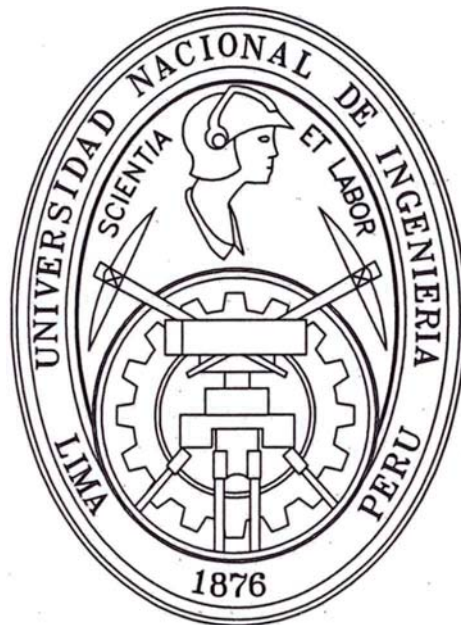


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



**TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE  
LICENCIATURA, ESPECIALIDAD: MATEMÁTICA**

**TITULADA:**

**“ESQUEMAS DE HILBERT Y POLINOMIOS DE MACDONALD,  
TEOREMA DEL POLIGRAFO”**

**PRESENTADA POR:**

**BACH. FRANCISCO JAMES LEON TRUJILLO**

**LIMA - PERU  
2002**

A MI FAMILIA,

CON AMOR Y APRECIO.

# Agradecimientos

Existen muchas personas a quienes debo agradecer el que éste trabajo sea presentado para poder obtener el título profesional de licenciatura, mención en Matemática.

En primer lugar al profesor Claudio Procesi, de la Universidad de Roma "La Sapienza", por haberme permitido exponer el contenido de éste trabajo, y mucho más, en el Seminario de Algebra organizado en el año académico 2001-2002. Esto me permitió conocer la famosa conjetura  $n!$  factorial, muy fácil y elemental en su formulación y enunciado pero de difícil demostración, a la que se han dedicado por más años de la última década muchos matemáticos alrededor del mundo.

Enseguida debo agradecer la disponibilidad del profesor Julio Alcántara, de la Universidad Nacional de Ingeniería, por aceptar ser mi asesor en la presente tesis y atender mi exposición sobre el argumento presentado.

También va mi gratitud y reconocimiento al profesor Félix Escalante, director de la Escuela profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias - UNI, por haberme motivado y guiado en presentar la presente tesis.

Mis reconocimientos de gratitud van también a Percy Fernández y Roger Meztger, profesores y amigos del Instituto de Matemática y Ciencias Afines IMCA, por su disponibilidad y ayuda en el uso del Latex, editor científico, para poder corregir algunos errores de presentación en la presente tesis.

También deseo agradecer la amabilidad y atención de la señorita María Aliaga, secretaria del Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias de la UNI, por su apoyo y guía en la presentación de la presente tesis.

Finalmente, y más importante, agradecer de modo muy especial a Alejandro y Prudencia, mis padres, y a René y Marco Antonio, mis hermanos, por su apoyo constante en estos últimos años y desde siempre.

# Indice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Polinomios de Macdonald</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Los espacios <math>D_\mu</math> y <math>DH_n</math></b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Los esquemas <math>H_n</math> y <math>X_n</math></b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>El Poligrafo</b>	<b>16</b>
	5.2 Definiendo el poligrafo	16
	5.3 Conclusión . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Demostración del Teorema del Poligrafo</b>	<b>21</b>
	6.1 Geometría local de $Z(n, l)$ . .	24
	6.2 Serie de Hilbert Generalizada . . . .	27
	6.3 El Caso $n = 2$ . . . . .	29
	6.4 Descripción adicional de $Y(m, r, k)$	33
	6.5 Prolongación de base común de ideales	34
	6.6 Prolongación de base para arreglos especiales .	37
	6.7 Construcción de la base . . . . .	39

# Resumen

En [15], Haiman estudia el esquema de Hilbert isospectral  $X_n$ , definido como el producto fibrado reducido de  $(\mathbb{C}^2)^n$  con el esquema de Hilbert  $H_n$  de puntos en el plano  $\mathbb{C}^2$ , sobre la potencia simétrica  $S^n \mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^2)^n / S_n$ . Por un Teorema de Fogarty,  $H_n$  es regular. Haiman prueba que  $X_n$  es normal, Cohen-Macaulay, y Gorenstein, y así plano sobre  $H_n$ , de donde se deriva la demostración de la conjetura  $n!$  de Garsia y Haiman a través de una interpretación de teoría de representación de los coeficientes de Kostka-Macdonald  $K_{\lambda\mu}(q, t)$ , el cual también establece la conjetura de positividad de Macdonald, es decir que  $K_{\lambda\mu}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$ . Las pruebas dependen sobre el estudio de un arreglo de subespacios  $Z(n, l) \subset (\mathbb{C}^2)^{n+l}$  llamado *poligrafo*, el cuyo anillo de coordenadas  $R(n, l)$  porta información geométrica de  $X_n$ . El resultado importante, que es mostrado en esta tesis, es que  $R(n, l)$  es un módulo libre sobre el anillo de polinomios en un conjunto de coordenadas sobre  $(\mathbb{C}^2)^n$ . La prueba de este hecho es mostrado a través de un delicado proceso inductivo basado, sin embargo, sobre álgebra conmutativa elemental.

# Capítulo 1

## Introducción

El esquema de Hilbert de puntos en el plano  $H_n = \text{Hilb}^n(\mathbb{C})$ , es una variedad algebraica que parametriza subesquemas finitos de longitud  $n$  en  $\mathbb{C}$ . A cada tal subesquema  $S$  le corresponde un multiconjunto de  $n$  elementos, o  $n$ -upla no ordenada con posibles repeticiones  $\sigma(S) = [P_1, \dots, P_n]$ , de puntos en  $\mathbb{C}^2$ , donde los  $P_i$  son los puntos de  $S$ , repetidos con apropiadas multiplicidades. Existe una variedad  $X_n$ , finita sobre  $H_n$ , cuya fibra sobre el punto de  $H_n$  correspondiente a  $S$  consiste de todas las  $n$ -uplas ordenadas  $(P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{C}^2)^n$  con multiconjunto base  $\sigma(S)$ . Llamamos  $X_n$  el esquema de Hilbert isospectral.

Gracias a un teorema de Fogarty [11], el esquema de Hilbert  $H_n$  es irreducible y no-singular. La geometría de  $X_n$  es más complicada, pero también muy especial. Uno de los principales resultados que es mostrado por Haiman [15], el cual enunciamos en el Teorema 4.1.17, es que  $X_n$  es normal, Cohen-Macaulay y Gorenstein.

Investigaciones hechas por Haiman en [14] indicaban de una importante y vasta correspondencia entre la geometría y cohomología de haces de  $H_n$  y  $X_n$  por un lado, y la teoría de *polinomios de Macdonald* por otro lado. Los polinomios de Macdonald

$$(1.1) \quad P_\mu(x; q, t),$$

donde  $\mu$  es una partición de un entero  $n$ , son una base de la álgebra de funciones simétricas en las variables  $x = x_1, x_2, \dots$ , con coeficientes en el campo  $\mathbb{Q}(q, t)$  de funciones racionales en dos parámetros  $q$  y  $t$ . Ellos fueron introducidos en 1988 por Macdonald [25] para unificar las dos conocidas bases a

un parámetro de la álgebra de funciones simétricas: los polinomios de *Hall-Littlewood* (haciendo  $q = 0$ ) y los polinomios de Jack (haciendo  $t = q^\alpha$  y luego  $q \rightarrow 1$ ); para un tratamiento de estos polinomios ver [26]. Se percibió en modo inmediato que el descubrimiento de los polinomios de Macdonald fué fundamental y seguro para tener muchas ramificaciones. Desarrollos en los años sucesivos a su descubrimiento, son la notable prueba de Cherednik en [3] de las identidades de Macdonald del término constante y otros descubrimientos relacionando los polinomios de Macdonald con la teoría de representación de grupos cuánticos en [5] y álgebras afines de Hecke [18],[19],[27], el modelo de Calogero-Sutherland en física de partículas en [21], y diversas conjeturas combinatoriales sobre los diagonales armónicos [1],[7],[12].

La conexión entre los polinomios de Macdonald y los esquemas de Hilbert viene del trabajo de Garsia y Haiman sobre la *conjetura de positividad de Macdonald*. Después de una conveniente normalización y transformando los polinomiales  $P_\mu(x; q, t)$  obtenemos los polinomiales  $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$ , para los cuales podemos escribir su expansión en términos de las funciones de Schur  $s_\lambda$  como

$$(1.2) \quad \tilde{H}_\mu(x; q, t) = \sum_{\lambda} \tilde{K}_{\lambda, \mu}(q, t) s_\lambda(x)$$

donde  $\lambda$  es también una partición de  $n$ . Los coeficientes de transición  $\tilde{K}_{\lambda, \mu}(q, t)$  son conocidos como *coeficientes transformados de Kostka-Macdonald*. De su definición, ellos son funciones racionales de  $q$  y  $t$ , pero conjeturalmente ellos son polinomios en  $q$  y  $t$  con coeficientes enteros no negativos:

$$(1.3) \quad \tilde{K}_{\lambda, \mu}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$$

La conjetura de positividad resto abierta desde que Macdonald, basandose en cálculos efectuados por él, la formuló en tiempos de su original descubrimiento. Él definió estos coeficientes en modo que para  $q = 0$  ellos den origen a los famosos coeficientes  $t$ -Kostka  $\tilde{K}_{\lambda, \mu}(t) = \tilde{K}_{\lambda, \mu}(0, t)$ . Entonces la conjetura se reduce para el Teorema de positividad para los coeficientes  $t$ -Kostka, el cual tiene importantes interpretaciones algebraicas, geométricas y combinatoriales estudiadas en [2], [4], [8], [16], [17], [20], [22], [23], [24], [29].

En [6], Garcia y Haiman conjeturaron una interpretación de los coeficientes de Kostka-Macdonald  $K_{\lambda, \mu}(q, t)$  como multiplicidades de caracteres graduados para ciertos  $S_n$ -módulos doblemente graduados  $D_\mu$ . El módulo  $D_\mu$



es el espacio de polinomios en  $2n$  variables generado por todas las derivadas de un cierto determinante (ver 3.1.6 para su precisa definición). La conjeturada interpretación implica la conjetura de positividad de Macdonald. Ello también implica, como consecuencia de conocidas propiedades de los  $\tilde{K}_{\lambda\mu}(q, t)$ , que para cada partición  $\mu$  de  $n$ , la dimensión de  $D_\mu$  es igual a  $n!$ . Esta aparente elemental afirmación fué conocida como la conjetura  $n!$ .

Posteriores investigaciones permitieron ver que esas conjeturas son relacionadas a la geometría del esquema de Hilbert isospectral. En [14], Haiman muestra que la propiedad de  $X_n$  de ser Cohen-Macaulay es equivalente a la conjetura  $n!$ , y además que implica la fuerte conjetura sobre la interpretación de  $K_{\lambda\mu}(q, t)$ , el coeficiente de Kostka-Macdonald, como la multiplicidad del carácter graduado para  $D_\mu$ . Estos resultados geométricos completaban la prueba de la conjetura de positividad de Macdonald.

La demostración de las propiedades geométricas de  $X_n$ , enunciadas anteriormente, pasa por un resultado no elemental, el Teorema A del Capítulo 6 de la presente tesis, el cual manifiesta que el anillo de coordenadas de un particular arreglo de subespacios conocido como *poligrafo* es un módulo libre sobre el anillo de polinomios generado por algunas de las coordenadas. La definición, estudio y demostración de este hecho, por inducción, es el argumento principal de la presente tesis a la cual le dedicamos los dos últimos capítulos.

El resto de la tesis es organizada como sigue. En el Capítulo 2 damos las relevantes definiciones concernientes a los polinomios de Macdonald y establecemos la conjetura de positividad de Macdonald. En el Capítulo 3 presentamos la construcción de los espacios  $D_\mu$  y  $DH_n$ , los respectivos teoremas sobre sus dimensiones, y el teorema sobre el carácter graduado para  $D_\mu$ . El Capítulo 4 es dedicado a la definición y teoremas relevantes concernientes a los esquemas  $H_n$  y  $X_n$ . En el Capítulo 5 presentamos la definición del *poligrafo*, la relación entre varios de los diferentes teoremas enunciados hasta el momento, entre ellos el hecho de que el principal Teorema geométrico sobre el esquema de Hilbert isospectral  $X_n$  es equivalente al Teorema  $n!$ , así como algunos ejemplos de motivación para la demostración del Teorema del Poligrafo, Teorema A, en el Capítulo 6.

Para la historia, avances realizados, así como la demostración de los lemas,

corolarios y principales teoremas enunciados aquí, pero de los cuales no se dan por motivos obvios del objetivo de la presente tesis, invitamos al lector a una lectura de los trabajos listados en la bibliografía, entre ellos principalmente los de De Concini, Garsia, Haiman y Procesi.

## Capítulo 2

# Polinomios de Macdonald

Consideraremos las formas integral transformada  $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$  de los polinomios de Macdonald, indexados por una partición entera  $\mu$ , y homogéneos de grado  $n = |\mu|$ . Como definidos en [14], eq. (2.18), estos son

$$(2.1) \quad \tilde{H}_\mu(x; q, t) = t^{n(\mu)} J_\mu[X/(1 - t^{-1}); q, t^{-1}],$$

donde  $J_\mu$  denota la forma integral de Macdonald como en [26], VI, eq. (8.3), y  $n(\mu) = \sum_i (i - 1)\mu_i$ . Las parentesis cuadradas en 2.1 significan la *plethystic substitution*. Veamos brevemente la definición de esta operación (ver [14] para más detalles). Sea  $\mathbb{F}[[x]]$  la álgebra de series formales a coeficientes en el campo  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q, t)$ , en las variables  $x = x_1, x_2, \dots$ . Para cualesquiera  $A \in \mathbb{F}[[x]]$ , denotamos mediante  $p_k[A]$  el resultado de reemplazar cada indeterminada en  $A$  por su  $k$ -ésima potencia. Esto incluye las indeterminadas  $q$  y  $t$  al igual que las variables  $x_i$ . La álgebra de las funciones simétricas  $\Lambda_{\mathbb{F}}$  es libremente generada como una  $\mathbb{F}$ -álgebra por las series de potencias

$$(2.2) \quad p_k(x) = x_1^k + x_2^k + \dots$$

Así existe un único homomorfismo de  $\mathbb{F}$ -álgebras

$$(2.3) \quad ev_A : \Lambda_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbb{F}[[x]] \quad p_k(x) \mapsto p_k[A].$$

En general escribiremos  $ev_A(f)$  como  $f[A]$ , para cualesquiera  $f \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ . También entraremos en la convención que  $X$  entienda como la suma  $X = x_1 + x_2 + \dots$  de las variables, por lo tanto tenemos  $p_k[X] = p_k(x)$  y así  $f[X] = f(x)$  para cada  $f$ . Notar que una *plethystic substitution* tal como

$f \mapsto f[X/(1 - t^{-1})]$ , según como tenemos en el lado derecho de 2.1, da otra vez una función simétrica.

Existe una directa simple caracterización de los transformados de los polinomios de Macdonald  $\tilde{H}_\mu$ .

**Proposición 2.0.1** *Los polinomios  $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$  satisfacen*

- $\tilde{H}_\mu(x; q, t) \in \mathbb{Q}(q, t)\{s_\lambda[X/(1 - q)] : \lambda \geq \mu\}$ ,
- $\tilde{H}_\mu(x; q, t) \in \mathbb{Q}(q, t)\{s_\lambda[X/(1 - t)] : \lambda \geq \mu'\}$ , y
- $\tilde{H}_\mu[x; q, t] = 1$

donde  $s_\lambda(x)$  es la función de Schur,  $\mu'$  es la partición conjugada de  $\mu$ , y el ordenamiento es el orden parcial dominado sobre las particiones de  $n = |\mu|$ . Esas condiciones caracterizan  $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$  en modo único

**Definición 2.0.2** *Definimos*

$$\tilde{K}_\mu(q, t) = t^{n(\mu)} K_\mu(q, t^{-1})$$

donde  $K_\mu(q, t)$  es el coeficiente de Kostka-Macdonald definido en [26], VI, eq. (8.11).

