})$ y $(LC_{A'\oplus A''},(\partial',\partial'')\otimes_\Lambda 1_{A'})$ son isomorfos. Luego se tiene $H_n(TC_{A'})\cong H_n(LC_{A'\oplus A''})$, por lo tanto

$$Tor_n^\Lambda(A'\oplus A'',A')\cong Tor_n^{A'\otimes A'^{op}}(A',A').$$

De manera análoga se prueba que

$$Tor_n^\Lambda(A'\oplus A'',A'')\cong Tor_n^{A''\otimes A''^{op}}(A'',A'').$$

Por lo tanto se concluye que:

$$\begin{aligned} HH_n(A'\oplus A'') &\cong Tor_n^{A'\otimes A'^{op}}(A',A')\oplus Tor_n^{A''\otimes A''^{op}}(A'',A'') \\ &\cong HH_n(A')\oplus HH_n(A''). \end{aligned}$$

■

Observación 2.4.6 (Homología de Hochschild para álgebras sin unidad) *Como HH_n es un funtor de álgebras con unidad en la categoría de k-módulos, podemos extender la definición a álgebras sin unidad por medio de*

$$HH_n(A) := \text{Conúcleo}(HH_n(k) \longrightarrow HH_n(A_+))$$

Como HH_n conmuta con el producto por (2.4.4), hemos demostrado que esta definición coincide con la usual cuando A es unitario y proyectivo.
En general, HH_n conmuta con el producto para álgebras con unidad [2, 1.4.1].

Capítulo 3

Homología Cíclica

3.1. Bicomplejos:

Definición 3.1.1 *Un bicomplejo (también llamado complejo doble) es una colección de módulos* $C_{p,q}$ *indexados por enteros* p *y* q*, con una diferencial "horizontal"*

$$d^h : C_{p,q} \longrightarrow C_{p-1,q}$$

y una diferencial "vertical"

$$d^v : C_{p,q} \longrightarrow C_{p,q-1}$$

tal que cada cuadrado anticonmuta ($d^v d^h = -d^h d^v$*).*

$$\begin{tikzcd} C_{p-1,q} \arrow[d, "d^v"'] & C_{p,q} \arrow[l, "d^h"] \arrow[d, "d^v"] \\ C_{p-1,q-1} & C_{p,q-1} \arrow[l, "d^h"] \end{tikzcd}$$

Se satisfacen las siguientes identidades

$$d^v d^v = d^h d^h = d^v d^h + d^h d^v = 0$$

Note que un complejo de complejos es un complejo en la categoría de complejos, donde los cuadrados conmutan en lugar de anticonmutar.

Sea el bicomplejo C_{**} tal que $C_{p,q} = 0$ si $p < 0$ o $q < 0$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "d^v"'] & {} \arrow[d, "d^v"'] & {} \arrow[d, "d^v"'] & \\
C_{0,2} & C_{1,2} \arrow[l, "d^h"] & C_{2,2} \arrow[l, "d^h"] & {} \arrow[l] \\
C_{0,1} \arrow[from=u, "d^v"'] & C_{1,1} \arrow[l, "d^h"] \arrow[from=u, "d^v"] & C_{2,1} \arrow[l, "d^h"] \arrow[from=u, "d^v"] & {} \arrow[l] \\
C_{0,0} \arrow[from=u, "d^v"'] & C_{1,0} \arrow[l, "d^h"] \arrow[from=u, "d^v"'] & C_{2,0} \arrow[l, "d^h"] \arrow[from=u, "d^v"] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

entonces el k-módulo $(TotC_{**})_n := \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$, está bien definido (por ser una suma finita), definimos $d = d^h + d^v$

$$Tot(C_{**}) : \ldots \longrightarrow \bigoplus_{p+q=3} C_{p,q} \xrightarrow{d^h+d^v} \bigoplus_{p+q=2} C_{p,q} \xrightarrow{d^h+d^v} \bigoplus_{p+q=1} C_{p,q} \xrightarrow{d^h+d^v} \bigoplus_{p+q=0} C_{p,q}\,.$$

Se satisface:

$$\begin{aligned}
d \circ d &= (d^h + d^v) \circ (d^h + d^v) \\
&= \underbrace{d^h \circ d^h}_{0} + d^h \circ d^v + d^v \circ d^h + \underbrace{d^v \circ d^v}_{0} \\
&= d^h \circ d^v + d^v \circ d^h = 0
\end{aligned}$$

de ello tenemos que $(TotC_{**}, d)$ es un complejo, llamado **Complejo Total del bicomplejo** C_{**} y denotado por $Tot(C_{**})$ o simplemente $Tot(C)$.
Los grupos de homología $H_n(Tot(C))$ son llamados los **grupos de homología del bicomplejo** C.

3.2. Complejo mixto

Un complejo mixto (M_*, b, B) es dado por un k-módulo graduado $M_* = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$, un diferencial b de k-módulos de grado -1 y un diferencial B de grado $+1$ verificando:

$$b^2 = B^2 = bB + Bb = 0.$$

Un complejo mixto determina un bicomplejo $\mathcal{B}(M)$ en el primer cuadrante colocando $\mathcal{B}_{pq} = M_{q-p}$ si $0 \leq p \leq q$, $\mathcal{B}_{pq} = 0$ en cualquier otro caso.

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] \\
\mathcal{B}_{03} \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{13} \arrow[l, "B"] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{23} \arrow[l, "B"] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{33} \arrow[l, "B"] \\
\mathcal{B}_{02} \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{12} \arrow[l, "B"] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{22} \arrow[l, "B"] & \\
\mathcal{B}_{01} \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{11} \arrow[l, "B"] & & \\
\mathcal{B}_{00} & & &
\end{tikzcd}
$$

A este bicomplejo, se le asocia el complejo total $(Tot\mathcal{B}(M), b + B)$ con $(Tot\mathcal{B}(M))_n = \displaystyle\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{B}_{pq} = M_n \oplus M_{n-2} \oplus M_{n-4} \oplus \cdots$

Definición 3.2.1 *La homología del complejo total del bicomplejo $\mathcal{B}(M)$ es llamada la* ***homología cíclica del complejo mixto*** (M, b, B)*, es decir:* $HC_*(M, b, B) := H_*(Tot\mathcal{B}(M), b + B)$.

3.2.1. Secuencia SBI para Complejos mixtos

Teorema 3.2.2 *Para todo bicomplejo mixto (M_*, b, B) existe una secuencia exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow H_n(M_*, b) \xrightarrow{I_*} HC_n(M, b, B) \xrightarrow{S_*} HC_{n-2}(M, b, B) \xrightarrow{B_*} H_{n-1}(M_*, b) \longrightarrow \cdots$$

Demostración: Sea el bicomplejo $\mathcal{B}(M)$ donde $\mathcal{B}^{\{1\}}(M)$ es el bicomplejo que consta de la primera columna de ésta. El complejo $\mathcal{B}[1, 1]$ es el complejo $\mathcal{B}$ con la nueva graduación $(\mathcal{B}[1, 1])_{pq} = \mathcal{B}_{p-1,q-1}$. Obtenemos la siguiente sucesión exacta de bicomplejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}^{\{1\}}(M) \longrightarrow \mathcal{B}(M) \longrightarrow \mathcal{B}[1, 1] \longrightarrow 0$$

como se puede apreciar en el siguiente gráfico:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
M_3 \arrow[d, "b"] & & M_3 \arrow[d, "b"] & M_2 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & M_1 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & M_0 \arrow[l, "B"'] & & 0 \arrow[d] & M_2 \arrow[l] \arrow[d, "b"] & M_1 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & M_0 \arrow[l, "B"'] \\
M_2 \arrow[d, "b"] & \hookrightarrow & M_2 \arrow[d, "b"] & M_1 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & M_0 \arrow[l, "B"'] & & \longrightarrow & 0 \arrow[d] & M_1 \arrow[l] \arrow[d, "b"] & M_0 \arrow[l, "B"'] & \\
M_1 \arrow[d, "b"] & & M_1 \arrow[d, "b"] & M_0 \arrow[l, "B"'] & & & & 0 \arrow[d] & M_0 \arrow[l] & & \\
M_0 & & M_0 & & & & & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Se tiene la siguiente secuencia exacta corta de complejos:

$$0 \longrightarrow Tot(\mathcal{B}^{\{1\}}(M)) \xrightarrow{I} Tot(\mathcal{B}(M)) \xrightarrow{S} Tot(\mathcal{B}[1,1]) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

donde I es la inclusión con $I(m_n) = m_n \in \mathcal{B}_{0,n} = M_n$ y S es llamado **operador periódico** de $\mathcal{B}$ con $S(m_n, m_{n-2}, m_{n-6}, \cdots) = (m_{n-2}, m_{n-4}, m_{n-6}, \cdots)$.
Notemos que $(Tot(\mathcal{B}[1,1](M)))_n = (Tot(\mathcal{B}(M)))_{n-2}$. Para la sucesión exacta corta (3.1) se tiene por (1.3.9) la siguiente secuencia larga en homología:

$$\cdots \longrightarrow H_n(Tot(\mathcal{B}^{\{1\}}(M))) \xrightarrow{I_*} H_n(Tot(\mathcal{B}(M))) \xrightarrow{S_*} H_{n-2}(Tot(\mathcal{B}(M))) \xrightarrow{B_*} H_{n-1}(Tot(\mathcal{B}^{\{1\}}(M))) \longrightarrow \cdots$$

equivalentemente

$$\cdots \longrightarrow H_n(M_*, b) \xrightarrow{I_*} HC_n(M,b,B) \xrightarrow{S_*} HC_{n-2}(M,b,B) \xrightarrow{B_*} H_{n-1}(M_*, b) \longrightarrow \cdots .$$

