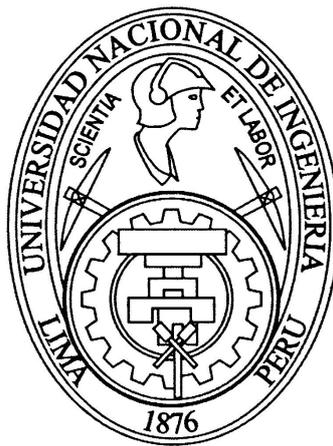


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

"MÉTODOS DE ESTIMACIONES SOBRE SEGUROS DE RIESGOS COLECTIVOS EN
TÉRMINOS PROBABILÍSTICOS"

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR
PERCY WILLIAM OSORIO VALLE

ASESOR
Mg. EDGARD KENNY VENEGAS PALACIOS

LIMA - PERÚ
2016

DEDICATORIAS

Dedico:

*A Dios todo poderoso; el que me ha dado
fortaleza para terminar con satisfacción
este anhelo trabajo.*

*A mi querida madre Yolanda por su cariño y
apoyo incondicional en todo momento.*

*A mi querido padre Efraín por su invaluable
ejemplo de perseverancia y optimismo para
seguir adelante, para alcanzar nuestro
objetivo.*

*A mi esposa Jackeline, a mis dos hijas
Camilita y Mafer por ser ellos mi motor
para finalizar este trabajo.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar doy gracias a Dios de todo corazón, por haberme dado fuerza, valor e iluminado mi mente y por haber puesto en mi camino a personas que han sido mi soporte y compañía durante la realización de este trabajo de tesis.

Agradezco infinitamente a mi asesor Mg. Edgard Kenny Venegas Palacios por haber aceptado orientarme en la realización de este trabajo y por su voluntad, paciencia, apoyo y comprensión que supo brindarme en todo momento hasta que llegue a su término.

Al profesor Mg. William EcheGARAY quien tuvo la amabilidad de apoyarme en el inicio de este trabajo.

A los profesores que me enseñaron en el pre-grado de Matemática a quienes los recordaré siempre y estaré eternamente agradecido por sus enseñanzas y cualidades de maestros.

Agradezco a mis amigos Abraham Z., Julio Y., Max Ch., Diana F., Jesús C., William E., Jorge S., Luis F., Clifford T., Jhon C., Avel L., Phamela E., Jorge M., Mario S., Fidel J. y Marcos Q., que han vivido conmigo la realización de esta tesis de licenciatura y que me han brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

El propósito de este trabajo es estudiar los seguros individuales como la teoría del riesgo colectivo, mostrar los principales métodos de estimación del valor en riesgo, esquematizar las ventajas y desventajas de su uso y dar a conocer las limitaciones de cada método. Primero revisamos las propiedades básicas de las distribuciones. Vemos las relaciones de recurrencia, así como el principio de cálculo de las primas de riesgo individual y riesgo colectivo. Además estudiamos diversas propiedades del modelo colectivo y obtendremos una relación de recurrencia para la distribución de la cantidad total reclamada. Finalmente, concluimos con una aplicación en un hecho real, para verificar el modelo colectivo de Poisson mediante las estimaciones.

PALABRAS CLAVES: Riesgo, Estimaciones, Primas.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. MARCO TEÓRICO	3
1.1. Variable Aleatoria	3
1.1.1. Clasificación	4
1.2. Variable Aleatoria Discreta	4
1.2.1. Función de Probabilidad	5
1.2.2. Propiedades de la Función de Distribución	6
1.3. Valor esperado o esperanza matemática	8
1.4. Media de una función de una variable aleatoria	9
1.4.1. Propiedades de la esperanza matemática	9
1.5. Varianza de una variable aleatoria	10
1.5.1. Propiedades de la varianza	11
1.6. Algunas definiciones	12
1.7. Distribuciones de probabilidad	16
1.7.1. Distribución Bernoulli	16
1.7.2. Distribución Binomial	17
1.7.3. Distribución Normal	17
1.7.4. Distribución Poisson	19
1.7.5. Distribución ji cuadrada (χ^2)	19
1.7.6. p-valor	20

2. MODELO INDIVIDUAL	22
2.1. Esquema del Seguro y del Riesgo	22
2.1.1. Aproximación normal	28
2.2. Fórmula de De Pril	28
3. MODELO COLECTIVO	35
3.1. Modelo binomial compuesto	40
3.2. Modelo binomial negativo compuesto	40
3.3. Modelo Poisson compuesto	41
4. PRINCIPIOS PARA EL CÁLCULO DE PRIMAS	43
4.1. Principios generales	43
4.1.1. Principio del valor esperado	45
4.1.2. Principio de la varianza	45
4.1.3. Principio de la desviación estándar	45
4.1.4. Principio de utilidad cero	46
4.1.5. Principio del valor medio	48
4.1.6. Principio exponencial	49
4.1.7. Principio del porcentaje	49
4.2. Propiedades	50
4.3. Primas y funciones de utilidad	52
5. MODELO COLECTIVO POISSON	54
5.1. La distribución poisson-Beta	54
5.2. Estimación	57
5.2.1. Estimadores basado en la frecuencia de cero y los dos primeros momentos	58
5.2.2. Estimadores de momentos	59
5.2.3. Estimación por máxima verosimilitud	59
5.3. La distribución Poisson-Beta como distribución primaria	60
6. Conclusión	64
Referencias	71

INTRODUCCIÓN

En la actualidad y más aún en los años venideros hay cierta preocupación por los problemas derivados del envejecimiento de la población que afectan tanto a los países desarrollados (Estados Unidos, Reino Inglaterra, Escocia, Japón, etc), como a los que están en vías de desarrollo (Peru , Bolivia, Ecuador , etc), en cuanto a la repercusión que tienen en la previsión social.

En los diversos problemas que existen en el desarrollo teórico de la estadística actuarial , uno de los principales es el de datos de conteo , como por ejemplo, el número de reclamaciones recibidas por una compañía de seguros o el número de hospitalizaciones registradas en un servicio médico. Tradicionalmente, la distribución de Poisson ha sido la más utilizada para modelar este tipo de datos, tanto por su simplicidad como por sus satisfactorias propiedades teóricas. Sin embargo, resulta bien conocido que dicha distribución subestima la varianza debido al fenómeno de sobredispersión.

Habitualmente, en los procesos de conteo del número de reclamaciones en la estadística actuarial se dispone de datos para las anualidades transcurridas y datos parciales de la(s) anualidad(es) en curso, siendo el objeto de interés la predicción del número de reclamaciones. Estes problema se enmarca en el contexto de los modelos IBNR (Incurred But Not Reported). Es habitual en este contexto, considerar la distribución de Poisson como la generadora del proceso de conteo del número de reclamaciones.

La sobredispersión aparece en los problemas antes mencionados, y dicha distri-

bución de Poisson no captura esta situación. Esto sugiere que es necesario más de un parámetro para describir las propiedades empíricas de los datos, proponiéndose modelos compuestos obtenidos a partir de mezclas de distribuciones de Poisson.

Entre los modelos compuestos de Poisson, destacamos el modelo Poisson-gamma, que da lugar a la distribución binomial negativa, y que ha sido ampliamente estudiado en el ámbito actuarial por Asmussen (2000), entre otros. Otros modelos compuestos incluyen la distribución Poisson-lognormal Buhlmann (1970), la distribución Poisson-inversa Gaussiana Buhlmann, Gisler (2005), la distribución Poisson-gamma Harris (1966) y la distribución Poisson-gamma general basada en especificación condicional Rolski, Schmidli, Teugels (1999). Una revisión detallada de modelos compuestos, también llamados mixturas de Poisson, aparece en Williams (1991) donde se proponen diversas aplicaciones en estadística actuarial. Propiedades teóricas de algunos de estos modelos pueden encontrarse en Daykin C. D., Pentikinen T., Pesonen (1994).

Una de las ventajas de las distribuciones compuestas o mezclas de distribuciones es que suelen ser versiones sobre dispersas (donde la varianza es mayor que la media) con colas más pesadas que las distribuciones de origen, y a menudo proporcionan mejores ajustes que las distribuciones de partida. Basándonos en el proceso de mezcla de ambas distribuciones, en este trabajo aplicamos la distribución Poisson-Beta, que la misma fue propuesta por Gurland (1958) y Katti (1966) en problemas de Ecología y en el ámbito actuarial. Así mismo demostramos la utilidad de dicha distribución en la modelación de tres casos que corresponde a: número de contratos de pólizas de seguro, número de reclamaciones por seguro vehicular y número de hospitalizaciones de seguros médicos.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

Antes de estudiar a profundidad el modelo individual y el modelo colectivo, veamos algunos conceptos de variable aleatoria, la función de probabilidad, el valor esperado, la varianza y algunas definiciones en la cuál nos apoyaremos en ellos para desarrollar el trabajo en los capítulos posteriores.

1.1. Variable Aleatoria

Una variable estadística es una característica (cualitativa o cuantitativa) que se mide u observa en una población. Si la población es aleatoria y la característica es cuantitativa la variable estadística se denomina variable aleatoria, en la cual se clasifican en discretas y continuas (Borovkov 2013, p. 31).

Definición 1.1.

Se denomina **variable aleatoria**, a una variable estadística cuantitativa definida en un espacio muestral Ω .

$$\mathcal{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Esto es, una variable aleatoria X es una función definida en Ω tal que a cada elemento $w \in \Omega$ le asocia el número real $x = X(w)$.

$$\mathcal{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto x = \mathcal{X}(\omega)$$

El dominio de la variable aleatoria X es el espacio muestral Ω y el rango es un subconjunto de los números reales que denotaremos por R_X , siendo.

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} / x = \mathcal{X}_{(\omega)}, \omega \in \Omega\}.$$

1.1.1. Clasificación

Las variables aleatorias se clasifican en **discretas** y **continuas**.

Según Borovkov (2013), una **variable aleatoria discreta** es aquella cuyo rango es un conjunto finito o infinito numerable de valores. Si la variable aleatoria \mathcal{X} es discreta, su **rango** se expresará por

$$R_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

La **variable aleatoria continua** es aquella cuyo rango es un intervalo en \mathbb{R} o conjunto infinito no numerable de valores reales.

1.2. Variable Aleatoria Discreta

Según Borovkov (2013) una variable aleatoria discreta asume cada uno de sus valores con cierta probabilidad que denotaremos $P_{\mathcal{X}}$ (probabilidad inducida por \mathcal{X}).

$$P_{\mathcal{X}}(\{x_i\}) = P(\{\omega \in \Omega / \mathcal{X}(\omega) = x_i\}).$$

Con frecuencia, se utiliza la expresión $P[\mathcal{X} = x_i]$ para denotar la probabilidad $P_{\mathcal{X}}(\{x_i\})$, esto es

$$P[\mathcal{X} = x_i] = P(\{\omega \in \Omega / \mathcal{X}(\omega) = x_i\}).$$

NOTA

a) El conjunto de pares $(x_i; P[\mathcal{X} = x_i])$ es la *distribución de probabilidades* de la variable aleatoria \mathcal{X} .

b) Las probabilidades $p_i = P[\mathcal{X} = x_i]$, $x_i \in R_X$ satisfacen las propiedades:

$$[i.] \quad p_i \geq 0, \text{ para cada } x_i \in R_X.$$

$$[ii.] \quad \sum_{x_i \in R_X} p_i = 1.$$

c) Por extensión para todo número real $x \neq x_i$, siendo $x_i \in R_X$, se define:

$$P[\mathcal{X} = x] = P(\Phi) = 0.$$

1.2.1. Función de Probabilidad

Definición 1.2. (Córdova 2003 p. 206). Sea \mathcal{X} una variable aleatoria discreta. Se denomina **función (ley o modelo o distribución) de probabilidad** de \mathcal{X} a la función $f(x)$ definida por $f(x) = P[\mathcal{X} = x]$ para todo x número real y que satisface las siguientes condiciones:

$$[i.] \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad [ii.] \quad \sum_{x_i \in R_X} f(x_i) = 1.$$

NOTA

1. Si $A \subset R_X$, entonces, la probabilidad de A es el número:

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} P[\mathcal{X} = x_i] = \sum_{x_i \in A} f(x_i).$$

2. La función de probabilidad de una variable aleatoria \mathcal{X} se puede expresar por:

$$\{(x_i; p_i)/p_i = f(x_i), \quad x_i \in R_X\}.$$

Definición 1.3. (Córdova 2003 p. 209). La **función de distribución acumulada (fda)** de probabilidades o simplemente **función de distribución**, $F(x)$, de la variable aleatoria discreta \mathcal{X} , cuya función de probabilidad es $f(x)$, se define por:

$$F(x) = P[\mathcal{X} \leq x] = \sum_{k \leq x} P[\mathcal{X} = k] = \sum_{k \leq x} f(k); \quad -\infty < x < +\infty.$$

Definición 1.4. (Córdova 2003 p. 215). Se dice que la función $f(x)$ es **función de densidad de probabilidad** de la variable aleatoria continua X si satisface las siguientes condiciones:

a) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} es el conjunto de los números reales).

b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

c) $P(A) = P[x \in A] = \int_A f(x)dx$, para cualquier intervalo $A \subset \mathbb{R}$.

NOTA

Las condición a) nos indica que la gráfica $f(x)$ no tiene puntos por debajo del eje de las abscisas, la condición b) os indica que el área total bajo la curva es igual a 1 y la condición c) expresa la **probabilidad igual a área**.

Definición 1.5. (Córdova 2003, p. 218). La **función de distribución acumulada (f.d.a.)**, $F(x)$ es una variable aleatoria continua \mathcal{X} con función de densidad $f(x)$, se define por:

$$F(x) = P[\mathcal{X} \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t)dt; \quad -\infty < x < +\infty.$$

1.2.2. Propiedades de la Función de Distribución

(a) La función de distribución acumulada $F(x)$ **es no decreciente**. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cualesquiera tales que $x_1 < x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.