Esto es relacionado a la transformada de los polinomios de Macdonald mediante

$$(2.4) \quad \tilde{H}_\mu(x; q, t) = \sum_{\lambda} \tilde{K}_{\lambda\mu}(q, t) s_\lambda(x)$$

Es conocido que  $K_{\lambda\mu}(q, t)$  tiene grado al máximo  $n(\mu)$  en  $t$  y la conjetura de positividad 1.3, enunciada en la introducción, puede ser formulada en modo equivalente en términos de  $K_{\lambda\mu}(q, t)$  como:

**Conjetura 2.0.3** (*Conjetura de positividad de Macdonald*)

*Los coeficientes de Kostka-Macdonald verifican  $K_\mu(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$*

# Capítulo 3

## Los espacios $D_\mu$ y $DH_n$

Consideramos el conjunto de los números naturales definido como  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Definición 3.1.4** Sea  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$  el anillo de polinomios en  $2n$  variables. Para cada subconjunto  $D = \{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\}$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  con  $n$  elementos, asociamos un polinomial  $\Delta_D \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  definido como

$$(3.1) \quad \Delta_D = \det(x_i^{p_j} y_i^{q_j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Usualmente  $D$  debe ser el diagrama de Young de una partición  $\mu$  de  $n$ :

$$(3.2) \quad D_{(\mu)} = \{(i, j) \mid j < \mu_{i+1}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, el diagrama para  $\mu = (2 \ 2 \ 1)$ ,  $n = 5$ , es como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & (2, 0) & \\ \bullet & (1, 0) & \bullet & (1, 1) \\ \bullet & (0, 0) & \bullet & (0, 1) \end{array}$$

Notar que en la definición el origen de índices es  $(0, 0)$ , y la primera coordenada, la cual indica la fila del diagrama, es la coordenada a lo largo del eje vertical.

En el caso en que  $D = D_{(\mu)}$  es el diagrama de una partición abreviamos  $\Delta_{D_{(\mu)}}$  como  $\Delta_\mu$ . Por ejemplo, para la partición  $\mu = (2 \ 2 \ 1)$  con su

diagrama arriba, tenemos

$$\Delta_\mu = \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 & x_1 y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2 & x_2 y_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_5 & x_5 & x_5 y_5 & x_5^2 \end{bmatrix}$$

Observar que  $\Delta_\mu$  es doblemente homogéneo de grado  $n(\mu) = \sum_i (i-1)\mu_i = \sum_i p_i$  in  $\mathbf{x}$  y grado  $n(\mu')$  en  $\mathbf{y}$ , donde  $\mu'$  denota la partición conjugada de  $\mu$ . Observar también que existe una simmetria

$$\Delta_{\mu'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta_\mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

El grupo simétrico  $S_n$  actua diagonalmente sobre el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  mediante la regla

$$\omega x_i = x_{\omega(i)} \quad , \quad \omega y_i = y_{\omega(i)} \quad \text{para cada } \omega \in S_n .$$

Como  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \bigoplus_{r,s} \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{r,s}$  es doblemente graduado, por grados en las variables  $\mathbf{x}$  y las  $\mathbf{y}$  respectivamente, es claro que  $S_n$  respeta la graduación. Entonces  $S_n$  permuta las filas de la matriz en (3.1), y actua sobre  $\Delta_D$  mediante

$$\omega \Delta_D = \varepsilon(\omega) \Delta_D \quad , \quad \forall \omega \in S_n \quad ,$$

donde  $\varepsilon$  es el carácter signo. En otras palabras,  $\Delta_D$  es un polinomio alternante.

**Definición 3.1.5** *Dado cualquier monomio  $\mathbf{x}^p \mathbf{y}^q = x_1^{p_1} y_1^{q_1} \dots x_n^{p_n} y_n^{q_n}$  con exponentes distintos, el alternate de  $\mathbf{x}^p \mathbf{y}^q$  es  $\pm \Delta_D$  para el correspondiente conjunto de pares de exponentes  $D$ . Si los exponentes no son diferentes, entonces el alternate de  $\mathbf{x}^p \mathbf{y}^q$  es cero.*

De esto no es difícil ver que el conjunto de todos los determinantes  $\Delta_D$  es una base del espacio de polinomios alternantes  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^\varepsilon$ . Otro modo para ver esto es identificando  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^\varepsilon$  con la potencia exterior  $\bigwedge^n \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , entonces los determinantes  $\Delta_M$  son identificados con las bases dados por los *wedges* de los monomios  $x^p y^q \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ .

A continuación damos la definición de uno de los espacios que es de nuestro interes en este capítulo.

**Definición 3.1.6** Dada una partición  $\mu$  de  $n$ , definimos el espacio generado por todas las derivadas iteradas de  $\Delta_\mu$

$$D_\mu = \mathbb{C}[\partial \mathbf{x}, \partial \mathbf{y}] \Delta_\mu$$

Es inmediato ver que este espacio es

- finito dimensional,
- cerrado bajo diferenciación (es decir es un *sistema inverso de Macaulay*),
- $S_n$ -invariante, y
- doblemente graduado:  $D_\mu = \bigoplus_{r,s} (D_\mu)_{r,s}$ ,

donde  $(D_\mu)_{r,s} = D_\mu \cap \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{r,s}$  es el subespacio  $S_n$ -invariante de polinomios doblemente homogéneos en  $D_\mu$  de grado  $r$  en  $\mathbf{x}$  y  $s$  en  $\mathbf{y}$ . Además la acción de  $S_n$  sobre  $D_\mu$  respeta la doble graduación.

**Teorema 3.1.7** La dimensión de  $D_\mu$  es  $n!$ , y la acción de  $S_n$  sobre  $D_\mu$  es la representación regular.

Un refinamiento de este teorema describe la acción de  $S_n$  sobre cada componente doblemente homogéneo  $(D_\mu)_{r,s}$  en modo individual. Recordar que cada  $S_n$ -módulo es una suma directa de irreducibles, y que cada  $S_n$ -módulo irreducible  $V^\lambda$  (a menos de isomorfismo) es indexado por una partición  $\lambda$  de  $n$ . El carácter de un  $S_n$ -módulo  $V$  debe ser denotado con  $\text{ch}V$ . Los caracteres irreducibles son  $\chi^\lambda = \text{ch}V^\lambda$ . La multiplicidad de  $\chi^\lambda$  en un carácter cualesquiera  $\varphi$  es denotado con  $\langle \chi^\lambda, \varphi \rangle$ . A continuación enunciamos el siguiente Teorema (Haiman [15]), el cual implica la conjetura de positividad de Macdonald.

**Teorema 3.1.8** La función generadora para la multiplicidad de  $\chi^\lambda$  en las componentes  $(D_\mu)_{r,s}$  es dada por

$$\sum_{r,s} t^r q^s \langle \chi^\lambda, \text{ch}(D_\mu)_{r,s} \rangle = \tilde{K}_{\lambda,\mu}(q, t)$$

el coeficiente de Kostka-Macdonald.

Las multiplicidades de carácter en la fórmula de arriba son claramente enteros no negativos, esto prueba la conjetura de positividad de Macdonald.

**Corolario 3.1.9** (*Conjetura, Macdonald 1988*)

Los coeficientes de Kostka-Macdonald verifican  $\tilde{K}_{\lambda,\mu}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$ .

**Ejemplo 3.1.10** (*El caso clásico*).

Consideremos la siguiente partición de  $n$  :  $\mu = (1^n)$ . El diagrama de  $(1^n)$  es

- $(n - 1, 0)$
- ⋮
- $(1, 0)$
- $(0, 0)$

Notar que las variables  $y$  tienen exponente cero en el determinante  $\Delta_{(1^n)}$ , donde las variables  $x$  forman la matriz de Vandermonde. Así tenemos

$$\Delta_{(1^n)} = \Delta(\mathbf{x}) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \quad ,$$

el determinante de Vandermonde. Ahora, definimos mediante

$$I = \{f(\mathbf{x}) \mid f(\partial\mathbf{x})\Delta(\mathbf{x}) = 0\}$$

el ideal anulador del sistema inverso generado por  $\Delta(\mathbf{x})$ . Este es igual al ideal generado por todos los polinomios  $S_n$ -invariantes en  $\mathbf{x}$  sin término constante, es decir precisamente por las sumas de potencias de las variables  $\mathbf{x}$  :

$$p_k = \sum_{i=1}^n x_i^k, \text{ así}$$

$$I = (\mathbb{C}[\mathbf{x}]_+^{S_n}) = (p_1, \dots, p_n) \quad .$$

Tenemos isomorfismos de  $S_n$ -módulos

$$D_{(1^n)} \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}]/I \cong H^*(GL_n/B) \quad .$$

En el lado derecho tenemos el anillo de cohomología de la variedad bandera para  $GL_n$ , para el cual es conocido que tiene dimensión  $n!$  y tiene la representación regular de  $S_n$ . Un resultado correspondiente vale para cada grupo de Lie complejo semi-simple y su grupo de Weyl.

El caso clásico permite ver que los espacios  $D_\mu$  dan un tipo de bivalente, doblemente graduada generalización de éste. Otro modo para obtener una



generalización es considerando el sistema inverso de Macaulay definido por el bivalente análogo del ideal  $I$ . En este modo sea

$$J = (\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_+^{S_n}) = (p_{h,k} : 1 \leq h + k \leq n) .$$

donde  $p_{h,k} = \sum_{i=1}^n x_i^h y_i^k$  es una suma *polarizada* de potencias. Ellos generan  $J$  por un Teorema de Weyl. El ideal  $J$  define un sistema inverso de Macaulay

$$DH_n = \{q \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] : f(\partial \mathbf{x}, \partial \mathbf{y})q = 0 \quad \forall f \in J\} ,$$

es decir,  $DH_n$  es el espacio solución del sistema de ecuaciones  $p_{h,k}(\partial \mathbf{x}, \partial \mathbf{y})q = 0$ . Entonces

$$DH_n \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/J$$

como  $S_n$ -módulos (doblemente) graduados, por lo tanto por consideraciones de caracteres los dos son intercambiables. El anillo de la derecha es el anillo de *coinvariantes* para la acción diagonal de  $S_n$ . El espacio  $DH_n$  es el espacio de *armónicos* para esta acción, o *diagonales armónicos*.

**Teorema 3.1.11** *La dimensión de  $DH_n$  es  $(n + 1)^{n-1}$  .*

Este Teorema tiene también un refinamiento dando el carácter de  $(DH_n)_{r,s}$  en cada grado  $r, s$ . La fórmula envuelve polinomios de Macdonald.

# Capítulo 4

## Los esquemas $H_n$ y $X_n$

Denotemos con

$$H_n = \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$$

el *esquema de Hilbert de puntos en el plano afín*  $\mathbb{C}^2$ . Esta es una variedad algebraica que parametriza subesquemas finitos de longitud  $n$  en  $\mathbb{C}$ . Por definición tales subesquemas estan en correspondencia uno a uno con ciertos ideales en el anillo de coordenadas de  $\mathbb{C}^2$ ,  $R = \mathbb{C}[x, y]$ . Así, como un conjunto, se puede describir el esquema de Hilbert como

$$H_n = \{I \subset R \mid \dim_{\mathbb{C}} R/I = n\}$$

En este modo los ideales más importantes son aquellos para los cuales  $R/I$  es un espacio vectorial de dimensión finita  $n$ . En un lenguaje más geométrico,  $R/I$  tiene dimensión de Krull cero, y longitud  $n$ . Para tal un ideal  $I$ , el lugar  $V(I) \subset \mathbb{C}^2$  definido por el conjunto de nulidad de todos los polinomios en  $I$  es finito, con al máximo  $n$  puntos. Pero  $V(I)$  puede tener menos de  $n$  puntos, y entonces los anillos locales  $(R/I)_P$  en esos puntos pueden ser no reducidos (esto significa que ellos pueden contener elementos nilpotentes no cero) y tener longitud mayor de 1. Definiendo la *multiplicidad* de  $R/I$  en  $P$  como la longitud del anillo local  $(R/I)_P$ , la suma de las longitudes es siempre igual a  $n$ . Las multiplicidades no determinan  $I$  en general, por lo tanto un punto de  $H_n$  porta consigo más información que sólo el conjunto  $V(I)$  y las multiplicidades de sus elementos.

**Ejemplo 4.1.12** *El ejemplo "generico" de un punto de  $H_n$  es el ideal  $I = I(S)$  de todos los polinomios que se anulan en un subconjunto finito dado  $S$  de  $\mathbb{C}^2$  de tamaño  $|S| = n$ . En este caso,  $I$  es un ideal radical y  $R/I$  es*

reducido. Cada punto de  $S$  tiene multiplicidad 1, y  $R/I$  puede ser identificado con el anillo de funciones polinomiales sobre  $S$ , por lo tanto  $R/I \cong \mathbb{C}^S \cong \mathbb{C}^n$ , mostrando que  $I(S)$  es en verdad un elemento de  $H_n$ .

**Ejemplo 4.1.13** Los ejemplos “más” especiales de puntos de  $H_n$  son los ideales monomiales. Sea  $\mu$  una partición de  $n$ , y

$$I_\mu = \mathbb{C} \cdot \{x^p y^q \mid (p, q) \notin D(\mu)\}$$

el ideal generado por monomios con exponentes  $(p, q)$  que no pertenecen al diagrama de  $\mu$ . Por ejemplo

$$I_{(3,1)} = (x^2, xy, y^3).$$

Entonces los monomios  $x^p y^q$  con  $(p, q)$  dentro del diagrama forman una base de  $R/I$ , y desde que estos son 4, tenemos que  $I_{(3,1)} \in H_4$ .

**Ejemplo 4.1.14** Notar que siempre se tiene  $(x^n, y^n) \subset I_\mu$ , y consecuentemente como un conjunto  $V(I_\mu) = \{\mathbf{0}\}$ : el único punto es el origen, y su multiplicidad es  $n$ . Geometricamente se puede ver  $I_\mu$  en el siguiente modo: El diagrama de  $\mu$  es un subconjunto de  $n$  elementos  $S = D(\mu)$  de  $\mathbb{C}^2$  y tiene un ideal  $I = I(S) \in H_n$ , como en el ejemplo 4.1.12. Para cualquier parámetro complejo no nulo  $u$ , sucede lo mismo para el conjunto rescalado  $uS$ , y así tenemos la familia de ideales  $I_u = I(uS) \in H_n$ . Ellos forman una curva en  $H_n$ , y  $\lim_{u \rightarrow 0} I_u = I_\mu$ . Es decir,  $I_\mu$  y todos los ideales  $I_u$  están sobre una curva algebraica  $\mathbb{C}^1 \hookrightarrow H_n$ , con  $I_\mu$  correspondiendo a  $u = 0$ . Así  $I_\mu$  puede ser imaginado como el ideal de una copia “infinitesimal” del diagrama  $D(\mu)$  concentrado en el origen.

En cuanto a la estructura de  $H_n$  como una variedad algebraica, es decir al modo como adquiere coordenadas locales, podemos decir en modo sucinto que sus coordenadas son definidos en modo similar a las coordenadas de Plücker sobre una variedad Grasmaniana. En realidad podemos decir que tiene una estructura natural de variedad, y como indicado en el siguiente Teorema es muy especial.

**Teorema 4.1.15** (Fogarty [11]) *El esquema de Hilbert  $H_n$  es no-singular e irreducible, de dimensión  $2n$ .*

Este teorema no es valido para los esquemas de Hilbert de puntos en  $\mathbb{C}^d$  cuando  $d > 2$ . También el teorema “ $n!$ ”, Teorema 3.1.7, no vale en más de dos conjuntos de variables  $x, y, \dots, z$ , y esos dos fenómenos son relacionados el uno con el otro.

El aspecto de irreducibilidad del teorema de Fogarty significa que los ideales  $I = I(S)$  en el ejemplo 4.1.12 son en verdad “genericos”, ellos forman un subconjunto abierto denso de  $H_n$ . Así cada  $I \in H_n$  puede ser realizado como un límite de ideales  $I(S)$ , casi como sucedió para  $I_\mu$  en el ejemplo 4.1.14 (pero no siempre mediante un rescalamento, que sólo da ideales homogéneos).