■

Observación 3.2.3 *Notemos que* $B_*(\overline{z}) = [Bm_{n-2}]$ *con* $\overline{z} = [(m_{n-2}, m_{n-4}, m_{n-6}, \cdots)] \in HC_{n-2}(M,b,B)$*:*
Tenemos que $B_* : HC_{n-2}(M,b,B) \to H_{n-1}(M_*, b)$ *es dada por (1.3.9) de la siguiente forma:*

$$(B_*)(\overline{z}) = \overline{I^{-1}[b+B]_{Tot(\mathcal{B}(M))}y}, \quad \text{para algún } y \text{ con } Sy = z.$$

Sea $\overline{z} = [(m_{n-2}, m_{n-4}, m_{n-6}, \cdots,)] \in HC_{n-2}(M,b,B) = H_n(Tot(\mathcal{B}(M)))[1,1])$*.*
Tomamos $y = (0, m_{n-2}, m_{n-4}, m_{n-6}, \cdots)$ *donde* $Sy = z$*. Además*

$$[b+B]_{Tot(\mathcal{B}(M)[1,1])}\overline{z} = \overline{0}$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} b & B & & & & \\ & b & B & & & \\ & & b & B & & \\ & & & b & B & \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot \quad \cdot \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{n-2} \\ m_{n-4} \\ m_{n-6} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} =$$

$$= (bm_{n-2} + Bm_{n-4}, bm_{n-4} + Bm_{n-6}, \cdots) = (0, 0, 0, \cdots).$$

Como $[b+B]_{Tot(\mathcal{B}_{**}(M))}y$ *es dado por:*

$$\begin{bmatrix} b & B & & & & \\ & b & B & & & \\ & & b & B & & \\ & & & b & B & \\ & & & & b & B \\ & & & & & \cdot \quad \cdot \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m_{n-2} \\ m_{n-4} \\ m_{n-6} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} =$$

$$= (Bm_{n-2}, bm_{n-2} + Bm_{n-4}, bm_{n-4} + Bm_{n-6}, \cdots)$$

por lo anterior

$$[b+B]_{Tot(\mathcal{B}_{**}(M))}y = (Bm_{n-2}, 0, 0, \cdots),$$

por lo que $(B_*)(\overline{z}) = \overline{I^{-1}[b+B]_{Tot(\mathcal{B}(M))}y} = [Bm_{n-2}]$.
Esto justifica llamar B_* *al morfismo conector* B *de (1.3.9).*

3.3. Homología Cíclica de una k-álgebra asociativa A

3.3.1. Primera definición de Homología Cíclica

La acción del grupo cíclico $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ sobre el módulo $A^{\otimes n+1}$ es dado por su generador $t = t_n$

$$t_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \tag{3.2}$$

sobre los tensores elementales de $A^{\otimes n+1}$; este es llamado **operador cíclico**. Note que $(-1)^n$ es el signo de la permutación cíclica de los $n+1$ elementos. Sea $N = 1 + t + \cdots + t^n$ llamado **operador norma** sobre $A^{\otimes n+1}$.

Lema 3.3.1 *Los operadores* t, N, b *y* b' *satisfacen:*

$$(1-t)b' = b(1-t), \qquad b'N = Nb.$$

Demostración: Veamos que se cumple $d_i t_n = -t_{n-1} d_{i-1}$ para $0 < i \leq n$ y $d_0 t_n = (-1)^n d_n$. Sobre los tensores elementales se tiene :

$i = 0:$

$$\begin{aligned}
d_0 t_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= d_0\left((-1)^n a_n \otimes a_0, \cdots \otimes a_{n-1}\right) \\
&= (-1)^n d_0(a_n \otimes a_0, \cdots \otimes a_{n-1}) \\
&= (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
&= (-1)^n d_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n)
\end{aligned}$$

$0 < i < n$:

$$\begin{aligned}
d_i t_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= d_i\left((-1)^n a_n \otimes a_0, \cdots \otimes a_{n-1}\right) \\
&= (-1)^n d_i(a_n \otimes a_0, \cdots \otimes a_{n-1}) \\
&= (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
&= (-1)(-1)^{n-1} a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
&= (-1)t_{n-1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\
&= -t_{n-1}d_{i-1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n)
\end{aligned}$$

$i = n:$

$$\begin{aligned}
d_n t_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= d_n\left((-1)^n a_n \otimes a_0, \cdots \otimes a_{n-1}\right) \\
&= (-1)^n d_n(a_n \otimes a_0, \cdots \otimes a_{n-1}) \\
&= (-1)^n a_{n-1}a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\
&= (-1)(-1)^{n-1} a_{n-1}a_n \otimes a_0 \cdots \otimes a_{n-2} \\
&= (-1)t_{n-1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \otimes a_{n-1}a_n) \\
&= -t_{n-1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \otimes a_{n-1}a_n) \\
&= -t_{n-1}d_{n-1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n)
\end{aligned}$$

De estas igualdades se deduce el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
-d_i t_n &= t_{n-1}d_{i-1} \\
((-1)^i d_i)t_n &= t_{n-1}\left((-1)^{i-1}d_{i-1}\right) \\
\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i d_i\right)t_n &= t_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}d_{i-1}\right) \\
\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i d_i\right)t_n &= t_{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j d_j\right) \\
(b_n - b_0)t_n &= t_{n-1}b'_{n-1}
\end{aligned}$$

De la ultima ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} b_n t_n &= b_0 t_n + t_{n-1} b'_{n-1} \\ &= (-1)^n d_n + t_{n-1} b'_{n-1} \\ &= b_n - b'_{n-1} + t_{n-1} b'_{n-1} \end{aligned}$$

y se concluye que $b_n(t_n - 1) = b'_{n-1}(t_{n-1} - 1)$.
Además se tiene para $1 \leq j \leq n$.

$$t^j(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^{jn} a_{n-j+1} \otimes \cdots a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-j}$$

Las relaciones anteriores implican para $i \geq j$:

$$\begin{aligned} d_i t_n^j(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (-1)^{jn} d_i(a_{n-j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-j}) \\ &= (-1)^{jn} a_{n-j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-j} a_{i-j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n-j} \\ &= (-1)^j (-1)^{j(n-1)} a_{n-j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-j} a_{i-j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n-j} \\ &= (-1)^j t_{n-1}^j (a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-j} a_{i-j+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &= (-1)^j t_{n-1}^j d_{i-j}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) \end{aligned}$$

y para $i < j$:

$$\begin{aligned} d_i t_n^j(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (-1)^{jn} d_i(a_{n-j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-j}) \\ &= (-1)^{jn} a_{n-j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n-j+1+i-1} a_{n-j+1+i} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-j} \\ &= (-1)^{jn} a_{n-j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+i-j} a_{n+1+i-j} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-j} \end{aligned}$$

$$t_{n-1}^{j-1} d_{n+1+i-j}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = t_{n-1}^{j-1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1+i-j} a_{n+1+i-j+1} \otimes \cdots \otimes a_n)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{(j-1)(n-1)} a_{(n-1)-(j-1)+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+i-j} a_{n+i-j+2} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{(n-1)-(j-1)} \\ &= (-1)^{jn-j-n+1} a_{n-j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+i-j} a_{n+i-j+2} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-j} \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene que $d_i t_n^j = (-1)^{n-j+1} t_{n-1}^{j-1} d_{n+1+i-j}$.

De todos los resultados anteriores podemos escribir:

$$\begin{aligned} b'N &= \left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} t_n^j\right) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^i d_i t^j + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^i d_i t^j \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^i((-1)^{n-j+1} t^{j-1} d_{i-j+n+1}) + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^i((-1)^{-j} t^j d_{i-j}) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{n+i-j+1} t^{j-1} d_{i-j+n+1} + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^{i-j} t^j d_{i-j} \end{aligned}$$

Haciendo la sumatoria sobre j y un cambio de variable en la primera sumatoria igual a $q = i - j + n + 1$ donde $0 \leq i < j$ y en la segunda sumatoria el cambio de variable de $q = i - j$ donde $j \leq i \leq n-1$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
b'N &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{q=n-j+1}^{n}(-1)^q t^{j-1} d_q + \sum_{q=0}^{n-j-1}(-1)^q t^j d_q\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{q=n-j}^{n}(-1)^q t^{j} d_q + \sum_{q=0}^{n+j-1}(-1)^q t^j d_q\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n} t^j\left(\sum_{q=n-j}^{n+1}(-1)^q d_q + \sum_{q=0}^{n+j-1}(-1)^q d_q\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n} t^j\left(\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^q d_q\right)\\
&= (\sum_{j=0}^{n} t^j) b\\
&= Nb
\end{aligned}
$$

■

Como consecuencia inmediata del lema anterior se tiene que:

$$Nb + (-b')N = 0 \quad \text{y} \quad b(1-t) + (1-t)(-b') = 0$$

y de $t^{n+1} = 1$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
(1-t)N &= (1-t_n)(1+t_n+\cdots+t_n^n)\\
&= 1+t_n+\cdots+t_n^n - t_n - t_n^2 - \cdots - t_n^n - t_n^{n+1}\\
&= 1 - t_n^{n+1}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(1-t) &= (1+t_n+\cdots+t_n^n)(1-t_n)\\
&= 1+t_n+\cdots+t_n^n - t_n - t_n^2 - \cdots - t_n^n - t_n^{n+1}\\
&= 1 - t_n^{n+1}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Se obtiene el siguiente bicomplejo denotado por $CC(A)$, y llamado el bicomplejo cíclico:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "-b'"'] & \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & {} \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}
$$

con $CC_{pq}(A) = C_q(A) = A^{\otimes q+1}$.

