UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Algunos comentarios sobre la teoría de juegos y la teoría de puntos fijos, desde el punto de vista de la teoría de las correspondencias

por

Luis Daniel Muñoz Ramos

Tesis para Optar
el Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMÁTICA

Prof. William Carlos Echegaray Castillo
Asesor

UNI, marzo del 2008

Dedico este trabajo al inspirador y gran Maestro
Eugen Blum.

Agradezco al Profesor William Carlos Echegaray Castillo por la orientación para la culminación del presente trabajo y también deseo agradecer a todas aquellas personas que de una u otra forma me ayudaron a terminar este trabajo, en especial a mi esposa Elsa y a mis hijas Andrea, Daniela y Alejandra.

Resumen

En el capítulo 2: hacemos una breve introducción de la Teoría de Juegos, la cual se a llamado **Un paseo en Teoría de Juegos**; el objetivo es explicar los elementos que intervienen en un modelo de un juego no cooperativo. Con este paseo motivamos de una manera natural, como aparecen las correspondencias de respuesta óptima, el equilibrio de Nash, semicontinuidad superior para correspondencias y el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, para llegar al equilibrio de Nash.

En el capítulo 3: desarrollamos herramientas básicas, para tratar los subsiguientes capítulos. Revisamos conceptos y resultados básicos de álgebra lineal, topología, análisis funcional y análisis convexo.

En el capítulo 4: introducimos el concepto de correspondencia, y definimos su inversa superior e inferior así como también definimos diversos tipos de continuidad para correspondencias, también presentamos algunos teoremas que las relacionan y que nos serán de utilidad en los subsiguientes capítulos.

En el capítulo 5: desarrollamos los **Teoremas del Máximo de Berge**, **Teorema de Punto Fijo de Kakutani** (1911-2004) y el **Teorema de Equilibrio para Juegos No Cooperativos de Nash**.

Índice general

1. Introducción. **1**

2. Un paseo por la Teoría de Juegos **3**
2.1. Introducción 3
2.2. Juego piedra-papel-tijera 3
2.3. Juego de las monedas 6
2.4. Dilema del prisionero 6
2.5. Duopolio de Cournot 7
2.6. El Equilibrio de Nash en Estrategias Puras 8
2.7. Correspondencia de Respuesta óptima 11
2.8. Juego de la mayor diferencia 11
2.9. Juego de las peticiones de Nash 12
2.10. Estrategias Mixtas 14
2.11. Ganancias Esperadas en Juegos Bipersonales 15

3. Preliminares **19**
3.1. Espacios Vectoriales 19
3.2. Espacios Métricos 22
3.3. Convergencia y Continuidad 25
3.4. Compacidad para Espacios Métricos Euclidianos 28
3.5. Partición de la Unidad 31
3.6. Conceptos de Convexidad 36
3.7. Funciones Semicontinuas 38

4. Correspondencias **43**
4.1. Definiciones Previas 43
4.2. Semi-continuidad de Correspondencias 49
4.3. Correspondencias Cerradas 54

5. Teoremas de Punto Fijo **62**
5.1. Teorema del Máximo de Berge 62

5.2. Teorema de Punto Fijo 66
5.3. Existencia del Equilibrio de Nash 72

6. Conclusiones de la Tesis **74**

Bibliografía **80**

Índice de figuras

2.1. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: el juego de las dos monedas. . . . 18

3.1. Funciones Semicontinuas Superiormente, la bola llena indica $f(x_0)$ 39
3.2. Funciones Semicontinuas Inferiormente, la bola llena indica $f(x_0)$ 39

4.1. La subdiferencial de una función convexa como una función de argumento x. 44
4.2. Gráfica de una correspondencia s.c.s. pero no s.c.i. 50
4.3. Gráfica de $\varphi(x)$ 54

Índice de cuadros

2.1. El juego de piedra, papel o tijeras. 4
2.2. El juego de las dos monedas. 6
2.3. Dilema del prisionero. 7
2.4. El equilibrio de Nash en el juego del dilema del prisionero. 9
2.5. Juegos bipersonales, en el juego de las dos monedas. 16

Capítulo 1

Introducción.

La Teoría de las Correspondencias aparece por los años 1920-1930, para después desaparecer, hasta su redescubrimiento por **Claude Berge**[1] (1926-2002), quien en su famoso libro **Espace Topologiques: Fonctions multivoques**; publicado en 1959 (ver [4]), donde presenta su Teorema de Máximo.

Actualmente las correspondencias, resultan ser un instrumento valioso y natural en varios campos de la matemática, como en el análisis convexo, la optimización no suave, el análisis variacional, la diferenciación generalizada, la teoría de control óptimo, la teoría de juegos, la económica matemática, etc.

Teoremas sobre correspondencias continuas como los Teoremas del Máximo, el Teorema de Punto Fijo y el Teorema de Selección, tiene consecuencias importantes en una variedad de aplicaciones.

La tesis esta dividida en 6 capítulos, así:

- ⋆ En el segundo capítulo, hacemos una breve introducción de la Teoría de Juegos, la cual he llamado **Un paseo en Teoría de Juegos**; mi objetivo es explicar los elementos que intervienen en un modelo de un juego no cooperativo. Con este paseo motivamos de una manera natural, como aparecen las correspondencias de respuesta óptima, el equilibrio de Nash, hemicontinuidad superior y el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, para llegar al equilibrio de Nash.

- ⋆ En el tercer capítulo, desarrollamos herramientas básicas, para tratar los subsiguientes capítulos. Revisamos conceptos y resultados básicos de álgebra

[1] Matemático francés, reconocido como uno de los fundadores de la **Teoría Moderna de Grafos** y de la **Teoría Combinatorial**. Es especialmente recordado por su famosa conjeturas sobre **Grafos Perfectos** y el **Lema de Berge**.

lineal, topología, análisis funcional y análisis convexo.

⋆ En el cuarto capítulo, introducimos el concepto de correspondencia, y definimos su inversa superior e inferior, así como también definimos diversos tipos de continuidad para correspondencias, también presentamos algunos teoremas que las relacionan y que nos serán de utilidad en los subsiguientes capítulos,

⋆ En el quinto capítulo, desarrollamos los **Teoremas del Máximo de Berge**, **Teorema de Punto Fijo de Kakutani** (1911-2004) y el **Teorema de Equilibrio para Juegos No Cooperativos de Nash**.

  El Teorema de Punto Fijo de Kakutani, que no es más que la generalización, del **Teorema de Punto Fijo de Brouwer**; es importante entre otras cosas, porque fue utilizado por **Gerard Debreu** (1921-2004) y **John F. Nash** (1911-), en sus trabajos que fueron premiados con el Nobel en Economía en 1983 y 1994.

El Teorema de Nash (Tesis de Doctorado, Mayo 1950, 27 páginas, tenía 21 años en la universidad de Princeton, U.S.A.) es importante porque destierra la tesis que en 1776 sustentara Adam Smith, considerado padre de la economía moderna, en su obra La Riqueza de las Naciones; que el máximo nivel de bienestar social se genera cuando cada individuo, en forma egoista persigue su máximo bienestar y nada mas que ello. Nash sustenta que una sociedad maximiza su nivel de bienestar cuando cada uno de sus individuos busca su máximo bienestar, pero sin perder de vista el bienestar de los demás integrantes del grupo.

Capítulo 2

Un paseo por la Teoría de Juegos

2.1. Introducción

En este capitulo haremos una breve introducción a la **Teoría de Juegos** con el objetivo de mostrar la importancia de la Teoría de puntos fijos y la Teoría de las correspondencias en el desarrollo de la Teoría de juegos.

En general, en la formalización matemática para modelar los diferentes problemas en la Teoría de juegos, se consideran los siguientes tres elementos:

1. Un conjunto de indices para denotar a los participantes, o jugadores.

2. Para cada jugador, un conjunto de estrategias.

3. Para cada jugador una función de utilidad o de pagos.

2.2. Juego piedra-papel-tijera

El primer juego a considerar es un juego muy conocido y llamado **piedra-papel-tijera**.

Dos niños juegan a la vez, de modo que el conjunto de participantes son niño A y niño B, los dos niños escogen simultáneamente una de las tres opciones; éstas son las estrategias disponibles para cada uno: ***Piedra****,* ***Papel*** *ó* ***Tijera****. Y dependiendo de lo que cada niño escoja, el juego lo gana uno de los niños, o bien es un empate: Si los dos escogen la misma opción, el juego se empata; si uno escoge la piedra y el otro papel,* *gana quien escoge papel (el papel cubre la piedra). Si uno escoge la piedra y el otro la tijera, gana el que escoge piedra (La piedra rompe a la tijera). Si uno escoge el papel y el otro la tijera, gana quien escoge tijera (La tijera corta el papel). Por lo tanto, si decimos que se paga* 1 *al niño que gana, el pago por la pérdida es* -1*, y el pago por un empate es 0, podremos representar estos pagos del juego con el cuadro 1.1.*

Niño B

Niño A

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1,-1	0,0

Cuadro 2.1: El juego de piedra, papel o tijeras.

Se destaca del cuadro 1.1

1. *En virtud que hay dos jugadores, y cada uno dispone de tres estrategias, el conjunto de perfiles de estrategias o conjunto de estrategias se representa en cuadro de* 3×3
2. *Listamos las estrategias del niño A como filas en el cuadro, y las estrategias del niño B como columnas.*
3. *Para cada uno de las nueve* (3×3) *celdas del cuadro, damos el par de resultados para ambos niños; primero el pago del niño A y luego el pago del niño B.*

La formalización matemática de este juego es como sigue:

Sea: I = *conjunto de jugadores (conjunto finito). En nuestro caso* $I = \{1, 2\}$. *Para cada* $i \in I$ *consideremos el conjunto:* S_i = *conjunto de estrategias del* $i-$*ésimo jugador. En* *este juego:*

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{conjunto de estrategias del niño A (jugador 1)} \\ &= \{piedra,\ papel,\ tijera\} \\ S_2 &= \text{conjunto de estrategias del niño B (jugador 2)} \\ &= \{piedra,\ papel,\ tijera\} \end{aligned}$$

Para cada $i \in I$ consideremos una función μ_i como la función pago del $i-$ésimo jugador. $\mu_i : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ en nuestro juego.

$$\begin{array}{lrrlrr} \mu_1(\textit{piedra,piedra}) & = & 0 & \mu_2(\textit{piedra, piedra}) & = & 0 \\ \mu_1(\textit{piedra,papel}) & = & -1 & \mu_2(\textit{piedra,papel}) & = & 1 \\ \mu_1(\textit{piedra,tijera}) & = & 1 & \mu_2(\textit{piedra,tijera}) & = & -1 \\ \mu_1(\textit{papel,piedra}) & = & 1 & \mu_2(\textit{papel,piedra}) & = & -1 \\ \mu_1(\textit{papel,papel}) & = & 0 & \mu_2(\textit{papel,papel}) & = & 0 \\ \mu_1(\textit{papel,tijera}) & = & -1 & \mu_2(\textit{papel,tijera}) & = & 1 \\ \mu_1(\textit{tijera,piedra}) & = & -1 & \mu_2(\textit{tijera,piedra}) & = & 1 \\ \mu_1(\textit{tijera,papel}) & = & 1 & \mu_2(\textit{tijera,papel}) & = & -1 \\ \mu_1(\textit{tijera,tijera}) & = & 0 & \mu_2(\textit{tijera,tijera}) & = & 0 \end{array}$$

Definición 2.2.1. ***La representación*** *que llamaremos* ***representación en forma normal****, de un juego con n jugadores, es aquella que especifica los conjuntos de estrategias $S_1, \ldots, S_n$ que tienen los jugadores y sus funciones de ganancias o pagos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ para cada uno de los jugadores. Denotamos este juego con*

$$G = \{S_1, \ldots, S_n \quad ; \quad \mu_1, \ldots, \mu_n\}$$

donde $S_i \neq \emptyset$ y $\mu_i : S_1 \times S_2 \ldots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \ldots n$

2.3. Juego de las monedas

Los jugadores (1 y 2) extraen de sus bolsillos un nuevo sol cada uno y las lanzan de manera simultanea sobre una mesa. Si resultan dos caras o dos sellos, el jugador 2 recoge los dos nuevos soles, mientras que si hay cara y un sello, el jugador 1 se lleva los dos nuevos soles.

J_2

J_1		c	s
	c	-1,1	1,-1
	s	1,-1	-1,1

Cuadro 2.2: El juego de las dos monedas.

$c =$ cara, $s =$ sello, $n = 2$ jugadores

$$S_1 = \{c, s\}, S_2 = \{c, s\}, S_1 \times S_2 = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$$

$$\begin{array}{rclrcl} \mu_1(c,c) & = & -1 & \mu_2(c,c) & = & +1 \\ \mu_1(c,s) & = & 1 & \mu_2(c,s) & = & -1 \\ \mu_1(s,c) & = & +1 & \mu_2(s,c) & = & -1 \\ \mu_1(s,s) & = & -1 & \mu_2(s,s) & = & +1 \end{array}$$

$$\mu_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}, \qquad \mu_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$$

2.4. Dilema del prisionero

Dos delincuentes habituales son arrestados cuando acaban de cometer un delito. La policía no tiene evidencias suficientes para condenar a los sospechosos (no hay pruebas claras contra ellos), a menos que ellos confiesen. La policía encierra a los sospechosos en celdas separadas y les explica las consecuencias derivadas de las decisiones que tomen al realizar sus declaraciones.

Si ninguno confiesa, ambos serán condenados por un delito menor y sentenciados a un mes de cárcel. Si ambos confiesan, serán sentenciados a seis meses de cárcel. Finalmente si uno confiesa y el otro no, el que confiesa, será puesto en libertad inmediatamente y el otro será sentenciado a nueve meses de prisión, seis por delito y tres más por obstrucción a la justicia.

Preso 2

Preso 1		callarse	confesar
	callarse	-1,-1	-9,0
	confesar	0,-9	-6,-6

Cuadro 2.3: Dilema del prisionero.

$$n = 2 \quad jugadores$$
$$S_1 = \{callarse, confesar\},$$
$$S_2 = \{callarse, confesar\},$$
$$\mu_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \qquad \mu_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{lcrlcr}
\mu_1(callarse, callarse) & = & -1 & \mu_2(callarse, callarse) & = & -1 \\
\mu_1(confesar, callarse) & = & 0 & \mu_2(confesar, callarse) & = & -9 \\
\mu_1(callarse, confesar) & = & -9 & \mu_2(callarse, confesar) & = & 0 \\
\mu_1(confesar, confesar) & = & -6 & \mu_2(confesar, confesar) & = & -6
\end{array}$$

2.5. Duopolio de Cournot

Sean q_1 y q_2 las cantidades (de un producto homogéneo) producidas por las empresas 1 y 2 respectivamente. Sea $P(Q) = a - Q$ el precio de equilibrio de mercado cuando la cantidad agregada en el mercado es $Q = q_1 + q_2$ (De modo más preciso $P(Q) = a - Q$ para $Q \leq a$ y $P(Q) = 0$ para $Q > a$). Supongamos que el costo total de producción de la cantidad q_i por la empresa i es $c_i(q_i) = cq_i$. Es decir, no existen costos fijos y el costo marginal es constante e igual a c, donde suponemos que $c < a$. Siguiendo a Cournot, suponemos que las empresas eligen sus cantidades de forma simultánea.

$$P(Q) = \left\{ \begin{array}{ccccc} a - Q & \text{si} & Q & \leq & a \\ 0 & \text{si} & Q & > & a \end{array} \right. \qquad Q = q_1 + q_2 \qquad n = 2 \quad empresas$$

cada uno tiene una función de costo

$$c_1(q_1) = cq_1; \quad c > 0 \qquad c_2(q_2) = cq_2; \quad c > 0$$

La función de beneficio o ganancia de la empresa 1 es:

$$\prod_1 (q_1, q_2) = q_1 p - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1$$

Función de beneficio o ganancia de la forma 2 es:

$$\prod_2(q_1, q_2) = q_2 p - cq_2 = q_2(a - q_1 - q_2) - cq_2$$

Este modelo representa un juego de forma normal donde los jugadores son 2 empresas. Conjunto de estrategias:

$$S_1 = [0, \infty[\qquad\qquad S_2 = [0, \infty[$$

Los pagos son :

$$\begin{array}{rcl} \mu_1(q_1, q_2) & = & \prod_1(q_1, q_2) = q_1(a - c - q_1 - q_2) \\ \mu_2(q_1, q_2) & = & \prod_2(q_1, q_2) = q_2(a - c - q_1 - q_2) \end{array}$$

2.6. El Equilibrio de Nash en Estrategias Puras

Definición 2.6.1. *En el juego* $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ *se dice que el perfil de estrategias puras* $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ *es un* ***Equilibrio de Nash*** *(EN) si para cada jugador* i*.*

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

para todo s_i *de* S_i*.*

Es decir para cada jugador i, s_i^* es una solución del problema:

$$\max_{s_i \in S_i} \quad u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

Para evitar expresiones engorrosas, utilizaremos las siguientes notaciones:

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i$$

Dado $i \in \{1, \cdots, n\}$, denotaremos por $P_{S_i}(s)$ a la proyección ortogonal de $s \in S$ sobre el conjunto S_i.

Dado $i \in \{1, \cdots, n\}$. Si consideramos $\bigwedge_i = \prod_{i \neq j} S_j$, entonces denotaremos por $s_{-i} = P_{\bigwedge_i}(s)$.

Finalmente, para cada $s \in S$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $\rho \in S_i$, definiremos $s(\rho, i) \in S$ tal que $s(\rho, i)_i = \rho$ y $s(\rho, i)_{-i} = s_{-i}$.

Según estas notaciones, diremos que $s^* \in S$ es un EN si para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$u_i(s^*) \geq u_i(s^*(\rho, i)) \, \forall \rho \in S_i$$

es decir que s_i^* es la solución del siguiente problema de programación matemática

$$\max_{\rho \in S_i} u_i(s^*(\rho, i))$$

De esta definición se deduce que un equilibrio de Nash (EN) es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, ninguno se arrepiente de la decisión tomada, dada las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un EN está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dada las estrategias del resto de jugadores.

Esto no significa que en un EN cada jugador esté alcanzando el mejor resultado posible, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores jueguen las estrategias indicadas para ellos en dicho perfil.

Pueden haber múltiples equilibrios de Nash en un juego, por éste motivo llamaremos S^{EN} al conjunto de perfiles que son equilibrios de Nash.

Ejemplo. Del ejemplo 2.4, el juego del **Dilema del prisionero**

Preso 2

	callarse	confesar
callarse	-1,-1	-9,0
confesar	0,-9	-6,-6

Cuadro 2.4: El equilibrio de Nash en el juego del dilema del prisionero.

El dilema del prisionero presenta cuatro perfiles como posibles soluciones EN del juego:

$$\begin{array}{lcl} (callarse, callarse) & , & (callarse, confesar), \\ (confesar, callar) & , & (confesar, confesar). \end{array}$$

Analicemos cada uno de los perfiles:

- **(callarse, callarse)** y supongamos que es un EN. Si el preso 1 prevé que el preso 2 jugará callarse, ï¿½**Le interesará al preso 1 seguir pensando a jugar callarse?**. La respuesta es no. Fijada o dada la estrategia callar del preso 2, el preso 1 preferirá desviarse de la estrategia indicada para él en el perfil propuesto como solución puesto que con la estrategia confesar obtiene un pago superior

$$u_1(confesar, callar) = 0 > -1 = u_1(callar, callar).$$

Este argumento también es aplicable para el preso 2 (por la simetría del juego).

- Supongamos que se propone como solución EN el perfil **(confesar, callar)**. Este caso, si el preso 2 supusiera que el preso 1 iba a jugar confesar, a él le convendría jugar la estrategia confesar, pues con ello maximiza su utilidad en este caso particular.

$$u_2(confesar, confesar) = -6 > -9 = u_2(confesar, callar).$$

  Por tanto, el perfil (confesar,callar) tampoco es un EN.

- En caso **(callar,confesar)** es análogo al anterior intercambiando la posición de los presos.

- Finalmente nos queda el caso (**confesar, confesar**). Este sí que es un perfil de equilibrio, un equilibrio de Nash, ya que ninguno de los presos tiene incentivo para desviarse de un modo unilateral de la estrategia que se propone. Si alguno de los presos decidiera seguir la estrategia callar en solitario, perdería utilidad en relación al perfil (confesar, confesar), puesto que

$$u_1(callar, confesar) = -9 < -6 = u_1(confesar, confesar)$$

  y

$$u_2(confesar, callar) = -9 < -6 = u_2(confesar, confesar)$$

En Resumen

- ï¿$\frac{1}{2}(confesar, confesar)$ es un EN? Sí
- ï¿$\frac{1}{2}(confesar, callar)$ es un EN? NO
- ï¿$\frac{1}{2}(callar, confesar)$ es un EN? NO
- ï¿$\frac{1}{2}(callar, callar)$ es un EN? NO

Entonces, nuestro conjunto de equilibrio de Nash es

$$S^{E.N} = \{(confesar, confesar)\},$$

dado que:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\mu_1(confesar, confesar) & = & -6 & \geq & -6 & = & \mu_1(confesar, confesar) \\
\mu_1(confesar, confesar) & = & -6 & \geq & -9 & = & \mu_1(callar, confesar) \\
\mu_2(confesar, confesar) & = & -6 & \geq & -6 & = & \mu_2(confesar, confesar) \\
\mu_2(confesar, confesar) & = & -6 & \geq & -9 & = & \mu_2(confesar, callar)
\end{array}$$

2.7. Correspondencia de Respuesta óptima

Definición 2.7.1. *En el juego $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ y para cada jugador i, llamamos* ***correspondencia de respuesta óptima*** *de dicho jugador a la regla o correspondencia que asigna, a cualquier combinación de estrategias.*

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n),$$

el conjunto $R_i(s_{-i})$ de estrategias del jugador i que son respuestas óptimas dado que los demás jugadores decidieron s_{-i}, es decir que cumplen:

$$s'_i \in R_i(s_{-i}) \quad \text{si y sólo si}$$

$$u_i(s(s'_i, i)) \geq u_i(s(\rho, i)) \text{ para todo } \rho \in S_i$$

A partir de la definición anterior, se obtiene de manera inmediata el siguiente resultado:

Teorema 2.7.1. *En el juego $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ el perfil de estrategias.*

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$$

es un equilibrio de Nash si y solo si $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)$ para cada jugador i.