Existe un mapa

$$\sigma : H_n \rightarrow S^n \mathbb{C}^2 ,$$

donde  $S^n \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^{2n}/S_n$  es la variedad de  $n$ -uplas no ordenadas  $[P_1, \dots, P_n]$  de puntos de  $\mathbb{C}^2$ . El mapa  $\sigma$  es definido mediante

$$\sigma(I) = [m_1 \cdot P_1, \dots, m_k \cdot P_k] ,$$

donde  $V(I) = \{P_1, \dots, P_k\}$  y  $m_i = \text{longitud}(R/I)_{P_i}$  es la multiplicidad de  $P_i$ . El mapa  $\sigma$  es llamado el *morfismo de Chow*, y es un morfismo de variedades algebraicas (en efecto, un morfismo proyectivo). Notar que para  $[P_1, \dots, P_n] \in S^n \mathbb{C}^2$  con todos los  $P_i$  diferentes, existe un único  $I \in H_n$  tal que  $\sigma(I) = [P_1, \dots, P_n]$ , claramente  $I = I(S)$  para  $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ . Así el morfismo de Chow es genericamente uno a uno, o biracional, y como  $H_n$  es no-singular viene a ser una resolución de singularidades de  $S^n \mathbb{C}^2$ .

A continuación damos la defición del segundo objeto geométrico de nuestro interes en este capitulo.

**Definición 4.1.16** *El esquema de Hilbert isospectral  $X_n$  es el producto fibrado reducido*

$$\begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^{2n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n & \xrightarrow{\sigma} & S^n \mathbb{C}^2 \end{array}$$

*Es decir,  $X_n$  es el subconjunto cerrado*

$$\{(I, P_1, \dots, P_n) \mid \sigma(I) = [P_1, \dots, P_n]\} \subset H_n \times \mathbb{C}^{2n} ,$$

*con la estructura inducida de variedad algebraica reducida.*

Podemos precisar que el producto fibrado en este diagrama, el subconjunto cerrado de  $H_n \times \mathbb{C}^{2n}$  con ideal de haces descrito por las ecuaciones  $\sigma(I) = [P_1, \dots, P_n]$ , no es reducido. Por definición, el ideal de haces de  $X_n$  es el radical de este último ideal de haces.

En [14], basandose sobre fundamentales ideas de Procesi, Haiman obtuvo el siguiente resultado geométrico fundamental, complementario para la demostración del Teorema de positividad de Macdonald.

**Teorema 4.1.17** *El esquema de Hilbert isospectral  $X_n$  es normal, Cohen-Macaulay, y Gorenstein.*

Dejando de lado la terminología usada en el enunciado del Teorema, esto significa que  $X_n$ , si bien singular, tiene sólo singularidades especiales.

# Capítulo 5

## El Poligrafo

Para cada  $k \in \mathbb{N}$  denotamos con  $[k]$  el conjunto de los  $k$  primeros números naturales no nulos  $\{1, \dots, k\}$ , y con  $[0]$  el conjunto  $\emptyset$ .

### 5.1 Definiendo el poligrafo

Ahora, siendo  $E$  cualesquier espacio (espacio topológico, variedad algebraica, etc.), damos la siguiente definición.

**Definición 5.1.1** *Se define el poligrafo  $Z(n, l)$  como el subconjunto de  $E^n \times E^l$  definido mediante:*

$$Z(n, l) = \{(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_l) : Q_i \in \{P_1, \dots, P_n\} \quad \forall i \in [l]\}$$

El nombre es debido a lo siguiente: cada función  $f : [l] \rightarrow [n]$  define una aplicación

$$\pi_f : E^n \longrightarrow E^l, \quad \pi_f(P_1, \dots, P_n) = (P_{f(1)}, \dots, P_{f(l)}).$$

cuyo grafo es el lugar geométrico  $W_f \subset E^n \times E^l$  definido como

$$W_f = \{(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_l) : Q_i = P_{f(i)} \quad \forall i \in [l]\}.$$

Claramente  $Z(n, l) = \bigcup_f W_f$  es la unión de estos grafos, por eso el nombre de “poligrafo”.

Notar que para  $l = 0$ , el poligrafo  $Z(n, 0)$  tiene sentido y es igual a  $E^n$  porque  $[l] = [0] = \emptyset$  y la única función  $f : [0] \rightarrow [n]$  es la función  $f = \emptyset$ ,

entonces  $W_\emptyset = E^n$ .

Ahora sea  $E = \mathbb{C}^2$  y fijemos coordenadas sobre  $E^n \times E^l = \mathbb{C}^{2n+2l}$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b} = x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, a_1, b_1, \dots, a_l, b_l,$$

donde  $x_j, y_j$  son las coordenadas del  $j$ -ésimo factor en  $E^n$  y  $a_i, b_i$  son las coordenadas del  $i$ -ésimo factor en  $E^l$ .

En coordenadas,  $W_f$  es el subespacio lineal, y subvariedad algebraica, definida mediante las ecuaciones

$$W_f = V(I_f) \quad , \quad I_f = (a_i - x_{f(i)}, b_i - y_{f(i)} : 1 \leq i \leq l).$$

Así  $Z(n, l)$  es un arreglo de subespacios lineales en  $\mathbb{C}^{2n+2l}$ . Si  $Z(n, l)$  es considerado como una variedad algebraica (non-irreducible), su anillo de coordenadas es

$$R(n, l) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] / I(n, l) \quad ,$$

donde  $I(n, l) = \bigcap_f I_f$  es el ideal de todos los polinomios que se anulan en  $Z(n, l)$  (o equivalentemente que se anulan sobre  $W_f$  para todas las  $f$ ).

**Teorema A (TEOREMA DEL POLIGRAFO)** Para  $E = \mathbb{C}^2$ , el anillo de coordenadas  $R(n, l) = \mathcal{O}(Z(n, l))$  del poligrafo  $Z(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ -módulo libre.

Por simmetria podemos también decir que  $R(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ -módulo libre.

Como una motivación para el Teorema A, consideremos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 5.1.2 POLIGRAFOS EN UN CONJUNTO DE VARIABLES.**

El arreglo es definido como en la definición 5.1.1, pero con  $E = \mathbb{C}$ . En un conjunto de variables las coordenadas son precisamente  $\mathbf{x}, \mathbf{a}$ , y el ideal de  $Z(n, l)$  es simplemente

$$(5.1) \quad I = \left( \prod_{j \in [n]} (a_i - x_j) : 1 \leq i \leq l \right)$$

En efecto,

- $I$  claramente define  $Z(n, l)$  como conjunto,

- $I$  es un ideal intersección completa:  $Z(n, l)$  tiene codimensión  $l$ , e  $I$  tiene  $l$  generadores.
- $V(I)$  es genericamente reducido: Si  $P$  es un punto donde los  $x_j$  son todos diferentes, entonces sólo un  $W_f$  pasa por  $P$ , y cada factor  $(a_i - x_j)$  en (5.1) con  $j \neq f(i)$  es una unidad en el anillo local  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{a}]_P$ , por lo tanto  $I_P$  coincide con el ideal local  $(I_f)_P$ . Una intersección completa genericamente reducida es reducida, así  $I = I(Z(n, l))$ .
- Como  $R(n, l) = \mathcal{O}(Z(n, l))$  es un anillo intersección completa, es un anillo Cohen-Macaulay, y como  $Z(n, l)$  es finito sobre  $E^n$ , las variables  $\mathbf{x}$  forman un sistema homogéneo de parámetros. Esto implica que  $R(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ -módulo libre. En efecto, es libre con base constituida de monomios  $\mathbf{a}^e = a_1^{e_1} \dots a_l^{e_l}$ ,  $0 \leq e_i \leq n$ , porque estos monomios lo generan módulo  $I$  y son en número igual a  $n^l$ , el número de los  $W_f$  y así el grado del morfismo finito plano  $Z(n, l) \rightarrow E^n$ .

**Ejemplo 5.1.3** POLIGRAFOS EN DOS CONJUNTOS DE VARIABLES.  
El análogo de (5.1) en el caso de dos conjuntos de variables es

$$(5.2) \quad I = \left( \prod_{j \in [n]} (a_i - x_j, b_i - y_j) : 1 \leq i \leq l \right)$$

el cual

- claramente define  $Z(n, l)$ , pero
- no es un ideal intersección completa,
- no define  $\bar{Z}(n, l)$  como un esquema reducido, es decir  $I \neq \sqrt{I}$
- $Z(n, l)$  no es Cohen-Macaulay. En efecto,  $Z(2, 1)$  es isomorfo a  $E \times Y$ , donde  $Y$  es la unión de dos 2-subespacios lineales en  $\mathbb{C}^4$  que se intersectan sólo en el origen. Este  $Y$  es el clásico simple ejemplo de un conjunto algebraico afín equidimensional con anillo de coordenadas no Cohen-Macaulay (además no es una intersección completa, aún si lo es como conjunto).
- La propiedad que se extiende del caso de una variable, según el Teorema A, es que  $R(n, l)$  es libre sobre el anillo de polinomios en un conjunto de las variables  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , por ejemplo  $\mathbf{y}$ .

**Conjetura 5.1.4** El análogo del Teorema A aún vale cuando consideramos “ $d$ ” conjuntos de variables, con la propiedad de ser libre sobre uno de los conjuntos de variables.



### Ejemplo 5.1.5 EL TEOREMA DEL POLIGRAFO PARA EL CASO $l = 1$

Daremos una simple demostración del Teorema A para  $Z(n, 1)$ .

Para  $l = 1$ , sea  $W_j \stackrel{\text{def}}{=} W_f$ , donde  $j = f(1)$ . Los subespacios

$$W_j = V(a_1 - x_j, b_1 - y_j)$$

se intersectan transversalmente porque el cambio de variables

$$x'_j = x_j - a_1, \quad y'_j = y_j - b_1$$

los convierte en los subespacios de las coordenadas. Así el ideal  $I(Z(n, 1))$  es igual a el ideal en (5.2) :  $I = \left( \prod_{j \in [n]} (a_1 - x_j, b_1 - y_j) \right)$ .

Entonces  $W_n$  se proyecta isomórficamente sobre  $E^n$ , donde la proyección es dada en coordenadas mediante la sustitución  $a_1 \mapsto x_n, b_1 \mapsto y_n$ . Esta sustitución transforma el ideal de  $W_1 \cup \dots \cup W_{n-1}$  en

$$\prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j, y_n - y_j) .$$

Por lo tanto  $W_n \cap (W_1 \cup \dots \cup W_{n-1}) \cong Z(n-1, 1)$ , donde las coordenadas  $a_1, b_1$  sobre  $Z(n-1, 1)$  son identificadas con  $x_n, y_n$ . Como

$$W_1 \cup \dots \cup W_{n-1} = Z(n-1, 1) \times E,$$

obtenemos una sucesión exacta de  $\mathbb{C}[x, y, a_1, b_1]$ -módulos

$$0 \rightarrow R(n, 1) \rightarrow \mathbb{C}[x, y] \oplus (R(n-1, 1) \otimes \mathbb{C}[x_n, y_n]) \rightarrow R(n-1, 1) \rightarrow 0$$

El término central es la suma directa de los anillos de coordenadas de  $W_n$  y  $W_1 \cup \dots \cup W_{n-1}$ , los otros términos son los anillos de coordenadas de la unión e intersección. Por inducción sobre  $n$  (el caso  $n = 1$  es trivial:  $Z(1, 1) = V(a_1 - x_1, b_1 - y_1)$  y  $R(1, 1) = \mathbb{C}[x_1, y_1]$ ), el término central es un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo y el último es un  $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_{n-1}]$ -módulo libre. Todos los términos son  $\mathbb{C}[y]$ -módulos graduados, finitamente generados cuando son graduados según los  $x$ . Sigue que el primer término es un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre.

## 5.2 Conclusión

Cerramos con una explicación de la relación entre los varios teoremas ya mencionados y lo que sigue del presente trabajo. En [15] se muestra que el teorema  $n!$  es una consecuencia del teorema sobre la geometría de  $X_n$ , Teorema 4.1.17. Podemos precisar como es que los dos son relacionados: Como  $H_n$  es no singular y la proyección  $\rho : X_n \rightarrow H_n$  es finita, la propiedad de  $X_n$  de ser Cohen-Macaulay es equivalente a que  $\rho$  sea plano. Esto significa que sus fibras tienen longitud constante. Ahora para un punto generico  $I = I(S)$  de  $H_n$ , con  $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ , la fibra de  $\rho$  sobre  $I$  consiste de los puntos  $(I, P_{\omega(1)}, \dots, P_{\omega(n)})$ , donde  $P_{\omega(1)}, \dots, P_{\omega(n)}$  es uno de los  $n!$  posibles ordenamientos de los puntos de  $S$ . Esas fibras genericas pueden ser identificadas con  $S_n$ -órbitas regulares reducidas en  $\mathbb{C}^{2n}$ , y tienen longitud  $n!$ . Por planesa, cada fibra tiene longitud  $n!$ , y porta la representación regular de  $S_n$  sobre su anillo de coordenadas (el  $S_n$ -carácter es constante, así como la longitud). Desde que  $V(I_\beta) = \{\underline{0}\}$ , la fibra de  $\rho$  sobre  $I_\beta$  es, como conjunto, concentrada en un único punto  $Q_\beta = \{I, \underline{0}, \dots, \underline{0}\} \in X_n$ . El anillo de coordenadas de la fibra es un anillo local no reducido de la forma  $R_\beta = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/J_\beta$ , de longitud  $n!$  y portando la representación regular de  $S_n$ . Se puede ver que el ideal  $J_\beta$  es exactamente el ideal anulador del sistema inverso de Macaulay  $D_\beta$ , por lo tanto  $R_\beta$  y  $D_\beta$  son isomorfos como  $S_n$ -módulos doblemente graduados. La demostración del Teorema 4.1.17, tal como presentada en [15], es del todo geométrico, ahí se dan algunos hechos que describen más los esquemas  $H_n, X_n$  y un esquema de Hilbert *anidado*  $H_{n-1, n}$  que es introducido para después ir a la prueba. En cierto punto se debe usar un resultado técnico: La composición proyección  $X_n \rightarrow \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , donde el segundo mapa es la proyección sobre las coordenadas  $\mathbf{y}$ , es plano. Para justificar esto es necesario el Teorema del poligrafo, Teorema A. Viendose que  $X_n$  es un *blowup* de  $\mathbb{C}^{2n}$  y usando el Teorema A, se puede ver que la álgebra de Rees definiendo el blowup es un  $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ -módulo libre. Esto implica el resultado de planesa requerido. El próximo y último capítulo es dedicado al argumento central del presente trabajo, la demostración del Teorema del Poligrafo.

## Capítulo 6

# Demostración del Teorema del Poligrafo

En realidad mostraremos un resultado más fuerte, por inducción sobre  $n$  y  $l$ , a decir que  $R = R(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre con una base  $B$  común para una cierta familia de ideales en  $R$ . Por base común se debe entender que cada ideal en la familia es por si un módulo libre, generado por un subconjunto de  $B$ . Observamos que esto es posible porque la familia de ideales que consideramos genera un subretículo  $\mathcal{L}$  dentro del retículo de todos los ideales de  $R(n, l)$ , este último con intersección y suma como operaciones, y además cada ideal  $I$  en  $\mathcal{L}$  es radical y  $R(n, l)/I$  es un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre.

Los ideales  $I$  en  $\mathcal{L}$  deben de ser ideales de ciertos arreglos de subespacios contenidos en el poligrafo  $Z(n, l)$ . Estos ideales son también caracterizados por los elementos de la base  $B$  los cuales serán obtenidos en términos de datos combinatoriales indizados. Estos datos indizados son parejas

$$e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}^n \quad f : [l] \longrightarrow [n].$$

así nuestros elementos de la base seran representados de polinomios

$$p[e, f] \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Como  $R(n, l)$  es doblemente graduado, los elementos  $p[e, f]$  también son doblemente homogéneos. Ellos deben también satisfacer ciertas importantes condiciones de nulidad. Para describir estas condiciones, introducimos los lugares  $Y(m, r, k) \subset Z(n, l)$ , referidos al inicio del parrafo anterior y definidos como

**Definición 6.0.1** Sean  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $r \in [n] \cup \{0\}$ ,  $k \in [l] \cup \{0\}$ . Definimos el subarreglo de  $Z(n, l)$  :

$$Y(m, r, k) = \bigcup_{T, f} V(x_j : j \in T) \cap W_f$$

donde  $f : [l] \rightarrow [n]$  e  $T \subset [n]$  son tales que  $|T \cap [r] \setminus f([k])| \geq m$ .

Denotemos con  $I(m, r, k) = I(Y(m, r, k))$  el ideal de  $Y(m, r, k)$  si este último es visto como subesquema cerrado reducido de  $Z(n, l)$ .

Sin pérdida de generalidad se puede decir que  $Y(m, r, k)$  es el lugar en el cual al menos  $m$  de las primeras  $r$  coordenadas  $x_j$  se anulan, sin considerar las coordenadas en  $f([k])$ . Una caracterización más precisa será dada en la sección 6.4 .