Definición 3.3.2 *Los grupos de homología cíclica $HC_n(A)$, $n \geq 0$ de la k-álgebra asociativa A (no necesariamente con unidad) son los grupos de homología del complejo total $TotCC(A)$:*

$$HC_n(A) := H_n(TotCC(A)).$$

Note que no asumimos que A es unitario en esta definición. Denotaremos $HC(A \setminus k)$ si es necesario mencionar a k. Como es usual

$$HC_*(A) := \bigoplus_{n \geq 0} HC_n(A).$$

Un morfismo de k-álgebras (que no necesariamente preserva unidad) $f : A \to A'$ induce un morfismo de bicomplejos $CC(A) \to CC(A')$ y además una aplicación funtorial $HC_n(A) \to HC_n(A')$, es decir, HC_n es un funtor de las categorías de las k-álgebras asociativas a la categoría de k-módulos.
Si $k \longrightarrow K \longrightarrow A$ es una sucesión de morfismos, esta define una aplicación natural de k-módulos $HC_n(A \setminus k) \longrightarrow HC_n(A \setminus K)$

3.3.2. Complejo de Connes

Definición 3.3.3 *Sea G un grupo y $k[G]$ el álgebra asociada al grupo sobre el anillo conmutativo k. Un G-módulo a izquierda sobre k es por definición un $k[G]$- módulo a izquierda. Cuando $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, se define la homología de G con coeficientes en M como la homología del complejo*

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{1-t} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{1-t} M$$

y se denota por $H_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M)$. Aquí t denota la acción del generador de G y $N = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$ es el operador norma definido en (3.2).

Definición 3.3.4 *Sea G un grupo y V un G-módulo a izquierda. El espacio de invariantes es definida por*

$$V^G := \{v \in V / g \cdot v = v, \forall\, g \in G\}$$

y el espacio de coinvariantes es definida por

$$V_G := \frac{V}{\langle\{g \cdot v - v / v \in V, g \in G\}\rangle}.$$

El conúcleo del endomorfismo $1-t : A^{\otimes n+1} \longrightarrow A^{\otimes n+1}$ es denotado por Alain Connes como:

$$C_n^\lambda(A) := \frac{A^{\otimes n+1}}{1-t}.$$

Por definición el $\mathrm{Nu}(1-t)$ y el $\mathrm{Conúcleo}(1-t)$ se llaman el espacio invariante $(A^{\otimes n+1})^G$, respectivamente el espacio coinvariante $(A^{\otimes n+1})_G$ de la acción de $G = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.
La aplicación $b : C_n^\lambda(A) \longrightarrow C_{n-1}^\lambda(A)$ con $\overline{x} \longmapsto \overline{bx}$, está bien definida ya que: $\overline{x} = \overline{y} \Rightarrow x - y = (1-t)z$, $z \in A^{\otimes n+1}$ entonces $bx - by = b(1-t)z = (1-t)bz \Rightarrow \overline{bx} = \overline{by}$. Además $bb(\overline{x}) = \overline{bb(x)} = \overline{0}$;

Definición 3.3.5 (Complejo de Connes) *El complejo*

$$C_*^\lambda(A) : \qquad \cdots \xrightarrow{\ b\ } C_n^\lambda(A) \xrightarrow{\ b\ } C_{n-1}^\lambda(A) \xrightarrow{\ b\ } \cdots \xrightarrow{\ b\ } C_0^\lambda(A)$$

es llamado complejo de Connes, donde el n-ésimo grupo de homología es denotado por $H_n^\lambda(A) := H_n(C_*^\lambda(A))$.

La proyección natural $p : TotCC(A) \longrightarrow C_*^\lambda(A)$ es la aplicación cociente $A^{\otimes n+1} \longmapsto \dfrac{A^{\otimes n+1}}{1-t}$ sobre la primera columna de $CC(A)$ y 0 en las otras, es decir:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "-b'"'] & \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & {} \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}
\longrightarrow
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
\frac{A^{\otimes 3}}{1-t} \arrow[d, "b"'] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
\frac{A^{\otimes 2}}{1-t} \arrow[d, "b"'] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
\frac{A}{1-t} & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.3.6 *Para toda álgebra A sobre un anillo k que contiene a $\mathbb{Q}$, la proyección natural*
$$p_* : HC_*(A) \longrightarrow H_*^{\lambda}(A)$$
es un isomorfismo.

Demostración: Consideremos la fila n-ésima del bicomplejo $CC(A)$

$$A^{\otimes n+1} \xleftarrow{1-t} A^{\otimes n+1} \xleftarrow{N} A^{\otimes n+1} \xleftarrow{1-t} A^{\otimes n+1} \xleftarrow{N} \cdots$$

Cuando $\mathbb{Q} \subset k$ podemos definir h por medio de:

$$h_m : C_n(A) \longrightarrow C_n(A)$$

donde
$$h_m := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n+1}\right) Id & \text{si } m \text{ es par,} \\ -\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} it^i & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si s impar:

$$\begin{aligned}
(1-t)h + hN &= (1-t_n)h_m + h_{m+1}N \\
&= (1-t_n)\left[-\left(\frac{1}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n} it_n^i\right] + \left(\frac{1}{n+1}\right) Id \left(\sum_{i=0}^{n} t_n^i\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n} t_n^i - (1-t_n)(\sum_{i=1}^{n} it_n^i)\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{i=1}^{n}(t_n^i - it_n^i + it_n^{i+1})\right] \\
&= t_n^{n+1} = Id
\end{aligned}$$

Si m es par:

$$\begin{aligned}
Nh + h(1-t) &= Nh_m + h_{m+1}(1-t) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} t_n^i\right)\left(\frac{1}{n+1}\right) Id + \left[-\left(\frac{1}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n} i t_n^i\right](1-t_n) \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\right)\left[\sum_{i=0}^{n} t_n^i - \sum_{i=1}^{n} i t_n^i (1-t_n)\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{i=1}^{n}(t_n^i - i t_n^i + i t_n^{i+1})\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{i=1}^{n}(t_n^i - i t_n^i + i t_n^{i+1} + t_n^{i+1} - t_n^{i+1})\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{i=1}^{n}(t_n^i - t_n^{i+1}) - \sum_{i=1}^{n}(i t_n^i - (i+1) t_n^{i+1})\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[1 + t_n - t_n^{n+1} - t_n + (n+1) t_n^{n+1}\right] \\
&= t_n^{n+1} = Id
\end{aligned}$$

Obtenemos que h es una homotopía entre Id y 0. Esto implica que esta fila es un complejo cuya homología es nula salvo en

$$H_0 = \frac{A^{\otimes n+1}}{\mathrm{Im}(1-t)} = C_n^{\lambda}(A).$$

Consideremos el bicomplejo K

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots & \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots & \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

se tiene la siguiente secuencia exacta de complejos

$$0 \longrightarrow Tot(K) \longrightarrow Tot(CC(A)) \longrightarrow C^{\lambda} \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

Veamos que $H(Tot(K)) = 0$:
Consideremos el complejo exacto

$$F_0: \qquad 0 \longleftarrow \mathrm{Im}(1-t) \xleftarrow{1-t} A \xleftarrow{N} A \xleftarrow{1-t} A \longleftarrow \cdots$$

y el bicomplejo K_1

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
& 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Obtenemos la siguiente sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow Tot(K)) \longrightarrow Tot(K_1) \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

Como $H_n(F_0) = 0, \quad \forall\, n$ y por la secuencia larga en homología de (3.4)

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_1(F)}_{0} \longrightarrow H_1(K) \longrightarrow H_1(K_1) \longrightarrow \underbrace{H_0(F)}_{0} \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow H_0(K_1) \longrightarrow 0$$

se tiene que $H_n(K) \cong H_n(K_1), \quad \forall\, n$.
Ahora consideremos el complejo exacto

$$F_1: \qquad 0 \longleftarrow \mathrm{Im}(1-t) \xleftarrow{1-t} A^{\otimes 2} \xleftarrow{N} A^{\otimes 2} \xleftarrow{1-t} A^{\otimes 2} \longleftarrow \cdots$$

y el bicomplejo K_2

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots & \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 4} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 4} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 4} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
0 & \mathrm{Im}(1-t) \arrow[l] \arrow[d] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Obtenemos la siguiente sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow Tot(K_1)) \longrightarrow Tot(K_2) \longrightarrow 0 \qquad (3.5)$$

Como $H_n(F_1) = 0, \quad \forall\, n$ y por la secuencia larga en homología de (3.5)

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_1(F_1)}_{0} \longrightarrow H_1(K_1) \longrightarrow H_1(K_2) \longrightarrow \underbrace{H_0(F_1)}_{0} \longrightarrow H_0(K_1) \longrightarrow H_0(K_2) \longrightarrow 0$$

se tiene que $H_n(K_1) \cong H_n(K_2), \quad \forall\, n.$
De manera inductiva podemos definir los bicomplejos K_3, K_4. $\cdots$ tal que se tiene $H_n(K) \cong H_n(K_r) = 0, \quad n < r.$
Aplicando la secuencia larga en homología de (3.3) se tiene que $H_n(Tot(CC(A)) \cong H_n(C^\lambda)$. Por lo tanto se concluye que la homología del bicomplejo $CC(A)$ es canónicamente isomorfa al complejo de Connes C_*^λ. ∎

Lema 3.3.7 (Complejo contractible de Killing) *Sea*

$$\cdots \longrightarrow A_n \oplus A'_n \xrightarrow{d=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}} A_{n-1} \oplus A'_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

un complejo de k-módulos tal que el complejo (A'_*, δ) es contractible, con homotopía contractante $h : A'_n \longrightarrow A'_{n+1}$, entonces la inclusión de complejos

$$(Id, -h\gamma) : (A_*, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (A_* \oplus A'_*, d)$$

es un casi-isomorfismo.