Podemos ahora automatizar el cálculo de los EN mediante un proceso en dos etapas:

- Para cada jugador i, y para cualquier conjetura que pueda formarse sobre la actuación de los demás jugadores (o lo que es lo mismo, para cualquier combinación de estrategias de éstos) se calcula la estrategia de respuesta óptima de i. De éste modo tenemos la correspondencia de respuesta óptima de cada jugador.

- Identificamos los EN como los perfiles estratégicos que son puntos de intersección de todas las correspondencias de respuesta óptima.

2.8. Juego de la mayor diferencia

Dos jugadores escriben, simultáneamente, un número entre 0 y 1. Los pagos dependen de la diferencia entre ambos números, así:

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)^2$$

En este juego, a cada jugador le conviene, en respuesta a un hipotético número x que pudiese haber escrito el otro, escribir un número a la mayor distancia posible de x.

Por ejemplo, la respuesta óptima a $s_2 = 3/4$ sería $s_1 = 0$. Formalmente, el jugador 1 (y análogamente razonaría el jugador 2) determinaría su respuesta óptima a cualquier estrategia s_2 del jugador 2 resolviendo:

$$\max_{s_1} (s_2 - s_1)^2$$
$$\text{sujeto a: } 0 \leq s_1 \leq 1$$

El conjunto de las soluciones s_1^* obtenidas es $R_1(s_2)$. En consecuencia las correspondencias de respuesta óptima son:

$$Para\ J_1: \ R_1(s_2) \ = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \text{si} & s_2 & > & 1/2 \\ 1 & \text{si} & s_2 & < & 1/2 \\ \{0,1\} & \text{si} & s_2 & = & 1/2 \end{array} \right.$$

$$Para\ J_2: \ R_2(s_1) \ = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \text{si} & s_1 & > & 1/2 \\ 1 & \text{si} & s_1 & < & 1/2 \\ \{0,1\} & \text{si} & s_1 & = & 1/2 \end{array} \right.$$

El conjunto de los EN es $S^{EN} = \{(1,0),(0,1)\}$, pues éstos dos son los únicos perfiles en que se intersecan $R_1(s_2)$ y $R_2(s_1)$, es decir, en que cada estrategia del perfil es respuesta óptima a la otra.

2.9. Juego de las peticiones de Nash

(Reparto mediante peticiones simultáneas).

Va a repartirse un pastel entre dos jugadores, de acuerdo con las siguientes reglas: ambos escriben, simultáneamente, un número entre 0 y 1, cuyo significado es la parte del pastel que reclaman. Si la suma de ambos números es igual o menor que 1, cada jugador recibe como pago la parte que ha solicitado. En caso contrario, ninguno de ellos recibe nada. En este juego sus elementos son:

$$J = \{1,2\} \quad , \quad s_1 = s_2 = [0,1],$$

$$u_1(s_1,s_2) = \left\{ \begin{array}{cccc} s_1 & \text{si} & s_1 + s_2 & \leq & 1 \\ 0 & \text{si} & s_1 + s_2 & > & 1 \end{array} \right.$$

$$u_2(s_1,s_2) = \left\{ \begin{array}{cccc} s_2 & \text{si} & s_1 + s_2 & \leq & 1 \\ 0 & \text{si} & s_1 + s_2 & > & 1 \end{array} \right.$$

En este juego a cada jugador le conviene, en respuesta a un hipotético x que pudiera haber escrito el otro, escribir un número y lo más grande posible de modo que $x + y$ no exceda de 1. Por ejemplo, la respuesta óptima a $s_2 = 2/3$ sería $s_1 = 1/3$. Formalmente, el jugador 1 (y análogamente razonaría el jugador 2) determinaría su respuesta óptima a cualquier estrategia s_2 del jugador 2 resolviendo.

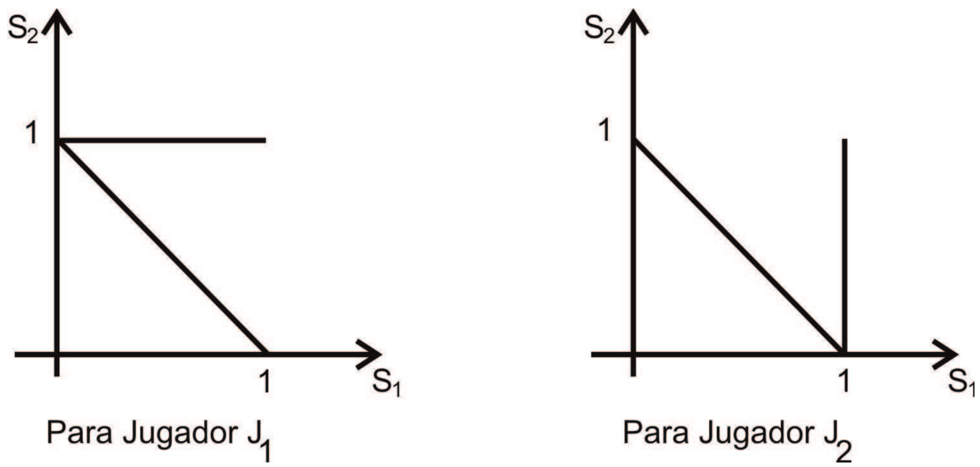
$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{s_1} & & (s_1) \\ \text{sujeta a} & : & 0 \leq s_1 \leq 1 \quad \text{y} \quad s_1 + s_2 \leq 1 \end{array}$$

y el conjunto de las soluciones s_1^* obtenidas es $R_1(s_2)$. Por consiguiente, las **correspondencias de respuesta óptima** son:

$$Para \quad J_1 : s_1 = R_1(s_2) \quad = \begin{cases} 1 - s_2 & \text{si} \quad s_2 \;<\; 1 \\ [0{,}1] & \text{si} \quad s_2 \;=\; 1 \end{cases}$$

$$Para \quad J_2 : s_2 = R_2(s_1) \quad = \begin{cases} 1 - s_1 & \text{si} \quad s_1 \;<\; 1 \\ [0{,}1] & \text{si} \quad s_1 \;=\; 1 \end{cases}$$

El conjunto de los EN es $S^{EN} = \{(s_1, s_2) : s_1 + s_2 = 1\} \bigcup \{(1, 1)\}$, pués que estos son los únicos perfiles donde cada estrategia es una respuesta óptima para la otra.



En la gráfica de las correspondencias de respuesta óptima de los dos últimos ejemplos observamos que no son por lo general aplicaciones univaluadas[1]; si no aplicaciones multivaluadas. Es decir, aplicaciones de punto a conjunto.

Este tipo de aplicaciones será objeto de estudio más adelante y la llamaremos correspondencias.

[1]aplicaciones punto a punto

El concepto de solución de equilibrio de Nash (EN), tal como lo hemos definido, tiene una dificultad muy importante, que consiste en que su existencia no está garantizada, ni siquiera en juegos tan sencillos como los juegos finitos. Por ejemplo en el juego de las monedas carece de EN (en estrategias puras).

En lo que sigue veremos que si ampliamos el concepto de estrategia, el conjunto de equilibrio de Nash se amplia también, de tal modo que podremos afirmar que todos los juegos finitos poseen al menos en EN.

2.10. Estrategias Mixtas

Hasta ahora hemos utilizado la palabra estrategia para referirnos a un plan completo de acciones ciertas de cada jugador. Por ejemplo, en el juego de las monedas las únicas estrategias de cada jugador son jugar cara y jugar sello. A tales estrategias las hemos denominado estrategias puras. La ampliación del concepto de estrategias consiste en permitir que los jugadores no solo puedan elegir entre acciones ciertas y concretas, sino que también puedan seleccionar acciones aleatorias, es decir, pueden tomar acciones inciertas que asignan distintas probabilidades a las distintas acciones ciertas. Por ejemplo, en el juego de las monedas el jugador 1 podría decidir lo siguiente: jugar cara con probabilidad 1/4 y jugar sello con probabilidad 3/4. A las estrategias que deciden de manera aleatoria sobre acciones ciertas se les denomina estrategias mixtas.

Definición 2.10.1. $S_i = \{s_i^1, s_i^2, s_i^3, \ldots, s_i^k\}$ *el conjunto de estrategias puras del jugador i. Llamamos,* ***estrategia mixta*** *del jugador i a toda distribución de probabilidad sobre* s_i*, es decir, a toda k-upla* $(p_i^1, p_i^2, \ldots, p_i^k)$ *donde sus componentes son no negativos y suman 1.*

Al conjunto de estrategias mixtas del jugador i lo denotamos por:

$$\Delta(s_i) = \left\{ P_i = (p_i^1, p_i^2, \ldots, p_i^k) : p_i^j \geq 0 \quad J = 1, 2, \ldots, k \quad y \quad \sum_{j=1}^{k} p_i^j = 1 \right\}$$

Entre las estrategias mixtas están aquellas que asigna probabilidad 1 a una de las estrategias puras y probabilidad cero a todas las demás. Por lo tanto, toda estrategia pura es también una estrategia mixta. De modo que la estrategia pura s_i^1 se puede identificar con la estrategia mixta $(1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$. La ampliación del concepto de estrategias para dar cabida a estrategias mixtas supone además convertir en estrategias a toda combinación lineal convexa de al menos dos estrategias puras.

2.11. Ganancias Esperadas en Juegos Bipersonales

Sea G un juego con dos jugadores. Sea S_1 y P_1 los conjuntos de estrategias pura y mixta del primer jugador.

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\} \quad , \quad P_1 = (p_1^1, p_1^2, \ldots, p_1^m)$$

Sea S_2 y P_2 los conjuntos de estrategias pura y mixta del segundo jugador.

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\} \quad , \quad P_2 = (p_2^1, p_2^2, \ldots, p_2^n)$$

Si el jugador 1 juega s_1^i y el jugador 2 juega P_2, las ganancias esperadas son:

$$E_1(s_1^i, P_2) = p_2^1 u_1(s_1^i, s_2^1) + \ldots + p_2^n u_1(s_1^i, s_2^n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)$$

$$E_2(s_1^i, p_2) = p_2^1 u_2(s_1^i, s_2^1) + \ldots + p_2^n u_2(s_1^i, s_2^n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_2(s_1^i, s_2^j)$$

Si el jugador 1 juega $P_1 = (p_1^1, p_1^2, \ldots, p_1^m)$ y el jugador 2 juega $P_2 = (p_2^1, p_2^2, \ldots, p_2^n)$, las ganancias esperadas son:

$$\begin{aligned}
E_1(P_1, P_2) &= p_1^1 u_1(s_1^1, p_2) + \ldots + p_1^m u_1(s_1^m, p_2) \\
&= p_1^1 \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^1, s_2^j) + \ldots + p_1^m \sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^m, s_2^j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_1^i \left(\sum_{j=1}^{n} p_2^j u_1(s_1^i, s_2^j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_1^i p_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)
\end{aligned}$$

De igual manera:

$$E_2(P_1, P_2) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_1^i p_2^j u_2(s_1^i, s_2^j)$$

Definición 2.11.1. ***(Definición ampliada de equilibrio de Nash.)*** *En el juego* $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_i, \ldots, u_n\}$, *decimos que el perfil de estrategias mixtas* $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_i^*, \ldots, p_n^*)$ *es un equilibrio de Nash (EN) si para cada jugador* i,

$$E_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i^*, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*) \geq E_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*)$$

para todo p_i *de* $\Delta(s_i)$

Es decir, para cada jugador i, p_i^* es una solución del problema,

$$\text{máx}\, E_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*)$$

en la variable p_i, donde $p_i \in \Delta(s_i)$.

O dicho de otro modo, para cada jugador i, p_i^* es la respuesta óptima a p_{-i}^*.

Tomemos en cuenta que una estrategia mixta no es más que una distribución de probabilidad sobre estrategias puras y que la función de pagos o ganancias es lineal, para cada jugador en las probabilidades de sus distintas estrategias puras. Por lo tanto el pago esperado para un jugador de una estrategia mixta, suponiendo fijar las estrategias de los otros jugadores resulta ser una combinación convexa de los pagos de las estrategias puras soporte de dicha estrategia mixta, y en consecuencia, la ganancia esperada de una estrategia mixta tiene como límite inferior y superior las ganancias mínimas y máximas de las estrategias puras, soporte de dicha estrategia mixta.

¿Como resolvemos los problemas de estrategia mixta?

Si juegan los jugadores A y B. La idea consiste en dotar al jugador B de una cierta información privada de manera que, dependiendo de cómo el jugador B entienda dicha información, se incline por una de las estrategias puras posibles. Sin embargo, puesto que el jugador A no dispone de dicha información privada de B, el jugador A continúa con la incertidumbre de no saber cuál será la decisión del jugador B, y representamos la incertidumbre del jugador A como una estrategia mixta del jugador B.

Ejemplo. Juego de las monedas del ejemplo 2.3

Jugador 2

		cara	sello
Jugador 1	cara	-1,1	1,-1
	sello	1,-1	-1,1

Cuadro 2.5: Juegos bipersonales, en el juego de las dos monedas.

Este juego no tiene EN en estrategias pura **¿Existe EN si se permiten estrategias mixtas?**

Como ya es usual, la ruta que seguiremos para solucionar este juego es:

- Encontrar las correspondencias de respuesta óptima de los jugadores.
- Encontrar la intersección de las correspondencias óptimas de cada jugador.

Para el jugador 1 Juega "*cara*" con probabilidad "p" y juega "*sello*" con probabilidad "$1-p$" donde su estrategia mixta es $P_1 = \{p, 1-p\}$

Para el jugador 2 Juega "*cara*" con probabilidad "q" y juega "*sello*" con probabilidad "$1-q$" donde su estrategia mixta es $P_2 = \{q, 1-q\}$

Al permitir estrategias mixtas, el objetivo del jugador 1 es maximizar su ganancia esperada; teniendo como variable de decisión **p**

$$\begin{aligned}
\max_{\mathbf{p}} E_1(p_1, p_2) &= \mathbf{pq}(-1) + \mathbf{p}(1-\mathbf{q}) \cdot 1 + (1-\mathbf{p})\mathbf{q} \cdot 1 + (1-\mathbf{p})(1-\mathbf{q})(-1) \\
&= (2\mathbf{q} - 1) + \mathbf{p}(2 - 4\mathbf{p})
\end{aligned}$$

donde:

pq es la probabilidad de (cara, cara).

p(1-q) es la probabilidad de (cara, sello)

y así sucesivamente.

Como la ganancia esperada del jugador 1 es lineal en p, el "p" óptimo depende de si $E_1(p_1, p_2)$ es creciente o decreciente en p :

$$\frac{\partial E_1(p_1, p_2)}{\partial p} = 2 - 4q = \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad q < 1/2 \\ = 0 & \text{si} \quad q = \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{si} \quad q > 1/2 \end{cases}$$

Puesto que la ganancia esperada del jugador 1 es creciente en $q < 1/2$ entonces la mejor respuesta del jugador 1 es $p = 1$ (es decir cara). Si $q > 1/2$ la ganancia esperada del jugador 1 es decreciente y $p = 0$ (es decir sello).

Si $q = \dfrac{1}{2}$ el jugador es indiferente entre las estrategias puras cara y sello y también a las estrategias mixtas P_1 y P_2.

Por lo tanto la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1 es:

$$R_1(q) = \begin{cases} 1 & si \quad q < 1/2 \\ [0{,}1] & si \quad q = \frac{1}{2} \\ 0 & si \quad q > 1/2 \end{cases}$$

Si seguimos un proceso similar para el jugador 2, llegamos a la siguiente correspondencia de respuesta óptima del jugador 2

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & si \quad p > 1/2 \\ [0{,}1] & si \quad p = 1/2 \\ 0 & si \quad p < 1/2 \end{cases}$$

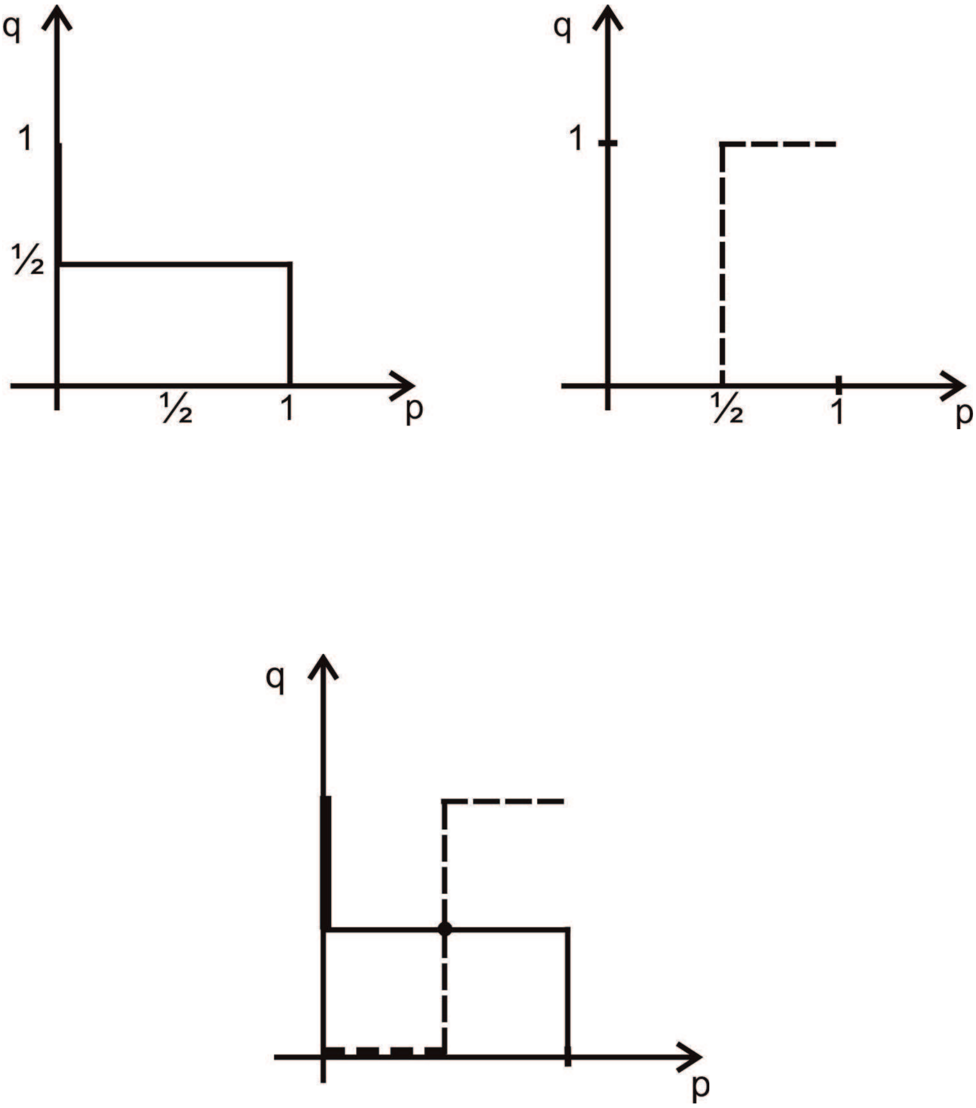


Figura 2.1: Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: el juego de las dos monedas.

Por lo tanto el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es $p = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$

Capítulo 3

Preliminares

En este capítulo estableceremos herramienta básicas para tratar los siguientes capítulos. Revisaremos ciertos conceptos y resultados básicos del álgebra lineal, topología, análisis funcional y análisis convexo.

3.1. Espacios Vectoriales

Un espacio Vectorial real es un conjunto X, en el que se han definido dos operaciones: una interna $+ : X \times X \to X$ llamada **adición**, la cual a cada par $(x, y) \in X \times X$ le asocia un elemento de X denotado por $x + y$, de tal forma que satisface:

1. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in X$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in X$
3. Existe un único elemento denotado con 0 tal que
   $x + 0 = x$ para todo $x \in X$; y
4. A cada elemento $x \in X$ le corresponde un único elemento
   $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$

y otra operación externa $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, la cual es llamada **multiplicación escalar**, la cual a cada por $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ le asocia un elemento de X denotado por $\lambda \cdot x$ (o simplemente λx), y se satisface:

1. $1x = x$ para todo $x \in X$
2. $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$

Estas operaciones están relacionadas por las siguientes leyes distributivas:

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda \text{ y } (\lambda+\beta)x = \lambda x + \beta x.$$

para cualquier $x, y \in X$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Observación, Es muy conocido que el conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (con $n \in \mathbb{N}$) con las operaciones de suma y multiplicación (por números reales), definidas por:
$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ tal que

$$+\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_q+y_q \end{pmatrix}$$

$$\cdot\left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_q \end{pmatrix},$$

es un espacio vectorial real. A lo largo de esta tesis, trabajaremos con espacios vectoriales de dimension finita como $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.1.1. *Sea X un espacio vectorial real y $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que φ es un producto interno (o producto escalar) si cumple las siguientes propiedades:*

a) **Linealidad:** $\forall\, u,\, v,\, w \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\varphi\begin{pmatrix} u+v \\ w \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$.
- $\varphi\begin{pmatrix} \lambda u \\ v \end{pmatrix} = \lambda\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

b) **Conmutatividad:** $\forall\, u,\, v \in X,\ \varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$.

c) **Positividad:** $\forall\, u \in V \setminus \{0\},\ \varphi\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} > 0$.