(b) Tenemos que el evento $\{\mathcal{X} \leq -\infty\} = \Phi$ (es imposible), mientras que el evento $\{\mathcal{X} \leq +\infty\} = \Omega$ (es seguro), de esto tenemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

(c) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ cualesquiera, tales que $a < b$, se tiene

$$P[a < \mathcal{X} \leq b] = F(b) - F(a).$$

(d) Dada la f.d.a. $F(x)$ de una variable discreta \mathcal{X} , cuyos valores x_i , están ordenado de la siguiente manera $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, entonces, la función de probabilidad $f(x)$ de \mathcal{X} es determinada por:

$$f(x_i) = P[\mathcal{X} = x_i] = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

(e) Dada la f.d.a. $F(x)$ de una variable aleatoria continua \mathcal{X} , entonces su f.d.p. $f(x)$, es igual a la derivada de la f.d.a. con respecto a x , esto es:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x), \quad \forall x; \quad \text{siempre y cuando su } \frac{d}{dx}F(x) \text{ exista.}$$

Definición 1.6. (Córdova 2003, p. 244) . *Dos variables aleatorias discretas X, Y son **variables aleatorias**, si los eventos $[\mathcal{X} = x_i]$ e $[\mathcal{Y} = y_j]$ son independientes para cada par $(x_i, y_j) \in R_x \times E_y$.*

Esto es, si \mathcal{X}, \mathcal{Y} son variables aleatorias independientes, si y solo si

$$f(x_i, y_j) = P[\mathcal{X} = x_i \wedge \mathcal{Y} = y_j] = P[\mathcal{X} = x_i]P[\mathcal{Y} = y_j] = g(x_i)h(y_j), \quad \forall (x_i, y_j) \in R_x \times R_y.$$

Definición 1.7. (Córdova 2003, p. 244). *Dos variables aleatorias continuas \mathcal{X}, \mathcal{Y} son **variables aleatorias**, si y sólo si:*

$$f(x, y) = g(x)h(y),$$

siendo $f(x, y)$ la función de densidad conjunta de las variables aleatorias \mathcal{X} e \mathcal{Y} , y $g(x)$, $h(y)$ las funciones marginales respectivas.

1.3. Valor esperado o esperanza matemática

Según (Klenke 2014), la distribución de probabilidad de una variable aleatoria se caracteriza básicamente a través de medidas de la tendencia central y de la dispersión. Estas medidas características de la distribución denominadas **parámetros** se describen por medio de la esperanza matemática.

Definición 1.8. (Klenke 2014, p. 169). La **media** de una variable aleatoria discreta \mathcal{X} con función de probabilidad $f(x)$ es la expresión:

$$\mu = E(\mathcal{X}) = \sum_{x_i \in R_{\mathcal{X}}} x_i f(x_i).$$

(***) cambiaremos la notación de \mathcal{X} por X ; esto es por motivos de cálculos.

Si el rango de X es el conjunto finito $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tenemos:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i).$$

Si el rango de X es el conjunto infinito numerable $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, tenemos:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i),$$

en este caso decimos que la esperanza de X no existe, si la suma indicada no es igual a un número real.

Definición 1.9. (Klenke 2014, p. 175). La **media** de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$ es la expresión:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Se dice que la media de X no existe si la integral no es un número real.

1.4. Media de una función de una variable aleatoria

Sea la función de probabilidad $f(x) = P[X = x]$ de una variable aleatoria discreta X con rango R_X ; la función $Y = H(X)$, es una variable aleatoria con rango $R_Y = \{y/H(x) = y\}$, con función de probabilidad $g(y)$ definida:

$$g(y) = P[Y = y] = \sum_{\{x \in R_X / H(x)=y\}} P[X = x].$$

Definición 1.10. (Klenke 2014, p. 180). Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$, **la media o valor esperado o esperanza matemática** de la variable aleatoria $H(X)$ está dada por la expresión:

$$E(H(X)) = \sum_{x_i \in R_X} H(x_i) f(x_i), \text{ si } X \text{ es discreta,}$$

$$E(H(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f(x) dx, \text{ si } X \text{ es continua.}$$

Se dice que la esperanza de $H(X)$ no existe si la suma o la integral no son iguales a un número real.

1.4.1. Propiedades de la esperanza matemática

(a) Si X_1, X_2, \dots, X_n son n variables aleatorias y a_1, a_2, \dots, a_n son n constantes reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i).$$

(b) Si a y b son constantes reales, tenemos $E(aX + b) = aE(X) + b$, en consecuencia tenemos:

- $E(b) = b$.
- $E(X + b) = E(X) + b$.
- $E(aX) = aE(X)$.

- Si Y es variable aleatoria, entonces $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$,

$$* E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y).$$

(c) Si X, Y so variables aleatorias independientes y a, b son constantes reales, entonces

$$E(aXbY) = abE(X)E(Y).$$

1.5. Varianza de una variable aleatoria

Denotemos a la varianza de una variable aleatoria X de estas maneras σ^2 , σ_x^2 , $Var(X)$, $V(X)$.

Definición 1.11. La **varianza** de una variable aleatoria X con distribución de probabilidad $f(x)$ y con media igual a μ es:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E[(X - \mu)^2] \\ &= \sum_{x_i \in R_X} (x_i - \mu)^2 f(x_i), \text{ si } X \text{ es discreta.} \\ \sigma_x^2 &= E[(X - \mu)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \text{ si } X \text{ es continua.} \end{aligned}$$

Definición 1.12. La **desviación estándar** de la variable aleatoria X es la raíz cuadrada positiva de su varianza

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}.$$

La propiedad de la varianza que se usa en los cálculos es:

$$var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2.$$

1.5.1. Propiedades de la varianza

la varianza pertenece a los reales positivos, sea X una variable aleatoria, entonces cuyas propiedades son:

(a) $var(X) = E(X^2) - \mu^2$,

(b) Si a, b son constantes reales, entonces $var(aX + b) = a^2 var(X)$,

- $var(b) = 0$, si $a = 0$,

- $var(X + b) = var(X)$, si $a = 1$,

- $var(aX) = a^2 var(X)$,

(c) Sea Y otra variable aleatoria que es independiente a X y a, b son dos constantes reales, entonces $var(aX + bY) = a^2 var(X) + b^2 var(Y)$,

(*) $var(X \pm Y) = var(X) \pm var(Y)$.

1.6. Algunas definiciones

Definición 1.13. (Rincón 2006, p. 311). La **función generadora de probabilidad** (f.g.p) de la variable aleatoria X es la función:

$$G_X(t) = G(t) = E(t^X),$$

definida para valores reales de t tal que la esperanza existe.

Por comodidad supondremos que éstas toman valores en el conjunto $\{0, 1, \dots\}$ que corresponde al caso de las variables aleatorias discretas ya estudiadas. Entonces

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k).$$

Proposición 1.1. (Rincón 2006, p. 178). Sean

1. Sean X y Y variables aleatorias con valores en $\{0, 1, \dots\}$, tales que $G_X(t)$ y $G_Y(t)$ existen y coinciden en algún intervalo no trivial alrededor de $t = 0$. Entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

2. Si $G_X(t)$ existe entonces

$$\frac{d^n}{dt^n} G_X(t) \Big|_{t=1} = E[X(X-1)\dots(X-n+1)].$$

3. Si X y Y son independientes y cuyas f.g.p. existen entonces

$$G_{X+Y} = G_X(t)G_Y(t).$$

Demostración. Tenemos que X y Y son variables aleatorias entonces:

1. Sean $a_n = P(X = n)$ y $b_n = P(Y = n)$ para $n \geq 0$. la condición $G_X(t)$ y $G_Y(t)$ se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n b_n.$$

Para que estas dos series de potencias en t coincidan en algún intervalo no trivial alrededor del cero, sus coeficientes deben forzosamente coincidir. Es decir $a_n = b_n$, para $n \geq 0$.

2. Como las series de potencia se pueden derivar término a término conservándose el mismo radio de convergencia se tiene que

$$\begin{aligned}
 G'(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^k P(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P(X = k),
 \end{aligned}$$

al evaluar en $t = 1$ se obtiene

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = E(X).$$

De manera análoga se demuestra para las derivadas superiores.

3. Cuando X y Y son independientes

$$\begin{aligned}
 G_{X+Y} &= E(t^{X+Y}) \\
 &= E(t^X t^Y) \\
 &= E(t^X) E(t^Y) \\
 &= G_X(t) G_Y(y).
 \end{aligned}$$

□

Definición 1.14. (Rincón 2006, p. 180). La **función generadora de momentos** (f.g.m.) de la variable aleatoria X es la función

$$M_X = M(t) = E(e^{tX}),$$

definida para valores reales de t para los cuales esta esperanza existe.

La parte importante de esta función es su existencia en una vecindad no trivial alrededor del cero y que la f.g.m. y la f.g.p. están relacionadas, cuando existen, por la igualdad $M(t) = G(e^t)$.

Proposición 1.2. (Rincón 2006, p. 180). *Sean*

1. *Sea X tal que su f.g.m. $M(t)$ existe. Entonces todos los momentos X existen y cumplen*

$$\frac{d^n}{dt^n} M(t) |_{t=0} = E(X^n),$$

2. *Sean X y Y son independientes y cuyas f.g.m. existen. Entonces*

$$M_{X+Y} = M_X(t)M_Y(t),$$

3. *Las variables X y Y tienen la misma distribución si y solo si $M_X(t) = M_Y(t)$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ con $\epsilon > 0$.*

Demostración. Tenemos que X y Y son variables aleatorias entonces:

1. El teorema de convergencia dominada permite obtener la derivada a través de la esperanza de modo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) &= \frac{d}{dt} E(e^{tX}) \\ &= E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\right) \\ &= E(Xe^{tX}). \end{aligned}$$

Al evaluar en $t = 0$ se obtiene el primer momento. Análogamente se prueba para derivadas superiores.

2. Cuando X y Y son independientes se tiene que

$$\begin{aligned}M_{X+Y}(t) &= E(e^{t(X+Y)}) \\ &= E(e^{tX} \cdot e^{tY}) \\ &= E(e^{tX}) E(e^{tY}) \\ &= M_X(t)M_Y(t).\end{aligned}$$

3. Si X y Y tienen la misma distribución entonces claramente $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ coinciden cuando estas funciones existan. Recíprocamente, si X es tal que su función generadora de momentos existe entonces todos sus momentos existen y éstos determinan de manera única a la distribución de probabilidad.

□

Definición 1.15. (Rincón 2006, p. 180). La **función característica** de X es la función

$$\phi(t) = E(e^{itX}),$$

definida para cualquier número real t . El número i es la unidad de los números imaginarios.

Teorema 1.1. (Rincón 2006, p. 199). Sean X_1, X_2, \dots independientes e idénticamente distribuidas tales que $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right] = P(Z \leq x),$$

en donde Z tiene distribución normal estándar.

1.7. Distribuciones de probabilidad

La *distribución de probabilidad* o modelo probabilístico satisface un conjunto de supuestos, para estudiar los resultados observados del comportamiento de la variable aleatoria en un experimento aleatorio.

En esta sección se presentan en orden alfabético algunas distribuciones de probabilidad utilizadas. La función generadora de probabilidad se denota por P , y la función generadora de los momentos por M . Donde utilizamos las siguientes notaciones: “ \sim ” para nombrar la variables de una respectiva distribución, “ f ” función de probabilidad, “ E ” esperanza matemática, “ Var ” varianza.

1.7.1. Distribución Bernoulli

La *distribución de Bernoulli* (o distribución dicotómica), nombrada así por el matemático y científico suizo Jakob Bernoulli, es una distribución de probabilidad discreta, que toma valor 1 para la probabilidad de éxito p y valor 0 para la probabilidad de fracaso $q = 1 - p$. Nombraremos algunas propiedades características: (Beaver 2006, p. 175)

- $X \sim \text{Ber}(p)$ con $p \in (0, 1)$.
- $f(x) = p^x(1 - p)^{1-x}$ para $x = 0, 1$.
- $E(X) = p$.
- $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.
- $P(t) = 1 - p + pt$.
- $M(t) = (1 - p) + pe^t$.

1.7.2. Distribución Binomial

La *distribución binomial* es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos. Un experimento de Bernoulli se caracteriza por ser dicotómico, esto es, sólo son posibles dos resultados. A uno de estos se denomina éxito y tiene una probabilidad de ocurrencia p y al otro, fracaso, con una probabilidad $q = 1 - p$. En la distribución binomial el anterior experimento se repite n veces, de forma independiente, y se trata de calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos. Para $n = 1$, la binomial se convierte, de hecho, en una distribución de Bernoulli. Nombraremos algunas propiedades características:(Beaver 2006, p. 184)

- $X \sim \text{bin}(p)$ con $n \in \{1, 2, \dots\}$ y $p \in (0, 1)$.
- $f(x) = \binom{n}{k} p^x (1 - p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, \dots, n$.
- $E(X) = np$.
- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.
- $P(t) = (1 - p + pt)^n$.
- $M(t) = [(1 - p) + pe^t]^n$.

1.7.3. Distribución Normal

(Beaver 2006, p. 223). En estadística y probabilidad se llama *distribución normal*, *distribución de Gauss* o *distribución gaussiana*, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece aproximada en

fenómenos reales.

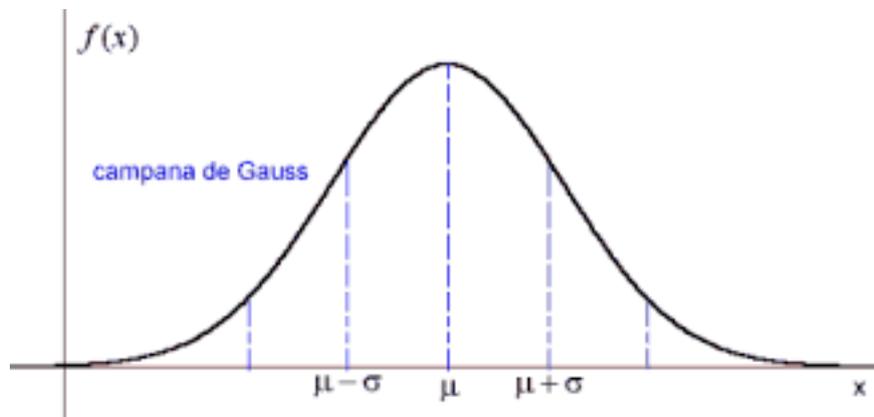


Figura 1.1: **campana de Gauss**. Fuente: Rincón (2012).

La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico. Esta curva se conoce como campana de Gauss y es el gráfico de una función gaussiana.

La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la enorme cantidad de variables incontrolables que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes. Nombraremos algunas propiedades características:

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$.

- $E(X) = \mu$.

- $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

- $M(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$.

- $\phi(t) = \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2)$.
- Cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se obtiene la distribución normal estándar, $N(0, 1)$.