Demostración:
Como $\delta\delta = 0$ y de $dd = 0$ se tiene

$$d \circ d = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

del resultado anterior se tiene $\gamma\alpha + \delta\gamma = 0$ y $\gamma\beta = 0$; además por ser h una homotopía contractante para δ se cumple que $\delta h + h\delta = Id$.

$$\begin{aligned} (\delta h + h\delta)\gamma &= Id\gamma \\ \delta h\gamma + h(\delta\gamma) &= \gamma \\ \delta h\gamma - h\gamma\alpha &= \gamma \end{aligned}$$

Veamos que $(A_*, \alpha - \beta h\gamma)$ es un complejo:

$$(\alpha-\beta h\gamma)(\alpha-\beta h\gamma) = \alpha^2 - \underbrace{\alpha\beta}_{-\beta\delta} h\gamma - \beta h\gamma\alpha - \beta h \underbrace{\gamma\beta}_{0} h\gamma = \alpha^2 + \beta(\underbrace{\delta h\gamma - h\gamma\alpha}_{\gamma}) = 0$$

Veamos que la inclusión $(Id, -h\gamma) : A_n \longrightarrow A_n \oplus A'_n$ induce una aplicación de complejos $(A_*, \alpha - \beta h\gamma) \longrightarrow (A_* \oplus A'_*, d)$.

$$\begin{tikzcd} A_* : \arrow[d, "(Id,-h\gamma)"'] & \cdots \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] & A_n \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "(Id,-h\gamma)"] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "(Id,-h\gamma)"] & \cdots \\ A_* \oplus A'_* : & \cdots \arrow[r, "d"] & A_n \oplus A'_n \arrow[r, "d"] & A_{n-1} \oplus A'_{n-1} \arrow[r, "d"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Tenemos las igualdades

$$d \circ (Id, -h\gamma) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id \\ -h\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta h\gamma \\ \gamma - \delta h\gamma \end{bmatrix}.$$

$$(Id, -h\gamma) \circ (\alpha - \beta h\gamma) = \begin{bmatrix} Id \\ -h\gamma \end{bmatrix} [\alpha - \beta h\gamma] = \begin{bmatrix} \alpha - \beta h\gamma \\ -h\gamma\alpha + h\gamma\beta h\gamma \end{bmatrix}.$$

De ellas deducimos que $-h\gamma\alpha = \gamma - \delta h\gamma$ y $h(\gamma\beta)h\gamma = h0h\gamma = 0$. Se obtiene que $d \circ (Id, -h\gamma) = (Id, -h\gamma) \circ (\alpha - \beta h\gamma)$.
Como el conúcleo de $(Id, -h\gamma)$ es isomorfo al complejo (A'_*, δ) y por la secuencia larga en homología, se tiene que la inclusión $(Id, -h\gamma)$ es un casi-isomorfismo. ■

3.3.3. Segunda definición de Homología Cíclica – El bicomplejo $\mathcal{B}(A)$

Si A es unitario, construiremos de dos maneras diferentes el bicomplejo $\mathcal{B}(A)$ a partir del bicomplejo $CC(A)$ usando el lema (3.3.7).

I Forma: Consideremos la secuencia de k-módulos

$$\cdots \to A_n \oplus A'_n \xrightarrow{d_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix}} A_{n-1} \oplus A'_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} \end{bmatrix}} A_{n-2} \oplus A'_{n-2} \to \cdots$$

donde

- Para $n = 2m$:

$$A_n = A^{\otimes 2m+1} \oplus A^{\otimes 2m-1} \oplus A^{\otimes 2m-2} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 2} \oplus A \qquad A'_n = A^{\otimes 2m}$$

$$\alpha_{2m} = \begin{bmatrix} b & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & b & 1-t & & & & & \\ & & -b' & N & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & b & 1-t & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & -b' & N \end{bmatrix}_{(2m-1)\times(2m)} \qquad \beta_{2m} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2m-1)\times 1}$$

$$\gamma_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & N & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times(2m)} \qquad \delta_{2m} = \begin{bmatrix} -b' \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

- Para $n = 2m-1$:

$$A_n = A^{\otimes 2m} \oplus A^{\otimes 2m-2} \oplus A^{\otimes 2m-3} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 2} \oplus A \qquad A'_n = A^{\otimes 2m-1}$$

$$\alpha_{2m-1} = \begin{bmatrix} b & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & b & 1-t & & & & & \\ & & -b' & N & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & b & 1-t & & \\ & & & & & -b' & N & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & b & 1-t \end{bmatrix}_{(2m-2)\times(2m-1)} \qquad \beta_{2m-1} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2m-2)\times 1}$$

$$\gamma_{2m-1} = \begin{bmatrix} 0 & N & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times(2m-1)} \qquad \delta_{2m-1} = \begin{bmatrix} -b' \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

Probemos que $d_{n-1} \circ d_n = 0$, $\forall\, n$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \delta_n & \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}\alpha_n + \beta_{n-1}\gamma_n & \alpha_{n-1}\beta_n + \beta_{n-1}\delta_n \\ \gamma_{n-1}\alpha_n + \delta_{n-1}\gamma_n & \gamma_{n-1}\beta_n + \delta_{n-1}\delta_n \end{bmatrix}$$

Para $n = 2m$:
$\alpha_{2m-1} \circ \alpha_{2m} =$

$$\begin{bmatrix} bb & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ 0 & bb & b(1-t)-(1-t)b' & (1-t)N & & & & & \\ & & b'b' & Nb-b'N & N(1-t) & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & b'b' & Nb-b'N & N(1-t) & 0 \\ 0 & & \cdot & \cdot & & & 0 & b(1-t)-(1-t)b' & (1-t)N \end{bmatrix}_{(2m-2)\times(2m)}$$

$$\beta_{2m-1}\gamma_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & (1-t)N & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{(2m-2)\times(2m)}$$

$$\alpha_{2m-1}\beta_{2m} + \beta_{2m-1}\delta_{2m} = \begin{bmatrix} b(1-t)-(1-t)b' \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(2m-1)\times 1}$$

$$\gamma_{2m-1}\alpha_{2m} + \delta_{2m-1}\gamma_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Nb-Nb' & N(1-t) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{1\times(2m)}$$

$$\gamma_{2m-1}\beta_{2m} + \delta_{2m-1}\delta_{2m} = \begin{bmatrix} b'b' \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

Como $CC(A)$ es un bicomplejo, se tiene que $d_{2m-1} \circ d_{2m} = 0$, de manera análoga también se verifica $d_{2m} \circ d_{2m+1} = 0$.

Concluimos que $(A_n \oplus A'_n, d)$ es un complejo y el complejo $(A'_*, -b')$ es contráctil, con homotopía contractante $h : A'_n \to A'_{n+1}$ donde $h = -s$ es el operador "extra degeneración" definido por:

$$s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}, \quad s(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n$$

Aplicando el lema (3.3.7) tenemos que la inclusión $(Id, -h\gamma) : (A_*, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (A_* \oplus A'_*, d)$ es un casi-isomorfismo, donde:

$$\alpha_n - \beta_n h_n \gamma_n = \begin{bmatrix} b & (1-t)sN & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b & 1-t & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & -b' & N & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & b & 1-t & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & -b' & N & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}$$

Poniendo $B = (1-t)sN$ tenemos el bicomplejo $CC(A)^1$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"'] \\
A^{\otimes 4} \arrow[d, "b"'] & & {} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[d, "b"'] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"'] & & A^{\otimes 3} \arrow[ull, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & & A^{\otimes 2} \arrow[ull, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A & & A \arrow[ull, "B"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & {} \arrow[l, "1-t"']
\end{tikzcd}$$

que satisface $H_n(Tot(CC(A)^1)) = H_n(A_*, \alpha - \beta h \gamma)$. Por el lema (3.3.7) $H_n(A_*, \alpha - \beta h\gamma) = H_n(A_* \oplus A'_*, d) = H_n(Tot(CC(A)))$. Ahora aplicaremos una vez mas el lema de Killing (3.3.7) considerando la secuencia de k-módulos

$$\cdots \to \widehat{A}_n \oplus \widehat{A}'_n \xrightarrow{\widehat{d}_n = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_n & \widehat{\beta}_n \\ \widehat{\gamma}_n & \widehat{\delta}_n \end{bmatrix}} \widehat{A}_{n-1} \oplus \widehat{A}'_{n-1} \xrightarrow{\widehat{d}_{n-1} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_{n-1} & \widehat{\beta}_{n-1} \\ \widehat{\gamma}_{n-1} & \widehat{\delta}_{n-1} \end{bmatrix}} \widehat{A}_{n-2} \oplus \widehat{A}'_{n-2} \to \cdots$$

donde

- Para $n = 2m$:

$$\widehat{A}_n = A^{\otimes 2m+1} \oplus A^{\otimes 2m-1} \oplus A^{\otimes 2m-3} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 2} \oplus A \qquad \widehat{A}'_n = A^{\otimes 2m-2}$$

$$\widehat{\alpha}_{2m} = \begin{bmatrix} b & B & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ 0 & b & 0 & & & & & & \\ & & b & 1-t & & & & & \cdot \\ \cdot & & & -b' & N & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & b & 1-t & 0 \\ 0 & & \cdot & \cdot & & & 0 & -b' & N \end{bmatrix}_{(2m-2)\times(2m-1)} \qquad \widehat{\beta}_{2m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(2m-2)\times 1}$$

$$\widehat{\gamma}_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{1\times(2m-1)} \quad \widehat{\delta}_{2m} = \begin{bmatrix} -b' \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