Observación, - Si X es un espacio vectorial real y $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ un producto interno, entonces se dice que X **es un espacio vectorial real con producto interno**, en este caso, con el producto interno φ.

- Se sigue de la definición anterior que si $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ es un producto interno, entonces

i) $\varphi(\ u, u\ ) = 0$ si y solo si $u = 0$

ii) $\varphi(\ u, v + w\ ) = \varphi(\ u, v\ ) + \varphi(\ u, w\ )$ para todo u, v, $w \in X$.

iii) $\varphi(\ u, \lambda v\ ) = \lambda\varphi(\ u, v\ )$ para todo u, $v \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es muy conocido también que la función $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con $n \in \mathbb{N}$) definida por

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \right) := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_qy_q$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^n$, llamado producto interno euclidiano en $\mathbb{R}^n$.

Una **transformación lineal** de un espacio vectorial X en un espacio vectorial Y es una aplicación.

$$\begin{array}{rcccl} T \ : & X & \longrightarrow & Y & \\ & (\alpha x + \beta y) & \longmapsto & T(\alpha x + \beta y) & = \alpha T(x) + \beta T(y) \end{array}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in X$.

En el caso particular en que $Y = \mathbb{R}$, T será llamada **funcional lineal**. El conjunto

$$\mathbf{X}' = \{T : \mathbf{X} \to \mathbb{R} : T \text{ es funcional lineal}\}$$

previsto de las operaciones:

$$\begin{array}{rcccl} + \ : & \mathbf{X}' \times \mathbf{X}' & \longrightarrow & \mathbf{X}' & \\ & (T_1, T_2) & \longmapsto & (T_1 + T_2)(x) & = \ T_1(x) + T_2(x). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \cdot \ : & \mathbb{R} \times \mathbf{X}' & \longrightarrow & \mathbf{X}' & \\ & (\alpha, T) & \longmapsto & (\alpha T)(x) & = \ \alpha T(x). \end{array}$$

es un espacio vectorial, llamado el **espacio vectorial dual de X**. Cuando $X = \mathbb{R}^n$, los elementos de $\mathbf{X}'$ pueden ser identificados con elementos de $\mathbb{R}^n$, pues dado $f \in \mathbf{X}'$, existe un único $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \langle a, x\rangle$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno euclidiano de $\mathbb{R}^n$.

3.2. Espacios Métricos

Un **Espacio Métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto cualquiera no vacío y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ distancia que verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$

Observación, Si definimos $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle},$$

entonces $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico, llamado **espacio métrico euclidiano**.

Definición 3.2.1. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano y sea $a \in \mathbb{R}^n$. Un subconjunto $U \in \mathbb{R}^n$ se llama **vecindad de** a si existe $\delta > 0$ tal que la bola abierta de centro a y radio δ, $B(a, \delta) \subset U$, donde*

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \delta\}$$

Observación, Dado $x \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{N}_x$ a la familia de vecindades de x.

Definición 3.2.2. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **abierto** si, para cada $x \in U$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$.*

Definición 3.2.3. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano y $X \subset \mathbb{R}^n$. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **abierto (vecindad) relativo a** X si, existe un abierto (vecindad) V en $\mathbb{R}^n$ tal que $U = V \cap X$.*

Definición 3.2.4. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ se dice **cerrado** si $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.*

Definición 3.2.5. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano y $X \subset \mathbb{R}^n$. Un conjunto $R \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **cerrado relativo a** X si, existe un cerrado C en $\mathbb{R}^n$ tal que $R = C \cap X$.*

Observación, Es fácil verificar que: $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto relativo a $S \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si $S \setminus A$ es cerrado relativo a S.

Definición 3.2.6. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Para cada $S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces la* ***frontera*** *de S es definida como*

$$\partial S := \{x \in X : B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset \quad y \quad B(x, \epsilon) \cap (X \setminus S) \neq \emptyset \forall \epsilon > 0\}$$

Definición 3.2.7. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Para cada $S \subset \mathbb{R}^n$, el* ***interior*** *de S esta definido como*

$$int(S) := \bigcup \{U : U \subset \mathbb{R}^n \textit{es un subconjunto abierto de } S\}.$$

Proposición 3.2.1. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces tenemos:*

$$int(S) := \{x \in X : S \in \mathcal{N}_x\} = S \setminus \partial S.$$

Demostración. Sea $x \in int(S)$. Entonces existe un subconjunto abierto $U \subset S$ con $x \in U$, de modo que $S \in \mathcal{N}_x$. Para la recíproca, si $S \in \mathcal{N}_x$, entonces hay un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ con $x \in U \subset S$, de modo que $x \in int(S)$.

Sea $x \in int(S)$, entonces $S \in \mathcal{N}_x$ por lo anterior. Donde, trivialmente, $S \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) = \emptyset$ vemos que $x \notin \partial S$. Para la recíproca, sea $x \in S \setminus \partial S$. Entonces, hay un $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) = \emptyset$. Sea $U \subset N$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in U$. Se concluye que $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) = \emptyset$ y por consiguiente $U \subset S$. Por lo tanto, se cumple que $x \in U \subset int(S)$. □

Ejemplo. Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y sea $r > 0$. La bola cerrada centrada en x_0 con radio r es definida como

$$\overline{B(x_0, r)} := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}.$$

$\overline{B(x, \delta)}$ es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$, es decir, tal que $d(x, x_0) > r$. Ahora tomemos $\epsilon := d(x, x_0) - r > 0$, y sea $y \in B(x, \epsilon)$.
Como $d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0)$, obtenemos que

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y) > d(x, x_0) - \epsilon = d(x, x_0) - (d(x, x_0) - r) = r.$$

Se concluye que $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$ es abierto, lo cual implica que $\overline{B(x_0, r)}$ es cerrado. □

Proposición 3.2.2. *Sea* $(\mathbb{R}^n, d)$ *el espacio métrico euclidiano. Entonces:*

1. $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}^n$ *son abiertos;*

2. *Si* $\mathcal{U}$ *es una familia de subconjuntos abiertos de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ *es abierto;*

3. *Si* U_1 *y* U_2 *son subconjuntos abiertos de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $U_1 \cap U_2$ *es abierto.*

Demostración.

1. Por convención, el conjunto $\emptyset$ es un conjunto abierto y cerrado. Ahora veamos que $\mathbb{R}^n$ es abierto, en efecto, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, siempre $\exists \epsilon > 0$, tal que $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n$ es abierto.

2. Sea $\mathcal{U}$ una familia de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, y sea $x \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ con $x \in U_0$, y como U_0 es abierto hay un $\epsilon > 0$ tales que
$$B(x, \epsilon) \subset U_0 \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}\,.$$
Por consiguiente, $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es abierto.

3. Sea U_1, $U_2 \subset X$ abiertos y sea $x \in U_1 \cap U_2$. Como U_1 y U_2 son abiertos, hay ϵ_1, $\epsilon_2 > 0$ tales que $B(x, \epsilon_j) \subset U_j$ para $j = 1, 2$. Sea $\epsilon := \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Entonces es inmediato que $B(x, \epsilon) \subset U_1 \cap U_2$. □

Observación, En general las hipótesis de la Proposición anterior definen una estructura muy importante en Matemática, llamada **Topología**, por lo tanto toda métrica induce una topología, pero no toda topología induce una métrica.

Definición 3.2.8. *Sea* $(\mathbb{R}^n, d)$ *el espacio métrico euclidiano. Para cada* $S \subset \mathbb{R}^n$*, la* ***clausura*** *de* S *es definida como*

$$\overline{S} := \bigcap\{F : F \subset \mathbb{R}^n \textit{es cerrado y } S \subset F\}\,.$$

Proposición 3.2.3. *Sea* $(\mathbb{R}^n, d)$ *el espacio métrico euclidiano, y sea* $S \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces tenemos:*

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \{x \in \mathbb{R}^n : N \cap S \neq \emptyset \quad \forall\ N \in \mathcal{N}_x\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset \quad \forall\ \epsilon > 0\}\,.\end{aligned}$$

Demostración. Cada bola abierta es una vecindad de su centro, y cualquier vecindad de un punto contiene una bola abierta centrada en aquel punto; por lo tanto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : N \cap S \neq \emptyset, \ \forall\ N \in \mathcal{N}_x\} = \{x \in \mathbb{R}^n : B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0\}$$

se cumple. Denotamos este conjunto por $cl(S)$.

Sea $x \in \bar{S}$, y sea $N \in \mathcal{N}_x$. Entonces, existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ contenido en N con $x \in U$. Supongamos que $N \cap S = \emptyset$, de modo que $U \cap S = \emptyset$ (i.e., $S \subset \mathbb{R}^n \setminus U$). Como $\mathbb{R}^n \setminus U$ es cerrado, se concluye que $\overline{S} \subset \mathbb{R}^n \setminus U$ y así $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se cumple $x \in cl(S)$.

Recíprocamente, sea $x \in cl(S)$, y supongamos que $x \notin \overline{S}$. Entonces $U := \mathbb{R}^n \setminus \bar{S}$ es un conjunto abierto conteniendo a x (así pertenece a $\mathcal{N}_x$) que tiene intersección vacía con S. Esto contradice $x \in cl(S)$. □

3.3. Convergencia y Continuidad

Sea S un conjunto cualquiera. Una aplicación de $\mathbb{N}$ a S es llamada una sucesión en S; en vez de $x : \mathbb{N} \to S$ escribiremos a menudo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si el dominio de x no es $\mathbb{N}$ pero un subconjunto de $\mathbb{N}$ de la forma $\{n : n \geq m\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, todavía hablamos de una sucesión y denotamos esto por $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$. Llamamos a una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si existen $n_1 < n_2 < \cdots$ en $\mathbb{N}$ tal que $y_k = x_{n_k}$ para $k \in \mathbb{N}$.

Definición 3.3.1. *Sea* $(\mathbb{R}^n, d)$ *el espacio métrico euclidiano. Una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *se dice que* ***converge*** *a* $x \in \mathbb{R}^n$ *si, para cada* $\epsilon > 0$*, hay un* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x) < \epsilon$ *para todo* $n \geq n_\epsilon$*. Entonces decimos que* x *es el límite de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y escribimos* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *ó* $x_n \to x$*.*

Se verifica directamente que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio métrico euclidiano converge a x si y sólo si, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, hay un $n_N \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in N$ para todo $n \geq n_N$

En la siguiente Proposición se verifica que el límite de una sucesión en el espacio métrico euclidiano (cuando este límite existe) es único.

Proposición 3.3.1. *Sea* $(\mathbb{R}^n, d)$ *el espacio métrico euclidiano, sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}^n$*, y sea* $x,\ x' \in \mathbb{R}^n$ *tales que* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* x *y a* x'*. Entonces* x *y* x' *son iguales.*

Demostración. Supongamos que $x \neq x'$, de modo que $\epsilon := \frac{1}{2}d(x,x') > 0$. Como $x_n \to x$, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x) < \epsilon$ para $n \geq n_1$, y como también $x_n \to x'$, existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x') < \epsilon$ para $n \geq n_2$. Sea $n := \text{máx}\{n_1,n_2\}$, de modo que

$$d(x,x') \leq d(x,x_n) + d(x_n,x') < \epsilon + \epsilon = d(x,x'),$$

lo cuál es absurdo. $\square$

Proposición 3.3.2. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\overline{S}$ consiste de todos los puntos en $\mathbb{R}^n$ que son el límite de una sucesión en S.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ el límite de una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S, y sea $\epsilon > 0$. Por la definición de convergencia, existe un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x) < \epsilon$ para $n \geq n_\epsilon$; es decir, $x_n \in B(x,\epsilon)$ para $n \geq n_\epsilon$. En particular, $B(x,\epsilon) \cap S$ es no vacío. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $x \in \overline{S}$ por la Proposición 3.2.3.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{S}$. Por la Proposición 3.2.3, tenemos $B(\frac{1}{n}, x) \cap S \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$; existe así, para cada $n \in \mathbb{N}$, algún $x_n \in S$ con $d(x_n,x) < \frac{1}{n}$. Es claro que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x. $\square$

Corolario 3.3.1. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano. Entonces $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si cada sucesión en F que converge en $\mathbb{R}^n$ tiene su límite en F.*

Ahora definamos la continuidad de funciones de la forma siguiente.

Definición 3.3.2. *Sean $(\mathbb{R}^n, d_n)$ y $(\mathbb{R}^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos, $X \subset \mathbb{R}^n$, y sea $x_0 \in X$. Entonces $f : X \to \mathbb{R}^m$ se dice que es continua en x_0 si, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X convergente a x_0, tenemos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Las siguientes caracterizaciones se verifican.

Teorema 3.3.1. *Sean $(\mathbb{R}^n, d_n)$ y $(\mathbb{R}^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos, $X \subset \mathbb{R}^n$, y sea $x_0 \in X$. Entonces las siguientes equivalencias se verifican para $f : X \to \mathbb{R}^m$.*

(i) *f es continua en x_0.*

(ii) *Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $d_m(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para todo $x \in X$ con $d_n(x,x_0) < \delta$.*

(iii) *Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $(B(x_0,\delta) \cap X) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon))$.*

(iv) *Para cada $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$, tenemos que $f^{-1}(N) \cap X$ es una vecindad relativa a X de x_0.*

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Supongamos lo contrario; es decir, existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existe un $x_\delta \in X$ con $d_n(x_\delta, x_0) < \delta$, pero $d_m(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $x'_n := x_{\frac{1}{n}}$, de modo que $d_n(x'_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ y así $x'_n \to x_0$. Donde, sin embargo, $d_m(f(x'_n), f(x_0)) \geq \epsilon_0$ se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es imposible puesto que $f(x'_n) \to f(x_0)$, pues f es continua en x_0.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: es únicamente una repetición de (ii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sea $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$. Por consiguiente, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \epsilon) \subset N$. Por (iii), existe un $\delta > 0$ tal que

$$(B(x_0, \delta) \cap X) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon)) \subset f^{-1}(N).$$

Esto implica que $f^{-1}(N) \cap X$ es una vecindad relativa a X de x_0.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X con $x_n \to x_0$. Sea $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ de modo que $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}$. Como $x_n \to x_0$, existe un $n_N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(N)$ para $n \geq n_N$; es decir, $f(x_n) \in N$ para $n \geq n_N$. Como $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ fue arbitrario, esto implica que $f(x_n) \to f(x_0)$. $\square$

Definición 3.3.3. *Sean $(\mathbb{R}^n, d_n)$ y $(\mathbb{R}^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos y $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces una función $f : X \to \mathbb{R}^m$ se dice que es continua en X, si esta es continua en cada punto de X.*

Observación, Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano.

$$|d(x,y) - d(x_0,y_0)| \leq d(x,x_0) + d(y,y_0) \qquad (x, x_0, y, y_0 \in X), \tag{3.1}$$

Demostración. Fijamos $x, x_0, y, y_0 \in X$, luego

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y)$$

y por lo tanto

$$d(x,y) - d(x_0,y_0) \leq d(x,x_0) + d(y_0,y).$$

Intercambiando el rol de x por x_0, y por y_0 respectivamente, obtenemos

$$d(x_0,y_0) - d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(y_0,y).$$

$\square$

Como consecuencia de (3.1) obtenemos que $(\mathbb{R}^n)^2$ se convierte en un espacio métrico con la siguiente metrica

$$\bar{d}((x,y),(x',y')) := d(x,x') + d(y,y') \qquad ((x,x'),(y,y') \in (\mathbb{R}^n)^2).$$

Otra consecuencia de (3.1) nos proporciona inmediatamente que $d : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $(\mathbb{R}^n)^2$ respecto de $\bar{d}$. $\square$

Corolario 3.3.2. *Sean $(\mathbb{R}^n, d_n)$ y $(\mathbb{R}^m, d_m)$ dos espacios métricos euclidianos. Entonces las siguientes equivalencias se verifican para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

(i) f es continua.

(ii) $f^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ para cada subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$.

(iii) $f^{-1}(F)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ para cada subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}^m$.

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, de modo que $U \in \mathcal{N}_y$ para cada $y \in U$ y así $U \in \mathcal{N}_{f(x)}$ para cada $x \in f^{-1}(U)$. Por el Teorema 3.3.1(iv), concluimos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_x$ para cada $x \in f^{-1}(U)$; es decir, $f^{-1}(U)$ es una vecindad de cada uno de sus puntos y así es abierto.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sea $F \subset \mathbb{R}^m$ cerrado, de modo que $\mathbb{R}^m \setminus F$ es abierto. Como $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F)$ entonces debe ser abierto por (ii), se concluye que $f^{-1}(F)$ es cerrado. Análogamente, se prueba $(iii) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Si f satisface (ii), este satisface de manera trivial el Teorema 3.3.1(iii) para cada $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

3.4. Compacidad para Espacios Métricos Euclidianos

La noción de compacidad es una de las mas importantes en espacios métricos euclidianos.

Definición 3.4.1. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Un cubrimiento abierto para S es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $S \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.*

Definición 3.4.2. *Un subconjunto K en el espacio métrico euclidiano $(\mathbb{R}^n, d)$ es llamado compacto, si para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de K, existe un subcubrimiento finito $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.*

La definición 3.4.2 se escribe a menudo como:

> **Un conjunto es compacto si y sólo si, cada cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito.**

Ejemplo. Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ finito; es decir, $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces, para cada $j = 1, \ldots, n$, existe un $U_j \in \mathcal{U}$ tal que $x_j \in U_j$. Se concluye que $S \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Por consiguiente, S es compacto. A continuación estableceremos algunas propiedades de los conjunto compactos.

Proposición 3.4.1. *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio métrico euclidiano, y sea Y y X subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $Y \subset X$.*

(i) Si X es compacto y Y es cerrado, entonces Y es compacto.

(ii) Si Y es compacto, entonces este es cerrado y acotado.

Demostración. Para (i), sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto para Y. Como Y es cerrado, la familia $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ es un cubrimiento abierto para X. Como X es compacto, este tiene un subcubrimiento finito, i.e., existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que

$$X \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X \setminus Y.$$

Tomando la intersección con Y, vemos que $Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
Para (ii), sea $x \in X \setminus Y$. Para cada $y \in Y$, existe un ϵ_y, $\delta_y > 0$ tal que $B(x, \epsilon_y) \cap B(y, \delta_y) = \emptyset$. Como $\{B(y, \delta_y) : y \in Y\}$ es un cubrimiento abierto para Y, hay $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tal que

$$Y \subset B(y_1, \delta_{y_1}) \cup \cdots \cup B(y_n, \delta_{y_n}).$$

Tomando $\epsilon := \text{mín}\{\epsilon_{y_1}, \ldots, \epsilon_{y_n}\}$, obtenemos que

$$B(x, \epsilon) \cap Y \subset B(x, \epsilon) \cap (B(y_1, \delta_{y_1}) \cup \cdots \cup B(y_n, \delta_{y_n})) = \emptyset$$

y así $B(x, \epsilon) \subset X \setminus Y$. Como $x \in X \setminus Y$ fue arbitrario, esto significa que $X \setminus Y$ es abierto.
Ahora veamos que sea acotado, en efecto, para cada $y \in Y$,consideremos la bola $B(y, 1)$, luego $\{B(y, 1)\}$ es un cubrimiento de Y y como Y es compacto, entonces

existe un subcubrimiento finito $\{B(y_i,1)\}_{i=1}^p$ tal que $Y \subset \cup_{i=1}^p B(y_i,1)$. Ahora tomemos $r = \max_{i=1,\cdots,p} \|y_i\| + 1$. Solo falta probar que $Y \subset B(0,r)$, en efecto, tome $y \in Y$, luego existe $i \in \{1,\cdots,p\}$ tal que $y \in B(x_i,1)$, luego $\|y\| \leq \|y-y_i\| + \|y_i\| < 1 + \|y_i\| \leq r$. Lo cual implica que Y es acotado. $\square$

Proposición 3.4.2. *Sean* $(\mathbb{R}^n, d_n)$ *y* $(\mathbb{R}^m, d_m)$ *dos espacios métricos euclidianos. Si* $K \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto y* $f : K \to \mathbb{R}^m$ *continua. Entonces* $f(K)$ *es compacto en* $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto para $f(K)$, entonces $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento abierto para K, luego, por el Corolario 3.3.2, existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tal que

$$K \subset f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n)$$

y así

$$f(K) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Esto prueba lo pedido. $\square$

Teorema 3.4.1 (Teorema de Weiesstrass). *Sean* $(\mathbb{R}^n, d_n)$ *el espacio métrico euclidiano. Si* $K \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto y* $f : K \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces* f *alcanza su mínimo y su máximo sobre* K.

Demostración. Veamos que f alcance su máximo sobre K, pues la demostración para probar que alcanza su mínimo es similar. En efecto, como $f(K)$ es compacto, entonces $f(K)$ es acotado. Tomemos $M = \sup_{y \in K} f(y)$, luego $M < +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $y_n \in f(K)$ tal que $y_n > M - \dfrac{1}{n}$; es claro que $M = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Como $f(K)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, se concluye que $M \in f(K)$. Por consiguiente, hay un $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = M$. $\square$

Observación, Todos los conceptos anteriores pudieron haberse introducido, usando una estructura mas general llamada **Topología**, en estos espacios topológicos el concepto de vecindad es independiente de la existencia de una función de distancia. Al introducir el concepto de espacio topológico el modelo adquiere una mayor generalidad, los espacios métricos serán un caso particular de Espacio Topológico.

Teorema 3.4.2. *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Los siguientes enunciado son equivalentes:*

(i) X *es compacto.*

(ii) Cada sucesión en X *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. ver [3] $\square$

Recordemos que el **gráfico** $\mathcal{G}_f$ de la función $f : X \to Y$ es el conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Teorema 3.4.3. ***[Teorema del Gráfico Cerrado]*** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, tal que $\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset Y$, siendo Y un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Entonces f es continua sí y solo sí su gráfico es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*

Demostración. ver[3] $\square$

Puede probarse que existen funciones con su gráfico cerrado pero por fallar alguna de las hipótesis del teorema no son continuas:

Ejemplo. Consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{sí} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{sí} \quad x = 0 \end{cases}$$

Puede observarse que su gráfico es cerrado pero no es continua.