1.7.4. Distribución Poisson

(Beaver 2009, p. 197). La *distribución de Poisson* es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo. Concretamente, se especializa en la probabilidad de ocurrencia de sucesos con probabilidades muy pequeñas (sucesos *raros*). Nombraremos algunas propiedades características:

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda > 0$.
- $f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ para $x = 0, 1, \dots$
- $E(X) = \lambda$.
- $\text{Var}(X) = \lambda$.
- $P(t) = e^{-\lambda(1-t)}$.
- $M(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$.

1.7.5. Distribución ji cuadrada (χ^2)

(Gujarati 2009, p. 820). Sean Z_1, Z_2, \dots, Z_k variables normales estandarizadas independientes (es decir, variables normales con media cero y varianza unitaria). Así, se

dice que la cantidad

$$Z = \sum_{i=1}^k Z_i^2,$$

sigue la distribución χ^2 con k grados de libertad (gl), donde el término gl significa el número de cantidades independientes en la suma anterior. Una variable distribuida como ji cuadrada se denota por χ_k^2 , donde el subíndice k indica los gl.

Las propiedades de la distribución χ^2 son las siguientes:

1. La distribución χ^2 es una distribución asimétrica; el grado de la asimetría depende de los gl. Cuando los gl son comparativamente pocos, la distribución está muy sesgada hacia la derecha; pero a medida que aumenta el número de gl, la distribución es cada vez más simétrica. De hecho, para gl por encima de 100, la variable

$$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{(2k - 1)},$$

puede tratarse como una variable normal estandarizada, donde k son los gl.

2. La media de la distribución ji cuadrada es k y su varianza es $2k$, donde k son los gl.
3. Si Z_1 y Z_2 son dos variables ji cuadrada independientes con k_1 y k_2 gl, la suma $Z_1 + Z_2$ es también una variable ji cuadrada con gl = $k_1 + k_2$.

1.7.6. p-valor

Una vez obtenida la muestra, se puede calcular una cantidad que permite resumir el resultado del experimento de manera objetiva. Esta cantidad es el **p-valor** que corresponde al nivel de significación más pequeño posible que puede escogerse, para el cual todavía se aceptaría la hipótesis alternativa con las observaciones actuales. Cualquier nivel de significación escogido inferior al p-valor (simbólicamente p_v) comporta aceptar H_0 . Obviamente, al ser una probabilidad, se cumple que:

$$0 \leq p_v \leq 1$$

El p-valor es una medida directa de lo verosímil que resulta obtener una muestra como la actual si es cierta H_0 . Los valores pequeños indican que es muy infrecuente obtener una muestra como la actual, en cambio, los valores altos que es frecuente.

El p-valor se emplea para indicar cuánto (o cuán poco) contradice la muestra actual la hipótesis alternativa.

Informar sobre cual es el p-valor tiene la ventaja de permitir que cualquiera decida qué hipótesis acepta basándose en su propio nivel de riesgo α . Esto no es posible cuando se informa, como ha sido tradicional, indicando sólo el resultado de la decisión, es decir, si se acepta o se rechaza H_0 con un α fijo.

Al proporcionar el p-valor obtenido con la muestra actual, la decisión se hará de acuerdo a la regla siguiente:

Si $p_v \leq \alpha$, aceptar H_1

Si $p_v > \alpha$, aceptar H_0

Entrando en el terreno práctico, algunos paquetes estadísticos proporcionan en sus listados el nivel de significancia, cuya traducción literal es nivel de significación, cuando muchas veces se refieren en realidad al p-valor (p-value).

CAPÍTULO 2

MODELO INDIVIDUAL

En este capítulo se presenta una introducción al esquema del seguro y al concepto general de riesgo. Se presentan además las perspectivas individual y colectiva para modelar el riesgo correspondiente al conjunto de reclamaciones que afronta una compañía aseguradora. Se estudian también algunas propiedades y relaciones entre estas dos perspectivas. En los capítulos siguientes se adopta el modelo colectivo como modelo fundamental.

2.1. Esquema del Seguro y del Riesgo

Suponga que se tiene un portafolio de n pólizas individuales de seguros válidas por un año como se muestra en la Figura 2.1

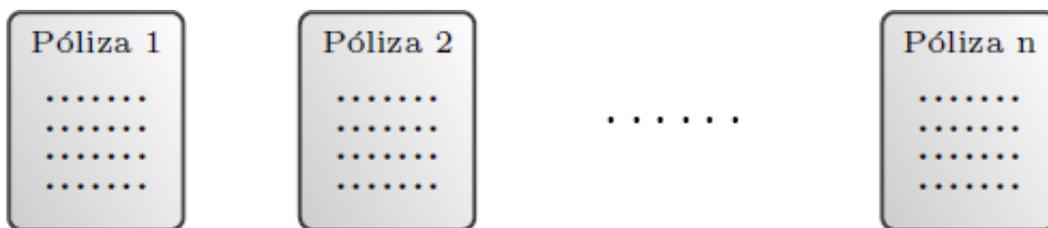


Figura 2.1: **Pólizas**. Fuente: Rincón (2012).

Sea p_j la probabilidad de que el j -ésimo asegurado no efectúe ninguna reclamación

durante el tiempo de vigencia del seguro, y sea q_j la probabilidad de que se observe exactamente una reclamación. Suponga que la igualdad $p_j + q_j = 1$ se cumple, ello significa que no puede haber más de una reclamación por cada asegurado. Tal situación puede corresponder, por ejemplo, a los seguros de vida. Rincón (2012) lo define la variable aleatoria de esta manera:

$$D_j = \begin{cases} 1, & \text{si hay reclamación en la póliza } j, \\ 0, & \text{si no hay reclamación en la póliza } j. \end{cases}$$

En vista de las propiedades de la variable aleatoria D_j afirmamos que D_j posee una distribución Bernoulli con parámetro q_j . El uso de la letra D viene del término en inglés *Death*. Observe que el número total de reclamaciones está dado por la variable aleatoria

$$N = D_1 + \dots + D_n.$$

Ahora suponga artificialmente que cada póliza efectúa una reclamación, y sea la variable aleatoria $C_j > 0$ el monto de la reclamación efectuada por la póliza j . Debido a que los siniestros pueden presentarse con características distintas y ello puede derivar en distintos montos de reclamación, consideraremos de manera general a C_j no como una constante sino como una variable aleatoria. La letra C proviene del término en inglés *Claim*, que se traduce en español como *reclamación*. La verdadera reclamación de la póliza j está dada por el producto

$$D_j C_j = \begin{cases} C_j, & \text{si } D_j = 1, \\ 0, & \text{si } D_j = 0. \end{cases}$$

Observe que esta variable aleatoria puede ser mixta, es decir, no ser continua ni discreta. Véase la Figura 2.2 en donde se muestran posibles gráficas de la función

de distribución de esta variable aleatoria. De esta forma se considera como datos en este modelo la colección de vectores aleatorios $(D_1, C_1), \dots, (D_n, C_n)$, que supondremos independientes. Consideraremos además que las variables D_j y C_j también son independientes entre sí.

Definición 2.1. (Rincón 2012, p. 8). *El monto de reclamaciones agregadas, o también llamado agregado de reclamaciones, en el modelo individual, es la variable aleatoria*

$$S = \sum_{j=1}^n D_j C_j. \quad (2.1)$$

Esta variable es el monto que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo completo del seguro. La ecuación (2.1) representa el modelo individual para una póliza de seguros de las características señaladas. El modelo tiene este nombre pues supone conocer las probabilidades de reclamación y posible monto de reclamación de todos y cada uno de los asegurados de manera individual. Una posible desventaja de este modelo es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante durante todo el tiempo de vigencia del seguro.

Desde el punto de vista matemático, y también desde la perspectiva del negocio del seguro, nuestro objetivo es conocer las características de la variable S , a quien llamaremos *riesgo*. Si $F_j(x)$ denota la función de distribución del producto $D_j C_j$, entonces la función de distribución $F(x)$ del riesgo S adquiere la siguiente expresión en términos de convoluciones:

$$F(x) = (F_1 * \dots * F_n)(x).$$

Esta fórmula general y compacta es, sin embargo, un tanto difícil de calcular y no la utilizaremos con frecuencia. Como primeros resultados generales se presentan a continuación algunas características de S . Denotaremos por $G_j(x)$ la función de distribución de C_j , y como es costumbre, cuando exista, $M_X(t)$ denota la función generadora de momentos de una variable X cualquiera.

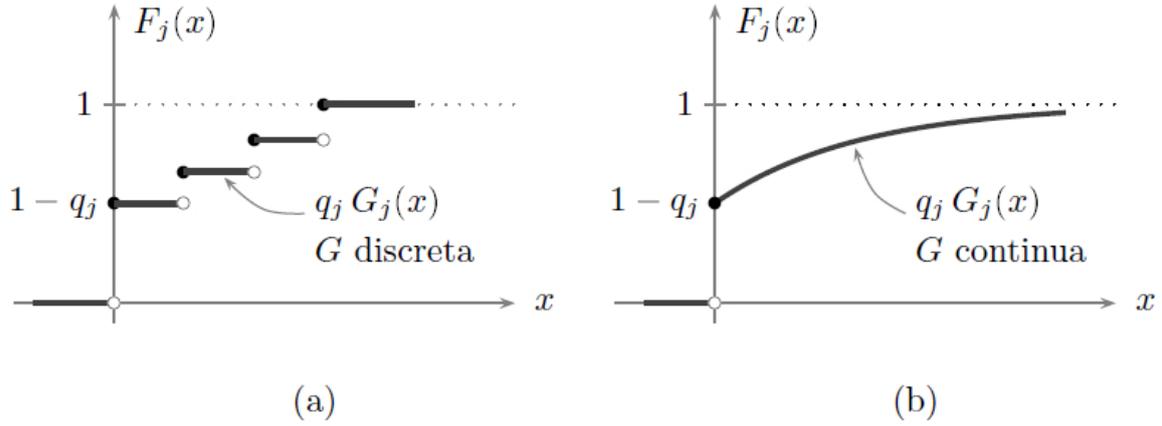


Figura 2.2: **Gáficas de la función de distribución.** Fuente: Rincón (2012).

Proposición 2.1.

(Rincón 2012, p. 5). *Bajo la notación e hipótesis del modelo individual se tienen los siguientes resultados:*

$$1.) E(S) = \sum_{j=1}^n q_j E(C_j).$$

$$2.) Var(S) = \sum_{j=1}^n [q_j Var(C_j) + q_j p_j E^2(C_j)].$$

$$3.) F_j(x) = \begin{cases} 1 + q_j(G_j(x) - 1), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$4.) M_{D_j C_j}(t) = 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1).$$

$$5.) M_S(t) = \prod_{j=1}^n [1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)].$$

Demostración. Comprobemos los resultados:

1. Por la hipótesis de independencia,

$$E(S) = \sum_{j=1}^n E(D_j C_j) = \sum_{j=1}^n E(D_j) E(C_j) = \sum_{j=1}^n q_j E(C_j).$$

2. En primer lugar tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(D_j C_j) &= E(D_j^2 C_j^2) - E^2(D_j C_j) \\ &= q_j E(C_j^2) - q_j^2 E^2(C_j) \\ &= q_j [\text{Var}(C_j) + E^2(C_j)] - q_j^2 E^2(C_j) \\ &= q_j \text{Var}(C_j) + q_j p_j E^2(C_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Var}(S) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(D_j C_j) = \sum_{j=1}^n [q_j \text{Var}(C_j) + q_j p_j E^2(C_j)].$$

3. Para cualquier número real $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_j(x) &= P(D_j C_j \leq x) \\ &= P(D_j C_j \leq x | D_j = 0) P(D_j = 0) + P(D_j C_j \leq x | D_j = 1) P(D_j = 1) \\ &= P(0 \leq x | D_j = 0) p_j + P(C_j \leq x | D_j = 1) q_j \\ &= p_j + q_j G_j(x) \\ &= 1 + q_j (G_j(x) - 1). \end{aligned}$$

4. Nuevamente condicionando sobre el valor de D_j

$$\begin{aligned}M_{D_j C_j}(t) &= E(e^{tD_j C_j}) \\&= E(e^{tD_j C_j} | D_j = 0)P(D_j = 0) + E(e^{tD_j C_j} | D_j = 1)P(D_j = 1) \\&= p_j + q_j M_{C_j}(t) \\&= 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1).\end{aligned}$$

5. Esta igualdad se sigue directamente de la anterior usando la hipótesis de independencia.

□

Se tienen n ensayos independientes Bernoulli, en donde la probabilidad de éxito en el ensayo j es q_j , y el valor asociado al resultado éxito no es 1 como en el esquema usual sino el monto $C_j > 0$, con esto podemos considerar a la variable aleatoria S que tiene una distribución binomial generalizada. Puede comprobarse que cuando q_j es constante p , y los montos C_j son todos iguales a 1, la variable S tiene distribución $\text{bin}(n, p)$, y las fórmulas generales demostradas para S se reducen a las de esta distribución. Es también interesante observar que aunque inicialmente el modelo individual de riesgo que hemos presentado puede aplicarse a esquemas de seguros en donde hay como máximo una reclamación por póliza, esta única reclamación puede considerarse como el monto total conformado por la suma de varias posibles reclamaciones efectuadas por una póliza a lo largo del periodo de vigencia del seguro. De este modo el modelo individual puede también aplicarse al caso de reclamaciones múltiples. En cualquier caso, los datos que deben tenerse o estimarse estadísticamente para aplicar el modelo individual a una situación real son el número de asegurados n , las probabilidades de reclamación q_1, q_2, \dots, q_n , y las distribuciones de probabilidad de los montos C_1, C_2, \dots, C_n . (Johnson, et. al. (2005)).

