

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES  
DIFERENCIALES CON RETARDO MEDIANTE RUNGE-KUTTA  
EXPLÍCITO Y SU APLICACIÓN EN BIOMATEMÁTICA

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO  
EN MATEMÁTICA

PRESENTADA POR:  
ROXANA LOBÓN DURAND

ASESOR: MSC. IRLA MANTILLA NÚÑEZ

LIMA-PERÚ  
2008

## **Agradecimientos**

- Mi especial agradecimiento a mi asesora la profesora Irla Mantilla N. por su generosa disposición en la conducción de mi labor científica desarrollada en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería.
- También agradezco el paciente aliento de personas cercanas sin cuya confianza y sacrificio no hubiera culminado con satisfacción esta tesis.

*Dedicado con amor a mis padres  
de quienes he recibido todo*

# Tabla de Contenidos

<i>Agradecimientos</i> . . . . .	ii
<i>Introducción</i> . . . . .	1
<b>CAPÍTULO 1: PRELIMINARES</b> . . . . .	2
1.1 <i>Ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo (EDR)</i> . . . . .	2
1.2 <i>Solución de un PVI con EDR</i> . . . . .	3
1.3 <i>Análisis de existencia y unicidad de solución para las EDR</i> . . . . .	10
<b>CAPÍTULO 2: COMPORTAMIENTO CUALITATIVO DE LOS PVI CON EDR</b> . . . . .	16
2.1 <i>Órbita de una EDR</i> . . . . .	16
2.2 <i>Criterios de Estabilidad</i> . . . . .	19
2.3 <i>Bifurcación de Hopf</i> . . . . .	29
2.4 <i>Positividad de las soluciones para las EDR</i> . . . . .	33
<b>CAPÍTULO 3: MÉTODO DE RUNGE KUTTA PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL</b> . . . . .	38
3.1 <i>Método de Runge Kutta</i> . . . . .	38
3.2 <i>Consistencia del método de Runge-Kutta</i> . . . . .	39
3.3 <i>Elección del paso óptimo para el método de Runge-Kutta</i> . . . . .	42
<b>CAPÍTULO 4: RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS EDR CON EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA</b> . . . . .	45

4.1	<i>Aplicación del Método de Runge Kutta con tamaño de paso fijo para las EDR</i>	45
4.2	<i>Aplicación del Método de Runge Kutta con tamaño de paso variable para las EDR</i>	49
4.3	<i>Consistencia de los métodos de Runge Kutta para las EDR</i>	52
4.4	<i>Implementación numérica</i>	53
<b>CAPÍTULO 5: APLICACIÓN A MODELOS BIOMATEMÁTICOS</b>		55
5.1	<i>Modelos de crecimiento tumoral</i>	55
5.2	<i>Modelos de diseminación de infecciones</i>	57
5.3	<i>Modelo del comportamiento cinético de la enzimas</i>	58
5.4	<i>Modelo inmunológico de crecimiento viral</i>	59
5.5	<i>Dinámica poblacional</i>	61
<b>CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES, ANEXOS Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		63
6.1	<i>Conclusiones</i>	63
6.2	<i>Anexos</i>	64
<b>Referencias Bibliográficas</b>		71

## Índice de Figuras

1.1	Solución de la ecuación $x'(t) = -0.1x(t-1)$ . . . . .	4
1.2	Solución de la ecuación $x'(t) = -1.4x(t-1)$ . . . . .	4
1.3	Solución de la ecuación $x'(t) = -(p/2)x(t-1)$ . . . . .	5
1.4	Soluciones de la ecuación de Verhulst . . . . .	6
1.5	Tasas de crecimiento per capita para los modelos (a) logístico, (b) (c) con efecto Allee. . . . .	7
1.6	$f(x) = e^{-x} - 1$ . . . . .	8
1.7	$f(x) = (e^{-x} - 1)(3 + 2.5(e^{-x} - 1))$ . . . . .	9
2.1	Gráfica de $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_+$ . . . . .	25
2.2	Gráfica de puntos $\mathfrak{S}_k$ y la curva $W(i\omega)$ . . . . .	28
2.3	Gráfica de $x_n$ para $r = 2, 9$ . . . . .	30
2.4	Gráfica de $x_n$ para $r = 3$ . . . . .	30
2.5	Gráfica de $x_n$ para $r = 3, 1$ . . . . .	31
4.1	Solución exacta de la ecuación 4.3 . . . . .	47
4.2	Solución numérica y exacta ( $y = e^x$ ) del problema mostrado en el ejemplo 4.11 resuelto con el esquema de paso variable (4.10). . . . .	51
5.1	Solución del modelo 5.2 para $\alpha = 0.1, 0.5, 1$ . Se aprecia la estabilidad de la solución de equilibrio $x \equiv 1$ . . . . .	56
5.2	Solución del modelo 5.2 para $\alpha = \frac{\pi}{2}, 2$ . Se aprecia la inestabilidad de la solución de equilibrio $x \equiv 1$ . . . . .	56
5.3	Solución del modelo de Kermack-McKendricke 5.3 . . . . .	57

5.4	Solución del modelo de Kermack-McKendricke 5.4 . . . . .	58
5.5	Solución del modelo de cinética de enzimas (5.5), $I = 10.5$ . Valores iniciales cercanos a la posición de equilibrio . . . . .	59
5.6	Solución del modelo inmunológico de Marchuk ( $h_6 = 10$ ) . . . . .	60
5.7	Solución del modelo inmunológico de Marchuk ( $h_6 = 300$ ) . . . . .	61
5.8	Solución numérica del problema 5.6 para $h = 0.2$ . . . . .	62

## Índice de Tablas

3.1	Métodos de Runge-Kutta de orden 4 . . . . .	42
4.1	Resultado de aplicar el esquema (4.8) de paso variable al problema (1.25) utilizando un esquema RK de orden 4 . . . . .	52



# Introducción

En diversos problemas físicos y biológicos existen modelos que son descritos en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, la teoría de las ecuaciones diferenciales abarca también un campo muy importante que corresponde a las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) la cual se ocupa de modelos donde la variación de la variable de estado  $x$  con el tiempo depende en cada instante  $t$  no sólo de  $x(t)$  sino también de los valores de  $x$  en instantes anteriores. En el presente trabajo estamos interesados en el estudio numérico del comportamiento de la solución de este tipo de ecuaciones que se muestran en forma general y en aplicaciones. Una de las motivaciones más importantes para el estudio de la ecuaciones diferenciales con retardo viene de la biomatemática. Estos modelos tienen la particularidad de que su comportamiento genera una curva conocida como curva logística la cual no es fácil de encontrar de manera exacta cuando se trata de que el término no lineal depende de un retardo. Otra de las características es que existe inestabilidad en las soluciones, en particular las soluciones de los problemas de valor inicial asociados presentan punto de inflexión a través de su trayectoria.

En el presente trabajo pretendemos cumplir los siguientes objetivos: un breve estudio cualitativo del comportamiento de la solución de las EDR y el análisis cuantitativo mediante la resolución numérica de los problemas de valor inicial asociados a las EDR.

El contenido del trabajo comprenderá cinco capítulos distribuidos de la siguiente forma, en el capítulo preliminar se describirá algunos resultados encontrados sobre el concepto de una ecuación diferencial con retardo, en el segundo capítulo está relacionado al comportamiento cualitativo de la solución, se presentan también algunos resultados de existencia y unicidad de solución, así como también de algunas propiedades cualitativas referidas a la estabilidad de las EDR's, se considera también la aplicación del criterio de Mikhailov como contribución al análisis de comportamiento y existencia de solución del problema, en el tercer capítulo se describe el método de Runge-Kutta explícito de  $s$  etapas, en el cuarto capítulo se aplica el método de Runge-Kutta para hallar la solución numérica de los problemas de valor inicial asociados a las EDR, en este capítulo se implementa también los algoritmos para la visualización de la solución explícita en los diversos modelos utilizados.

Para entender y comprobar la metodología desarrollada, se utilizarán los resultados en algunos fenómenos biológicos modelados matemáticamente como problemas de valor inicial asociados a EDR, estos modelos utilizados son los siguientes: Comportamiento del crecimiento tumoral, diseminación de infecciones, cinética de la enzimas y crecimiento viral. En todos ellos es nuestro interés determinar el comportamiento de la variable de estado de la cual solo se conoce que está alterada por un parámetro de retardo en el control inicial. Finalmente se presentan las conclusiones sobre los resultados obtenidos y se listan las referencias bibliográficas que sirvieron para el desarrollo del trabajo.

# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

### 1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo (EDR)

En el estudio de modelos con sistemas dinámicos, se representa mediante una ecuación diferencial (o conjunto de ellas). En el caso orientado a un sistema biológico que evoluciona en el tiempo  $t$  se denominará **estado** a la variable incógnita  $x$  que depende de  $t$  y es la que caracterizará el estado de un sistema en equilibrio.

**Definición 1.1.1 (Espacio de estados)** Sea  $\tau \geq 0$ , el conjunto  $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$  será denotado como  $\mathcal{C}$  y se le llamará **espacio de estados**.

**Definición 1.1.2 (Variable de estado)** Sea  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{C}$  un espacio de estados, definimos  $x_t : [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \quad , \forall \theta \in [- \tau, 0]$$

$x_t$  se llamará **variable de estado** o **estado del sistema en el tiempo  $t$** .

**Definición 1.1.3 (Ecuación diferencial con retardo)** Una ecuación diferencial con retardo (EDR) es una ecuación de forma

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r))$$

donde  $f$  es una función continua dada y  $r > 0$  es un parámetro que se le denomina **retardo**.

**Definición 1.1.4 (Problema de valor inicial)** Un problema de valor inicial asociado a una EDR está dado por

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)), \quad \forall t \geq \sigma \tag{1.1}$$

$$x_\sigma = \phi \tag{1.2}$$

donde  $\sigma \in \mathbb{R}$  es el tiempo inicial,  $\phi \in \mathcal{C}$  es el estado del sistema en el tiempo  $\sigma$  y  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua.

## 1.2 Solución de un PVI con EDR

**Definición 1.2.5** Una solución del problema de valor inicial (1.1)-(1.2) es una función  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface (1.1)-(1.2).

En estas ecuaciones, el comportamiento de las soluciones en un instante  $t$  depende no sólo de la posición  $x(t)$  en ese instante sino también del valor en un instante anterior  $x(t - r)$ .

Un caso más general lo constituyen las ecuaciones diferenciales funcionales, en las cuales el comportamiento de las soluciones en un instante  $t$  depende de la solución en el intervalo  $[t - r, t]$ . Tienen la forma  $x'(t) = f(t, x_t)$ , donde  $x_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $x_t(s) = x(t + s)$ .

Y un problema de valor inicial con esta forma de ecuación está dado por

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad x_t(\theta) := x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0] \quad (1.3)$$

$$x_\sigma = \phi \quad \forall t \geq \sigma \quad (1.4)$$

Para señalar algunos de los aspectos característicos de estas ecuaciones, cuyo estudio es mucho más complicado que el de las ecuaciones diferenciales sin retardo, veamos un ejemplo propuesto por Kolmanovskii y Myshkis en [15]. Consideremos una persona que empieza a ducharse y quiere que el agua alcance una temperatura óptima  $T_d$  al abrir la llave de la ducha. Se supone que el cambio de temperatura  $\Delta T$  es proporcional a la variación del ángulo de rotación  $\Delta \alpha$  con coeficiente  $k$ . Denotemos por  $T(t)$  la temperatura del agua en el mezclador y  $r$  el tiempo necesario para que el agua salga de la ducha. Se puede suponer que la variación en la rotación del grifo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del agua que sale de la ducha y la temperatura que desea la persona con constante  $l$ , donde  $l$  es la longitud del tubo. Este comportamiento se puede modelar mediante la siguiente ecuación diferencial con retardo para la variable de estado temperatura

$$T'(t) = -k\alpha'(t) = -kl(T(t - r) - T_d) \quad (1.5)$$

Haciendo el cambio de variable  $x(t) = T(t) - T_d$  convierte la ecuación (1) en

$$x'(t) = -ax(t - r), \quad (1.6)$$

donde  $a = kl > 0$ . Observemos que con este cambio de variable la aproximación a  $T_d$  se convierte en una aproximación a cero. La ecuación 1.6 es una ecuación diferencial lineal con retardo  $r$  y, a diferencia de lo que ocurre con la ecuación diferencial lineal ordinaria  $x'(t) = -ax(t)$ , el comportamiento de las soluciones varía con respecto los parámetros  $a$  y  $r$ . Esto sucede porque la ecuación característica asociada no es lineal ( $x + a = 0$ ) como en el caso ordinario sino que es una ecuación trascendente ( $x + ae^{-rx} = 0$ ). Expondremos brevemente lo que sucede:

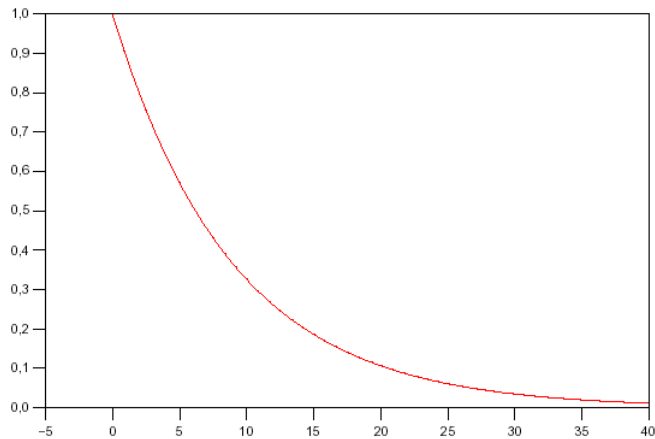


Figura 1.1: Solución de la ecuación  $x'(t) = -0.1x(t - 1)$

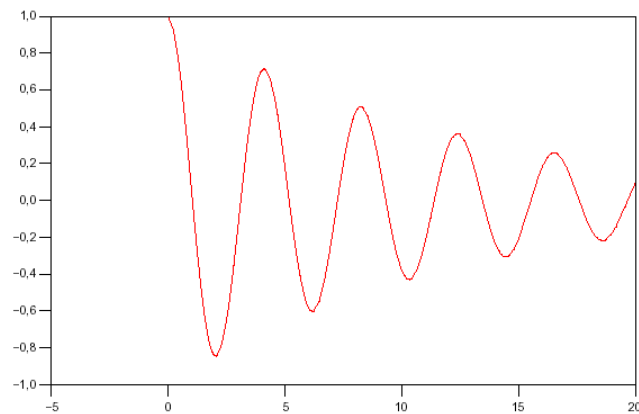


Figura 1.2: Solución de la ecuación  $x'(t) = -1.4x(t - 1)$

- Si  $ar < 1/e$ , las soluciones convergen exponencialmente a cero, como sucede en el caso ordinario. Esto indica que los retrasos pequeños no influyen en la dinámica. Este caso se corresponde con un tubo muy pequeño y una persona tranquila, con lo cual la temperatura se va alcanzando de forma progresiva. Ver la Figura 1.1.
- Si  $1/e < ar < \pi/2$  las soluciones convergen a cero pero oscilando. Este comportamiento es característico de las ecuaciones con retardo, pues es imposible en una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden. Se corresponde con un tubo un poco más largo y/o una persona con temperamento más fuerte. Se consigue la temperatura deseada pero pasando por etapas de frío y calor. Ver la Figura 1.2.
- Si  $ar \geq \pi/2$  aparecen soluciones periódicas e incluso soluciones no acotadas. Los altos valores de  $a$  y  $r$  hacen que el agua pase constantemente de fría a caliente sin estabilizarse en torno al valor deseado. Ver la Figura 1.3.

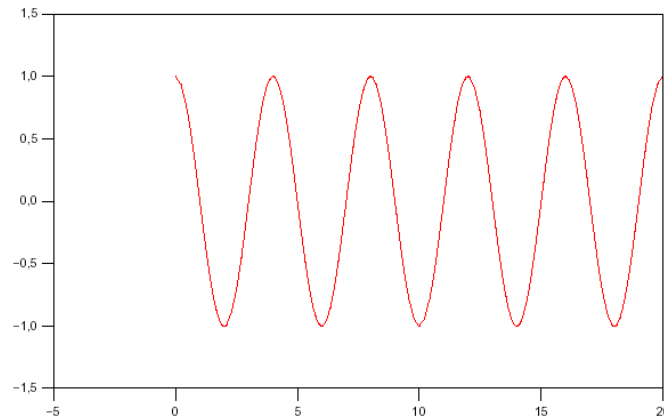


Figura 1.3: Solución de la ecuación  $x'(t) = -(p/2)x(t - 1)$

Ahora describiremos algunos modelos que conducen a ecuaciones logísticas con retardo.

Los modelos de población más simples son los modelos independientes de la densidad, es decir, aquellos en los que se supone que las tasas de natalidad y mortalidad por individuo no dependen del tamaño de la población. Malthus en 1798 propuso un modelo de este tipo en el que las tasas de natalidad y mortalidad en cada instante son proporcionales al número de individuos de la población en ese instante. Si denotamos por  $x(t)$  el número de individuos de la población en el instante  $t$  (se permite que  $x(t)$  tome cualquier valor real positivo, aunque en la interpretación real debe tomar sólo valores enteros), entonces  $x'(t)$  representará la tasa de variación del tamaño de la población y está dada por la siguiente ecuación

$$x'(t) = ax(t) - bx(t) \quad (1.7)$$

donde  $a$  y  $b$  son respectivamente las tasas de natalidad y mortalidad *per capita*. Sea  $p = a - b$  a este parámetro se suele llamar *tasa intrínseca de crecimiento* y determina completamente las soluciones de la ecuación 1.7, que solamente tienen tres comportamientos posibles: crecen exponencialmente si  $p > 0$ , decrecen exponencialmente hacia cero si  $p < 0$  y son constantes si  $p = 0$  (esto resulta evidente de la expresión de las soluciones  $x(t) = x_0 e^{pt}$ , donde  $x_0$  es la población inicial).

El crecimiento exponencial se ajusta bastante a la realidad durante un cierto periodo de tiempo (se conocen datos reales de la evolución de la población humana que se corresponden con este comportamiento durante unos años [11]-[12]). Sin embargo, es natural pensar que a largo plazo no es un modelo realista, debido principalmente al agotamiento de los recursos. Además, el modelo malthusiano tampoco explicaría una situación que se observa con cierta frecuencia en la naturaleza: la estabilización de la población hacia un valor de equilibrio. Podemos concluir que un modelo realista a largo plazo debe tener en cuenta que las tasas de natalidad y mortalidad dependen del tamaño de la población, debido a que cuando ésta crece demasiado debe existir un proceso de

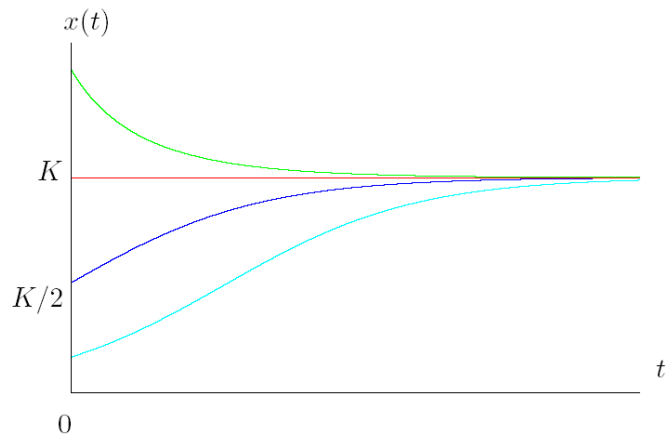


Figura 1.4: Soluciones de la ecuación de Verhulst

autolimitación (llamado comúnmente *competición intraespecífica*).