Teorema 3.4.4.

1. *Si cada X_i es un conjunto compacto, el producto cartesiano $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es también compacto.*
2. *Si cada X_i es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^{n_i}$, el producto cartesiano $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\ldots+n_m}$.*

Demostración. ver [22], pag 210. $\square$

3.5. Partición de la Unidad

A continuación estudiaremos **La partición de la unidad**, la cual es una herramienta indispensable para emplearlo en la demostración del **Teorema del punto fijo de Kakutani**.

Comenzaremos enunciando el **Lema de Urysohn**, no lo probaremos debido a que este involucra argumentos muy desafiantes que hacen uso de material que no ha sido cubierto en este trabajo. Sin embargo el enunciado del teorema es muy simple, y este es un resultado extremadamente útil.

Teorema 3.5.1. ***(Lema de Urysohn)*** *Sea X e Y subconjuntos cerrados y disjuntos de $\mathbb{R}^n$ y sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Entonces existe una función continua: $f : \mathbb{R}^n \to [a\ b]$ tal que*

$$(\forall\ x \in X);\ f(x) = a\ y\ (\forall\ y \in Y) : f(y) = b.$$

Demostración. (Ver [21], pág. 237) □

En la definición y trabajando con la partición de la unidad, necesitamos la siguiente definición, el cual será muy empleado en la literatura econométrica.

Definición 3.5.1. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos el soporte de f, abreviadamente "Supp(f)" por:*

$$Supp(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

Definición 3.5.2. *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se dice que es **localmente finita** si todo punto de $\mathbb{R}^n$ tiene una vecindad que intersecta solo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$*

Ejemplo. La colección de intervalos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$$

es localmente finita en el espacio topológico $\mathbb{R}$. Por que $0 \in \mathbb{R}$, $B(0,1) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ para $n = 0$.

Teorema 3.5.2. *Sea $\mathcal{A}$ una colección localmente finita de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *Cualquier subcolección de $\mathcal{A}$ es localmente finita.*
2. *La colección $\mathcal{B} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\}$ formada por las clausuras de los elementos de $\mathcal{A}$ es localmente finita.*
3. $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$

Demostración. La afirmación 1. es trivial. Para probar 2. vemos que cualquier abierto U que intersecta al conjunto $\bar{A}$ necesariamente intersecta a A. Por lo tanto, si U es una vecindad de x que interseca sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$ entonces U tiene, a lo más, el mismo número de conjuntos de la colección $\mathcal{B}$ (podría intersecar menos conjuntos de $\mathcal{B}$ dado que $\bar{A}_1$ y $\bar{A}_2$ pueden ser iguales aunque A_1 y A_2 no lo sean).

Para demostrar la afirmación 3., denotamos por Y la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ dado por:

$$Y = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

En general, siempre se tiene $\bigcup \bar{A} \subset \bar{Y}$. Probemos la inclusión inversa utilizando la hipótesis de localmente finita. Sea $x \in \bar{Y}$ y U una vecindad de x que intersecta sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$, $A_1, \ldots, A_k$. Veamos que $\exists k_0 \in \{1, \ldots, k\} : x \in \overline{A}_k \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}_i$. En efecto, supongamos lo contrario, el conjunto $U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A}_i = U \cap (\bigcup_{i=1}^{k} \overline{A}_i)^c$ sería una vecindad de x que no intersecta a ningún elemento de $\mathcal{A}$ y por consiguiente, no intersecta a Y, lo cual es una contradicción con el hecho de que $x \in \overline{Y}$. □

Para ver el significado de la parte 3.. Consideremos a la familia $\mathcal{A}$ dado por: $\mathcal{A} = \{\{r\}/r$ es un número racional ; $0 < r < 1\}$, entonces

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} = \{r \in \mathbb{R} : r \text{ es un número racional ; } 0 < r < 1\}$$

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = [0, 1]$$

Definición 3.5.3. *Sean $K \subset \mathbb{R}^n$, sea A un conjunto de índices y sea $\{f_\alpha : K \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones de valores reales continua. Diremos que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ es una partición de la unidad, sí y sólo sí, para cada $\alpha \in A$:*

1. $f_a : K \longrightarrow [0, 1]$
2. *La colección $\{Supp(f_a) : a \in A\}$ es localmente finita; y*
3. *Para cada $x \in K$:*

$$\sum_{a \in A} f_a(x) = 1$$

(donde seguiremos la convención de definir la suma arbitraria de ceros sea igual a cero)

En este trabajo, generalmente estaremos interesados en particiones de la unidad, las cuales están subordinados a un cubrimiento abierto del espacio; donde definiremos esto como sigue.

Definición 3.5.4. *Sea* $\{U_a : a \in A\}$*, un cubrimiento abierto de* $K \subset \mathbb{R}^n$*, diremos que la familia* $\{f_b : K \to \mathbb{R} : b \in B\}$ *es una partición de la unidad subordinada (o dominada) para* $\{U_a : a \in A\}$ *sí y sólo si* $\{f_b : b \in B\}$ *es una partición de la unidad, y para cada* $b \in B$*, existe* $a \in A$ *tal que el* $Supp(f_b) \subseteq U_a$

El siguiente resultado nos proporcionará un medio para establecer condiciones suficientes para la existencia de una partición de la unidad.

Proposición 3.5.1. *Sea* $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$ *un cubrimiento abierto* $K \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces existe un cubrimiento abierto* $\{V_a : a \in A\}$ *de* K*, tal que* $\forall\, a \in A$*:*

$$\overline{V}_a \subseteq U_a$$

Demostración. (Ver [21], pág. 294) □

Teorema 3.5.3. ***(Existencia de una partición de la unidad)*** *Si* $\{U_a : a \in A\}$ *es un cubrimiento abierto localmente finito de* $K \subset \mathbb{R}^n$*, entonces existe una partición de la unidad,* $\{f_a : a \in A\}$*, subordinado a* $\{U_a : a \in A\}$*.*

Demostración. Aplicamos la proposición anterior 2 veces para obtener un cubrimiento abierto localmente finito de K, $\{V_a : a \in A\}$ y $\{W_a : a \in A\}$ satisfaciendo, para cada $a \in A$;

$$\overline{W}_a \subseteq V_a \subseteq \overline{V}_a \subseteq U_a \tag{3.2}$$

Entonces $\overline{W}_a \cap (K \setminus V_a) = \emptyset$ para cada $a \in A$. Luego por el Teorema 3.5.1 (**Lema de Urysohn**) existe una función continua; $g_a : K \to [0\ 1]$ tal que:

$$(\forall x \in \overline{W}_a); g_a(x) = 1 \text{ y } (\forall x \in (K \setminus V_a)) : g_a(x) = 0 \tag{3.3}$$

De la segunda igualdad en (3.3), se concluye que:

$$\emptyset \neq \{x \in K : g_a(x) \neq \emptyset\} \subset V_a \Rightarrow Supp(g_a) \subseteq \overline{V}_a \subseteq U_a$$

Ahora, de la construcción de las funciones $\{g_a : a \in A\}$ y (3.2), es evidente que $\{Supp(g_a) : a \in A\}$ es un refinamiento de $\{U_a : a \in A\}$, y por lo tanto es localmente finito. Además como $\{W_a : a \in A\}$ es un cubrimiento abierto de K, se concluye que para cada $x \in K$, la función g definida por:

$$g_(x) = \sum_{a \in A} g_a(x)$$

es estrictamente positiva y continua (y esta bien definido). Por consiguiente, las funciones f_a definidas sobre K por:

$$f_a(x) = \frac{g_a(x)}{g_(x)}$$

son continuas y $f_a : K \rightarrow [0, 1]$ para cada $a \in A$, de esto se concluye, inmediatamente de las definiciones, que para cada $a \in A$,

$$Supp(f_a) = Supp(g_a) \subseteq U_a;$$

y así, como $\{U_a : a \in A\}$ es localmente finito, entonces $\{Supp(f_a) : a \in A\}$ también es localmente finito. Además de la definición de los f_a vemos que para todo $x \in S$:

$$\sum_{a \in A} f_a(x) = 1. \quad \square$$

Mientras el teorema anterior es, en principio un resultado muy útil, es conveniente emplear este para establecer un teorema relacionado como sigue.

Teorema 3.5.4. *Si K es un compacto y $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$ es un cubrimiento de K, entonces existe un subconjunto no vacío A^* de A, y existe una partición de la unidad $\{f_a : a \in A^*\}$ tal que $\mathcal{U}^* \equiv \{U_a : a \in A^*\}$ es localmente finita y $\{f_a : a \in A^*\}$ es subordinado a $\mathcal{U}^*$.*

Demostración. Como K es compacto, existe un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{V} = \{V_b : b \in B\}$$

Como $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, sabemos que, para cada $b \in B$, existe $a \in A$, tal que $V_b \subseteq U_a$. Así, existe una función; $\beta : B \rightarrow A$ satisfaciendo:

$$(\forall b \in B) : V_b \subseteq U_{\beta(b)}$$

Definimos: $A^* = \beta(B)$, y la colección $\mathcal{W} = \{W_a : a \in A^*\}$ donde

$$W_a = \bigcup_{b \in \beta^{-1}(a)} V_b \text{ para } a \in A^*$$

Evidentemente $\mathcal{W}$ es un cubrimiento abierto de K, y es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Para probar que $\mathcal{W}$ es localmente finita, sea $x \in K$. Entonces existen una vecindad N de x y $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ tales que:

$$\forall b \in B \backslash \{b_1, \ldots, b_n\} : N \cap V_b = \emptyset$$

Pero, si definimos

$$A_x = \beta(\{b_1, \ldots, b_n\})$$

vemos que podemos escribir:

$$A_x = \beta(\{a_1, \ldots, a_p\})$$

donde $p \leq n$. Además si $a \in A^*\backslash A_x$, entonces:

$$\beta^{-1}(a) \subseteq B\backslash\{b_1, b_2, \ldots, b_n\});$$

Y así se concluye que:

$$(\forall a \in A^*\backslash A_x) : N \cap V_a = \emptyset$$

y vemos que $\mathcal{W}$ es localmente finito. Ahora aplicamos el teorema anterior para obtener una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{W}$ y notemos que se satisfacen las condiciones deseadas. □

3.6. Conceptos de Convexidad

Definición 3.6.1. *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo sí y sólo sí:*

$$tx + (1-t)y \in C \qquad \forall\, x; y \in C \;\; y \;\forall\, t \in [0,1].$$

Definición 3.6.2. *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $C \subset \mathbb{R}^n$, se dice que x es una combinación convexa de elementos de C, si existen: $p \in \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^p \subset [0,1]$ y $\{x_i\}_{i=1}^p \subset C$ tal que*

$$x = \sum_{i=1}^{p} t_i x_i \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{p} t_i = 1.$$

Proposición 3.6.1. *Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, C es convexo sí y solo sí contiene todas las combinaciones convexas de C.*

Demostración. (Ver [8], pág. 1). □

Proposición 3.6.2. *Sí I es un conjunto de índices cualquiera y $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es también un conjunto convexo.*

Demostración. (Ver [8], pág. 2). □

Definición 3.6.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces la **cápsula convexa** $co(A)$ **de** A es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A.*

Proposición 3.6.3. *$co(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de A.*

Demostración. (Ver [8], pág. 2). □

Definición 3.6.4. *Diremos que $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ se llama **afín independiente** si $A_0 = \{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ es **linealmente independiente***

Observación, Veamos las siguientes propiedades:

1. Si A_0 es linealmente independiente, entonces

$$A_i = \{x_1 - x_i, x_2 - x_i, \ldots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \ldots, x_n - x_i\}$$

   es linealmente independiente para $1 \leq i \leq n$

2. $A = \{x_0, x_i, \ldots, x_n\}$ es afín independiente,

$$co(A) \equiv \overline{x_0 x_1 \cdots x_n}$$

   se llama n-simplejo.

3. Sí $0 \leq i_0 < i_i < \ldots < i_k \leq n$, entonces

$$\overline{x_{i_0}\ x_{i_1}\ \ldots\ x_{i_k}}$$

   se llama una cara del simplejo $\overline{x_0\ x_1\ \ldots\ x_n}$

4. Todo punto $x \in \overline{x_0 x_1 \ldots x_n}$ tiene una única representación como combinación convexa de los puntos.

$$x_0, x_1, \ldots, x_n$$

5. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $co(A)$ es compacto.

Definición 3.6.5. *Sea $\mathcal{U} : X \to \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto convexo X de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\mathcal{U}$ es:*

Cuasicóncava *si para cada $x,\ y \in X$ con $0 < \alpha < 1$*

$$\mathcal{U}(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min\{\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)\}$$

Estrictamente cuasicóncava *si para cada* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$

$$\mathcal{U}(\alpha x + (1-\alpha)y) > \text{mín}\{\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)\}$$

Cóncava *si para cada* $x, y \in X$ *con* $0 < \alpha < 1$

$$\mathcal{U}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha\mathcal{U}(x) + (1-\alpha)\mathcal{U}(y)$$

Estrictamente cóncava *si para cada* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$

$$\mathcal{U}(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha\mathcal{U}(x) + (1-\alpha)\mathcal{U}(y)$$

Puede verificarse que una función $\mathcal{U} : X \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ es cuasicóncava si el siguiente conjunto $\{x \in X : \mathcal{U}(x) \geq t\}$ es un conjunto convexo.

Es decir si $\mathcal{U}(x) \geq t$ y $\mathcal{U}(y) \geq t$ entonces:

$$\mathcal{U}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq t,$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, $x,\ y \in X$ con $\alpha \in [0\,1]$. Si la desigualdades anterior es estricta para todo $x \neq y$ con $\alpha \in (0\,1)$ entonces $\mathcal{U}$ es estrictamente-cóncava.

Teorema 3.6.1. *Toda función cóncava es cuasicóncava y toda función estrictamente cóncava es estrictamente cuasicóncava.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} : X \to \mathbb{R}$ cóncava, consideremos $x,\ y \in X$ y definimos $m = min\{\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)\}$. Entonces:

$$\mathcal{U}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha\mathcal{U}(x) + (1-\alpha)\mathcal{U}(y) \geq m,\ \forall \alpha \in [0, 1]$$

La segunda afirmación se demuestra análogamente. □

El recíproco de este teorema **no es cierto**, para ver esto considere la función $\mathcal{U}(x) = x^3$ ella es cuasicóncava, pero no es cóncava.

3.7. Funciones Semicontinuas

En muchas partes de la teoría microeconómica es posible reemplazar el supuesto que el comportamiento de las funciones que aparecen en la teoría son continuas con un supuesto mas débil denominada **semicontinuidad**. Esto no sólo permite que ganemos generalidad en un sentido matemático, si no también en muchas aplicaciones económicas. En esta sección, definiremos la **semi-continuidad superior** e **inferior** para funciones reales como sigue.

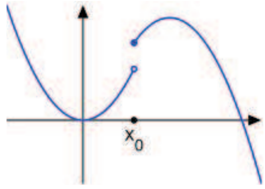


Figura 3.1: Funciones Semicontinuas Superiormente, la bola llena indica $f(x_0)$

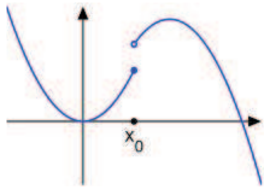


Figura 3.2: Funciones Semicontinuas Inferiormente, la bola llena indica $f(x_0)$

Definición 3.7.1. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, donde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto no vacío. Diremos que f es **semicontinua superior** (s.c.s.) **en** $\mathbf{x_0} \in X$ si y sólo si, se verifica que: para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall\ x \in B(\mathbf{x_0}, \delta) \cap X) \ : \ f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x_0}) + \epsilon$$

*Decimos que f es **semicontinua superior** sobre X, si y sólo si, f es **semicontinua superior** en cada $\boldsymbol{x} \in X$.*

Definición 3.7.2. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, donde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto no vacío. Decimos que f es **semicontinua inferior** (s.c.i.) **en** $\mathbf{x_0} \in X$ si y sólo si, se verifica que: para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall\ x \in B(\mathbf{x_0}, \delta) \cap X) \ : \ f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x_0}) - \epsilon$$

*Decimos que f es **semicontinua inferior** sobre X, si y sólo si, f es **semicontinua inferior** en cada $\boldsymbol{x} \in X$.*

Proposición 3.7.1. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío. Entonces f es s.c.s. sobre X si, y sólo si, para cada número real $a \in \mathbb{R}$, el conjunto L_a el cual es definido* *como:*

$$L_a = f^{-1}\left(]-\infty, a[\right) = \{\mathbf{x} \in X : \ f(\mathbf{x}) < a\}$$

es un conjunto abierto relativo a X.

Demostración. Supongamos primero que f es semicontinua superiormente, sea $a \in \mathbb{R}$, y sea $\mathbf{x}^* \in L_a$ arbitrario. Entonces

$$f(\mathbf{x}^*) < a \tag{3.4}$$

de modo que, si definimos ϵ por:

$$\epsilon = \frac{a - f(\mathbf{x}^*)}{2},$$

vemos que $\epsilon > 0$. Como f es semi-continua superiormente, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall\ x \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap X) : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*) + \epsilon = \frac{a + f(\mathbf{x}^*)}{2}. \tag{3.5}$$

Sin embargo, por (3.4), vemos que $\dfrac{a + f(\mathbf{x}^*)}{2} < a$; y así se concluye de (3.5) que:

$$(\forall\ x \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap X) : f(\mathbf{x}) < a,$$

y así

$$B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap X \subseteq L_a.$$

De esto se concluye que L_a es un abierto relativo para X.

Supongamos ahora que, para cada $a \in \mathbb{R}$, L_a es un abierto relativo para X, sea $\mathbf{x}^* \in X$ arbitrario, y sea $\epsilon > 0$ dado. Definiendo

$$a = f(\mathbf{x}^*) + \epsilon, \tag{3.6}$$

vemos que $\mathbf{x}^* \in L_a$; de modo que, como L_a es un abierto relativo para X, se concluye que existe $\delta > 0$ tal que:

$$B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap X \subseteq L_a.$$

De las definiciones de L_a y a, podemos concluir que:

$$(\forall\ x \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap X) : f(\mathbf{x}) < a.$$

□

Corolario 3.7.1. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío. Entonces f es semicontinua superiormente sobre X si, y sólo si, para cada número real $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\overline{U}_a$ definido por:*

$$\overline{U}_a = f^{-1}(]a, +\infty[) = \{\mathbf{x} \in X : \ f(\mathbf{x}) \geq a\}$$

es cerrado relativo para X.

Demostración. Ver [19], pág. 138. $\square$

Corolario 3.7.2. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío. Entonces f es semicontinua inferiormente sobre X si, y sólo si, para cada número real $a \in \mathbb{R}$, el conjunto U_a definido por:*

$$U_a = f^{-1}(]a, +\infty[) = \{\mathbf{x} \in X : \ f(\mathbf{x}) > a\}$$

es abierto relativo para X.

Demostración. Ver [19], pág. 138. $\square$

Corolario 3.7.3. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío. Entonces f es semicontinua inferiormente sobre X si, y sólo si, para cada número real $a \in \mathbb{R}$, el conjunto U_a definido por:*

$$\overline{L}_a = f^{-1}(]-\infty, a[) = \{\mathbf{x} \in X : \ f(\mathbf{x}) \leq a\}$$

es cerrado relativo para X.

Demostración. Ver [19], pág. 138. $\square$

Proposición 3.7.2. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, y $f_i : X \to \mathbb{R}$ semicontinua superiormente en $\mathbf{x}^* \in X$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces la función*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \mathbf{x} & \longmapsto & f(\mathbf{x}) = \max\limits_i f_i(\mathbf{x}) \quad \textit{para } x \in X \end{array}$$

es s.c.s. en x^*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como cada f_i es semi-continua superiormente en $\mathbf{x}^*$, se concluye que para cada i existe un $\delta_i > 0$ tal que:

$$(\forall\ x \in B(\mathbf{x}^*, \delta_i) \cap X) : f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{x}^*) + \epsilon. \tag{3.7}$$

Definamos $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, y sea $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap X$ arbitrario. Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$f_k(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}) \quad \textit{para} \quad i = 1, \ldots, n,$$

tenemos por (3.7) y de la definición de f, que:

$$f(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*) + \epsilon \leq f(\mathbf{x}^*) + \epsilon$$

Como $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap X$ fue arbitrario, se concluye que f es semicontinua superiormente en $\mathbf{x}^*$. $\square$

Teorema 3.7.1. ***(Teorema de Separación Fuerte.)*** *Sea* $\emptyset \neq A,\ B \subset \mathbb{R}^n$ *conjuntos convexos con* $A \cap B = \emptyset$*, sea además* A *cerrado y* B *compacto. Entonces, existe una función lineal continua* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$*, tales que*

$$f(x) < \alpha_1 < \alpha_2 < f(y), \quad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

Demostración. (Ver [3], página 207 ó [20], página 264.) $\square$

Capítulo 4

Correspondencias

Introduciremos el concepto de correspondencia, y definimos su inversa superior e inferior así como también definimos diversos tipos de continuidad para correspondencias, también presentamos algunos teoremas que las relacionan y que nos serán de utilidad en los subsiguientes capítulos.

4.1. Definiciones Previas

Definición 4.1.1. *Sean* $(\mathbb{R}^n, d_n)$ *y* $(\mathbb{R}^m, d_m)$ *dos espacios métricos euclidianos, se dice que* φ *es una* ***correspondencia***[1] *de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$*, si para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*,* φ *asocia un conjunto* $\varphi(x) \subseteq \mathbb{R}^n$*, el cual eventualmente puede ser vacío, la cual denotaremos por* $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *o* $\varphi : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$.