2.1.1. Aproximación normal

Segun Klenke (2014) ,veamos ahora cuando n es grande y el portafolio de asegurados es homogéneo en el sentido de que las variables $D_j C_j$ son idénticamente distribuidas con segundo momento finito, puede usarse el teorema central del límite para aproximar la distribución de S mediante la distribución normal, es decir

$$P(S \leq x) = P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{x - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right).$$

Esta aproximación puede ser adecuada para ciertos riesgos pero tiene la desventaja de que asigna una probabilidad positiva al intervalo $]-\infty, 0[$, lo cual no es consistente con el hecho de que $S \geq 0$. Sin embargo, dado que la distribución $N(\mu, \sigma^2)$ se concentra principalmente en el intervalo $]\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma[$, cuando la esperanza y la varianza de S son tales que $E(S) - 4\sqrt{Var(S)} \geq 0$, la probabilidad asignada a la parte negativa del eje es realmente pequeña, ello alivia un poco el hecho de que esta distribución no tenga soporte en el intervalo $[0, \infty[$. Tal vez la situación más comprometedora sea que la función de densidad normal decae muy rápidamente pues existen riesgos cuyas funciones de densidad no cumplen con tal característica. Más adelante mencionaremos esta propiedad de las distribuciones de los riesgos en términos de colas pesadas y ligeras.

En la siguiente sección encontraremos una forma recursiva para calcular la función de probabilidad de S cuando el monto de las reclamaciones se modela mediante una variable aleatoria discreta.

2.2. Fórmula de De Pril

A continuación presentaremos la fórmula de De Pril. La demostración de este resultado fue por Nelson De Pril en 1986 y proporciona una expresión exacta, aunque recursiva, de la distribución de probabilidad de un riesgo en el modelo individual De Pril (1986). La fórmula es bastante general aunque presupone que las reclamaciones toman los valores en el conjunto $\{1, 2, \dots\}$. Este supuesto no es realmente una restricción fuerte pues en la práctica el pago de siniestros se realiza siempre usando alguna unidad monetaria. Para establecer la fórmula de De Pril es

necesario dividir el portafolio de n asegurados de acuerdo a la tasa de mortalidad y la suma asegurada. Denotaremos por n_{ij} al número de asegurados que tienen probabilidad de reclamación q_j y monto de reclamación i , en donde i toma valores en $\{1, 2, \dots, I\}$, y j en $\{1, 2, \dots, J\}$. De esta forma se tiene el cuadro 2.1 en donde la suma de las entradas es n , es decir

$$n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij}.$$

Denotaremos por Y_{ij} el monto real reclamado por un asegurado cuya probabilidad de reclamación es q_j , y posible monto reclamado i , es decir

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{con probabilidad } 1 - q_j, \\ i, & \text{con probabilidad } q_j. \end{cases}$$

Probabilidades de Reclamación

	q_1	q_2	\dots	q_j	\dots	q_J
1	n_{11}	n_{11}	\dots	\dots	\dots	n_{1J}
2	n_{11}	n_{11}	\dots	\dots	\dots	n_{2J}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
i	\dots	\dots	n_{ij}	\dots	\dots	n_{iJ}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
I	\dots	\dots	\dots	n_{Ij}	\dots	n_{IJ}

número de reclamaciones

Cuadro 2.1: **Tabla de Reclamaciones.** Fuente: Rincón (2012).

Teorema 2.1. (Fórmula de De Pril). (De Pril, 1986). Sea n_{ij} el número de pólizas cuyos asegurados tienen tasa de mortalidad q_j y suma asegurada i . Suponga que $j = 1, 2, \dots, J$, e $i = 1, 2, \dots, I$. Entonces las probabilidades $g_x = P(S = x)$, están dadas por:

$$g_x = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x \wedge I} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik} h(i, k), \quad \text{para } x \geq 1,$$

$$g_0 = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J (1 - q_j)^{n_{ij}},$$

donde

$$h(i, k) = i(-1)^{k-1} \sum_{j=1}^J n_{ij} \left(\frac{q_j}{1 - q_j} \right)^k.$$

Demostración. La función generadora de probabilidad del monto reclamado Y_{ij} por un asegurado con probabilidad de reclamación q_j , y monto reclamado i , es

$$E(t^{Y_{ij}}) = (1 - q_j) + q_j t^i.$$

Por lo tanto, usando la hipótesis de independencia, la función generadora de probabilidad de la cartera completa es

$$G(t) = E(t^S) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r g_r = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J (1 - q_j + q_j t^i)^{n_{ij}},$$

en donde $g_r = P(S = r)$. Tomando logaritmo y después derivando,

$$\ln G(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} \ln(1 - q_j + q_j t^i),$$

$$\frac{d}{dt} \ln G(t) = \frac{G'(t)}{G(t)} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} \frac{i q_j t^{i-1}}{1 - q_j + q_j t^i},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
tG'(t) &= G(t) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} \frac{iq_j t^i}{1 - q_j + q_j t^i} \\
&= G(t) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} i \frac{q_j t^i}{1 - q_j} \left(1 + \frac{q_j t^i}{1 - q_j}\right)^{-1} \\
&= G(t) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} i \frac{q_j t^i}{1 - q_j} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{q_j t^i}{1 - q_j}\right)^{k-1},
\end{aligned}$$

en donde hemos usado la expansión $(1 - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, válida para $|x| < 1$. Por lo tanto, para valores suficientemente pequeños de t ,

$$tG'(t) = G(t) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{q_j}{1 - q_j}\right)^k t^{ik}.$$

Definiendo ahora la función

$$h(i, k) = i(-1)^{k-1} \sum_{j=1}^J n_{ij} \left(\frac{q_j}{1 - q_j}\right)^k.$$

La doble suma respecto de los índices j y k es absolutamente convergente en cualquiera de los dos órdenes que se efectúen estas sumas y el resultado es el mismo. Por lo tanto es válido el intercambio en el orden de las sumas y la expresión anterior puede escribirse como sigue

$$tG'(t) = G(t) \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{\infty} t^{ik} h(i, k).$$

Reemplazando las expresiones para $G'(t)$ y $G(t)$ en sus correspondientes series de potencias se obtiene

$$\sum_{r=1}^{\infty} r t^r g_r = \sum_{r=0}^{\infty} t^r g_r \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{\infty} t^{ik} h(i, k).$$

Para $x \geq 1$, el coeficiente de t^x en el lado izquierdo es $x g_x$, mientras que en el lado derecho es la suma de los términos $g_{x-ik} h(i, k)$, para aquellos valores de i y k tales que $1 \leq ik \leq x$. Se pueden primero establecer los posibles valores para i de la siguiente forma $i = 1, \dots, x \wedge I$, y por lo tanto los valores para k son $k = 1, \dots, \lfloor x/i \rfloor$, en donde $x \wedge I$ es el valor mínimo entre x e I , y $\lfloor x/i \rfloor$ es la parte entera del cociente

x/i . Igualando estos coeficientes se tiene que, $g_x = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x \wedge I} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik} h(i, k)$. Por otro lado, como $S = 0$ sólo cuando ningún asegurado efectúa ninguna reclamación, para $x = 0$ se tiene que

$$g_0 = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J (1 - q_j)^{n_{ij}}.$$

□

Para un mejor entendimiento de la fórmula recursiva de De Pril escribiremos a continuación de manera explícita los primeros términos de este desarrollo.

$$g_0 = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J (1 - q_j)^{n_{ij}},$$

$$g_1 = g_0 h(1, 1),$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \{g_0 [h(1, 2) + h(2, 1)] + g_1 h(1, 1)\},$$

$$g_3 = \frac{1}{3} \{g_0 [h(1, 3) + h(3, 1)] + g_1 [h(1, 2) + h(2, 1)] + g_2 h(1, 1)\},$$

⋮

Ejemplo. Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes con idéntica distribución dada por la tabla que aparece abajo y cuya gráfica se muestra en la Figura 2.3(a). Usando la fórmula de De Pril encontraremos la distribución de $S = X_1 + X_2 + X_3$.

j	0	1	2
f_j	0.5	0.2	0.3

Observe que la variable suma puede tomar cualquiera de los valores $0, 1, \dots, 6$. Usando la misma notación que en la fórmula de De Pril se muestran a continuación los cálculos para encontrar la función de probabilidad de S y la gráfica correspondiente aparece en la Figura 2.3(b).

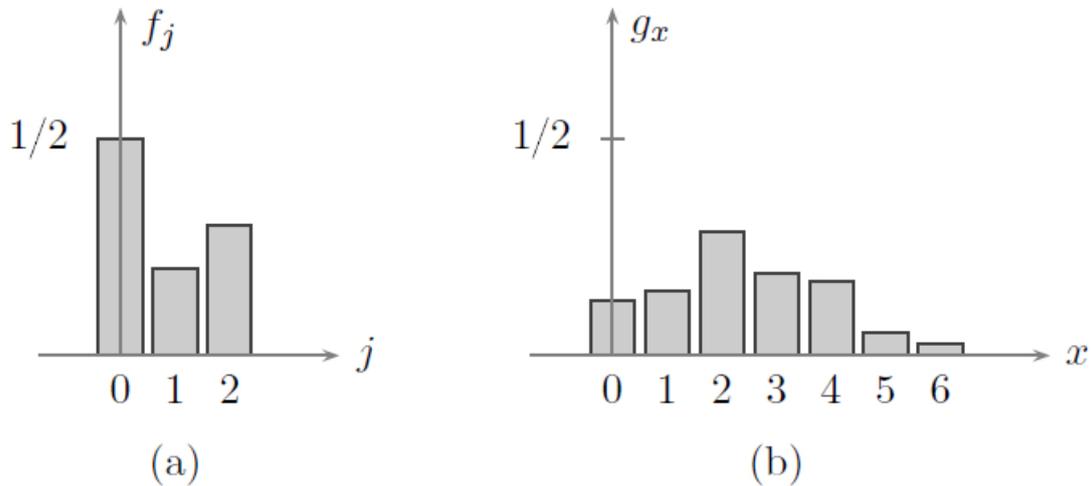


Figura 2.3: **Gráfica de Distribución.** Fuente: Rincón (2012).

Ejemplo. Se tiene 48 pólizas de seguros con las probabilidades y montos de reclamaciones para los datos indicados en la siguiente cuadro 2.2

Probabilidades de Reclamación

	iq	0.03	0.04	0.05
Número de Reclamaciones	1	1	3	1
	2	3	5	4
	3	5	3	4
	4	2	2	6
	5	2	3	4

Cuadro 2.2: **Datos de Reclamaciones.** Fuente: Rincón (2012).

cuya correspondiente función de densidad para este riesgo es la que se muestra en la Figura 2.4. Debe tenerse cuidado en la implementación numérica de esta fórmula

pues dado su caracter recursivo y que algunas de las probabilidades involucradas pueden ser muy pequeñas, pueden generarse resultados incorrectos debido al inevitable redondeo de cifras en una computadora.

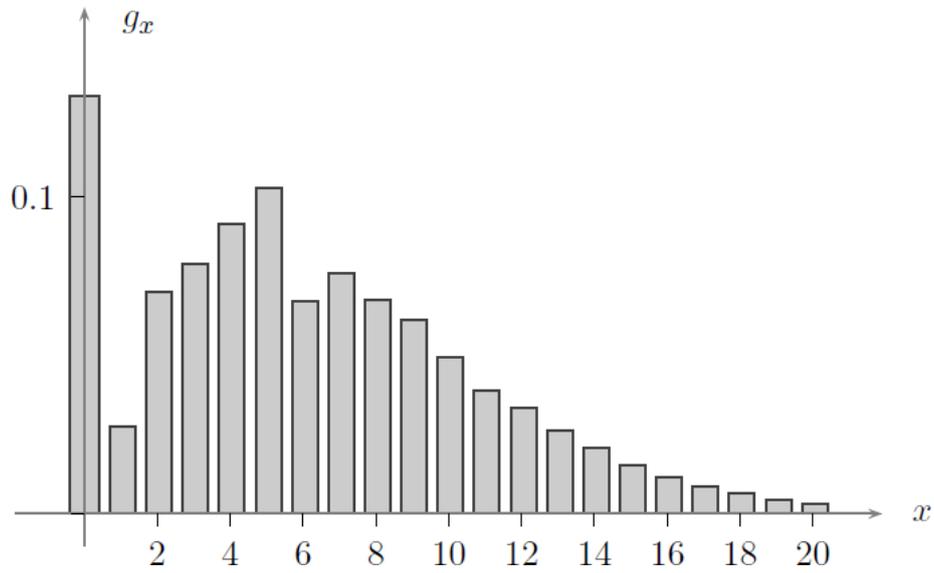


Figura 2.4: **Función de Densidad.** Fuente: Rincón (2012).

CAPÍTULO 3

MODELO COLECTIVO

Consideremos un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo de tiempo $[0, T]$. Este periodo puede corresponder a un año por ejemplo. Sea N la variable aleatoria que denota el número de reclamaciones ocurridas en este intervalo, y sean las variables positivas Y_1, \dots, Y_N los montos de estas reclamaciones. Gráficamente una posible realización de tal esquema se muestra en la Figura 3.1.

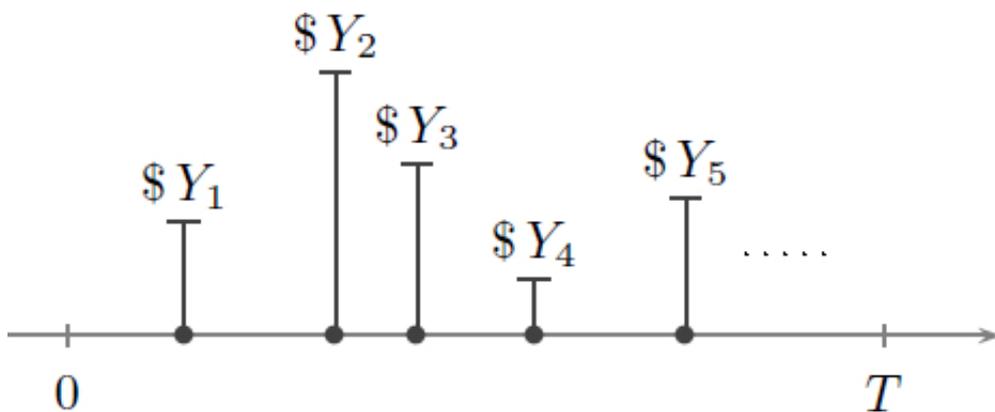


Figura 3.1: **Posible realización de tal esquema.** Fuente: Rincón (2012).

Consideraremos que el número de reclamaciones y los montos de éstas son variables aleatorias independientes. Más aún, supondremos que las reclamaciones mismas son independientes entre sí y que comparten la misma distribución de probabilidad.