Notar que en algunos casos  $Y(m, r, k)$  es trivial:

- si  $m \leq 0$  entonces  $Y(m, r, k) = Z(n, l)$ , e  $I(m, r, k) = 0$ .
- si  $m > r$ , o si  $m = r = n$  y  $k > 0$ , entonces  $Y(m, r, k) = \emptyset$ , e  $I(m, r, k) = (1)$ .

Ahora podemos precisar que los elementos base  $p[e, f]$  deben satisfacer

$$(6.1) \quad \deg_x p[e, f] = |e| = e_1 + \dots + e_n ,$$

$$(6.2) \quad p[e, f] \in I(m, r, k) \text{ ssi } |(\text{supp } e)^c \cap [r] \setminus f([k])| < m, \\ \text{y estos elementos generan } I(m, r, k) \\ \text{como un } \mathbb{C}[y]\text{-módulo.}$$

donde  $\text{supp } e$  es el conjunto de índices  $j$  con  $e_j \neq 0$ , y  $(\text{supp } e)^c$  es su complemento. La última condición implica que los ideales  $I(m, r, k)$  generan un subretículo distributivo del retículo de ideales en  $R(n, l)$ , con todos los miembros del subretículo generados de subconjuntos de la base  $\{p[e, f]\}$ . Sigue que el anillo de coordenadas de cada intersección de uniones de lugares  $Y(m, r, k)$  es aún un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre (también cada tal intersección es reducida).

Tenemos todo lo necesario para enunciar la versión más fuerte del Teorema A, que será demostrado en el presente Capítulo.

**Teorema A'.** El anillo  $\mathcal{O}(Z(n, l)) = R(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo con una

base  $B$  tal que cada  $I(m, r, k)$  es generado como un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo por un subconjunto de  $B$ .

**Estrategia para construir B base común de ideales (bci):** Consistirá en un procedimiento de inducción, usando bases que asumimos son dadas en  $R(n-1, l)$  y  $R(n, l-1)$ . El proceso de inducción tiene tres pasos:

**1<sup>er</sup> Paso.** Obtenemos una base de  $R(n, l)/I(1, 1, l)$  a partir de una de  $R(n-1, l)$ .

**2<sup>do</sup> Paso.** Obtenemos una base de  $R(n, l)/I(1, 1, t-1)$  a partir de una de  $R(n, l)/I(1, 1, t)$ , para  $t = l, l-1, \dots, 1$ .

**3<sup>er</sup> Paso.** Obtenemos una base de  $R(n, l)$  a partir de una de  $R(n, l)/I(1, 1, 0)$ .

Para mostrar que los conjuntos que construimos son de las bases nos apoyamos en un simple y crucial hecho algebraico: Como consideramos sólo arreglos de subespacios en los cuales las coordenadas  $Y$  son independientes, los anillos de coordenadas correspondientes son  $\mathbb{C}[Y]$ -módulos sin torsión. Para mostrar que un subconjunto de un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo sin torsión es una base libre basta verificar esto localmente en un lugar geométrico abierto  $\widehat{U}_2 \subset \text{Spec} \mathbb{C}[Y]$  que tenga un complemento de dimensión 2. En nuestro caso existe una elección natural de  $\widehat{U}_2$  como el conjunto de puntos con al máximo dos de las  $Y$  coordenadas coincidentes. Veremos que la geometría local de  $Z(n, l)$  sobre  $\widehat{U}_2$  en esencia se reduce al caso  $n = 2$ .

Antes de pasar a ver el estudio geométrico de  $Z(n, l)$  veamos los casos base para la inducción en la demostración del Teorema A'. Este es trivial para  $n = 1$ , de donde este caso nos puede servir como base de inducción sobre  $n$ , no obstante necesitaremos trabajar con el caso  $n = 2$  en todo su detalle pues será usado en el paso de inducción para  $n > 1$ . La base de inducción en  $l$  debe ser el caso  $l = 0$ , si bien no del todo trivial, ilustra el Teorema A' y la definición de los arreglos  $Y(m, r, k)$ .

**Lema 6.0.2** *El Teorema A' vale para  $Z(n, 0)$ . En un modo más preciso  $R(n, 0) = \mathbb{C}[x, y]$  y el conjunto de todos los monomios en las variables  $x$  forman una base del tipo requerido.*

**Demostración.** Tenemos que  $Z(n, 0) = W = E^n$  y así  $R(n, 0) = \mathbb{C}[x, y]$ , el cual es un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre. Consideremos los ideales  $I(m, r, k)$ , donde

necesariamente  $k = 0$ . Entonces  $Y(m, r, 0)$  es la unión de subespacios de  $E^n$  definidos por la nulidad de al menos  $m$  de las coordenadas  $x_1, \dots, x_r$ , y su ideal es

$$I(m, r, 0) = \left\langle \left\{ \prod_{j \in T} x_j \mid T \subset [r], |T| = r - m + 1 \right\} \right\rangle$$

De donde el conjunto  $B$  de todos los monomios en las coordenadas  $x$  es una base de  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre, con subconjuntos generando cada ideal generado por monomios en  $x$ . En particular, cada ideal  $I(m, r, 0)$  es generado por un subconjunto de  $B$ . ■

## 6.1 Geometría local de $Z(n, l)$

Casi todo en la demostración del Teorema A' depende de una reducción geométrica local sobre abiertos  $\widehat{U}_1$  y  $\widehat{U}_2$ , los cuales pasamos a definir.

**Definición 6.1.1** *Sea  $\widehat{U}_k$  el abierto en  $\text{Spec}\mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}^n$  donde sus coordenadas  $y_1, \dots, y_n$  tienen al menos  $n + 1 - k$  valores diferentes, en otras palabras  $\widehat{U}_k$  es el complemento de la unión de los esquemas cerrados  $V(y_{i_1} - y_{j_1}, \dots, y_{i_k} - y_{j_k})$  definidos mediante  $k$  formas lineales independientes.*

*Así,  $\widehat{U}_1$  es el lugar donde todos los  $y_i$  son diferentes,  $\widehat{U}_2$  es el lugar donde existe al máximo una coincidencia.*

*Correspondientemente, para cada esquema  $Z \xrightarrow{\pi} \text{Spec}\mathbb{C}[Y]$  sobre  $\text{Spec}\mathbb{C}[Y]$  definimos el abierto  $U_k = \pi^{-1}(\widehat{U}_k)$  in  $Z$ .*

Para estudiar  $R(n, l)$  como  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo, estudiaremos la localización  $R(n, l)_Q$  en un punto  $Q \in \widehat{U}_k \subset \text{Spec}\mathbb{C}[Y]$ .

Para obtener la información geométrica local sobre  $Z(n, l) \subset E^n \times E^l$  estudiamos la localización  $R(n, l)_P$  en un punto  $P \in U_k \subset E^n \times E^l$ .

El siguiente Lema relaciona estos dos tipos de localización.

**Lema 6.1.2** *Sea  $R$  una  $\mathbb{C}[Y]$ -álgebra y  $\text{Spec}R \xrightarrow{\pi} \text{Spec}\mathbb{C}[Y]$  la proyección. Sean  $\widehat{U}$  y  $U = \pi^{-1}(\widehat{U})$  abiertos como en la definición 6.1.1. Si  $I, J \subset R$  son ideales tal que  $I_P = J_P$  para cada  $P \in U$  (localizados como  $R$ -módulos), entonces  $I_Q = J_Q$  para cada  $Q \in \widehat{U}$  (localizados como  $\mathbb{C}[Y]$ -módulos).*

El siguiente Lema nos dice básicamente que la geometría de  $Z(n, l)$  restricta a  $U_1$  es trivial.



**Lema 6.1.3** *Las componentes  $W_f$  de  $Z(n, l)$  tienen intersección disjunta con  $U_1$ .*

El significado del Lema 6.1.3 es que para cada punto  $P$  en  $Z(n, l) \cap U_1$ , existe un único  $W_f$  conteniendo  $P$ , y  $Z(n, l)$  coincide localmente con  $W_f$ , es decir  $I(Z(n, l))_P = (I_f)_P$ . Una fácil pero útil consecuencia de este Lema es el siguiente Lema.

**Lema 6.1.4** *Sea  $\mathcal{L}$  el subretículo del retículo de los ideales de  $R(n, l)$  generado por los ideales de subespacios de la forma*

$$(6.3) \quad V(x_j \mid j \in T) \cap W_f$$

*Entonces, para cada  $I \in \mathcal{L}$ ,  $V(I) \cap U_1$  es reducido, es decir  $I_P = (\text{rad}(I))_P$  para cada  $P \in U_1$ .*

**Corolario 6.1.5** *Si  $I$  pertenece al retículo de ideales generado de los  $I(m, r, k)$  en  $R(n, l)$ , entonces  $V(I) \cap U_1$  es reducido.*

A continuación daremos un análogo del Lema 6.1.3 para  $U_2$  mostrando que la geometría local de  $Z(n, l)$  en un punto de  $U_2$  en esencia se reduce al caso  $n = 2$ . Para establecer en modo preciso el siguiente Lema necesitamos considerar la siguiente situación. Sea  $Z \subset Z(n, l)$  la unión de las componentes  $W_f$  de  $Z(n, l)$  para las cuales  $f(i)$  es un valor prefijado  $h(i)$ , para cada  $i$  en un subconjunto  $I$  de  $[l]$ . Sobre  $Z$  tenemos idénticamente  $a_i = x_{h(i)}$ ,  $b_i = y_{h(i)}$  para cada  $i \in I$ . De estas ecuaciones podemos eliminar las coordenadas  $a_i, b_i$  para  $i \in I$  y vemos que  $Z$  es isomorfo al poligrafo  $Z(n, l - j) \subset E^n \times E^{n-l}$ , con  $j = |I|$ . Esta situación crea un problema de notación, en nuestro caso el conjunto natural de índices para las coordenadas sobre  $E^{l-j}$  es  $L = [l] \setminus I$  y no  $l - j$ . Un problema similar surge con el conjunto de índices  $[n]$ , por ejemplo si  $Z$  es la unión de aquellas componentes  $W_f$  para las cuales  $f$  toma valores en un subconjunto  $N$  de  $[n]$ . De estas situaciones, que se repetirán en adelante, podemos adoptar la siguiente convención notacional.

**Convención.** *Sean  $N$  y  $L$  conjuntos finitos de tamaños  $|N| = n$ ,  $|L| = l$ . Cada construcción definida en términos de  $n$  y  $l$  tiene una correspondiente construcción en la que el papel desempeñado por  $[n]$  y  $[l]$  es realizado por  $N$  y  $L$  respectivamente.*

Por ejemplo, en los índices  $N, L$ , el espacio ambiente  $E^n \times E^l$  es reemplazado por el espacio  $E^N \times E^L$  con coordenadas

$$\mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N, \mathbf{a}_L, \mathbf{b}_L = x_{j_1}, y_{j_1}, \dots, x_{j_n}, y_{j_n}, a_{i_1}, b_{i_1}, \dots, a_{i_l}, b_{i_l},$$

donde  $N = \{j_1, \dots, j_n\}$  y  $L = \{i_1, \dots, i_l\}$ . Las funciones  $f : [l] \rightarrow [n]$  serán  $f : L \rightarrow N$ , los subespacios  $W_f$  en índices  $N$  y  $L$  tienen el significado obvio, y su unión es el poligrafo  $Z(N, L)$  en índices  $N, L$ . Los arreglos  $Y_{N,L}(m, r, k)$  y sus ideales  $I_{N,L}(m, r, k)$  son definidos como en 6.0.1 pero con  $[r]$  y  $[k]$  como los  $r$  y  $k$  elementos más pequeños de  $N$  y  $L$ , respectivamente.

Con la convención anterior podemos describir la geometría local de  $U_2$ .

**Lema 6.1.6** Sean  $P \in U_2 \setminus U_1$  y  $\{p, q\}$  el único par de índices tal que  $P \in V(y_p - y_q)$ . Sea  $\sim$  la relación de equivalencia definida en  $\{f : [l] \rightarrow [n]\}$  mediante

$$f \sim g \iff \forall i \in [l] \quad f(i) = g(i) \quad \text{o} \quad \{f(i), g(i)\} = \{p, q\}$$

Entonces

- Existe una única  $\sim$ -clase de equivalencia  $F$  tal que  $P \in W_f$  para cada  $f \in F$ . Entonces localmente tenemos

$$Z(n, l) \cong Z = \bigcup_{f \in F} W_f$$

- Sean  $h \in F, N = \{p, q\}$  y  $L = h^{-1}(N)$  (notar que  $L$  depende sólo de  $F$ ), entonces

$$Z \cong E^{[n] \setminus N} \times Z(N, L)$$

En modo análogo a la segunda parte del Lema anterior, tenemos.

**Lema 6.1.7** Sean  $I \subset [l]$ ,  $h : I \rightarrow [n]$  y  $Z = \bigcup W_f$ , con  $f : [l] \rightarrow [n]$  tal que  $f|_I = h$ . Denotemos  $L = [l] \setminus I$ , entonces tenemos un isomorfismo  $Z \cong Z([n], L)$  mediante la proyección de las coordenadas, y el ideal de  $Z$  como un subesquema cerrado de  $Z(n, l)$  es dado de

$$I(Z) = \sum_{i \in I} (a_i - x_{h(i)}, b_i - y_{h(i)})$$



Enunciamos a continuación un Lema técnico, el cual es el motor de toda la maquinaria. Este nos permite verificar que una posible base de un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre (por ejemplo de  $R(n, l)$ ) es en realidad tal controlando sólo la restricción sobre  $U_2$ , donde se tiene un buen control de la geometría local de  $Z(n, l)$ .

**Lema 6.1.8** Sean  $M$  un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo sin torsión, y  $B \subset M$  un subconjunto. Suponga que para cada  $Q \in \widehat{U}_2$ ,  $M_Q$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B$ . Entonces  $M$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B$ .

**Corolario 6.1.9** Sean  $N$  y  $N'$  dos submódulos libres de un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo sin torsión  $M$ , y supongamos que  $N_Q = N'_Q$  para cada  $Q \in \widehat{U}_2$ . Entonces  $N = N'$ .

El siguiente Lema, complementario al Lema 6.1.8, es útil para establecer que una base conocida de un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre (de  $R(n, l)$  por ejemplo) es una base común para un submódulo o submódulos (los ideales  $I(m, r, k)$  por ejemplo).

**Lema 6.1.10** Sea  $B$  una base de un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre  $M$ . Sea  $N$  un submódulo de  $M$ , y supongamos que  $B_1 = B \cap N$  genera  $\mathbb{C}(Y) \otimes N$ . Entonces  $N = \mathbb{C}[Y] \cdot B_1$ .

Notar que la condición de que  $B_1$  genera  $\mathbb{C}(y) \otimes N$  puede ser controlada localmente sobre  $\widehat{U}_1$ , desde que tensorizar con  $\mathbb{C}(y)$  es lo mismo que localizar en  $Q = 0$ , y este último ideal pertenece a cada subconjunto abierto de  $\text{Spec} \mathbb{C}[y]$ . Entonces la filosofía de las aplicaciones de los Lemas 6.1.8, 6.1.10 es: para mostrar que una posible  $B$  es una base de módulo libre, controlamos ello localmente sobre  $\widehat{U}_2$ , de ahí para mostrar que  $B$  es una base común de ideales, controlamos ello localmente sobre  $\widehat{U}_1$ .

## 6.2 Serie de Hilbert Generalizada

Para estudiar el caso  $n = 2$  se necesitará alguna previa información enumerativa sobre la serie de Hilbert de  $R(n, l)$ . Esta es dada en la presente sección. Observamos primeramente dos hechos generales:  $R(n, l)$  es doblemente graduado y finito sobre  $\mathbb{C}[x, y]$ :

• El primero es un hecho bien conocido. El anillo de coordenadas  $\mathcal{O}(E^n \times E^l) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  de  $E^n \times E^l$  es doblemente graduado, graduado en las variables  $\mathbf{x}, \mathbf{a}$  (o  $x$ -degree) y en las variables  $\mathbf{y}, \mathbf{b}$  ( $y$ -degree) respectivamente. Los ideales son doblemente homogéneos, y como el ideal de  $Z(n, l)$  es una intersección, el anillo de coordenadas  $R(n, l) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]/I(Z(n, l))$  es doblemente graduado.

• Por construcción  $Z(n, l)$  es finito sobre  $E^n$ , entonces  $R(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ -módulo finitamente generado.

Entonces, si

$$R(n, l) = \bigoplus_d R(n, l)_d$$

es la graduación de  $R(n, l)$  cuando se gradua según las  $x$ , cada componente homogénea  $R(n, l)_d$  es un  $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ -módulo graduado finitamente generado (graduado según las  $x$ ). Tenemos la siguiente versión graduada del Lema de Nakayama.