Ahora consideraremos algunos ejemplos, desde nuestro punto de vista interesantes, de correspondencias.

Ejemplo. (Función Inversa.) Sea $f : X \to Y$ una aplicación de $X \subset \mathbb{R}^n$ en $Y \subset \mathbb{R}^m$. Como para todo $y \in \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(y) = \{x \in X : y = f(x)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una correspondencia.

Ejemplo. (Programación Lineal.) Sea A una matriz de orden $m \times n$. Para todo $b \in \mathbb{R}^m$ definimos $\Gamma(b)$ como el poliedro de $\mathbb{R}^n$

$$\Gamma(b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$$

[1] En inglés se usa este concepto de correspondencia como sinónimos, las expresiones **correspondence**, **point-to-set map** y **multivalued map**; en francés **fonction multivogue** e **multiapplication** y en alemán **Mengenwertige Abbildung**.

Entonces $\Gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una correspondencia.

Ejemplo. (Subdiferencial de una Función Convexa.) Veamos una aplicación en análisis convexo. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ una función convexa y $x \in dom(f) = \{z \in \mathbb{R} : \; f(z) < +\infty\}$. Diremos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un **subgradiente** de f en x si:

$$f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y), \quad \forall \; y \in X.$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno euclidiano.

Denotaremos por $\partial f(x) \subset X^*$ al conjunto de todos los subgradientes de f en $x \in \mathbb{R}^n$, es decir que

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \; f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y), \quad \forall \; y \in X\},$$

De ahora en adelante ∂f será llamado como **subdiferencial** de f en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces ∂f es una correspondencia.

Como ilustración veamos el siguiente caso particular, sea

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = |x| \end{array}$$

donde el subdiferencial de f en 0, es:

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} : \; f(x) \geq f(0) + \langle \xi, x - 0 \rangle, \; \forall \; x \in \mathbb{R}\}$$

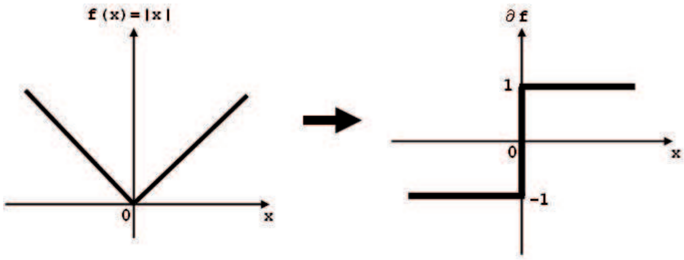


Figura 4.1: La subdiferencial de una función convexa como una función de argumento x.

de donde obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} |x| \geq \langle \xi, x \rangle & & \forall \; x \in \mathbb{R} \\ |x| \geq \xi x & \Longrightarrow & \xi \in [-1, 1]. \end{array}$$

por lo tanto, $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Ejemplo. (Microeconomía.) Un consumidor es un agente individual (un individuo en sentido estricto, o una familia) que toma decisiones de consumo. Supondremos que hay un número finito m de consumidores, que distinguiremos con el subíndice $i = 1, 2, \ldots, m$.

El conjunto de elección del i-ésimo consumidor está construido por un conjunto $X_i \subset \mathbb{R}^n$ de consumo **posibles**. Un consumo posible (o un **plan de consumo**) es un vector n-dimensional del espacio de mercancías $\mathbb{R}^n$, y lo representaremos por $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$. El elemento x_{ik} de este vector describe la cantidad de mercancía k consumida por el i-ésimo consumidor. Cada plan de consumo especifica ciertas cantidades de bienes y servicios consumibles, así como ciertas cantidades de factores productivos que el consumidor puede ofertar (diversos tipos de trabajo).

El conjunto de todos los consumo posibles para el i-ésimo consumidor $X_i \subset \mathbb{R}^n$ se denomina conjunto de consumo, la forma más sencilla de modelar estos conjuntos es identificando los planes de consumo con vectores no negativos. Se trata de tomar $X_i = \mathbb{R}^n_+$, de modo que un plan de consumo es posible para un consumidor si y sólo si está constituido por cantidades no negativas.

Este supuesto facilita notablemente la discusión del comportamiento del consumidor por tres razones:

1. Porque $\mathcal{R}^n_+$ es un conjunto con buenas propiedades operativas (en particular es un conjunto no vacío, cerrado, convexo y todas sus componentes son acotadas inferiormente);

2. Porque todos los consumidores tienen idéntico conjunto de consumo, de modo que lo que les diferencia son sus formas de valorar las distintas alternativas y sus dotaciones de recursos;

3. Porque los problemas de optimización con restricciones de no negatividad son tratables con procedimiento más sencillos

Diremos que $M_i \in \mathbb{R}$ representa la **riqueza** del i-ésimo consumidor ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Representaremos los precios de las mercancías mediante un vector de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, de modo que el coste de adquirir un vector de mercancías $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ vendrá dado por:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k x_{ik}.$$

Dado un vector de precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ el i-ésimo consumidor podrá adquirir todas aquellas cantidades de mercancías que no cuesten más que su riqueza M_i. Diremos así que un plan de consumo $\mathbf{x}_i$ es accesible para el i-énimo consumidor a los precios $\mathbf{p}$ si $\mathbf{p}\mathbf{x}_i \leq M_i$. El conjunto

$$\beta_i(\mathbf{p}, M_i) = \{\mathbf{x}_i \in X_i : \ \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle \leq M_i\}$$

se denomina **conjunto presupuestario**, y describe aquellos planes de consumo que el i-ésimo consumidor puede pagar, cuando su riqueza es M_i y los precios del mercado vienen dados por el vector $\mathbf{p}$. Suele denominarse **par precio-riqueza** al vector $(\mathbf{p}, M_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que define la restricción presupuestaria. Al escribir el conjunto presupuestario como $\beta(\mathbf{p}, M_i)$ estamos indicando que este conjunto varía con los precios y la riqueza.

Por lo tanto, $\beta_i(\mathbf{p}, M_i)$, es una correspondencia.
Ejemplo. (Optimización.) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos que:

$$x^* \in \arg\max_{x \in A} f(x) \Longleftrightarrow f(x^*) = \max_{x \in A} f(x)$$

es decir, x^* es el valor que optimiza la función f sobre el conjunto A. Entonces la aplicación que lleva $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\arg\max_{x \in A} f(x)$ es una correspondencia.

Veamos el siguiente caso particular, sea:

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = x^2. \end{array}$$

Si $A = [-2, 2]$, entonces f alcanza su máximo valor en $x^* = \{\pm 2\}$ sobre A, de modo que

$$\arg\max_{x \in A} f(x) = \{-2, +2\}$$

Definición 4.1.2. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, donde X e Y son conjuntos no vacíos. Definimos los conjuntos:*

1. ***Dominio de** φ, como*

$$dom(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq \phi\}$$

se llama dominio de la correspondencia.

2. ***Gráfico de*** φ*,* $\mathcal{G}_\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *por:*

$$\mathcal{G}_\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ y \ \in \varphi(x)\}$$

3. ***Imagen de U bajo*** φ*,* $\varphi(U)$*, para* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *por:*

$$\varphi(U) = \bigcup_{x \in U} \varphi(x)$$

4. ***Inversa superior de*** φ*, como la correspondencia* $\varphi^\mu : 2^{\mathbb{R}^m} \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *definida por:* $\varphi^\mu(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \subset A\}$ *para* $A \subset \mathbb{R}^m$

5. ***Inversa inferior de*** φ*, como la correspondencia* $\varphi^\ell : 2^{\mathbb{R}^m} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *definida por:* $\varphi^\ell(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \cap A \neq \phi\}$*, para* $A \subset \mathbb{R}^m$

Observación, De las definiciones anteriores se puede deducir:

1. $\varphi^\mu(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = \phi\}$
2. $\varphi^\ell(\phi) = \phi$
3. Sí $\varphi(x) \neq \phi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ entonces $\varphi^\mu(B) \subset \varphi^\ell(B) \quad \forall\ B \subset \mathbb{R}^m$
4. Sí $f : X \to Y$ es una aplicación donde $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$, la cual puede ser considerada como una correspondencia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ definida por $\varphi(x) = \{f(x)\}$, $\forall x \in X$ y $\varphi(x) = \emptyset$, $\forall x \notin X$, entonces se cumple evidentemente: $\varphi^\mu(B) = \varphi^\ell(B) = f^{-1}(B) \quad \forall B \subset \mathbb{R}^m$

Teorema 4.1.1. *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *una correspondencia,* $A \subset \mathbb{R}^m$ *y* A_i*,* $i \in I$*, una familia de subconjuntos de* $\mathbb{R}^m$*. Entonces se cumple:*

1. $[\ \varphi^\mu(A)\ ]^C = \varphi^\ell(A^C)$
2. $[\ \varphi^\ell(A)\ ]^C = \varphi^\mu(A^C)$
3. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \varphi^\mu(A_i) \subset \varphi^\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$
4. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \varphi^\ell(A_i) = \varphi^\ell\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$
5. $\displaystyle\varphi^\ell\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} \varphi^\ell(A_i)$

6. $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\varphi^{\mu}(A_i)=\varphi^{\mu}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$

donde $[\ \varphi^{\mu}(A)\ ]^C=\mathbb{R}^n\setminus\varphi^{\mu}(A)$ *y* $A^C=\mathbb{R}^m\setminus A$

Demostración. Se cumple las siguientes implicaciones:

1. $x\in\mathbb{R}^n\setminus\varphi^{\mu}(A)\Leftrightarrow\varphi(x)\not\subset A\Leftrightarrow\varphi(x)\cap(\mathbb{R}^m\setminus A)\neq\phi\Leftrightarrow x\in\varphi^{\ell}(\mathbb{R}^m\setminus A)$.

2. $x\in\mathbb{R}^n\setminus\varphi^{\ell}(A)\Leftrightarrow\varphi(x)\cap A=\phi\Leftrightarrow\varphi(x)\subset\mathbb{R}^m\setminus A\Leftrightarrow x\in\varphi^{\mu}(\mathbb{R}^m\setminus A)$

3. $x\in\displaystyle\bigcup_{i\in I}\varphi^{\mu}(A_i)\Leftrightarrow\varphi(x)\subset A_{i_0}$ para algún $i_0\in I$ entonces,

$$\varphi(x)\subset\bigcup_{i\in I}A_i\Leftrightarrow x\in\varphi^{\mu}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$$

4. $x\in\displaystyle\bigcup_{i\in I}\varphi^{\ell}(A_i)\Leftrightarrow\varphi(x)\cap A_{i_0}\neq\phi$ para algún $i_0\in I$

$$\Leftrightarrow\varphi(x)\cap\bigcup_{i\in I}A_i\neq\phi\Leftrightarrow x\in\varphi^{\ell}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$$

5. $x\in\varphi^{\ell}\left(\displaystyle\bigcap_{i\in I}A_i\right)\Leftrightarrow\varphi(x)\cap\left(\displaystyle\bigcap_{i\in I}A_i\right)\neq\phi$ entonces,

$$\varphi(x)\cap\ A_i\neq\phi,\forall\ i\in I\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}\varphi^{\ell}\ (A_i)$$

6. $x\in\displaystyle\bigcap_{i\in I}\varphi^{\mu}(A_i)\Leftrightarrow\varphi(x)\subset A_i\quad\forall\ i\in I$

$$\Leftrightarrow\varphi(x)\subset\bigcap_{i\in I}A_i\Leftrightarrow x\in\varphi^{\mu}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right).\quad\square$$

Teorema 4.1.2. *Sea* $\varphi:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ *una correspondencia no vacía, entonces:*

1. $V\subset\varphi^{\mu}(\varphi(V)),\ \forall\ V\subset\mathbb{R}^n,$

2. $\varphi(\varphi^{\mu}(W))\subset W,\ \forall\ W\subset\mathbb{R}^m.$

Demostración. .

1. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ cualquiera. Sabemos que $\varphi(V) = \bigcup_{v \in V} \varphi(v)$, entonces

$$\varphi(v) \subset \varphi(V) \quad \forall\, v \in V$$

entonces

$$\hat{v} \in \varphi^{\mu}(\varphi(v))$$

2. Sea $W \subset \mathbb{R}^m$ cualquiera, sabemos que $\varphi(\varphi^{\mu}(W)) = \displaystyle\bigcup_{x \in \varphi^{\mu}(W)} \varphi(x)$, luego si $x \in \varphi^{\mu}(W)$, entonces $\varphi(x) \subset W$, por lo tanto

$$\bigcup_{x \in \varphi^{\mu}(W)} \varphi(x) \subset W$$

luego $\varphi(\varphi^{\mu}(W)) \subset W \quad \forall\, W \subset \mathbb{R}^m$. □

4.2. Semi-continuidad de Correspondencias

Antes de estudiar las definiciones de semi-continuidad es conveniente recordar:

Sabemos que U es una vecindad del punto $x \in \mathbb{R}^n$, sí y solo sí existe un V abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in V \subseteq U$. Generalizando este concepto:

Sea $Z \subset \mathbb{R}^n$, decimos que U es una vecindad de Z si y solo si, existe V abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $Z \subseteq V \subseteq U$. Cualquier V abierto para el que $Z \subseteq V$ se llama vecindad abierta de Z. Emplearemos muchas veces la notación $\mathcal{N}_Z$ para la familia de todas las vecindades de Z.

Definición 4.2.1. *La correspondencia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ se dice que:*

1. ***Semicontinua superiormente (s.c.s.)*** *en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sí y solo sí, para cada vecindad, V de $\varphi(x_0)$, existe una vecindad N de x_0, tal que:*

$$(\forall\, x \in N) : \varphi(x) \subseteq V$$

2. ***Semicontinua inferiormente (s.c.i)*** *en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sí y solo sí, para cada subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^m$ tal que $\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$, existe una vecindad N de x_0 tal que*

$$(\forall\, x \in N) : \varphi(x) \cap V \neq \emptyset$$

3. ***Continua*** *en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sí y solo sí es a la vez s.c.s y s.c.i en x_0.*

La correspondencia φ se dirá que es s.c.s. sobre un subconjunto, A, de $\mathbb{R}^n$, sí y solo sí este es s.c.s en cada punto $x \in A$; si $A = \mathbb{R}^n$, simplemente diremos que φ es s.c.s. Emplearemos una terminología similar para la correspondencia s.c.i. y correspondencias continuas.

Ejemplo. Si $D \subset \mathbb{R}^m$ y $\varphi(x) = D, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es continua. En consecuencia toda correspondencia constante es continua.

Ejemplo. Sea

$$\varphi(x) \quad = \quad \begin{cases} [-x^2, x^2] & , \forall x \in \ [0,2] \\ [-1,1] & , \forall x \in]2,3] \\ [-2,1] & , \forall x \in]3,4] \\ \emptyset & , \forall x \notin [0,4] \end{cases}$$

Entonces $\varphi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ es en $x = 2$ s.c.s. pero no s.c.i. En $x = 3, \varphi$ es s.c.i. pero no s.c.s.

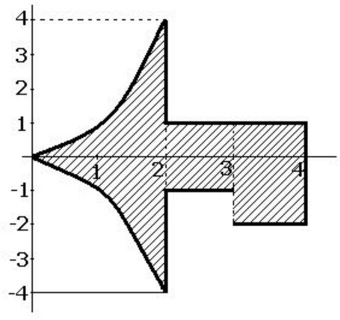


Figura 4.2: Gráfica de una correspondencia s.c.s. pero no s.c.i.

Ejemplo. Sea $f : S \to T$ donde $S \subset \mathbb{R}^n$ y $T \subset \mathbb{R}^m$. Si definimos $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ mediante $\varphi(x) = \{f(x)\}$ para $x \in S$ y $\varphi(x) = \emptyset$ para $x \notin S$, entonces φ es s.c.s. en un punto $x_0 \in S$ sí y solo sí, f es continua en $x_0 \in S$

Ejemplo. Sea $\psi : X \to \mathbb{R}$ una función y $\phi(x) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ una correspondencia definida por $\phi(x) :=] - \infty, \psi(x)]$, $\forall\, x \in X$ y $\phi(x) := \emptyset$, $\forall\, x \notin X$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple que:

a) $\phi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ es s.c.s. en $\bar{x} \in X$ si y solo si ψ es s.c.s. en $\bar{x} \in X$.

b) $\phi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ es s.c.i. en $\bar{x} \in X$ si y solo si ψ es s.c.i. en $\bar{x} \in X$.

Solución.

a) Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Entonces $g =]-\infty, \psi(\bar{x}) + \epsilon[$ es un abierto tal que $\phi(\bar{x}) \subset g$. Como ϕ es s.c.s. en $\bar{x}$, existe una vecindad U de $\bar{x}$, tal que $\phi(\bar{x}) =]-\infty, \psi(x)] \subset g$, $\forall\ x \in U$. Por consiguiente se cumple:

$$\psi(x) < \psi(\bar{x}) + \epsilon, \quad \forall\ x \in U.$$

En consecuencia ψ es s.c.s. en $\bar{x}$.

Probemos ahora el recíproco, Sea g un conjunto abierto con

$$\phi(\bar{x}) =]-\infty, \psi(\bar{x})] \subset g.$$

Entonces, existe un $\epsilon > 0$, tal que $]-\infty, \psi(\bar{x}) + \epsilon[\subset g$. Como ψ es s.c.s. en $\bar{x}$, existe una vecindad U de $\bar{x}$, tal que $\psi(x) < \psi(\bar{x}) + \epsilon$, $\forall\ x \in U$. Por consiguiente se cumple:

$$\phi(x) =]-\infty, \psi(x)] \subset]-\infty, \psi(\bar{x}) + \epsilon[\subset g, \quad x \in U,$$

y ϕ es s.c.s. en $\bar{x}$.

b) Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Entonces $g =]-\infty, \psi(\bar{x}) - \epsilon[$ es un abierto con $\phi(\bar{x}) \cap g \neq \emptyset$. Como ϕ es s.c.i., existe una vecindad U de $\bar{x}$, tal que $\phi(x) \cap g \neq \emptyset$, $\forall\ x \in U$. Por consiguiente se cumple: $\psi(x) > \psi(\bar{x}) - \epsilon$, $\forall\ x \in U$.

En consecuencia ψ es s.c.i. en $\bar{x}$.

Probemos ahora el recíproco, Sea $g =]-\infty, \psi(\bar{x}) - \epsilon[$ un conjunto abierto con

$$\phi(\bar{x}) \cap g \neq \emptyset.$$

Como ψ es s.c.i., existe una vecindad U de $\bar{x}$ tal que $\psi(x) > \psi(\bar{x}) - \varepsilon$, $\forall x \in U$. Por consiguiente se cumple: $\phi(x) \cap g \neq \emptyset$, $\forall x \in U$. Entonces ϕ es s.c.i. en $\bar{x}$.

Teorema 4.2.1. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ una correspondencia, los tres enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *φ es s.c.s.*
2. *Para cada subconjunto abierto, $V \subset \mathbb{R}^m, \varphi^{\mu}(V)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Para cada subconjunto cerrado, $F \subset \mathbb{R}^m, \varphi^{\ell}(F)$ es cerrado de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Probemos las siguientes implicaciones:

1. (1) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que φ es s.c.s. y $F \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto cerrado.

   Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \varphi^\ell(F)$, entonces $x \notin \varphi^\ell(F)$, luego $\varphi(x) \cap F = \emptyset$, esto implica que $\varphi(x) \subseteq F^C$. Como F^C es abierto en $\mathbb{R}^m$ y φ es s.c.s., existe una vecindad N de x, tal que: $(\forall y \in N) : \varphi(y) \subseteq F^C$, entonces $(\forall y \in N : \varphi(y) \cap F = \emptyset$. Esto implica que $(\forall y \in N) : y \notin \varphi^\ell(F)$, entonces $N \subset (\mathbb{R}^n \setminus \varphi^\ell(F))$, con lo cual hemos probado que $\mathbb{R}^n \setminus \varphi^\ell(F)$ es abierto y así $\varphi^\ell(F)$ es cerrado de $\mathbb{R}^n$.

2. (3) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que φ satisface la condición (3) y sea $V \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto abierto, donde se concluye por el Teorema 4.1.1 1. que $\varphi^\ell(V^C) = (\mathbb{R}^n \setminus \varphi^\mu(V))$ y por la condición 3. tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \varphi^\mu(V)$ es cerrado y aí $\varphi^\mu(V)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.

3. (2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que φ satisface la condición (2) y sea $x \in \mathbb{R}^n$, y V una vecindad de $\varphi(x)$. Por la condición (2) tenemos que $\varphi^\mu(V)$ es una vecindad de x y como $(\forall\, y \in \varphi^\mu(V))$; $\varphi(y) \subseteq V$, esto implica que φ es s.c.s. en x. □

Teorema 4.2.2. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ una correspondencia, los tres enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *φ es s.c.i*

2. *Para cada subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^m$, $\varphi^\ell(V)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.*

3. *Para cada subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}^m$, $\varphi^\mu(F)$ es cerrado de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

1. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $V \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto abierto y tomemos $x \in \varphi^\ell(V)$ arbitrario. Entonces $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$ como φ es s.c.i., existe una vecindad N de x, tal que $\varphi(y) \cap V \neq \emptyset, \forall\, y \in N$. Entonces $y \in \varphi^\ell(V)$, $\forall y \in N$. Por consiguiente $N \subset \varphi^\ell(V)$, $\forall x \in \varphi^\ell$ por lo tanto $\varphi^\ell(V)$ es abierto.

2. (2) $\Rightarrow$ (3) Sea $F \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto cerrado, entonces F^C es abierto y por el Teorema 4.2.2 (2.) tenemos que $\varphi^\ell(F^C)$ es abierto, por el Teorema 4.1.1, tenemos $[\varphi^\ell(F^C)] = [\varphi^\mu(F)]^C$, entonces $[\varphi^\mu(F)]^C$ es abierto y por lo tanto $\varphi^\mu(F)$ es cerrado.