Definición 3.1. (Rincón 2012, p. 17). *El monto agregado o monto acumulado de todas las reclamaciones efectuadas es la variable aleatoria S , llamada riesgo, y definida como sigue*

$$S = \sum_{j=1}^N Y_j. \quad (3.1)$$

Observe que cada sumando es una variable aleatoria y que el número de sumandos es también aleatorio. El valor de S se define como cero cuando $N = 0$. Observe además que S puede ser una variable aleatoria mixta, es decir, no ser discreta ni continua, pues cuando los montos de las reclamaciones Y son variables continuas estrictamente positivas, la variable S puede tomar el valor 0 con probabilidad $P(S = 0) = P(N = 0) > 0$, y puede además tomar cualquier valor en el intervalo $]0, \infty[$. La ecuación 3.1 representa el **modelo colectivo** para un contrato de seguros, cuyas posibles realizaciones como función del tiempo tienen la forma de la gráfica de la Figura 3.2.

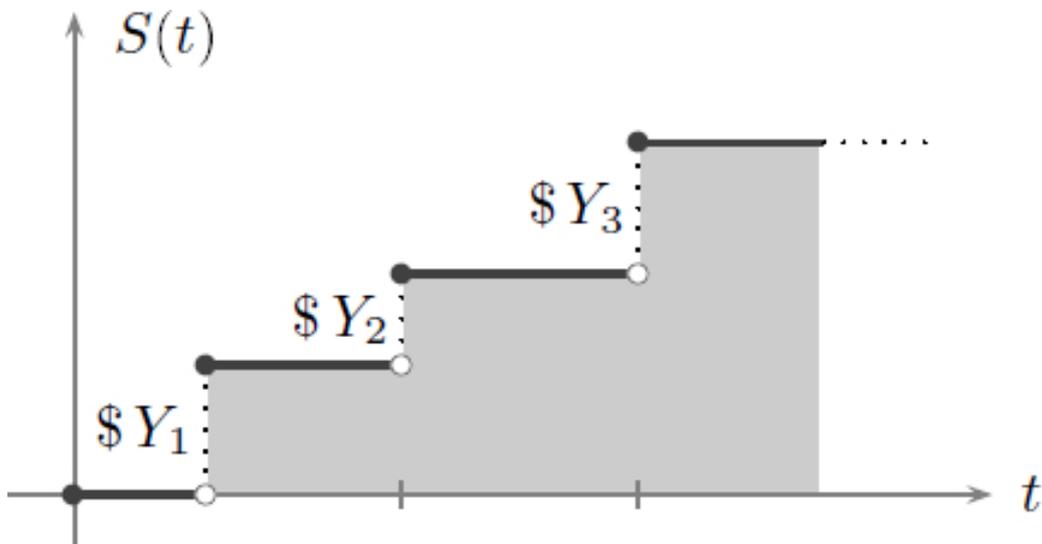


Figura 3.2: **Función de Tiempo.** Fuente: Rincón (2012).

A la función de distribución de cada reclamación Y la denotaremos por la letra G . Se asume naturalmente que $G(0) = 0$, ello equivale a decir que la variable Y es positiva. Adicionalmente usaremos la notación $\mu_n := E(Y)^n$, en particular se escribe μ en lugar de $\mu_1 := E(Y)$. Nuevamente el problema central es encontrar

la distribución de probabilidad de S , la cual depende de la distribución de Y y de N . Un primer resultado general al respecto es el que aparece a continuación. Antes de enunciarlo recordemos que la 0-convolución de una función de distribución G se define como

$$G^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposición 3.1. (Rincón 2012, p. 18). *La función de distribución del riesgo S en el modelo colectivo es*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)P(N = n).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x | N = n)P(N = n) \\ &= P(S \leq x | N = 0)P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 + \cdots + Y_n \leq x)P(N = n) \\ &= G^{*0}(x)P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)P(N = n). \end{aligned}$$

□

A continuación mostraremos algunas características numéricas de la variable S que utilizaremos posteriormente.

Proposición 3.2. (Rincón 2012, p. 19). *Suponiendo que las cantidades y funciones indicadas existen, el riesgo S en el modelo colectivo cumple las siguientes propiedades.*

1. $E(S) = E(N)E(Y)$.
2. $E(S^2) = E(N)E(Y^2) + E(N(N - 1))E^2(Y)$.

$$3. \text{Var}(S) = \text{Var}(N)E^2(Y) + \text{Var}(Y)E(N).$$

$$4. M_S(t) = M_N(\ln(M_Y(t))).$$

Demostración. Veamos;

1. Condicionaremos sobre el valor de N , y después usaremos la hipótesis de independencia. El resultado del cálculo es el mismo cuando la variable N inicia en el valor 0 o en valor 1.

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^N Y_j | N = n\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^n Y_j | N = n\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nE(Y)P(N = n) \\ &= E(N)E(Y). \end{aligned}$$

2. Nuevamente condicionando sobre el valor de N ,

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{j=1}^N Y_j\right)^2 | N = n\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)^2 | N = n\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)^2\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^n E(Y_j^2) + \sum_{j,k=1;j \neq k}^n E(Y_j Y_k) \right] P(N = n). \end{aligned}$$

Observe que segunda suma es nula cuando $n = 0$, y a su vez la tercera suma se

anula cuando $n = 0$ o 1 . Así por la idéntica distribución tenemos que

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} nE(Y^2)P(N = n) + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)E(Y^2)P(N = n) \\ &= E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))E^2(Y). \end{aligned}$$

3. Por las fórmulas anteriores,

$$\begin{aligned} Var(S) &= E(S^2) - E^2(S) \\ &= E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))E^2(Y) - E^2(N)E^2(Y) \\ &= E(N)[E(Y^2) - E^2(Y)] + [E(N^2) - E^2(N)]E^2(Y) \\ &= E(N)Var(Y) + Var(N)E^2(Y). \end{aligned}$$

4. De manera análoga a los dos primeros incisos,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{r(Y_1 + \dots + Y_N)} | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{r(Y_1 + \dots + Y_N)}) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (M_Y(t))^n P(N = n) \\ &= E((M_Y(t))^N) \\ &= E\left(e^{N \ln(M_Y(t))}\right) \\ &= M_N(\ln(M_Y(t))). \end{aligned}$$

□

Ahora consideraremos a continuación algunos casos particulares del modelo colectivo.

3.1. Modelo binomial compuesto

Cuando el número de reclamaciones N tiene una distribución $\text{bin}(n, p)$ se dice que el riesgo S tiene una distribución binomial compuesta, en la cual lo representamos así $S \sim \text{bin comp}(n, p, G)$, en donde G es la función de distribución de cada sumando en la definición de S . Bajo esta hipótesis se tienen los siguientes resultados.

Proposición 3.3. (Rincón 2012, p. 21). *Si N tiene distribución $\text{bin}(n, p)$, entonces:*

a) $E(S) = np\mu$.

b) $E(S^2) = np\mu_2 + n(n-1)p^2\mu^2$.

c) $\text{Var}(S) = np(\mu_2 - p\mu^2)$.

d) $M_S(t) = (1 - p + pM_Y(t))^n$.

Estas expresiones se siguen fácilmente de las fórmulas generales demostradas antes, basta recordar que si N tiene distribución $\text{bin}(n, p)$, entonces $E(N) = np$, $\text{Var}(N) = np(1 - p)$, y $M_N(t) = (1 - p + pe^t)^n$. Observe que en este caso se tiene una cota superior para el número de reclamaciones que pueden efectuarse.

3.2. Modelo binomial negativo compuesto

Cuando el número de reclamaciones N tiene una distribución binomial negativa se dice que el riesgo S tiene una distribución *binomial negativa compuesta*.

Esto es, si $N \sim \text{bin neg}(k, p)$, entonces $S \sim \text{bin neg comp}(k, p, G)$, donde nuevamente G hace referencia a la función de distribución de cada sumando de S . En este caso se cumple lo siguiente.

Proposición 3.4. (Rincón 2012, p. 22). Si N tiene distribución bin neg(k, p), entonces:

a) $E(S) = k(1/p - 1)\mu.$

b) $E(S^2) = np\mu_2 + n(n - 1)p^2\mu^2.$

c) $Var(S) = k(1/p - 1)(1/p)\mu^2 + k(1/p - 1)(\mu_2 - \mu^2).$

d) $M_S(t) = \left(\frac{p}{1 - (1 - p)M_Y(t)} \right)^k.$

Para encontrar estas fórmulas es suficiente recordar que si N tiene distribución bin neg(k, p), entonces

$$E(N) = k(1 - p)/p, \quad Var(N) = k(1 - p)/p^2, \quad \text{y} \quad M_N(t) = [p/(1 - (1 - p)e^t)]^k.$$

3.3. Modelo Poisson compuesto

Cuando el número de reclamaciones N tiene una distribución Poisson se dice que el riesgo S tiene una distribución *Poisson compuesta*, y se escribe

$S \sim Poisson\ comp(\lambda, G)$, en donde λ es el parámetro de la distribución Poisson y G es la función de distribución de cada sumando de S . Para este modelo se tienen los siguientes resultados.

Proposición 3.5. (Rincón 2012, p. 23). Si N tiene distribución Poisson(λ), entonces

a) $E(S) = \lambda\mu.$

b) $E(S^2) = \lambda\mu_2 + \lambda^2\mu^2.$

c) $Var(S) = \lambda\mu_2$.

d) $M_S(t) = \exp[\lambda(M_Y(t) - 1)]$.

Nuevamente estas expresiones son consecuencia de las fórmulas generales demostradas antes, y del hecho de que si N tiene distribución $Poisson(\lambda)$, entonces $E(N) = \lambda$, $Var(N) = \lambda$ y $M_N(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$. Observe que el parámetro λ y la distribución de la variable Y determinan por completo al modelo Poisson compuesto. Estudiaremos con más detalle este modelo en la siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

PRINCIPIOS PARA EL CÁLCULO DE PRIMAS

Hemos mencionado antes que una prima es un pago por adelantado que un asegurado realiza a una compañía aseguradora para obtener una cobertura parcial o completa contra un riesgo determinado, en los términos y condiciones que establece la póliza del seguro. En este capítulo vamos a estudiar algunas reglas generales para calcular el valor de una prima tomando en consideración únicamente los aspectos matemáticos del riesgo, es decir, no consideraremos cuestiones administrativas o mercadológicas del negocio del seguro, las cuales en situaciones prácticas son indispensables de considerar. Denotaremos por p , o p_S , la prima para cubrir un riesgo S . De esta manera, a la fórmula para calcular una prima se le puede considerar como una función numérica de la variable aleatoria S o de su distribución.

4.1. Principios generales

La prima pura de riesgo está dada por $p = E(S)$. Aunque esta fórmula podría parecer justa para el asegurado, no lo es así para el asegurador, quien debe solventar los diversos gastos de administración del seguro, y quien por otro lado no tendrá ningún margen de ganancia promedio por operar el negocio del seguro. Veremos a continuación la posible situación catastrófica que podría presentarse cuando se toma $p = E(S)$. Considere un portafolio homogéneo de n pólizas de seguro de un mismo riesgo y válidas por un tiempo determinado. Suponga que se cobra una misma prima p por cada póliza, y que S_j representa el monto de las reclamaciones efectuadas por

la póliza j , las cuales se presuponen independientes y con idéntica distribución. Si u es el capital inicial de la aseguradora, entonces según Rincón (2012) el capital de la misma al término de la vigencia de las pólizas es

$$X_n = u + np - \sum_{j=1}^n S_j = u + \sum_{j=1}^n (p - S_j).$$

Tenemos las siguientes dos situaciones:

- a) Cuando $p = E(S)$, al tomar esperanza en la ecuación anterior se obtiene $E(X_n) = u + n(p - E(S)) = u$. Es decir, en promedio la compañía aseguradora permanece con su capital inicial, sin embargo puede demostrarse que cuando $n \rightarrow \infty$, casi seguramente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = - \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty.$$

Esto quiere decir que el capital X_n puede oscilar y tomar valores grandes, tanto negativa como positivamente.

- b) Cuando $p \neq E(S)$, por la ley de los grandes números, la variable X_n tiene el siguiente comportamiento límite en el sentido casi seguro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > E(S). \\ -\infty & \text{si } p < E(S). \end{cases}$$

En vista de estos resultados, es natural y deseable suponer $p > E(S)$. Esta condición se conoce con el nombre de condición de ganancia neta (*net profit condition*), y debe prevalecer en cualquier método para calcular p . En general no existe un mecanismo de cálculo para la prima que sea el mejor pues existen varias condiciones que afectan la forma de calcular primas, entre ellas, las restricciones legales y financieras, las condiciones del asegurado, las condiciones de la propia aseguradora y de las otras aseguradoras, así como las condiciones del mercado del seguro. Todos estos son factores que determinan, directa o indirectamente, el valor de una prima para cubrir un riesgo particular en una situación real.

4.1.1. Principio del valor esperado

Segun Mikosch (2009), este principio es uno de los más sencillos y establece que la prima puede calcularse de la siguiente forma

$$p = (1 + \theta)E(S),$$

en donde $\theta > 0$ es una constante llamada factor de recargo (*safety loading*). Es decir, se trata de la reclamación promedio mas un porcentaje de ésta. En el factor de recargo se encuentran inmersos los costos administrativos y comerciales del seguro, así como los márgenes de utilidad de la aseguradora.

La forma simple en la que se calculan las primas mediante este principio es una de sus características principales, sin embargo puede observarse que una desventaja de esta fórmula es que asigna la misma prima a dos riesgos con distinta distribución pero con media común, y no toma en cuenta otros aspectos. Por ejemplo, si las varianzas de los riesgos fueran distintas, entonces las primas tal vez deberían ser distintas.

4.1.2. Principio de la varianza

Este principio hace uso de la esperanza y la varianza del riesgo. En este caso el factor de recargo $\theta > 0$ se aplica sobre el valor de la varianza de la siguiente forma

$$p = E(S) + \theta\text{Var}(S).$$

4.1.3. Principio de la desviación estándar

Sea nuevamente $\theta > 0$ una constante. En este principio el factor de recargo se aplica sobre la desviación estándar del riesgo como indica la fórmula que aparece abajo. A diferencia del principio de la varianza, en este caso las unidades de medición del riesgo y de la prima coinciden. Y es evidente que la prima calculada mediante este principio produce una prima menor o igual a aquella calculada mediante el principio de la varianza.

$$p = E(S) + \theta\sqrt{\text{Var}(S)}.$$

4.1.4. Principio de utilidad cero

Este principio hace uso de una función de utilidad, esto es, una función $v(x)$ definida sobre $[0, \infty)$ o un subconjunto de este intervalo y con valores en \mathbb{R} , que cumple las propiedades que se mencionan a continuación, y cuya gráfica en términos generales se muestra en la Figura 2.1.

a) Es estrictamente creciente.

b) Es cóncava.