Verhulst propuso en 1836 su célebre *ecuación logística*, en la cual la tasa de mortalidad se supone constante mientras que la tasa de natalidad depende linealmente del tamaño de la población, de tal modo que la población no puede crecer indefinidamente y existe un valor  $K$  de la densidad de población en el cual la tasa de crecimiento *per capita es cero*. Esta constante  $K$  actúa como nivel de saturación y se suele determinar en función de la cantidad de recursos disponibles.

Estas consideraciones conducen a la ecuación de Verhulst

$$x'(t) = px(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K}, x > 0 \right). \quad (1.8)$$

La ecuación 1.8 es fácilmente integrable y se puede comprobar que el equilibrio positivo  $x = K$  es globalmente asintóticamente estable para  $x > 0$ . El otro equilibrio ( $x = 0$ ) es inestable y las soluciones tienen un comportamiento como el que indica la Figura 1.4.

En particular, las soluciones con valor inicial  $x_0 < K/2$  presentan un punto de inflexión que se observa habitualmente en las tablas reales (ver [11],[13],[14]).

Sin embargo, existen ejemplos en poblaciones humanas que muestran que la población a veces sigue creciendo por encima del nivel  $K$  en lugar de aproximarse indefinidamente a él por debajo. En experimentos reales se observa también un comportamiento periódico en la evolución del tamaño de la población de una especie (ovejas, insectos, ...) que no puede explicar el modelo logístico de Verhulst. Una de las características de la ecuación 1.8 que podría explicar estas deficiencias reside en el hecho de que considera que la tasa de natalidad actúa instantáneamente, mientras que en general existe un cierto retardo debido a la influencia de factores como el período de madurez y el tiempo de gestación.

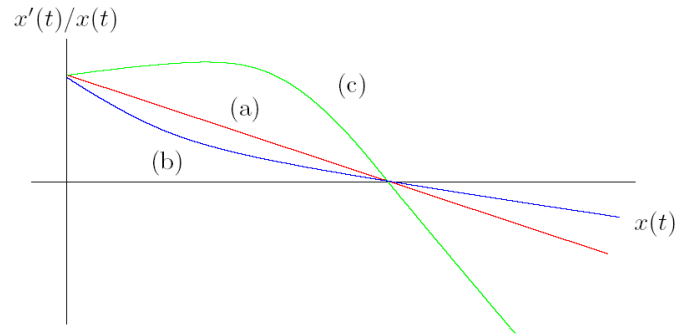


Figura 1.5: Tasas de crecimiento per capita para los modelos (a) logístico, (b) (c) con efecto Allee.

Hutchinson propuso en 1948 [16] la ecuación logística con retardo

$$x'(t) = px(t)\left(1 - \frac{x(t-r)}{K}\right), \quad (1.9)$$

donde  $r$  representa la edad de máxima capacidad reproductiva de un individuo de la población. En este caso la tasa de crecimiento *per capita* en el instante  $t$  es una función lineal de la población en el instante  $t - r$ . Para la comparación con otros modelos, nos resultará útil escribirla en la forma

$$x'(t)/x(t) = f(x(t-r)) \quad (1.10)$$

donde  $f(x) = p(1 - x/K)$  (ver Figura 1.5 (a)). Otro ejemplo que se ha podido encontrar acerca del comportamiento de una población según la ecuación 1.9 es el realizado por el entomólogo australiano A.J. Nicholson [17] con poblaciones de la mosca de la oveja (*Lucilia cuprina*). Los datos obtenidos por Nicholson permiten observar que el comportamiento oscilatorio de estas soluciones y May [18] encontró los valores de los parámetros de la ecuación de Hutchinson que mejor se adaptaban a estos datos (que corresponden aproximadamente a  $pr = 2.1$ ).

Más tarde, en 1963, el ecólogo F.E. Smith [19] trató de utilizar la ecuación (1.9) con  $r = 0$  para interpretar sus experimentos sobre el crecimiento de la población de la mosca *Daphnia magna*. Sin embargo, observó que en este caso la tasa de crecimiento per capita no es una función lineal de la población como sucedía para la *Lucilia cuprina*. Basándose en sus datos experimentales, sugirió que esta tasa tiene una dependencia de la población, regulada por la función  $f$

$$f(x) = \frac{K - x}{K + cpx}, \quad K, c, p > 0$$

ver Figura 1.5 (b). De la ecuación 1.9 y para un retardo  $r > 0$  resulta la siguiente generalización de la ecuación logística con retardo de Hutchinson:

$$x'(t) = px(t) \frac{K - x(t-r)}{K + cpx(t-r)} \quad (1.11)$$

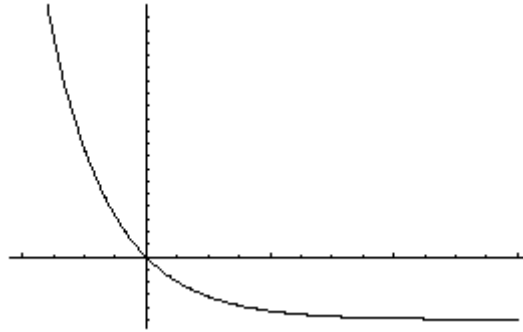


Figura 1.6:  $f(x) = e^{-x} - 1$ .

En el que se tenga  $c = 0$  se obtiene precisamente la ecuación 1.9.

Si  $r = 0$  (es decir, sin factores de retardo), la ecuación 1.11 es considerada por algunos investigadores como la influencia de la polución en ciertas poblaciones (véase, por ejemplo, [23]).

En 1933, los estudios del biólogo W.C. Allee [24] mostraron la fuerte influencia que tienen ciertos “efectos sociales” en el desarrollo interno de la población de algunas especies con conducta cooperativa (abejas, hormigas, peces, etc.). Para estas poblaciones, la tasa de crecimiento per capita aumenta hasta el instante en que la población alcanza un valor crítico. Al pasar este valor, empieza a disminuir debido a causas como la competencia por los recursos. Esto se traduce en que la función  $f$  no es monótona como en los casos anteriores sino que tiene la forma indicada en la Figura 1.5 (c). La modificación más sencilla de la ecuación de Hutchinson que permite considerar este comportamiento (conocido como “efecto Allee”) viene dada por la siguiente ecuación [22]-[21]:

$$x'(t) = x(t) \left[ 1 - \frac{x(t-r)}{K} \right] (p + qxt(t-r)), x > 0, p > 0, q \geq 0, \quad (1.12)$$

Esta ecuación es de carácter no lineal por lo que las técnicas empleadas en la ecuación logística sin retardo ya no sirven. Sin embargo, veremos que tienen algunas características comunes que al estudiarlas se podrían encontrar algunos resultados similares.

Mediante un cambio de variable adecuado, todos estos modelos se pueden escribir en una forma mas general como

$$x'(t) = f(x(t-r)), \quad (1.13)$$

donde  $f$  es una función estrictamente decreciente o unimodal (es decir, con un único punto crítico que es un extremo local).



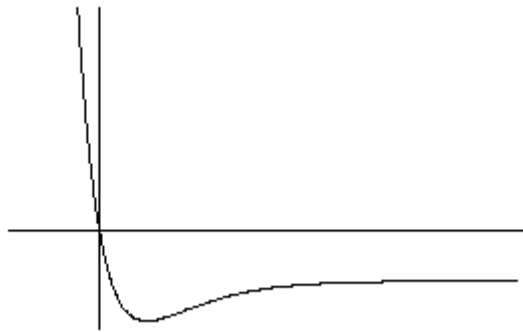


Figura 1.7:  $f(x) = (e^{-x} - 1)(3 + 2.5(e^{-x} - 1))$ .

Por ejemplo introduciendo la variable  $z(t) = -\ln(x(ht)/K)$  derivando conduce a la siguiente ecuación

$$z'(t) = r(e^{-z(t-1)} - 1), \quad (1.14)$$

que es de la forma 1.13 con  $f(x) = e^{-x} - 1$  (Figura 1.6).

Si consideramos la ecuación con efecto Allee 1.12 con  $r = K = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 2.5$  y realizamos el mismo cambio de variable, obtenemos la aplicación unimodal  $f(x) = (e^{-x} - 1)(3 + 2.5(e^{-x} - 1))$  (Figura 1.7).

### 1.2.1 Ejemplos de ecuaciones diferenciales funcionales

Son aquellas en que el segundo miembro de la ecuación puede ser expresada por una de las siguientes formas

(i)

$$x'(t) = - \left[ x(t) - \int_{t-\tau}^t x(s) ds \right]$$

(ii)

$$x'(t) = - \max_{t-\tau \leq s \leq t} x(s)$$

(iii)

$$x'(t) = \int_{t-\tau}^t k(t, s) x(s) ds$$

(i)  $f(x_t) = -x_t(0) + \int_{-\tau}^0 x_t(s) ds$

(ii)  $f(x_t) = - \max_{-\tau \leq s \leq 0} x_t(s)$

$$(iii) \quad f(x_t) = \int_{-\tau}^0 k(t, s+t) x_s(t) ds$$

Nota.- En adelante denotaremos por:

- (i)  $|x|$  a la norma del vector  $x$  y
- (ii)  $\|\phi\| = \sup \{|\phi(\theta)| : -\tau \leq \theta \leq 0\}$  a la norma de una función de estado  $\phi \in \mathcal{C}$ .

### 1.3 Análisis de existencia y unicidad de solución para las EDR

**Definición 1.3.6** Decimos que  $f$  es una función Lipschitz en un conjunto acotado de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$  si  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  y  $M > 0$ , existe  $K > 0$  (llamada constante de Lipschitz) tal que:

$$\|f(t, \phi) - f(t, \psi)\| \leq K \|\phi - \psi\|, a \leq t \leq b, \|\phi\|, \|\psi\| \leq M. \quad (1.15)$$

**Lema 1.3.7** Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua que satisface (1.15), entonces en cada intervalo  $[a, b]$  y  $M > 0$  existe  $L > 0$  tal que:

$$|f(t, \psi)| \leq L, \quad \forall t \in [a, b], \|\psi\| \leq M.$$

**Prueba:** Denotemos por  $0_c$  la función nula en  $\mathcal{C}$ , entonces al ser  $f$  una función Lipschitz:

$$|f(t, \psi)| \leq |f(t, \psi) - f(t, 0_c)| + |f(t, 0_c)| \leq K \|\psi - 0_c\| + |f(t, 0_c)| \leq KM + P$$

donde  $P = \max_{a \leq t \leq b} |f(t, 0_c)|$ .  $\square$

**Lema 1.3.8 (Gronwall-Reid)** Sea  $C$  una constante dada,  $k$  una función continua no negativa en un intervalo  $I$ , donde  $I = [t_0, t]$ . Si  $x : I \rightarrow [0, \infty)$  es una función de estado continua tal que  $t_0 \in I$  y

$$x(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^t k(s)x(s)ds \right|, \quad \text{para todo } t \in I \quad (1.16)$$

entonces

$$x(t) \leq Ce^{\left| \int_{t_0}^t k(s)ds \right|}, \quad \text{para todo } t \in I \quad (1.17)$$

**Prueba:** Considerando que  $t \geq t_0$ .

$$\text{Sea } y(t) \equiv C + \int_{t_0}^t k(s)x(s)ds \text{ entonces } x(t) \leq y(t) \quad (*).$$

Derivando obtenemos que  $y'(t) = k(t)x(t)$  y por lo tanto

$$y'(t) \leq k(t)y(t)$$

separando variables e integrando se obtiene que

$$y(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t k(s)ds}$$

de (\*) se obtiene que

$$x(t) \leq y(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t k(s)ds}$$

El caso  $t \leq t_0$  es similar.  $\square$

Estos resultados se utilizarán en la demostración de la existencia y unicidad de solución de las EDR

**Teorema 1.3.9 (Existencia y unicidad de solución para las EDR)** *Si  $f$  es continua y satisface la condición de Lipschitz (1.15) entonces existe una única solución de (1.1) en  $[\sigma - \tau, \sigma + A]$  con  $A$  definida por (1.20), con  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in \mathcal{C}$  tal que  $\|\phi\| \leq M$ . Entonces. Además si  $K$  es la constante de Lipschitz entonces*

$$\max_{\sigma - \tau \leq \eta \leq \sigma + A} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)| \leq \|\phi - \psi\| e^{KA}, \quad (1.18)$$

donde  $\|\phi\|, \|\psi\| \leq M$

**Prueba:**  $\phi \in \mathcal{C}$  donde  $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $\sigma = 0$  integrando (1.1) resulta:

$$x(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s), ds \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A \quad (1.19)$$

para algún  $A > 0$ .

Supongamos que  $\|\phi\| \leq M$ . Sea  $K$  la constante Lipschitz para  $f$  en el conjunto  $[\sigma, \sigma + \tau] \times \{\psi \in \mathcal{C} : \|\psi\| \leq 2M\}$  y sea  $L$  la cota de  $|f|$  dada por el lema 1.3.7. Escojamos

$$A = \min \{\tau, M/L\}. \quad (1.20)$$

Sea  $y$  una función continua en  $[\sigma - \tau, \sigma + A]$  satisfaciendo  $y_\sigma = \phi$  y  $|y(t)| \leq 2M$  en  $[\sigma, \sigma + A]$ , podemos definir una nueva función continua  $z$  en  $[\sigma - \tau, \sigma + A]$  como

$$z(t) := \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, y_s), ds \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A$$

y  $z(t) = \phi(t - \sigma) \quad \forall t \in [\sigma - \tau, \sigma]$ . Entonces se satisface que

$$|z(t)| \leq M + L(t - \sigma) \leq M + LA \leq 2M, \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A$$

esto nos motiva a usar aproximaciones sucesivas para aproximar (1.19) a partir de la aproximación inicial

$$x^{(0)}(t) = \phi(0), \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A$$

$$y \quad x^{(0)}(t) = \phi(t - \sigma), \quad \forall t \in [\sigma - \tau, \sigma].$$

Definamos

$$x^{(m+1)}(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s^{(m)}) ds, \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

$$y \quad x^{(m+1)}(t) = \phi(t - \sigma), \quad \forall t \in [\sigma - \tau, \sigma].$$

$$|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)| = \left| \int_{\sigma}^t f(s, x_s^{(0)}) ds \right| \leq L(t - \sigma), \quad t \in [\sigma, \sigma + A] \quad (1.22)$$

en general

$$\begin{aligned} |x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| &= \left| \int_{\sigma}^t [f(s, x_s^{(m)}) - f(s, x_s^{(m-1)})] ds \right| \\ &\leq K \int_{\sigma}^t \|x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)}\| ds \\ &\leq K \int_{\sigma}^t \sup_{\sigma \leq \eta \leq s} |x^{(m)}(\eta) - x^{(m-1)}(\eta)| ds \end{aligned}$$

observemos que en particular si  $m = 1$

$$\begin{aligned} |x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)| &\leq K \int_{\sigma}^t \sup_{\sigma \leq \eta \leq s} |x^{(1)}(\eta) - x^{(0)}(\eta)| ds \\ &\leq K \int_{\sigma}^t L(s - \sigma) ds \\ &\leq KL \frac{(t - \sigma)^2}{2} \end{aligned}$$

y así también obtenemos

$$|x^{(3)}(t) - x^{(2)}(t)| \leq K \int_{\sigma}^t KL \frac{(s - \sigma)^2}{2} ds = \frac{L}{K} \frac{[K(t - \sigma)]^3}{3!}$$

supongamos que  $j = m$  se tenga que

$$|x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| \leq \frac{L}{K} \frac{[K(t - \sigma)]^{m+1}}{(m+1)!} \quad (1.23)$$

entonces para  $j = m + 1$  se tendrá:

$$\begin{aligned} |x^{(m+2)}(t) - x^{(m+1)}(t)| &\leq K \int_{\sigma}^t \sup_{\sigma \leq \eta \leq s} |x^{(m+1)}(\eta) - x^{(m)}(\eta)| ds \\ &\leq K \int_{\sigma}^t \frac{L [K(s - \sigma)]^{m+1}}{K (m+1)!} ds \\ &= LK^{m+1} \frac{(t - \sigma)^{m+2}}{(m+2)!} = \frac{L [K(t - \sigma)]^{m+2}}{K (m+2)!} \end{aligned}$$

por el principio de inducción matemática nos permite afirmar que la desigualdad (1.23) es válida para todo  $m \geq 0$ .

Haciendo  $m > n$  y utilizando la desigualdad triangular tenemos que:

$$\begin{aligned} |x^{(m)}(t) - x^{(n)}(t)| &\leq |x^{(m)}(t) - x^{(m-1)}(t)| + |x^{(m-1)}(t) - x^{(m-2)}(t)| + \dots \\ &\quad + |x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)| \\ &\leq \frac{L [K(t - \sigma)]^m}{K (m)!} + \frac{L [K(t - \sigma)]^{m-1}}{K (m-1)!} + \dots + \frac{L [K(t - \sigma)]^{n+1}}{K (n+1)!} \\ &\leq \frac{L}{K} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(KA)^j}{j!} \end{aligned}$$

tomando supremo

$$\sup_{\sigma \leq t \leq \sigma+A} |x^{(m)}(t) - x^{(n)}(t)| \leq \frac{L}{K} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(KA)^j}{j!} - \sum_{j=1}^n \frac{(KA)^j}{j!} \right)$$

si en el término de la derecha  $n \rightarrow +\infty$  éste tiende a cero por tanto  $\{x^{(m)}\}_{m \geq 0}$  es una sucesión uniformemente de Cauchy en  $[\sigma, \sigma + A]$ .

Entonces existe una función continua  $x : [\sigma, \sigma + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\sup_{\sigma \leq t \leq \sigma+A} |x^{(m)}(t) - x(t)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty$$

extendiendo  $x$  sobre todo el intervalo  $[\sigma - \tau, \sigma + A]$ , entonces se expresa que:

$$x(t) = \phi(t - \sigma) \text{ para } t \in [\sigma - \tau, \sigma]$$

Ahora probaremos que  $x$  satisface (1.19).

En efecto sea

$$|f(s, x_s^{(m)}) - f(s, x_s)| \leq K \|x_s^{(m)} - x_s\| \leq K \sup_{\sigma \leq t \leq \sigma+A} |x^{(m)}(t) - x(t)|$$

es decir la convergencia de  $f(s, x_s^{(m)}) \rightarrow f(s, x_s)$  uniformemente en  $[\sigma, \sigma + A]$  implica que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\sigma}^t f(s, x_s^{(m)}) ds = \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds$$

a partir de (1.21) obtenemos (1.19).