- Para $n = 2m-1$:

$$\widehat{A}_n = A^{\otimes 2m} \oplus A^{\otimes 2m-2} \oplus A^{\otimes 2m-4} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 2} \oplus A \qquad \widehat{A'}_n = A^{\otimes 2m-3}$$

$$\widehat{\alpha}_{2m-1} = \begin{bmatrix} b & B & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ 0 & b & 0 & & & & & & \\ & & b & 1-t & & & & & \cdot \\ \cdot & & & -b' & N & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & b & 1-t & & \\ & & & & & & -b' & N & 0 \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & b & 1-t \end{bmatrix}_{(2m-3)\times(2m-2)} \qquad \widehat{\beta}_{2m-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(2m-3)\times 1}$$

$$\widehat{\gamma}_{2m-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{1\times(2m-2)} \qquad \widehat{\delta}_{2m-1} = \begin{bmatrix} -b' \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

Se satisface $d_n \circ d_{n-1} = 0$, $\forall\ n$; obtenemos así que $(\widehat{A}_* \oplus \widehat{A'}_*, \widehat{d})$ es un complejo y $(\widehat{A'}, -b')$ un complejo contractible con homotopía contractante $h = -s$. Aplicando el lema (3.3.7) tenemos que la aplicación $(Id, -h\widehat{\gamma}) : (\widehat{A}_*, \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}\widehat{\gamma}) \hookrightarrow (\widehat{A}_* \oplus \widehat{A'}_*, \widehat{d})$ es un casi-isomorfismo, donde

$$\widehat{\alpha}_n - \widehat{\beta}_n h_n \widehat{\gamma}_n = \begin{bmatrix} b & B & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b & B & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & b & 1-t & \cdot & & & & \\ \cdot & & \cdot & -b' & N & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & b & 1-t & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & -b' & N & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-1)}$$

Luego tenemos el bicomplejo $CC(A)^2$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "b"] & & & & \\
A^{\otimes 5} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 4} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[d, "b"'] & \\
A^{\otimes 4} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[ul, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[ul, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & A \arrow[l, "B"'] & A \arrow[ul, "B"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A & & & & &
\end{tikzcd}$$

y se satisface $H_n(Tot(CC(A)^2)) = H_n(\widehat{A}_*, \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} h \widehat{\gamma})$ por el lema (3.3.7) $H_n(\widehat{A}_*, \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} h \widehat{\gamma}) = H_n(\widehat{A}_* \oplus \widehat{A'}_*, \widehat{d}) = H_n(Tot(CC(A)^1))$. De manera sucesiva aplicamos el lema (3.3.7) para las columnas pares de $CC(A)$. Se obtendrá

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] \arrow[ul, "B"] & A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] \arrow[ul, "B"] \\
A & A \arrow[ul, "B"] & A \arrow[ul, "B"]
\end{tikzcd}$$

con

$$Bb + bB = 0$$

Obtenemos el bicomplejo $\mathcal{B}(A)$, donde $(\mathcal{B}(A))_{p,q} = C_{q-p}(A) = A^{\otimes q-p+1}$, si $q \geq p$, $p, q \geq 0$ y 0 en cualquier otro caso.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

Donde $(\mathcal{B}(A))_{p,q} = (CC(A))_{2p,q-p}$. La aplicación inyectiva de complejos $Tot(\mathcal{B}(A)) \hookrightarrow Tot(CC(A))$ lleva a un $x \in (\mathcal{B}(A))_{p,q} = C_{q-p}(A)$ tal que $p+q = n$ en el elemento $(x, sNx) \in C_{q-p}(A) \oplus C_{q-p+1}(A) \subseteq (TotCC(A))_{p+q}$, además se tiene que $H_n(TotCC(A)) = H_n(\mathcal{B}(A))$.

II Forma: Consideremos la secuencia de k-módulos

$$\cdots \to A_n \oplus A'_n \xrightarrow{d_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix}} A_{n-1} \oplus A'_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} \end{bmatrix}} A_{n-2} \oplus A'_{n-2} \to \cdots$$

donde

- Para $n = 2m$:

$A_n = A^{\otimes 2m+1} \oplus A^{\otimes 2m-1} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 3} \oplus A \qquad A'_n = A^{\otimes 2m} \oplus A^{\otimes 2m-2} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 4} \oplus A^{\otimes 2}$

$$\alpha_{2m} = \begin{bmatrix} b & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b & 0 \end{bmatrix}_{m\times(m+1)} \qquad \beta_{2m} = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1-t & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 1-t & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1-t \end{bmatrix}_{m\times m}$$

$$\gamma_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & N & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & N & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & N & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & N \end{bmatrix}_{m\times(m+1)} \qquad \delta_{2m} = \begin{bmatrix} -b' & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -b' & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & -b' & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -b' \end{bmatrix}_{m\times m}$$

- Para $n = 2m+1$

$A_n = A^{\otimes 2m+2} \oplus A^{\otimes 2m} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 4} \oplus A^{\otimes 2} \qquad A'_n = A^{\otimes 2m+1} \oplus A^{\otimes 2m-1} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes 3} \oplus A$

$$\alpha_{2m+1} = \begin{bmatrix} b & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & b \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} \qquad \beta_{2m+1} = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1-t & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 1-t & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1-t \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

$$\gamma_{2m+1} = \begin{bmatrix} 0 & N & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & N & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & N & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & N \end{bmatrix}_{m\times(m+1)} \qquad \delta_{2m+1} = \begin{bmatrix} -b' & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & -b' & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & -b' & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -b' & 0 \end{bmatrix}_{m\times(m+1)}$$

Donde que $d_{n-1} \circ d_n = 0$, $\forall\, n$.

$$d_{n-1} \circ d_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \delta_n & \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}\alpha_n + \beta_{n-1}\gamma_n & \alpha_{n-1}\beta_n + \beta_{n-1}\delta_n \\ \gamma_{n-1}\alpha_n + \delta_{n-1}\gamma_n & \gamma_{n-1}\beta_n + \delta_{n-1}\delta_n \end{bmatrix}$$

Para $n = 2m + 1$:

$$\alpha_{2m} \circ \alpha_{2m+1} = \begin{bmatrix} bb & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & bb \quad 0 \end{bmatrix}_{m\times(m+1)}$$

$$\beta_{2m} \circ \gamma_{2m+1} = \begin{bmatrix} 0 \quad (1-t)N & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & (1-t)N \end{bmatrix}_{m\times(m+1)}$$

$$\alpha_{2m}\beta_{2m+1}+\beta_{2m}\delta_{2m+1} = \begin{bmatrix} b(1-t)-(1-t)b' & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & b(1-t)-(1-t)b' \quad 0 \end{bmatrix}_{m\times(m+1)}$$

$$\gamma_{2m}\alpha_{2m+1} + \delta_{2m}\gamma_{2m+1} = \begin{bmatrix} 0 \quad Nb-b'N & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & Nb-b'N \end{bmatrix}_{m\times(m+1)}$$

$$\gamma_{2m}\beta_{2m+1} = \begin{bmatrix} 0 \quad N(1-t) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & N(1-t) \end{bmatrix}_{m\times(m+1)}$$

$$\delta_{2m}\delta_{2m+1} = \begin{bmatrix} b'b' & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & b'b' \quad 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

Como $CC(A)$ es un bicomplejo se tiene que $d_{2m} \circ d_{2m+1} = 0$, de manera análoga también se verifica $d_{2m-1} \circ d_{2m} = 0$.

Se obtiene así que $(A_n \oplus A'_n, d)$ es un complejo. El complejo (A'_*, δ) es contractil, pues es suma directa de complejos contractibles con homotopía contractante $h : A'_n \to A'_{n+1}$

$$h = \begin{bmatrix} -s & & & & \\ & -s & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

donde s es el operador extra degeneración. Aplicando el lema (3.3.7) tenemos que la inclusión $(Id, -h\gamma) : (A_*, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (A_* \oplus A'_*, d)$ es un casi isomorfismo, donde:

$$\alpha - \beta h\gamma = \begin{bmatrix} b & B & & & & \\ & b & B & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & b & B \end{bmatrix}$$

Tenemos que el bicomplejo $\mathcal{B}(A)$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

satisface $H_n(Tot(\mathcal{B}(A))) = H_n(A_*, \alpha - \beta h\gamma) = H_n(A_* \oplus A'_*, d) = H_n(Tot(CC(A)))$ por el lema (3.3.7). De los dos métodos antes expuestos se concluye el siguiente teorema.

Teorema 3.3.8 ((b, B) Definición de Homología Cíclica) *Para toda k-álgebra A asociativa con unidad la aplicación inclusión $Tot(\mathcal{B}(A)) \longrightarrow Tot(CC(A))$ es un casi-isomorfismo.*

Observación 3.3.9 *Como B esta definido por $B = (1-t)sN$ tenemos que $B : A^{\otimes n+1} \to A^{\otimes n+2}$ es dado por*

$$\begin{aligned} B(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \;=\; & \sum_{i=0}^{n} [(-1)^{ni} 1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \\ & -(-1)^{ni} a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}] \end{aligned} .$$

3.3.4. Secuencia SBI para Álgebras

Teorema 3.3.10 (Secuencia exacta periódica de Connes) *Para toda A álgebra asociativa (no necesariamente con unidad) existe una secuencia exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \xrightarrow{I_*} HC_n(A) \xrightarrow{S_*} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B_*} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Demostración: La prueba del teorema es dada para el caso A con unidad. Como el bicomplejo $\mathcal{B}(A)$ es el complejo mixto $(C_*(A), b, B)$, por el teorema (3.3.8) la homología cíclica de A es dada por $HC_*(A) = HC_*(C_*(A), b, B)$. Para el complejo mixto $(C_*(A), b, B)$ aplicamos (3.2.2), obteniéndose la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \xrightarrow{I_*} HC_n(A) \xrightarrow{S_*} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B_*} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

llamada sucesión o secuencia exacta larga de Connes.
En el caso de A sin unidad requeriremos de otros resultados que no son considerados en la tesis. ■

3.4. El bicomplejo $\overline{\mathcal{B}}(A)$

El (b, B) bicomplejo $\mathcal{B}(A)$ puede ser simplificado más reemplazando los complejos de Hochschild por sus normalizados.
Sea $\overline{A} = A/k$ y consideremos el nuevo bicomplejo $\overline{\mathcal{B}}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] \\
A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \otimes \overline{A} \arrow[l, "\overline{B}"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\overline{B}"'] \\
A \otimes \overline{A} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\overline{B}"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{B} = sN : A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n+1}$ está dado por la formula

$$\overline{B}(a_0 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} 1 \otimes \overline{a}_i \otimes \cdots \overline{a}_n \otimes \overline{a}_0 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_{i-1}$$

Corolario 3.4.1 *Para toda k-álgebra A la aplicación sobreyectiva de bicomplejos*

$$\mathcal{B}(A) \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}(A)$$

es un casi-isomorfismo.