Suponiendo diferenciabilidad, la primera condición se escribe $v'(x) > 0$, y la segunda condición significa que $v''(x) \leq 0$. A veces se añade la condición $v(0) = 0$ pues toda función de utilidad (definida en $x = 0$) puede modificarse de tal forma que cumpla esa condición sin afectar el resultado en los procesos de decisión que llevaremos a cabo usando estas funciones. La nueva función de utilidad sería $v(x) - v(0)$.

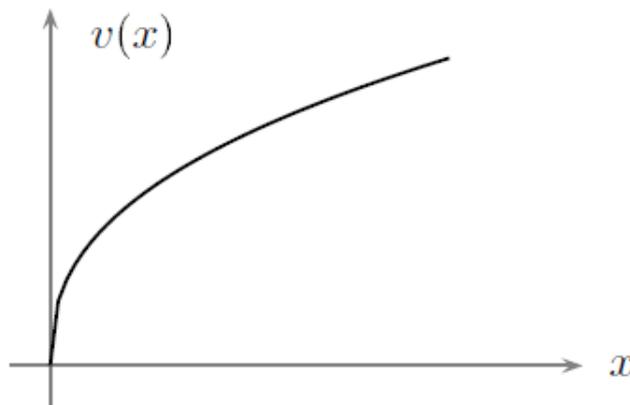


Figura 4.1: **función cóncava**. Fuente: Krantz (2015).

El principio de utilidad cero establece que la prima para cubrir un cierto riesgo S es aquel número p que satisface la ecuación

$$v(u) = E[v(u + p - S)], \quad (4.1)$$

en donde u es el capital inicial de la aseguradora. Es decir, la utilidad que representa para la aseguradora el capital inicial u debe ser idéntica a la utilidad esperada

al cubrir el riesgo. Así pues, el cálculo de p está dado implícitamente por la ecuación (4.1), y para que la prima esté bien definida supondremos el caso cuando esta ecuación tiene una única solución p . Debemos mencionar, sin embargo, que resolver ecuaciones de la forma (4.1) para p , no es sencillo. El siguiente ejemplo es un caso muy particular y atípico.

Ejemplo. Considere la función de utilidad $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. La prima se calcula como aquel valor de p que es solución de la ecuación

$$1 - e^{-\alpha u} = E [1 - e^{-\alpha(u+p-S)}].$$

En este caso la solución se puede encontrar con facilidad. Después de algunos cálculos, de la identidad anterior se obtiene la expresión

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha). \quad (4.2)$$

Se presentan a continuación algunos ejemplos de funciones de utilidad.

a) Función de utilidad exponencial.

$$v(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0.$$

b) Función de utilidad cuadrática.

$$v(x) = x - \alpha x^2, \quad \alpha > 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1/(2\alpha).$$

c) Función de utilidad logarítmica.

$$v(x) = \alpha \ln x, \quad \alpha > 0.$$

d) Función de utilidad de potencia fraccional.

$$v(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Demostremos a continuación que el principio de utilidad cero produce primas que cumplen la condición $p \geq E(S)$. Por la desigualdad de Jensen en el caso de funciones cóncavas,

$$v(u) = E[v(u + p - S)] \leq v(E(u + p - S)) = v(u + p - E(S)).$$

Como v es una función estrictamente creciente, es uno - a - uno, y por lo tanto su inversa v^{-1} existe y también es estrictamente creciente. Al aplicar entonces la inversa se preserva la desigualdad anterior y se obtiene $p \geq E(S)$. La igualdad se logra, por ejemplo, cuando S es constante.

4.1.5. Principio del valor medio

Este principio hace uso de una función de valor, esto es, una función $v(x)$ que cumple las propiedades que aparecen abajo y cuya gráfica general se muestra en la Figura 4.2.

a) $v(0) = 0$.

b) Es estrictamente creciente.

c) Es estrictamente convexa.

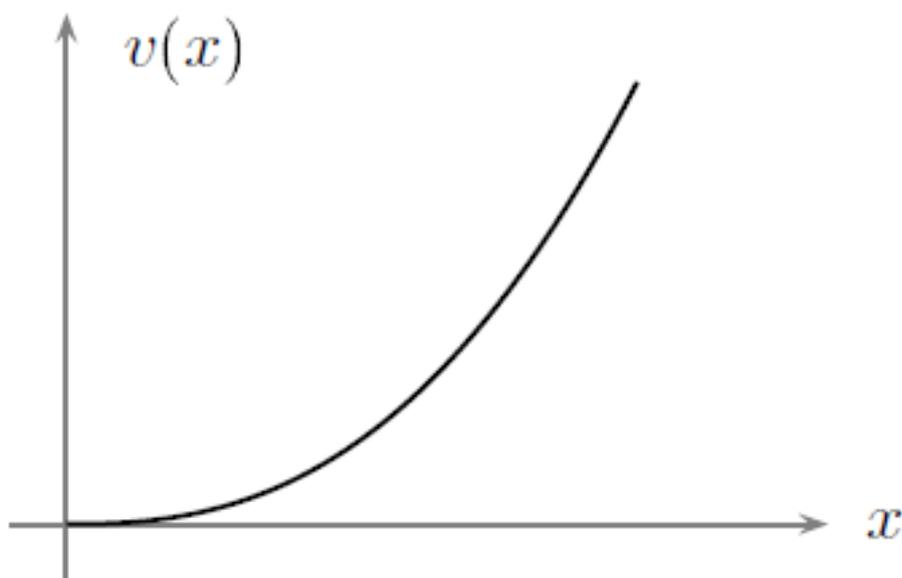


Figura 4.2: **función convexa**. Fuente: Krantz (2015).

El principio del valor medio establece que la prima p debe calcularse a partir de la igualdad

$$v(p) = E[v(S)]. \quad (4.3)$$

Esta identidad significa que la compañía aseguradora asigna el mismo valor a la prima que al valor promedio de la reclamación. Como v es estrictamente creciente, es uno - a - uno, su inversa por lo tanto existe y es también estrictamente creciente. De hecho, la inversa de cualquier función de utilidad que se anula en cero es un

ejemplo de una función de valor. Así la prima mediante este principio se puede escribir de la siguiente forma

$$p = v^{-1}(E(v(S))).$$

Por la desigualdad de Jensen para la función convexa v , $E(v(S)) \geq v(E(S))$, o bien por la misma desigualdad para la función cóncava v^{-1} , $v^{-1}(E(v(S))) \geq v^{-1}(v(E(S)))$. Ambos caminos llevan a la desigualdad

$$p \geq E(S).$$

Ejemplo. Considere la función de valor $v(x) = e^{\alpha x} - 1$, con $\alpha > 0$. Bajo este principio, la igualdad (4.3) se escribe $e^{\alpha p} - 1 = E(e^{\alpha S} - 1)$, lo que lleva a la siguiente solución, que es idéntica a (4.2),

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha). \quad (4.4)$$

4.1.6. Principio exponencial

Este es el principio de utilidad cero aplicado a la función de utilidad $v(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$. Y coincide también con el principio del valor medio aplicado a la función de valor $v(x) = e^{\alpha x} - 1$, con $\alpha > 0$. Hemos visto que la prima calculada bajo estos principios es

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha).$$

Observe que en este caso la prima no depende del capital inicial u . Puede verificarse directamente que $p \geq E(S)$, lo cual hemos demostrado de manera general en dos ocasiones.

4.1.7. Principio del porcentaje

Sea $\epsilon > 0$ una constante. El principio del porcentaje sugiere que la prima p puede calcularse mediante la expresión que aparece abajo. El significado geométrico de esta fórmula se muestra en la Figura 2.3.

$$p = \inf\{x > 0 : P(S > x) \leq \epsilon\}.$$

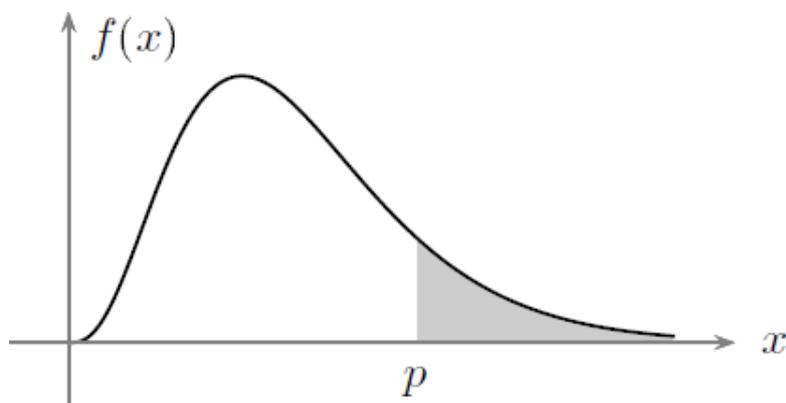


Figura 4.3: **Principio del porcentaje.** Fuente: Mikosch (2009).

De esta forma la probabilidad de que el riesgo exceda el monto de la prima debe ser pequeño o controlable mediante el parámetro ϵ . A este principio también se le conoce también como principio de pérdida máxima. Por ejemplo, si S sigue una distribución exponencial de parámetro λ , entonces $P(S > x) = e^{-\lambda x}$. Y por lo tanto p es aquel valor numérico tal que $e^{-\lambda p} = \epsilon$, es decir, $p = -\frac{1}{\lambda} \ln \epsilon$. Así, para este ejemplo particular, se cumple la condición $p \geq E(S)$ si, y solo si, $-\frac{1}{\lambda} \ln \epsilon \geq \frac{1}{\lambda}$, es decir, $\epsilon \leq e^{-1}$. Esto muestra que el principio del porcentaje no produce en general primas que cumplan la condición de ganancia neta.

4.2. Propiedades

En esta sección se enuncian algunas propiedades generales que son deseables que posea cualquier método para calcular primas.

Simplicidad

El cálculo de la prima debe ser fácil de calcular, por ejemplo, los principios del valor esperado, el de la varianza y el de la desviación estándar cumplen plenamente esta primera propiedad. La simplicidad en el cálculo de la prima es deseable que se cumpla por varias razones, entre ellas está el aspecto práctico del cálculo mismo, así como el de lograr una cabal comprensión del cálculo de la prima por parte del

asegurado y del resto de las personas involucradas en los procesos administrativos y legales del seguro.

Cota Inferior

Por lo explicado antes, la prima debe tener siempre como cota inferior estricta la prima de riesgo, es decir, $p > E(S)$, en otras palabras, las primas deben tener siempre un recargo positivo. Sin embargo, como hemos constatado en algunos cálculos, es más sencillo verificar la condición $p \geq E(S)$.

Consistencia

Si un riesgo se incrementa en una constante, entonces la prima debe reflejar ese cambio incrementándose en la misma cantidad, es decir, si $c > 0$ es una constante, entonces $p(S + c) = p(S) + c$. Los principios de varianza, de la desviación estándar, de utilidad cero, el principio exponencial y el principio del porcentaje cumplen con esta propiedad.

Aditividad

La prima de un portafolio consistente en dos riesgos independientes debe ser la suma de las primas individuales, es decir, $p(S_1 + S_2) = p(S_1) + p(S_2)$, cuando S_1 y S_2 son dos riesgos independientes. Es claro que cuando se cumple esta propiedad, el intentar combinar o separar los riesgos no resulta en ninguna ventaja o provecho alguno ni para el asegurado ni para el asegurador. Los principios de valor esperado, el de la varianza y el principio exponencial cumplen esta propiedad.

Invarianza de escala

Si $a > 0$ es una constante, entonces $p(aS) = ap(S)$, es decir, si la cuantificación del riesgo S cambia de escala y se considera ahora el riesgo aS , la prima para este nuevo riesgo debe ser $ap(S)$, esto es, la prima original modificada con la misma escala.

Cota superior

Si un riesgo está acotado superiormente, entonces la prima para cubrir este riesgo también debe tener la misma cota superior, es decir, si $S \leq M$ para alguna constante $M > 0$, entonces $p(S) \leq M$.

4.3. Primas y funciones de utilidad

Hemos mencionado que el principio de utilidad cero establece que la prima que una aseguradora está dispuesta a cobrar a un asegurado para cubrir un cierto riesgo S , y tomando como función de utilidad $v_1(x)$ es aquel número p que satisface la ecuación

$$v_1(u_1) = E[v_1(u_1 + p - S)], \quad (4.5)$$

en donde u_1 es el capital inicial de la aseguradora. Denotemos por p^- a esta prima puesto que en realidad la aseguradora estará contenta en cobrar una prima p que sea mayor o igual a p^- , es decir, desde el punto de vista de la aseguradora y bajo el criterio de utilidad cero, la prima p^- es la mínima prima a cobrar, y por lo tanto $p \geq p^-$. En contraparte, un asegurado con capital inicial o riqueza u_2 y con función de utilidad $v_2(x)$, considera que puede aceptar contratar un seguro para cubrirse contra el riesgo S cuando, de acuerdo al principio de utilidad cero, la prima p está dada por

$$v_2(u_2 - p) = E[v_2(u_2 - S)]. \quad (4.6)$$

El posible valor de p solución de esta ecuación representa el punto de balance (misma utilidad) para el asegurado entre la decisión de contratar el seguro o no contratarlo. Denotemos ahora por p^+ a la solución de (4.6). Nuevamente ese valor es en realidad la prima máxima que el asegurado está dispuesto a pagar para cubrirse contra S , pues es claro que una prima menor o igual a tal valor es conveniente para él. De esta manera el principio de utilidad cero establece las condiciones de ambas partes para tomar una decisión respecto a firmar o no firmar el contrato del seguro. Es claro que habrá un acuerdo entre ambas partes si existe un valor de p tal que

$$p^- \leq p \leq p^+.$$

En tal caso se dice que el riesgo es asegurable bajo el criterio y condiciones mencionados. La situación se ilustra en la Figura 4.4.