3. (3) $\Rightarrow$ (1) sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Veamos que φ es s.c.i en x: Sea V un conjunto abierto tal que $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$ entonces $x \in \varphi^\ell(V)$, y como V es abierto, entonces V^C es cerrado. Por el Teorema 4.2.2 (3.) tenemos que $\varphi^\mu(V^C)$ es cerrado, por el Teorema 4.1.1 $[\varphi^\ell(V)]^C = [\varphi^\mu(V^C)]$, entonces $[\varphi^\ell(V)]^C$ es cerrado, por lo tanto $\varphi^\ell(V)$ es abierto, y como $x \in \varphi^\ell(V)$, entonces, existe una vecindad N de x tal que $N \subset \varphi^\ell(V)$. Sea $y \in N$ arbitrario, entonces $y \in \varphi^\ell(V)$, $\forall y \in N$. Entonces $\varphi(y) \cap V \neq \emptyset$, $\forall y \in N$ por lo tanto φ es s.c.i.. □

Por la definición de s.c.s. de $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ nos lleva a lo siguiente: φ es s.c.s. en $x \in \mathbb{R}^n$, si y sólo si, para cada vecindad V de $\varphi(x)$, existe una vecindad N de x tal que: $\varphi(y) \subset V$, $\forall\ y \in N$, si y solo si (según la definición de φ^μ), $y \in \varphi^\mu(V)$, $\forall\ y \in N$, si y solo si, $N \subset \varphi^\mu(V)$.

Y como V es abierto, entonces, $\varphi^\mu(V)$ es abierto. Entonces $\varphi^\mu(V)$ es una vecindad de x.

Es decir; φ es s.c.s. en $x \in \mathbb{R}^n$ si para toda vecindad V de $\varphi(x)$ se tiene que $\varphi^\mu(V)$ es una vecindad de x y con ello hemos obtenido una nueva propiedad que llamaremos **PS**.

De igual manera, si φ es s.c.i. en $x \in \mathbb{R}^n$, entonces, para cada abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, tal que $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$, existe una vecindad N de x tal que $(\forall\ y \in N)$: $\varphi(y) \cap U \neq \emptyset$, entonces $y \in \varphi^\ell(U)$, $\forall\ y \in N$, entonces $N \subset \varphi^\ell(U)$, y como U es abierto, entonces, por el Teorema 4.2.2 (2.) $\varphi^\ell(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $\varphi^\ell(U)$ es una vecindad de x.

Es decir, φ es s.c.i. en $x \in \mathbb{R}^n$ si para todo abierto U tal que $\varphi(x_0) \cap U \neq \emptyset$ se verifica que $\varphi^\ell(U)$ es una vecindad de x, y con ello hemos obtenido una nueva propiedad llamado **PI** de s.c.i., es decir, sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$

PS: φ es s.c.s. en $x \in \mathbb{R}^n$, si y sólo si, para toda vecindad V de $\varphi(x)$ se tiene que $\varphi^\mu(V)$ es una vecindad de x.

PI: φ es s.c.i. en $x \in \mathbb{R}^n$, si y sólo si, para todo abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$ se tiene que $\varphi^\ell(U)$ es una vecindad de x.

Teorema 4.2.3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ s.c.s. y sea $\varphi(x)$ compacto, $\forall\ x \in S$. Entonces $\varphi(S)$ es también compacto.*

Demostración. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de $\varphi(S) = \bigcup\limits_{x\in S} \varphi(x)$. Entonces $\{G_i\}_{i\in I}$, es también un cubrimiento abierto de $\varphi(x), \forall\ x \in S$. Como $\varphi(x)$ es compacto, existe para cada $x \in S$ un subconjunto finito I_x de I, tal que $\varphi(x) \subset \bigcup\limits_{i\in I_x} G_i = G_x$, como G_x es abierto, φ es s.c.s. y $x \in \varphi^\mu(G_x), \forall\ x \in S$, la familia $\{\varphi^\mu(G_x) : x \in S\}$ es un cubrimiento abierto de S. Como S es compacto, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset S$, tal que $S = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \varphi^\mu(G_{x_i})$. De esto se deduce que:

$$\varphi(S) \subset \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{m} \varphi^\mu(G_{x_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \varphi(\varphi^\mu(G_{x_i})),$$

Por el Teorema 4.2, se cumple en consecuencia

$$\varphi(S) \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{i\in I_{x_i}} G_i\right) = \bigcup_{i\in S} G_i,$$

donde $S = \bigcup_{i=1}^{m} I_{x_i}$ Por consiguiente $\{G_i\}_{i\in S}$, es un subcubrimiento finito del cubrimiento abierto $\{G_i\}_{i\in I}$ de $\varphi(S)$. En consecuencia $\varphi(S)$ es compacto. $\square$

No es posible, sustituir en el teorema 4.5 **s.c.s** por **s.c.i**, lo que nos muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left[0, \dfrac{1}{x}\right] & , \quad 0 < x \leq 1 \\ \{0\} & , \quad x = 0 \\ \emptyset & , \quad x \notin [0, 1] \end{cases}$$

φ es s.c.i. y $\varphi(x)$ es compacto $\forall x \in [0\ 1]$. Sin embarco $\varphi([0\ 1]) = \mathbb{R}_+$ no es compacto (ver figura 4.3).

Figura 4.3: Gráfica de $\varphi(x)$

4.3. Correspondencias Cerradas

Para muchas aplicaciones, aparte de las correspondencias inferiormente o superiormente continuas, son también muy útiles las así llamadas correspondencias cerradas

Definición 4.3.1. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ una correspondencia. Decimos que φ es cerrada, si*

$$\mathcal{G}_\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ y \in \varphi(x)\} \ \textit{es cerrada en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Notemos que si φ es cerrada e $\bar{y} \notin \varphi(\bar{x})$, entonces, como $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \backslash \mathcal{G}_\varphi$ es abierto, existe una vecindad U de $\bar{x}$, y una vecindad V de $\bar{y}$, tal que $(U \times V) \bigcap \mathcal{G}_\varphi = \emptyset$ ó $\varphi(U) \bigcap V = \emptyset$.

Usamos esta propiedad, para definir el concepto de una correspondencia cerrada en un punto.

Definición 4.3.2. *La correspondencia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es cerrada en $\bar{x}$, si para todo $\bar{y} \notin \varphi(\bar{x})$ existe una vecindad U de $\bar{x}$ y un vecindad V de $\bar{y}$, tal que $\varphi(x) \bigcap V = \emptyset$, $\forall x \in U$.*

Como consecuencia de está definición tenemos:

a) $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es cerrada si, y sólo si, φ es cerrada en todo punto de $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Si φ es cerrada en $\bar{x}$, entonces $\varphi(\bar{x})$ es cerrado. Eso es porque, si $\bar{y} \in \mathbb{R}^m \setminus \varphi(\bar{x})$, entonces existe una vecindad V de $\bar{y}$, tal que $\varphi(\bar{x}) \cap V = \emptyset$ ó $V \subset \mathbb{R}^m \setminus \varphi(\bar{x})$. Por consiguiente $\mathbb{R}^m \setminus \varphi(\bar{x})$ es abierto.

Observación, Podríamos preguntarnos ?'qué relación existe entre correspondecia cerrada y correspondencia continua?. En realidad, tenemos que:

1. Si φ es cerrada en $\bar{x}$, entonces por lo general φ no es ni s.c.s. ni s.c.i. en $\bar{x}$. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.
   Ejemplo. Sea $X = Y = \mathbb{R}$, y sea

$$\begin{array}{rccl} \Gamma & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & \Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad \forall\, x \neq 0, \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

   una función cerrada, debido a que el $\mathcal{G}_\Gamma$ es cerrada. Pero la función Γ no es continua en 0, y es por eso que no es s.c.s. ni s.c.i.

   Al revés una correspondencia continua en $\bar{x}$, generalmente no es cerrada en $\bar{x}$.

2. Si φ es continua en $\bar{x}$, entonces por lo general, φ no es cerrada en x, como en el siguiente ejemplo

   Ejemplo. Si $G \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y $\Gamma(x) = G$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, entonces Γ es continua. Sin embargo, como G es abierto, en ningún punto $x \in \mathbb{R}^n$, Γ es cerrada.

Sin embargo es posible, establecer relaciones entre correspondencias semicontinuas superiormente y correspondencias cerradas, como se muestra a continuación.

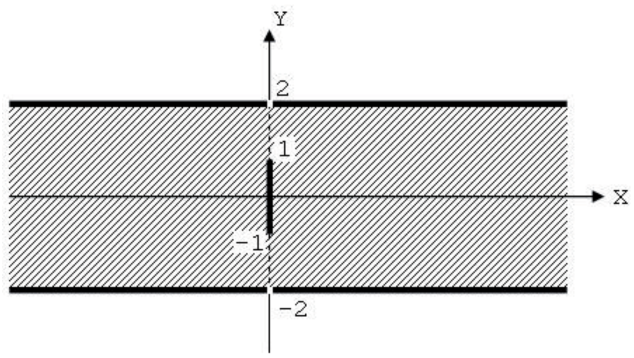
Teorema 4.3.1. *Sea* $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una correspondencia.* Γ *es cerrada en* $\bar{x}$*, si* Γ *es s.c.s. en* $\bar{x}$ *y* $\Gamma(\bar{x})$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $\bar{y} \notin \Gamma(\bar{x})$. Como $\Gamma(\bar{x})$ es cerrado, existe una vecindad V de $\bar{y}$ y un conjunto abierto G, tal que

$$\Gamma(\bar{x}) \subset G, \quad G \cap V = \emptyset \qquad (**)$$

Como Γ es s.c.s. en $\bar{x}$, existe una vecindad U de $\bar{x}$, tal que $\Gamma(U) \subset G$.
De esto y de $(**)$ se deduce que $\Gamma(U) \cap V = \emptyset$. Por consiguiente Γ es cerrada en $\bar{x}$. $\square$
Si Γ es s.c.i. en $\bar{x}$ y $\Gamma(\bar{x})$ es compacto ó cerrado, entonces generalmente Γ no es cerrada en $\bar{x}$. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea $X = Y = \mathbb{R}$ y $\Gamma(x) = [-2, 2]$, $\forall\, x \neq 0$, $\Gamma(0) = [-1, 1]$.



Entonces Γ es s.c.i. pero no es cerrada en 0.

Teorema 4.3.2. *Sea* $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *una correspondencia y sea* $X \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto compacto. Entonces*

$$\Gamma \text{ es cerrada en } X \iff \begin{cases} i)\ \Gamma \text{ es scs en } X \\ ii)\ \Gamma(x) \text{ es cerrado } \forall x \in X \end{cases}$$

Demostración. $(\Leftarrow)$ El Teorema 4.3.1(a) implica que Γ cerrada en X.

$(\Rightarrow)$ Probemos por contradicción, es decir $\exists\, x_0 \in X$ tal que Γ no es s.c.s. en x_0.

Si Γ no es s.c.s. en x_0, entonces existe $V \in \mathcal{N}_{\Gamma(x_0)}$ de manera que $\forall\, U \in \mathcal{N}_{x_0}$, $\exists\, \bar{x} \in U$ tal que $\Gamma(\bar{x}) \not\subset V$ luego podemos escoger

$$U_k \in \mathcal{N}_{x_0},\ \exists\, x_k \in U_k :\ \Gamma(x_k) \not\subset V$$

$$\exists \bar{y}_k \in \Gamma(\bar{x}_k) : \bar{y}_k \notin V,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Como $X \setminus V \subset X$ es cerrado y X compacto, entonces $X \setminus V$ es compacto. Luego, por construcción $\{\bar{y}_k\} \subset (X \setminus V)$, entonces $\exists\ \{\bar{y}_{k_j}\} \subset \{\bar{y}_k\}$, $\exists\ \bar{y} \in (X \setminus V)$ tal que $\bar{y}_{k_j} \Rightarrow \bar{y} \notin V$.
Sin perdida de generalidad podemos tomar los $U_k \in \mathcal{V}(x_0)$ acotados y $\bar{x}_{k_j} \to x_0$, luego $(\bar{x}_{k_j}, \bar{y}_{k_j}) \to (x_0, \bar{y})$, como $\Gamma(x_0) \subset V$ y $\bar{y} \notin V$, entonces $\bar{y} \notin \Gamma(x_0)$ esto implica que $(x_0, \bar{y}) \notin \mathcal{G}(\Gamma)$ contradiciendo al hecho que Γ es cerrada en x_0 ($\Rightarrow\Leftarrow$). $\square$

Teorema 4.3.3. *Sean $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ una correspondencia y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces: Γ es cerrada en $\bar{x}$ sí y solo sí ($x_n \to \bar{x}$, $y_n \in \Gamma(x_n)$ e $y_n \to \bar{y}$ implica que $\bar{y} \in \Gamma(\bar{x})$).*

Demostración. Necesaria. Sea $x_n \to \bar{x}$ y $y_n \to \bar{y}$, supongamos que $\bar{y} \notin \Gamma(x_n)$. Como Γ es cerrada en $\bar{x}$, existe una vecindad U de $\bar{x}$ y una vecindad V de $\bar{y}$ tales que $(U \times V) \bigcap \mathcal{G}_\Gamma = \emptyset$. Luego existe un n_0 tal que $(x_n, y_n) \in U \times V$, $\forall\ n \geq n_0$. Por lo tanto $(x_n, y_n) \notin \mathcal{G}_\Gamma$, $\forall\ n \geq n_0$; es decir, $y_n \notin \Gamma(x_n)$, $\forall\ n \geq n_0$, lo cual es absurdo.

Suficiente. Supongamos que Γ no es cerrada en $\bar{x}$. Entonces existe un $\bar{y} \notin \Gamma(\bar{x})$, tal que para toda vecindad U de $\bar{x}$ y toda vecindad V de $\bar{y}$ se cumple que $\Gamma(U) \bigcap V \neq \emptyset$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, existirá un punto $x_n \in B\left(\bar{x}, \dfrac{1}{n}\right)$ y un punto $y_n \in B\left(\bar{y}, \dfrac{1}{n}\right) \bigcap \Gamma(x_n)$. Entonces se cumple que $x_n \to \bar{x}$, $y_n \to \bar{y}$, $y_n \in \Gamma(x_n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, luego, la hipótesis implica que $\bar{y} \in \Gamma(\bar{x})$, lo cual es absurdo. $\square$

Proposición 4.3.1. *Supongamos que Z es un subconjunto no vacío y cerrado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Si $f : Z \to \mathbb{R}^n$ es s.c.s., en Z, y $g : X \to \mathbb{R}^n$ es s.c.i., en $x^* \in X$, entonces la correspondencia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ definida por:*

$$\varphi(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in Z \quad y \quad f(x, y) \geq g(x)\}$$

es cerrada.

Demostración. Sea $y^* \in \mathbb{R}^m \setminus \varphi(x^*)$. Si $(x^*, y^*) \notin Z$, entonces, como Z es cerrado, existen vecindades U de x^* y V de y^* tales que

$$U \times V \subseteq [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \setminus Z \subseteq [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \setminus \mathcal{G}_\varphi$$

Pero, si $(x^*, y^*) \in Z \setminus \mathcal{G}_\varphi$, en este caso la definición de φ implica que existen $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$f_j(x^*, y^*) < g_j(x^*)$$

Definiendo $\epsilon = g_j(x^*) - f_j(x^*, y^*)$, entonces se concluye de la s.c.s. de f_j, la existencia de vecindades U_1 de x^* y V de y^* tales que:

$$\Big(\forall (x,y) \in [U_1 \times V] \bigcap Z\Big) : f_j(x,y) < f_j(x^*,y^*) + \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1}$$

Mientras que la s.c.i. de g_j, implica que existe una vecindad, U_2 de x^* tal que:

$$(\forall x \in U_2(x^*)) : g_j(x) > g_j(x^*) - \frac{\epsilon}{2} \tag{4.2}$$

así, si definimos $U = U_1 \bigcap U_2$, se concluye de (4.1) y (4.2), que, para $(x,y) \in [U \times V] \bigcap Z$:

$$f_j(x,y) < f_j(x^*,y^*) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{f_j(x^*,y^*) + g_j(x^*)}{2} = g_j(x^*) - \frac{\epsilon}{2} < g_j(x);$$

y por lo tanto $(x,y) \notin \mathcal{G}_\varphi$. Por supuesto que también se cumple que

$$(\forall (x,y) \in [U \times V] \setminus Z) : (x,y) \notin \mathcal{G}_\varphi.$$

y así se obtiene que

$$U \times V \subseteq [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \setminus \mathcal{G}_\varphi,$$

lo cual implica que φ es una correspondencia cerrada. □

Teorema 4.3.4. ***(Berge)*** *Si* $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, $\psi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, *y* $z \in \mathbb{R}^n$ *son tales que* φ *es s.c.s. en* z, $\varphi(z)$ *es compacto, y* ψ *es cerrada en* z, *entonces la correspondencia* $\Phi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *definida por:*

$$\Phi(x) = \varphi(x) \cap \psi(x) \qquad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

es s.c.s. en z, *y* $\Phi(z)$ *es compacto.*

Demostración. Como $\psi(z)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$, se concluye del Teorema 3.18 y 3.22 que $\Phi(z)$ es compacto. Para probar que Φ es s.c.s. an z, sea V una vecindad abierta de $\Phi(z)$. Distinguimos dos casos:

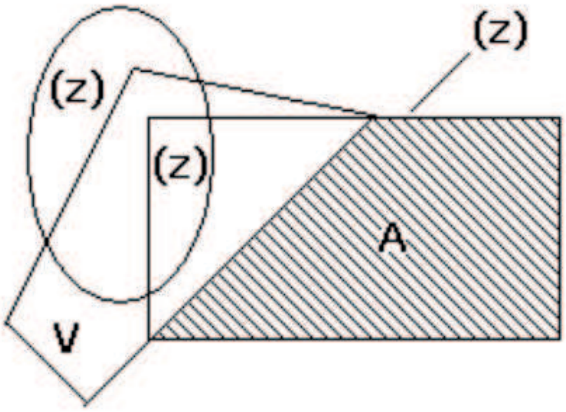
$\underline{\varphi(z) \subseteq V}$**.** En este caso, se concluye de la s.c.s. de φ en z la existencia de una vecindad U de z, tal que:

$$(\forall\ x \in U(z)) :\ \Phi(x) \subseteq \varphi(x) \subseteq V.$$

$\underline{A \overset{def}{=} \varphi(z) \setminus V \neq \emptyset}$**.** Observemos primero que, como $\Phi(z) \subseteq V$, debemos tener:

$$\psi(z) \cap A = \emptyset \tag{4.3}$$

Además, como $\varphi(z)$ es compacto, y V^c es cerrado, se concluye del Teorema 2.18 y 2.22 que A es un conjunto compacto. Ahora, por (4.3) y del



hecho que ψ es cerrado en z, vemos que para cada $y \in A$, existen vecindades, $U_y(z)$ y $V(y)$, tales que:

$$(\forall\ x \in U_y(z)) :\ \psi(x) \cap V(y) = \emptyset. \tag{4.4}$$

Obviamente la familia $\mathcal{V} = \{V(y) :\ y \in A\}$ es un cubrimiento abierto de A; y, como A es compacto, existen $y_1, \ldots, y_k \in A$ tal que:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V(y_i). \tag{4.5}$$

Además, vemos que

$$\varphi(z) \subseteq V \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k} V(y_i)\right];$$

y por consiguiente existe una vecindad $N(z)$ de z, tal que:

$$(\forall\ x \in N(z)) :\ \varphi(x) \subseteq V \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k} V(y_i)\right]. \tag{4.6}$$

Definimos la vecindad $U(z)$ por:

$$U(z) = N(z) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}(z)\right],$$

donde los $U_{y_i}(z)$ $(i = 1, \ldots, k)$ son (4.4) y (4.5). Entonces por (4.6), tenemos que:

$$(\forall\ x \in U(z)) :\ \varphi(x) \subseteq V \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k} V(y_i)\right]; \tag{4.7}$$

mientras que por (4.4), si $x \in U(z)$, entonces:

$$\psi(x) \cap V(y_i) = \emptyset \quad para \quad i = 1, \ldots, k. \tag{4.8}$$

De (4.7) y (4.8) se concluye que:

$$(\forall\ x \in U(z)) : \ \varphi(x) \cap \psi(x) \equiv \Phi(x) \subseteq V;$$

y por lo tanto Φ es s.c.s. en z. $\square$

Definición 4.3.3. *Si tenemos m correspondencias $\phi_i : S \rightrightarrows T_i$ definimos el producto de correspondencias como la correspondencia cuyo rango es el producto de los T_i de la siguiente manera:*

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{m} \phi_i(x).$$

Proposición 4.3.2. *Sea la correspondencia $\phi_i : S \rightrightarrows T_i$ para $i = 1, \ldots, m$; y definimos la correspondencia $\phi : S \rightrightarrows T$, donde $T = \prod_{i=1}^{m} T_i$, por*

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{m} \phi_i(x).$$

Entonces si para algún $x^* \in S$, cada ϕ_i es s.c.s. con valores compactos, entonces ϕ es s.c.s. y con valor compacto en x^*.