Demostración: Denotemos por $\overline{HH}_*(A) = HH(\overline{C}_*(A), b)$ y $\overline{HC}_*(A) = H_*(Tot(\overline{\mathcal{B}}(A)))$.
Del siguiente diagrama conmutativo de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Tot(C_*(A), b) \arrow[r, "I"] \arrow[d] & Tot(\mathcal{B}(A)) \arrow[r, "S"] \arrow[d] & Tot(\mathcal{B}(A)[1,1]) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Tot(\overline{C}_*(A), b) \arrow[r, "\overline{I}"] & Tot(\overline{\mathcal{B}}(A)) \arrow[r, "\overline{S}"] & Tot(\overline{\mathcal{B}}(A)[1,1]) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se obtiene por el teorema (1.3.10) el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HH_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HC_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{n-2}(A) \arrow[r] \arrow[d] & HH_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{HH}_n(A) \arrow[r] & \overline{HC}_n(A) \arrow[r] & \overline{HC}_{n-2}(A) \arrow[r] & \overline{HH}_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde los isomorfismos $HH_n(A) \to \overline{HH}_n(A)$ siguen de la proposisión (2.4.3).
Consideremos la siguiente sección del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HC_{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & HH_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HC_0(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{-2}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{HC}_{-1}(A) \arrow[r] & \overline{HH}_0(A) \arrow[r] & \overline{HC}_0(A) \arrow[r] & \overline{HC}_{-2}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por ser $HC_{-1}(A) = HC_{-2}(A) = 0$ y $\overline{HC}_{-1}(A) = \overline{HC}_{-2}(A) = 0$ se tiene que $HH_0(A) \cong HC_0(A)$ y $\overline{HH}_0(A) \cong \overline{HC}_0(A)$. Además sabemos que $HH_0(A) \cong \overline{HH}_0(A)$ entonces $HC_0(A) \cong \overline{HC}_0(A)$.
Analicemos el siguiente fragmento de las secuencias

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HC_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HH_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HC_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & HH_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{HC}_0(A) \arrow[r] & \overline{HH}_1(A) \arrow[r] & \overline{HC}_1(A) \arrow[r] & \overline{HC}_{-1}(A) \arrow[r] & \overline{HH}_0(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Usando el resultado anterior y el "lema de los cinco" (1.2.5) se tiene $HC_1(A) \cong \overline{HC}_1(A)$. Luego para el siguiente fragmento

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HC_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HH_2(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HC_2(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & HH_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{HC}_1(A) \arrow[r] & \overline{HH}_2(A) \arrow[r] & \overline{HC}_2(A) \arrow[r] & \overline{HC}_0(A) \arrow[r] & \overline{HH}_1(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

se tiene $HC_2(A) \cong \overline{HC}_2(A)$. Inductivamente se tiene para el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HC_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HH_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & HC_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{n-2}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & HH_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{HC}_{n-1}(A) \arrow[r] & \overline{HH}_n(A) \arrow[r] & \overline{HC}_n(A) \arrow[r] & \overline{HC}_{n-2}(A) \arrow[r] & \overline{HH}_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

que $HC_n(A) \cong \overline{HC}_n(A)$. ■

Observación 3.4.2 *Para toda k-álgebra A están definidos los morfismos de complejos*

$$Tot(\overline{\mathcal{B}}(A)) \longleftarrow Tot(\mathcal{B}(A)) \hookrightarrow Tot(CC(A)) \longrightarrow C^{\lambda}(A)\ .$$

Los dos primeros son casi isomorfismos. El último es un casi-isomorfismo si $\mathbb{Q} \subseteq K$.

Capítulo 4

Aplicación:

4.1. Cálculo de la Homología Cíclica de A=T(V)

Sean k un anillo conmutativo con unidad y V un k-módulo proyectivo de característica 0.
Denotemos por $A = T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$, con $V^{\otimes 0} = k$ al álgebra tensorial del k-módulo V, donde la multiplicación sobre A es inducida por

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}.$$

Demostraremos que la siguiente sucesión es una resolución proyectiva de A como $A \otimes A^{op}$-módulo:

$$0 \longrightarrow A \otimes V \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \qquad (4.1)$$

(considerando $A \otimes V \otimes A$ como un submódulo de $C'_1(A) = A^{\otimes 3}$), donde

$$\begin{array}{rccc} b': & A \otimes V \otimes A & \longrightarrow & A \otimes A \\ & a_0 \otimes v \otimes a_1 & \longmapsto & a_0 v \otimes a_1 - a_0 \otimes v a_1 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \mu: & A \otimes A & \longrightarrow & A \\ & a \otimes a' & \longmapsto & aa' \end{array}.$$

Definamos las aplicaciones:

$$\begin{array}{rccc} s'_{-1}: & A & \longrightarrow & A \otimes A \\ & a & \longmapsto & a \otimes 1 \end{array}$$

$s'_0 : A \otimes A \to A \otimes V \otimes A$ como $s'_0|_{A\otimes k} = 0$ y

$$s'_0(a \otimes a') = -\sum_{i=1}^{p-1}[(av_1 \cdots v_{i-1}) \otimes v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_p] - (av_1 \cdots v_{p-1}) \otimes v_p \otimes 1,$$

las cuales verifican:

- $\mu s'_{-1} = Id_A$:
$$\mu s'_{-1}(a) = \mu(a \otimes 1) = a1 = a$$
- $b's'_0 + s'_{-1}\mu = Id_{A\otimes A}$:

  $$(b's'_0 + s'_{-1}\mu)(a \otimes a') = b's'_0(a \otimes a') + s'_{-1}\mu(a \otimes a') = b's'_0(a \otimes a') + s'_{-1}(aa')$$

  Si $a' = \widehat{k} \in k$

  $$(b's'_0 + s'_{-1}\mu)(a \otimes \widehat{k}) = b' \underbrace{s'_0(a \otimes \widehat{k})}_{0} + s'_{-1}(a\widehat{k}) = a\widehat{k} \otimes 1 = a \otimes \widehat{k}.$$

  Si $a' = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$

  $$b'[s'_0(a \otimes a')]$$

  $$= b'\left[-\sum_{i=1}^{p-1}[(av_1 \cdots v_{i-1}) \otimes v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_p] - (av_1 \cdots v_{p-1}) \otimes v_p \otimes 1\right]$$
  $$= -\sum_{i=1}^{p-1}[(av_1 \cdots v_i) \otimes (v_{i+1} \cdots v_p)] + \sum_{i=1}^{p-1}[(av_1 \cdots v_{i-1}) \otimes (v_i \cdots v_p)] - (av_1 \cdots \otimes v_p) \otimes 1 + (av_1 \cdots v_{p-1}) \otimes v_p = a \otimes (v_1 v_2 \cdots v_p) - (av_1 \cdots v_p) \otimes 1.$$

  Entonces

  $$(b's'_0 + s'_{-1}\mu)(a \otimes a') = a \otimes (v_1 \cdots v_p) - (\underbrace{av_1 \cdots v_p}_{aa'}) \otimes 1 + aa' \otimes 1 = a \otimes a'.$$
- $s'_0 b' = Id_{A\otimes V\otimes A}$:

  $$s'_0 b'(a \otimes v \otimes a') = s'_0(av \otimes a') - s'_0(a \otimes va')$$

  Si $a' = \widehat{k} \in k$

  $$s'_0 b'(a \otimes v \otimes \widehat{k}) = \underbrace{s'_0(av \otimes \widehat{k})}_{0} - s'_0(a \otimes v\widehat{k}) = -s'_0(a \otimes v\widehat{k}) = a \otimes v\widehat{k} \otimes 1 = a \otimes v \otimes \widehat{k}.$$

Si $a' = v_1 \cdots v_p$

$s_0'b'(a \otimes v \otimes a') = -av \otimes v_1 \otimes (v_2 \cdots v_p) - \sum_{i=2}^{p-1}(avv_1 \cdots v_{i-1}) \otimes v_i \otimes (v_{i+1} \cdots v_p) - (avv_1 \cdots v_{p-1}) \otimes v_p \otimes 1 + a \otimes v \otimes a' + av \otimes v_1 \otimes (v_2 \cdots v_p) + \sum_{i=2}^{p-1}(avv_1 \cdots v_{i-1}) \otimes v_i \otimes (v_{i+1} \cdots v_p) + (avv_1 \cdots v_{p-1}) \otimes v_p \otimes 1 = a \otimes v \otimes a'.$

Con ello se prueba que s' es una homotopía contractante, obteniendo que (4.1) es una resolución de A. Como V es k-proyectivo, $A \otimes V \otimes A$ es un $A \otimes A^{op}$- módulo proyectivo (con la operación $(a \otimes a')(a_1 \otimes v \otimes a_2) = (aa_1) \otimes v \otimes (a'a_2)$). Se tiene que (4.1) es una resolución proyectiva de A. La resolución reducida es

$$0 \longrightarrow A \otimes V \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