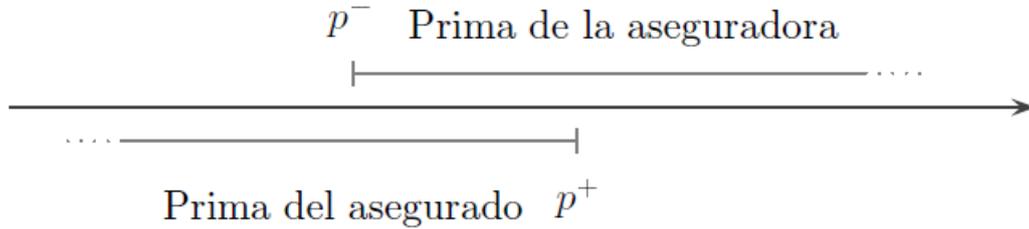


Figura 4.4: **Primas.** Fuente: Rincón (2012).

Ejemplo. Suponga que una compañía aseguradora con capital inicial $u_1 > 0$ decide asegurar un riesgo S y el cálculo de la prima se determina de acuerdo al principio de utilidad cero usando la función de utilidad $v_1(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x}$, con $\alpha_1 > 0$. De este modo, la prima mínima que la aseguradora está dispuesta a cobrar es p^- dada por la solución de la ecuación

$$v_1(u_1) = E[v_1(u_1 + p^- - S)].$$

Resolviendo esta ecuación como se ha hecho antes, se encuentra que $p^- = \frac{1}{\alpha_1} \ln M_S(\alpha_1)$. Por otro lado, un asegurado con capital inicial u_2 está dispuesto a pagar una prima máxima p^+ para asegurarse contra este riesgo, determinada por la ecuación $v_2(u_2 - p^+) = E[v_2(u_2 - S)]$, en donde $v_2(x)$ es la función de utilidad particular $v_2(x) = 1 - e^{-\alpha_2 x}$, con $\alpha_2 > 0$. La solución de esta ecuación es $p^+ = \frac{1}{\alpha_2} \ln M_S(\alpha_2)$. Así, el riesgo mencionado es asegurable bajo las condiciones mencionadas si, y sólo si, las constantes α_1 y α_2 satisfacen la relación

$$\frac{1}{\alpha_1} \ln M_S(\alpha_1) \leq \frac{1}{\alpha_2} \ln M_S(\alpha_2).$$

CAPÍTULO 5

MODELO COLECTIVO POISSON

En este capítulo retomamos el caso cuando el número de reclamaciones en el modelo colectivo sigue una distribución Poisson. En primer lugar explicaremos como se obtiene un modelo colectivo Poisson a partir del modelo individual. Después mostraremos cómo este modelo Poisson compuesto aproxima al modelo individual. Finalmente estudiaremos algunas propiedades interesantes y útiles del modelo colectivo Poisson.

5.1. La distribución poisson-Beta

Para el desarrollo de este capítulo comencemos presentando la definición de la distribución Poisson-Beta.

Definición 5.1. (Gómez 2009, p. 144). *Se dice que una variable aleatoria X sigue una **distribución Poisson-Beta** si admite la siguiente representación estocástica:*

$$X|\theta \approx Po(\phi\theta). \quad (5.1)$$

$$\theta \approx Be(a, b). \quad (5.2)$$

donde $Po(\phi\theta)$ representa una distribución de Poisson clásica con parámetro $\phi\theta$, $\phi > 0$, $0 < \theta < 1$ y $Be(a, b)$ representa una distribución Beta clásica con parámetros $a, b > 0$.

La función Beta esta dada por

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

y su densidad de probabilidad esta dada por

$$\text{Beta}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}; \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Una variable aleatoria X con la representación estocástica (5.1)-(5.2) se representará en adelante por $X \approx PB(a, b, \phi)$ y se dice que la variable aleatoria X sigue una distribución Poisson-Beta.

Incluimos a continuación propiedades básicas de esta distribución. Algunas de estas propiedades son conocidas y otras nuevas. La función generatriz de probabilidad de la variable aleatoria Poisson-Beta viene dada por:

$$G_x(z) = {}_1F_1(a; a+b; \phi(z-1)). \quad (5.3)$$

donde ${}_1F_1(a; c; x)$ representa la función confluyente hipergeométrica y que se conoce también como función de Kummer, se define por medio de la serie numérica:

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j x^j}{(c)_j j!}; \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$$

donde $(a)_j$ es el símbolo de Pochhammer, definido por $(a)_j = \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$, siendo $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ la función gamma. La función confluyente hipergeométrica admite también la siguiente representación integral:

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1} e^{xz} dz; \quad \text{donde } c > a > 0$$

La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria X que sigue la distribución Poisson-Beta, i.e. $X \approx PB(a, b, \phi)$, admite la siguiente representación.

$$\begin{aligned} Pr(X = x) &= \frac{\phi^x \Gamma(a+b)\Gamma(a+x)}{x! \Gamma(a)\Gamma(a+b+x)} {}_1F_1(a+x; a+b+x; -\phi) \\ &= \frac{\phi^x}{x!} \frac{a \cdots (a+x-1)}{(a+b) \cdots (a+b+x-1)} {}_1F_1(a+x; a+b+x; -\phi), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $x = 0, 1, 2, \dots$

Teniendo en cuenta que la distribución Beta es unimodal para valores $a > 1$, $b > 1$, se deduce que si se verifican esas condiciones la distribución Poisson-Beta es de nuevo unimodal.

El momento factorial de orden k puede obtenerse a partir de 5.3, y viene dado por:

$$\mu_{[k]}(X) = E[X(X-1)\dots(X-k+1)] = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+x)\phi^x}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+x)}, k = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

A partir de 5.5 se deducen las expresiones de la esperanza y la varianza, que vienen

dadas por:

$$E(X) = \frac{a\phi}{a+b}. \quad (5.6)$$

$$Var(X) = \frac{a\phi}{a+b} + \frac{ab\phi^2}{(a+b)^2(a+b+1)}, \quad (5.7)$$

y por tanto a partir de (5.6) y (5.7) se concluye que el modelo presenta sobredispersión.

Por otro lado, las probabilidades pueden obtenerse también de manera recursiva a partir de las probabilidades $Pr(X=0)$ y $Pr(X=1)$ utilizando la siguiente relación

$$(x+1)(x+2)p_{x+2} = (x+1)(x+a+b+\phi)p_{x+1} - \phi(x+a)p_x, \quad (5.8)$$

donde $p_x = Pr(X=x)$. Por otro lado, teniendo en cuenta el primer teorema de Kummer:

$${}_1F_1(a, c, x) = e^x {}_1F_1(c-a, c, -x),$$

se verifica que la función de masa de probabilidad 5.4 puede también ser escrita como:

$$Pr(X=x) = \frac{\phi^x \Gamma(a+b)\Gamma(a+x)}{x! \Gamma(a)\Gamma(a+b+x)} e^{-\phi} {}_1F_1(b, a+b+x, \phi),$$

y por tanto,

$$\frac{Pr(X = x + 1)}{Pr(X = x)} = \frac{\phi}{x + 1} \frac{a + x}{a + b + x} \frac{{}_1F_1(b, a + b + x + 1, \phi)}{{}_1F_1(b, a + b + x, \phi)}, \quad (5.9)$$

donde

$$Pr(X = 0) = e^{-\phi} {}_1F_1(b, a + b, \phi). \quad (5.10)$$

La expresión 5.9 permite por tanto obtener las probabilidades del modelo de manera recursiva.

En la representación estocástica (5.1)-(5.2), si nos preguntamos sobre la $\theta \setminus X$, los momentos posteriores se pueden obtener distribución condicional mediante la siguiente fórmula

$$E(\theta^r \setminus X = x) = \phi^r \frac{\Gamma(a + x + r)\Gamma(a + b + x)}{\Gamma(a + b + x + r)\Gamma(a + x)} \frac{{}_1F_1(a + x + r; a + b + x + r; -\phi)}{{}_1F_1(a + x; a + b + x; -\phi)}. \quad (5.11)$$

Si el número de reclamaciones de un asegurado perteneciente a una cartera de seguros sigue la distribución de Poisson con parámetro $\phi\theta$, la prima neta de riesgo es $P_R = \phi\theta$. Si se considera que la cartera es heterogénea y que sigue la distribución a priori (función estructura) Beta clásica, entonces la prima neta colectiva vendrá dada por:

$$P_c = \int_0^1 \phi \theta \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)} d\theta = \frac{a\phi}{a+b}.$$

5.2. Estimación

En esta Sección se proponen diversos métodos de estimación de los tres parámetros del modelo. Consideremos una muestra aleatoria simple x_1, \dots, x_n procedente de la distribución Poisson-Beta con función de cuantía 5.4, y sean $m_{[k]}(X)$, $k = 1, 2, 3$ las versiones muestrales de los momentos factoriales.

5.2.1. Estimadores basado en la frecuencia de cero y los dos primeros momentos

Resulta bien conocido que en las distribuciones empíricas de frecuencias correspondientes a carteras de seguros de automóviles, el valor más frecuente observado es el cero. Se propone entonces un método de estimación que tenga en cuenta este importante hecho empírico. Consideramos un método de estimación basado en la frecuencia de ceros y en los dos primeros momentos. El sistema a resolver está formado por tres ecuaciones. La primera ecuación es la formada por la frecuencia teórica de ceros 5.10 y la correspondiente frecuencia observada p_0 . Las otras dos ecuaciones las forman los dos primeros momentos teóricos junto con sus versiones muestrales. Se obtiene entonces el sistema:(Wilmot 2012, p. 104)

$$p_0 = e^{-\phi} {}_1F_1(b, a + b, \phi),$$

$$m_1 = \frac{a\phi}{a + b},$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\phi(a + 1)}{a + b + 1}.$$

Si en las dos últimas relaciones se despejan a y b en función de los momentos muestrales y de ϕ , se obtiene que:

$$a = \frac{m_1(m_2 - \phi m_1)}{\phi(m_1^2 - m_2)}, \quad (5.12)$$

$$b = \frac{(m_1 - \phi)(\phi m_1 - m_2)}{\phi(m_1^2 - m_2)}, \quad (5.13)$$

expresiones que sustituidas en la primera de las ecuaciones, dan lugar a una ecuación que sólo depende de ϕ , y puede resolverse numéricamente. Finalmente, sustituyendo este valor en (5.12) y (5.13) se obtienen los estimadores a y b .

Se propone a continuación estimadores de momentos obtenidos por medio de los momentos factoriales.

5.2.2. Estimadores de momentos

Se trata de un método de obtención de estimadores muy intuitivo. Básicamente, consiste en igualar los momentos poblacionales (que sean función del o los parámetros a estimar) con los momentos muestrales y despejar el parámetro a estimar.

Así, por ejemplo, la esperanza de una variable aleatoria se estimaría por la media muestral; la varianza, por la varianza muestral; etc.

La principal ventaja de este método es su simplicidad. Sin embargo, aunque los estimadores así obtenidos son consistentes, en general, no son centrados ni eficientes., considerando el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\mu_{[k]}(X) = m_{[k]}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.14)$$

Resolviendo 5.14 en a, b y ϕ , obtenemos los estimadores de momentos en forma cerrada: (Gómez 2009, p. 149).

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{-2(-m_1 m_2^2 + m_1^2 m_3)}{-m_1 m_2^2 + 2m_1^2 m_3 - m_2 m_3}, \\ \hat{b} &= \frac{2(m_1^2 - m_2)(m_1 m_2 - m_3)(m_1 m_3 - m_2^2)}{(m_1^2 m_2 - 2m_2^2 + m_1 m_3)(2m_1^2 m_3 - m_1 m_2^2 - m_2 m_3)}, \\ \hat{\phi} &= \frac{-m_1 m_2^2 + 2m_1^2 m_3 - m_2 m_3}{m_1^2 m_2 - 2m_2^2 + m_1 m_3}. \end{aligned}$$

Estos estimadores son consistentes y asintóticamente normales y pueden ser utilizados como valores iniciales en el método de estimación de máxima verosimilitud.

5.2.3. Estimación por máxima verosimilitud

La estimación por máxima verosimilitud es un método de optimización que supone que la distribución de probabilidad de las observaciones es conocida.

El logaritmo de la función de verosimilitud viene dada por,

$$\begin{aligned} l(a, b, \phi) &= n \log \Gamma(a + b) - n \log \Gamma(a) + n \bar{x} \log \phi + \sum_{i=1}^n \log \Gamma(a + x_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \log \Gamma(a + b + x_i) - \sum_{i=1}^n \log {}_1F_1(a + x_i; a + b + x_i; -\phi) - k, \end{aligned}$$

de donde se obtienen las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}
& n\psi(a+b) - n\psi(a) + \sum_{i=1}^n \psi(a+x_i) - \sum_{i=1}^n \psi(a+b+x_i) \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{{}_1F_1^{(0,1,0)}(a+x_i; a+b+x_i; -\phi) + {}_1F_1^{(1,0,0)}(a+x_i; a+b+x_i; -\phi)}{{}_1F_1(a+x_i; a+b+x_i; -\phi)} = 0; \\
& n\psi(a+b) - \sum_{i=1}^n \psi(a+b+x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{{}_1F_1^{(0,1,0)}(a+x_i; a+b+x_i; -\phi)}{{}_1F_1(a+x_i; a+b+x_i; -\phi)} = 0; \\
& \frac{n\bar{x}}{\phi} + \sum_{i=1}^n \frac{{}_1F_1(1+a+x_i; 1+a+b+x_i; -\phi)(a+x_i)}{{}_1F_1(a+x_i; a+b+x_i; -\phi)(a+b+x_i)} = 0.
\end{aligned}$$

donde $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ y ${}_1F_1^{(i,j,k)}$ representa las derivadas parciales de la función confluyente hipergeométrica. A pesar del aspecto aparentemente complejo de estas ecuaciones, el sistema puede resolverse sin dificultad por medio de los métodos numéricos disponibles en la mayoría de los paquetes comerciales de software Wolfram, (2010) Mathematica 8.

5.3. La distribución Poisson-Beta como distribución primaria

En esta Sección nos ocupamos del modelo de riesgo colectivo compuesto en el que la distribución primaria es la Poisson-Beta. Consideremos entonces la variable aleatoria $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ donde X_1, X_2, \dots, X_N son variables aleatorias mutuamente independientes, no negativas y donde las variables aleatorias X_1, X_2, \dots están idénticamente distribuidas con función de cuantía común $f(x_i) = f_i$. La distribución de la variable aleatoria S se denomina Poisson-Beta compuesta. Resulta bien conocido que la función característica de S viene dada por: (Gómez 2009, p. 150).

$$\varphi_S(t) = G_N[\varphi_X(t)] = {}_1F_1(a; a+b; \phi(\varphi_X(t) - 1)),$$

donde $\varphi_X(t)$ representa la función característica de la variable aleatoria X .