Para probar la unicidad hacemos lo siguiente (1.18) para lo cual hacemos:

$$\begin{aligned} |x(t, \phi) - x(t, \psi)| &\leq |\phi(0) - \psi(0)| + \int_{\sigma}^t |f(s, x_s(\phi)) - f(s, x_s(\psi))| ds \\ &\leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^t \|x_s(\phi) - x_s(\psi)\| ds \end{aligned}$$

de la ecuación (1.18) resulta

$$\leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^t \max_{\sigma - \tau \leq \eta \leq s} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)| ds \quad \forall t \in [\sigma, \sigma + A]$$

Si hacemos

$$u(s) := \max_{\sigma - \tau \leq \eta \leq s} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)|, \quad \sigma \leq s \leq \sigma + A$$

entonces escogiendo  $\hat{t} \in [\sigma, t]$  se tiene que

$$\begin{aligned} |x(\hat{t}, \phi) - x(\hat{t}, \psi)| &\leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^{\hat{t}} u(s) ds \\ \rightarrow \max_{\sigma - \tau \leq \hat{t} \leq t} |x(\hat{t}, \phi) - x(\hat{t}, \psi)| &\leq \|\phi - \psi\| + K \max_{\sigma \leq \hat{t} \leq t} \int_{\sigma}^{\hat{t}} u(s) ds \\ \rightarrow u(t) &\leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^t u(s) ds \end{aligned}$$

(pues al ser  $u$  una función no negativa:  $\int_{\sigma}^{\hat{t}} u(s) ds \leq \int_{\sigma}^t u(s) ds \quad \forall \hat{t} : \sigma \leq \hat{t} \leq t$ )

Finalmente plicando la desigualdad 1.17 y se (1.18) se puede obtener

$$u(t) \leq \|\phi - \psi\| e^{K(t-\sigma)}$$

para  $t = \sigma + A$ .  $\square$

**Observación 1.3.10** Una diferencia importante entre las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) y las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) consiste en la naturaleza del valor inicial, en el caso de las EDO's es un escalar o un vector pero que el caso de las EDR es de naturaleza funcional, es decir tenemos un conjunto de valores de  $x$  sobre un intervalo dado,  $x_0 : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Observación 1.3.11** *Es importante notar que al considerar otra condición inicial las soluciones del nuevo problema de valor inicial pueden intersectarse con las soluciones del problema anterior. Para ilustrar este punto consideremos dos problemas que involucran la misma EDR pero con distinta condición inicial:*

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1), \\ x_0(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 0] \end{cases} \quad (1.24)$$

y

$$\begin{cases} z'(t) = -\frac{\pi}{2}z(t-1), \\ z_0(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad \forall t \in [-1, 0] \end{cases} \quad (1.25)$$

Así en el problema (1.24) la solución es la función nula ( $x \equiv 0$ ), y en el problema (1.25) para  $t \in [0, 1]$  tenemos

$$z'(t) = -\frac{\pi}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right) \quad \forall t \in [0, 1]$$

e integrando

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0(0) - \frac{\pi}{2} \int_0^t \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right) ds \quad \forall t \in [0, 1] \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) ds = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

en general si  $t \in [n-1, n]$ ,  $n \geq 1$

$$z(t) = z(n-1) + \frac{\pi}{2} \int_{n-1}^t \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) ds = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

así ambas soluciones se intersectan para  $t = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

## CAPÍTULO 2

### COMPORTAMIENTO CUALITATIVO DE LOS PVI CON EDR

Básicamente el estudio del comportamiento de la solución exacta relacionado al análisis de la existencia y unicidad de la solución de las EDR's comprende el análisis de la estabilidad global, la estabilidad local y las bifurcaciones.

El estudio de la estabilidad busca establecer la existencia de soluciones del tipo exponencial.

Supongamos que  $x(t) = ce^{\lambda t}$  es solución de (1.24) entonces derivando se obtiene

$$c\lambda e^{\lambda t} = -\frac{\pi}{2}ce^{\lambda(t-1)}, \lambda c \neq 0$$

o lo que es equivalente a buscar la solución de la ecuación no lineal:

$$Q(\lambda) = \lambda + \frac{\pi}{2}e^{-\lambda} = 0$$

esta ecuación es llamada *ecuación característica o transcendental* de (1.24).

La función  $Q(\lambda)$  es de tipo *quasi-polinomial* y determinar la solución conduce a un problema no lineal característica y los ceros de  $Q(\lambda)$  son llamados *valores característicos*

#### 2.1 Órbita de una EDR

En esta sección veremos algunos resultados relacionados a la función  $x_t$  a la EDR autónoma

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x_t) \\ x_0 &= \phi \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sea  $\mathcal{C}$  el espacio de estados, sea  $\phi \in \mathcal{C}$ , asumiendo que existe una única solución  $x(t, \phi)$  del problema de valor inicial 2.1, es extensible a toda la semirecta  $[0, +\infty[$ . Donde  $x_t : [0, +\infty) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es el flujo asociado al campo vectorial  $f$ .

$$(t, \phi) \mapsto x_t(\phi)$$



A continuación se dá el siguiente resultado en el cual se indica las propiedades que satisface  $x_t$

**Teorema 2.1.1** Sea la función  $x_t : [0, +\infty) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , donde  $x_t(\phi)$  representa el

$$(t, \phi) \mapsto x_t(\phi)$$

estado de la solución en el tiempo  $t$ .

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- (i) En  $t = 0$ ,  $x_0(\phi) = \phi$
- (ii)  $x_t(x_s(\phi)) = x_{t+s}(\phi)$ ,  $\forall t, s \geq 0$
- (iii)  $x_t$  es continua en  $[0, +\infty) \times \mathcal{C}$

**Prueba:**

- (i) Esto se cumple por la definición de estado.
- (ii) Sea  $s \geq 0$ , definamos  $y(t) := x(t+s, \phi)$  entonces

$$x_{t+s}(\theta, \phi) = x(t+s+\theta, \phi) = y(t+\theta) = y_t(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

es decir  $x_{t+s}(\phi) = y_t$ ,  $\forall t \geq -s$ .

Derivando se tiene que

$$y'(t) = x'(t+s) = f(x_{t+s}) = f(y_t)$$

se tendría como condición inicial  $y_{-s} = \phi$ .

En particular  $x_s(\phi) = y_0$

Entonces  $y(t)$  y  $x(t, x_s(\phi))$  satisfacen al problema de valor inicial, entonces como la solución debe ser única luego

$$x(t, x_s(\phi)) = y(t) = x(t+s, \phi) \quad \forall t \geq 0$$

- (iii) Dados  $\phi, \psi \in \mathcal{C}$ . Para probar la continuidad de  $x_t$  se tomará en cuenta el resultado 1.18 por lo que

$$\begin{aligned} \|x_t(\phi) - x_t(\psi)\| &= \max_{-\tau+t \leq \eta \leq t} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)| \\ &\leq \max_{-\tau \leq \eta \leq A} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)| \\ &\leq \|\phi - \psi\| e^{KA}, \|\phi\|, \|\psi\| \leq M \end{aligned}$$

□

**Definición 2.1.2 (Órbita)** Sea  $\mathcal{C}$  un espacio de estados, sea  $\phi \in \mathcal{C}$  definimos la órbita de  $\phi$  como el conjunto

$$\mathcal{O} = \{x_t(\phi) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}$$

dicho conjunto representa la **trayectoria** de  $\phi$ .

**Definición 2.1.3 (Punto fijo)** Sea  $\mathcal{C}$  un espacio de estados,  $e \in \mathcal{C}$  una función de estado (estacionario, crítico o de equilibrio), entonces  $e$  es un punto fijo de  $x_t$  si su órbita se reduce a un punto  $\mathcal{O}(e) = \{e\}$

**Proposición 2.1.4**  $e$  es un punto fijo de  $x_t$  si y sólo si  $e$  es una función constante tal que  $f(e) = 0$ .

**Prueba:** Si  $x_t$  es un punto de equilibrio entonces  $x_t(e) = e, \forall t \geq 0$  esto es  $x(t + \theta, e) = e(\theta), \forall t \geq 0$  y  $\theta \in [-\tau, 0]$ .

Haciendo  $\theta = 0$ , tenemos  $x(t, e) = e(0), \forall t \geq 0$ , es decir  $x(t)$  es constante,  $x'(t) = 0$  y por ello  $f(e) = 0$ . Fijemos  $\theta$  y escojamos  $t \geq -\theta$  entonces  $e(\theta) = x(\theta + t, e) = x(t, e) = e(0)$ , es decir  $e$  es constante. □

**Definición 2.1.5 (Órbita periódica)** La órbita de  $\phi$  es **órbita periódica** si existe  $s > 0$  tal que  $x_{t+s}(\phi) = x_t(\phi), \forall t \geq 0$ .

**Definición 2.1.6 (Conjunto  $\omega$ -límite)** Sea  $\mathcal{C}$  un espacio de estados. El **conjunto límite omega** de  $\mathcal{O}(\phi)$  está definido como

$$\begin{aligned} \omega(\phi) &= \{\psi \in \mathcal{C} : x_{t_n}(\phi) \rightarrow \psi \text{ si } t_n \rightarrow +\infty\} \\ &= \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} x_s(\phi)} \end{aligned}$$

**Definición 2.1.7 (Conjunto invariante o positivamente invariante)** Sea  $\mathcal{C}$  un espacio de estados. Un conjunto  $A \subset \mathcal{C}$  se dice **positivamente invariante** si  $x_t(\phi) \in A$  para cualquier  $\phi \in A$  y  $t \geq 0$ .

Se dice que  $A$  **invariante** si es positivamente invariante y para cualquier  $\phi \in A$  existe  $\psi \in A$  con  $s \geq t \geq 0$ , tal que  $x_t(\psi) = \phi$ .

## 2.2 Criterios de Estabilidad

**Definición 2.2.8 (Soluciones estables)** Una solución  $\hat{u}$  de equilibrio se dice **estable** si para  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $u$  es cualquier solución tal que  $\|\hat{u} - u(t)\| \leq \delta$  para  $s - 1 \leq t \leq s$  entonces  $\|\hat{u} - u(t)\| \leq \epsilon$  para  $t > s$ .

**Definición 2.2.9 (Soluciones asintóticamente estable)** La solución  $\hat{u}$  se dirá **asintóticamente estable** si es estable y  $\|\hat{u} - u(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . En caso contrario se diría que es inestable.

### 2.2.1 Estabilidad de las EDR lineales

Consideremos el problema de valor inicial con la EDR

$$x'(t) = L(x_t), \quad x_0 = \phi \quad (2.2)$$

donde  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$  es un operador lineal acotado. Es decir existe  $K > 0$  tal que  $|L(\phi)| \leq K \|\phi\|$ ,  $\phi \in \mathcal{C}$ .

Sea  $\mathcal{C}$  el espacio de estados, sea  $K$  la constante de Lipschitz, consideraremos las soluciones que satisfacen la siguiente desigualdad

$$\|x_t(\phi)\| \leq \|\phi\| e^{Kt}, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

A continuación buscaremos soluciones del problema 2.2 de la forma  $x(t) = e^{\lambda t}v$  donde  $\lambda$  es un número complejo  $v \in \mathbb{C}^n$ . Como  $x_t(\theta) = e^{\lambda t}e^{\lambda\theta}v$ , entonces al sustituir en la ecuación 2.2 se tiene que

$$\lambda v = L(e_\lambda v),$$

donde  $e_\lambda(\theta) := e^{\lambda\theta}$ ,  $-\tau \leq \theta \leq 0$ .

Sea  $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$  y  $L_i(e_\lambda v) = \sum_j L_i(e_\lambda e_j)$ , donde  $\{e_j\}$  es la base canónica de  $\mathbb{C}^n$ , así la ecuación anterior puede ser escrita como

$$[\lambda I - A(\lambda)]v = 0$$

donde  $A(\lambda)_{i,j} = L_i(e_\lambda e_j)$ .

Consideremos como **ecuación característica** para  $\lambda$  a

$$Q(\lambda) := \det(\lambda I - A(\lambda)) \quad (2.4)$$

**Definición 2.2.10 (Función analítica)** Una función compleja  $Q$  en un conjunto abierto  $G \in \mathbb{C}$  es llamada analítica si  $Q'$  existe y es continua en cada punto de  $G$ .

**Teorema 2.2.11** La función  $Q$  definida en 2.4 es analítica, además para cada  $a \in \mathbb{R}$  existen a lo más un número finito de raíces de  $Q$  satisfaciendo  $\Re(\lambda) \geq a$ .

**Prueba:**

- Sean  $e_\lambda e_j$  elementos de la base del espacio solución del problema de valor inicial. Veremos que  $L_i(e_\lambda e_j)$  es diferenciable. Primero notemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e_{\lambda+h} - e_\lambda}{h} = \lambda e_\lambda$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_i(e_{\lambda+h} e_j) - L_i(e_\lambda e_j)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} L_i \left( \left[ \frac{e_{\lambda+h} - e_\lambda}{h} \right] e_j \right) = L_i(\lambda e_\lambda e_j)$$

$$\frac{d}{d\lambda} L_i(e_\lambda e_j) = \lambda L_i(e_\lambda e_j)$$

- Si  $\lambda$  satisface 2.4 entonces es un valor propio de  $A(\lambda)$  y por tanto

$$|\lambda| \leq \|A(\lambda)\|$$

por otra parte

$$\left| A(\lambda)_{ij} \right| = |L_i(e_\lambda e_j)| \leq K \|e_\lambda e_j\| \leq K \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} |e^{\theta \Re(\lambda)}| \leq K \max \{e^{-\tau \Re(\lambda)}, 1\}$$

como  $\Re(\lambda) \geq a$  entonces  $\left| A(\lambda)_{ij} \right| \leq M := K \max \{e^{-\tau a}, 1\}$  entonces

$$|\lambda| \leq \|A(\lambda)\| \leq n^2 M$$

Si  $G := \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \Re(\lambda) \geq a\}$  fuera infinito entonces tendría un punto de acumulación, y entonces  $Q$  sería idénticamente nula. Por tanto  $G$  es finito.  $\square$

**Definición 2.2.12 (Semigrupo de operadores)** Definimos un operador  $T(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , como  $T(t)\phi = x_t(\phi)$  para cada  $\phi \in \mathcal{C}, t \geq 0$ .

Así también definimos la norma de este operador como

$$\|T(t)\| := \sup \{ \|T(t)\phi\| : \|\phi\| = 1 \} \leq e^{Kt}$$

y tambien el producto de dos operadores y de 2.1.1:

$$\begin{aligned} T(t)T(s) &= T(t+s), \forall t, s \geq 0 \\ T(0) &= I \end{aligned}$$

Definimos una aplicación continua  $t \mapsto T(t)\phi$  sobre  $[0, +\infty[$ . Entonces se define como semigrupo de operadores fuertemente continuos a la familia de operadores lineales y acotados  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Notación.-** En adelante denotaremos por  $\lambda_{\max} := \max_{\lambda \in \mathbb{C}: Q(\lambda)=0} \Re(\lambda)$ .

**Proposición 2.2.13** Si  $\Re(\lambda) < 0$  para todas las raíces de 2.4, entonces para  $\lambda_{\max} < 0$  y  $x = 0$  2.2 es asintóticamente estable.

En efecto para cualquier  $a > -\lambda_{\max}$  existe un  $K \geq 1$  tal que

$$\|T(t)\phi\| = \|x_t(\phi)\| \leq Ke^{-at}, t \geq 0$$

Ver la demostración en [7].

**Proposición 2.2.14** Para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $K_\epsilon \geq 1$ :

$$\|T(t)\phi\| \leq K_\epsilon \exp((\lambda_{\max} + \epsilon)t) \|\phi\|, \forall t \geq 0, \phi \in \mathcal{C}$$

Ver la demostración en [7].

**Proposición 2.2.15** Sea  $Q(\lambda) = 0$  la ecuación característica correspondiente a la ecuación lineal  $z'(t) = L(z_t)$ . Si  $\lambda_{\max} < 0$  entonces  $\hat{x}_0$  es un estado estacionario localmente asintóticamente estable de 2.5. Es decir existe  $b > 0$  tal que si

$$\|\phi - \hat{x}_0\| < b \Rightarrow \|x_t(\phi) - \hat{x}_0\| \leq K \|\phi - \hat{x}_0\| e^{\lambda_{\max}t/2}, \forall t \geq 0$$

Ver [7].

## 2.2.2 Estabilidad de las EDR no lineales

Consideremos la EDR no lineal

$$x'(t) = f(x_t) \tag{2.5}$$

Suponemos que tiene un estado estacionario  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y denotamos como  $\hat{x}_0 \in \mathcal{C}$  a la función constante igual a  $x_0$ :

$$f(\hat{x}_0) = 0$$

Sea

$$x = \hat{x}_0 + y$$

tal que  $y$  satisface

$$y'(t) = f(\hat{x}_0 + y_t) \quad (2.6)$$

Para entender como es el comportamiento de las soluciones de 2.5 que empiezan cerca a  $\hat{x}_0$  y analizar así su estabilidad de la ecuación lineal 2.5 es suficiente estudiar a las soluciones de la ecuación 2.6 que empiezan cerca a  $y \equiv 0$ , asumiendo que:

$$f(\hat{x}_0 + \phi) = L(\phi) + g(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}$$

donde  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un operador lineal acotado, es decir existe  $K > 0$  tal que  $|L(\phi)| \leq K \|\phi\|$ ,  $\phi \in \mathcal{C}$  y que  $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface la condición

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{|g(\phi)|}{\|\phi\|} = 0$$

### 2.2.3 Estabilidad Global de las EDR: Criterio de Mikhailov

Para analizar la estabilidad global de las EDR se utiliza diversos criterios como en [25] equivale a encontrar el rango de valores en los que deben de estar los parámetros de proporcionalidad y de retardo para el que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  se acerque a  $K$ , en un nivel de saturación ( $z(t) = -\ln(x(ht)/K)$ ) que conduce a la ecuación 1.14.

En el presente trabajo consideraremos para el análisis de la estabilidad global de las EDR el criterio de Mikhailov [5] el cual está basado en los siguientes resultados.

**Definición 2.2.16 (Caminos homotópicos)** Sea  $\mathbb{C}$  un espacio topológico. Se denomina camino a una aplicación continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Los puntos  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma(1) = x_1$  son los extremos inicial y final del camino. Diremos que el camino es un lazo si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . En un lazo el punto inicial y final se llama la base del lazo.

Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo y  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$  dos caminos cerrados en  $G$ . Decimos que tales caminos son homotópicos en  $G$  si existe una aplicación continua  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  tal que para cada  $s$ :  $\Gamma(\cdot, s)$  es un curva cerrada con  $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$  y  $\Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$ .

Un camino cerrado en  $G$  es homotópico a 0 en  $G$ , si es homotópico a un camino constante.

**Definición 2.2.17 (Índice de una curva)** Sea  $\gamma$  un curva cerrada suave a trozos en  $\mathbb{C}$  y  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ . El índice de  $\gamma$  en  $a$  esta definida como:

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

**Proposición 2.2.18** El índice  $n(\gamma; a)$  es un entero para todo  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ .

**Prueba:** Asumamos que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  y definimos

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\exp(-g(t)) \gamma(t)] &= \exp(-g(t)) \gamma'(t) - g'(t) \exp(-g(t)) \gamma(t) \\ &= \exp(-g(t)) [\gamma'(t) - g'(t) \gamma(t)] \\ &= \exp(-g(t)) \left[ \gamma'(t) - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \gamma(t) \right] \\ &= \exp(-g(t)) \gamma'(t) \left[ 1 - \frac{\gamma(t)}{\gamma(t) - a} \right] \\ &= \exp(-g(t)) \gamma'(t) \left[ \frac{-a}{\gamma(t) - a} \right] \\ &= -\exp(-g(t)) g'(t) a = a \frac{d}{dt} \exp(-g(t)) \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \exp(-g(t)) [\gamma(t) - a] = 0$$

e integrando entre 0 y  $t$

$$\exp(-g(t)) [\gamma(t) - a] = \gamma(0) - a$$

tomando  $t = 1$ ,

$$\exp(-2\pi i n(\gamma; a)) (\gamma(1) - a) = \gamma(0) - a$$

y como la curva es cerrada entonces  $\gamma(1) = \gamma(0)$ , lo cual implica que  $\exp(-2\pi i n(\gamma; a)) = 1$ .  $\square$

Consideremos ahora una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y las imágenes de una función  $Q$  a través de la curva, definimos la razón de cambio para  $Q(\gamma(s))$  al pasar desde  $s = a$  hasta  $s = t \leq b$  como:

$$\Delta_{\gamma} := \frac{1}{i} \int_a^t \frac{Q'(\gamma(t))}{Q(\gamma(t))} \gamma'(t) dt$$

**Teorema 2.2.19** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  una región,  $\gamma$  una curva homotópica a 0 en  $G$  y  $Q$  una función analítica en  $G$  con ceros  $a_1, a_2, \dots, a_m$  repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces se tiene la relación

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q'(z)}{Q(z)} dz = \sum_{k=1}^m n(\gamma; a_k).$$

La demostración se puede ver en [7].

### Principio del argumento

Examinando el teorema vemos que la integral izquierda puede escribirse como:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q'(z)}{Q(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{Q \circ \gamma} \frac{1}{w} dw = n(Q \circ \gamma; 0)$$

es decir el número de vueltas que  $Q \circ \gamma$  le da a 0, entonces  $\Delta_{\gamma} \arg Q := 2\pi n(Q \circ \gamma; 0)$  donde  $\arg Q$  representa el argumento de  $Q$  y

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg Q = \sum_{k=1}^m n(\gamma; a_k)$$

Sea  $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función característica quasipolinomial para un sistema de EDR's:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^m A_k(z) e^{-h_k z}, \quad (2.7)$$

donde  $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$ ,  $A_k(z) = \sum_{j=0}^{n_k} a_{jk} z^j$ ,  $a_{jk} \in \mathbb{R}$ ,  $n_0 \geq 1$  y  $n_k < n_0$ , para  $k = 1, \dots, m$ .

### Criterio de Mikhailov

**Teorema 2.2.20** Si  $Q(z)$  definida por 2.7 no tiene raíces en el eje imaginario, entonces el número  $N$  de raíces en el semiplano complejo derecho es igual a  $N = \frac{1}{2}n_0 - \frac{1}{\pi}\Delta$ , donde

$$\Delta = \Delta_{\omega \in [0, +\infty)} \arg Q(i\omega), \quad (2.8)$$

Cuando  $\omega$  se incrementa de 0 a  $+\infty$ ,  $\Delta$  denota el cambio del argumento del vector  $Q(i\omega)$  en la dirección positiva del plano complejo.

**Prueba:** Sea  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_+$  una curva orientada en el plano complejo como en la figura 2.1, es decir  $C_0$  es el intervalo  $[-\rho, \rho]$  en el eje imaginario y  $C_+$  constituye la



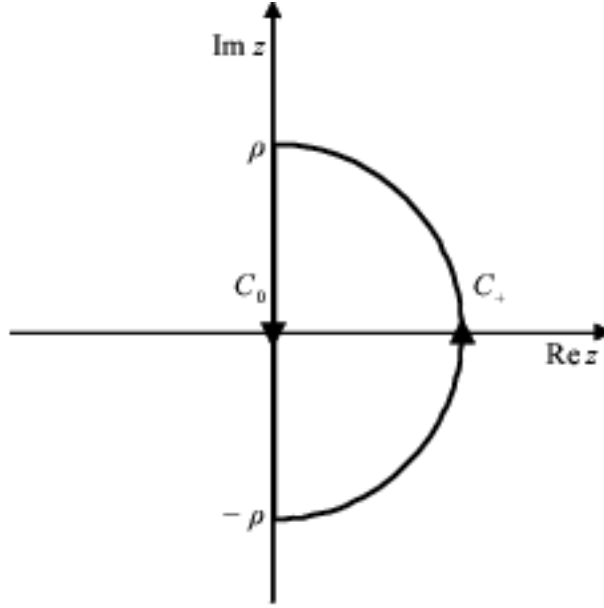


Figura 2.1: Gráfica de  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_+$

semi-circunferencia de radio  $\rho$  en el lado derecho del plano complejo. El principio del argumento implica que:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg Q = N_c$$

donde  $\Delta_\gamma \arg Q$  denota el cambio del argumento de  $Q$  a lo largo de  $\gamma$  y  $N_c$  el número de ceros de  $Q$  en el interior de la curva. Notamos que

$$\Delta_\gamma \arg Q = \Delta_{\gamma_0} \arg Q + \Delta_{\gamma_+} \arg Q$$

y

$$\Delta_{\gamma_0} \arg Q = \arg Q(-i\rho) - \arg Q(i\rho)$$

pero

$$\begin{aligned} \overline{Q(-i\rho)} &= \overline{\sum_{k=0}^m A_k(-i\rho) e^{ih_k\rho}} = \sum_{k=0}^m \overline{A_k(-i\rho) e^{ih_k\rho}} \\ &= \sum_{k=0}^m \overline{A_k(-i\rho) e^{ih_k\rho}} = \sum_{k=0}^m A_k(\overline{-i\rho}) e^{-ih_k\rho} \\ &= \sum_{k=0}^m A_k(i\rho) e^{-ih_k\rho} = Q(i\rho) \end{aligned}$$

lo cual indica que  $\arg Q(-i\rho) = -\arg Q(i\rho)$  entonces

$$\Delta_{\gamma_0} \arg Q = -2 \arg Q(i\rho) \quad \forall \rho > 0$$

Sean  $\Delta_{\gamma_0}^{+\infty}, \Delta_{\gamma_+}^{+\infty}$  el cambio del argumento de  $Q$  cuando  $\rho \rightarrow +\infty$ , entonces en el límite:

$$\Delta_{\gamma_0}^{+\infty} \arg Q = -2 \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \arg Q(i\rho)$$

y ya que  $\arg Q(i\rho)|_{\rho=0} = 0$  (pues  $Q(0) = \sum_{k=0}^m a_{0k} \in \mathbb{R}$ ) tenemos :

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_0}^{+\infty} \arg Q &= -2 \left( \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \{ \arg Q(i\rho) \} - \arg Q(i\rho)|_{\rho=0} \right) \\ &= -2 \Delta_{\rho \in [0, +\infty)} \arg Q(i\omega) \\ &= -2\Delta \end{aligned}$$

Veamos que ocurre con  $\Delta_{\gamma_+} \arg Q$ :

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_+} \arg Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \frac{Q'(z)}{Q(z)} dz$$

parametrizando  $\gamma_+$  con  $z(t) = \rho e^{it}, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{\gamma_+} \frac{Q'(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{izQ'(z)}{Q(z)} \Big|_{z=\rho e^{it}} dt$$

como

$$\left| e^{-h_k z} \Big|_{z=\rho e^{it}} \right| = \left| e^{-h_k \rho \cos(t) - ih_k \rho \sin(t)} \right| = e^{-h_k \rho \cos(t)}$$

y ya que  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  entonces  $\left| e^{-h_k z} \Big|_{z=\rho e^{it}} \right| \leq 1$

$$\left| Q(z) \Big|_{z=\rho e^{it}} \right| \leq \sum_{k=0}^m \left| A_k(z) \Big|_{z=\rho e^{it}} \right|$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{izQ'(z)}{Q(z)} \Big|_{z=\rho e^{it}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \sum_{j=1}^{n_0} a_{j0} j z^{j-1}}{\sum_{j=0}^{n_0} a_{j0} j z^j} \Big|_{z=\rho e^{it}} dt$$

entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Delta_{\gamma_+} \arg Q = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{n_0 a_{n_0} \rho^{n_0} e^{in_0 t} + \imath(\rho^{n_0})}{a_{n_0} \rho^{n_0} e^{in_0 t} + \imath(\rho^{n_0})} dt$$

donde  $\imath(x)$  satisface que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\imath(x)}{x} = 0$ . Entonces

$$\Delta_{\gamma_+}^{+\infty} \arg Q = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Delta_{\gamma_+} \arg Q = n_0 \pi$$

y se obtiene que

$$2\pi N_c = -2\Delta + n_0 \pi \quad \square$$

**Nota.-** La gráfica de curva descrita por  $Q(i\omega)$  es llamada hodógrafo de Mikhailov.

**Nota.-** En lo sucesivo diremos que la función quasipolinomial  $Q$  es estable si y sólo si tiene todos sus ceros en el semiplano complejo izquierdo (es decir la parte real de sus raíces son negativas).

**Corolario 2.2.21** Si  $Q(z)$  no tiene ceros en el eje imaginario, entonces  $Q$  es estable si y solo si  $\Delta = \frac{n_0\pi}{2}$ .

Para aplicar el criterio de Mikhailov es necesario conocer el comportamiento del vector  $Q(i\omega)$  para  $\omega \in [0, +\infty[$

### Aplicación del criterio de Mikhailov

Consideremos como  $W(\lambda)$  la función característica quasi-polinomial de una EDR la cual tiene la forma siguiente

$$W(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau},$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios con  $\text{grad } Q < \text{grad } P$  y la ecuación característica no tiene raíces en el eje imaginario. Estudiaremos el cambio total del argumento del vector  $W(i\omega)$  cuando  $\omega$  se incrementa de 0 a  $+\infty$ . Si el cambio total del argumento del vector  $W(i\omega)$  es igual a  $\frac{\pi}{2} \text{grad } P$  mediante el criterio de Mikhailov se dice que existe estabilidad, en caso contrario el sistema será inestable.

En particular si aplicamos este resultado a la ecuación 1.24, donde  $P(\lambda) = \lambda$  y  $Q(\lambda) = \frac{\pi}{2}e^{-\lambda}$ , de donde vemos que  $\text{grad } P = 1$ .

Ahora faltaría ver si se cumple la siguiente relación

$$W(i\omega)|_{\omega=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

En efecto

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= i\omega + \frac{\pi}{2}e^{-i\omega} \\ &= i\omega + \frac{\pi}{2} [\cos(-\omega) + i \text{sen}(-\omega)] \\ &= \frac{\pi}{2} \cos(\omega) + i \left[ \omega - \frac{\pi}{2} \text{sen}(\omega) \right] \end{aligned}$$

intentemos calcular el argumento de  $W(i\omega)$  cuando  $\omega \rightarrow +\infty$

Calculando los interceptos con el eje imaginario:  $\cos(\omega) = 0 \rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , podemos

construir una sucesión  $\{\omega_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\omega_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , de manera que

$$\begin{aligned} W(i\omega_k) &= i \left[ \omega_k - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \omega_k \right] \\ &= i \left[ \omega_k - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right] \\ &= i \left[ \omega_k - \frac{\pi}{2} \cos k\pi \right] \\ &= i \left[ \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{2} (-1)^k \right] \end{aligned}$$

si examinamos la sucesión

$$\mathfrak{S}_k = \Im(W(i\omega_k)) = \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{2} (-1)^k$$

vemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{k+1} - \mathfrak{S}_k &= \pi - \frac{\pi}{2} (-1)^{k+1} + \frac{\pi}{2} (-1)^k \\ &= \pi + \pi (-1)^k = \pi \left[ 1 + (-1)^k \right] \geq 0 \end{aligned}$$

es decir se tiene una sucesión cuyos términos de índice par forman una subsucesión estrictamente creciente.

Ahora basta tomar los términos de índice par también en  $\omega_k$  para obtener que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(W(i\omega)) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \arg(W(i\omega_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \arg(i\mathfrak{S}_k) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

A continuación generamos la curva de comportamiento de  $\mathfrak{S}_k$  que podemos observar en

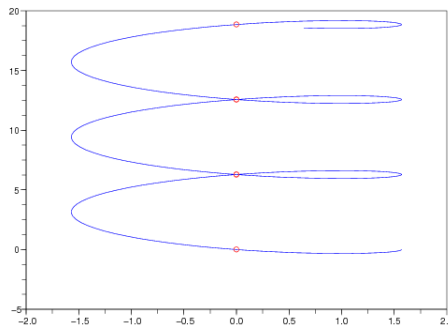


Figura 2.2: Gráfica de puntos  $\mathfrak{S}_k$  y la curva  $W(i\omega)$

la figura 2.2 cuando  $W(\pm i\omega_0) = 0$ .

```
k=0:1:5;
w=[0:0.1:20];
plot(pi/2*cos(w), w-pi/2*sin(w), 'b')
hold on
plot(zeros(k), pi/2+k*pi-pi/2*sin(pi/2+k*pi), 'ro')
```

## 2.3 Bifurcación de Hopf

Para entender que es un bifurcación veamos el siguiente ejemplo proveniente de la ecuación logística de Verhulst que modela el crecimiento de la población  $N$ :

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

donde podemos tomar una sucesión  $t_{n+1} = t_n + 1$  y aproximar la derivada por una diferencia hacia adelante:

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = rN(t_n) \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right)$$

reordenando

$$N(t_{n+1}) = (1+r)N(t_n) \left(1 - \frac{r}{(1+r)K}N(t_n)\right)$$

es decir podemos considerar una sucesión definida por

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad n \geq 0, x_0, r \in R$$

asumamos que  $r \in (0, 1]$ , y  $x_0 \in (0, 1)$  entonces

$$x_{n+1} - x_n = rx_n(1 - x_n) - x_n = rx_n \left(\frac{r-1}{r} - x_n\right)$$

pero por lo supuesto  $-\frac{1}{r} < \frac{r-1}{r} \leq 0$  y como cada  $x_n$  es positivo entonces esta sucesión será estrictamente decreciente y por lo tanto es convergente a la solución estacionaria  $\hat{x} = 0$ , es decir esta sucesión es estable.

El siguiente código nos informa sobre el comportamiento de  $x_n$  para  $r > 1$  específicamente para  $r \in \{2, 9; 3; 3, 1\}$  y que se muestra en las gráficas 2.3–2.5

```
x(1)=0.3;
r=[2.9, 3, 3.1];
N=30;
for i=1:N-1
x(i+1)=r(1)*x(i)*(1-x(i));
end
figure(1),plot([1:N],x,'ro')
for i=1:N-1
x(i+1)=r(2)*x(i)*(1-x(i));
end
figure(2),plot([1:N],x,'ro')
for i=1:N-1
x(i+1)=r(3)*x(i)*(1-x(i));
```

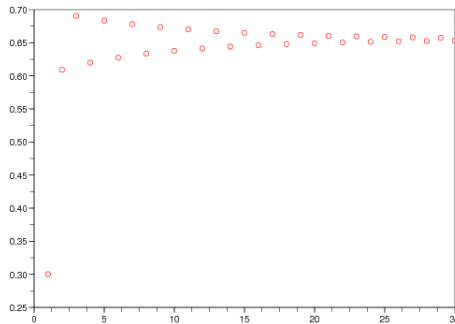


Figura 2.3: Gráfica de  $x_n$  para  $r = 2, 9$

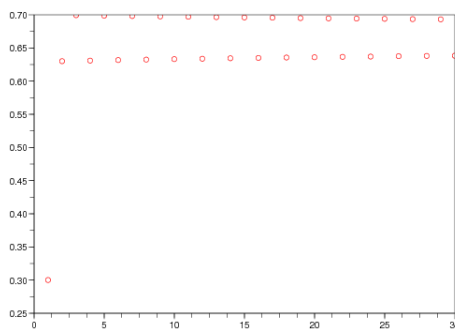


Figura 2.4: Gráfica de  $x_n$  para  $r = 3$

```
end
figure(3), plot([1:N], x, 'ro')
```

Entendemos por bifurcación al cambio cualitativo del comportamiento de la solución cuando un parámetro atraviesa un valor crítico.

Consideremos la ecuación  $\dot{x} = f(x, \mu)$ , donde  $f \in C^1$ . Sea  $x_0(\mu)$  un punto fijo ( $f(x_0, \mu) = 0$ ). Escogiendo  $x = x_0 + \xi$ ,  $|\xi| \ll 1$  podemos escribir  $\dot{x} = f(x, \mu) = f(x_0, \mu) + A(\mu)\xi + O(|\xi|^2)$ , donde  $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_0}$ , como además  $\dot{x} = \dot{\xi}$  entonces

$$\dot{\xi} = A(\mu)\xi + O(|\xi|^2)$$

es decir hemos establecido el comportamiento del error cerca un punto fijo. Si  $A > 0$ , entonces  $|\xi|$  crece y nos alejamos del punto fijo (inestabilidad), en cambio si  $A < 0$  el error decrecerá y tendremos estabilidad. Es común que cuando  $\mu$  toma valores donde  $A = 0$  la solución cambie.

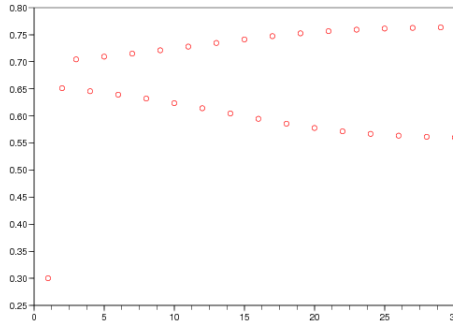


Figura 2.5: Gráfica de  $x_n$  para  $r = 3, 1$

### Ejemplo 2.3.1

$$\dot{x} = x^2 - \mu$$

Donde podemos distinguir los siguientes casos

- $\mu < 0$  En este caso no existen punto fijos.
- $\mu > 0$  Aquí tenemos como puntos fijos a:
  - $\bar{x} = +\sqrt{\mu} \Rightarrow A = 2\sqrt{\mu} > 0$  (inestabilidad)
  - $\bar{x} = -\sqrt{\mu} \Rightarrow A = -2\sqrt{\mu} < 0$  (estabilidad)
- $\mu = 0$ , el punto fijo será  $\bar{x} = 0$ , pero en este caso  $A = 0$ .