**Lema 6.2.1** *Sea  $M$  un  $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ -módulo graduado finitamente generado. Si  $B$  es un conjunto de elementos homogéneos de  $M$  que genera  $M/\mathbf{y}M$  como un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, entonces  $B$  genera  $M$ . Además si  $B$  satisface  $|B| = \dim_{\mathbb{C}(\mathbf{y})}(\mathbb{C}(\mathbf{y}) \otimes M)$ , entonces  $M$  es un  $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ -módulo libre con base  $B$ .*

Para el anillo de coordenadas  $R$  de toda unión de subespacios de la forma  $V(x_j : j \in T) \cap W_f$ , incluyendo  $Z(n, l)$  y  $Y(m, r, k)$ , podemos inmediatamente determinar la serie de Hilbert de  $\mathbb{C}(\mathbf{y}) \otimes R$  como una  $\mathbb{C}(\mathbf{y})$ -álgebra graduada (graduada según las  $x$ ).

**Lema 6.2.2** *Sea  $R$  el anillo de coordenadas de una unión de subespacios*

$$\bigcup_C V(x_j : j \in T) \cap W_f ,$$

sobre una colección  $C$  de pares  $T \subset [n], f : [l] \rightarrow [n]$ . Entonces  $R$  es sin torsión como un  $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ -módulo, y la dimensión de la componente homogénea graduada, según las  $x$ ,  $\mathbb{C}(\mathbf{y}) \otimes R_d$  es igual al número de pares

$$e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}^n, \quad f : [l] \rightarrow [n]$$

tal que  $e_1 + \dots + e_n = d$  y para esta  $f$  existe algún par  $(T, f) \in C$  con  $e_j = 0$  para cada  $j \in T$ .

**Corolario 6.2.3** *La serie de Hilbert de  $\mathbb{C}(\mathbf{y}) \otimes R(n, l)$  como una  $\mathbb{C}(\mathbf{y})$ -álgebra graduada según las  $x$  es dada de*

$$\sum_d t^d \dim_{\mathbb{C}(\mathbf{y})}(\mathbb{C}(\mathbf{y}) \otimes R(n, l)_d) = \frac{n^l}{(1-t)^n}.$$

Del Lema 6.2.1 y del Corolario 6.2.3 sigue el siguiente Corolario.

**Corolario 6.2.4** *Sea  $B$  un conjunto de polinomios doblemente homogéneos, siendo que sus imágenes en  $R(n, l)$  generan  $R(n, l)/(\mathbf{y})$  como un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial. Sea  $d(p)$  el grado en  $x$  de  $p \in B$ , y supongamos que el enumerador de grado de  $B$  satisface*

$$\sum_{p \in B} t^{d(p)} = \frac{n^l}{(1-t)^n}.$$

*Entonces  $R(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ -módulo libre con base  $B$ .*

Una versión del Corolario 6.2.3 para los arreglos  $Y(m, r, k)$  es

**Corolario 6.2.5** *La serie de Hilbert de  $\mathbb{C}(\mathbf{y}) \otimes \mathcal{O}(Y(m, r, k))$  como una  $\mathbb{C}(\mathbf{y})$ -álgebra*

$$\sum_d t^d \dim_{\mathbb{C}(\mathbf{y})}(\mathbb{C}(\mathbf{y}) \otimes \mathcal{O}(Y(m, r, k))_d)$$

*es igual al enumerador*

$$\sum_{e, f} t^{|e|}, \quad \text{sobre los } e \in \mathbb{N}^n, f : [l] \rightarrow [n] \text{ satisfaciendo } |(suppe)^c \cap [r] \setminus f([k])| \geq m,$$

*donde  $|e| = e_1 + \dots + e_n$ .*

### 6.3 El Caso $n = 2$

Ahora disponemos de lo necesario para considerar el caso  $n = 2$  y así poder ilustrar los conceptos introducidos. Comenzamos escribiendo en modo explícito los polinomios que deben formar parte de la base común de ideales que debemos obtener.

Para cada par  $(e, f)$ , donde  $e \in \mathbb{N}^2$  y  $f : [l] \rightarrow [2]$ , asociamos un elemento base  $p[e, f]$ , homogéneo con  $\deg_x p = |e| = e_1 + e_2$ .

• Para  $e = (0, 0)$  definimos

$$(6.4) \quad p[e, f] = \prod_{\substack{j > 1 \\ f(j) \neq f(1)}} (b_j - b_1) \cdot \begin{cases} (b_1 - y_2) & \text{si } f(1) = 1 \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

• Para  $e = (0, h)$  con  $h > 0$ , sea  $f^{-1}(\{1\}) = S \cup T$ , donde  $S$  y  $T$  son disjuntos y  $S$  consiste de los  $h$  elementos más pequeños de  $f^{-1}(\{1\})$ , o de todo  $f^{-1}(\{1\})$  si  $h \geq |f^{-1}(\{1\})|$ . Entonces definimos

$$(6.5) \quad p[e, f] = x_2^{h-|S|} \prod_{i \in S} (a_i - x_1 - x_2) \prod_{j \in T} (b_j - y_2) .$$

• Para  $e = (h, 0)$  con  $h > 0$  definimos

$$(6.6) \quad p[e, f] = x_1 \theta p[(0, h-1), \theta f] ,$$

donde  $\theta$  denota la transposición  $(1 \ 2)$ , que opera sobre  $f$  en el modo obvio, y sobre el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x, y, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  intercambiando  $x_1$  con  $x_2$ ,  $y_1$  con  $y_2$ , y fijando las coordenadas  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ .

• Por último, para  $e = (h_1, h_2)$  con  $h_1, h_2 > 0$  sean  $h = \min(h_1, h_2)$  y

$$(6.7) \quad p[e, f] = (x_1 x_2)^h p[e - (h, h), f] .$$

La complicada definición de los elementos  $p[e, f]$  es debida al hecho de que estos deben formar una base común para los ideales  $I(m, r, k)$ . Por ejemplo, para  $e = (0, 0)$  y  $f$  igual a la función constante  $f(i) = 2$ , tenemos que  $p[e, f] = 1$ . Para estos  $e, f$ , la condición (6.2) coloca  $p[e, f]$  sólo en los ideales  $I(m, r, k)$  con  $m > r$  y  $I(2, 2, k)$  con  $k > 0$ , los cuales son trivialmente iguales a  $(1)$ .

**Lema 6.3.1** *Para  $n = 2$ , el anillo de coordenadas  $R(2, l)$  de  $Z(2, l)$  es un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre con base  $B$  el conjunto de los elementos  $p[e, f]$  definidos en (6.4)-(6.7).*

**Demostración.** Debemos mostrar que  $B$  genera  $R(2, l)/(y)$  como un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial. Dado que el enumerador de grado de  $B$  es claramente

$2^l/(1-t)^2$ , la tesis sigue por el Corolario 6.2.4.

Sea  $B_0 = \{p[(0, h), f]\}$  el subconjunto de  $B$  que contiene sólo los elementos definidos en 6.4 y 6.5. . Según 6.6 y 6.7 tenemos

$$B = (B_0 \cup x_1\theta B_0) \cdot \{1, x_1x_2, (x_1x_2)^2, \dots\} .$$

Así, basta mostrar que  $B_0 \cup x_1\theta B_0$  genera  $S = R(2, l)/((x_1x_2) + (y))$ . Para esto último basta mostrar que  $B_0$  genera  $S/(x_1)$  y  $x_1\theta B_0$  genera  $x_1S$ . Como  $x_1x_2 = 0$  en  $S$ , la multiplicación por  $x_1$  da un homomorfismo suryectivo bien definido  $S/(x_2) \rightarrow x_1S$ . Pero si  $B_0$  genera  $S/(x_1)$ , entonces  $\theta B_0$  genera  $S/(x_2)$ , y por lo tanto  $x_1\theta B_0$  genera  $x_1S$ . **Entonces, basta solamente mostrar que  $B_0$  genera  $S/(x_1)$ .**

El ideal de  $Z(2, l)$  contiene el ideal

$$(6.8) \quad \sum_{i \in [l]} (a_i - x_1, b_i - y_1)(a_i - x_2, b_i - y_2) + \sum_{i, j \in [l]} \left( \det \begin{bmatrix} a_i & b_i & 1 \\ a_j & b_j & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \right) .$$

Verifiquemos que los generadores en (6.8) se anulan sobre  $Z(2, l)$ . Esto es claro para los generadores del primer término, porque es un caso especial de (5.2) para  $n = 2$ . Los determinantes en el segundo término se anulan porque sobre cada  $W_f$ , o  $f(i) = f(j)$ , y entonces las dos primeras líneas son iguales, o  $f(i) \neq f(j)$ , y una de las primeras dos líneas es igual a la última. (En realidad  $I(Z(2, l))$  es igual a este ideal). De (6.8) es fácil ver que el ideal

$$I = I(Z(2, l)) + (x_1) + (y)$$

contiene  $a_i^2 - a_ix_2$ ,  $a_ib_i$ ,  $b_i^2$ , y  $x_2b_i$  para cada  $i$ , y  $a_jb_i - a_ib_j$  para cada  $i < j$ . Usando un ordenamiento conveniente de términos, el ideal inicial de  $I$  contiene  $a_i^2, a_ib_i, b_i^2$ , y  $x_2b_i$  para cada  $i$ , y  $a_jb_i$  para cada  $i < j$ . Así  $S/(x_1) = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]/I$  es generado de monomios en  $\mathbb{C}[x_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  no divisibles por alguno de esos. Es decir,  $S/(x_1)$  es generado por monomios

$$(6.9) \quad x_2^k \prod_{i \in S} a_i \prod_{j \in T} b_j ,$$

donde cada elemento de  $S$  es menor que cada elemento de  $T$ , y  $k = 0$  si  $T \neq \emptyset$ . Poniendo en orden los monomios en (6.9) tal que aquellos con valores pequeños de  $k$  preceden aquellos con valores grandes, y para  $k = 0$ , aquellos que no contienen  $b_1$  como un factor preceden aquellos que lo contienen. De

esto se puede ver fácilmente que cada monomio en (6.9) ocurre como el *leading term* en la reducción de un elemento de  $B_0$  módulo  $I$ . Esto implica que  $B_0$  genera  $S/(x_1)$ . ■

Ahora obtenemos el caso especial del Teorema **A'**

**Lema 6.3.2** *Para  $n = 2$ , cada ideal  $I(m, r, k) \subset R(2, l)$  es generado como un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo por el conjunto de elementos  $p[e, f] \in B$  indizados por  $e, f$ , satisfaciendo*

$$(6.10) \quad |(\text{suppe})^c \cap [r] \setminus f([k])| < m .$$

**Demostración.** Primero verificamos que los elementos especificados pertenecen a  $I(m, r, k)$ . Un fácil control a mano permite ver para cada  $m, r, k$ , el ideal  $I$  mostrado en el lado derecho de 6.11 es generado por los polinomios que se anulan sobre  $Y(m, r, k)$ , de donde  $I \subset I(m, r, k)$ . Es sólo rutina controlar caso por caso que los elementos relevantes  $p[e, f]$  pertenecen a  $I$ , siendo sólo complicado ver que  $p[e, f]$  pertenece a  $I(1, 2, k)$  para  $e = (1, 0), f(1) = 2$ , y  $k > 0$ . En este caso  $p[e, f] = x_1 \theta p[(0, 0), \theta f]$  contiene a  $x_1(b_1 - y_1)$ , el cual no es obvio que este en  $I$ . Sin embargo en este caso  $I$  contiene  $a_1 - x_1 - x_2$ , y en  $R(n, l)$  tenemos  $(a_1 - x_2)(b_1 - y_1) = 0$ , de donde  $x_1(b_1 - y_1) = -(a_1 - x_1 - x_2)(b_1 - y_1)$ .

Para completar la demostración es suficiente, gracias al Lema 6.1.10, mostrar que los elementos especificados  $p[e, f]$  generan  $\mathbb{C}(y) \otimes I(m, r, k)$ . Como  $B$  es una base homogénea de  $\mathbb{C}(y) \otimes R(2, l)$ , esto es equivalente a mostrar que las parejas  $e, f$  no satisfaciendo (6.10), y contadas según  $|e|$  el grado  $x$  de  $p[e, f]$ , son enumeradas por la serie de Hilbert de  $\mathbb{C}(y) \otimes \mathcal{O}(Y(m, r, k))$ . Esto es válido por el Corolario 6.2.5 ■

**Corolario 6.3.3** *En el caso  $n = 2$ , los ideales (no-triviales)  $I(m, r, k)$  son generados como ideales en  $R(2, l)$  según como sigue:*

$$(6.11) \quad \begin{aligned} I(2, 2, 0) &= (x, a) \\ I(1, 2, k) &= (x_1 x_2) + \sum_{i \in [k]} (a_i - x_1 - x_2, b_i - b_1) \\ I(1, 1, k) &= (x_1) + \sum_{i \in [k]} (a_i - x_2, b_i - y_2) \end{aligned}$$

**Lema 6.3.4** *Si  $I$  pertenece al retículo generado por los ideales  $I(m, r, k)$  en  $R(n, l)$ , entonces  $V(I) \cap U_2$  es reducido.*



Concluimos el caso  $n = 2$  con otro par de Lemas dando una propiedad de reducida para  $n = 2$  y la correspondiente propiedad local sobre  $U_2$  para todo  $n$ . Antes un Lema previo que se basa en el hecho de que los subespacios  $W_f$  son invariantes con respecto a una simultanea traslación de las coordenadas  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{a}$  por una cantidad común.

**Lema 6.3.5** *Sea  $R$  el anillo de las coordenadas de cualesquiera unión de los subespacios  $W_f \subset E^n \times E^l$ . Si  $x$  es una de las coordenadas  $\mathbf{x}, \mathbf{a}$ , entonces  $\text{rad}(x) = \text{rad}(x)$  en  $R$ .*

**Lema 6.3.6** *Para  $n = 2$  y  $t \in [l]$ , el ideal  $I = I(1, 1, t - 1) + (a_t)$  en  $R(2, l)$  es reducido.*

**Lema 6.3.7** *Para cada  $n$  y para  $t \in [l]$ , si el ideal  $I = I(1, 1, t - 1) + (a_t)$  es visto en  $R(n, l)$ , entonces  $V(I) \cap U_2$  es reducido.*

## 6.4 Descripción adicional de $Y(m, r, k)$

Como la propiedad característica de nuestra base es su compatibilidad con los ideales  $I(m, r, k)$ , veamos algunos hechos geométricos sobre los correspondientes arreglos  $Y(m, r, k)$ . Comenzamos con una descripción equivalente de estos últimos.

**Lema 6.4.1** *Sea  $P \in Z(n, l)$  y  $f$  la función máxima a puntos entre todas las funciones  $h$  tal que  $P \in W_h$ . Entonces  $P \in W_f$ , y*

$$P \in Y(m, r, k) \iff T = \{j \mid P \in V(x_j)\} \text{ satisfasce } |T \cap [r] \setminus f([k])| \geq m .$$

Será necesario conocer que la intersección de los arreglos  $Y(m, r, k)$  es un espacio con las  $Y$  coordenadas independientes.

**Lema 6.4.2** *Como conjuntos se verifica*

$$Y(m, r, k) \cap Y(m', r', k') = \bigcup_{f, T} V(x_j \mid j \in T) \cap W_f$$

donde  $f : [l] \rightarrow [n]$  y  $T \subset [n]$  son tal que

$$|T \cap [r] \setminus f([k])| \geq m \quad \text{y} \quad |T \cap [r'] \setminus f([k'])| \geq m'$$

Ahora, sea  $\theta = (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$  la permutación circular que actúa sobre  $E^n \times E^l$  como el automorfismo que permuta circularmente las coordenadas de  $E^n$  y fija aquellas de  $E^l$ :

$$\theta(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_l) = (P_n, P_1, \dots, P_{n-1}, Q_1, \dots, Q_l)$$

Como la definición del poligrafo es simétrica en los  $P_i$ , tenemos que  $\theta$  induce un morfismo de  $Z(n, l)$ .