Por el teorema (2.3.4) la Homología de Hochschild está dada por la homología del complejo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes V \otimes A) \arrow[r, "Id\otimes b'"] \arrow[d, "\gamma", "\cong"'] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes A) \arrow[r] \arrow[d, "\psi", "\cong"'] & 0 \\
& A \otimes V \arrow[r, "b"] & A &
\end{tikzcd}$$

donde

$$\gamma: \quad A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes V \otimes A) \longrightarrow A \otimes V$$

$$\widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} (a \otimes v \otimes a') \longmapsto [\widehat{a}(a \otimes a')] \otimes v = (a'\widehat{a}a) \otimes v$$

tiene inversa

$$\gamma': \quad A \otimes V \longrightarrow A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes V \otimes A)$$

$$a \otimes v \longmapsto a \otimes_{A\otimes A^{op}} (1 \otimes v \otimes 1).$$

La inversa de

$$\psi: \quad A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes A) \longrightarrow A$$

$$\widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} (a \otimes a') \longmapsto \widehat{a}(a \otimes a') = a'\widehat{a}a$$

está dada por

$$\begin{aligned} \psi' : \qquad A &\longrightarrow A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes A) \\ a' &\longmapsto a' \otimes_{A\otimes A^{op}} (1 \otimes 1) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} b : \qquad A \otimes V &\longrightarrow A \\ a \otimes v &\longmapsto av - va. \end{aligned}$$

Veamos que $b \circ \gamma = \psi \circ (Id \otimes b')$, evaluando sobre los tensores elementales:

$$b \circ \gamma[\widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} (a \otimes v \otimes a')] = b[(a'\widehat{a}a) \otimes v] = a'\widehat{a}av - va'\widehat{a}a$$

$$\begin{aligned} \psi \circ (1 \otimes b)[\widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} (a \otimes v \otimes a')] &= \psi(\widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} [b'(a \otimes v \otimes a')]) \\ &= \psi[\widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} (av \otimes a' - a \otimes va')] \\ &= \psi[\widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} (av \otimes a') - \widehat{a} \otimes_{A\otimes A^{op}} (a \otimes va')] \\ &= \widehat{a}(av \otimes a') - \widehat{a}(a \otimes va') \\ &= a'\widehat{a}av - va'\widehat{a}a. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos calcular HH a partir del complejo

$$0 \longrightarrow A \otimes V \xrightarrow{b} A \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

En particular

$$\begin{aligned} HH_n(T(V)) &= Tor_n^{A\otimes A^{op}}(A) = 0, & n \geq 2 \\ HH_1(T(V)) &= Tor_1^{A\otimes A^{op}}(A) = \mathrm{Nu}(b) \\ HH_0(T(V)) &= Tor_0^{A\otimes A^{op}}(A) = \frac{A}{\operatorname{Im} b} = \text{Conúcleo}(b). \end{aligned}$$

Analicemos el morfismo b en detalle.
Denotemos con σ la permutación cíclica sobre $V^{\otimes n}$,

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_n \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}.$$

Escribamos

$$A = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

y

$$A \otimes V = (k \otimes V) \oplus (V \otimes V) \oplus (V^{\otimes 2} \otimes V) \oplus (V^{\otimes 3} \otimes V) \oplus \cdots \oplus (V^{\otimes n} \otimes V) \oplus \cdots .$$

Entonces tenemos

$$
\begin{array}{ccc}
A \otimes V & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad b \qquad\qquad\qquad\qquad} & A \\
\| & & \| \\
 & & k \\
 & & \oplus \\
k \otimes V & \widehat{k} \otimes v \longmapsto 0 & V \\
\oplus & & \oplus \\
V \otimes V & v_1 \otimes v \longmapsto v_1 \otimes v - v \otimes v_1 & V^{\otimes 2} \\
\oplus & & \oplus \\
V^{\otimes 2} \otimes V & (v_1 \otimes v_2) \otimes v \longmapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v - v \otimes v_1 \otimes v_2 & V^{\otimes 3} \\
\oplus & & \oplus \\
\vdots & & \vdots \\
\oplus & & \oplus \\
V^{\otimes n} \otimes V & (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes v \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes v - v \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & V^{\otimes n+1} \\
\oplus & & \oplus \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

de lo cual se obtiene que $b : A \otimes V \to A$ es dado en cada nivel por $b = Id - \sigma : V^{\otimes n} \otimes V \to V^{\otimes n+1}$. Como el espacio invariante de σ es dado por $(V^{\otimes n})^{\sigma} = \mathrm{Nu}(Id - \sigma)$ y el espacio coinvariante como $(V^{\otimes n})_{\sigma} = \text{Conúcleo}(Id - \sigma)$. Entonces

$$
HH_1(T(V)) = \mathrm{Nu}(Id - \sigma) = T(V)^{\sigma} = \bigoplus_{m \geq 1} \left(V^{\otimes m}\right)^{\sigma}
$$

y

$$
HH_0(T(V)) = \frac{A}{\operatorname{Im} b} = \text{Conúcleo}(Id - \sigma) = (T(V))_{\sigma} = k \oplus \bigoplus_{m \geq 1} \left(V^{\otimes m}\right)_{\sigma} .
$$

Ya calculamos $HH(T(V))$, ahora calculemos $HC(T(V))$. Para esto tenemos por el teorema (3.3.10) que existe una sucesión exacta larga:

$$
\cdots \longrightarrow HC_{n-1}(A) \xrightarrow{B_*} HH_n(A) \xrightarrow{I_*} HC_n(A) \xrightarrow{S_*} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B_*} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots
$$

De ello se tiene:

$$\begin{tikzcd}
HC_2(A) \arrow[r] & HC_0(A) \arrow[r] & HH_1(A) \arrow[r] & HC_1(A) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & HH_0(A) \arrow[r] & HC_0(A) \arrow[r] & 0 \\
HH_2(A) \arrow[u] & & & & & & & \\
HC_1(A) \arrow[u] & HC_3(A) \arrow[l] & HH_3(A) \arrow[l] & HC_2(A) \arrow[l] & HC_4(A) \arrow[l] & HH_4(A) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Del complejo anterior se observa que:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow HH_0(A) \longrightarrow HC_0(A) \longrightarrow 0$$

por lo cual

$$HH_0(A) \cong HC_0(A). \tag{4.4}$$

Por (4.3) tenemos que $HH_n(A) = 0$, $n \geq 2$ y se obtiene:

$$\begin{tikzcd}
HC_2(A) \arrow[r] & HC_0(A) \arrow[r] & HH_1(A) \arrow[r] & HC_1(A) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & HH_0(A) \arrow[r] & HC_0(A) \arrow[r] & 0 \\
\underbrace{HH_2(A)}_{0} \arrow[u] & & & & & & & \\
HC_1(A) \arrow[u] & HC_3(A) \arrow[l] & \underbrace{HH_3(A)}_{0} \arrow[l] & HC_2(A) \arrow[l] & HC_4(A) \arrow[l] & \underbrace{HH_4(A)}_{0} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] &
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Por lo tanto:

$$HC_1(A) \cong HC_3(A) \cong HC_5(A) \cong \cdots \cong HC_{2n+1}(A), \quad n \geq 1. \tag{4.6}$$

$$HC_2(A) \cong HC_4(A) \cong HC_6(A) \cong \cdots \cong HC_{2n}(A), \quad n \geq 1. \tag{4.7}$$

De (4.5) se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow HC_2(A) \xrightarrow{S_*} HC_0(A) \xrightarrow{B_*} HH_1(A) \xrightarrow{I_*} HC_1(A) \longrightarrow 0$$

Por ser I es sobreyectiva y S inyectiva:

$$HC_1(A) \cong \frac{HH_1(A)}{\operatorname{Nu} I_*} = \frac{HH_1(A)}{\operatorname{Im} B_*}$$

$$HC_2(A) \cong \operatorname{Im} S_* = \operatorname{Nu} B_*$$

Para tener una descripción concreta de $HC_1(A)$ y $HC_2(A)$ es necesario entender en detalle el morfismo $B_* : HH_0(A) \to HH_1(A)$, en particular su Núcleo y Conúcleo. En lo que resta del capitulo vamos a ver como expresarlos en función de los grupos de homología de $G = \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ con coeficientes en $V^{\otimes j}$, $j \geq 1$. Para esto tenemos el siguiente resultado.