Consideremos la familia uni-parametrica de EDR's

$$x'(t) = F(x_t, \mu) \tag{2.9}$$

donde  $F : \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es dos veces diferenciables para ambos argumentos y  $x = 0$  es un estado estacionario para todos los valores de  $\mu$ :

$$F(0, \mu) \equiv 0$$

Linealizamos  $F$  alrededor de  $\phi \equiv 0$

$$F(\phi, \mu) = L(\mu)\phi + f(\phi, \mu)$$

donde  $L(\mu) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un operador lineal acotado y  $f$  satisface que

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{|f(\phi, \mu)|}{\|\phi\|} = 0$$

La ecuación característica asociada a  $L$  es

$$Q(\mu, \lambda) := \det(\lambda I - A(\mu, \lambda)) = 0, \quad A_{ij}(\mu) := L(\mu)_i(e_\lambda e_j)$$

y asumimos que:

$$\exists a > 0 : Q(\mu, \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)) = 0, \alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0, \omega(\mu) > 0 \quad (2.10)$$

y las demás raíces tienen partes reales estrictamente negativas  $\forall |\mu| < a$

**Teorema 2.3.22 (Hopf)** *Asumiendo que se satisface 2.10. Existe  $\delta > 0$  y funciones  $\mu(\epsilon)$  y  $T(\epsilon)$  definidas para  $0 \leq \epsilon \leq \delta$  y satisfaciendo que  $\mu(0) = 0$ ,  $T(0) = \frac{2\pi}{\omega(0)}$ , tal que para  $\epsilon \in (0, \delta)$ , la ecuación 2.9 tiene una solución periódica no constante  $p(t, \epsilon) = p(t + T(\epsilon), \epsilon)$  de periodo  $T(\epsilon)$  para cada valor del parámetro  $\mu = \mu(\epsilon)$ . Además existen  $\mu_0, \beta_0 > 0$  tal que si la ecuación 2.9 tiene una solución periódica no constante  $x(t)$  para algún  $\mu : |\mu| < \mu_0$  y  $\max_t |x(t)| < \beta_0$ , entonces  $\mu = \mu(\epsilon)$  y  $x(t) = p(t + \theta, \epsilon)$  para algún  $\epsilon \in ]0, \delta[$  y algún  $\theta$ . Si  $F$  es analítica entonces:*

$$\begin{aligned} \mu(\epsilon) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \epsilon^{2k} \\ T(\epsilon) &= \frac{2\pi}{\omega(0)} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \nu_k \epsilon^{2k} \right] \\ p(t, \epsilon) &= \epsilon q(t, \epsilon) \end{aligned}$$

donde  $q(t, 0)$  es una  $\frac{2\pi}{\omega(0)}$  solución periódica de  $q' = L(0)q$ . Si  $\mu \neq 0$  entonces para  $\epsilon$  pequeño,  $p(t, \epsilon)$  existe para  $\mu = \mu_1 \epsilon^2 + O(\epsilon^4)$  positivo si  $\mu_1 > 0$  y negativo si  $\mu_1 < 0$ . Es asintóticamente estable si  $\alpha'(0) \mu_1 > 0$  e inestable si  $\alpha'(0) \mu_1 < 0$ .

Aplicaremos los resultados anteriores en el estudio de la ecuación con retardo

$$x'(t) = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right)$$

donde  $r > 0$  y  $K > 0$  denotan la tasa de reproducción neta y la capacidad de adaptación de algunas especies. Notemos que hay dos soluciones estacionarias  $x_1 = 0$  y  $x_2 = K$ . Así tendremos

- para  $x_1$  la ecuación lineal será

$$x'(t) = rx(t - \tau)$$

la ecuación característica será

$$\lambda - re^{-\lambda\tau} = 0$$



- Para  $x_2$  la ecuación lineal será

$$x'(t) = -rx(t - \tau)$$

la ecuación característica será

$$\lambda + re^{-\lambda\tau} = 0$$

Escribiendo la ecuación característica como

$$F(\lambda, \mu) := \lambda + (\pi/2 + \mu)e^{-\lambda\tau} = 0$$

encontramos que:

$$\begin{aligned} F(i\pi/2, 0) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(i\pi/2, 0) &= 1 + (\pi/2)i \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}(i\pi/2, 0) &= -i \end{aligned}$$

por el **teorema de la función implícita** podemos resolver  $F = 0$  para  $\lambda$ , es decir  $\lambda$  dependerá implícitamente de  $\mu$

$$\lambda(\mu) = \lambda_1(\mu) + i\lambda_2(\mu)$$

satisfaciendo  $\lambda(0) = (\pi/2)i$  y

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(0) = -F_\mu/F_\lambda = \frac{i}{1 + (\pi/2)i} = \frac{(\pi/2) + i}{1 + (\pi/2)^2}$$

entonces

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu}(0) = \frac{\pi/2}{1 + (\pi/2)^2}$$

## 2.4 Positividad de las soluciones para las EDR

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = rf(x(t-1)), & \text{para } t > 0 \\ x(t) = x^0(t) & \text{para } t \in [-1, 0] \end{cases} \quad (2.11)$$

donde  $r > 0$ , y la función  $f$  satisface lo siguiente:

- (i)  $f \in C^1(\mathbb{R})$

- (ii)  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$
- (iii)  $f(0) = f(1) = 0$
- (iv)  $f'(x) < 0$ , si  $x \geq 1$
- (v)  $f'(x) > 0$ , si  $x \leq 0$
- (vi)  $f$  es unimodal. Existe  $\bar{x} \in (0, 1)$  tal que  $f(x) < f(\bar{x}) = f_{\max}$  para todo  $x \neq \bar{x}$ .

En la siguiente sección se estudiará el comportamiento de positividad de las soluciones del problema mencionado anteriormente.

### 2.4.1 Positividad de las soluciones

En esta sección consideramos la condición inicial  $x_0$  como no negativa. Sea  $n \in \mathbf{N}$ , entonces integrando 2.11 obtenemos:

$$x(t) = x(n) + r \int_n^t f(x(s-1)) ds$$

con  $t \in [n, n+1]$ . Es decir primero integramos sobre  $[0, 1]$ , luego sobre  $[1, 2]$  y así sucesivamente hasta llegar a  $n$ .

Por ejemplo para  $n = 0$

$$x(t) = x^0(0) + r \int_{-1}^{t-1} f(x^0(s)) ds \quad \forall t \in [0, 1]$$

y así obtenemos la solución sobre  $[0, 1]$ . Si comenzamos con  $x^0(t) \in [0, 1]$  es fácil notar que la solución en el intervalo  $[0, 1]$  es positiva. En general si  $0 \leq x(t) \leq 1$  en  $[n-1, n]$  entonces  $x(t) \geq 0$  en  $[n, n+1]$ . Si  $x(t) \leq 1$  la no negatividad está garantizada.

Supongamos ahora que  $\exists \bar{t} > 0 : x(\bar{t}) > 1$ , entonces el conjunto  $A = \{t \in ]0, +\infty[ : x(t) > 1\}$  es no vacío y acotado inferiormente por tanto existe  $t_0 = \inf A$ , aquí tenemos opciones, o bien  $x(t_0) = 1$  o  $x(t_0) > 1$ , la segunda opción implica que  $t_0 > 0$  y gracias a la continuidad de  $x$  existe un  $0 < s < t_0$  tal que  $x(s) > 1$  es decir  $s \in A$  lo cual sería una contradicción. Por tanto  $x(t_0) = 1$ .

Analicemos el comportamiento de  $x$  en el intervalo  $[t_0, t_0 + 1]$

$$x(t) = 1 + r \int_{t_0-1}^{t-1} f(x(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + 1]$$

como  $f(x(s)) \leq f_{\max}$  en  $[t_0 - 1, t_0]$  entonces

$$1 \leq x(t) \leq 1 + rf_{\max} \forall t \in [t_0, t_0 + 1]. \quad (2.12)$$

Además de 2.11 se aprecia que  $x'(t) \geq 0$  (por tanto  $x$  es creciente) y  $x'(t_0 + 1) = 0$ .

Si para todo  $t > t_0 + 1 : x(t) \geq 1$  la función  $x$  sera decreciente, (pues  $\dot{x}(t) \leq 0$ ) con un máximo para  $t = t_0 + 1$ . En caso de existir  $t > t_0 + 1 : x(t) < 1$  escogemos  $t_1 = \inf \{t \in ]t_0 + 1, +\infty[ : x(t) < 1\}$ . Por el mismo razonamiento que para  $t_0$ ,  $x(t_1) = 1$ . Además entre  $t_0 + 1$  y  $t_1$  la función  $x$  solo toma valores mayores o iguales a 1, pues si existiera un punto donde fuera menor que 1 entonces  $t_1 \neq \inf \{t \in ]t_0 + 1, +\infty[ : x(t) < 1\}$ , también

$$\begin{aligned} x'(t) &\leq 0 \forall t \in [t_1, t_1 + 1] \\ x'(t_1 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

es decir la función es decreciente, por tanto  $x(t) \leq 1; \forall t \in [t_1, t_1 + 1]$ , para asegurar la no negatividad en este intervalo basta que  $x(t_1 + 1) \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} x(t_1 + 1) &= 1 + r \int_{t_1 - 1}^{t_1} f(x(s)) ds \geq 1 + r \min_{s \in [t_1 - 1, t_1]} f(x(s)) \\ &\geq 1 + r \min_{s \in [t_0, t_1]} f(x(s)) \end{aligned}$$

pues ya que  $t_1 > t_0 + 1$  entonces  $[t_1 - 1, t_1] \subset [t_0, t_1]$ , como  $x'(t) \in [t_0 + 1, t_1]$  entonces  $x$  toma un máximo en  $t_0 + 1$ , es decir

$$x(t) \leq x(t_0 + 1) \leq 1 + rf_{\max} \forall t \in [t_0, t_1]$$

gracias también a 2.12. Además  $f$  es decreciente en este intervalo pues  $x$  toma valores mayores a 1, y por ello  $f(1 + rf_{\max}) \leq f(x(t)) \forall t \in [t_0, t_1]$ , tomando el mínimo:

$$f(1 + rf_{\max}) \leq \min_{s \in [t_0, t_1]} f(x(s))$$

y volviendo a 2.13

$$\begin{aligned} x(t_1 + 1) &\geq 1 + r \min_{s \in [t_0, t_1]} f(x(s)) \\ &\geq 1 + rf(1 + rf_{\max}) \end{aligned}$$

Examinemos la función auxiliar

$$F(r) = 1 + rf(1 + rf_{\max})$$

notamos que  $F(0) = 1$  y que  $F(r) < 0$  si  $r$  es grande (por demostrar), por tanto existe una raíz para  $F$ , como además  $F'(r) = f(1 + rf_{\max}) + rf_{\max}f'(1 + rf_{\max})$  es negativa

para todo  $r$  positivo (es la suma de dos cantidades negativas), entonces la raíz es única, y la llamaremos  $r_0$ , de hecho si  $r < r_0$  entonces  $F(r) > 0$ , ya que el hecho de que la derivada de  $F$  sea negativa indica que  $F$  es decreciente.

Escogiendo  $r < r_0$ ,  $x(t) \in [0, 1]$  en  $[t_1, t_1 + 1]$  y esto implica que  $x$  se creciente en el intervalo  $[t_1 + 1, t_1 + 2]$ , pues la derivada sera positiva, y podemos emplear el razonamiento inicial.

Así hemos demostrado el siguiente

**Lema 2.4.23** Si  $x^0(t) \in [0, 1]$  y  $r < r_0$ , entonces la solución de 2.11 es positiva.

**Observación 2.4.24** Si existe  $t_0 > 0$  tal que  $x(t) < 0$ , para cada  $t \in [t_0, t_0 + 1]$  entonces  $x(t) \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . En efecto si  $x(t) < 0$ , para cada  $t \in [t_0, t_0 + 1]$  entonces  $f(x(s)) < 0$  para todo  $s \in [t_0, t_0 + 1]$  y la solución decrece pues

$$x'(t) = rf(x(t-1)) < 0 \quad \forall t \in [t_0 + 1, t_0 + 2]$$

además

$$x''(t) = r \underbrace{f'(x(t-1))}_{>0} \underbrace{x'(t-1)}_{<0} \quad \forall t \in [t_0 + 2, t_0 + 3]$$

lo que quiere decir que  $x'$  decrece (es decir se hace cada vez mas negativa) y por tanto  $x(t) \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$

## 2.4.2 Estabilidad global y positividad

Primero estableceremos el comportamiento de estabilidad en las soluciones estacionarias es decir cuando 2.11, es decir  $x_1 \equiv 0$  y  $x_2 \equiv 1$ .

**Proposición 2.4.25** Si  $r|f'(1)| < \frac{\pi}{2}$  entonces  $x_2$  es asintóticamente estable. Esta solución pierde estabilidad en  $r|f'(1)| = \frac{\pi}{2}$  y la bifurcación de Hopf ocurre en ese punto. La solución  $x_1$  es inestable para cualquier valor de  $r$ .

**Prueba:** Linealizando con respecto a  $x_1$  obtenemos

$$x'(t) = rf'(0)x(t-1)$$

y como ecuación característica:  $\lambda - rf'(0)e^{-\lambda} = 0$ , como  $f'(0) > 0$  entonces esta ecuación admite un única solución real positiva y  $x_1$  será por ello inestable. Por otro lado también tenemos para  $x_2$ :

$$x'(t) = rf'(1)x(t-1)$$

y como ecuación característica:  $\lambda - r f'(1) e^{-\lambda} = 0$ . Sea  $Q$  la función quasipolinomial y examinamos el comportamiento para  $\lambda = i\omega$ :

$$Q(i\omega) = -r f'(1) \cos(\omega) + i(\omega + r f'(1) \sin(\omega))$$

Para usar el criterio de Mikhailov debemos verificar que :

- $Q$  no tenga raíces en el eje imaginario. En efecto si  $Q(i\omega) = 0$  entonces  $\cos(\omega) = 0$  y  $\omega + r f'(1) \sin(\omega) = 0$  simultáneamente, es decir  $\omega = \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \pi/2 + k\pi + r f'(1) \sin(\pi/2 + k\pi) = \pi/2 + k\pi + r (-1)^k f'(1) \\ &= (2k + 1) \frac{\pi}{2} + r (-1)^k f'(1) \end{aligned}$$

bastará restringir los valores  $r$  de modo que  $-r f'(1) \neq (-1)^k (2k + 1) \frac{\pi}{2}$

- Además restringiendo a que  $-r f'(1) < \pi/2$  obtenemos la estabilidad.

Cuando  $-r f'(1) = \pi/2$  tendremos que  $\lambda = \pm i\pi/2$  son raíces de la ecuación característica.  $\square$

## CAPÍTULO 3

# MÉTODO DE RUNGE KUTTA PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL

### 3.1 Método de Runge Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son aquellos que se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned}k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), i = 1, 2, \dots, s, \\y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i\end{aligned}\tag{3.1}$$

Cada una de las evaluaciones de función  $k_i$  es una *etapa*. El método (3.1) se representa por medio de su tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|cccc}c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,s} \\c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s\end{array}$$

Si escribimos  $c = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T$ ,  $A = (a_{ij})$ , el tablero se puede resumir como

$$\begin{array}{c|c}c & A \\ \hline & b^T\end{array}$$

Si  $a_{ij} = 0$  para  $j \geq i, i = 1, 2, \dots, s$ , es decir, si la matriz  $A$  es triangular inferior estricta, entonces cada uno de los  $k_i$  viene dado explícitamente en términos de los anteriormente calculados,  $k_j, j = 1, 2, \dots, i - 1$ . En este caso el método es explícito. Al escribir su tablero se suelen omitir los ceros sobre y por encima de la diagonal principal.

**Definición 3.1.1** Sea  $s$  un entero (el número de etapas) y  $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$  coeficientes reales. Entonces el método

$$\begin{aligned}
 k_n^1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_n^2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h_n a_{2,1} k_n^1) \\
 k_n^3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h_n (a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2)) \\
 &\vdots \\
 k_n^s &= f(x_n + c_s h, y_n + h_n (a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1})) \\
 y_{n+1} &= y_n + h_n (b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

es llamado método de Runge-Kutta explícito (método RK) de  $s$ -etapas y  $h_n = x_{n+1} - x_n$  es llamado paso del método.

## 3.2 Consistencia del método de Runge-Kutta

**Definición 3.2.2** Un método de Runge-Kutta (3.2) tiene orden de consistencia  $p$  si para todo  $n = 0, 1, \dots$  se satisface que

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq K h_n^{p+1}$$

¿Que condiciones sobre los coeficientes garantizan que el método es consistente de orden  $p$ ? Tenemos que desarrollar el residuo

$$R_n = y(x_{n+1}) - (y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, y(x_n); h))$$

alrededor de  $x_n$  en potencias de  $h$ . Así pues, lo que hay que hacer es obtener desarrollos en potencias de  $h$  para las funciones

$$F(h) := y(x_n + h), G(h) := y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n; y(x_n); h) : \tag{3.3}$$

Si estos desarrollos coinciden hasta orden  $p$ , existe una constante  $C$  independiente de  $n$  tal que  $\|R_n\| \leq C h^{p+1}$ , y se tendrá consistencia de orden al menos  $p$ .

Para que los desarrollos coincidan hasta un cierto orden, los coeficientes del método tienen que satisfacer ciertas condiciones. Como ejemplo obtendremos las condiciones de consistencia de orden 1 y de orden 2. Las condiciones para tener un orden de consistencia más alto se obtienen de manera similar.

En primer lugar desarrollamos  $F(h) = y(x_n + h)$ . Se tiene que

$$F(h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(\bar{\xi}_n), \tag{3.4}$$

donde  $\bar{\xi}_n \in [x_n, x_{n+1}]$ . De aquí concluimos que

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1$$

es suficiente para tener orden de consistencia al menos 1 y además

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = \frac{1}{2},$$

el orden de consistencia es al menos 2.

**Teorema 3.2.3** *Un método de Runge-Kutta explícito de  $s$  etapas no puede tener orden mayor que  $s$ .*

**Prueba:** Aplicamos el método al problema escalar  $y' = y$  en  $[0, b]$ ,  $y(0) = 1$ , cuya solución es  $y(x) = e^x$ . Así pues de 3.3,

$$\frac{d^p F}{dh^p}(0) = e^{x_n+h}|_{h=0} = e^{x_n} = y(x_n)$$

$$\frac{d^p G}{dh^p}(0) = p \sum_{j=1}^s b_j k_j^{(p-1)}|_{h=0}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} k_{j_1}^{(p-1)}|_{h=0} &= (p-1) \sum_{j_2=1}^s a_{j_1 j_2} k_{j_2}^{(p-2)}|_{h=0} \\ &= (p-1)(p-2) \sum_{j_2, j_3=1}^s a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} k_{j_3}^{(p-3)}|_{h=0} \\ &\dots \\ &= (p-1)! \sum_{j_2, j_3, \dots, j_p=1}^s a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \dots a_{j_{p-1} j_p} k_{j_p}^{(0)}|_{h=0} \end{aligned}$$

en nuestro caso  $k_{j_p}^{(0)}|_{h=0} = y(x_n)$  por lo que

$$\frac{d^p G}{dh^p}(0) = p! \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^s b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \dots a_{j_{p-1} j_p} y(x_n)$$

de donde concluimos que el método será de orden  $p$  cuando se satisfaga la condición

$$p! \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^s b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \dots a_{j_{p-1} j_p} = 1$$

esto solo es posible si  $p \leq s$ .  $\square$



**Teorema 3.2.4** Para  $p \geq 5$  no existe ningún método de Runge-Kutta explícito de orden  $p$  con  $s = p$  etapas.

Estas limitaciones sobre el orden obtenible que hemos mencionado se conocen como barreras de Butcher. Hay más barreras. Por ejemplo, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.5** (i) Para  $p \geq 7$  no existe ningún método de Runge-Kutta explícito de orden  $p$  con  $s = p + 1$  etapas. (ii) Para  $p \geq 8$  no hay ningún método de Runge-Kutta explícito con  $s = p + 2$  etapas.