**Lema 6.4.3** *Dados  $n, l$  y  $t \in [l]$ . Sean  $L = [l] \setminus \{t\}$  y  $\pi : Z(n, l) \rightarrow Z(n, L)$  la proyección sobre las coordenadas diferentes de  $a_t, b_t$ . Entonces*

- para  $r > 0$  y  $k < t$  tenemos

$$Y(1, 1, t) \cup (Y(m, r, k) \cap Y(1, 1, t-1)) = Y(1, 1, t) \cup (\pi^{-1}\theta Y_{n,L}(m-1, r-1, k) \cap Y(1, 1, t-1))$$

- para  $r > 0$  y  $k \geq t$  tenemos

$$Y(1, 1, t) \cup (Y(m, r, k) \cap Y(1, 1, t-1)) = Y(1, 1, t) \cup (\pi^{-1}\theta Y_{n,L}(m, r-1, k-1) \cap Y(1, 1, t-1))$$

## 6.5 Prolongación de base común de ideales

Presentamos una técnica general para prolongar una base común de  $\mathbb{C}[y]$ -módulos libres para una familia de ideales en una  $\mathbb{C}[y]$ -álgebra  $R$  para una base de una  $R$ -álgebra finita  $S$  generada por una variable coordenada extra  $b$ . En la siguiente sección aplicaremos esto a  $R = R(n, l-1)$  para obtener bases para los anillos de coordenadas de ciertos arreglos especiales  $Z'$  contenidos en  $Z(n, l)$ . Esta prolongación de bases de  $Z(n, l-1)$  para  $Z' \subset Z(n, l)$  será decisivo en uno de los tres pasos en la construcción de la base.

**Definición 6.5.1** *Sean  $Z = \text{Spec}R$  un esquema afín Noetheriano,  $S = R[b]/J$  una  $R$ -álgebra finitamente generada por una variable  $b$ , es decir  $Z' = \text{Spec}S$  es un subesquema cerrado de  $\mathbb{A}^1(Z)$  finito sobre  $Z$ . Definimos el siguiente ideal de  $R$*

$$I_m(Z') = \{a_{m-1} \mid a_{m-1}b^{m-1} + \dots + a_1b + a_0 \in J, a_i \in R\}$$

y denotamos con  $V_m(Z')$  el correspondiente subesquema cerrado  $V(I_m(Z')) \subset Z$



Sea  $F_m$  el  $R$ -submódulo de  $S$  generado por  $\{1, b, \dots, b^{m-1}\}$ , entonces

$$F_m/F_{m-1} = R \cdot b^{m-1} \cong R/I_m(Z')$$

es decir  $Rb^{m-1} \cap F_{m-1} = b^{m-1}I_m(Z')$ . Como  $S$  es un  $R$ -módulo finitamente generado, existe algún  $r$  tal que  $F_r = S$ . Así  $I_m(Z') = (1)$  para cada  $m > r$ .

De la definición de  $I_m(Z')$  se ve fácilmente que  $I_m(Z') \subset I_{m+1}(Z')$  para cada  $m$ . Definiendo  $I_0(Z')$  como 0, obtenemos la siguiente sucesión de ideales

$$(6.12) \quad 0 = I_0(Z') \subset I_1(Z') \subset \dots \subset I_{r+1}(Z') = (1)$$

los cuales son llamados *ideales de eliminación parcial*. La interpretación geométrica de los lugares  $V_m(Z')$  tiene que ver con la longitud de las fibras del homomorfismo  $Z' \rightarrow Z$ , según como pasamos a explicar

**Definición 6.5.2** Sea  $S$  un módulo finitamente generado sobre un anillo conmutativo Noetheriano  $R$ . Para  $P \in \text{Spec}R$  definase

$$(6.13) \quad \mu_P(S) = \dim_{K_P}(K_P \otimes_R S)$$

donde  $K_P = R_P/PR_P$  es el campo residuo del anillo local en  $P$ .

Por el Lema de Nakayama, tenemos

- $\mu_P(S)$  es el número de elementos de cualesquier conjunto minimal de generadores de  $S_P$  como un  $R_P$ -módulo.
- Además, si  $S$  es una  $R$ -álgebra, entonces  $\mu_P(S)$  es la longitud de la fibra de  $\text{Spec}S$  sobre  $P \in \text{Spec}R$ .

En los siguientes Lemas consideraremos como parte de la hipótesis los arreglos especiales  $Z$  y  $Z'$  como en la Definición 6.5.1.

**Lema 6.5.3** Como conjuntos tenemos

$$V_m(Z') = \{P \in Z \mid \mu_P(S) \geq m\}$$

**Lema 6.5.4** Sea  $X$  un esquema afín. Entonces

$$(6.14) \quad V_m(Z' \times X) = V_m(Z') \times X$$

como subesquemas cerrados de  $Z \times X$ .

**Lema 6.5.5** *Supongamos que  $Z'$  es la unión de subesquemas cerrados  $Z'_1$  y  $Z'_2$ , es decir, el ideal de definición de  $Z'$  es una intersección  $J = J_1 \cap J_2$ . Entonces*

$$(6.15) \quad I_s(Z'_1)I_t(Z'_2) \subset I_{s+t-1}(Z')$$

para cada  $s, t$ .

El principal significado de los ideales de eliminación parcial  $I_m(Z')$  es su uso en la prolongación de una base de  $\mathbb{C}[y]$ -módulos libre de  $R$  para  $S$ . Suponiendo que  $R$  tiene una base que es base común para todos los ideales de eliminación parcial, es inmediato construir de esta una base de  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre de  $S$ . Como se desea reducir cada cosa para el caso  $n = 2$ , requerimos de una versión fuerte en la cual las hipótesis son limitadas para cosas que se pueden verificar sobre  $U_2$  o  $U_1$ . Observemos, sin embargo, que cuando las hipótesis en el siguiente Lema valen localmente, en realidad ellos valen en todas partes, es decir los ideales  $I_m$  en (6.16) abajo coinciden con los ideales de eliminación parcial.

**Lema 6.5.6** *Sea  $R$  una  $\mathbb{C}[y]$ -álgebra y sean  $Z = \text{Spec}R$ ,  $Z' = \text{Spec}S$  como en la Definición 6.5.1. Supongamos que*

- Como  $\mathbb{C}[y]$ -módulos,  $R$  es libre y  $S$  es sin torsión.
- $R$  tiene una base  $B = \bigoplus_{j=0}^r B_j$  tal que para cada  $m$ , el submódulo  $I_m = \mathbb{C}[y] \bigcup_{j < m} B_j$  es un ideal en  $R$  satisfaciendo

$$(6.16) \quad I_m(Z')_P = (I_m)_P$$

para cada  $P \in U_2 \cap Z$ . Entonces  $S$  es un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre con base

$$(6.17) \quad B' = \bigcup_{m=1}^r B_m \cdot \{1, b, \dots, b^{m-1}\}.$$

Además, sea  $I \subset R$  un ideal generado como un  $\mathbb{C}[y]$ -módulo libre por un subconjunto  $A \subset B$ , y sea  $Y' = \text{Spec}S/IS$ . Supongamos que

$$(6.18) \quad I_m(Y')_P = I_P + I_m(Z')_P$$

para cada  $m > 0$  y cada  $P \in U_1 \cap Z$ . Entonces el ideal  $IS$  es generado por el subconjunto  $A' = (A \cdot \{1, b, b^2, \dots\}) \cap B'$  de  $B'$ .

## 6.6 Prolongación de base para arreglos especiales

El paso más dificultoso en el procedimiento de construcción de la base considera la construcción de una base de  $\mathbb{C}[y]$ -módulos libre en el anillo  $R(n, l)/I(1, 1, t-1)$ , a partir de una conveniente base en el anillo  $R(n, l)/I(1, 1, t)$ . Para pasar de un anillo al otro necesitaremos de una base de  $I(1, 1, t)/I(1, 1, t-1)$ , y obtenemos esta última de una base de  $R(n, l-1)$  aplicando la teoría de prolongación de la sección anterior para ciertos arreglos especiales que definimos a continuación.

**Definición 6.6.1** *Dados  $n, l, r$  y  $k$ , con  $r \in [n] \cup \{0\}$  y  $k \in [l]$ , definimos el arreglo especial  $Z' = Z'(r, k) = \bigcup V(a_k) \cap W_f$ , donde  $f : [l] \rightarrow [n]$  es tal que  $f(k) \in [r] \setminus f([k-1])$ , como subesquema cerrado reducido de  $Z(n, l)$ . Denotamos con  $Z' \xrightarrow{\pi} Z(n, L)$  la proyección sobre las coordenadas diferentes de  $a_k, b_k$ , donde  $L = [l] \setminus \{k\}$ .*

El significado de los arreglos especiales  $Z'(r, k)$  es como sigue::

- ellos son relacionados a los arreglos  $Y_{n,L}(m, r, k-1)$  en el esquema base  $Z(n, L)$  a través de la teoría de prolongación de bases.
- en  $Z(n, l)$  existe una relación geométrica entre los subconjuntos cerrados  $Z'(n, t), Z'(n-1, t), Y(1, 1, t)$  y  $Y(1, 1, t-1)$  que hace posible el paso de  $R(n, l)/I(1, 1, t-1)$  para  $R(n, l)/I(1, 1, t)$ .

Aquí trataremos el primer aspecto, dejando el último para la siguiente sección. Comenzamos con el siguiente hecho que da una idea de la relación entre  $Z'(r, k)$  y  $Y_{n,L}(m, r, k-1)$  vistos como conjuntos.

**Lema 6.6.2** *Sean  $Z' = Z'(r, k), Z = Z(n, L), L$  y  $\pi$  como en la Definición 6.6.1. Entonces  $Y_{n,L}(m, r, k-1) \subset Z(n, L)$  es la clausura del lugar*

$$\{P \in U_1 \cap Z(n, L) \mid |\pi^{-1}(P)| \geq m\}$$

donde  $|\pi^{-1}(P)|$  es la fibra en  $Z'$  que se encuentra sobre  $P$ .

Ahora aplicamos la teoría desarrollada en la sección anterior al caso en que  $Z' = \text{Spec} S$  es el arreglo especial  $Z'(r, k)$  sobre  $Z = Z(n, L)$ , con  $L = [l] \setminus \{k\}$ . Entonces el anillo de coordenadas del esquema base es  $R = R(n, L)$ . El mapa

$\pi : Z' \rightarrow Z$  es la proyección sobre las otras coordenadas diferentes de  $a_k, b_k$ . Como, por definición,  $a_k$  se anula sobre  $Z'$ , este es un subesquema cerrado de  $\mathbb{A}^1 \times Z(n, L)$ , con  $b_k$  como la coordenada extra  $b$  sobre  $\mathbb{A}^1$ . Además el producto  $\prod_{j \in [n]} (b_k - y_j) \in R[b_k]$  es un polinomio monico en  $b_k$  identicamente nulo sobre  $Z(n, l)$  y por lo tanto también sobre  $Z'$ , de donde  $Z'$  es finito sobre  $Z(n, L)$ . Así  $Z'$  y  $Z = Z(n, L)$  son como en la Definición 6.5.1.

**Lema 6.6.3** Sean  $Z' = Z'(r, k), Z = Z(n, L)$  y  $L$  como en la definición 6.6.1. Entonces

$$(6.19) \quad I(Z') \subset I_{n,L}(m, r, k-1) = I(Y_{n,L}(m, r, k-1)) \subset R(n, L)$$

**Lema 6.6.4** Para  $n = 2$ , en el Lema 6.6.3, (6.19) es una igualdad.

**Lema 6.6.5** Para cada  $n$ , en el Lema 6.6.3, (6.19) es una igualdad localmente sobre  $U_2$ , es decir,

$$I_m(Z')_P = I_{n,L}(m, r, k-1)_P$$

para cada  $P \in U_2 \cap Z(n, L)$ .

**Lema 6.6.6** Dados  $Z' = Z'(r, k)$  y  $Z = Z(n, L)$ ,  $L = [l] \setminus \{k\}$ . Supongamos que  $R(n, L)$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B$  tal que cada su ideal  $I_{n,L}(m', r', k')$  es generado por un subconjunto de  $B$ . En particular, para  $r' = r, k' = k-1$  tenemos  $B = \bigoplus_{j=0}^r B_j$  tal que  $I_{n,L}(m, r, k-1) = \mathbb{C}[Y] \cdot \bigcup_{j < m} B_j$  para cada  $m$ . Entonces,  $S = \mathcal{O}(Z')$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base

$$(6.20) \quad B' = \bigcup_{m=1}^r B_m \{1, b_k, \dots, b_k^{m-1}\}$$

Además, para cada  $m', r', k'$ , si  $A \subset B$  genera  $I_{n,L}(m', r', k')$ , entonces  $A' = (A \cdot \{1, b_k, b_k^2, \dots\}) \cap B'$  genera  $I_{n,L}(m', r', k') \cdot S$

**Lema 6.6.7** Con las hipótesis del Lema 6.6.6, cada ideal  $I_{n,L}(m', r', k') \cdot S$  es radical, por lo tanto

$$S/I_{n,L}(m', r', k') \cdot S = \mathcal{O}(\pi^{-1}Y_{n,L}(m', r', k'))$$

y es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre.

**Lema 6.6.8** Sean  $Z' = Z'(r, k)$  y  $Z'' = Z'(r - 1, k)$  arreglos especiales sobre  $Z = Z(n, L)$ , donde  $L = [l] \setminus \{k\}$ ,  $Z' = \text{Spec} S$  y  $J' \subset S$  es el ideal de  $Z''$  como subesquema cerrado de  $Z'$ . Supongamos que  $R(n, L)$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con una base  $B$  tal que cada su ideal  $I_{n,L}(m', r', k')$  es generado por un subconjunto de  $B$ . Entonces  $J'$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con una base  $B'$  tal que cada ideal  $(I_{n,L}(m', r', k') \cdot S) \cap J'$  es generado por un subconjunto de  $B'$ .

## 6.7 Construcción de la base

Ahora podemos dar los Lemas que nos permitan la construcción de la base requerida en el Teorema A'. Como mencionado anteriormente esta construcción sera por inducción y en tres pasos:

1<sup>er</sup> Paso. Obtenemos una base de  $R(n, l)/I(1, 1, l)$  a partir de una de  $R(n - 1, l)$ .

2<sup>do</sup> Paso. Obtenemos una base de  $R(n, l)/I(1, 1, t - 1)$  a partir de una de  $R(n, l)/I(1, 1, t)$ , para  $t = l, l - 1, \dots, 1$ .

3<sup>er</sup> Paso. Obtenemos una base de  $R(n, l)$  a partir de una de  $R(n, l)/I(1, 1, 0)$ .

Todos los pasos requieren de los anillos  $R(n, l)/I(1, 1, t)$ . Enseguida damos una precisa definición del tipo de base que deseamos obtener.

**Definición 6.7.1** Una base común homogénea de ideales (bchi) de  $R(n, l)$  es un su subconjunto  $B$  para el cual vale el Teorema A':  $R(n, l)$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B$  y cada ideal  $I(m, r, k)$  es generado por un subconjunto de  $B$ .

Dado  $t \in [l] \cup \{0\}$ , sea  $J = I(1, 1, t)$ . Una bchi de  $R(n, l)/J$  es un conjunto  $B$  tal que  $R(n, l)/J$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B$  y cada ideal  $\text{rad}((I(m, r, k) + J)/J)$  es generado, como  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo, por un subconjunto de  $B$ .

En cada paso en el proceso de la construcción de la base se considera la acción de la permutación circular  $\theta = (1 \ 2 \ \dots \ n)$  la cual aparece en el Lema 6.4.3. La sua acción tiene varios significados a según del contexto. Geométricamente,  $\theta$  actua sobre  $E^n$  como el movimiento circular a derecha

$$(6.21) \quad \theta(P_1, \dots, P_n) = (P_n, P_1, \dots, P_{n-1}) ,$$

y sobre  $E^l$  como la identidad. En coordenadas,  $\theta$  actua mediante

$$(6.22) \quad \theta x_i = x_{i+1} , \theta y_i = y_{i+1} \ (i < n) , \quad \theta x_n = x_1 , \theta y_n = y_1 ,$$

y fija las coordenadas  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ . La permutación  $\theta$  también actúa sobre datos indexados, por ejemplo

- para subconjuntos  $S \subset [n]$  se tiene  $\theta S = \theta(S)$ ,
- para funciones  $f : [l] \rightarrow [n]$  tenemos  $\theta f = \theta \circ f$ .

Las varias acciones son mutuamente consistentes, por ejemplo

- $\theta W_f = W_{\theta f}$ ,
- $\mathcal{I}(\theta Y(m, r, k)) = \theta I(m, r, k)$ ,
- el homomorfismo de anillos definido en (6.22) corresponde a la inversa del morfismo  $\theta$  dado en (6.21).

Regresamos ahora a los Lemas de la construcción de la base, comenzando por el más fácil.