La distribución de S juega un papel importante en estadística actuarial cuando N representa el número de reclamaciones y X_i la cuantía asociada a la i -ésima reclamación, de modo que S representa la cantidad total reclamada. Resulta bien conocido que la función densidad de probabilidad de S viene dada por:

$$g_i = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_i^{*n}, \quad i > 0,$$

y $g_0 = G_N(f_0) = {}_1F_1(a; a+b; \phi(f_0-1))$, donde f_i^{*n} denota la convolución n -ésima f_i y $p_n = Pr(N = n)$ viene definida en la expresión 5.4. Los avances computacionales permiten hoy en día calcular los valores de g_i con una exactitud razonable. Sin embargo, para la mayoría de las distribuciones discretas existen fórmulas recursivas que permiten su cálculo de manera exacta. A continuación demostraremos que esto resulta también posible para el caso del modelo Poisson-Beta compuesto.

A partir de la expresión 5.8, suponiendo que la variable aleatoria N sigue la distribución Poisson-Beta, se puede demostrar que:

$$p_n = \left(1 + \frac{a+b+\phi-2}{n}\right) p_{n-1} - \frac{\phi(n+a-2)}{n(n-1)} p_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.15)$$

siendo $p_0 = e^{-\phi} {}_1F_1(b; a+b; \phi)$ mientras que

$$p_1 = \phi(a+1)/(a+b+1) {}_1F_1(b; a+b+1; \phi) / {}_1F_1(b; a+b+1; \phi) p_0.$$

Si en la expresión 5.15 hacemos $a = 1$, se obtiene la siguiente relación de recurrencia

$$p_n = \left(1 + \frac{b+\phi-1}{n}\right) p_{n-1} - \frac{\phi}{n} p_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Finalmente, el siguiente resultado proporciona una fórmula que permite el cálculo exacto de la distribución de la cantidad total reclamada.

Teorema 5.1. (Gómez 2009, p. 152). *Considérese la clase de distribuciones de masa de probabilidad que verifican la siguiente fórmula recursiva*

$$p_n = \left(1 + \frac{m}{n}\right) p_{n-1} + \frac{c}{n} p_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Supongamos que la variable aleatoria asociada a la i -ésima reclamación, con función de masa de probabilidad f_i , es de tipo discreto. Entonces, la función de masa de probabilidad de la cantidad total reclamada, $g_S(x_i) = g_i$ satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$g_i = p_0 + \frac{1}{1 - f_0} \left\{ p_1 f_i + \sum_{j=1}^i \left[\left(1 + \frac{mj}{i}\right) f_j + \frac{cj}{2i} f_j^{*2} \right] g_{i-j} - p_0 \sum_{j=1}^i \left(1 + \frac{mj}{i}\right) f_j \right\}, \quad i \geq 1$$

siendo $f_j^{*2} = \sum_{j=0}^i f_j f_{i-j}$, mientras que $g_0 = p_0$

Demostración. Partimos de la expresión:

$$g_1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_i^{*n} = p_0 + p_1 f_i + \sum_{n=2}^{\infty} p_n f_i^{*n}.$$

A continuación, utilizando las siguientes expresiones

$$f_j^{*n} = \sum_{j=0}^i f_j f_{i-j}^{*(n-1)},$$

$$f_j^{*n} = \frac{n}{i} \sum_{j=1}^i j f_j f_{i-j}^{*(n-1)},$$

$$f_j^{*n} = \frac{n}{ki} \sum_{j=1}^i j f_j^{*k} f_{i-j}^{*(n-k)}, \quad i = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots,$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} p_n f_i^{*n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{m}{n}\right) p_{n-1} + \frac{c}{n} p_{n-2} \right] f_i^{*n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} f_i^{*n} + m \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p_{n-1} f_i^{*n} + c \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} f_i^{*n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} \sum_{j=0}^i f_{i-j}^{*(n-1)} f_j + m \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p_{n-1} \frac{n}{i} \sum_{j=1}^i j f_j f_{i-j}^{*(n-1)} \\
&\quad + c \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p_{n-2} \sum_{j=1}^i j f_j^{*2} f_{i-j}^{*(n-2)} \\
&= \sum_{j=0}^i f_j \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} f_{i-j}^{*(n-1)} \\
&\quad + \frac{m}{i} \sum_{j=1}^i j f_j \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} f_{i-j}^{*(n-1)} \frac{c}{2i} \sum_{j=1}^i j f_{i-j}^{*(n-2)} \sum_{j=1}^i p_{n-1} j f_{i-j}^{*(n-1)} \\
&= \sum_{j=0}^i f_j (g_{i-j} - p_0) + \frac{m}{i} \sum_{j=1}^i j f_j (g_{i-j} - p_0) + \frac{c}{2i} \sum_{j=1}^i j f_j^{*2} g_{i-j}.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$g_i = p_0 + p_1 f_i + f_0 (g_i - p_0) + \sum_{j_1}^i \left[\left(1 + \frac{m j}{i}\right) f_j + \frac{c j}{2i} f_j^{*2} \right] g_{i-j} - p_0 \sum_{j=1}^i \left(1 + \frac{m j}{i}\right) f_j,$$

de donde se sigue el resultado □

La fórmula recursiva para la cantidad total reclamada para el modelo Poisson-Beta compuesto se obtiene haciendo $m = b + \phi - 1$ y $c = -\phi$ en el teorema anterior. Finalmente, se puede obtener una fórmula alternativa para el caso en que f_i sea continua, cambiando los correspondientes sumatorios por integrales.

En este apartado probaremos a través de diversos conjuntos de datos la utilidad del modelo Poisson-Beta propuesto. Los ejemplos consisten en tres conjuntos de datos utilizados en la literatura actuarial. El primer conjunto de datos aparece en Klugman (2014, p. 465). Estos datos representan el número de contratos de pólizas de seguros que han experimentado desde 0 hasta más de 12 reclamaciones. El segundo conjunto de datos ha sido utilizado por Willmot (2012, p. 123), y corresponde a reclamaciones de una póliza de seguro de automóviles recogida en Zaire en el año 2009. Estos datos han sido ajustados previamente utilizando, entre otras, las distribuciones Poisson, binomial negativa, Poisson-inversa Gaussiana y la distribución Poisson-Gamma. Finalmente, el tercer conjunto de datos se refiere al número de hospitalizaciones de un determinado grupo de empleados de una empresa, que aparece en Simon (2010, p. 47).

Todos los conjuntos de datos presentan sobredispersión, puesto que las varianzas muestrales son mayores que las respectivas medias. Por tanto, la distribución Poisson-Beta propuesta en este trabajo parece apropiada para ajustar dichos datos. Para el primer conjunto de datos, el cuadro 6.1 muestra los datos originales junto con los valores ajustados obtenidos mediante los tres métodos de estimación (método de la frecuencia de ceros y los dos primeros momentos factoriales (ZM), método de los momentos (MM) y método de máxima verosimilitud (ML)). Para el segundo conjunto de datos, el cuadro 6.3 incluye los valores observados y los ajustados mediante

máxima verosimilitud. Hay que señalar que para este conjunto de datos los métodos basados en momentos no proporcionan estimadores admisibles. Los cuadros 6.2 y 6.4 muestran diversos estadísticos, incluyendo el valor del estadístico χ^2 junto con los correspondientes p -valores, así como el valor del logaritmo de la función de verosimilitud. Todos los ajustes son bastante satisfactorios, de modo que no se rechaza la hipótesis nula y se mejoran los ajustes proporcionados por otros modelos clásicos. Finalmente, los cuadros 6.5 y 6.6 recogen, respectivamente, los datos y valores ajustados, así como el resumen de los estadísticos de ajuste para el tercer conjunto de datos. De nuevo los ajustes son bastante satisfactorios.

Cuadro 6.1: Frecuencias observadas y estimadas con el modelo Poisson-Beta mediante los tres métodos de estimación propuestos.

Número de reclamaciones	Observadas	Estimadas (ZM)	Estimadas (MM)	Estimadas (ML)
0	98	98.00	95.30	97.78
1	63	72.44	73.46	73.15
2	54	48.98	50.21	51.02
3	42	33.16	32.12	33.08
4	21	19.23	24.68	22.87
5	11	12.03	13.20	13.54
6	4	8.48	7.93	8.21
7	0	4.40	4.59	4.65
8	3	2.57	2.56	2.58
9	5	1.24	1.26	1.23
10	0	0.61	0.74	0.64
11	1	0.29	0.34	0.42
≥ 12	0	0.14	0.32	0.58

Cuadro 6.2: Resumen los ajustes para los datos del cuadro 6.1

Método	ZM	MM	ML
\hat{a}	0.931	1.229	1.066
\hat{b}	2.812	7.245	4.466
$\hat{\phi}$	7.208	12.459	9.291
χ^2	4.78	4.52	4.75
g.l	3	3	3
p -valor	18.86 %	21.05 %	19.10 %
L_{max}	-560.863	-560.826	-560.764

Cuadro 6.3: Frecuencias observadas y estimadas con el modelo Poisson-Beta mediante el método de máxima verosimilitud.

Número de reclamaciones	Observadas	Estimadas (ML)
0	3719	3719.22
1	232	229.88
2	38	39.92
3	7	8.41
4	3	1.93
5	1	0.46

Cuadro 6.4: Resumen de los ajustes para los datos del cuadro 6.3

Método	ML
\hat{a}	0.216
\hat{b}	848.403
$\hat{\phi}$	339.323
χ^2	1.43
g.l.	1
p -valor	23.17%
L_{max}	-1183.55

Cuadro 6.5: Hospitalizaciones observadas y ajustadas con el modelo Poisson- Beta mediante dos de los métodos de estimación propuestos.

Número de hospitalizaciones	Observadas	Estimadas (MM)	Estimadas (LM)
0	2659	2659.14	2659.07
1	244	243.45	243.62
2	19	19.80	19.68
3	2	1.50	1.50
+4	0	0.10	0.11

Cuadro 6.6: Resumen de los ajustes para los datos del cuadro 6.5

Método	MM	ML
\hat{a}	1.138	1.268
\hat{b}	14.076	60.519
$\hat{\phi}$	1.316	4.798
χ^2	0.30	0.63
g.l	1	1
p -valor	58.38 %	42.73 %
L_{max}	-969.067	-969.065

Durante el desarrollo de este trabajo se propuso la distribución Poisson-Beta para su aplicación en seguros individuales y en la teoría del riesgo colectivo.

A partir de lo desarrollado en los primeros capítulos se han obtenido las primas de riesgo colectiva. Basado en técnicas desarrolladas en las referencias se han estudiado propiedades del modelo colectivo, y utilizando los resultados expuestos en la presente tesis se han obtenido las estimaciones para la distribución de la cantidad total reclamada, suponiendo que la cuantía es de tipo discreto.

Siguiendo lo desarrollado por actuarios se ha obtenido métodos de estimación de momentos y de máxima verosimilitud para la distribución Poisson-Beta, la cuál utilizamos en las aplicaciones con datos reales de: dados el número de contratos de pólizas de seguro, número de reclamaciones por seguro vehicular y el número de hospitalizaciones de seguros médicos, que pone de manifiesto la importancia de esta distribución mixta respecto a los seguros generales ya que a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo se sucede frecuentemente en la realidad. Este trabajo de investigación servirá de base para el futuro análisis de la sobredispersión correspondiente a la distribución mixta Poisson-Beta, la misma que garantizará a la empresa aseguradora una estabilidad y crecimiento, para lo cuál se requeriría un alto número de datos de un mayor número de diversos eventos relacionados al tipo de seguro y análisis de riesgo.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Asmussen S.(2000), *Ruin probabilities*, World Scientific.
- [2] Beaver M. (2006), *Introduction to Probability and Statistics. Trece ava edición*, Cengage Learning.
- [3] Borovkov A. (2013) *Probability Theory*, Springer.
- [4] Buhlmann H. (1970) *Mathematical methods in risk theory*, Springer-Verlag. New York.
- [5] Buhlmann H., Gisler A. (2005) *A course in credibility theory and its applications*, Springer. New York.
- [6] Córdova M. (2003) *Estadística Descriptiva e Inferencial*, Editorial, librería Moshera S.R.L..
- [7] Daykin C. D., Pentikinen T., Pesonen M. (1994) *Practical risk theory for actuaries*, Chapman and Hall. London.
- [8] De Pril N. (1986) *On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model*, ASTIN Bulletin.
- [9] Gómez D. Sarabia A. (2009) *La distribución de Poisson-Beta: aplicaciones y propiedades en la teoría del riesgo colectivo*, Anales del Instituto de Actuarios Españoles.

- [10] Gujarati D.(2009) *Econometría*, McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- [11] Gurland J.(1958) *A generalized class of contagious distributions*, Biometrics.
- [12] Harris B. (1966) *Theory of probability*, Addison-Wesley.
- [13] Katti S. (1966) *Interrelations among generalized distributions and their components*, Biometrics.
- [14] Klenke A. (2014) *Probability Theory A Comprehensive Course*, Springer-Verlag. New York.
- [15] Klugman S. A., Panjer H. H., Willmot G. E. (2014) *Loss models: from data to decisions*, Third edition. Wiley.
- [16] Krantz S. (2015) *Convex Analysis*, Springer.
- [17] Wolfram, (2010) Mathematica 8.
http://www.wolfram.com/broadcast/screencasts/handson_startspanish
- [18] Mikosch T. (2009) *Non-Life Insurance Mathematics. An introduction with the Poisson Process*, Springer.
- [19] Rincón L. (2006) *Curso intermedio de PROBABILIDAD*, Circuito Exterior de C.U. 04510 México DF.
- [20] Rincón L. (2012) *Introducción a la teoría de riesgo*, Circuito Exterior de C.U. 04510 México DF.
- [21] Rolski T., Schmidli H., Teugels J. (1999) *Stochastic processes for insurance and finance*, John Wiley & Sons.
- [22] Simon L. (2010) *Fitting Negative Binomial Distribution by the Method of Maximum Likelihood*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society.
- [23] Williams D. (1991) *Probability with martingales*, Cambridge University Press.
- [24] Willmot F. (2012) *On Posterior Probabilities and Moments in Mixed Poisson Processes*, Scandinavian Actuarial Journal.