**Observación 3.2.6** Si se satisface que  $c_i = \sum_j a_{i,j}$  entonces podemos simbolizar las ecuaciones (3.2) con el esquema

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 c_2 & a_{2,1} & & & \\
 c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,s} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

Donde se asume que  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$

**Teorema 3.2.7** Si los coeficientes  $\{a_{ij}, c_i, b_i\}$  del esquema (3.2) satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
 \sum_i b_i &= 1 & \sum_i b_i c_i &= \frac{1}{2} \\
 \sum_i b_i c_i^2 &= \frac{1}{3} & \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{6} \\
 \sum_i b_i c_i^3 &= \frac{1}{4} & \sum_{i,j} b_i c_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{8} \\
 \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j^2 &= \frac{1}{12} & \sum_{i,j,k} b_i a_{ij} a_{jk} c_k &= \frac{1}{24} \\
 \sum_j a_{i,j} &= c_i
 \end{aligned}$$

entonces el esquema corresponderá a un método de Runge Kutta de cuarto orden.

**Prueba:** Ver [6].□

**Observación 3.2.8** En lo sucesivo usaremos los métodos RK de cuarto orden que aparecen en el cuadro 3.1.

$0$					$0$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$1$		
$1$	$0$	$0$	$1$			$1$	$1$	$-1$	$1$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tabla 3.1: Métodos de Runge-Kutta de orden 4

### 3.3 Elección del paso óptimo para el método de Runge-Kutta

Hasta ahora nos hemos limitado a considerar mallas uniformes. Esto presenta un inconveniente importante: si la solución varía mucho en alguna zona del intervalo de integración, nos vemos obligados a dar pasos pequeños en todo el intervalo, con el consiguiente coste computacional. Sería preferible adaptar la malla a la solución, haciéndola más fina en aquellas regiones donde varía rápidamente y más gruesa donde cambie poco. La dificultad estriba en que no conocemos la solución, y por tanto no sabemos a priori donde necesitamos una malla más fina.

Supongamos que ya hemos calculado  $y_0, \dots, y_n$ . Queremos avanzar de  $x_n$  a  $x_{n+1}$  con una longitud de paso  $h_n = x_{n+1} - x_n$  tal que el *error global*,

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

tenga tamaño menor que una tolerancia dada. Lo que haremos es controlar el error cometido al dar el paso suponiendo que el valor  $y_n$  era exacto. Este error, conocido como *error local*, viene dado por

$$u_n(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

donde  $u_n$ , la solución local, es la solución del problema de valor inicial

$$u_n'(x) = f(x, u_n(x)), u_n(x_n) = y_n$$

**Teorema 3.3.9** Sea  $\mu = \max_{0 \leq n \leq N-1} (\|u_n(x_{n+1}) - y_{n+1}\|/h_n)$  y  $L$  una constante de Lipschitz para  $f$  con respecto a su segunda variable. Entonces

$$\|y(x_n) - y_n\| \leq e^{L(b-a)} \|y(x_0) - y_0\| + e^{L(b-a)}(b-a)\mu, n = 1, \dots, N$$

**Prueba:** Se basa en la identidad

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - u_n(x_{n+1}) + u_n(x_{n+1}) - y_{n+1} =$$

por el lema de Gronwall

$$\|y(x_{n+1}) - u_n(x_{n+1})\| \leq e^{Lh_n} \|y(x_n) - y_n\|$$

y por tanto

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq e^{Lh_n} \|y(x_n) - y_n\| + \mu h_n$$

de aqui por inducción

$$\|y(x_n) - y_n\| \leq e^{L(x_n-x_0)} \|y(x_0) - y_0\| + e^{L(x_n-x_0)}(x_n - x_0)\mu$$

□

Si un método de un paso es consistente de orden  $p$  y  $f \in C^{p+1}$ , se puede probar fácilmente que el error local es de orden  $h_n^{p+1}$  es más, existe una función  $\psi_f$  tal que

$$u_n(x_{n+1}) - y_{n+1} = \psi_f(x_n, y_n)h_n^{p+1} + O(h_n^{p+2})$$

por consiguiente, podemos estimar el error local por medio del término principal de este desarrollo,

$$error \approx \|\psi_f(x_n, y_n)\|h_n^{p+1}$$

Supongamos que calculamos una segunda aproximación  $\hat{y}_{n+1} \approx y(x_{n+1})$  por medio de un método de un paso más preciso,

$$u_n(x_{n+1}) - \hat{y}_{n+1} + 1 = \hat{\psi}_f(x_n, y_n)h_n^{\hat{p}+1} + O(h_n^{\hat{p}+2}), \hat{p} \geq p + 1 :$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+1} - y_{n+1} &= \hat{y}_{n+1} - u_n(x_{n+1}) + u_n(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= \psi_f(x_n, y_n)h_n^{p+1} + O(h_n^{p+2}) \end{aligned}$$

asi que podemos estimar el error local por medio de

$$error1 \approx \|\psi_f(x_n, y_n)\|h_n^{p+1} \approx \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\|$$

Una vez estimado, el error se compara con  $\mu h_n$ , donde  $\mu$  es la tolerancia prescrita para el error local por unidad de paso. Si  $error1 > h_n$ , el paso se rechaza, y se vuelve a calcular con un nueva longitud  $h'_n$  tal que

$$\|\psi_f(x_n, y_n)\|(h'_n)^{p+1} = \mu h'_n$$

Dado que

$$\mu = \|\psi_f(x_n, y_n)\| (h'_n)^p = \|\psi_f(x_n, y_n)\| h_n^p \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^p \approx \frac{error1}{h_n} \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^p$$

vemos que el nuevo paso será

$$h'_n = h_n \left(\frac{\mu h_n}{error1}\right)^{1/p}$$

El proceso se repite hasta que  $error1 \leq \mu h_n$ . En ese momento el paso se acepta. Se intenta ahora un nuevo paso con la longitud óptima.

Para tener un buen código hay que poner un poco más de cuidado. Se suele ajustar el próximo paso por un factor de seguridad  $FS$ , normalmente  $FS = 0.9$ , de forma que el  $error1$  sea aceptable la siguiente vez con probabilidad alta. Tampoco se suelen permitir incrementos de paso muy grandes, con el fin de hacer el método más seguro. También es costumbre fijar una longitud de paso máxima,  $HMAX$ . Así, por ejemplo podemos poner

$$h' = \min \left( HMAX, h_n \min \left( FSMAX, FS \left( \frac{\mu h_n}{error1} \right)^{1/p} \right) \right)$$

$FSMAX$  se suele tomar entre 1.5 y 5.

## CAPÍTULO 4

# RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS EDR CON EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Recordemos que las ecuaciones diferenciales con retardo son ecuaciones con un “desfase temporal” en el argumento. En el siguiente ejemplo se puede observar que en una EDR existe una dependencia fuerte de la condición inicial sujeta a la solución inicial. Una vez realizado el análisis cualitativo del comportamiento de la solución de una EDR, así como la predicción de la existencia y unicidad de solución esto nos ayudará para cumplir nuestro objetivo que es la de hallar la solución de una manera explícita de este tipo de problemas de valor inicial asociadas a una EDR.

### 4.1 Aplicación del Método de Runge Kutta con tamaño de paso fijo para las EDR

Por la no linealidad en los modelos correspondientes a este tipo de ecuaciones consideraremos en el estudio numérico un método que generalmente es estable y el cual se aplicará en los siguientes ejemplos de EDR.

Dado el problema de valor inicial asociado a la EDR

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau)) & \text{para } x \geq x_0 \\ y(x) = \phi(x) & \text{para } x \leq x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

escogemos  $h$  constante tal que  $\tau = ph$  para algún entero positivo  $p$ .

Consideremos una sucesión monótona de puntos  $\{x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots\}$  sobre los que se resolverá el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), & \forall x \in [x_n, x_{n+1}] \\ y(x_n) = y_n \end{cases} \quad (4.2)$$

en cada subintervalo  $[x_n, x_{n+1}]$  usaremos los métodos de Runge-Kutta definidos a continuación.

Así en cada subintervalo de la forma  $[x_n, x_{n+1}]$  definimos la función  $g$  como

$$g(x, y(x)) = f(x, y(x), y(x - \tau)), \quad \forall x \in [x_n, x_{n+1}]$$

Por ejemplo sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x-1) \\ \phi(x) = 0.5 \quad \text{para } -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Donde se tiene el retardo es igual a -1.

Digamos que queremos hallar la solución cuando  $x$  está en el intervalo  $[0, 1]$  (pues en este caso  $\tau = 1$ ), en seguida observamos que  $x - 1 \in [-1, 0]$  por tanto  $y(x - 1)$  es una función cuyo valor conocido:  $y(x - 1) = \phi(x - 1) = 0.5$

Por tanto  $-2y(x - 1) = -2 * 0.5 = -1$ , de este modo la ecuación se puede expresar en la siguiente forma:

$$\begin{cases} y'(x) = -1, \quad \forall x \in [0, 1] \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

la solución exacta está dada por  $y_1(x) = -x + 0.5 \quad \forall x \in [0, 1]$

Al comprobar esta solución en el intervalo  $[1, 2]$  se observa que  $x - 1 \in [0, 1]$  y por tanto  $y(x - 1)$  puede ser calculada usando la solución anterior donde :  $y(x - 1) = y_1(x - 1) = -(x - 1) + 0.5$

Entonces  $-2y(x - 1) = 2x - 3$  y de esta manera el problema quedaría dado por la siguiente expresión

$$\begin{cases} y'(x) = 2x - 3, \quad \forall x \in [1, 2] \\ y(1) = -0.5 \end{cases}$$

cuya solución es  $y_2(x) = x^2 - 3x + 3/2 \quad \forall x \in [1, 2]$

Del mismo modo podemos ver que existe otra solución  $y_3$ ,  $y_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 11x + 41/6 \quad \forall x \in [2, 3]$  para la misma ecuación en diferentes intervalos. Cada una de estas funciones es mostrada en la figura 4.1. Esto nos induce a pensar de que es posible aplicar en la búsqueda de solución de este tipo de ecuaciones un método numérico.

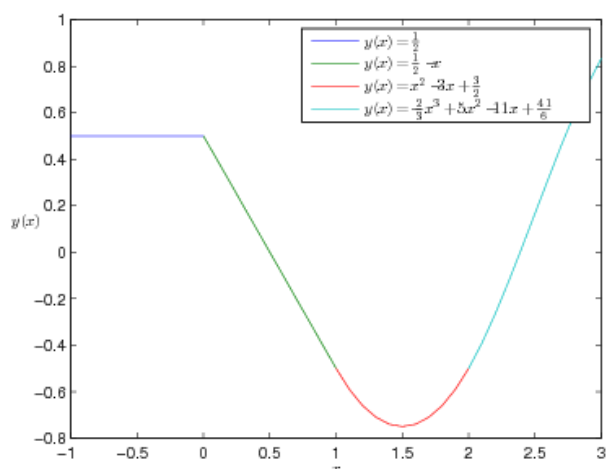


Figura 4.1: Solución exacta de la ecuación 4.3

y plantemos el siguiente problema de valor inicial

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(x) = g(x, y(x)), & \forall x \in [x_n, x_{n+1}] \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$$

Ahora podemos aplicar para el problema  $(\mathcal{P})$  el método de Runge-Kutta  $s$ -etapas:

$$\begin{aligned} k_n^1 &= g(x_n, y_n) \\ k_n^2 &= g(x_n + c_2 h, y_n + h a_{2,1} k_n^1) \\ k_n^3 &= g(x_n + c_3 h, y_n + h (a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2)) \\ &\vdots \\ k_n^s &= g(x_n + c_s h, y_n + h (a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1})) \\ y_{n+1} &= y_n + h (b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s) \\ x_{n+1} &= x_n + h \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde  $a_{2,1}, a_{3,1}, a_{3,2}, \dots, a_{s,1}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$ , son coeficientes reales escogidos de forma adecuada.

O en términos de  $f$ :

$$\begin{aligned}
k_n^1 &= f(x_n, y_n, y(x_n - \tau)) \\
k_n^2 &= f(x_n + c_2h, y_n + ha_{2,1}k_n^1, y(x_n + c_2h - \tau)) \\
k_n^3 &= f(x_n + c_3h, y_n + h(a_{3,1}k_n^1 + a_{3,2}k_n^2), y(x_n + c_3h - \tau)) \\
&\vdots \\
k_n^s &= f(x_n + c_sh, y_n + h(a_{s,1}k_n^1 + \dots + a_{s,s-1}k_n^{s-1}), y(x_n + c_sh - \tau)) \\
y_{n+1} &= y_n + h(b_1k_n^1 + \dots + b_s k_n^s) \\
x_{n+1} &= x_n + h
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Los valores para  $y(x_n + c_sh - \tau)$  pueden ser calculados para el caso  $n < k$  simplemente como  $y(x_{n-p} + c_sh) = \phi(x_n + c_sh - \tau)$ . Pero si  $n \geq k$  entonces debemos proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y(x_n + c_sh - \tau) &= y(x_0 + nh + c_sh - ph) \\
&= y(x_0 + (n-p)h + c_sh) \\
&= y(x_{n-p} + c_sh)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

y al ser  $0 \leq c_s \leq 1$  tenemos que  $x_{n-p} + c_sh \in [x_{n-p}, x_{n-p+1}]$  y podemos usar los valores de  $y_{n-p}, k_{n-p}^1, y_{n-p+1}, k_{n-p+1}^1$  para aproximar  $y$  mediante un polinomio cúbico según el siguiente esquema:

$x_{n-p}$	$y_{n-p}$			
		$k_{n-p}^1$		
$x_{n-p}$	$y_{n-p}$	$d$	$\frac{d-k_{n-p}^1}{h}$	
				$\frac{k_{n-p+1}^1 - 2d + k_{n-p}^1}{h^2}$
$x_{n-p+1}$	$y_{n-p+1}$	$\frac{k_{n-p+1}^1 - d}{h}$		
		$k_{n-p+1}^1$		
$x_{n-p+1}$	$y_{n-p+1}$			

donde  $d = (y_{n-p+1} - y_{n-p})/h = \sum_{i=1}^s b_i k_{n-p}^i$ .

Empleando la fórmula de interpolación de Newton obtenemos:

$$y(x_{n-p} + \theta h) = y_{n-p} + h\theta (k_{n-p}^1 + \theta(d - k_{n-p}^1) + \theta(\theta - 1)(k_{n-p+1}^1 - 2d + k_{n-p}^1))$$



En resumen el esquema de solución sería el siguiente:

$$\begin{aligned}
k_n^1 &= f(x_n, y_n, \gamma_n^1) \\
k_n^2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{2,1} k_n^1, \gamma_n^2) \\
k_n^3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h (a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2), \gamma_n^3) \\
&\vdots \\
k_n^s &= f(x_n + c_s h, y_n + h (a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1}), \gamma_n^s) \\
y_{n+1} &= y_n + h (b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s) \\
x_{n+1} &= x_n + h
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde

$$\gamma_n^s = \begin{cases} \phi(x_n + c_s h - \tau) & \text{si } n < p \\ y_{n-p} + h c_s [k_{n-p}^1 + c_s (d - k_{n-p}^1) + c_s (c_s - 1) (k_{n-p+1}^1 - 2d + k_{n-p}^1)] & \text{si } n \geq p \end{cases}$$

## 4.2 Aplicación del Método de Runge Kutta con tamaño de paso variable para las EDR

La suposición de que  $\tau = ph$  hace que el esquema (4.7) sea muy restrictivo en cuanto al tamaño de paso, así que supondremos que hemos generado una sucesión  $(h_n)_{n \geq 1}$  y así el esquema se escribe como:

$$\begin{aligned}
k_n^1 &= f(x_n, y_n, y(x_n - \tau)) \\
k_n^2 &= f(x_n + c_2 h_n, y_n + h_n a_{2,1} k_n^1, y(x_n + c_2 h_n - \tau)) \\
k_n^3 &= f(x_n + c_3 h_n, y_n + h_n (a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2), y(x_n + c_3 h_n - \tau)) \\
&\vdots \\
k_n^s &= f(x_n + c_s h_n, y_n + h_n (a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1}), y(x_n + c_s h_n - \tau)) \\
y_{n+1} &= y_n + h_n (b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s) \\
x_{n+1} &= x_n + h_n
\end{aligned} \tag{4.8}$$

El problema es determinar el valor de  $y(x_n + c_s h_n - \tau)$ , para ello necesitamos encontrar  $p_s \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $x_n + c_s h_n - \tau \in [x_{n-p_s}, x_{n-p_s+1}]$ , además supondremos que  $h_n \leq \tau$ . Así

$$y(x_n + c_s h_n - \tau) = \begin{cases} \phi(x_n + c_s h - \tau) & \text{si } x_n + c_s h_n - \tau < x_0 \\ y_{n-p_s} + h_{n-p_s} \theta_s (k_{n-p_s}^1 + \theta_s (d - k_{n-p_s}^1) + \theta_s (\theta_s - 1) ((k_{n-p_s+1}^1 - 2d + k_{n-p_s}^1))] & \text{si } x_n + c_s h_n - \tau \geq x_0 \end{cases}$$

donde

$$\theta_s = \frac{x_n + c_s h_n - \tau - x_{n-p_s}}{h_{n-p_s}}$$

$$d = \frac{y_{n-p_s+1} - y_{n-p_s}}{h_{n-p_s}} = \sum_{i=1}^s b_i k_{n-p_s}^i$$

Generalizar las ecuaciones (4.8) para resolver una ecuación del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau_1), y(x - \tau_2), \dots, y(x - \tau_m)) \quad \forall x \geq x_0$$

$$y(x) = \Phi(x) \quad \forall x \leq x_0$$

es inmediato, simplemente asegurando que

$$0 < h_n \leq \min_{1 \leq i \leq m} \tau_i \quad (4.9)$$

Así obtenemos siguiente esquema:

$$k_n^1 = f(x_n, y_n, y(x_n - \tau_1), \dots, y(x_n - \tau_m))$$

$$k_n^2 = f(x_n + c_2 h_n, y_n + h_n a_{2,1} k_n^1, y(x_n + c_2 h_n - \tau_1), \dots, y(x_n + c_2 h_n - \tau_m))$$

$$k_n^3 = f(x_n + c_3 h_n, y_n + h_n (a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2), y(x_n + c_3 h_n - \tau_1), \dots, y(x_n + c_3 h_n - \tau_m))$$

$$\vdots$$

$$k_n^s = f(x_n + c_s h_n, y_n + h_n \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j} k_n^j, y(x_n + c_s h_n - \tau_1), \dots, y(x_n + c_s h_n - \tau_m))$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^s b_j k_n^j$$

$$x_{n+1} = x_n + h_n \quad (4.10)$$

Que pasa si ahora consideremos una ecuación con diferentes tipos de retardo, por ejemplo

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau_1), y(x - \tau_2), \dots, y(x - \tau_n))$$

donde  $f$  es una función continua y  $\tau_1, \dots, \tau_n$  son los retardos en el argumento de la función  $y$ , es decir la derivada  $y'$  depende de valores de la función  $y$  en puntos previos.