**Lema 6.7.2** (1<sup>er</sup> Paso.) *Supongamos que  $R(n, l - 1)$  tiene una bchi. Entonces también  $R(n, l)/I(1, 1, l)$ .*

**Demostración.** Sea  $B' \subset \mathbb{C}[X, Y, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  una bchi constituida de polinomios homogéneos sin  $x_n, y_n$ . Entonces  $B = \theta B'$  es una base para  $R(n, l)/J$  con  $J = I(1, 1, l)$ . En efecto, de la definición  $Y(1, 1, l) \xrightarrow{\phi} Z(N, L) \times \text{Spec} \mathbb{C}[y_1]$ , donde  $N = [n] \setminus \{1\} = \theta[n-1]$ . Por lo tanto  $R(n, l)/J$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B$ . Por el Lema 6.4.2, para  $r > 0$ , la imagen de  $Y(m, r, k) \cap Y(1, 1, l)$  a través del isomorfismo  $\phi$  es  $Y_{N, l}(m - 1, r - 1, k) \times \text{Spec} \mathbb{C}[y_1]$ . Entonces  $\text{rad}((I(m, r, k) + J)/J) = I_{N, l}(m - 1, r - 1, k) \otimes \mathbb{C}[y_1]$ . Esto muestra que  $B$  es una bchi para los ideales  $\text{rad}((I(m, r, k) + J)/J)$  con  $r > 0$ . Aquellos con  $r = 0$  son triviales. ■

Los pasos que restan en el proceso de la construcción de la base hacen uso del siguiente Lema técnico.

**Lema 6.7.3** *Sea  $R$  una  $\mathbb{C}[Y]$ -álgebra y  $J, I_1, \dots, I_m$  ideales de  $R$  tal que*

- para cada  $i$ ,  $R/I_i$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo sin torsión,
- para cada intersección  $I$  de algunos ideales  $I_i$  se cumple  $(I + J)_P = (\text{rad}(I + J))_P$  para cada  $P$  en  $U_2$ , y



- el ideal  $J$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B'$  tal que cada ideal  $\text{rad}((I_i + J)/J)$  es generado de un subconjunto de  $B'$ .

Entonces  $R$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con una base  $B$  tal que  $J$  y todos los ideales  $I_i$  son generados por subconjuntos de  $B$ .

**Demostración.** Escogiendo un representante arbitrario  $q \in R$  de cada  $J$ -clase que pertenece a  $B'$ , podemos suponer que  $B' \subset R$ . Entonces  $R$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B' \cup B''$ . Resta modificar convenientemente esta última a una  $B$  base común a los ideales  $I_i$ .

Dado  $q \in B'$ , sea  $i_q = \{i \in [m] \mid q \in \text{rad}(I_i + J)\}$ , y  $I = \bigcap_{i \in i_q} I_i$ . Entonces  $q \in \bigcap_{i \in i_q} \text{rad}(I_i + J) = \text{rad}(I + J)$ .

Por hipótesis y el Lema 6.1.2 :  $(I+J)_Q = (\text{rad}(I+J))_Q$ , entonces  $q \in (I+J)_Q$  y existe un  $q_1 \in R_Q$  tal que

$$(6.23) \quad q_1 \in I_Q \quad y \quad q_1 - q \in J_Q,$$

estas dos condiciones determinan  $q_1$  y  $q_1 - q$  en modo único módulo  $(I \cap J)_Q$ . Por hipótesis, si  $C \subset B''$  es tal que  $C = \{r \in R \mid r \notin I \cap J\}$ , entonces  $J/I \cap J$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libero con base  $C$ . La expansión del único elemento  $q_1 - q \in J_Q/(I \cap J)_Q$  que satisface (6.23) en términos de la base  $C$ , nos da

$$(6.24) \quad q_1 = q + \sum_{\gamma} p_{\gamma} b_{\gamma}$$

con  $p_{\gamma} \in \mathbb{C}[Y]_Q$  y  $b_{\gamma} \in C$ . Los  $p_{\gamma}$  son determinados en modo único por (6.23) y (6.24), y la solución para cada  $Q$  es también solución para  $Q = 0$ . Entonces, los coeficientes  $p_{\gamma} \in \mathbb{C}[Y]_Q$ , como elementos de  $\mathbb{C}(Y)$ , no dependen de  $Q$  y por esto pertenecen a  $\mathbb{C}[Y]$ . En particular, el polinomio  $q_1$  definido en (6.24) es un elemento de  $R$  satisfaciendo (6.23) para cada  $Q \in U_2$ .

El hecho que  $R/I_i$  sea sin torsión significa que el mapa canónico  $R/I_i \rightarrow \mathbb{C}(Y) \otimes (R/I_i)$  es inyectivo. Como  $\mathbb{C}(Y) \otimes (R/I_i) = (R/I_i)_Q$  para  $Q = 0$ , y además  $q_1 \in I_{(0)} \subset (I_i)_{(0)}$ , esto implica que  $q_1 \in I_i$  para cada  $i \in i_q$ .

Definimos entonces  $B = B'' \cup \widetilde{B}'$  donde

$$\widetilde{B}' = \{q_1 \mid q_1 \text{ construido como arriba, para cada } q \in B'\}.$$

De (6.24) observamos que  $q_1 \equiv q \pmod{J}$ , entonces  $\widetilde{B}'$  es una base de  $R/J$ , por lo tanto  $B$  es una base de  $R$ . Por hipótesis, para cada  $i$ , los elementos  $q \in B' \cap \text{rad}(I_i + J)$  generan el  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo  $\text{rad}((I_i + J)/J)$ , y entonces

generan el espacio vectorial  $\mathbb{C}(Y) \otimes ((I_i + J)/J)$ . Como los correspondientes elementos  $q_1 \in I_i$  satisfacen  $q_1 \equiv q \pmod{J}$ , sigue del isomorfismo canónico  $I_i/(I_i \cap J) \rightarrow (I_i + J)/J$  que esos generan  $\mathbb{C}(Y) \otimes (I_i/(I_i \cap J))$ . Por hipótesis, los elementos de  $B'' \cap I_i$  generan  $I_i \cap J$ , por lo tanto los elementos de  $B \cap I_i$ , todos juntos, generan  $\mathbb{C}(Y) \otimes I_i$ . El Lema 6.1.10 implica que ellos generan  $I_i$  como  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo. ■

Para mantener homogeneidad, tenemos necesidad de una versión graduada del precedente Lema. Para el paso de una base de  $R(n, l)/I(1, 1, 0)$  a una base de  $R(n, l)$  deseamos un poco más: La versión graduada debe valer en cada grado por separado. Para evitar abundancia de notación, no mencionamos la graduación en la demostración del Lema 6.7.3, pero cada cosa necesaria es implícita ahí. Así, considerando el caso en el cual  $R = \bigoplus_d R_d$  es una  $\mathbb{C}[Y]$ -álgebra graduada con  $\mathbb{C}[Y]_0 \subset R_0$ , los ideales  $I_i$  y  $J$  son homogéneos, y los elementos de  $B'$  y  $B''$  son también homogéneos. Entonces, la construcción de la base  $B$  en la demostración del Lema puede hacerse en cada grado por separado. Más precisamente, se obtiene una base común para las componentes homogéneas de los ideales  $J$  y  $I_i$  en un grado dado  $d$ , sólo asumiendo que tenemos bases  $B''_d$  de  $J_d$  y  $B'_d$  de  $(R/J)_d$  las cuales satisfacen la hipótesis del Lema en grado  $d$ . Así tenemos el siguiente Corolario.

**Corolario 6.7.4** Sean  $R, J$  e  $I_1, \dots, I_m$  como en el Lema 6.7.3, además supongamos que  $R = \bigoplus_d R_d$  es graduado, con  $\mathbb{C}[Y] \subset R_0$ , y los ideales  $J, I_1, \dots, I_m$  son homogéneos. Fijado un grado  $d$ , supongamos que

- la componente homogénea  $J_d$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre con base  $B''_d$  tal que cada componente  $(I_i \cap J)_d$  es generada por un subconjunto de  $B''_d$ ,  
y
- la componente  $(R/J)_d$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libero con base  $B'_d$  tal que cada  $(\text{rad}((I_i + J)/J))_d$  es generado por un subconjunto de  $B'_d$ .

Entonces  $R_d$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libero con una base  $B_d$  tal que  $J_d$  y todas las componentes  $(I_i)_d$  son generadas da subconjuntos de  $B_d$ .

**Nota 6.7.5** La hipótesis de no-torsión, y la condición de reducción local  $(I + J)_P = (\text{rad}(I + J))_P$  en el Lema 6.7.3 y Corollario 6.7.4 son automáticamente satisfechos en los casos donde deben ser aplicados. Los ideales  $I_i$



seran aquellos de los subarreglos  $Y(m, r, k)$  o  $Y(m, r, k) \cap Y(1, 1, t)$ . Por los Lemas 6.2.2 y 6.4.2 sus anillos de coordenadas  $R/I_i$  son  $\mathbb{C}[Y]$ -módulos sin torsión. El ideal  $J$  debe ser  $I(1, 1, t)$  para algún  $t$ , y sigue del Lema 6.3.4 que  $V(I + J)$  es localmente reducido sobre  $U_2$ . Sigue, a posteriori, de la tesis del Lema 6.7.3 que si la hipótesis  $(I + J)_P = (\text{rad}(I + J))_P$  vale localmente sobre  $U_2$ , entonces  $(I + J) = (\text{rad}(I + J))$ . Esto es similar a la situación del Lema 6.5.6, como en aquel caso, hemos demostrado el Lema con la hipótesis débil local, entonces podemos verificar ambos reduciendonos al caso  $n = 2$ .

**Lema 6.7.6 (3<sup>er</sup> Paso.)** Supongamos que  $R(n, l)/I(1, 1, 0)$  tiene una base común de ideales. Entonces también  $R(n, l)$ .

**Demostración.** Sea  $J = I(1, 1, 0) = I(Y(1, 1, 0)) = I(V(x_1))$ , entonces  $J = \text{rad}(x_1)$ . Por el Lema 6.3.5  $\text{rad}(x_1) = (x_1)$ . Como  $x_1$  no es idénticamente nulo sobre cada  $W_f$ , ese es un elemento invertible en  $R(n, l)$ . Entonces tenemos el isomorfismo  $R(n, l) \xrightarrow{x_1} J = (x_1)$ .

Supongamos que  $B'$  es una bchi de  $R(n, l)/J$ . Además, supongamos que en un  $x$ -degree  $d$  dado podemos encontrar una base  $B_d$  que haga de  $R(n, l)_d$  un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre tal que cada  $I(m, r, k)_d$  es generado de un subconjunto de  $B_d$ . Entonces  $x_1\theta B_d$  es una base de  $J_{d+1}$  y sus subconjuntos generan cada  $(I(m, r, k) \cap J)_{d+1}$ . En efecto, si  $B_d$  es una base que hace de  $R(n, l)_d$  un módulo libre, entonces también lo es  $\theta B_d$ , y por lo tanto  $x_1\theta B_d$  es una base de  $J_{d+1}$  porque  $R(n, l)_d \xrightarrow{(x_1)^d} J_{d+1}$  es un isomorfismo. Finalmente, observando que para cada ideal  $I \subset R(n, l)$  tenemos  $I \cap J = I \cap (x_1) = x_1(I : (x_1))$ , si  $I$  es radical, también  $I : (x_1)$  es radical, y  $V(I : (x_1))$  es la unión de aquellas componentes de  $V(I)$  sobre las cuales  $x_1$  no se anula idénticamente. Aplicando esto a  $I = I(m, r, k)$  para  $r > 0$ , tenemos  $I(m, r, k) : (x_1) = \theta I(m, r - 1, k)$  y entonces  $I(m, r, k) \cap J = x_1\theta I(m, r - 1, k)$ . Para  $r > 0$ , esto muestra que si  $B_d$  es un subconjunto que genera  $I(m, r - 1, k)_d$ , entonces  $x_1\theta I(m, r - 1, k)$  tiene un subconjunto que genera  $(I(m, r, k) \cap J)_{d+1}$ . Esto basta porque  $I(m, r, k) = 0$  o  $(1)$  para  $r = 0$ .

Ahora podemos aplicar el Corolario 6.7.4 con  $(B'')_{d+1} = x_1\theta B_d$  y  $(B')_{d+1}$  la parte de grado  $d + 1$  de la base  $B'$ , para obtener una base  $B_{d+1}$  que hace de  $R(n, l)_{d+1}$  un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre, y que sea una bchi para cada  $I(m, r, k)_{d+1}$ . En grado 0 podemos tomar  $B_0 = (B')_0$  porque  $R(n, l)_0 = (R(n, l)/J)_0$ . Entonces podemos construir  $B_d$  por inducción para cada grado  $d$ , obteniendo una bchi  $B = \cup_d B_d$  de  $R(n, l)$ . ■

El restante y más dificultoso paso en la construcción de la base es el 2º. Para esto necesitamos también asumir que tenemos una bchi de  $R(n, l - 1)$  y aplicar las técnicas de prolongación de base que hace uso de los arreglos especiales  $Z'(r, k)$ . Para aplicarles necesitamos de un Lema que relacione el ideal de  $Y(1, 1, t)$  ( $\subset Y(1, 1, t - 1)$ ) con el ideal de  $Z''$  ( $\subset Z'$ ), para un apropiado par de arreglos especiales  $Z'' \subset Z'$ . Primero fijamos notaciones. Dados  $n > 1$ ,  $l > 0$  y  $t \in [l]$  sean  $Z' = Z'(n, t)$  y  $Z'' = Z'(n - 1, t)$ . Notar que  $Z'' \subset Z'$  y las componentes de  $Z'$  que no pertenecen a  $Z''$  son los subespacios:  $V(a_t) \cap W_f = V(x_n) \cap W_f$  para las  $f : [l] \rightarrow [n]$  tal que  $f(t) = n$ ,  $f(i) \neq n$  para  $i \in [t - 1]$ . Si  $Z_1$  es la unión de estas componentes, tenemos

$$(6.25) \quad Z' = Z'' \cup Z_1, \quad \text{con } Z'' \text{ y } Z_1 \text{ sin componentes comunes.}$$

Analogamente,  $Y(1, 1, t)$  es un subarreglo de  $Y(1, 1, t - 1)$ , y las componentes de  $Y(1, 1, t - 1)$  que no pertenecen a  $Y(1, 1, t)$  son los subespacios:  $V(x_1) \cap W_f$  para las  $f : [l] \rightarrow [n]$  tal que  $f(t) = 1$ ,  $f(i) \neq 1$  para  $i \in [t - 1]$ . Si  $Z_0$  es la unión de estas componentes, tenemos

$$(6.26) \quad Y(1, 1, t - 1) = Y(1, 1, t) \cup Z_0,$$

con  $Y(1, 1, t)$  y  $Z_0$  sin componentes comunes. Se note que  $Z_0 = \theta Z_1$ . El hecho clave en todo esto es

**Lema 6.7.7** *Con  $n, l, t, Z', Z''$  y  $Z_0$  como arriba, tenemos*

$$(6.27) \quad \theta Z'' \cap Z_0 = Y(1, 1, t) \cap Z_0$$

sobre  $U_2$ , es decir para cada  $P \in U_2$ :

$$\theta I(Z'')_P + I(Z_0)_P = I(1, 1, t)_P + I(Z_0)_P.$$

**Demostración.** Observamos que en general las intersecciones en (6.27) no son esquemas reducidos, por lo tanto no basta con controlar el resultado a nivel de conjuntos. En cambio haremos uso de la geometría local sobre  $U_2$ : Sea  $P$  un punto de la intersección de los dos lados de (6.27), entonces  $P \in W_f \cap W_g$  para cualesquiera  $f, g$  con  $f(t) \neq 1$ ,  $g(t) = 1$ , por lo tanto  $P \notin U_1$ . Así, basta considerar los puntos  $P \in U_2 \setminus U_1$ .