Afirmación 4.1.0.1 $(B_*)_j = \dfrac{2}{j} \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \sigma_*^i.$

Demostración: Por la observación (3.2.3) se tiene que $B_* : (T(V))_\sigma = \text{Conúcleo}(b) \to (T(V))^\sigma = \text{Nu}(b)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes V \otimes A) \arrow[r, "Id\otimes b'"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes A) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "B"'] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
& A \otimes V \arrow[r, "b"] & A &
\end{tikzcd}$$

Se tiene $B : A \to A \otimes A$, tomemos $v_1 \cdots v_j$ un elemento de $V^{\otimes j}$ (denotando $v_1 \cdots v_j$ a $v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \in V^{\otimes j}$) e identificando el tensor exterior como el interior, donde

$$B(v_1 \cdots v_j) = 1 \otimes v_1 \cdots v_j.$$

Notemos que por lo anterior las dos filas son homótopicamente equivalentes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b"] & A \otimes A \arrow[r, "b"] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \otimes V \arrow[r, "b"] \arrow[u, hook] & A \arrow[r] \arrow[u, "="] \arrow[l, bend left, "B"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto es suficiente probar que

$$B(v_1 \cdots v_j) = \frac{2}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \sigma^i(v_1 \cdots v_j) + b(z'_{v_1 \cdots v_j})$$

para concluir el lema.
Para $b : A \otimes A \otimes A \to A \otimes A$ se tiene:

$b(1 \otimes v_{j-1} \otimes v_j v_1 \cdots v_{j-2} - 1 \otimes v_{j-1} v_j \otimes v_1 \cdots v_{j-2})$

$$\begin{aligned}
&= b(1 \otimes v_{j-1} \otimes v_j v_1 \cdots v_{j-2}) - b(1 \otimes v_{j-1} v_j \otimes v_1 \cdots v_{j-2}) \\
&= v_{j-1} \otimes v_j v_1 \cdots v_{j-2} - 1 \otimes v_{j-1} v_j v_1 \cdots v_{j-2} + v_j v_1 \cdots v_{j-2} \otimes v_{j-1} \\
&\quad - v_{j-1} v_j \otimes v_1 \cdots v_{j-2} + 1 \otimes v_{j-1} v_j v_1 \cdots v_{j-2} - v_1 \cdots v_{j-2} \otimes v_{j-1} v_j \\
&= v_j v_1 \cdots v_{j-2} \otimes v_{j-1} - v_1 \cdots v_{j-2} \otimes v_{j-1} v_j = v_j v_1 \cdots v_{j-1} - v_1 \cdots v_j \\
&= \sigma(v_1 \cdots v_j) - v_1 \cdots v_j
\end{aligned}$$

Luego se tiene:

$$\sigma(v_1 \cdots v_j) = v_1 \dots v_j + b(\underbrace{1 \otimes v_{j-1} \otimes v_j v_1 \cdots v_{j-2} - 1 \otimes v_{j-1} v_j \otimes v_1 \cdots v_{j-2}}_{y_1(v_1 \cdots v_j)})$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(v_1 \cdots v_j) &= \sigma(v_j v_1 \cdots v_{j-1}) \\
&= v_j v_1 \cdots v_{j-1} + b(y_1(v_j v_1 \cdots v_{j-1})) \\
&= \sigma(v_1 \cdots v_j) + b(y_1(\sigma(v_1 \cdots v_j))) \\
&= v_1 \cdots v_j + b(v_1 \cdots v_j) + b(y_1(\sigma(v_1 \cdots v_j))) \\
&= v_1 \cdots v_j + b(\underbrace{v_1 \cdots v_j + y_1(\sigma(v_1 \cdots v_j))}_{y_2(v_1 \cdots v_j)}).
\end{aligned}$$

Procediendo inductivamente obtenemos:

$$\sigma^i(v_1 \cdots v_j) = v_1 \cdots v_j + b(y_i(v_1 \cdots v_j)), \quad 1 \leq i \leq j-1.$$

Como $\sigma^j = Id$ para $i = j-1$,

$$\sigma^{-1}(v_1 \cdots v_j) = v_1 \cdots v_j + b(y_{j-1}(v_1 \cdots v_j)). \tag{4.8}$$

Entonces

$$b(1 \otimes v_1 \otimes v_2 \cdots v_j) = v_1 \otimes v_2 \cdots v_j - \underbrace{1 \otimes v_1 \cdots v_j}_{B(v_1 \cdots v_j)} + v_2 \cdots v_j \otimes v_1,$$

luego $B(v_1 \cdots v_j) = v_1 \otimes v_2 \cdots v_j + v_2 \cdots v_j \otimes v_1 - b(\underbrace{1 \otimes v_1 \otimes v_2 \cdots v_j}_{x_{v_1 \cdots v_j}})$,

equivalentemente

$$B(v_1 \cdots v_j) = v_1 \cdots v_j + \sigma^{-1}(v_1 \cdots v_j) - b(x_{v_1 \cdots v_j}). \tag{4.9}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j-1} \sigma^i(v_1 \cdots v_j) &= \sum_{i=0}^{j-1} \big(v_1 \cdots v_j + b(y_i(v_1 \cdots v_j))\big) \\
&= j v_1 \cdots v_j + b\left(\sum_{i=0}^{j-1} y_i(v_1 \cdots v_j)\right) \\
&= j\frac{1}{2}(v_1 \cdots v_j + v_1 \cdots v_j) + b\left(\sum_{i=0}^{j-1} y_i(v_1 \cdots v_j)\right),
\end{aligned}$$

reemplazando las ecuaciones (4.8) y (4.9), se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j-1}\sigma^i(v_1\cdots v_j) &= \frac{j}{2}(v_1\cdots v_j+\sigma^{-1}(v_1\cdots v_j)-b(y_{j-1}(v_1\cdots v_j)))+b\left(\sum_{i=0}^{j-1}y_i(v_1\cdots v_j)\right)\\
&= \frac{j}{2}\big(B(v_1\cdots v_j)+b(x_{v_1\cdots v_j})-b(y_{j-1}(v_1\cdots v_j))\big)+b\left(\sum_{i=0}^{j-1}y_i(v_1\cdots v_j)\right)\\
&= \frac{j}{2}B(v_1\cdots v_j)+b\big(z(v_1\cdots v_j)\big)
\end{aligned}$$

Entonces :

$$B(v_1\cdots v_j)=\frac{2}{j}\sum_{i=0}^{j-1}\sigma^i(v_1\cdots v_j)+b({z'}_{v_1\cdots v_j})$$

lo cual concluye la prueba. ■

Identificando σ_* con σ se tiene:

$$HC_1(A)\cong\frac{HH_1(A)}{\operatorname{Im}B_*}=\frac{T(V)^\sigma}{\operatorname{Im}B_*}=\bigoplus_{j\geq 1}\frac{(V^{\otimes j})^\sigma}{\operatorname{Im}(1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{j-1})}$$

$$HC_2(A)\cong k\oplus\bigoplus_{j\geq 1}\operatorname{Nu}(B_*)_j=k\oplus\bigoplus_{j\geq 1}\{\alpha\in(V^{\otimes j})_\sigma/(1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{j-1})(\alpha)=0\} \tag{4.10}$$

Afirmación 4.1.0.2

$$HC_{2n}(A)\cong k\oplus\bigoplus_{j\geq 1}H_{2n}(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z},V^{\otimes j})$$

$$HC_{2n-1}(A)\cong\bigoplus_{j\geq 1}H_{2n-1}(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z},V^{\otimes j})$$

Demostración: En la definición (3.3.3), para cada $j\geq 1$ consideremos $M=V^{\otimes j}$, el cual es un $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$-módulo a izquierda sobre k con la aplicación

$$t^i\cdot(v_1\cdots v_j)=t^i(v_1\cdots v_j)=v_{j-i-1}\cdots v_jv_1\cdots v_{j-i},\quad 1\leq i\leq j-1$$

donde $G=\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$, $N=1+t+t^2+\cdots+t^{j-1}$. Poniendo $t=\sigma$, se obtiene el complejo:

$$C:\qquad \cdots\longrightarrow V^{\otimes j}\xrightarrow{N}V^{\otimes j}\xrightarrow{1-\sigma}V^{\otimes j}\xrightarrow{N}V^{\otimes j}\xrightarrow{1-\sigma}V^{\otimes j} \tag{4.11}$$

donde

$$H_0(G,M) = \frac{V^{\otimes j}}{\mathrm{Im}(1-\sigma)} = (V^{\otimes j})_\sigma$$

$$H_{2n-1}(G,M) = H_1(G,M) = \frac{\mathrm{Nu}(1-\sigma)}{\mathrm{Im}\,N} = \frac{(V^{\otimes j})^\sigma}{\mathrm{Im}(1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{j-1})}, \quad n \geq 1$$

y

$$H_{2n}(G,M) = H_2(G,M) = \frac{\mathrm{Nu}(N)}{\mathrm{Im}(1-\sigma)}, \quad n \geq 1.$$

De (4.11) y la proposición (1.3.7) se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H_2(G, V^{\otimes j}) \longrightarrow (V^{\otimes j})_\sigma \xrightarrow{N} V^{\otimes j} \longrightarrow 0$$

por lo cual

$$H_2(G,M) \cong \mathrm{Nu}\,N = \mathrm{Nu}(B_*)_j = \{\alpha \in (V^{\otimes j})_\sigma / (1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{j-1})(\alpha) = 0\}.$$

De (4.10) se concluye:

$$HC_{2n}(A) = k \oplus \bigoplus_{j\geq 1} H_{2n}(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, V^{\otimes j}), \quad n \geq 1$$

$$HC_{2n-1}(A) = \bigoplus_{j\geq 1} H_{2n-1}(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, V^{\otimes j}), \quad n \geq 1.$$

■

Capítulo 5

Conclusiones:

1. La herramienta más utilizada que permite determinar la homología cíclica de las álgebras tensoriales es la secuencia SBI, como se vio en el capítulo 4 .

2. La homología de Hochschild es una obstrucción para que la homología cíclica sea periódica.

3. Una de las posibles extensiones de este trabajo es el estudio en K-Teoría, ya que está íntimamente relacionada con la homología cíclica.

4. La homología cíclica tiene aplicaciones en geometría no conmutativa, álgebras de Hopf, teoría modular, grupos cuánticos y física.

Bibliografía

[1] Micheline Vigué, *Homologie de Hochschild, Homologie Cyclique*, Universidad de Buenos Aires, 1995.

[2] Jean-Louis Loday, *Cyclic Homology*, Springer, 1998.

[3] Joseph J. Rotman *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.

[4] José Augusto Molina Garay *Tesis de Maestría : Teorema de Escisión de Wodzicki para Pro-Álgebras*, Universidad Nacional de Ingeniería, Agosto 2004.

[5] Emilio Lluis-Puebla *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-teoría Algebraica Clásica*, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.