Por ejemplo dado el siguiente problema donde se involucran diversos “retardos” de una EDR:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{e}{3}y(x-1) + \frac{e^2}{3}y(x-2) + \frac{e^3}{3}y(x-3) & \forall x \geq 0 \\ y(x) = e^x & \forall x \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

y cuya solución viene a ser la prolongación de la función de valor inicial  $e^x$  como se

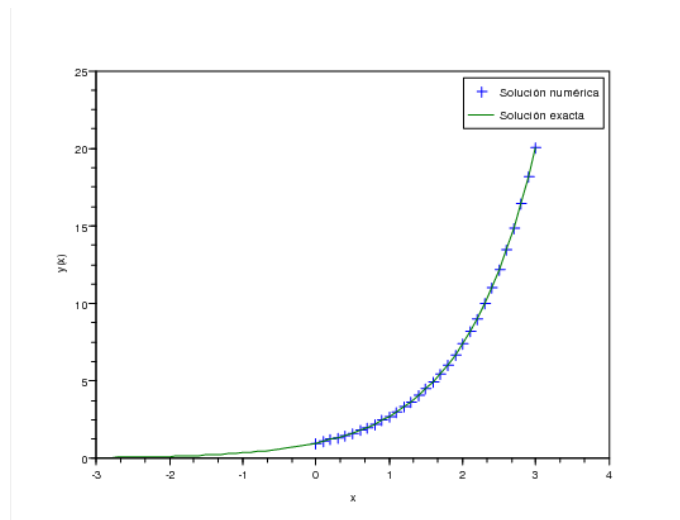


Figura 4.2: Solución numérica y exacta ( $y = e^x$ ) del problema mostrado en el ejemplo 4.11 resuelto con el esquema de paso variable (4.10).

aprecia en la figura 4.2.

Con el esquema (4.10) podemos resolver numéricamente el problema (1.25) . Los resultados se condensan en el cuadro 4.1. También cabe la posibilidad de plantear un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo

$$\begin{aligned}
 y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_d(x), y_1(x - \tau), y_2(x - \tau), \dots, y_d(x - \tau)) \\
 y_2'(x) &= f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_d(x), y_1(x - \tau), y_2(x - \tau), \dots, y_d(x - \tau)) \\
 &\vdots \\
 y_d'(x) &= f_d(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_d(x), y_1(x - \tau), y_2(x - \tau), \dots, y_d(x - \tau))
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= \phi_1(x) \quad \forall x \leq x_0 \\
 y_2(x) &= \phi_2(x) \quad \forall x \leq x_0 \\
 &\vdots \\
 y_d(x) &= \phi_d(x) \quad \forall x \leq x_0
 \end{aligned}$$

Redefiniendo el sistema EDR  $\mathbf{Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  como  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$  así como también

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\
 \mathbf{F} &= (f_1, f_2, \dots, f_d)
 \end{aligned}$$

$x$	$y_{aprox}$	$y_{exacto}$	$error$
0.	0.	0.	0.
0.2	0.3090171	0.3090170	6.537D-08
0.4	0.5877854	0.5877853	0.0000001
0.6	0.8090172	0.8090170	0.0000002
0.8	0.9510567	0.9510565	0.0000002
1.	1.0000002	1.	0.0000002
1.2	0.9510568	0.9510565	0.0000002
1.4	0.8090173	0.8090170	0.0000003
1.6	0.5877857	0.5877853	0.0000005
1.8	0.3090176	0.3090170	0.0000007
2.	0.0000008	- 7.657D-16	0.0000008

Tabla 4.1: Resultado de aplicar el esquema (4.8) de paso variable al problema (1.25) utilizando un esquema RK de orden 4

y  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  como  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d)$  obtenemos el sistema

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x), \mathbf{Y}(x - \tau)) \quad \forall x \geq x_0$$

$$\mathbf{Y}(x) = \Phi(x) \quad \forall x \leq x_0$$

que puede ser extendido para considerar que  $\mathbf{F}$  depende también de diferentes “retardos”  $(\tau_1, \dots, \tau_m)$ .

Para resolver numéricamente este sistema EDR (4.12) podemos extender el método de Runge Kutta de nivel  $s$  especificada para cada componente con el esquema (4.10) obteniéndose la solución aproximada del sistema.

### 4.3 Consistencia de los métodos de Runge Kutta para las EDR

En un PVI, se busca una solución en un intervalo  $[t_0, t_f]$  con  $t_0 < t_f$ . Las ecuaciones diferenciales con retardo muestran que  $y'(t)$  depende de valores anteriores a  $t$ . En particular,  $y'(t_0)$  depende de  $y(t_0 - \tau_1), \dots, y(t_0 - \tau_n)$ . Por esto, una solución en  $[t_0, t_f]$  depende de los valores para  $t \leq t_0$ , es decir, depende de la historia  $S(t), t \leq t_0$ .

Entonces para la consistencia del método de Runge-Kutta aplicado a las EDR se realiza una extensión de los resultados anteriores dados para PVI con EDO tanto para el método de paso fijo y paso variable bajo las siguiente condición:

Si  $\{c_i\}$ ,  $\{a_{ij}\}$  y  $\{b_j\}$  son los coeficientes asociados a un método Runge-Kutta (3.2) de orden  $p$  entonces el esquema de paso variable (4.8) es consistencia de orden  $p$ , es decir para todo  $n = 0, 1, \dots$  se satisface que

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq K h_n^{p+1}$$

## 4.4 Implementación numérica

Para la construcción de las subrutinas de los algoritmos de resolución de los PVI con EDR se han utilizado las siguientes funciones en MATLAB.

### 4.4.1 Función dde23

La función dde23 resuelve PVI para EDR con retardos constantes. Es decir, resuelve el sistema de primer orden

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n))$$

en el intervalo  $[t_0, t_f]$ , con  $t_0 < t_f$  y la función historia  $y(t) = S(t)$ , para  $t \leq t_0$ . La función dde23 produce una solución continua en el intervalo  $[t_0, t_f]$ . Está basado en el método de Runge-Kutta.

### 4.4.2 Función ddesd

La función ddesd resuelve PVI para EDRs con retardos generales. Es decir, resuelve el sistema de primer orden

$$y'(t) = f(t, y(t), y(d(1)), \dots, y(d(n)))$$

en el intervalo  $[t_0, t_f]$ , con  $t_0 < t_f$ , donde los retardos dependen de  $t$  y de  $y(t)$ . Está basado en el método de Runge-Kutta. Para detalles ver [26].

### Sintaxis de la función dde23 en MATLAB

La sintaxis de esta función es la siguiente:

$$sol = dde23('EDRfun', retardos, historia, intervalo, opciones)$$

Las especificaciones de los parámetros de entrada son:

Parámetro	Especificación
EDRfun	<p>Representa la función en el lado derecho de la EDR, es decir,</p> $\frac{dy}{dt} = EDRfun(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n))$ $(y'(t) = f(t, y(t), y(t - t_1), \dots, y(t - t_n))),$ <p>donde <math>t</math> es un escalar y <math>y</math> y <math>\frac{dy}{dt}</math> son vectores columnas.</p> <p>Para definir la función EDRfun, se debe especificar en un M-file.</p>
retardos	Es un vector con los retardos $\tau_1, \dots, \tau_n$ constantes.
historia	<p>Representa la función historia <math>S(t)</math>, para <math>t \leq 0</math>.</p> <p>Para definir la función historia, se debe especificar en un M-file.</p>
intervalo	<p>Es un vector que representa el intervalo de integración.</p> <p>Se resuelve desde intervalo(1) hasta intervalo(2).</p>
opciones	<p>Es una estructura con parámetros adicionales que cambia las propiedades predeterminadas de la función.</p> <p>Usualmente sirve para resolver problemas específicos.</p>

El parámetro de salida es una función continua en el intervalo  $[t_0, t_f]$ . Para tener una aproximación a la solución en cualquier punto en  $[t_0, t_f]$ , podemos usar la función auxiliar `deval` junto con la estructura `sol` que devuelve la función `dde23`. Las siguientes instrucciones muestran como debe realizarse:

```
t = linspace(0, 5);
St = deval(sol, t);
```

La  $i$ -ésima columna de `St` aproxima la solución en el tiempo `t(i)`, es decir, la  $i$ -ésima columna representa el vector  $y(t(i))$ .

La estructura `sol` tiene dos campos especiales, a saber: `sol.x` y `sol.y`. El campo `sol.x` corresponde al arreglo de  $t$  (mencionado en `ode23`) de la variable independiente y el campo `sol.y` corresponde al arreglo  $y$  (mencionado en `ode23`) de valores solución.

# CAPÍTULO 5

## APLICACIÓN A MODELOS BIOMATEMÁTICOS

Para comprobar los resultados numéricos estudiados anteriormente tomaremos algunos problemas que se formulan mediante modelos matemáticos en la biología.

### 5.1 Modelos de crecimiento tumoral

Según el investigador Ehrlich [1]- [5]- [4] el crecimiento de un tumor del tipo ascities Ehrlich en ratones puede ser modelado siguiendo la estructura de la ecuación 2.11:

$$u'(t) = ru(t - \tau) \left( 1 - \frac{u(t - \tau)}{K} \right), u(t) = u_0(t) \geq 0, \forall t \in [-\tau, 0] \quad (5.1)$$

donde  $u(t)$  está relacionado a la concentración de células en el organismo de un ratón,  $r$  es la tasa de proporcionalidad reproducción células netas del tumor y  $K$  es la capacidad de almacenamiento y  $\tau$  es el retardo que refleja el tiempo de duración de un ciclo de multiplicidad celular.

Considerando que la ecuación 5.1 es de la forma 2.11 aplicando los resultados anteriores analizaremos el comportamiento de estabilidad de las soluciones estacionarias, es decir  $x_1 \equiv 0$  y  $x_2 \equiv 1$ . Para ello nos será útil el siguiente resultado cuya demostración puede verse en [4].

#### Predicción del comportamiento del problema

- Si  $\alpha |f'(1)| < \frac{\pi}{2}$ , en 2.11, entonces  $x_2$  es asintóticamente estable.
- Si  $\alpha |f'(1)| = \frac{\pi}{2}$  la solución pierde estabilidad y por el teorema de Hopf la bifurcación ocurre en ese punto.
- La solución  $x_1$  es inestable para cualquier valor de  $\alpha$ .

Consideremos en particular el siguiente ejemplo

$$x'(t) = \alpha x(t - 1) (1 - x(t - 1)), x(t) = 0, \forall t \in [-1, 0[, x(0) = 0.1 \quad (5.2)$$

como  $f(x) = x - x^2$  entonces la estabilidad está garantizada si  $\alpha |(1 - 2x)|_{x=1} < \frac{\pi}{2}$  es decir si  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , como se puede apreciar en las figuras 5.1-5.2.

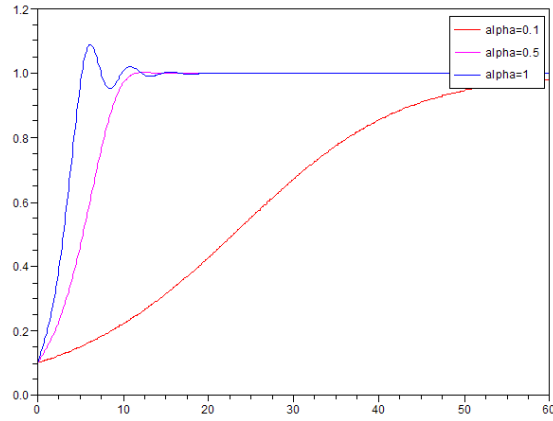


Figura 5.1: Solución del modelo 5.2 para  $\alpha = 0.1, 0.5, 1$ . Se aprecia la estabilidad de la solución de equilibrio  $x \equiv 1$

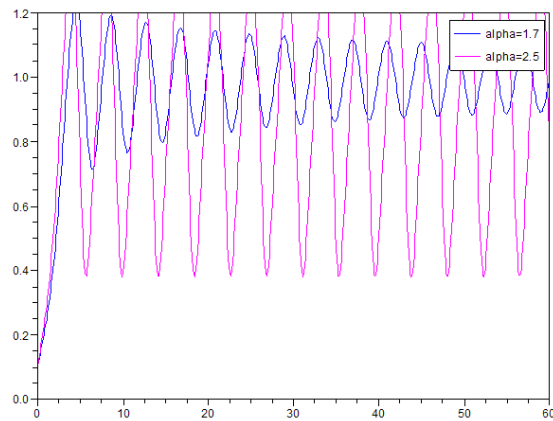


Figura 5.2: Solución del modelo 5.2 para  $\alpha = \frac{\pi}{2}, 2$ . Se aprecia la inestabilidad de la solución de equilibrio  $x \equiv 1$



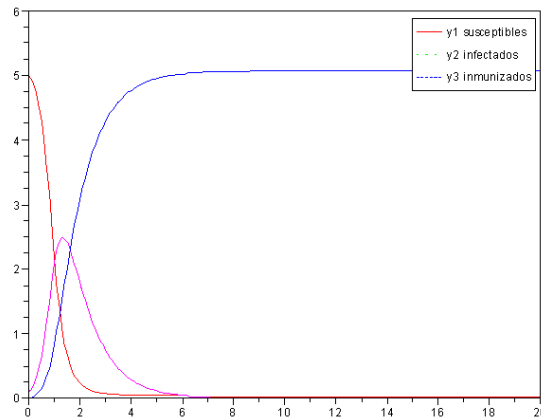


Figura 5.3: Solución del modelo de Kermack-McKendricke 5.3

## 5.2 Modelos de diseminación de infecciones

Primero presentamos el modelo de Kermack-McKendrick: sea  $y_1(x)$  la fracción *susceptible* de la población,  $y_2(x)$  la fracción *infectada* e  $y_3(x)$  la fracción *inmunizada*.

Suponemos que el número de nuevas infecciones por unidad de tiempo es proporcional al producto  $y_1(x)y_2(x)$ . Si además asumimos que el nuevo número de personas inmunizadas es proporcional al de infectadas obtenemos el siguiente modelo

$$y_1' = -y_1y_2 \quad y_2' = y_1y_2 - y_2 \quad y_3' = y_2 \quad (5.3)$$

donde hemos tomado que todas las constantes de proporcionalidad son iguales a 1. La solución numérica con los valores iniciales  $y_1(0) = 5, y_2(0) = 0.1, y_3(0) = 0$  es mostrada en la figura 5.3: la epidemia desaparece finalmente cuando toda la población es inmunizada. Sin embargo podemos también asumir que la población inmunizada vuelve a ser susceptible nuevamente después de un periodo fijo de tiempo ( $\tau_1$ ). Si también introducimos un periodo de incubación  $\tau_2$  llegamos a la siguiente modelo

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x)y_2(x - \tau_1) + y_2(x - \tau_2) \\ y_2'(x) &= y_1(x)y_2(x - \tau_1) - y_2(x) \\ y_3'(x) &= y_2(x) - y_2(x - \tau_2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

### Predicción del comportamiento de infección

Con las condiciones iniciales  $y_1(x) = 5, y_2(x) = 0.1, y_3(x) = 0$ , para  $x \leq 0$  es mostrada en la figura 5.4 que muestra claramente el comportamiento periódico de la infección.

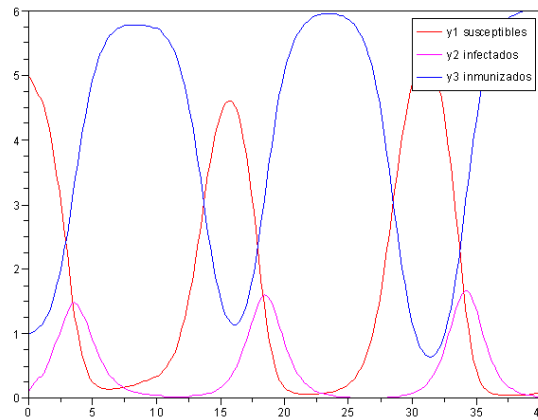
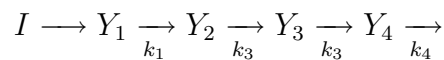


Figura 5.4: Solución del modelo de Kermack-McKendricke 5.4

### 5.3 Modelo del comportamiento cinético de la enzimas

Consideremos las siguientes reacciones consecutivas



donde  $I$  es un substrato exógeno el cual se mantiene constante y  $n$  moléculas del producto final  $Y_4$  un inhibidor de la reacción  $Y_1 \longrightarrow Y_2$  como

$$z = \frac{k_1}{1 + \alpha (y_4(x))^n}$$

Considerando el tiempo necesario para que una molécula inhibidora interferirá con la reacción podemos plantear el siguiente modelo

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= I - zy_1(x) \\ y_2'(x) &= zy_1(x) - y_2(x) \\ y_3'(x) &= y_2(x) - y_3(x) \\ y_4'(x) &= y_3(x) - 0.5y_4(x) \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$z = \frac{1}{1 + 0.0005 (y_4(x - 4))^3}$$

#### Predicción del comportamiento cinético

El sistema posee un punto de equilibrio cuando  $zy_1 = y_2 = y_3 = I$ ,  $y_4 = 2I, y_1 = I(1 + 0.004I^3)$ , el cual es inestable según se aprecia en la figura 5.5.

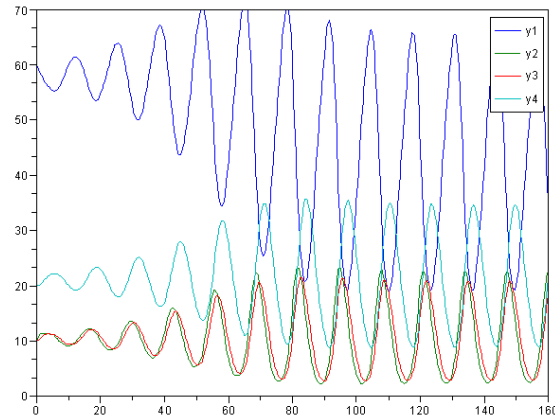


Figura 5.5: Solución del modelo de cinética de enzimas (5.5),  $I = 10.5$ . Valores iniciales cercanos a la posición de equilibrio

## 5.4 Modelo inmunológico de crecimiento viral

Presentamos el modelo de Marchuk para el crecimiento de virus  $V(t)$ , anticuerpos  $F(t)$  y células de plasma  $C(t)$  en el organismo de una persona infectada por una infección viral. estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (h_1 - h_2F) V \\ \frac{dC}{dt} &= \eta(m)h_3F(t - \tau)V(t - \tau) - h_5(C - 1) \\ \frac{dF}{dt} &= h_4F(C - F) - h_8FV\end{aligned}$$

la primera la ecuación depredador- presa de Volterra-Lotka. La segunda ecuación describe la creación de nuevas células de plasma con un retardo de tiempo debido a la infección, en ausencia del cual el segundo término alcanza un equilibrio para  $C = 1$ . La tercera ecuación modela la creación de anticuerpos provenientes de las células de plasma ( $h_4C$ ) y su decrecimiento debido a la infección ( $-h_4F$ ) y los antígenos ( $-h_8FV$ ). El término  $\eta(m)$  está definido por

$$\eta(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq 0.1 \\ (1 - m) \frac{10}{9} & \text{si } 0.1 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

y expresa el hecho de que la creación de células de plasma decrece cuando el organismo esta dañado por la infección viral. El daño relativo  $m(t)$  está dado por una cuarta ecuación

$$\frac{dm}{dt} = h_6 V - h_7 m$$

donde el primer término expresa el daño y el segundo la recuperación.