Notar que los esquemas considerados son subesquemas de  $Z(n, l)$ . Fijado un punto  $P \in U_2 \setminus U_1$ , sean  $N, L, \tilde{F}$ , y  $h \in \tilde{F}$  como en el Lema 6.1.6. Entonces localmente tenemos

$$(6.28) \quad Z(n, l) \stackrel{\circ}{\cong} E^{[n] \setminus N} \times Z(N, L)$$

sin variar cada ideal local en  $P$ . Tenemos los siguientes casos:

- $1 \notin N$ : si  $P \in Z_0$ , entonces  $h(t) = 1$ . Pero, si  $P \in \theta Z''$  o  $P \in Y(1, 1, t)$  entonces  $h(t) \neq 1$ . Por lo tanto las dos intersecciones en (6.27) son localmente vacias en  $P$ .
- $1 \in N$ : podemos asumir  $h(t) \in N$ , entonces  $t \in L$ , sino  $P \notin Z_0$  y el resultado es trivial. Bajo el isomorfismo local  $\varphi$  de 6.28 tenemos los siguientes isomorfismos locales:

- $Z_0 \xrightarrow{\varphi_0} E^{[n] \setminus N} \times \tilde{Z}_0$ , donde  $\tilde{Z}_0 \subset Z(N, L)$  es el subarreglo

$$\tilde{Z}_0 = \cup_f V(x_1) \cap W_f ,$$

con  $f : L \rightarrow N$  tal que  $f(t) = 1, f(i) \neq 1$  para  $i \in [t-1] \cap L$ .

- $Y(1, 1, t) \xrightarrow{\varphi_Y} E^{[n] \setminus N} \times Y_{N,L}(1, 1, s)$ , donde  $s = |[t] \cap L|$ , y
- $\theta Z'' \xrightarrow{\varphi_\theta} E^{[n] \setminus N} \times \tilde{Z}$ , donde

$$\tilde{Z} = \cup_f V(a_t) \cap W_f$$

con  $f : L \rightarrow N$  tal que  $f(t) \neq 1, f(i) = 1$  para  $i \in [t-1] \cap L$ .

Pasamos a mostrar que  $\tilde{Z} \cap \tilde{Z}_0 = Y_{N,L}(1, 1, s) \cap \tilde{Z}_0$  como subesquemas de  $Z(N, L)$ . Haciendo  $N = [2]$ ,  $L = [\tilde{l}]$ , así  $t = s$ , y nuestros subesquemas llegan a ser subesquemas de  $Z(2, \tilde{l})$ :

$$\tilde{Z}_0 = \cup V(x_1) \cap W_f : f(s) = 1, f(i) = 2 \text{ para } i < s,$$

$$\tilde{Z} = \cup V(x_2) \cap W_f : f(s) = 2, f(i) = 1 \text{ para } i < s,$$

$$Y(1, 1, s) = \cup V(x_1) \cap W_f : f(s) = 2, f(i) = 2 \text{ para } i < s.$$

Sea  $I \subset R(2, \tilde{l})$  dado por

$$I = (a_s - x_1, b_s - y_1) + \sum_{i < s} (a_i - x_2, b_i - y_2)$$

Por el Lema 6.1.7,  $I = \text{rad}(I)$  e  $V(I) \cong Z(2, \tilde{L})$ , dove  $\tilde{L} = [\tilde{l}] \setminus \{s\}$ . Por el Corolario 6.3.3 tenemos  $I(1, 1, 0) = (x_1)$  en  $Z(2, \tilde{L})$ , por esto  $(x_1) + I$  es un ideal radical. Como, a nivel de conjuntos  $V((x_1) + I) = \tilde{Z}_0$ , sigue que

$$I(\tilde{Z}_0) = (x_1) + (a_s - x_1, b_s - y_1) + \sum_{i < s} (a_i - x_2, b_i - y_2).$$

Por simetría tenemos

$$I(\tilde{Z}) = (x_2) + (a_s - x_2, b_s - y_2) + \sum_{i < s} (a_i - x_1, b_i - y_1)$$

y por el Corolario (6.3.3) tenemos

$$I(1, 1, s) = (x_1) + (a_s - x_2, b_s - y_2) + \sum_{i < s} (a_i - x_2, b_i - y_2)$$

Así vemos claramete que  $I(\tilde{Z}) + I(\tilde{Z}_0)$  y  $I(1, 1, s) + I(\tilde{Z}_0)$  contienen  $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$  y ambos se reducen a  $(x_1, x_2, y_1 - y_2) + \sum_{i \leq s} (a_i, b_i - y_1)$ . ■

Usando el Teorema A', se puede demostrar que la conclusión del Lema 6.7.7 en realidad vale en todo  $\mathbb{C}^n$  y no sólo sobre  $U_2$ .

**Lema 6.7.8** (2<sup>do</sup> Paso.)

Dados  $n > 1, l > 0$  y  $t \in [l]$ , supongamos que  $R(n, l - 1)$  y  $R(n, l)/I(1, 1, t)$  tengan una bchi. Entonces también  $R(n, l)/I(1, 1, t - 1)$ .

**Demostración.** Para simplificar haremos uso de las siguientes notaciones  $R = R(n, l)/I(1, 1, t - 1)$  y  $J = I(1, 1, t)/I(1, 1, t - 1)$  ideal en  $R$ , y pasamos a mostrar que:

- $R$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre: El ideal  $(a_t) \subset R$  es isomorfo a  $R/(0 : (a_t))$ . Como  $I(1, 1, t - 1) : (a_t) = I(1, 1, t)$  en  $R(n, l)$ , tenemos que  $R/(0 : (a_t)) \cong R(n, l)/I(1, 1, t)$ , y este último es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre por hipótesis. En el caso del arreglo especial  $Z'(n, 1) (\xrightarrow{\pi} Z(n, L))$  tenemos  $V(a_t) \cap Y(1, 1, t - 1) \cong \pi^{-1}Y_{n, L}(1, 1, t - 1)$  donde  $L = [l] \setminus \{1\}$  y el isomorfismo es obtenido trasponiendo los índices 1 y  $t$  en  $[l]$ . El Lema 6.6.7 implica que  $R/\text{rad}(a_t)$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre. Sea  $B_1$  una base de  $(a_t)$  que hace de este un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre y sea  $B_2$  una base de  $R/\text{rad}(a_t)$ . Por los Lemas 6.1.2 y 6.3.7 tenemos  $(\text{rad}(a_t))_Q = (a_t)_Q$  para  $Q \in \hat{U}_2$ , por lo tanto  $B_1 \cup B_2$  es una base de  $R_Q$ . Entonces, por el Lema 6.1.8,  $R$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre.

- Se tiene una bchi: Consideremos  $Z', Z''$  y  $Z_0$  como definidos previamente al Lema 6.26, por lo tanto  $Z'$  y  $Z''$  son arreglos especiales sobre  $Z(n, L)$ , con  $L = [l] \setminus \{t\}$ . Sean  $R_0 = \mathcal{O}(Z_0)$ ,  $R' = \mathcal{O}(Z')$ , y  $J'' = \theta(I(Z'')/I(Z'))$  el ideal de  $\theta Z''$  como un subesquema cerrado de  $Z' = \theta Z''$ .

Por (6.26) tenemos  $I(Z_0) \cap J = 0$  en  $R$ , por lo tanto el mapa canónico  $J \rightarrow JR_0$  es un isomorfismo. Análogamente, aplicando  $\theta$  a (6.25), tenemos  $I(Z_0) \cap \theta I(Z'') = 0$  en  $R'$ , entonces también  $J'' \rightarrow J''R_0$  es un isomorfismo.

Como  $R$  y  $R/J$  son  $\mathbb{C}[Y]$ -módulos libres finitamente generados y graduados en  $x$  e  $y$ , sigue que  $J$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre. Así  $JR_0$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo libre. Por el Lema 6.6.8,  $I(Z'')/I(Z')$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo con una bchi  $B$  para los ideales  $(I \cap I(Z''))/I(Z')$ , donde  $I = I_{n,L}(m, r, k)R'$ . En particular esto implica que  $J''$  y  $J''R_0$  son  $\mathbb{C}[Y]$ -módulos libres. Por el Lema 6.2.2,  $R_0$  es un  $\mathbb{C}[Y]$ -módulo sin torsión. Por los Lemas 6.1.2 y 6.7.7 los submódulos libres  $JR_0$  y  $J''R_0$  de  $R_0$  coinciden localmente sobre  $\widehat{U}_2$ , por lo tanto por el Corolario 6.1.9 ellos son iguales. Entonces, sea  $J_0 = JR_0 = J''R_0$ .

El isomorfismo canónico  $J'' \rightarrow J_0$  es dado por restricción a  $Z_0$  de las funciones sobre  $Z'$  que se anulan sobre  $\theta Z''$ . Por el Lema (6.6.7), cada ideal  $\theta I_{n,L}(m, r, k)R'$  es radical e igual al ideal  $I(\pi^{-1}\theta Y_{n,L}(m, r, k))$  de la preimagen reducida de  $\theta Y_{n,L}(m, r, k)$  en  $Z'$ . Por lo tanto, como cada función  $p \in J''$  se anula sobre  $\theta Z''$ ,

$$p \in \theta I_{n,L}(m, r, k)R' \iff p|_{Z_0} \text{ se anula sobre } Z_0 \cap \pi^{-1}\theta Y_{n,L}(m, r, k)$$

Analogamente, escribiendo  $\pi_1$  para la proyección de coordenadas  $Y(1, 1, t - 1) \subset Z(n, l) \rightarrow Z(n, L)$ , una función  $p \in J$  pertenece al ideal

$$J \cap I(\pi^{-1}\theta Y_{n,L}(m, r, k)) \text{ en } R$$

si y solamente si vale el mismo criterio (notar que  $\pi$  y  $\pi_1$  tienen la misma restricción sobre  $Z_0$ ). Esto muestra que el isomorfismo  $J'' \cong J$  lleva  $J'' \cap \theta I_{n,L}(m, r, k)R'$  suryectivamente sobre  $J \cap I(\pi_1^{-1}\theta Y_{n,L}(m, r, k))$ . Entonces los últimos ideales son generados de subconjuntos de  $B''$ .

Dados  $r > 0, m$  y  $k$ , sean

$$\begin{array}{l} m' = m - 1, \quad k' = k \quad \text{si } k < t \\ \text{o} \\ m' = m, \quad k' = k - 1 \quad \text{si } k \geq t \end{array}$$

Por el Lema 6.4.3, tenemos

$$Y(1, 1, t) \cup (Y(m, r, k) \cap Y(1, 1, t - 1)) = Y(1, 1, t) \cup \pi_1^{-1}\theta Y_{n,L}(m', r - 1, k'),$$

siendo sus ideales en  $R$

$$J \cap \text{rad}(I(m, r, k)R) = J \cap I(\pi_1^{-1}\theta Y_{n,L}(m', r - 1, k'))$$

los cuales son generados por un subconjunto de  $B''$ ; esto muestra que nuestros ideales  $J \cap \text{rad}(I(m, r, k)R)$  son generados por subconjuntos de  $B''$ . Los

casos con  $r = 0$  son triviales. Como  $R/J$  tiene una bcoi por hipótesis, la conclusión sigue del Corolario 6.7.4. ■

**Demostración del Teorema A'.** Mostramos el Teorema por inducción sobre  $n, l$  manteniendo como hipótesis de inducción que la bci en el Teorema es una bchi. El caso base  $l = 0$  es dado por el Lema 6.0.2. El caso base para  $n$  es  $n = 1$ :  $Z(1, l) \cong Z(1, 0) = E$ , para cada  $l$ , y el único subarreglo no trivial  $Y(m, r, k)$  es  $Y(1, 1, 0)$ , que aparece en  $Z(1, 0)$ . Entonces, el caso  $n = 1$  está contenido en el caso  $l = 0$ .

Para  $n > 1$  y  $l > 0$  podemos asumir por inducción que  $R(n - 1, l)$  tiene una bcoi. Entonces, por el Lema 6.7.3, también  $R(n, l)/I(1, 1, l)$  tiene una bchi. Podemos también asumir por inducción que  $R(n, l - 1)$  tiene una bchi. Aplicando el Lema 6.7.8 varias veces, para  $t$  que varía de  $l$  a 1, obtenemos que  $R(n, l)/I(1, 1, 0)$  tiene una bchi. Entonces, por el Lema 6.7.8, también  $R(n, l)$  tiene una bchi.



# Bibliografía

- [1] Bergeron, F.; Garsia, A.M.; Tesler, G.: Identities and positivity conjectures for some remarkable operators in the theory of symmetric functions, *Methods Appl. Anal.* **6** (1999), no. 3, 363-420.
- [2] Brockman, W.; Haiman, M.: Nilpotent orbit varieties and the atomic decomposition of the  $q$ -Kostka polynomials, *Canad. J. Math.* **50** (1998), no. 3, 525-537.
- [3] Cherednik, I.: Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), no. 1, 191-216
- [4] De Concini, C.; Procesi, C.: Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, *Invent. Math.* **64** (1981), no. 2, 203-219.
- [5] Etingof, P.I.; Kirillov, A. Jr.: Macdonald's polynomials and representations of quantum groups, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), no. 3, 279-296.
- [6] Garsia, A.M.; Haiman, M.: A graded representation model for Macdonald's polynomials, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **90** (1993), no. 8, 3607-3610.
- [7] : A remarkable  $q, t$ -Catalan sequence and  $q$ -Lagrange inversion, *J. Algebraic Combin.* **5** (1996), no. 3, 191-244.
- [8] ; Procesi, C.: On certain graded  $S_n$ -modules and the  $q$ -Kostka polynomials, *Adv. Math.* **94** (1992), no. 1, 82-138.
- [9] ; Remmel, J.: Plethystic formulas and positivity for  $q, t$ -Kostka coefficients, *Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota* (Cambridge, MA, 1996), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, pp. 245-262.

- [10] \_\_\_\_\_; Tesler, G.: Plethystic formulas for Macdonald  $q, t$ -Kostka coefficients, *Adv. Math.* **123** (1996), no. 2, 144-222.
- [11] Fogarty, J.: Algebraic families on an algebraic surface, *Amer. J. Math.* **90**, (1968), 511-521.
- [12] Haiman, J.: Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants, *J. Algebraic Combin.* **3** (1994), no.1, 17-76.
- [13] \_\_\_\_\_:  $t, q$ -Catalan numbers and the Hilbert scheme, *Discrete Math.* **193** (1998), no. 1-3, 201-224, Selected papers in honor of Adriano Garsia (Taormina, 1994).
- [14] \_\_\_\_\_: Macdonald polynomials and geometry, *New perspectives in geometric combinatorics* (Billera, Björner, Greene, Simion, and Stanley, eds.), MSRI Publications, vol. **38**, Cambridge University Press, 1999, pp. 207-254.
- [15] \_\_\_\_\_: Hilbert Schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture., *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), 941-1006.
- [16] Hotta, R.; Springer, T.A.: A specialization theorem for certain Weyl groups representations and an application to the Green polynomials of unitary groups, *Invent. Math.* **41** (1977), no. 2, 113-127.
- [17] Kato, Shin-ichi: Spherical functions and a  $q$ -analogue of Kostant's weight multiplicity formula, *Invent. Math.* **66** (1982), no. 3, 461-468.
- [18] Kirillov, A.N.; Noumi, M.: Affine Hecke algebras and raising operators for Macdonald polynomials, *Duke Math. J.* **93** (1998), no. 1, 1-39.
- [19] Knop, F.: Integrality of two variable Kostka functions, *J. Reine Angew. Math.* **482**, (1997), 177-189.
- [20] Kraft, H.: Conjugacy classes and Weyl group representations, *Young tableaux and Schur functions in algebra and geometry* (Torun, 1980), Soc. Math. France, Paris, 1981, pp. 191-205.
- [21] Lapointe, L.; Vinet, L.: Operator construction of the Jack and Macdonald symmetric polynomials, *Special functions and differential equations* (Madras, 1997), Allied Publ., New Delhi, 1998, pp. 271-279.



- [22] Lascoux, A.; Schützenberger, M-P.: Sur une conjecture de H. O. Foulkes, C.R. Acad. Sci. Paris Sér A-B **286** (1978), no. 7, A323-A324.
- [23] Lusztig, G.: Green polynomials and singularities of unipotent classes, Adv. in Math. **42** (1981), no. 2, 169-178.
- [24] : Singularities, character formulas, and a  $q$ -analog of weight multiplicities, Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981), Soc. Math. France, Paris, 1983, pp. 208-229.
- [25] Macdonald, I.G.: A new class of symmetric functions, Actes du 20e Séminaire Lotharingien, vol. 372/S-20, Publications I.R.M.A., Strasbourg, 1988, pp. 131-171.
- [26] : Symmetric functions and Hall polynomials, second ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995, with contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [27] : Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, Astérisque **237** (1996), 189-207, Séminaire Bourbaki 1994/95, Exp. no. 797.
- [28] Sahi, S.: Interpolation, integrality, and a generalization of Macdonald's polynomials, Internat. Math. Res. Notices **10** (1996), 457-471.
- [29] Springer, T.A.: A construction of representations of Weyl groups, Invent. Math. **44** (1978), no. 3, 279-293.