Demostración. Sea V un conjunto abierto en T tal que:

$$\phi(x^*) = \prod_{i=1}^{m} \phi_i(x^*) \subseteq V.$$

Como $\phi_i(x^*)$ es compacta para todo $i = 1, \ldots, m$, por el teorema 3.4.4 la correspondencia $\phi(x^*)$ es compacta, entonces existen conjuntos G_i abiertos en T_i para cada i donde $\phi_i(x^*) \subseteq V$ para $i = 1, \ldots, m$ y se cumple:

$$\prod_{i=1}^{m} G_i \subseteq V. \tag{4.9}$$

Como ϕ_i es s.c.s. en x^*, sabemos que existen vecindades $U_i(x^*)$ de x^* tal que para todo $x \in U_i(x^*)$ y todo $i = 1, \ldots, m$ se cumple:

$$\phi_i(x) \subseteq G_i. \tag{4.10}$$

Definimos

$$U(x^*) = \bigcap_{i=1}^{m} U_i(x^*),$$

asi tenemos de 4.9 y 4.10 que para todo $x \in U(x^*)$ se cumple:

$$\prod_{i=1}^{m} \phi_i(x) \subseteq \prod_{i=1}^{m} G_i \subseteq V.$$

■

Capítulo 5

Teoremas de Punto Fijo

En este capítulo, desarrollaremos el **Teorema del Máximo de Berge**, el **Teorema de Punto Fijo de Kakutani** (1911-2004) y el **Teorema de Equilibrio para Juegos No Cooperativos de Nash**.

5.1. Teorema del Máximo de Berge

Consideremos $S \subset \mathbb{R}^n$ y $T \subset \mathbb{R}^m$ y definamos una función $g : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y una correspondencia $\mu : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ como sigue:

$$g(x) = \sup\{f(x, y) : y \in \varphi(x)\}$$
$$\mu(x) = \{y \in \varphi(x) : f(x, y) = g(x)\}$$

donde la correspondencia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ y la función $f : S \times T \to \mathbb{R}$ son datos.

Observe que si, a cada $x \in S$ se le asocia el siguiente problema de programación matemática

$$P_x : \text{máx}\{f(x, y) \mid y \in \varphi(x)\}$$

entonces, cuando P_x tiene solución, $g(x)$ es el valor óptimo y $\mu(x)$ el conjunto de soluciones. En general, es posible que existan $x \in S$ tal que $\mu(x)$ sea vacío o que $g(x) = +\infty$, en estos casos P_x no tiene solución.

Por consiguiente $\{P_x \mid x \in S\}$ es una familia de problemas de programación matemática, donde para cada $x \in S$, la función objetivo es $f_x(y) = f(x, y)$ y el dominio admisible es $\varphi(x)$.

El objetivo de esta sección es estudiar condiciones que garanticen que el valor óptimo $g(x)$ así como el conjunto $\mu(x)$ de soluciones óptimas de P_x dependan de manera continua respecto de x.

Proposición 5.1.1. *Supongamos que:*

1. f *es una función s.c.i. en* (x^*, y) *para cada* $y \in \varphi(x^*)$,

2. φ *es una correspondencia s.c.i en* $x^* \in S$, *y*

3. $f(x^*, \cdot)$ *es acotada en* $\varphi(x^*)$.

Entonces $g(x^*) \in \mathbb{R}$ *y* g *es s.c.i. en* x^*.

Demostración. Es evidente que el acotamiento de $f(x^*, \cdot)$ en $\varphi(x^*)$ implica que $g(x^*) \in \mathbb{R}$. Ahora veamos la s.c.i de g en x^*. En efecto, sea $\epsilon > 0$ dado. Por definición del supremo, existe $y^* \in \varphi(x^*)$ satisfaciendo:

$$f(x^*, y^*) > g(x^*) - \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.1}$$

Como f es s.c.i en (x^*, y^*), existen dos vecindades, U_1 de x^* y V de y^* tales que:

$$(\forall\ (x, y) \in (U_1 \cap S) \times (V \cap T)) :\ f(x, y) > f(x^*, y^*) - \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.2}$$

Además, como φ es una correspondencia s.c.i en x^*, existe una vecindad U_2 de x^*, tal que:

$$(\forall\ x \in U_2 \cap S) :\ \varphi(x) \cap V \neq \emptyset. \tag{5.3}$$

Luego definamos:

$$U = U_1 \cap U_2,$$

combinando (5.1), (5.2) y (5.3) obtenemos:

$$(\forall\ x \in U \cap S)\ (\exists\ y \in \varphi(x)) :\ f(x, y) > g(x^*) - \epsilon.$$

entonces:

$$g(x) = \sup\{f(x, y) :\ y \in \varphi(x)\} \geq f(x, y) > g(x^*) - \varepsilon$$

y por lo tanto, existe una vecindad U de x^* tal que

$$(\forall\ x \in U \cap S) :\ g(x) > g(x^*) - \epsilon$$

es decir g es s.c.i. en x^*. □

Proposición 5.1.2. *Sea* $x^* \in S$ *y supongamos que:*

1. $\varphi(x^*)$ *es un conjunto compacto,*

2. f es una función s.c.s. en (x^*, y) para cada $y \in \varphi(x^*)$, y

3. φ es una correspondencia s.c.s. en $x^* \in S$.

Entonces $g(x^*) \in \mathbb{R}$ y la función g es s.c.s en x^*.

Demostración.
La compacidad de $\varphi(x^*)$ y la s.c.s de f en (x^*, y) para cada $y \in T$, implican (Teorema de Weierstrass) que existe $\bar{y} \in \varphi(x^*)$ tal que $f(x^*, \bar{y}) = \sup_{y \in \varphi(x^*)} (\{f(x^*, y)\}) = g(x^*)$, esto implica que $g(x^*) \in \mathbb{R}$

Veamos que g sea s.c.s. en x^*. Dado $\varepsilon > 0$, como f es s.c.s. en (x^*, y) para cada $y \in \varphi(x^*)$, entonces existen vecindades U_y de x^* y V_y de $y \in \varphi(x^*)$ tales que

$$(\forall\ (x', y') \in (U_y \cap S) \times (V_y \cap T)) :\ f(x', y') < f(x^*, y) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.4}$$

Observe que $\varphi(x^*) \subset \bigcup_{y \in \varphi(x^*)} V_y$. Luego $\{V_y\}$ es un cubrimiento abierto de $\varphi(x^*)$; y, como $\varphi(x^*)$ es compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\varphi(x^*) \subset \hat{V} = \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}. \tag{5.5}$$

donde $y_i \in \varphi(x^*)$. Note que $\hat{V}$ es una vecindad de $\varphi(x^*)$.

Por otro lado, como φ es una correspondencia s.c.s. en x^* y $\hat{V}$ es una vecindad de $\varphi(x^*)$; entonces existe una vecindad N de x^* tal que

$$(\forall\ x \in N \cap S :\ \varphi(x) \subset \hat{V}. \tag{5.6}$$

Definamos $U = N \cap (\bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i})$. Como U_{y_i} es una vecindad de x^*, entonces U también es una vecindad de x^*, luego se tiene

$$\Big(\forall\ (x', y') \in (U \cap S) \times (\hat{V} \cap T)\Big) :\ f(x', y') < f(x^*, y_i) + \frac{\epsilon}{2} \leq g(x^*) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.7}$$

entonces

$$(\forall\ x' \in U \cap S) :\ g(x') = \max\{f(x', y') : y' \in \varphi(x')\} \leq g(x^*) + \frac{\epsilon}{2} < g(x^*) + \epsilon. \tag{5.8}$$

lo cual demuestra que g es s.c.s. en x^*. □

Teorema 5.1.1. ***(Teorema del Máximo de Berge.)*** *Sea $x^* \in S$ y supongamos que:*

1. *$\varphi(x^*)$ es compacto,*

2. *f es una función continua en (x^*, y), para cada $y \in \varphi(x^*)$.*

3. *φ es una correspondencia continua en x^*.*

Entonces:

a) *$\mu(x^*)$ es compacto y no vacío,*

b) *g es una función continua en x^*, y*

c) *μ es una correspondencia s.c.s en x^*.*

Demostración.

a) Veamos que $\mu(x^*) \neq \emptyset$, en efecto, la compacidad de $\varphi(x^*)$ y la continuidad de f en (x^*, y) para cada $y \in \varphi(x^*)$, implican (Teorema de Weierstrass) que existe $\bar{y} \in \varphi(x^*)$ tal que $f(x^*, \bar{y}) = \sup_{y \in \varphi(x^*)} f(x^*, y) = g(x^*)$, así $\bar{y} \in \mu(x^*)$.

   Ahora veamos que $\mu(x^*)$ sea compacto, en efecto, sea $y \in \overline{\mu(x^*)}$, entonces

$$\exists \{y_k\} \subset \mu(x^*) : \; y_k \to y$$

   como $y_k \in \mu(x^*)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, entonces $f(x^*, y_k) = g(x^*)$ y dado que f es continua en (x^*, y) y $(x^*, y_k) \to (x^*, y)$, entonces

$$f(x^*, y) = \lim_{k \to \infty} f(x^*, y_k) = g(x^*)$$

   lo cual implica que $y \in \mu(x^*)$, es decir que $\mu(x^*)$ es cerrado. Pero, como $\mu(x^*) \subset \varphi(x^*)$, donde $\varphi(x^*)$ es compacto, entonces $\mu(x^*)$ es compacto.

b) Es fácil verificar que las hipótesis 1), 2) y 3) de este Teorema implican las hipótesis de las Proposiciones 5.1.1 y 5.1.2, luego g es s.c.i. y s.c.s. en x^*, con lo cual se ha demostrado que g es continua en x^*.

c) Veamos que μ sea una correspondencia s.c.s. en x^*. En efecto, definamos la correspondencia $\psi : S \rightrightarrows T$ mediante

$$\psi(x) = \{y \in T : \; f(x, y) \geq g(x)\}$$

   como f es continua en (x^*, y) para cada $y \in \varphi(x^*)$, entonces f es una función s.c.s. en (x^*, y) para cada $y \in \varphi(x^*)$. De la misma forma, g es una función continua en x^*, entonces g es una función s.c.i. en x^*. Entonces por la Proposición (4.3.1), la correspondencia ψ es cerrada en x^*. Por otro lado, como φ es continua en $x^* \in S$ y $\varphi(x^*)$ es compacto, entonces φ es una correspondencia s.c.s. en $x^* \in S$ y $\varphi(x^*)$ es compacto. Luego, aplicando el Teorema (4.3.4), la correspondencia $\delta : S \rightrightarrows T$ definida como $\delta(x^*) = \psi(x^*) \cap \varphi(x^*)$, es s.c.s. Ahora veamos que $\mu = \delta$, en efecto tomemos $x \in S$: $y \in \mu(x)$ si y solo si $y \in \varphi(x)$ y $f(x, y) = g(x)$ si y solo si $y \in \varphi(x)$ y $f(x, y) \geq g(x)$ si y solo si $y \in \varphi(x)$ y $y \in \psi(x)$ si y solo si $y \in \psi(x) \cap \varphi(x)$. Esto implica que μ es una correspondencia s.c.s. en x^*.

5.2. Teorema de Punto Fijo

Definición 5.2.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío.* ***Una correspondencia*** *$\varphi : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una correspondencia* ***KKM*** *si se cumple que*

$$co\{x_1, \ldots x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$$

Para cada subconjunto finito $\{x_1, \ldots x_n\}$ de A.

Teorema 5.2.1. ***(Ky Fan)*** *Sea A un subconjunto no vacío, y sea $\varphi : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una correspondencia KKM. Si $\varphi(x)$ es cerrado para cada $x \in A$; y si existe algún $x^* \in A$ tal que $\varphi(x^*)$ es compacto. Entonces $\bigcap_{x \in A} \varphi(x)$ es compacto y no vacío.*

Demostración. (Ver [11], página 24.) $\square$

Teorema 5.2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo y compacto, y para $x \in K$ consideremos una función lineal f_x. Si la función*

$$\begin{array}{rcccl} F & : & K \times K & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & F(x, y) = f_x(y) \end{array}$$

es continua en $K \times K$, entonces existe $x^* \in K$ tal

$$f_{x*}(x^*) \leq f_{x*}(y), \ \forall \, y \in K.$$

Demostración. Definamos la correspondencia

$$\begin{array}{rcccccl} \varphi & : & K & \rightrightarrows & \mathbb{R}^n & & \\ & & y & \rightrightarrows & \varphi(y) & = & \{x \in K / f_x(y) \geq f_x(x)\} \\ & & & & & = & \{x \in K / F(x, y) - F(x, x) \geq 0\} \end{array}$$

Observe que $y \in \varphi(y) \subset K$, entonces $\emptyset \neq \varphi(y) \subset K$. Veamos que $\varphi(y)$ sea cerrado, en efecto, sea $z \in \overline{\varphi(y)} \subset K$ cualquiera, entonces $\exists \{z_i\} \subset \varphi(y)$ tal que $\lim\limits_{i \to \infty} z_i = z$, como $z_i \in \varphi(y)$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, entonces

$$z_i \in K \quad y \quad F(z_i, y) - F(z_i, z_i) \geq 0,\ \forall\ i \in \mathbb{N}$$

Como F es continua en $K \times K$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{i \to \infty} \left(F(z_i, y) - F(z_i, z_i)\right) &= F\left(\lim_{i \to \infty} z_i, y\right) - F\left(\lim_{i \to \infty} z_i, \lim_{i \to \infty} z_i\right) \\ &= F(z, y) - F(z, z) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$\Longrightarrow z \in \varphi(y)$ esto implica que $\varphi(y)$ es cerrado.

Como K es compacto y $\varphi(y)$ es cerrado $\forall\ y \in K$, entonces $\varphi(y)$ es compacto $\forall\ y \in K$.

Ahora veamos que φ sea una correspondencia KKM. En efecto, tomemos un conjunto finito $\{y_1, \ldots y_n\} \subset K$, y $x \in co\{y_1, \ldots y_n\}$, luego existe $\{p_1, \ldots, p_n\}$ tal que $p_i \geq 0,\ \forall\ i = 1, \ldots, n$, y $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

$$\begin{aligned} f_x(x) = f_x\left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_x(y_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} p_i \max_{1 \leq j \leq n} (\{f_x(y_j)\}) \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} (\{f_x(y_j)\}) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} (\{f_x(y_j)\}) \end{aligned}$$

Sea $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$f_x(y_{j_0}) = \max_{1 \leq j \leq n} (\{f_x(y_j)\}) \Rightarrow f_x(x) \leq f_x(y_{j_0})$$

Entonces de la definición de φ, tenemos:

$$x \in \varphi(y_{j_0}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \varphi(y_j).$$

Entonces por la Definición 5.2.1 φ es una correspondencia KKM, luego:

(i) $\varphi : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una correspondencia KKM,

(ii) $\varphi(y)$ es cerrado $\forall\ y \in K$,

(iii) Además $\varphi(y)$ es compacto $\forall\ y \in K$.

entonces por el Teorema 5.4 **(Ky Fan)**,

$$\Rightarrow \exists x^* \in K: \; x^* \in \bigcap_{y \in k} \varphi(y)$$

entonces

$$\exists x^* \in K: \; f_{x^*}(y) \geq f_{x^*}(x^*), \; \forall \, y \in K.$$

$\square$

Definición 5.2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto. Un punto fijo de una correspondencia, $\varphi : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es un punto $x^* \in K$ que satisface $x^* \in \varphi(x^*)$.*

Proposición 5.2.1. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una correspondencia cerrada, entonces el conjunto*

$$A \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \; x \notin \varphi(x)\},$$

es abierto en $\mathbb{R}^n$, y así el conjunto de puntos fijos bajo φ es cerrado (aunque posiblemente vacío).

Demostración. Sea $z \in A \stackrel{def}{\Rightarrow} z \notin \varphi(z)$ entonces $(z, z) \notin \mathcal{G}_\varphi$. Como φ es cerrada, entonces $Graph(\varphi$ es cerrado, luego existen vecindades V_1 de z y V_2 de z tales que $(V_1 \times V_2) \cap Graph(\varphi) = \emptyset$, esto implica que

$$\varphi(x) \bigcap V_2 = \emptyset, \qquad \forall \, x \in V_1 \tag{5.10}$$

Tomando $V = V_1 \cap V_2$, tenemos que V es una vecindad de z. Ahora veamos que $V \subset A$, en efecto, si $v \in V$, entonces $v \in V_1$ y $v \in V_2$, entonces por la ecuación (5.10), tenemos:

$$\varphi(v) \bigcap V_2 = \emptyset,$$

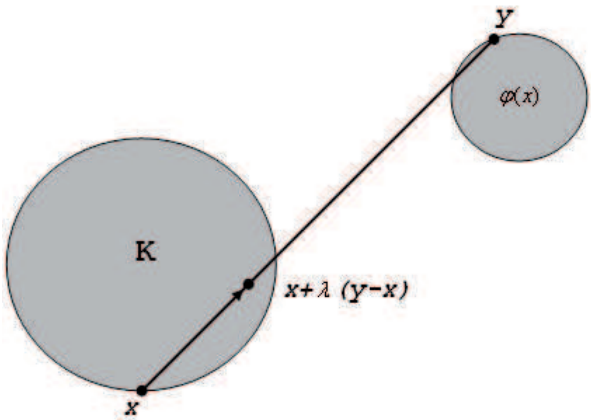
entonces $v \notin \varphi(v)$, de donde concluimos que $v \in A$, $\forall \, v \in V$. Finalmente esto implica que A es abierto. $\square$

La siguiente definición proporciona parte de las condiciones suficientes para un teorema de punto fijo más general e intrigante.

Definición 5.2.3. *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que una correspondencia $\varphi : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ apunta **hacia dentro** (respectivamente apunta **hacia afuera**) si para $x \in K$ existe $y \in \varphi(x)$ y $\lambda > 0$ (respectivamente $\lambda < 0$) tales que $x + \lambda(y - x) \in K$.*

Observación, Veamos algunas observaciones adicionales:

1. Si $\varphi : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una correspondencia hacia adentro, entonces para cada $x \in K$, existe $y \in \varphi(x)$ tal que el semi rayo desde x en la dirección $y - x$ interseca K



2. Si $\varphi : K \rightrightarrows K$ entonces es automáticamente, una correspondencia hacia adentro (basta elegir $y \in \varphi(x)$, y $\lambda = 1$)

El siguiente teorema es una ligera especialización de un resultado dado por Halpern-Bergman. (Un resultado más general enunciado y probado puede encontrarse en [3], pgina 582.) La presentamos aquí.

Teorema 5.2.3. ***(Halpern-Bergman)*** *Sea K un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, y sea $\varphi : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una correspondencia hacia dentro, s.c.s. con valores cerrados y convexos no vacíos. Entonces el conjunto de puntos fijos de φ es compacto y no vacío.*

Demostración. Supongamos que el conjunto de puntos fijos

$$\{x^* \in K : \ x^* \in \varphi(x^*)\}$$

es vacío, entonces

$$\{x^*\} \bigcap \varphi(x^*) = \emptyset$$

donde el conjunto $\{x^*\}$ es un conjunto convexo y compacto no vacío, y el conjunto $\varphi(x^*)$ es un conjunto convexo y cerrado no vacío.

Entonces, por el **Teorema de Separación Fuerte** (Teorema 3.41) para cada $x \in K$, existen una funcional lineal f_x y $\alpha_x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f_x(y) < \alpha_x < f_x(x), \quad \forall\ y \in \varphi(x) \tag{5.11}$$

Para cada $x \in K$ se tiene que $A(x) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ f_x(y) < \alpha_x\}$ es un conjunto abierto (que es un semiespacio abierto) que contiene a $\varphi(x)$, luego por la s.c.s. de φ existe una vecindad V_1 de x tal que $\varphi(y) \subset A(x)\ \forall y \in V_1$. Además $B(x) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ f_x(y) > \alpha_x\}$ (el otro semiespacio abierto) es también una vecindad de x, luego $U_x = V_1 \cap B(x)$ es una vecindad de $x \in K$. Luego la familia $\{U_x :\ x \in K\}$ es un cubrimiento de K, es decir, $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$, como K es compacto, entonces

$$\exists\ n \in \mathbb{N} :\ K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

Por el **Teorema de la Partición de la Unidad**, existen funciones continuas $g_i : U_{x_i} \to [0;1]$, es decir, existe la partición de la unidad $\{g_1, \ldots, g_n\}$ subordinada a $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Emplearemos las funciones g_i para definir:

$$\begin{array}{rcccl} p & : & K & \rightrightarrows & \mathbb{R}^n \\ & & x & \longmapsto & p(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_{x_i}. \end{array}$$

con $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$ y $g_i = 0$ en $U^c_{x_i}$ para cada $i = 1, \cdots, n$.
Denotando $p(x)$ por h_x (considerando $p(x)$ como una aplicación lineal), tenemos que:

$$\begin{array}{rcccl} h_x & : & \mathbb{R}^n & \rightrightarrows & \mathbb{R} \\ & & y & \longmapsto & h_x(y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_{x_i}(y). \end{array}$$

como g_i y f_x son funciones continuas, entonces la función. $F : K \times K \rightrightarrows \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = h_x(y)$$

es también continua en $K \times K$. Aplicando el Teorema 5.2.2,

$$\exists\ x^* \in K :\ h_{x^*}(x^*) \leq h_{x^*}(y) \quad \forall\ y \in K. \tag{5.12}$$

Como φ apunta hacia adentro, entonces:

$$\exists\ \lambda > 0,\ y\ \exists y^* \in \varphi(x^*) :\ x^* + \lambda(y^* - x^*) \in K. \tag{5.13}$$

De (5.13) en (5.12). (Aplicando la linealidad de h_{x^*} en y)

$$h_{x^*}(x^*) \leq h_{x^*}(x^* + \lambda(y^* - x^*)) = h_{x^*}(x^*) + \lambda[h_{x^*}(y^*) - h_{x^*}(x^*)]$$

$$h_{x^*}(x^*) \leq h_{x^*}(y^*) \tag{5.14}$$

Si definimos

$$I^* = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \; g_i(x^*) > 0\},$$

entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} h_{x^*}(y^*) &= \sum_{i \in I^*} g_i(x^*) f_{x_i}(y^*) \\ h_{x^*}(x^*) &= \sum_{i \in I^*} g_i(x^*) f_{x_i}(x^*). \end{aligned}$$

Además, si $i \in I^*$, entonces $g_i(x^*) > 0$, y tenemos que:

$$x^* \in U_x; \quad y^* \in \varphi(x^*) \quad y \quad f_{x_i}(y^*) < \alpha_{x_i} < f_{x_i}(x^*)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h_{x_i}(y^*) &= \sum_{i \in I^*} g_i(x^*) f_{x_i}(y^*) \\ &< \sum_{i \in I^*} \alpha_{x_i} g_i(x^*) \\ &< \sum_{i \in I^*} g_i(x^*) f_{x_i}(x^*) \\ &= h_{x_i}(x^*) \end{aligned}$$

$$h_{x_i}(y^*) < h_{x_i}(x^*) \tag{5.15}$$

Entonces de (5.14) y (5.15), se concluye por contradicción $\{x^* : \; x^* \in \varphi(x^*)\} \neq \emptyset$.