### Predicción del comportamiento de crecimiento viral

Este modelo permite escoger la coeficientes  $h_1, h_2, \dots, h_8$  para modelos diversos tipos de perfiles de salud: salud estable, salud inestable, infección aguda, forma crónica, etc. La solución numérica es calculada con los siguientes parámetros

$$\tau = 0.5, h_1 = 2, h_2 = 0.8, h_3 = 10^4, h_4 = 0.17, h_5 = 0.5, h_7 = 0.12, h_8 = 8$$

y las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} V(t) &= \max(0, 10^{-6} + t) \text{ si } t \leq 0 \\ C(0) &= 1 \\ F(t) &= 1 \text{ si } t \leq 0 \\ m(0) &= 0 \end{aligned}$$

Además contemplamos los casos para los cuales  $h_6 = 10$  (figura 5.6), donde observamos mejoría completa ( $V(t) \rightarrow 0$ ), o  $h_6 = 300$  (figura 5.7), donde se produce una recaída (cuando  $m(t) \rightarrow 1$ ).

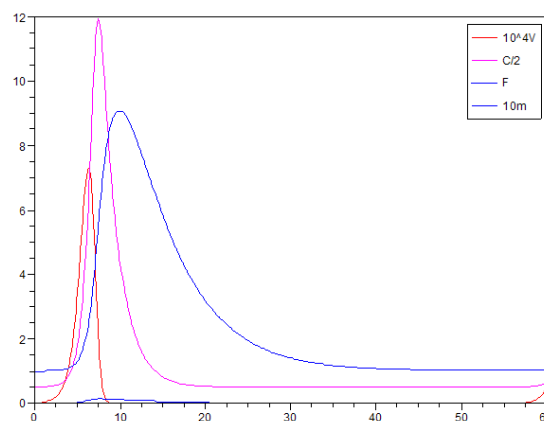


Figura 5.6: Solución del modelo inmunológico de Marchuk ( $h_6 = 10$ )

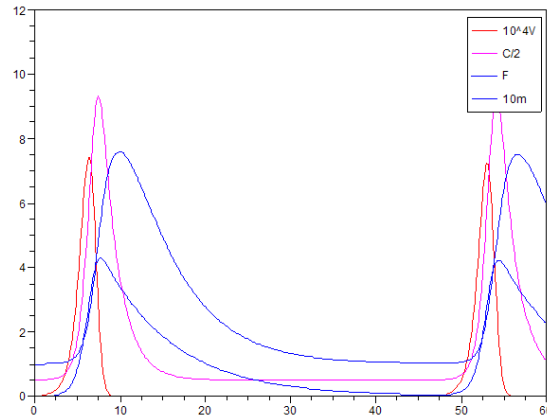


Figura 5.7: Solución del modelo inmunológico de Marchuk ( $h_6 = 300$ )

## 5.5 Dinámica poblacional

Consideremos que la población de una cierta especie está representada por la función  $y(x)$ , si su tasa de crecimiento  $k$  puede ser decreciente o creciente. Si la población se incrementa entonces habrá una escasez de comida y espacio, el comportamiento de este fenómeno es modelado por el siguiente problema de valor inicial

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} y'(x) = k(\alpha - y(x))y(x) & \text{si } x \geq 0 \\ y(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

### Predicción del comportamiento de crecimiento poblacional

Si asumimos que la razón de crecimiento depende de la población en las generaciones precedentes llegamos a establecer una ecuación con retardo:

$$y'(x) = k(\alpha - y(x - \tau))y(x)$$

Si hacemos el cambio de variable  $z(x) = k\tau y(\tau x)$  entonces  $z'(x) = k\tau^2 y'(\tau x)$ . Pero

$$y'(\tau x) = k(\alpha - y(\tau x - \tau))y(\tau x)$$

es decir

$$\begin{aligned} z'(x) &= (k\tau\alpha - k\tau y(\tau(x - 1)))k\tau y(\tau x) \\ &= (k\tau\alpha - z(x - 1))z(x) \end{aligned}$$

finalmente hacemos los cambios  $z$  por  $y$ ,  $k\tau\alpha$  por  $\alpha$  para obtener

$$y'(x) = (\alpha - y(x - 1)) y(x) \quad (5.6)$$

En la figura 5.8 se muestra la solución numérica del problema de valor inicial del ejemplo 5.6 considerando:  $\alpha = 0.35, 0.5, 1.0, 1.4$  y  $1.6$ .

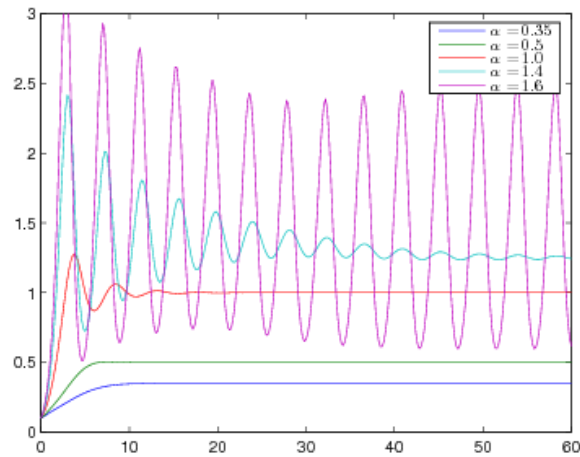


Figura 5.8: Solución numérica del problema 5.6 para  $h = 0.2$

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES, ANEXOS Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

#### 6.1 Conclusiones

- (i) Las aplicaciones de las EDR son muy variadas y presentan una amplia gama de posibilidades para su uso pues reflejan de mas manera realista los procesos químicos y físicos de la naturaleza al considerar intervalos de tiempo necesarios para que exista una interacción apropiada entre los diversos componentes del sistema objeto de estudio.
- (ii) Estudiar la estabilidad local de las soluciones de una EDR implica un trabajo delicado pues no siempre es posible encontrar un criterio apropiado, de hecho no existe una herramienta matemática que se adecue a todos los casos. En este trabajo se ha hecho uso del criterio de Mikhailov (ver [5]). Recientes trabajos en el campo de la teoría de números podrían ayudar a conseguir un teorema general de estabilidad de las EDR.
- (iii) La implementación de los algoritmos de solución de las EDR pueden generalizar a casos donde el retardo  $\tau \equiv \tau(x, y(x))$  es decir ya no lo consideramos fijo sino que incluso puede ser arbitrariamente pequeño ( $\tau \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ ) lo cual invalida nuestra suposición (4.9).
- (iv) El código desarrollado es fácilmente adaptable a cualquier problema que involucre “retardos” constantes y permite examinar de manera gráfica la estabilidad de las soluciones de equilibrio.
- (v) En el caso de aplicar Runge Kutta de paso variable es posible ajustar el tamaño de paso  $h$  en cada iteración de modo que se minimice el error cometido pero sin aumentar la carga computacional, esto es especialmente adecuado en presencia de ecuaciones rígidas, que no han sido abordadas en el presente estudio.
- (vi) En el presente trabajo se ha realizado un método explícito de Runge-Kutta por lo cual queda probada la consistencia más no su convergencia. Puesto que todo método de Runge Kutta explícito de orden 4 para problemas no lineales no cumple con la estabilidad. Lo cual es un problema abierto para trabajos futuros.

Este trabajo fue realizado en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería (<http://fc.uni.edu.pe/labosin>). El código usado se ha implementado en Matlab 7.

## 6.2 Anexos

### 6.2.1 edr43.m

```
function [x,y]=edr43(x0,y0,f,phi,dx,xmax,tau)

nmax=floor(xmax/dx);

% definicion de vectores
d = size(y0,2);
m = size(tau,2);

y = zeros(nmax+1,d);
x = zeros(nmax+1,1);
g = zeros(m,d);

h = dx*ones(size(x));

f1 = zeros(nmax+1,d);

% coeficientes R-K
s = 4;
k = zeros(s,d);
c = [0 1/2 1/2 1];
b = [1/6 2/6 2/6 1/6];
a21= 1/2;
a31= 0;
a32= 1/2;
a41= 0;
a42= 0;
a43= 1;
dn=zeros(s,d);
p = zeros(s,m);
% valores iniciales
x(1) = x0;
y(1,:) = y0;
```



```

n=1;

while (n<=nmax)
  for i=1:s
    for j=1:m
      if (x(n)+c(i)*h(n)-tau(j)<x(1))
        g(j,:)=phi(x(n)+c(i)*h(n)-tau(j));
        p(:,j) = (n-1)*ones(size(p(:,j)));
      else
        p(:,j) = max(p(:,j))*ones(size(p(:,j)));
        while ( x(n-p(i,j)+1) < x(n)+c(i)*h(n)-tau(j))
          p(i,j)=p(i,j)-1;
        end
        dn(i,:) = (y(n-p(i,j)+1,:)-y(n-p(i,j),:))/h(n-p(i,j));
        theta(i) = (x(n)+c(i)*h(n)-tau(j)-x(n-p(i,j)))/h(n-p(i,j));
        g(j,:) = y(n-p(i,j),:)+theta(i)*h(n-p(i,j))*(f1(n-p(i,j),:)+
          theta(i)*(dn(i,)-f1(n-p(i,j),:))+theta(i)*(theta(i)
            (f1(n-p(i,j)+1,:)-2*dn(i,)+f1(n-p(i,j),:))));
      end
    end
    switch i
      case 1
        k(1,:) = f(x(n),y(n,:),g);
        f1(n,:) = k(1,:);
      case 2
        k(2,:) = f(x(n)+c(2)*h(n),y(n,)+h(n)*a21*k(1,:),g);
      case 3
        k(3,:) = f(x(n)+c(3)*h(n),y(n,)+h(n)*(a31*k(1,)+...
          a32*k(2,)),g);
      case 4
        k(4,:) = f(x(n)+c(4)*h(n),y(n,)+h(n)*(a41*k(1,)+...
          a42*k(2,)+a43*k(3,)),g);
    end
  end
  y(n+1,:)=y(n,)+h(n)*b*k;
  x(n+1)=x(n)+h(n);
  n=n+1;
end

return

```

## 6.2.2 modelo-crecimiento-tumoral.m

```
function modelo_tumoral

m=1;
tau=1*ones(1,m);
tau(1)=1;

xmax=60;
dx=0.1;
d=5;
x0=0;
y0=phi(x0);

[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);

figure(1)
plot(x,y(:,1),'r-',x,y(:,2),'m-',x,y(:,3));

axis([0,xmax,0,1.1]);
legend('\alpha=0.1','\alpha=0.5','\alpha=1');

figure(2)
plot(x,y(:,4),'b-',x,y(:,5),'m');

axis([0,xmax,0,1.1]);
legend('\alpha=1.7','\alpha=2.5');

function z=phi(x)
    z=zeros(1,5);
    z=0.1*ones(size(z));

function z=f(x,y,yt)
    z=zeros(size(y));
    alpha=[0.1,0.5,1,3.1415/2,2];
    z(1)=alpha(1)*yt(1,1)*(1-yt(1,1));
    z(2)=alpha(2)*yt(1,2)*(1-yt(1,2));
    z(3)=alpha(3)*yt(1,3)*(1-yt(1,3));
    z(4)=alpha(4)*yt(1,4)*(1-yt(1,4));
    z(5)=alpha(5)*yt(1,5)*(1-yt(1,5));
```

### 6.2.3 modelo-poblacion.m

```
function modelo_poblacion

m=1;
tau=1*ones(1,m);
tau(1)=1;

xmax=60;
dx=0.2;
d=5;
x0=0;
y0=0.1*ones(1,d);

[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);

plot(x,y(:,1),'-',x,y(:,2),'-',x,y(:,3),'-',x,y(:,4),x,y(:,5));
axis([0,60,0,3]);
legend('\alpha=0.35','\alpha=0.5','\alpha=1.0','\alpha=1.4','\alpha=1.6');

function z=phi(x)
    z=zeros(1,5);

function z=f(x,y,yt)
    z=zeros(size(y));
    z(1)=(0.35-yt(1,1))*y(1,1);
    z(2)=(0.5-yt(1,2))*y(1,2);
    z(3)=(1.0-yt(1,3))*y(1,3);
    z(4)=(1.4-yt(1,4))*y(1,4);
    z(5)=(1.6-yt(1,5))*y(1,5);

return
```

### 6.2.4 modelo-infeccion.m

```
function modelo_infeccion

m=2;
tau=1*ones(1,m);
tau(1)=1;
tau(2)=10;
```

```

xmax=40;
dx=0.1;
d=3;
x0=0;
y0=phi(x0);

[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);

plot(x,y(:,1),'r-',x,y(:,2),'m-',x,y(:,3),'b-');
axis([0,xmax,0,5.1]);
text('Interpreter','latex','String','$\leftarrow y_1$',...
      'Position',[4,1.7],'FontSize',16);
text('Interpreter','latex','String','$\leftarrow y_2$',...
      'Position',[6,0.8],'FontSize',16);
text('Interpreter','latex','String','$\leftarrow y_3$',...
      'Position',[4.7,3.7],'FontSize',16);

function z=phi(x)
    z=zeros(1,3);
    z(1)=5;
    z(2)=0.1;
    z(3)=1;

function z=f(x,y,yt)
    z=zeros(size(y));
    z(1)=-y(1)*yt(1,2) + yt(2,2);
    z(2)= y(1)*yt(1,2) - y(2);
    z(3)= y(2) - yt(2,2);
return

```

### 6.2.5 modelo-enzimas.m

```

function modelo_enzimas

tau=1*ones(1,1);
tau(1,1)=4;

xmax=160;
dx=0.5;
d=4;
x0=0;
y0=phi(x0);

```

```

[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);

plot(x,y);
axis([0,xmax,0,70]);
legend('y_1','y_2','y_3','y_4');

function z=phi(x)
    z=zeros(1,4);
    z(1)=60;
    z(2)=10;
    z(3)=10;
    z(4)=20;

function yprima=f(x,y,yt)
    yprima=zeros(size(y));
    I=10.5;
    z=1/(1+0.0005*yt(1,4)^3);
    yprima(1)=I-z*y(1);
    yprima(2)=z*y(1)-y(2);
    yprima(3)=y(2)-y(3);
    yprima(4)=y(3)-0.5*y(4);
return

```

### 6.2.6 modelo-inmunologico.m

```

function modelo_inmunologico
m=1; tau=1*ones(1,m); tau(1)=0.5;

xmax=60; dx=0.2; d=4; x0=0; y0=phi(x0);

[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);

plot(x,10^4*y(:,1),'r-',x,y(:,2)/2,'m-',x,y(:,3),'b-',x,10*y(:,4));

axis([0,xmax,0,12]); text('Interpreter','latex',
'String','$\leftarrow 10^4V$', 'Position',[8,1.7],'FontSize',16);
text('Interpreter','latex', 'String','$\leftarrow C/2$',
'Position',[10,4],'FontSize',16); text('Interpreter','latex',
'String','$\leftarrow F$', 'Position',[13,6],'FontSize',16);
text('Interpreter','latex', 'String','$\leftarrow 10m$',
'Position',[20,0.6],'FontSize',16);

```

```

function z=phi(x)
    z=zeros(1,4);
    z(1)=max([0,10^(-6)+x]);
    z(2)=1;
    z(3)=1;
    z(4)=0;

function z=f(x,y,yt)
    z=zeros(size(y));
    h=[2,0.8,10^4,0.17,0.5,10,0.12,8];
    if (y(4)<=0.1)
        em=1;
    elseif (y(4)<=1)
        em=(1-y(4))*10/9;
    end
    z(1)=(h(1)-h(2)*y(3))*y(1);
    z(2)=em*h(3)*y(1,3)*y(1,1)-h(5)*(y(2)-1);
    z(3)=h(4)*(y(2)-y(3))-h(8)*y(3)*y(1);
    z(4)=h(6)*y(1)-h(7)*y(4);

```

## Referencias Bibliográficas

- [1] Helen Byrne. *Using Mathematics To Study Solid Tumour Growth*. University of Nottingham, England. helen.byrne@nottingham.ac.uk
- [2] Odo Diekmann, Stephan A. van Gils, Sjoerd M. Verduyn Lunel, Hans-Otto Walther. *Delay Equations*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [4] Ursula Foryś. *Global Stability for a Class of Delay Differential Equations*. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Poland.
- [5] Ursula Foryś. *Biological delay systems and the Mikhailov criterion of stability*. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Poland.
- [6] E. Hairer. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, 1987.
- [7] A. Halanay. *Differential Equations. Stability, Oscillations, Time lags*. Academic Press, 1966.
- [8] Lobón Durand Roxana, Irla Mantilla N. *Análisis de la formación del núcleo necrótico en el crecimiento de un tumor sólido. Seminario de Matemática Pura y Aplicada I*. EPM. Facultad de Ciencias, UNI, Perú, 2005.
- [9] Lobón Durand Roxana, Irla Mantilla N. *Estabilidad de la Ecuación de crecimiento de un tumor Avascular. Seminario de Matemática Pura y Aplicada II*. EPM. Facultad de Ciencias, UNI, Perú, 2006.
- [10] Wim Michiels. *Stability of perturbed delay differential equations and stabilization of nonlinear cascade systems*. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- [11] A. Hastings, *Population Biology. Concepts and models*, Springer, 1998.
- [12] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, 1993.
- [13] T.G. Hallam, Population dynamics in a homogeneous environment, en “Mathematical Ecology. An introduction”, editado por T.G. Hallan y S.A. Levin, Springer, 1986, pp. 61-94.
- [14] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill, 1995.
- [15] V. Kolmanovskii y A. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Mathematics and its Applications*, Vol. 463, Kluwer Academic Publishers, 1999.

- [16] G. E. Hutchinson, Circular causal systems in ecology. *Ann. New York Acad. Sci.* 50, (1948), 221-248.
- [17] A.J. Nicholson, The self-adjustment of populations to change. *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, 22, 153-173 (1957).
- [18] R.M. May, *Stability and complexity in model ecosystems*, Princeton University Press, 1975.
- [19] F. E. Smith, Population dynamics in *Daphnia magna* and a new model for population growth, *Ecology* 44, 651-663 (1963).
- [20] K. Gopalsamy y G. Ladas, Environmental periodicity and time delays in a “food-limited” population. *J. Math. Anal. Appl.* 147,(1990), 545-555.
- [21] K. Gopalsamy, M.R.S. Kulenovic y G. Ladas, On the oscillation and asymptotic behavior of  $N'(t) = N(t)[a + bN(t-t) - cN^2(t-t)]$ . *Quart. Appl. Math.* 3, (1990), 433-440.
- [22] Y. Kuang, *Delay differential equations with applications in population dynamics*. Academic Press, 1993.
- [23] E.C. Pielou, *Mathematical Ecology*, Wiley Interscience, 1977.
- [24] W.C. Allee, *Animal aggregations: a study in general sociology*, Chicago University Press, 1933.
- [25] A. Ivanov, E. Liz y S. Trofimchuk, Halanay inequality, Yorke 3/2 stability criterion, and differential equations with maxima. *Tohoku Math. J.*, 54, (2002), 277-295.
- [26] Solving ODEs and DDEs with residual control, L.F. Shampine, *Applied Numerical Mathematics*, 52 (2005), pp 113-127.