Veamos ahora que el conjunto de puntos fijos es compacto.

$\varphi(x)$ es cerrado y φ es s.c.s. en x, para todo $x \in K$. Entonces por el teorema 4.7 tenemos que φ es cerrado en x, para todo $x \in K$ y por tanto φ es cerrado en K.

Por la proposición 5.6, el conjunto $\{x \in K \mid x \notin \varphi(x)\}$ es abierto y por tanto el conjunto $\{x \in K \mid x \in \varphi(x)\}^c$ es cerrado. Como K es compacto y $\{x \in K \mid x \in \varphi(x)\} \subset K$ entonces $\{x \in K \mid x \in \varphi(x)\}$ es compacto. $\square$

Corolario 5.2.1. ***(Kakutani-Fan-Glicksberg.)*** *Sea K un conjunto compacto, convexo y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Además, sea $\phi : K \rightrightarrows K$ una correspondencia cuyo grafo es cerrado, convexo y no vacío. Entonces el conjunto de los puntos fijos es compacto y no vacío.*

Demostración. La demostración de este corolario se concluye inmediatamente del Teorema 5.2.3, basta recordar que, para conjuntos compactos, una correspondencia con grafo cerrado es s.c.s. (Teorema (4.3.2)), y además como $\phi : K \rightrightarrows K$, entonces es una correspondencia hacia adentro (Observación 4.1(2)), de todo esto se concluye que el conjunto de puntos fijos es no vacío y compacto. $\square$

Teorema 5.2.4. ***(Teorema de Kakutani.)*** *Sea K compacto, convexo y no vacío, $\phi : K \rightrightarrows K$ una correspondencia s.c.s., compacta y convexa. Entonces existe un punto fijo para la correspondencia.*

Demostración. Aplicando el Corolario 5.2.1, se concluye el teorema. $\square$

5.3. Existencia del Equilibrio de Nash

En esta sección veremos que un equilibrio de Nash no es otra cosa que un punto fijo de la correspondencia mejor respuesta, y que por lo tanto una forma de asegurar su existencia es exigir que dicha correspondencia y el espacio en que está definida, cumplan con las hipótesis del teorema de Kakutani.

Consideremos un juego de n jugadores

$$\Gamma = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$$

Donde $S_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ representa el conjunto de estrategias del jugador i-ésimo para $i = 1, 2, \ldots, n$. Supongamos que estos conjuntos son compactos y convexos. Por otra parte $u_i : \prod_{i=1}^{n} S_i \rightarrow \mathbb{R}$ representa la función de utilidad del jugador i-ésimo para $i = 1, \ldots, n$, las que suponemos continuas. Sea $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ y $m = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Representaremos por $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S \subset \mathbb{R}^m$ el vector estratégico que corresponde a la elección de la estrategia x_i por parte del jugador i. Dado $x \in S$, denotaremos con $x_{-i} = P_{\prod_{j \neq i} \mathbb{R}^{n_j}}(x)$, donde $P_C(x)$ la proyección ortogonal del punto x sobre el conjunto C. Es decir que si $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ el conjunto producto, formado por los conjuntos de estrategias de todos los jugadores menos el i-ésimo. Consecuentemente x_{-i} es el vector estratégico de donde se ha quitado la estrategia x_i. Dado $x \in \mathbb{R}^m$ y $\rho \in \mathbb{R}^{n_i}$, denotaremos por $x(\rho, i) \in \mathbb{R}^m$ el vector tal que $x(\rho, i)_i = \rho$ y $x(\rho, i)_{-i} = x_{-i}$. Asumimos que $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasiconcava, para toda elección s_{-i}.

Definición 5.3.1. *Definimos por*

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{r_i \in S_i} u_i(r_i, s_{-i})\}$$

la ***correspondencia mejor respuesta*** *del jugador i-ésimo a la elección s_{-i} de los otros.*

Definición 5.3.2. *Un* ***equilibrio de Nash*** *es un vector estratégico $s = (s_1, \ldots, s_n)$ que es mejor respuesta para sí mismo. Es decir que $s_i \in B_i(s_{-i})$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Consideremos la correspondencia producto $B = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} B_i : S \to S$. Puede verse que un equilibrio de Nash es un punto fijo de esta correspondencia. Es decir $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibro de Nash, si y solo si $s^* \in B(s^*)$, es decir si s^* es una mejor respuesta para si misma.

Si demostramos que esta correspondencia se encuentra en las condiciones del teorema de Kakutani, habremos demostrado la existencia del equilibrio de Nash.

Teorema 5.3.1. ***(Equilibrio de Nash.)*** *Todo juego Γ con las particularidades anteriormente enunciadas tiene un equilibrio de Nash.*

Demostración. La demostración de la existencia del equilibrio de Nash. La haremos en una serie de pasos:

1. La correspondencia mejor respuesta de cada jugador $B_i(s_{-i})$ por el teorema de máximo de Berge (Teorema 5.1.1) es s.c.s. y compacta.

2. Como $u_i(\cdot, s_i)$ es cuasiconcava, entonces $B_i(s_{-i})$ es convexa.

3. Siendo $B(s)$ el producto de correspondencia s.c.s. y compactas es ella misma s.c.s. y compacta, ver Teorema 4.3.2

4. Como los espacios S_i son compactos y convexos, por el teorema 3.4.4, el dominio de B, denotado por $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} S_i$ es compacto y convexo.

5. Finalmente, consideremos la correspondencia $B = \prod_{i=1}^{n} B_i : S \to S$.

Por todo lo anterior la correspondencia B cumple todas las condiciones del teorema de Kakutani, entonces existe un punto fijo $s^* \in B(s^*)$. Dicho punto $s^* = \{s_1^*, \ldots, s_n^*\}$ es el equilibrio de Nash. $\square$

Capítulo 6

Conclusiones de la Tesis

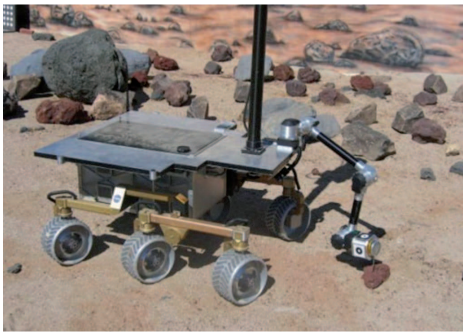
Las conclusiones de la presente tesis están en orden de desarrollo:

1. En el capítulo llamado **Un paseo por la teoría de juegos**, hemos hecho énfasis, en dar ejemplos simples y conocidos y con ello hemos aprendido a identificar los elementos de un juego no cooperativo.

   Actualmente la teoría de juegos es utilizada en la economía, biología, física, ciencias sociales y otros campos. Veamos algunos ejemplos abiertos en la que se utiliza

   - **Bases de la Teoría de Juegos para el control de robots de larga duración en la superficie lunar y planetaria.**[13]
     Las misiones robóticas de la NASA actuales y futuras para superficies planetarias tienden hacia la más larga duración y se hacen más ambiciosas para el acceso de terrenos quebrados. Para un nivel más alto de autonomía en tales misiones, los rovers, requerirán el comportamiento que también debe adaptarse lo que disminuye la durabilidad y condiciones ambientales desconocidas. El MER (Mars Exploration Rovers) llamado el Espíritu y la Oportunidad ambos han pasado 600 días de vida sobre la superficie marciana, con extensiones de hasta 1000 días y más allá dependiendo de la performance del rover. Los cambios de la planificación de navegación debido al desgaste de los motores de paseo como ellos alcanzan su vida son actualmente son hechos en la Tierra para el **Rover Spirit**.

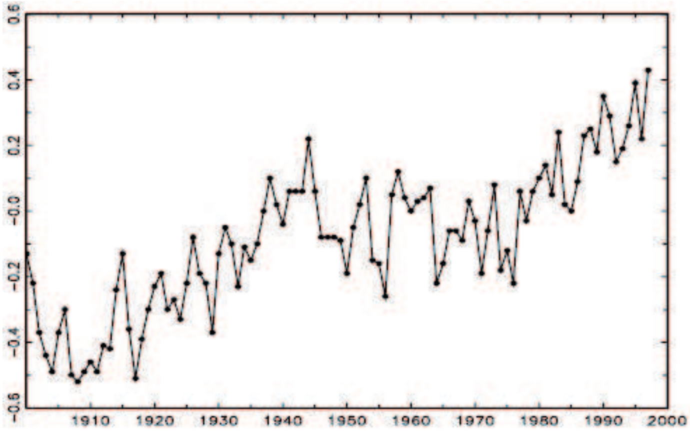
     Las próximas misiones 2009 MLS (Mars Science Laboratory) y 2013 AFL (Astrobiology Field Laboratory) están planeando durar de 300 a 500 días, y posiblemente implicaría atravesar miles de kilómetros sobre terrenos desafiantes. Para ello se unifica



una estructura coherente llamado SMART (System for Mobility and Access to Rough Terrain) este emplea algoritmos de juegos teóricos que recorren a bordo de un rover la superficie planetaria, para salvaguardar la performance del rover durante el acceso a terreno áspero. El SMART considera el movimiento del rover, la planificación de la tarea, y la dirección de recursos como una teoría de juegos, donde el rover es un jugador a diferencia del otro jugador llamado **naturaleza** que representa la incertidumbre en el sentir y la predicción de los ambientes internos y externos.

- **Juegos de Emisión: algunas aplicaciones de la teoría de juegos al problema de la emisión de CO_2.**[25]
  No hay duda que debemos reducir la emisión total de dióxido de carbono, entonces el problema de cuantos países diferentes deben contribuir a esta causa seria. Aconsejamos que este problema sea considerado como un juego no antagonista (en el sentido de Germeier).

  Un juego de esta tipo es llamado un **juego de emisión**. Supongamos que hay n actores independientes (países o regiones), cada uno de ellos liberando una cierta cantidad de CO_2 por aï¿½o (en unidades de carbón) a la atmósfera, y que cada actor reducirá la emisión. Cada actor tiene su propio objetivo: reducir al mínimo la pérdida en el Producto Bruto Interno (PBI) causado por la reducción de emisiones. De otra parte, teniendo en cuenta que es imposible estimar más o menos con cierta precisión el impacto del cambio de climático sobre el PBI para cada país hoy, una estrategia común será reducir el cambio de climático. Ya que uno de los principales factores en el calentamiento global es el efecto invernadero, entonces el objetivo común será reducir la suma de emisiones. Esto es una situación de conflicto típica. ï¿½**Cómo resolverlo?** Podemos introducir el criterio **egoístas** y **altruistas** para cada actor en vez de los llamados **coeficientes de egoísmo**. Este coeficiente es muy grande, si el actor emplea una estrategia muy egoísta, y a la inversa, si el actor es un **super altruista**, entonces los correspondientes coeficientes son muy pequeï¿$\frac{1}{2}$os. Usando estos coeficientes conseguimos la solución general del juego en una forma de algún equilibrio Nash. La solución es estable y eficiente.



- **Teoría de Juegos Evolutivos.**
  A primera vista, puede parecer raro que la teoría de juegos se pueda aplicar con éxito a la teoría evolutiva. Por ejemplo, ï¿$\frac{1}{2}$Cómo podría un insecto ser un jugador? los insectos no pueden razonar. Su conducta es instintiva. Sólo hacen aquello para lo que están programados.

  Sin embargo, algunas de las aplicaciones más prometedoras de la teoría de juegos han sido biológicas. Paradójicamente, cuanto menos desarrolladas están las habilidades intelectivas de un organismo, tanto mejor tiende a fusionar la teoría. A veces incluso se puede usar cuando los protagonistas son árboles o flores. ?ï¿$\frac{1}{2}$Porqué puede pasar esto?

  El secreto está, en que se supone que los jugadores son los organismos a estudiar. Si la conducta investigada es instintiva, entonces esta codificada en los genes del organismo. Podemos pensar en los genes como una parte del **hardware** de ordenador natural: la parte donde se almacenan los programas del ordenador. Alguno de los programas controlan la conducta del organismo. Los programas que nos interesan aquí, son aquellos que eligen estrategias para el organismo en un juego determinado. Al aplicar la teoría de juegos, estos programas deben ser considerados los jugadores. Una propiedad importante de los programas informáticos, es que, pueden ser copiados de un ordenador a otro. Los **virus informáticos** se copian a si mismo de un ordenador a otro. Son programas **auto replicantes**[1]. Los programas impresos en los genes de un animal también son auto replicantes.

[1]Un virus es una clase de molécula auto replicantes. Los virus informáticos habitualmente hacen otras cosas además de auto-replicarse. Los más famosos se parecen al virus biológico del resfriado

Pero su proceso de auto-copia es inmensamente complicado comparado con la de un virus informático. La naturaleza no sólo ha de copiar programas de un ordenador natural a otro, sino que tiene que crear un nuevo ordenador natural en el que se puedan copiar los programas. El descubrimiento de **Crick** y **Watson** de cómo la naturaleza consigue hacer algo tan complicado por medio del mecanismo de la **doble hélice** es una de las grandes historias de aventura de la ciencia. Pero sus emociones tendrán que ser disfrutadas en otra parte. Lo importante aquí es que sabemos que existe algo que hace dos cosas:

- Se copia a si mismo.
- Elige una conducta estratégica en un juego.

Un ente así se llamará un **replicador**[2].

Los replicadores no sólo aparecen en el contexto biológico. Rutinas códigos de conducta, modas, estilos de vida, credos e ideas científicas, son todos replicadores en algún sentido. Su modo de reproducción no es biológico. Pasan de una mente humana a otra por medio de la imitación o de la educación. Sin embargo, dados nuestros conocimientos actuales, no podemos sino especular sobre los mecanismos detallados de estas replicaciones socio económicas. Parece prudente, por tanto, quedarnos en los que sigue dentro del paradigma biológico.

Esta reflexión sobre la importancia de los replicadores sólo es un prólogo a una discusión sobre la noción de la **selección natural** de Charles Darwin. Una noción que el filósofo Spencer encerró en la frase **supervivencia de los mejor dotados**.

Para sobrevivir, los replicadores necesitan huéspedes [3] en cuyos genes se imprimen. Si definimos la adaptación de un huésped como una manera de medir la frecuencia con que reproduce sus genes, entonces es casi una tautología que los replicadores que confieren una buena adaptabilidad a sus huéspedes llegarán a controlar un número de huéspedes mayor que los que confieren una mala adaptabilidad. Si la vecindad sólo puede mantener un número limitado de huéspedes puede llegar a desaparecer completamente. El replicador más apto habrá sobrevivido.

Un kibitzer observando cómo evoluciona la situación puede intentar entender lo que atribuyendo un objetivo a propósito a un replicador: el maximizar la

común, en que desorganizan el interior de su huésped

[2]La palabra no pretende designar una entidad física

[3]En biología por huésped se entiende hospedador.

adaptación de sus huéspedes. Si la selección natural opera durante mucho tiempo en una vecindad estable, sólo continuarán existiendo aquellos replicadores que son eficaces maximizando la adaptación de sus huéspedes. Al kibitzer, por tanto, le parecerá que los replicadores supervivientes pretenden conseguir conscientemente el objetivo que él les ha asignado. Brevemente: parecerá que los replicadores actúan como lo hacen los **jugadores en un juego**.

la teoría de juegos es relevante porque la conducta que proporciona buena adaptabilidad a un huésped suele depender de lo que los demás huéspedes estén haciendo. Deberíamos esperar, por lo tanto, que la evolución genere alguna forma de **equilibrio** entre los replicadores supervivientes. En este equilibrio, cada replicador maximizará la adaptación de sus huéspedes, dada la conducta inducida en los demás organismos de la población por los replicadores que hospeda.

2. En el capítulo de Correspondencias hemos desarrollado la teoría básica; veamos un ejemplo abierto en la que se pueden investigar usando como herramienta las correspondencias: **(Teoremas de la Correspondencia Implícita.)**[17]. Sabemos que el Teorema de la Función Implícita; es muy importante no sólo en matemática; sino en modelos económicos, debido a que los modelos económicos tienen tanto variables exógenas como endógenas; entonces por el teorema podemos identificar una de la otra, así como también calcular como varía una variable endógena cuando la variable exógena esta variando, mediante su derivada.

Es decir, si X, Y e Z son espacios de Banach y sea $F : X \times Y \longrightarrow Z$ es una aplicación, el teorema clásico de la función implícita afirma que:

Si $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, es suave cerca del punto $(\bar{x}, \bar{y})$ y $F_X(\bar{x}, \bar{y}) : Y \longrightarrow Z$ es biyectiva, entonces en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{y})$ la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

determina $x = x(y)$ como una función de y. Además

$$x'(y) = -F_X^{-1}(x(y), y)F_Y(x(y), y)$$

Aquí consideramos la situación mas general, cuando $F : X \times Y \longrightarrow 2^Z$, es decir, $F : X \times Y \rightrightarrows Z$ es una correspondencia cerrada. Deseamos encontrar condiciones para asegurar que la inclusión $0 \in F(x, y)$ determina X como una correspondencia de Y. En otras palabras, definiendo $G(y) := \{x \in X : \ 0 \in F(x, y)\}$ deseamos encontrar las condiciones asegurando que G sea no vacío (local), las coderivadas reemplazan el rol de las derivadas, en estas condiciones.

3. En el capítulo del Punto Fijo; desarrollamos los teoremas del Máximo de Berge y el teorema de Punto Fijo de Kakutani. Con estos teoremas se puede desarrollar el **Equilibrio Económico de Walras**, donde utiliza los teoremas anteriores para demostrar la existencia del equilibrio.

Finalmente; la importancia de mi tesis a mi entender; es haber sentado las bases mínimas en la teoría de las correspondencias y teoría de juegos no cooperativos, para que cualquiera pueda desarrollar temas importantes y aplicados a la vida real; como los problemas abiertos que se ha enunciado.

Bibliografía

[1] Accinelli, E., **Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en la Teoría del Equilibrio General**. Universidad Autónoma Metropolitana, México. Ediciones EON. 2005.

[2] Accinelli, E., **La topología de las correspondencias y el equilibrio de Nash**, en Economía Aplicada, Economía Dinámica y Teoría de Juegos. Ensayos en Homenaje a Ramón García-Cobian. Editado por César Martinelli y Loreta Gasco. Pontificia Universidad Católica del Perú. 2005.

[3] Aliprantis, Charalambos D, Border, K. C. **Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide**. Springer - Verlag Berlin, 2006.

[4] Berge, C. **Topological Spaces: Including a Treatment of Multi-Valued Functions Vector Spaces and Convexity**. The MacMillan Company, New York, 1963.

[5] Binmore, K. G. **Teoría de Juegos**. Madrid: Mc Graw-Hill, 1994

[6] Blum, E. **El Teorema de Punto Fijo de Kakutani**. Actas del Primer Coloquio de Matemáticas, Lima, 1983.

[7] Blum, E. **Teoria de Correspondencias Continuas y Correspondencias Cerradas**. Revista TECNIA. Vol3., Nú2, pág. 31-38, 1987, UNI. Lima - Perú.

[8] Crouzeix, J. P., Ocaña, E., Sosa, W.: **Análisis Convexo**. Monografias IMCA, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú, 2003

[9] De la Fuente, A., **Mathematical Methods and Models for Economics**. Cambridge University Press, 2000.

[10] Fudenberg, D., Tirole, J., **Game Theory**. Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 1991.

[11] Garcia, R. Y., **El lema de Ky Fan y algunas de sus aplicaciones**. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Ingeniería, 2001.

[12] Gibbons, R., **Un Primer Curso de Teoría de Juegos**. Barcelona, Antoni Bosh, Editor, 1993.

[13] Huntsberger, T. L. y Sengupta, A. **Game theory basis for control of long-lived lunar/planetary surface robots**. Auton Robot **20**: 85-95, 2006.

[14] Kelley, J. L., **General Topology**. New York, Von Nostrand, 1955.

[15] Klein, E., Thompson, A. C., **Theory of Correspondences: Including Applications to Mathematical Economics**. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Text. New York: John Wiley-Sons, 1984.

[16] Labriet, M. y Loulou, R. **How Crucial is Cooperation in Mitigating World Climate? Analysis with World-MARKAL** Springer-Verlag, 2007.

[17] Ledyaev, Y. S. y Zhu, Q. J. **Impliciti Multifunction Theorems** Set-Valued Analysis **7**: 209-238, 1999.

[18] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J. R. **Microeconomic Theory**. Oxford University Press, 1995.

[19] Moore, J. C., **Mathematical Methods for Economic Theory 1**. Springer - Verlag, Berlin, 1999.

[20] Moore, J. C., **Mathematical Methods for Economic Theory 2**. Springer - Verlag, Berlin, 1999.

[21] Munkres, J. R. **Topología**, 2^a. edición. Pearson Educación, S. A., Madrid, 2002.

[22] Nikaido, H. **Métodos Matemáticos del Análisis Económico**. Ed. Vicens-Vives, Barcelona, 1978.

[23] Rockafellar R. T.: **Convex Analysis**. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[24] Runde, V. **A Taste of Topology.** Springer - Verlag, Berlin, 2005.

[25] Svirezhev, Y. M., von Bloh, W. y Schellnhuber, H. J. **Emission game: some applications of the theory of games to the problem of CO_2 emission**. Environmental Modeling and Assessment **4**: 235-242. 1999.